



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

MODELOS UNIFICADOS DE MATERIA OSCURA,
ENERGÍA OSCURA E INFLACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JOSUÉ DE SANTIAGO SANABRIA

TUTOR PRINCIPAL

JORGE LUIS CERVANTES COTA
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

MIEMBROS DE COMITÉ TUTOR

AXEL RICARDO DE LA MACORRA PETERSSON MORIEL
INSTITUTO DE FÍSICA

DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

Modelos Unificados de Materia Oscura, Energía Oscura e Inflación

por Josué De Santiago Sanabria

En el presente trabajo estudiaremos modelos en que los fenómenos de energía oscura, materia oscura e inflación, se explican bajo un esquema unificado. Estos tres fenómenos constituyen los temas más activos de investigación en la cosmología actual debido a su carácter dominante en la evolución del universo en distintas de sus etapas y a que muchas de sus características aún son desconocidas. En particular, el desconocimiento actual del origen de estos fenómenos nos lleva a proponer dos modelos particulares; en el primero los tres fenómenos son producidos como resultado de la evolución dinámica de un único campo escalar, mientras que en el segundo se considera a la materia y energía oscuras como resultado de la interacción entre un fluido de materia y la energía de vacío. Este segundo modelo posteriormente se identifica a otros modelos previamente estudiados en la literatura como el gas de Chaplygin y los campos escalares.

Abstract

Unified Models of Dark Matter, Dark Energy and Inflation

by Josué De Santiago Sanabria

In the present work, we will study models in which the phenomena of dark matter, dark energy and inflation are explained under a unified scheme. These three phenomena are some of the most active research subjects in modern cosmology due to its dominant role in different stages of the evolution of the universe, and due to the fact that many of their characteristics are still unknown. The fact that the origin of these phenomena is unknown, leads us propose two particular models. In the first one, the three phenomena are produced as a result of the dynamical evolution of a single scalar field. On the second model, it is considered that dark matter and dark energy are the result of the interaction between a matter fluid and the vacuum energy. The later model will be identified with other models previously considered in the literature, as the Chaplygin gas and the scalar fields.

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi gratitud a mi tutor Jorge Cervantes por asesorarme a través de este trabajo de investigación. Ha sido un camino largo desde hace 5 años cuando decidimos iniciar este proyecto y durante ese tiempo él ha sido un gran apoyo. Agradezco la confianza que me ofreció al darme gran libertad al realizar este proyecto, al mismo tiempo que me apoyaba con su experiencia y conocimientos.

También agradezco a David Wands quien fue mi asesor durante mi estancia en Inglaterra. Por dedicar tiempo a mis dudas académicas y también por guiarme en un país donde muchas cosas eran nuevas para mí.

A Yuting Wang, mi colaboradora en dos de los artículos en que se basa este trabajo. Admiro su dedicación, la cual fue fundamental para llevar a buen término estos trabajos.

A los miembros de mi comité tutorial, Darío Núñez y Axel de la Macorra. A Darío le agradezco por ser una persona tan comprometida con sus estudiantes y siempre tener unas palabras amables para todos.

Agradezco a aquellos cuyas discusiones han enriquecido este trabajo: Mario Rodríguez, Alejandro Avilés, Juan Carlos Hidalgo y a todos los miembros de Instituto Avanzado de Cosmología. De ellos he aprendido muchas cosas gracias a los talleres y escuelas organizados estos años.

Agradezco a los sinodales que revisaron este trabajo y lo enriquecieron con sus opiniones: Darío Núñez, Jaime Besprosvany, Jorge Cervantes, Juan Carlos Hidalgo, Luis Ureña, Marcelo Salgado y Tonatiuh Matos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por generar las condiciones para el desarrollo de la investigación científica en el país. Al Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares donde siempre hubo un espacio para mí y por permitirme usar su equipo de cómputo para mi investigación. A la Universidad de Portsmouth por su hospitalidad durante mi estancia y por darme la oportunidad de convivir con una de las mejores comunidades de cosmólogos del mundo. A CONACYT por la beca de doctorado número 210405, gracias a la cual pude realizar mis estudios, hacer mi estancia en el extranjero y asistir a congresos.

A mi familia y amigos, que me apoyaron durante la elaboración de este trabajo. A mis padres y mi hermana con los que siempre conté. A Arturo por ser un gran compañero y la persona con quien siempre pude hablar. A Oziel por escucharme a pesar de que estábamos lejos.

Gracias a los que de una u otra forma me han ayudado en la realización este trabajo.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
1. Introducción	1
1.1. Notación y convenciones en relatividad general	1
1.2. Dinámica de fluidos	2
1.3. Cosmología básica	5
1.4. Campo escalar no canónico	6
1.5. Perturbaciones cosmológicas	9
1.6. Función de transferencia de materia	12
2. Sistema dinámico	15
2.1. Sistema autónomo para $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$	16
2.2. Puntos críticos	18
2.2.1. Puntos críticos en infinito	23
2.3. Simetría en el sistema autónomo	25
2.4. Análisis del espacio fase	28
2.5. Sistema autónomo durante un Gran Rebote	32
2.6. Condiciones para un Gran Rebote	34
2.7. Conclusiones	39
3. Unificación	41
3.1. Lagrangiano no canónico	42
3.2. Soluciones cosmológicas y espacio fase	43
3.3. Lagrangianos puramente cinéticos	47
3.4. Energía y materia oscura	48
3.4.1. Casos particulares	51
3.5. Modelo de Scherrer	53
3.6. Perturbaciones lineales	56
3.7. Inflación y universo temprano	57

3.7.1. Inflación debida al campo escalar	59
3.7.2. Fin de inflación	62
3.8. Conclusiones	66
4. Vacío interactuante	69
4.1. Energía del vacío	70
4.2. Ecuaciones de balance de energía y momento	71
4.3. Ecuaciones cosmológicas	73
4.3.1. Fondo homogéneo	73
4.3.2. Perturbaciones lineales	74
4.3.3. Perturbaciones invariantes de norma	75
4.4. Fluido efectivo	77
4.4.1. Fluido barotrópico	78
4.4.2. Fluidos geodésicos	80
4.5. Gas de Chaplygin	82
4.5.1. Modelo barotrópico	84
4.5.2. Modelo geodésico	90
4.6. Modelos autointeractuantes	93
4.7. Campo escalar como un modelo de vacío interactuando con un fluido barotrópico	96
4.8. Conclusiones	99
5. Conclusiones generales	101
A. Símbolos y abreviaciones	107
B. Simetrías	109
Bibliografía	113

Prefacio

Las pruebas observacionales que soportan la existencia de materia y energía oscuras han llevado a la creación del actual modelo estándar de la cosmología. En este modelo introduce como componentes del universo a la materia oscura fría y una constante cosmológica, por lo que es conocido como Λ CDM (Λ *Cold Dark Matter*). Frente a otros modelos, éste tiene la ventaja de ser capaz de explicar con el mínimo número de parámetros el amplio rango de observaciones existentes hasta el momento; sin embargo, tiene diversos problemas tanto teóricos como observacionales, que justifican la búsqueda de modelos alternativos para dar luz sobre los diversos problemas encontrados. Dichas modificaciones deberán ser contrastadas con los datos y comprobarse, al menos, que sean tan exitosas como Λ CDM en los ámbitos en que éste lo es.

La inflación por su parte, fue propuesta originalmente para solucionar diversos problemas de la teoría de la gran explosión [1, 2] y es actualmente el mecanismo más exitoso para producir las condiciones iniciales requeridas por el modelo cosmológico estándar para funcionar. En particular predice correctamente la forma de las perturbaciones primordiales que dieron origen a la estructura del universo y a las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB). La poca información que se tiene acerca de ese periodo del universo, hace que exista una gran cantidad de modelos inflacionarios con diferentes orígenes; sin embargo, el aumento constante en la precisión de las mediciones cosmológicas [3, 4] permite poner cada vez más restricciones a estos modelos y al mismo tiempo aporta evidencias de que este mecanismo en efecto ocurrió.

Estos tres fenómenos (energía oscura, materia oscura e inflación) han sido estudiados observacionalmente debido a sus efectos gravitacionales en la evolución del universo; sin embargo, pese a que la precisión de estas observaciones aumenta rápidamente, aún existe un gran espacio de posibilidades para su comportamiento. Por otro lado aún no se cuenta con un modelo único del origen microscópico de ninguno de ellos. Para explicar estos fenómenos será necesario modificar la relatividad general o el modelo estándar de partículas.

El intento de unificación que llevamos a cabo en este trabajo es una idea que ya se ha tratado previamente en la literatura [5–13]. El hecho de que estos fenómenos sean considerados

como separados en la cosmología estándar proviene de que sus efectos se vuelven importantes en épocas distintas del universo (a partir de $z = 3400$ [4] para la materia oscura y $z = 0.5$ [14] para la energía oscura), además de que tienen efectos opuestos en la expansión del universo pues la energía oscura lo acelera mientras que la materia oscura lo desacelera, y por último por el hecho puramente histórico de que fueron descubiertos en momentos distintos. Sin embargo solo se ha medido el efecto gravitacional de ambos componentes, el cual no es suficiente para señalarlos como separados [15]. Aunque no hay que olvidar que el modelo estándar de la cosmología actual (Λ CDM) en que la energía oscura se explica como una constante cosmológica y la materia oscura como un fluido tipo polvo, se mantiene como el modelo más simple que explica todas las observaciones y por tanto es favorecido por el principio de la navaja de Ockham. De aquí viene la idea desarrollada en el capítulo 4 de modificar el modelo cosmológico estándar introduciendo una energía del vacío que, a diferencia de la constante cosmológica, pueda depender del tiempo gracias a su interacción con otros tipos de materia; esto implica necesariamente que cuando se estudie su comportamiento a nivel no homogéneo también dependa de la posición, pero sin agregar nuevos grados de libertad.

El hecho de que durante el periodo inflacionario y, posteriormente, durante el periodo actual se presente en el universo una aceleración positiva sugiere que ambos periodos están dominados por un tipo similar de materia. Por ello proponemos en este trabajo que se trate del mismo campo. Sin embargo, esta unificación se lleva a cabo con mayor dificultad que la primera. Esto porque la gran diferencia en los tiempos cósmicos de ambos fenómenos implica una disparidad enorme en las escalas de energía de la materia que los produce. Como veremos en el trabajo, esta disparidad se explica incluyendo términos separados para dichos fenómenos en el Lagrangiano del campo escalar.

La unificación de los tres fenómenos ha sido investigada en diversos trabajos anteriores. Entre ellos se encuentra el trabajo de Liddle y Ureña-López [5], donde un único campo escalar canónico permite la unificación, y que ha sido revisado y extendido en [6–9]. Otros modelos de unificación incluyen [10] usando un campo escalar tipo *phantom*, y [11] usando la compactificación del modelo 6-dimensional de Salam-Sezgin de supergravedad, donde se incluye un análisis del espectro de potencias que poseerían las ondas gravitacionales para ese caso. Los trabajos en los que nos basamos para la unificación triple en el capítulo 3 incluyen la propuesta de Bose y Majumdar [12, 13] de unificar los tres fenómenos basados en un campo escalar con término potencial cuadrático y término cinético modificado incluido en el trabajo de Chimento [16]. Dicho trabajo es extendido en el capítulo 3 y un análisis del sistema dinámico asociado es llevado a cabo en el capítulo 2.

En los últimos años las observaciones relacionadas con el universo han modificado la forma de estudiarlo. La cosmología ha pasado de ser una ciencia con grandes incertidumbres en sus análisis, a la actualmente conocida como «cosmología de precisión». Nuevos y más precisas observaciones del universo nos han llevado a entender más su comportamiento y hacernos preguntas cada vez más particulares acerca de éste. En el presente trabajo estudiamos diversas de estas modificaciones. Observamos además que no es posible ignorar el

éxito del modelo estándar, y muchas veces la comparación con los datos observacionales restringirán las teorías alternativas a regiones en su espacio de parámetros en que son observacionalmente indistinguibles de Λ CDM . Sin embargo es muy importante analizar las posibles consecuencias observacionales de los nuevos modelos debido a que, en la era de la cosmología de precisión, algunas de estas consecuencias podrían ser medidas en un futuro no muy lejano.

Para estudiar a estos fenómenos existen dos posibles enfoques; uno de ellos consiste en elegir por alguna consideración teórica una modificación particular a relatividad general o una extensión del modelo estándar de partículas y buscar dentro del nuevo esquema qué nuevo efecto pueden dar lugar a los fenómenos mencionados. Este enfoque tiene la desventaja de que actualmente existen una gran cantidad de modelos de este tipo, muchos de ellos, a pesar de poder reproducir estos fenómenos, también predicen muchos otros que aún no han sido observados, y por otro lado también incluyen muchos grados de libertad que no pueden ser fijados con las observaciones actuales. Desde este punto de vista si uno de estos modelos lograra predecir uno o varios de los fenómenos mencionados a través de un número mínimo de grados de libertad, el sentido de economía permitiría situar a dicho modelo como un candidato fuerte para la explicación de los fenómenos.

Un segundo enfoque, sería el fenomenológico en que se proponen esquemas que den lugar a las observaciones, sin tomar en cuenta la posible teoría subyacente. Este enfoque tiene la ventaja de que permite estudiar el comportamiento general de distintas clases enteras de modelos simultáneamente. Además, al estar más cercano a las observaciones permite entender mejor los mecanismos que dan lugar a estos fenómenos aun sin conocer la teoría fundamental. Este será el enfoque que tomaremos en el presente trabajo. Para ello haremos diversas propuestas para explicar a los fenómenos en cuestión, donde la validez de dichas explicaciones dependerá de su capacidad de reproducir satisfactoriamente las observaciones, y en segundo lugar de su economía en términos de parámetros libres. Los modelos obtenidos bajo este procedimiento provendrán de una teoría fundamental que no se investiga en el presente trabajo.

Este enfoque fenomenológico tiene libertad de elección al explicar la materia oscura, energía oscura e inflación como efectos de una gravedad modificada o de un nuevo tipo de materia. En este trabajo consideraremos estos fenómenos como efectos de un tipo de materia, por lo cual introduciremos una modificación al tensor de energía-momento en las ecuaciones de campo. En los capítulos 2 y 3 pensaremos en esta materia como un tipo de campo escalar, mientras que en el capítulo 4 como una forma de energía del vacío.

En el capítulo 1 se tratan algunos temas básicos de la cosmología moderna que se ocuparán en el resto del trabajo, y que se incluyen aquí como referencia y con el fin de fijar las convenciones respectivas. Los siguientes capítulos de esta tesis están basados en las publicaciones de mi autoría que dan soporte a esta tesis, ver referencias [17–24]. El capítulo 2 trata sobre el análisis dinámico de las ecuaciones cosmológicas asociadas a un universo compuesto por

algún tipo de fluido barotrópico y un campo escalar no canónico; se incluyen los puntos críticos del sistema y su estabilidad, esto basado en la referencia [19]. En el capítulo 3 se estudia la posibilidad de que una subclase de estos campos escalares sea la responsable de la unificación de los tres fenómenos, inflación, energía y materia oscuras ref. [17, 18, 23, 24]. Por último, en el capítulo 4 se estudia un segundo tipo de modelos capaces de unificar la energía y materia oscuras. Estos modelos consisten en la existencia de una densidad de vacío que interactúa con algún fluido de materia; se demuestra que estos modelos pueden generalizar el popular modelo de unificación conocido como gas generalizado de Chaplygin y también verse como los campos escalares estudiados en la primer parte de la tesis, esto basado en las referencias [20–22]. Las conclusiones se darán para cada uno de los capítulos individualmente.

Introducción

En este capítulo revisaremos los temas básicos para entender el resto del trabajo. La mayor parte de los temas tratados aquí se encuentran explicados con mayor amplitud en libros estándar de Relatividad General y Cosmología o en artículos de revisión de estos temas. Estos temas son incluidos aquí para fijar las convenciones apropiadas y como referencia para el resto del trabajo.

1.1. Notación y convenciones en relatividad general

A lo largo de este trabajo se usará la convención, incluida en la mayoría de los textos de relatividad, de escribir a las coordenadas en el espacio tiempo con índices griegos x^α y a las coordenadas espaciales con índices latinos x^i , donde α va de cero a tres e i de uno a tres. También se usará la convención de Einstein para la suma de índices repetidos, por lo que el elemento de línea se podrá escribir simplemente como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

donde el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tendrá una signatura $(-, +, +, +)$ por lo que los segmentos temporales tendrán un elemento de línea negativo. Hay que señalar que esta convención no es adoptada universalmente en los trabajos de cosmología, y en muchos de ellos se usa la signatura $(+, -, -, -)$.

El tiempo propio τ está dado en términos del elemento de línea como

$$d\tau^2 = -ds^2. \quad (1.2)$$

La derivada con respecto a él a menudo se calculará como

$$\frac{d}{d\tau} = u^\mu \nabla_\mu, \quad (1.3)$$

donde u^μ es la velocidad dada por $dx^\mu/d\tau$. La derivada respecto al tiempo cósmico se denotará por simplicidad con un punto

$$(\cdot) = \frac{d}{dt}. \quad (1.4)$$

Otras cantidades geométricas útiles incluyen el operador de proyección ortogonal al vector u^μ , dado por $\mathcal{P}_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + u_\mu u^\nu$; la razón de expansión asociada a un campo vectorial u^μ dada por

$$\Theta = u^\mu{}_{;\mu}; \quad (1.5)$$

la deformación cortante asociada a este mismo campo

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_\mu^\alpha \mathcal{P}_\nu^\beta (u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}) - \frac{1}{3} \mathcal{P}_{\mu\nu} \Theta; \quad (1.6)$$

y por último su aceleración $a^\mu = du^\mu/d\tau$.

Usaremos la convención común en cosmología de hacer las constantes $c = \hbar = 1$. Con ello, los intervalos temporales y espaciales pueden medirse con las mismas unidades, correspondientes al inverso de la energía. Así, la densidad de energía está dada en unidades de energía a la cuarta potencia; por ejemplo, la densidad de energía oscura actualmente es alrededor de $(10^{-3} eV)^4$. Esta densidad puede convertirse a unidades del sistema internacional multiplicando por los factores apropiados de c y \hbar ; para el caso de la energía oscura se obtiene una densidad de energía del orden de 1 Joule/km³.

La gravedad está dada por la ecuación de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

donde la masa de Planck reducida está dada por $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2}$, y los tensores $R_{\mu\nu}$ y R provienen de las sucesivas contracciones de los índices del tensor de Riemann, el cual está dado por

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\nu\beta,\alpha}^\mu - \Gamma_{\nu\alpha,\beta}^\mu + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma. \quad (1.8)$$

1.2. Dinámica de fluidos

El tensor de energía-momento de un fluido perfecto está dado por

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \rho) u_\mu u_\nu, \quad (1.9)$$

donde P es la presión del fluido y ρ su densidad. De aquí se puede observar que la densidad de energía propia ρ y la velocidad de un fluido u^μ corresponden al eigenvalor y eigenvector del tensor de energía-momento respectivamente

$$T_\nu^\mu u^\nu = -\rho u^\mu. \quad (1.10)$$

Siguiendo a la referencia [25] consideraremos esta relación como la definición de la velocidad y densidad, y la usaremos para obtener estas propiedades en los campos escalares (Sección 1.4) y en el vacío (Capítulo 4); de este último encontraremos que la velocidad no está bien definida.

El tensor de energía-momento total satisface la regla de conservación

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.11)$$

En caso de encontrarse presentes varios fluidos I , sus respectivas divergencias no necesariamente se anularán individualmente, sino que serán iguales a los vectores de transferencia de energía $Q_{(I)}^\mu$ de la forma

$$\nabla^\alpha T_{(I)}^{\mu\nu} = Q_{(I)}^\nu, \quad (1.12)$$

donde, de la ecuación de conservación, su suma total es cero

$$\sum_I Q_{(I)}^\nu = 0, \quad (1.13)$$

y en el caso de que los fluidos no intercambien energía, estos vectores serán cero individualmente.

La regla de conservación puede separarse en una componente a lo largo de la velocidad del fluido y una ortogonal a ésta. La primera corresponde a la expresión relativista de la ecuación de continuidad

$$u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = -(\rho + P)\Theta - \frac{d\rho}{d\tau} = 0, \quad (1.14)$$

donde Θ proviene de la definición (1.5) correspondiente a la razón de expansión del fluido, mientras la segunda corresponde a la ecuación de balance de momentos, también llamada ecuación de Euler

$$\mathcal{P}_\nu^\sigma \nabla_\mu T^{\mu\nu} = (\rho + P) \frac{du^\sigma}{d\tau} + D^\sigma P = 0, \quad (1.15)$$

donde $D^\sigma = \mathcal{P}^{\sigma\nu} \nabla_\nu$.

Para el caso en que el tensor de energía-momento tiene la contribución de varios fluidos, los vectores de interacción de energía definidos en la ecuación (1.12) se pueden descomponer en la componente en la dirección de la velocidad total y la ortogonal (véase [25–27]) como

$$Q_{(I)}^\nu = Q_{(I)} u^\nu + f_{(I)}^\nu, \quad (1.16)$$

donde la componente ortogonal cumple que $f_\mu u^\mu = 0$ y u^μ es el eigenvalor del tensor de energía-momento total. De esta división tendremos que las ecuaciones de continuidad individuales se escriben como

$$(\rho_{(I)} + P_{(I)})\Theta + \frac{d\rho_{(I)}}{d\tau} = Q_{(I)}, \quad (1.17)$$

donde $P_{(I)}$ es la presión del fluido (I). Por su parte las ecuaciones de balance de momentos se escribirán

$$(\rho_{(I)} + P_{(I)}) \frac{du^\sigma}{d\tau} + D^\sigma P_{(I)} = f_{(I)}^\sigma, \quad (1.18)$$

donde $\sum_I Q_{(I)} = 0$ y $\sum_I f_{(I)}^\sigma = 0$. De estas ecuaciones se puede observar que los términos $Q_{(a)}$ miden la transferencia de energía entre los diversos fluidos, mientras que los $f_{(a)}^\sigma$ miden la fuerza, o transferencia de momento entre ellos. En el capítulo 4 analizaremos las ecuaciones de continuidad y de balance de energía para el caso en de dos fluidos interactuantes donde uno de ellos es el vacío.

Para obtener la evolución de un sistema particular, además de la ecuación de Einstein, es necesario especificar la ecuación de estado de los fluidos. Un caso común es tener fluidos con ecuación de estado barotrópica, en que la presión es función únicamente de la densidad

$$P = P(\rho). \quad (1.19)$$

Este tipo de ecuaciones de estado serán satisfechas por los campos escalares puramente cinéticos analizados en la sección 3.3 y, bajo las condiciones analizadas en la sección 4.4.1, por el sistema interactuante de un fluido con el vacío. En estos fluidos, la velocidad del sonido es única y está bien definida como

$$c_{baro}^2 = \frac{dP}{d\rho} = P'(\rho). \quad (1.20)$$

por lo que, si P' es negativa, estos fluidos son inestables. En [28] se demuestra además que estos fluidos sirven para unificar a la materia oscura con la energía oscura solo en el caso en que son indistinguibles del modelo Λ CDM. Esto se observa pues, para formar la estructura del universo, el fluido debe tener una velocidad del sonido mucho menor que la velocidad de la luz $c_{baro}^2 \ll c^2$,¹ lo que restringe la variación de $P(\rho)$ a una constante, que es de hecho la constante cosmológica.

Un caso de este problema se observa para el del gas generalizado de Chaplygin [30]. Este gas obedece una ecuación de estado barotrópica dada por

$$P_{gCg} = -A\rho_{gCg}^{-\alpha}. \quad (1.21)$$

Aquí α y A son constantes, la primera adimensional y la segunda con unidades $[A] = m^{4(1+\alpha)}$. En las referencias [31] y [32] se demuestra que el parámetro α está altamente restringido a la región en que la presión es aproximadamente constante, $-10^{-5} \ll \alpha \ll 10^{-4}$. Por ello, en la sección 4.5, buscaremos una versión no barotrópica del gas en que la ecuación de estado (1.21) solo se satisface a nivel de la cosmología homogénea; en esta versión la velocidad de sonido del fluido se hará cero, lo cual permitirá reducir las cotas al parámetro α .

¹Cuando el fluido tiene más de un grado de libertad podría formar estructura a pesar de tener una velocidad del sonido alta, como ocurre en los modelos de materia oscura escalar [29].

Los fluidos barotrópicos más usados en cosmología son aquellos en que la presión es proporcional a la densidad

$$P = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.22)$$

donde γ es constante ². Para el caso del vacío $\gamma = 0$, ya sea tipo constante cosmológica o vacío interactuante como el que estudiaremos en el capítulo 4; para un fluido tipo polvo como el usado para modelar a la materia oscura fría y a la materia bariónica una vez que se desacopla de la radiación tenemos $\gamma = 1$; para la radiación $\gamma = 4/3$; y $\gamma = 2$ corresponde al fluido tipo *stiff* o duro. En fluidos no barotrópicos también usaremos el parámetro γ definido como

$$\gamma = \frac{\rho + P}{\rho}, \quad (1.23)$$

en particular en el análisis del capítulo 2.

1.3. Cosmología básica

Las suposiciones de isotropía y homogeneidad para el universo nos llevan a un espacio que puede describirse por el sistema de coordenadas (t, r, θ, φ) con el elemento de línea de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (1.24)$$

El signo de k especifica la geometría de las subvariedades con tiempo constante, k positiva corresponde a 3-esferas, $k = 0$ corresponde a subvariedades planas y $k < 0$ a generalizaciones 3-dimensionales de una silla de montar. Las suposiciones de isotropía y homogeneidad, por lo tanto, reducen los elementos libres de la geometría del universo a la constante k y la función $a(t)$ conocida como factor de escala.

El tensor de Ricci para este espacio está dado por

$$R^0_0 = \frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1.25)$$

$$R^i_j = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right) \delta^i_j, \quad (1.26)$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (1.27)$$

con lo que podemos observar que el caso $k = 0$, aunque corresponde a subvariedades espaciales planas, no corresponde a un espacio-tiempo plano.

²Es común en los textos de cosmología usar también el parámetro $\omega = \gamma - 1$. Aquí usaremos γ ya que esto simplificará las expresiones en el capítulo 2.

Las ecuaciones de Einstein asociadas a esta geometría son conocidas como ecuaciones de Friedmann. La primera de ellas, correspondiente a la componente (0, 0), tiene la expresión

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_{\text{Pl}}^2} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.28)$$

donde el factor de Hubble está dado por $H = \dot{a}/a$ por lo que esta ecuación diferencial es de primer orden en el factor de escala. La ecuación asociada a la componente (i, i) es de segundo orden en el tiempo y está dada por

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2}(\rho + P) + \frac{k}{a^2}. \quad (1.29)$$

En vez de usar esta ecuación es común usar la ecuación de conservación de energía-momento, que puede escribirse como

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (1.30)$$

De las ecuaciones (1.28 - 1.30), únicamente dos son linealmente independientes y al agregarse una ecuación de estado permiten calcular las tres funciones independientes de este sistema, a , ρ y P como función del tiempo.

La ecuación (1.28) también es a menudo escrita a través de los parámetros

$$\rho_c \equiv 3M_{\text{Pl}}^2 H^2, \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.31)$$

con que puede reescribirse como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.32)$$

Para el fluido barotrópico, la ecuación de continuidad (1.30) puede integrarse para dar $\rho \propto a^{-3\gamma}$. Además, si la cosmología es plana y solo está presente un tipo de fluido, es posible obtener al factor de escala como función del tiempo cósmico $a(t) \propto (t - t_0)^{\frac{2}{3\gamma}}$, excepto cuando $\gamma = 0$ en cuyo caso la evolución conocida como solución de *de Sitter* corresponde a una exponencial $a(t) \propto e^{Ht}$, donde el factor de Hubble H es constante para este caso y está dado en términos de la constante cosmológica $H = \sqrt{\Lambda/3}$.

1.4. Campo escalar no canónico

La forma canónica del Lagrangiano de un campo escalar φ está dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi), \quad (1.33)$$

la cual es obtenida a partir de los requerimientos de que la teoría tenga una interpretación de partícula después de su cuantización y que pueda ser resuelta en el límite clásico a partir de condiciones de frontera apropiadas. El primer término corresponde a la parte cinética y el

segundo a la potencial. Para el caso en que el potencial es una función cuadrática de la forma $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon dada por

$$m^2\varphi - \square\varphi = 0. \quad (1.34)$$

A lo largo de este trabajo, sin embargo, usaremos una forma generalizada de este Lagrangiano; para ello definiremos al término cinético como

$$X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi, \quad (1.35)$$

y el Lagrangiano será una función arbitraria de este término y el campo

$$\mathcal{L} = P(X, \varphi). \quad (1.36)$$

Este tipo de campos escalares con Lagrangianos no canónicos fueron propuestos por primera vez en cosmología por Armendáriz, Damour y Mukhanov en [33], como candidatos para producir inflación. Casi inmediatamente, surgieron estudios donde este tipo de campos escalares eran propuestos como candidatos de energía oscura [34–36]; dichos campos fueron designados con el nombre de k-esencia. Estos modelos luego han sido usados en trabajos en que se propone la unificación de materia oscura y energía oscura [16, 28, 37, 38].

La idea original parte de la acción efectiva de teoría de cuerdas [39, 40], para bajas energías. Esta acción para un único campo escalar en cuatro dimensiones y en el marco de referencia de las cuerdas se escribe como

$$S_{ef} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left\{ B_g(\varphi)\hat{R} + B_\varphi^{(0)}(\varphi)(\hat{\nabla}\varphi)^2 - \alpha' \left[c_1^{(1)} B_\varphi^{(1)}(\varphi)(\hat{\nabla}\varphi)^4 + \dots \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2) \right\} \quad (1.37)$$

donde α' está relacionada con la escala de longitud de la cuerda a través de $\alpha' = \lambda_s/2\pi$. Una transformación conforme con $g_{\mu\nu} = B_g(\varphi)\hat{g}_{\mu\nu}$ lleva al sistema de referencia de Einstein, en que la acción tiene la forma

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 R + K(\varphi)X + L(\varphi)X^2 \right], \quad (1.38)$$

donde X está definida en (1.35). Aquí las funciones K y L están dadas en términos de los acoplamientos originales B_g , $B_\varphi^{(0)}$ y $B_\varphi^{(1)}$.

A continuación analizaremos las ecuaciones de movimiento de estos campos que usaremos a lo largo del trabajo. La ecuación de Euler-Lagrange para el Lagrangiano (1.36) está dada por la expresión usual

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\varphi_{,\mu})} \right) = 0. \quad (1.39)$$

Sustituyendo la forma del Lagrangiano obtenemos la ecuación de campo como

$$P_\varphi(X, \varphi) + P_X(X, \varphi)\square\varphi - 2XP_{X\varphi}(X, \varphi) - P_{XX}(X, \varphi)\varphi_{,\mu\nu}\varphi^{,\mu}\varphi^{,\nu} = 0, \quad (1.40)$$

donde los subíndices X y φ denotan las derivadas parciales del Lagrangiano con respecto a estas variables. Es fácil comprobar que cuando el Lagrangiano está dado por la forma canónica con un potencial cuadrático, es decir $P = X - m^2\varphi^2/2$, se recupera la ecuación de Klein-Gordon (1.34).

El tensor de energía momento se calcula usando la relación

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.41)$$

con lo que obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} P_X(X, \varphi) + g_{\mu\nu} P(X, \varphi). \quad (1.42)$$

Siguiendo lo señalado en la sección (1.2), es posible interpretar al campo escalar como un fluido perfecto, aunque veremos que esta interpretación es bastante limitada. La densidad del campo está dada por el eigenvalor del tensor de energía momento dado por

$$\rho = 2XP_X(X, \varphi) - P(X, \varphi). \quad (1.43)$$

La velocidad sería proporcional al eigenvector asociado ϕ'^{μ} ; sin embargo, en el caso del campo escalar no podemos asegurar que este vector sea siempre temporal o que apunte siempre hacia adelante en el tiempo. La imposibilidad de tener una definición de la velocidad válida en todos los casos nos hace ver que el campo escalar en realidad no es un fluido.

Comparando la forma del tensor de energía momento del campo (1.42) y la del fluido perfecto (1.9) podemos ver que, interpretando al campo como un fluido, la presión está dada por la función

$$P = P(X, \varphi) \quad (1.44)$$

a la que es igual el Lagrangiano del campo; esa es la razón de que le asignáramos este nombre en la definición (1.36).

Es posible demostrar que la ecuación de conservación del tensor de energía momento del campo (1.42), dada por $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, es equivalente a la ecuación de campo (1.40).

Para una geometría de FRW, debido a la homogeneidad del espacio, el campo dependerá únicamente del tiempo, por lo que $\varphi_{,i} = 0$ y el parámetro cinético estará dado por

$$X = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (1.45)$$

Con ello, la ecuación de evolución del campo se simplifica a

$$\ddot{\varphi} P_X + 3H \dot{\varphi} P_X - P_\varphi + \dot{\varphi}^2 (\ddot{\varphi} P_{XX} + P_{X\varphi}) = 0, \quad (1.46)$$

o también se puede escribir de una forma que recuerda a la ecuación de conservación de energía-momento de los fluidos (1.30) como

$$(2XP_X - P)' + 6HXP_X = 0. \quad (1.47)$$

1.5. Perturbaciones cosmológicas

Las suposiciones de homogeneidad e isotropía que se hicieron en la sección 1.3 producen una fenomenología que a menudo no es suficiente para describir propiedades interesantes de universo. Por ello, se ha vuelto fundamental en la cosmología moderna estudiar las desviaciones lineales a esta descripción. Para ello seguiremos a las referencias [25–27, 41], definiendo, para cada tensor que represente alguna cantidad física en el universo, una expansión del tipo

$$\delta T(t, x^i) = T_{(0)}(t) + \delta T(t, x^i), \quad (1.48)$$

donde el primer término corresponde al tensor definido en el fondo homogéneo e isotrópico, por ello solo depende del tiempo, mientras que el segundo es una perturbación lineal asociada.

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker para espacio plano, escrita en términos de las coordenadas (t, x, y, x) tiene como componentes

$$\begin{aligned} g_{00}^{(0)} &= -1, \\ g_{ij}^{(0)} &= a^2 \delta_{ij}, \\ g_{ij}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Partiendo de esta métrica, el tensor perturbado tendrá las componentes

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & aB_j \\ aB_i & a^2(\delta_{ij} + 2C_{ij}) \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Los términos B_i y C_{ij} a menudo se separan en sus partes escalar, vectorial y tensorial, lo cual para B_i corresponde a una parte que puede escribirse como el gradiente de un escalar (que llamaremos B sin índices) y otra que corresponde a un vector con divergencia cero; esta descomposición finalmente queda como

$$B_i = B_{,i} - S_i, \quad (1.51)$$

$$C_{ij} = -\psi \delta_{ij} + E_{,ij} + F_{(i,j)} + \frac{1}{2} h_{ij}, \quad (1.52)$$

donde B , ψ y E son escalares; S_i y F_i son campos vectoriales con divergencia cero; y h_{ij} es un campo tensorial transversal ($h_{ij}{}^{,i}=0$) y de traza cero. En este trabajo estudiaremos únicamente

las partes escalares de la perturbación, dada por ϕ , B , ψ y E . Haciendo cero las perturbaciones vectoriales y la perturbación tensorial, finalmente obtenemos el elemento de línea dado por

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + 2aB_{,i}dt dx^i + a^2 [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j. \quad (1.53)$$

Esta forma de nombrar las partes escalares de la perturbación métrica no es única. En nuestro caso seguimos la notación de Wands y Malik [27] basada a su vez en la de Mukhanov [41]; a menudo en la literatura (vease por ejemplo [42]) se usan a los potenciales ϕ y ψ de forma intercambiada respecto a nuestra notación; además, es común el uso del escalar h dado por la traza de C_{ij} , en este caso $h = -6\psi + 2\nabla^2 E$.

Definiendo el vector unitario ortogonal a las superficies de tiempo constante

$$n_\mu \propto \frac{\partial t}{\partial x^\mu}, \quad (1.54)$$

es posible obtener algunas cantidades geométricas importantes asociadas al elemento de línea (1.53). Una de ellas es la deformación cortante dada por (1.6) y cuya parte escalar define al potencial de corte σ como

$$\sigma_{ij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij} \right) \sigma, \quad (1.55)$$

que en términos de los potenciales de la métrica está dado por

$$\sigma = a^2 \dot{E} - aB. \quad (1.56)$$

Otra cantidad que usaremos es la razón de expansión $\Theta = n^\mu{}_{;\mu}$, que a primer orden está dada por

$$\Theta = 3 \left(H - H\phi - \dot{\psi} + \frac{1}{3a^2} \nabla^2 \sigma \right), \quad (1.57)$$

y que a orden homogéneo es proporcional al factor de Hubble.

Como todas las cantidades físicas a nivel lineal están dadas por su valor en el fondo cosmológico más una perturbación, la energía y presión de la materia estarán dadas por $\rho + \delta\rho$ y $P + \delta P$. La velocidad, al ser un vector unitario, a nivel homogéneo está dada por las componentes $u_{(0)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, pues ningún vector con significado físico puede tener componentes espaciales en el fondo de FRW o rompería la condición de isotropía. A nivel lineal sus componentes estarán dados por

$$u^\mu = \left[1 - \phi, a^{-1} \partial^i v \right], \quad u_\mu = \left[-1 - \phi, \partial_i \theta \right], \quad (1.58)$$

donde hemos supuesto como en el caso de la métrica, que la parte vectorial de la perturbación es cero, quedándonos únicamente con el potencial v cuyo gradiente corresponde a la 3-velocidad respecto al tiempo conforme, es decir

$$\partial^i v = \frac{\partial x^i}{\partial \eta} = a \frac{\partial x^i}{\partial t}. \quad (1.59)$$

La cantidad θ está dada por

$$\theta = a(v + B) \quad (1.60)$$

y es el potencial asociado al momento de la perturbación.

La ecuación de conservación de energía para un único fluido, dada por la ecuación (1.14) a nivel covariante y por (1.30) a nivel homogéneo, puede escribirse a orden lineal como

$$\dot{\delta\rho} = -3H(\delta\rho + \delta P) + (\rho + P) \left(3\dot{\psi} - \frac{\nabla^2}{a^2} (\theta + \sigma) \right), \quad (1.61)$$

mientras que la conservación del momento (1.15) que a nivel homogéneo es idénticamente cero, a orden lineal se escribe como

$$(\rho + P)(\dot{\theta} + \dot{\phi}) + \delta P + \dot{P}\theta = 0. \quad (1.62)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Einstein asociadas a las perturbaciones, están dadas por las ecuaciones de constricción

$$3H(\dot{\psi} + H\phi) - \frac{\nabla^2}{a^2} [\psi + H\sigma] = -4\pi G\delta\rho, \quad (1.63)$$

$$\dot{\psi} + H\phi = -4\pi G(\rho + P)\theta, \quad (1.64)$$

más las dos ecuaciones de evolución

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + H\dot{\phi} - \frac{P}{M_{\text{pl}}^2}\phi = \frac{1}{2M_{\text{pl}}^2}(\delta\rho + \frac{2}{3}\nabla^2\Pi), \quad (1.65)$$

$$\dot{\sigma} + 3H\sigma + \frac{1}{a^2}(\psi + \phi) = \frac{\Pi}{M_{\text{pl}}^2}. \quad (1.66)$$

Las ecuaciones (1.61-1.66) describen a la cosmología a nivel lineal, donde únicamente cuatro de ellas son linealmente independientes y dos se pueden obtener a partir del resto. Además de estas 4 ecuaciones, para resolver el sistema se requiere una ecuación de estado perturbada, que relacione δP con $\delta\rho$, la cual puede consistir, por ejemplo, en la especificación de una velocidad del sonido $c_s^2 = \delta P/\delta\rho$ si se trata de un fluido en que esta cantidad tenga una forma simple, o en el uso de las ecuaciones de campo perturbadas si se trata de un campo escalar; además, en caso de la presencia de esfuerzos anisotrópicos Π una ecuación extra para ellos. Así, en total tenemos 6 ecuaciones con las cuales se deben determinar los valores de las cantidades perturbadas asociadas al fluido $\delta\rho$, δP , θ , Π y de las asociadas a la geometría E , B , ϕ y ψ . Para cerrar el sistema es necesario hacer una elección de norma, lo cual es equivalente a escoger las coordenadas asociadas al problema.

A lo largo de esta tesis usaremos expresiones independientes de norma, aunque las elecciones más usuales en la literatura son la norma longitudinal o Newtoniana y la norma síncrona. En la primera, los campos E y B se hacen cero. Aquí ϕ se interpreta como el potencial Newtoniano. Gracias a la ecuación(1.66), en ausencia de esfuerzos anisotrópicos, las ecuaciones se simplifican pues $\psi = \phi$. La norma síncrona consiste en eliminar B y ϕ . En este caso queda

una libertad de norma residual que nos permite elegir las iniciales. Normalmente esta libertad se aprovecha haciendo cero la velocidad de alguno de los fluidos $\theta_{(I)} = 0$. Si este fluido no tiene presión, la ecuación (1.62) asegura que su velocidad seguirá siendo cero. Usualmente se elige a la materia oscura fría como dicho fluido; con lo cual se tiene una norma síncrona que es comóvil a la materia oscura. Aquí hay que señalar que lo anterior solo es posible si se tiene un fluido sin presión y que no intercambia momento con el resto de las componentes del universo, en el caso de los modelos unificados que estudiaremos en este trabajo, a menudo las componentes que asociaremos a la materia oscura tendrán presiones pequeñas pero distintas de cero, con lo cual no se podrá definir simultáneamente una norma síncrona y comóvil a la materia oscura.

1.6. Función de transferencia de materia

La función de transferencia es una función útil que permite calcular el comportamiento de las perturbaciones de la materia oscura a partir de las perturbaciones del campo gravitacional ψ de la norma Newtoniana. En el espacio de Fourier asociado a esta perturbación, se separa la evolución del campo de la siguiente forma [43]

$$\psi(k, t) = \frac{9}{10} \psi_p(k) T(k) \frac{D(a)}{a}, \quad (1.67)$$

donde $\psi_p(k)$ es el espectro primordial obtenido de inflación, $D(a)$ el factor de crecimiento de las perturbaciones, el cual en el caso de un universo totalmente lleno con un fluido sin presión está dado por $D(a) = a$. Así, la función $T(k)$ es la función de transferencia, la cual toma en cuenta la evolución diferenciada de las perturbaciones de distintas longitudes de onda debido a que algunas entran en el horizonte antes de la época de dominación de materia y otras lo hacen después. Las perturbaciones que entraron al horizonte en la época de radiación sufren un crecimiento logarítmico; mientras que las otras no. Esto genera un comportamiento característico en la función de transferencia dado por [44]

$$T(k) \propto \begin{cases} 1 & \text{para } k \ll k_{eq} \\ k/k_{eq}^{-2} & \text{para } k \gg k_{eq}. \end{cases} \quad (1.68)$$

La ecuación (1.63) para el caso de la norma Newtoniana, se puede convertir en el espacio de Fourier y en el límite de grandes k en la ecuación de Poisson

$$\psi = -\frac{a^2 \delta \rho}{2M_{pl}^2 k^2}. \quad (1.69)$$

Con ello se obtiene una ecuación para las perturbaciones de la forma

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{3}{5} \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} \psi_p(k) T(k) D(a). \quad (1.70)$$

Debido a la naturaleza estocástica de las perturbaciones, es útil definir el espectro de potencias como

$$P(k, t) = \left\langle \left| \frac{\delta\rho}{\rho} \right|^2 \right\rangle, \quad (1.71)$$

el cual queda en términos de la función de transferencia como

$$\frac{k^3}{2\pi^2} P(k, t) = \delta_h^2 \left(\frac{k}{H_0} \right)^{3+n} \frac{T^2(k) D^2(a)}{D^2(a=1)}. \quad (1.72)$$

Esta ecuación permite comparar la función de transferencia con las observaciones del espectro de potencias adimensional [45]. Usaremos este resultado en la sección 3.6 con el objetivo de comparar el crecimiento en las perturbaciones de la materia oscura fría y las de nuestro modelo unificado.

Sistema dinámico

El estudio de este capítulo está basado principalmente en las referencias [19, 24]. Aquí analizaremos los campos escalares cuyo Lagrangiano no-canónico está dado por la expresión separable

$$\mathcal{L}(X, \varphi) = F(X) - V(\varphi). \quad (2.1)$$

Este tipo de Lagrangianos se usarán en el siguiente capítulo para unificar materia oscura, energía oscura e inflación, ya que tienen la ventaja respecto al caso más general (1.36) en que las expresiones se ven simplificadas, por ejemplo, la velocidad del sonido adiabática está dada únicamente como función de X de la forma [17]

$$c_s^2 = \frac{F_X}{2XF_X - F}. \quad (2.2)$$

Por otro lado, como se puede ver en esta misma expresión, estos campos conservan mucha de la rica fenomenología de los campos no canónicos. En particular, la posibilidad de que la velocidad del sonido sea distinta de 1; lo cual es importante para que el campo pueda reproducir la materia oscura, donde se necesita $c_s \ll 1$ para dar origen a la estructura en el universo ¹.

De este tipo de campos escalares ha sido estudiada su fenomenología en [47, 48]; así como su comportamiento en el contexto de defectos topológicos en [49]; y sus extensiones de supersimetría en [50]; también como generadores de estrellas de bosones en [51]; como medio para la unificación de materia y energía oscura en [38, 52]; y como medio para la unificación de los tres fenómenos, materia y energía oscuras e inflación en [12] y en [17].

En este capítulo estudiamos un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas asociado a un universo que contiene al campo escalar más algún fluido ρ_m con ecuación de estado

¹Sin embargo una serie de estudios apuntan a que campos canónicos también pueden generar estructura pese a tener $c_s = 1$ [46].

constante ² Este método es equivalente al usado para campos canónicos en [53, 54] y nos permite identificar el comportamiento general de las soluciones cosmológicas asociadas a este tipo de Lagrangianos. Este método ha sido aplicado a una gran variedad de modelos cosmológicos y permite determinar la presencia y estabilidad de distintos tipos de soluciones, por ejemplo aquellas con fases tipo de Sitter o con comportamientos tipo escalamiento (*scaling*). Tan solo por citar los trabajos de los últimos años en este tipo de análisis tenemos [55–64], para distintos modelos particulares.

2.1. Sistema autónomo para $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$

Para el campo escalar con Lagrangiano separable, las ecuaciones de Friedmann (1.28, 1.29) se simplifican a

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} [2XF_X - F + V + \rho_m], \quad (2.3)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} [2XF_X + \gamma_m \rho_m], \quad (2.4)$$

donde hemos supuesto una métrica FRW plana con un tensor de energía momento compuesto por el campo escalar más un fluido barotrópico con ecuación de estado $P_m = (\gamma_m - 1)\rho_m$.

Si el fluido barotrópico y el campo escalar no interactúan más que a través de la gravedad, los tensores de energía momento respectivos se conservarán por separado. Para el fluido esto significa que su densidad evoluciona como $\rho_m \propto a^{-3\gamma_m}$ en caso de γ constante, mientras que el campo escalar satisface la ecuación

$$\frac{d}{dN} (2XF_X - F + V) + 6XF_X = 0. \quad (2.5)$$

Aquí la derivada respecto al tiempo se ha sustituido por la derivada respecto al número de e -folds N dado por $dN = d \log a$. Esta variable puede ser usada en el caso de una métrica FRW para parametrizar el tiempo siempre y cuando no haya un cambio en el sentido de la evolución de a , como un rebote (*bounce*) o un recolapso. Otra forma de obtener N es a través de la relación $dN = H dt$.

Para obtener el sistema autónomo aprovechamos que la densidad asociada a este tipo de campos escalares puede ser separada en una parte cinética más una potencial $\rho = \rho_k(X) +$

²A pesar del uso del subíndice m no estamos suponiendo que el fluido es ρ_m es tipo polvo. Podría mantenerse $\gamma_m = (\rho_m + P_m)/\rho_m$ como constante arbitraria, por ejemplo si $\gamma_m = 4/3$ estaremos hablando de un fluido de radiación.

$V(\varphi)$, donde $\rho_k = 2XF_X - F$. Así, definimos las variables

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_c}}, \\ y &= \sqrt{\frac{V}{\rho_c}}, \\ \sigma &= -\frac{M_{\text{Pl}}}{\sqrt{3\rho_k}} \frac{d \log V}{dt}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\rho_c = 3M_{\text{Pl}}^2 H^2$ es la densidad crítica. Las dos primeras variables son proporcionales a las densidades cinética y potencial del campo, y la tercera variable es una variable extra que para el caso de campos canónicos es proporcional a la pendiente del potencial de la forma

$$\sigma_{\text{canonica}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\text{Pl}} V_\varphi}{V} \text{sign}(\dot{\varphi}). \quad (2.7)$$

Debido a las definiciones anteriores, la ecuación de Friedmann (2.3) se puede escribir como

$$x^2 + y^2 + \Omega_m = 1, \quad (2.8)$$

donde Ω_m se define como proporcional a la densidad del fluido barotrópico de la forma ρ_m/ρ_c . Debido a que todos los factores de esta ecuación son positivos, se obtiene la condición sobre x y y de estar acotadas entre 0 y 1.

Usando las definiciones de las variables y las ecuaciones de evolución (2.3, 2.5) podemos obtener las ecuaciones del sistema dinámico

$$\frac{dx}{dN} = \frac{3}{2}\sigma y^2 + \frac{3}{2}x[\gamma_k(x^2 - 1) + \gamma_m(1 - x^2 - y^2)], \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dN} = \frac{3}{2}y[-\sigma x + \gamma_m(1 - y^2) + x^2(\gamma_k - \gamma_m)], \quad (2.10)$$

$$\frac{d\sigma}{dN} = -3\sigma^2 x(\Gamma - 1) + \frac{3\sigma}{2}(\gamma_k - 2c_s^2) \left(1 - \frac{\sigma y^2}{\gamma_k x}\right), \quad (2.11)$$

donde hemos introducido dos nuevas variables dadas por

$$\gamma_k = \frac{\rho_k + P_k}{\rho_k} = \frac{2XF_X}{2XF_X - F}, \quad (2.12)$$

$$\Gamma = \frac{VV_{\varphi\varphi}}{V_\varphi^2}. \quad (2.13)$$

El sistema dinámico (2.9, 2.11) por tanto, se compone de tres variables dependientes x , y y σ que son función de N . El sistema, sin embargo, no es cerrado, pues en general las variables auxiliares γ_k , c_s^2 y Γ dependen del tiempo, con lo que se pueden definir ecuaciones de

evolución para éstas, por ejemplo

$$\frac{d\gamma_k}{dN} = 3(\gamma_k - c_s^2 - 1) \left(\gamma_k - \frac{\sigma y^2}{x} \right). \quad (2.14)$$

Sin embargo, las ecuaciones de evolución para c_s^2 y Γ requerirán terceras derivadas de F y V , que no es posible obtener a partir de las variables dinámicas definidas hasta ahora, por lo que se requerirá definir nuevas variables que a su vez requerirán nuevas ecuaciones de evolución y así sucesivamente.

Para cortar la sucesión de ecuaciones y variables es posible limitar un poco nuestro análisis al caso en que el término cinético está dado por la ley de potencias

$$F(X) = AX^\eta, \quad (2.15)$$

y el potencial por una ley de potencias o una exponencial

$$V(\varphi) = B\varphi^n, \text{ o} \quad (2.16)$$

$$V(\varphi) = V_0 e^{-\lambda\varphi/M_{\text{Pl}}}, \quad (2.17)$$

donde $A, B, V_0, \eta, n, \lambda$ son constantes. Gracias a esta definición las variables extra se vuelven constantes. Aquellas relacionadas con la parte cinética adquieren los valores $\gamma_k = 2\eta/(2\eta - 1)$ y $c_s^2 = \gamma_k - 1$ que para el caso canónico corresponden a $\gamma_k = 2$ y $c_s^2 = 1$; por otro lado, la variable Γ relacionada con el potencial se vuelve 1 para el potencial exponencial o $(n - 1)/n$ para el caso de ley de potencias. Al definir así los potenciales del Lagrangiano, estamos restringiendo el rango de validez de nuestro análisis pero ganamos el que las variables dinámicas se reduzcan a las 3 originales. El sistema autónomo de tres variables, por tanto, incluye las ecuaciones (2.9, 2.10) y la ecuación de evolución para σ que se simplifica a

$$\frac{d\sigma}{dN} = -3\sigma^2 x(\Gamma - 1) + \frac{3}{2}\sigma(2 - \gamma_k) \left(1 + \frac{\sigma y^2}{\gamma_k x} \right). \quad (2.18)$$

Estas tres ecuaciones constituyen un sistema cerrado pues Γ y γ_k son constantes.

2.2. Puntos críticos

Los puntos críticos del sistema se encuentran en los valores x, y, σ para los que las ecuaciones de evolución se anulan. Estos puntos definen soluciones del sistema autónomo en que las variables dinámicas son constantes. Además, el análisis de los puntos críticos no solo nos da información sobre estas soluciones particulares, sino que la estabilidad de estos puntos críticos nos da información sobre las soluciones cercanas. Así, si el punto crítico resulta ser

un nodo estable, las soluciones cercanas a éste tenderán al punto crítico para tiempos grandes; si es un nodo inestable, las soluciones se alejarán; y si es un punto silla se acercarán por una de las direcciones y se alejarán por otra.

En este sistema además, debido a que la contribución del campo a la densidad total está dada por $x^2 + y^2$, los puntos críticos corresponden a soluciones en las que dicha contribución se mantiene constante. Esto puede ocurrir en tres escenarios: (i) si $x^2 + y^2$ es igual a uno, en cuyo caso toda la energía del universo está contenida en el campo escalar y no hay presencia del fluido barotrópico; (ii) si la densidad del campo es cero, que corresponde al caso en que toda la densidad del universo está contenida en el fluido barotrópico; o (iii) cuando $x^2 + y^2$ se encuentra entre cero y uno, que corresponde a que la densidad del fluido y el campo se mantienen en la misma proporción al evolucionar en el tiempo. Estas últimas soluciones son conocidas como tipo escalamiento y son de interés en cosmología pues se ha especulado que la energía oscura podría haber tenido un comportamiento de este tipo en el universo temprano, véase [65].

En este análisis primero buscaremos los puntos para los que las ecuaciones de evolución de x y y (2.9) y (2.10) se anulan sin importar el comportamiento de σ . Si bien estos puntos no son estrictamente los puntos críticos del sistema, pues no se consideran las tres variables dinámicas, sí reproducen el comportamiento descrito en el párrafo anterior pues x y y se mantienen constantes. Luego de encontrar estos puntos, también buscaremos aquellos que dependen de σ y que, por tanto, necesitan que la ecuación de evolución (2.11) también se anule para que todas las variables dinámicas sean constantes. Aquellos puntos que coinciden con los encontrados en el caso canónico cuando $F(X) = X$ serán etiquetados con caracteres latinos siguiendo las referencias [19, 66], y aquellos que solo existen en sistemas no canónicos serán etiquetados con letras griegas. Los primeros podrán reducirse al caso canónico y nos servirán de guía para mostrar que nuestro análisis es correcto al compararlos con los puntos críticos reportados en la literatura. Por otro lado, el segundo tipo de puntos críticos serán interesantes pues representarán comportamientos dinámicos nuevos con respecto al caso canónico.

- (a) El punto $x_a = 0$, $y_a = 0$ corresponde a cuando el campo escalar no contribuye a la densidad de energía total del universo. Este punto existe para todos los campos separables sin importar sus potenciales escalar y cinético, además puede corresponder a un nodo inestable cuando $\gamma_k < \gamma_m$ en cuyo caso el campo escalar puede aumentar su contribución relativa a la densidad del universo incluso si inicia con valores muy pequeños; también puede corresponder a un punto silla, como de hecho es el caso para los campos canónicos y todo campo con $\gamma_k > \gamma_m$.

Si $x = 0$ y $y \neq 0$ la ecuación de estado del campo se reduce a $\gamma_\varphi = 0$. Expresado de otra forma, la relación entre la presión y la densidad del campo en este caso están dadas por $P = -\rho$, como es el caso para una constante cosmológica. Debido a ello, este régimen del campo

es útil para describir fenómenos como la inflación o la energía oscura. Las ecuaciones de evolución se reducen a

$$\frac{dx}{dN} = \frac{3}{2}\sigma y^2, \quad (2.19)$$

$$\frac{dy}{dN} = \frac{3}{2}\gamma_m y(1 - y^2), \quad (2.20)$$

que para volverse cero requieren $\sigma = 0$, es decir un potencial que no cambia en el tiempo y, además, que se cumpla que $\gamma_m = 0$ o $y = 1$. Resumiendo, tenemos los dos siguientes puntos críticos

- (α) El punto $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 1$ y $\sigma_\alpha = 0$ en que el campo escalar es el único componente del universo. La vecindad de este punto crítico corresponde al régimen de rodamiento lento que es de interés pues puede representar al campo durante el periodo de inflación. El potencial domina sobre la parte cinética y su derivada respecto al tiempo es cero en el punto y cercana a cero en la vecindad. Este punto puede ser un punto silla si $\gamma_k < 0$, es decir, que la parte cinética del campo tiene un comportamiento tipo fantasma. Esto es de interés para los modelos inflacionarios pues este comportamiento explicaría porqué el campo entra inicialmente en una fase de rodamiento lento para salir de ella posteriormente. Otro comportamiento posible es como un nodo estable para $\gamma_k > 0$. Este comportamiento es de relevancia para modelar la energía oscura, pues explicaría la razón de que el campo se acerque a un régimen con $P = -\rho$ para tiempos tardíos. Para esto último, una posibilidad es el campo canónico que cumple con $\gamma_k = 2$; sin embargo, en este punto crítico se requiere que σ sea cero y para el caso canónico esta condición es equivalente a que el potencial sea plano como puede verse en la ecuación (2.7).
- (β) El punto $x_\beta = 0$ con y_β arbitrario. En este caso tanto el fluido como el campo tienen una contribución a la densidad total del universo que se mantiene constante; sin embargo para su existencia es necesario que $\gamma_m = 0$, es decir, que el fluido se comporte como una constante cosmológica. Esto es muy restrictivo pues en general estamos pensando que este fluido se comportará como radiación o polvo. Este punto crítico se comporta como una línea estable para $\gamma_k > 0$ y como una inestable en caso contrario.

Si $y = 0$ y $x \neq 0$ la energía potencial es cero, por lo que la densidad de energía del campo se encuentra únicamente en su parte cinética y su ecuación de estado se reduce a la de la parte cinética $\gamma_\phi = \gamma_k$. La ecuación de evolución para y se cancela y la de x se reduce a

$$\frac{dx}{dN} = \frac{3}{2}x(\gamma_k - \gamma_m)(x^2 - 1), \quad (2.21)$$

que es cero cuando $x = 1$ o cuando las ecuaciones de estado del campo y del fluido coinciden; lo que nos deja con otros dos puntos críticos:

- (b) Para $x_b = 1$, $y_b = 0$ toda la densidad del universo se encuentra contenida en la parte cinética del campo. Este punto puede ser inestable si γ_k es mayor que ambos γ_m y σ , puede ser estable si γ_k es menor que los dos y un punto silla si se encuentra entre ellos. Para el caso canónico, como $\gamma_k = 2$, este punto nunca será estable; en cambio, dependiendo del valor de la pendiente del potencial podría presentar los comportamientos de punto estable o punto silla. El punto (x_b, y_b) podría ser interesante como nodo estable o punto silla pues en varios modelos de unificación de materia y energía oscuras, incluido el considerado en el siguiente capítulo, el campo se presenta como uno puramente cinético, así que la presencia de este punto podría explicar el porqué el campo ha tendido a perder su componente de energía potencial y además ha empezado a dominar el universo. En el siguiente capítulo usaremos un campo que en la actualidad satisface la condición de que este punto crítico sea estable; lo que nos permite suponer que el campo se encuentra en un estado en que su energía cinética es dominante.
- (γ) Para $\gamma_m = \gamma_\phi$, con $y_\gamma = 0$ y x_γ arbitrario. Este punto crítico es una línea estable $x\sigma > \gamma_k$ y de otra forma es inestable. En este punto el fluido y el campo tienen la misma ecuación de estado y evolucionan como en las soluciones tipo escalamiento. En estas soluciones ambas componentes de densidad poseen la misma dependencia temporal y su razón se mantiene constante. Sin embargo el potencial cinético F debe tener una forma particular para seguir el comportamiento del fluido. Por ejemplo, si $F(X) = AX^2$ entonces la ecuación de estado de la parte cinética está dada por $\gamma_k = 4/3$ y este punto crítico existirá si el fluido se comporta como radiación. Éste comportamiento de hecho es interesante en el caso del modelo de Scherrer estudiado en [37] y descrito en la sección 3.5; para energías altas dicho modelo tiene un comportamiento cuadrático como el requerido para comportarse como radiación en la época de dominación de ésta.

Por último, los puntos críticos para los que ambas x y y son distintas de cero. Estos puntos están presentes únicamente para dos posibilidades del Lagrangiano, cuando es uno canónico con potencial exponencial, como los estudiados en la literatura, o cuando es la suma de dos leyes de potencias

$$\mathcal{L} = AX^\eta - B\phi^n \tag{2.22}$$

cuyos exponentes cumplen la relación

$$\eta = \frac{n}{2+n}; \tag{2.23}$$

por ejemplo, esto puede ocurrir para Lagrangianos como $\mathcal{L} = AX^2 - B\phi^{-4}$. Los puntos críticos obtenidos en estos casos dependen de σ pero, como será demostrado en la siguiente sección, para estos Lagrangianos σ es función de las otras dos variables dinámicas y por tanto es constante en los puntos críticos.

(c) El primer punto corresponde a

$$x_c = \frac{\sigma}{\gamma_k}, \quad y_c = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\gamma_k^2}}. \quad (2.24)$$

En él, el campo escalar es la única contribución a la densidad de energía del universo. La ecuación de estado del sistema está dada por

$$\gamma_\varphi = \frac{\sigma^2}{\gamma_k}, \quad (2.25)$$

y el punto corresponde a un punto silla para $\sigma^2 > \gamma_k \gamma_m$ o en caso contrario es un nodo estable. Este punto solo existe si $\sigma^2 > \gamma_k^2$ y $\sigma \gamma_k > 0$. Aquí hay que aclarar la razón de que, a pesar de que señalamos que este punto crítico corresponde a un universo cuya única componente es el campo escalar, en las condiciones de estabilidad aparecen parámetros correspondientes al fluido, el cual no está presente en el universo. La razón de ello es que las condiciones de estabilidad hablan de soluciones en la vecindad del punto crítico y no de la solución en el punto crítico mismo. Toda solución en un punto crítico se mantendrá constante en el punto sin importar si es estable o inestable. En cambio, las soluciones cercanas pueden alejarse o acercarse al punto crítico dependiendo de su estabilidad. Este punto crítico en particular, tiene un comportamiento estable cuando se cumple la desigualdad $\sigma^2 \leq \gamma_k \gamma_m$. En estos escenarios, el campo es casi dominante, pero hay un poco de fluido, y el universo evoluciona a estados en que el campo domina todavía más.

(d) El segundo punto corresponde a

$$x_d = \frac{\gamma_m}{\sigma}, \quad y_d = \frac{\sqrt{\gamma_m(\gamma_k - \gamma_m)}}{\sigma}, \quad (2.26)$$

que existe cuando se cumple que $\sigma > \sqrt{\gamma_k \gamma_m}$ y $\gamma_m < \gamma_k$. Además, este punto es un nodo estable cuando

$$\frac{\sigma^2(9\gamma_m - \gamma_k)}{8\gamma_k \gamma_m^2} < 1, \quad (2.27)$$

o una espiral estable en caso contrario. Este punto corresponde a la solución tipo escalamiento encontrada en los campos canónicos; la fracción de la energía total a la que contribuye el campo está dada por

$$\Omega_\varphi = x_d^2 + y_d^2 = \frac{\gamma_k \gamma_m}{\sigma^2}. \quad (2.28)$$

Aquí es importante notar que en [67] se muestra que el Lagrangiano más general para el cual existen las soluciones tipo escalamiento es de la forma $\mathcal{L} = Xg(Xe^{\lambda\varphi})$, y sin embargo este punto crítico existe para Lagrangianos de la forma (2.1) que no pueden reducirse a los considerados en [67]. La razón de esta discrepancia es que en el trabajo referido se hace la suposición de que existe algún tipo de interacción no gravitacional

entre el campo y el fluido barotrópico, la cual no se aplica a este trabajo. Hay que tomar en cuenta que, si se usa un campo escalar para modelar a la energía oscura y éste se tiene un comportamiento tipo escalamiento en el universo temprano, es necesario algún proceso que saque este comportamiento pues de otra forma su densidad no podrá dominar en el universo actual; este proceso, sin embargo, no se observa en estos modelos pues este punto es estable siempre que existe.

Un resumen de los puntos críticos y su estabilidad se presenta en la tabla 2.1.

2.2.1. Puntos críticos en infinito

Los puntos críticos a , b , c , α , β y γ fueron obtenidos suponiendo que las variables dinámicas eran finitas. Esta suposición siempre se cumple para x y y . Como puede verse de la ecuación (2.8) pues ambas variables son menores o iguales que uno. Sin embargo, de la definición de σ (2.6) es posible que sea infinito cuando la energía cinética o potencial del campo tienden a cero. Para estudiar estos casos definimos la variable alternativa $\tilde{\sigma} = 1/\sigma$ con la cual podemos obtener un sistema autónomo de ecuaciones y estudiar el régimen cuando tiende a cero.

Considerando γ_k y Γ las ecuaciones de evolución (2.9, 2.10, 2.18) se convierten en

$$\frac{dx}{dN} = \frac{3}{2} \frac{y^2}{\tilde{\sigma}} + \frac{3}{2} x [\gamma_k(x^2 - 1) + \gamma_m(1 - x^2 - y^2)], \quad (2.29)$$

$$\frac{dy}{dN} = \frac{3}{2} y \left[-\frac{x}{\tilde{\sigma}} + \gamma_m(1 - y^2) + x^2(\gamma_k - \gamma_m) \right], \quad (2.30)$$

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{dN} = 3x(\Gamma - 1) + \frac{3}{2}(\gamma_k - 2) \left(\tilde{\sigma} - \frac{y^2}{\gamma_k x} \right). \quad (2.31)$$

Para tener un punto crítico con $\tilde{\sigma} = 0$ se debe asegurar que los términos $y^2/\tilde{\sigma}$ y $xy/\tilde{\sigma}$ no diverjan. Estos términos pueden ser calculados si consideramos que los términos del Lagrangiano tienen la forma (2.15 - 2.17). Para el potencial tipo ley de potencias, la variable $\tilde{\sigma}$ queda de la forma

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{nM_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{3(2\eta - 1)A}{2}} \text{sign}(\dot{\varphi}) \varphi X^{(\eta-1)/2}, \quad (2.32)$$

y los factores

$$\frac{y^2}{\tilde{\sigma}} = -\frac{nB}{3M_{\text{Pl}}H^2} \sqrt{\frac{2}{3(2\eta - 1)A}} \text{sign}(\dot{\varphi}) \varphi^{n-1} X^{(1-\eta)/2}, \quad (2.33)$$

$$\frac{xy}{\tilde{\sigma}} = -\frac{n}{3M_{\text{Pl}}H^2} \sqrt{\frac{2B}{3}} \text{sign}(\dot{\varphi}) \varphi^{(n-2)/2} X^{1/2}. \quad (2.34)$$

Para que los tres términos se vuelvan cero al mismo tiempo se necesita que $\varphi = 0$ y $n > 2$. Con esta condición, la variable y también se vuelve cero y las ecuaciones de evolución se reducen

CUADRO 2.1: Estabilidad y existencia de los puntos críticos. Los puntos etiquetados con letras latinas coinciden con los estudiados para los campos canónicos en la literatura. Los puntos con letras griegas son nuevos. Los puntos (c) y (d) solo existen cuando el Lagrangiano es canónico con potencial exponencial o cuando es de la forma (2.22) y los exponentes cumplen la condición (2.23).

	x	y	Existencia	Estabilidad	Ω_{φ}	γ_{φ}
(a)	0	0	Siempre	Nodo inestable para $\gamma_k < \gamma_m$ Punto silla para $\gamma_m < \gamma_k$	0	-
(α)	0	1	$\sigma = 0$	Punto silla para $\gamma_k < 0$ Nodo estable para $\gamma_k > 0$	1	0
(b)	1	0	Siempre	Nodo inestable para $\gamma_k > \{\gamma_m, \sigma\}$ Nodo estable para $\gamma_k < \{\gamma_m, \sigma\}$ De lo contrario punto silla	1	γ_k
(β)	0	Arbitraria	$\sigma = 0$ $\gamma_m = 0$	Línea estable para $\gamma_k > 0$ De lo contrario inestable	γ^2	0
(γ)	Arbitraria	0	$\gamma_k = \gamma_m$	Línea estable para $x\sigma > \gamma_k$ De lo contrario inestable	x^2	γ_m
(c)	$\frac{\sigma}{\gamma_k}$	$\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\gamma_k^2}}$	$\sigma^2 > \gamma_k^2$ $\sigma\gamma_k > 0$	Punto silla para $\sigma^2 > \gamma_k\gamma_m$ De lo contrario nodo estable	1	$\frac{\sigma^2}{\gamma_k}$
(d)	$\frac{\gamma_m}{\sigma}$	$\frac{\sqrt{\gamma_m(\gamma_k - \gamma_m)}}{\sigma}$	$\sigma > \sqrt{\gamma_k\gamma_m}$ $\gamma_m < \gamma_k$	Nodo estable para $\frac{\sigma^2(9\gamma_m - \gamma_k)}{8\gamma_k\gamma_m^2} < 1$ De lo contrario espiral estable	$\frac{\gamma_k\gamma_m}{\sigma^2}$	γ_m

a

$$\frac{dx}{dN} = \frac{3}{2}x(x^2 - 1)(\gamma_k - \gamma_m), \quad (2.35)$$

$$\frac{dy}{dN} = 0, \quad (2.36)$$

más las condiciones de $\varphi = 0$ y $n > 2$. Estas ecuaciones de evolución se anulan en tres casos, cuando x vale 0 o 1, o cuando $\gamma_k = \gamma_m$. Estos tres puntos corresponden a los previamente estudiados (a), (b), y (γ), respectivamente.

La segunda posibilidad es que el potencial sea exponencial, en cuyo caso y no puede ser cero excepto cuando $V_0 = 0$ que es el caso en que no hay potencial. Debido a esto, $y^2/\tilde{\sigma}$ diverge cuando $\tilde{\sigma} \rightarrow 0$ y no hay punto crítico. Con esto podemos concluir que no hay puntos críticos extra para $\sigma \rightarrow \infty$; sin embargo este estudio era necesario para asegurar que hubiéramos considerado todo el espacio dinámico de parámetros.

2.3. Simetría en el sistema autónomo

El sistema autónomo obtenido en la sección 2.1 se compone, en su mínima expresión, de tres ecuaciones de evolución para tres variables independientes x , y y σ . Esto es de esperar pues el sistema original tenía tres grados de libertad, lo cual puede verse si consideramos que (dado un Lagrangiano particular y una ecuación de estado para el fluido barotrópico) un estado inicial está totalmente definido si conocemos a un tiempo inicial el valor del campo, su derivada y la densidad de energía del fluido barotrópico. Con estos datos es posible calcular el parámetro de Hubble y la evolución de las variables del sistema usando las ecuaciones de evolución correspondientes. Así, el número de grados de libertad del sistema autónomo que se deriva debe ser el mismo, 3. Sin embargo, en la literatura encontramos que para el caso canónico es posible definir un sistema autónomo de solo dos variables (x, y) . En este caso σ se puede hacer constante tomando un potencial exponencial $V \propto e^{-\lambda\varphi/M_{\text{Pl}}}$, pues, de su definición (2.6), se puede obtener

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda. \quad (2.37)$$

En esta sección veremos que esta reducción en los grados de libertad del sistema proviene de una simetría en el sistema que también puede aplicarse, aunque con algunas modificaciones, al caso no canónico, permitiéndonos en ciertos casos reducir a dos el número de variables del sistema autónomo. Una demostración de que la presencia de un grupo de simetrías ayuda a reducir los grados de libertad de un sistema dinámico se incluye en el apéndice B.

Para el campo canónico con potencial exponencial, la transformación de simetría involucrada en el sistema es descrita en la referencia [68], y está dada por

$$(\varphi, X, \rho_m) \mapsto (\varphi + \xi, e^{-\lambda\xi/M_{\text{Pl}}} X, e^{-\lambda\xi} \rho_m). \quad (2.38)$$

Observamos que las ecuaciones de evolución para el sistema pueden reducirse a tres ecuaciones para las variables (φ, X, ρ) dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dN} &= \text{sign}(\dot{\varphi}) \frac{\sqrt{2X}}{H}, \\ \frac{dX}{dN} &= -6X - V_0 e^{-\lambda\varphi/M_{\text{Pl}}} \text{sign}(\dot{\varphi}) \frac{\sqrt{2X}}{H}, \\ \frac{d\rho_m}{dN} &= -3\gamma_m \rho_m,\end{aligned}\tag{2.39}$$

donde la primera ecuación proviene de la definición de X , y las siguientes dos son las ecuaciones de continuidad para el campo y el fluido, respectivamente. Este conjunto de ecuaciones de evolución está completo si consideramos al factor de Hubble como función de las tres variables dinámicas a través de la ecuación de Friedmann

$$H(\varphi, X, \rho_m) = \frac{1}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}} \sqrt{X + V_0 e^{-\lambda\varphi/M_{\text{Pl}}} + \rho_m},\tag{2.40}$$

con lo cual la transformación actúa indirectamente sobre H de la forma

$$H \mapsto H^{-\lambda\xi/2M_{\text{Pl}}}.\tag{2.41}$$

Es fácil comprobar que las ecuaciones de evolución son invariantes ante la transformación (2.38) y así esta simetría permite reducir el número de ecuaciones de evolución si se expresan en términos de variables que también sean invariantes ante la transformación. En este caso x y y son invariantes como se puede comprobar de la definición que para este caso particular está dada por

$$x = \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}H}, \quad y = \frac{\sqrt{V_0} e^{-\lambda\varphi/2M_{\text{Pl}}}}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}H}.\tag{2.42}$$

Para el caso no canónico también podemos encontrar una transformación de simetría y reducir el número de variables en ciertas condiciones. Primero, consideremos las ecuaciones de evolución cuando los términos cinético y potencial del campo son leyes de potencias como en las ecuaciones (2.15, 2.16). Las ecuaciones estarán dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dN} &= \text{sign}(\dot{\varphi}) \frac{\sqrt{2X}}{H}, \\ \frac{dX}{dN} &= -\frac{1}{A\eta(2\eta-1)X^{\eta-1}} \left[\frac{Bn\varphi^{n-1}\sqrt{2X}(\text{sign}\dot{\varphi})}{H} + 6\eta AX^\eta \right], \\ \frac{d\rho_m}{dN} &= -3\gamma_m \rho_m,\end{aligned}\tag{2.43}$$

que al igual que en el caso canónico corresponden a la definición de X y las dos ecuaciones de continuidad, y constituyen un sistema cerrado si se considera al factor de Hubble como

función de φ , X y ρ_m a través de la ecuación de Friedmann

$$H(\varphi, X, \rho_m) = \frac{1}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}} \sqrt{(2\eta - 1)AX^\eta + B\varphi^n + \rho_m}. \quad (2.44)$$

Para este caso proponemos la transformación

$$(\varphi, X, \rho_m) \mapsto (\xi^{2\eta}\varphi, \xi^{2n}X, \xi^{2m\eta}\rho_m), \quad (2.45)$$

la cual transforma también de forma indirecta al factor de Hubble como $H \mapsto \xi^{n\eta}H$. Es fácil ver que esta transformación deja invariante al conjunto de ecuaciones (2.43) únicamente en los casos particulares en que se cumple

$$\eta = \frac{n}{2+n}. \quad (2.46)$$

Ésta de hecho es la misma ecuación que (2.23), la cual era una condición para la presencia de los puntos críticos (c) y (d). Vemos que esta condición implica que el sistema dinámico se puede reducir a dos variables.

Para ello, es necesario definir variables que sean invariantes ante la simetría, lo cual se puede comprobar que es el caso para x , y y σ , por lo que dos cualesquiera de estas tres variables son suficientes para definir la evolución del sistema. Si escogemos x y y para describir al sistema, el hecho de que en las ecuaciones de evolución (2.9, 2.10) aparezca la variable σ lo único que indica es que esta variable es susceptible de escribirse en términos de las otras dos. En efecto, podemos comprobar que para este caso

$$\sigma = s \left(\frac{x}{y} \right)^{2/n}, \quad (2.47)$$

donde s es una constante dada por

$$s \equiv -\sqrt{\frac{2}{3}} M_{\text{Pl}} n B^{1/n} (A(2\eta - 1))^{-1/2\eta}. \quad (2.48)$$

De esta relación podemos escribir el sistema de ecuaciones en términos de solo dos variables como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= \frac{3}{2}x \left[sy \left(\frac{y}{x} \right)^{2/\gamma_k} + \gamma_k(x^2 - 1) + \gamma_m(1 - x^2 - y^2) \right], \\ \frac{dy}{dN} &= -\frac{3}{2}sx^2 \left(\frac{y}{x} \right)^{2/\gamma_k} + \frac{3}{2}y [\gamma_m(1 - y^2) + x^2(\gamma_k - \gamma_m)], \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde usamos la relación $\gamma_k = 2n/(n-2)$ que se satisface solo en estos casos.

Los puntos críticos obtenidos en la sección 2.2 son válidos también para el sistema de dos variables. De hecho los puntos críticos (c) y (d) solo son válidos cuando el sistema es susceptible de escribirse en términos de dos variables, ya sea que el Lagrangiano sea canónico con potencial exponencial o que sea la suma de dos leyes de potencias cuyos exponentes cumplen

la relación (2.46). Podemos ver que estos dos puntos dependen de σ pero ésta es constante en el caso canónico, donde se cumple la relación (2.37). Para el caso no canónico, cuando estos puntos críticos son válidos σ es función de x y y de la forma (2.47), con lo que las expresiones para ambos puntos críticos deben obtenerse de sustituir esta expresión para σ y resolver para x y y . En el caso del punto (c) estas ecuaciones no pueden resolverse de manera exacta, quedando el sistema de ecuaciones

$$x_c = \frac{s}{\gamma_k} \left(\frac{x_c}{y_c} \right)^{2/n}, \quad x_c^2 + y_c^2 = 1. \quad (2.50)$$

Para el punto (d) las ecuaciones sí se pueden resolver quedando

$$x_d = \frac{\sqrt{\gamma_m(\gamma_k - \gamma_m)}}{s} \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m} \right)^{1/\gamma_k}, \quad y_d = \frac{\gamma_k - \gamma_m}{s} \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_k - \gamma_m} \right)^{1/\gamma_k}. \quad (2.51)$$

2.4. Análisis del espacio fase

En esta sección graficamos el espacio fase definido por las ecuaciones (2.9), (2.10 y (2.18) para diversos Lagrangianos. Un caso interesante es cuando el Lagrangiano satisface la ecuación (2.46) pues para estos sistemas existe una solución tipo escalamiento, además de que el número de variables del sistema se puede reducir a dos. Esto ocurre, por ejemplo, para un Lagrangiano de la forma $\mathcal{L} = AX^2 - B/\varphi^4$. Los parámetros extra en las ecuaciones de evolución están dados por $\gamma_k = 4/3$ y $\Gamma = 5/4$. En las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 podemos ver proyecciones del espacio fase de tres dimensiones obtenido de soluciones con condición inicial $\sigma = 1.5$. Podemos ver que en este espacio las soluciones se acercan a los puntos críticos (c) y (d) dependiendo las condiciones iniciales. Estos puntos críticos forman dos curvas sobre el espacio fase.

Sin embargo, como lo vimos en la sección anterior, estos sistemas en los que los puntos críticos (c) y (d) existen son, de hecho, sistemas de dos dimensiones, pues σ cumple la condición (2.47). En estos casos, dado un Lagrangiano como $\mathcal{L} = AX^2 - B/\varphi^4$ con valores particulares de A y B , σ es función de las otras dos variables dinámicas. Con ello vemos que el espacio tridimensional graficado en las figuras 2.1 a 2.3 está considerando de hecho distintos Lagrangianos y no únicamente distintas condiciones iniciales para el mismo Lagrangiano. Un espacio fase para un solo campo escalar con un Lagrangiano definido, por tanto, se obtendrá de graficar las ecuaciones (2.49), y será de solo dos dimensiones. En la figura 2.4 se grafica el espacio para el caso $S = 4$ que significa que $AB = 4M_{pl}^4/27$ con un fluido barotrópico tipo polvo. En la figura se pueden observar los siguientes puntos críticos:

- (a) El punto (0,0) que en este caso es un punto silla.
- (b) El punto (1,0) que es un nodo inestable.

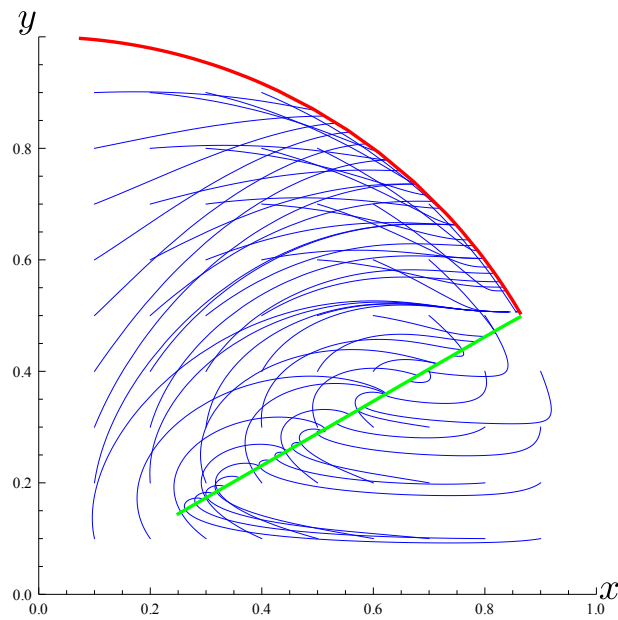


FIGURA 2.1: Proyección del espacio fase sobre el plano (x, y) para un Lagrangiano de la forma $\mathcal{L} = AX^2 - B/\varphi^4$, con condición inicial $\sigma = 1.5$. Las soluciones tienden a los puntos críticos (c) (línea verde) y (d) (segmento de círculo rojo). Este comportamiento también se observa en las figuras 2.2 y 2.3 que corresponden al mismo sistema proyectado sobre otras direcciones. El sistema tridimensional para este caso en realidad comprende Lagrangianos con valores de A y B distintas. El espacio fase mínimo para un solo Lagrangiano está graficado en la figura 2.4.

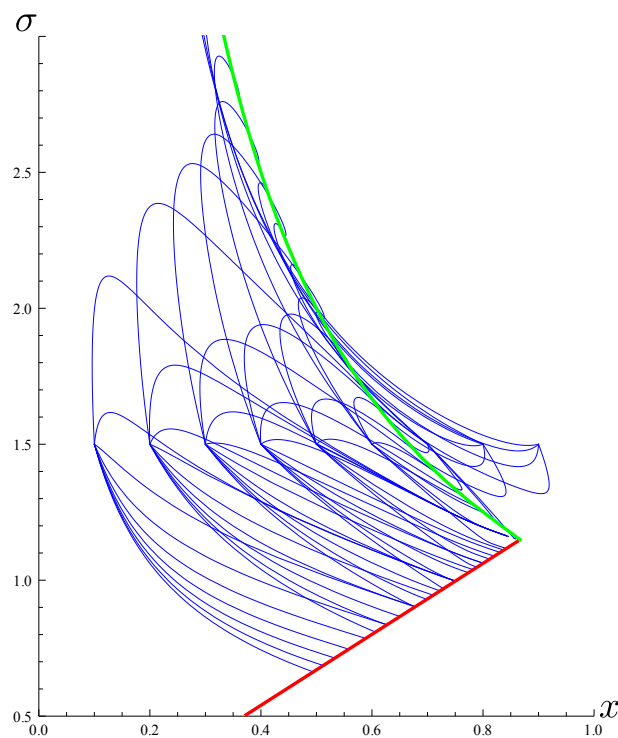


FIGURA 2.2: Proyección del espacio fase sobre el plano (x, σ) para un Lagrangiano de la forma $\mathcal{L} = AX^2 - B/\varphi^4$. Ver la explicación en la figura 2.1.

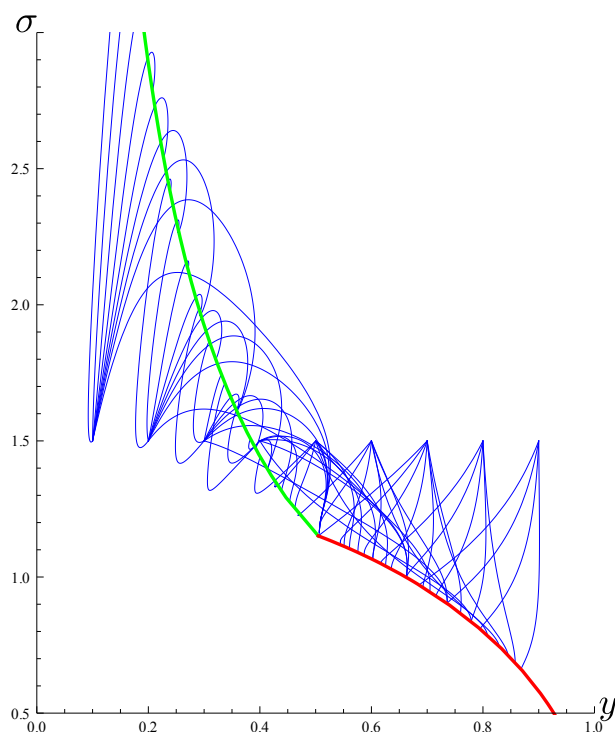


FIGURA 2.3: Proyección del espacio fase sobre el plano (x, σ) para un Lagrangiano de la forma $\mathcal{L} = AX^2 - B/\varphi^4$. Ver la explicación en la figura 2.1.

- (c) Este punto corresponde a un punto silla, en que la densidad del campo domina el universo.
- (d) El punto $(3^{1/4}/4, 3^{-1/4}/4)$ corresponde a una espiral estable.

Los otros puntos críticos no están presentes en este ejemplo.

El campo escalar canónico con potencial exponencial es el otro caso en que el espacio fase puede reducirse a dos variables. En este caso σ es una constante dada por la ecuación (2.37). En la figura 2.5 podemos ver el comportamiento para $\sigma = 1.5$ con $\gamma_m = 1$, es decir un fluido tipo polvo.

Cuando la condición (2.46) no se satisface, el número de variables no puede reducirse, quedando en tres; tampoco existen los puntos críticos (c) y (d) para estos casos. En la figura 2.6 graficamos el sistema para el Lagrangiano $\mathcal{L} = AX^2 - B\varphi^2$, en que los valores de los parámetros auxiliares son $\gamma_k = 4/3$ y $\Gamma = 1/2$. Podemos ver que el sistema evoluciona hacia valores grandes de σ , pues en este caso $\sigma \propto 1/\varphi$ por lo que el sistema llega a σ infinito en un tiempo finito; en ese momento la variable σ no es útil para describir el sistema. También podemos ver que las soluciones no tienden a ningún punto crítico.

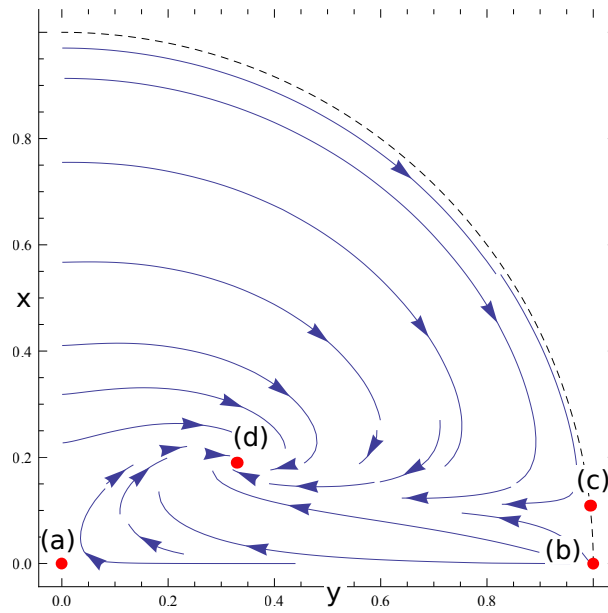


FIGURA 2.4: Espacio fase para el sistema dinámico correspondiente a un campo escalar con Lagrangiano $\mathcal{L} = AX^2 - B\varphi^{-4}$ más un fluido barotrópico tipo polvo. Se observan los puntos críticos (a), (b), (c) y (d).

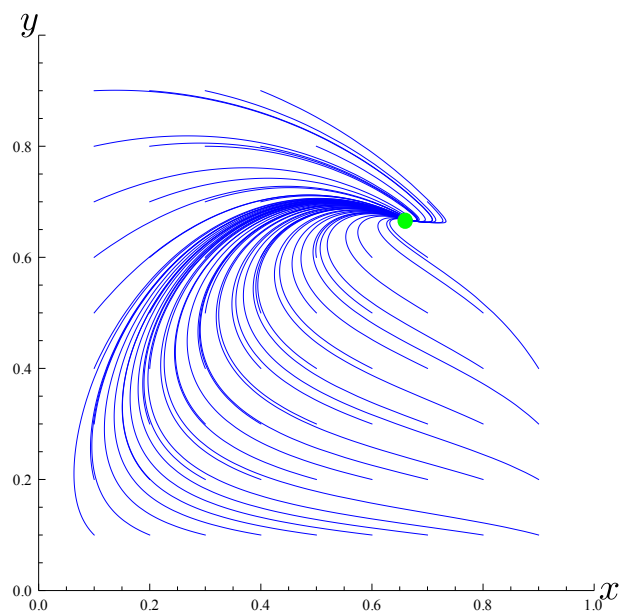


FIGURA 2.5: Espacio fase para el campo escalar canónico con potencial exponencial y $\sigma = 1.5$. El espacio fase para este sistema tiene dos dimensiones. Las soluciones tienden al punto crítico (d), la solución tipo escalamiento

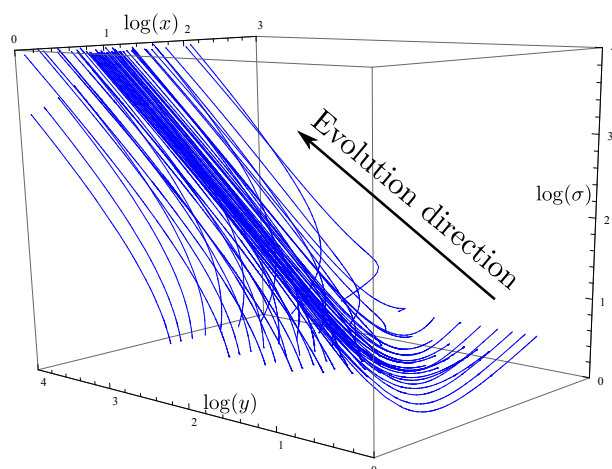


FIGURA 2.6: Espacio fase para el Lagrangiano $\mathcal{L} = AX^2 - B\varphi^2$ con un fluido tipo polvo. Las soluciones no tienden a ningún punto crítico y evolucionan a $\sigma \rightarrow \infty$ para tiempos finitos pues este parámetro es proporcional a φ^{-1} en este caso.

2.5. Sistema autónomo durante un Gran Rebote

Un gran rebote (*Big Bounce*) es un escenario para el universo temprano en que se considera que el actual estado de expansión del universo fue precedido por un estado inicial de colapso en que $\dot{a} < 0$. Este escenario se ha propuesto como alternativa de inflación debido a que algunos estudios sugieren que podría producir perturbaciones primordiales similares [69–71], pero sin la presencia de un punto singular en el pasado pues se supone que el paso del estado de colapso al de expansión ocurre para $a \neq 0$. Estos modelos se han estudiado en distintos esquemas por ejemplo pre-big-bang [40, 72], universo ecpirótico [73–77], universo cíclico [78, 79] o modelos con campos múltiples [80].

En esta sección estudiaremos cómo, cuando se permite que la densidad del campo escalar sea negativa, es posible obtener un rebote en el marco de las ecuaciones de Friedmann usuales. Debido a que las variables dinámicas definidas previamente en este capítulo no son útiles para describir este fenómeno, redefiniremos el sistema siguiendo la referencia [80]. Para obtener un rebote, encontraremos que el campo escalar debe violar la condición nula de energía dando origen a inestabilidades; aunque diversos trabajos se han hecho para proponer modelos en que dichas inestabilidades no están presentes [75, 81, 82] se ha argumentado que esto no sea posible en el marco de los campos escalares estudiados aquí, ver por ejemplo [83, 84]; sin embargo, aquí no estudiaremos estas inestabilidades y nos restringiremos a la cosmología homogénea.

Las ecuaciones dinámicas estudiadas en este capítulo presentan varios problemas durante un rebote, los cuales provienen de que fueron planteadas para un universo que supusimos en expansión. El primer problema con que nos encontramos es que durante un rebote el factor de Hubble cruza por $H = 0$, por lo que las variables x y y definidas en (2.6) podrían diverger. Otro posible problema es que, dependiendo del mecanismo por el que el rebote se

produzca, es posible que las ecuaciones de Einstein no sean válidas. No consideraremos esta posibilidad, pero si este no es el caso y la relatividad general es válida y además estamos en un universo plano, la ecuación de Friedmann implica que durante el rebote la densidad total del universo es cero. Para que esto pase existen dos posibilidades, que todos los campos del universo anulen sus densidades durante el rebote o, si alguno de estos campos tiene densidad positiva, deberá existir un campo con densidad negativa para que el total sea cero. Consideraremos aquí al fluido barotrópico que hemos usado en nuestros análisis como la suma de todos los campos con densidad positiva y al campo no canónico como aquel con densidad negativa que contrarreste al resto. Sin embargo las variables dinámicas x y y se vuelven imaginarias en este caso.

Para eliminar los dos problemas anteriores definiremos nuevas variables que sean bien comportadas cuando H sea cero y cuando las densidades del campo sean negativas. Suponiendo que la densidad de energía cinética del campo no se anula, definimos

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}H}{\sqrt{|\rho_k|}}, \\ \tilde{y} &= \sqrt{\left|\frac{V}{\rho_k}\right|} \text{sign}(V),\end{aligned}\tag{2.52}$$

que están relacionadas con las variables de nuestro análisis original como $\tilde{x} = 1/x$ y $\tilde{y} = y/x$, en el régimen en que están definidas.

Otro problema con el análisis del rebote es que la variable independiente que hemos estado usando como sustituto adimensional del tiempo N , dada por la integral $\int H dt$, deja de tener una relación invertible con el tiempo pues es decreciente antes del rebote y después de éste se vuelve creciente. Para salvar este problema, si la variable original podía verse como

$$dN = H dt = \sqrt{\frac{\rho_c}{3M_{\text{Pl}}^2}} dt,\tag{2.53}$$

la nueva variable la definiremos como

$$d\tilde{N} = \sqrt{\frac{|\rho_k|}{3M_{\text{Pl}}^2}} dt.\tag{2.54}$$

La cual tendrá una relación invertible con el tiempo aún durante el rebote, siempre que ρ_k no se haga cero, que era una condición que necesitamos también para que \tilde{x} y \tilde{y} estén bien definidas.

Las ecuaciones de evolución para estas nuevas variables se pueden obtener a partir de las originales (2.9 - 2.11) como

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{N}} &= \frac{3}{2}\tilde{y}|\tilde{y}|(\gamma_m - \tilde{x}\sigma\text{sign}(\rho_k)) + \frac{3}{2}(\tilde{x}^2 - \text{sign}(\rho_k))(\gamma_k - \gamma_m), \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{N}} &= \frac{3}{2}\tilde{y}[\gamma_k\tilde{x} - \sigma(1 + \tilde{y}|\tilde{y}|\text{sign}(\rho_k))], \\ \frac{d\sigma}{d\tilde{N}} &= -3\sigma^2(\Gamma - 1) + \frac{3\sigma}{2}(\gamma_k - 2c_s^2)\left(\tilde{x} - \frac{\sigma\tilde{y}^2}{\gamma_k}\right),\end{aligned}\quad (2.55)$$

donde hemos conservado a σ como la tercera variable dinámica con la misma definición que en las secciones anteriores (2.6) pues sí está bien definida durante el rebote.

2.6. Condiciones para un Gran Rebote

Los puntos críticos del sistema con variables dinámicas (\tilde{x}, \tilde{y}) son los mismos que los del sistema con (x, y) debido a la relación que existe entre éstas, en el régimen en que ambos conjuntos de variables están definidos. Además de los puntos críticos, el sistema de ecuaciones (2.55) nos permite obtener información sobre las condiciones para que se produzca un rebote en un escenario como el que planteamos en este capítulo, es decir, en que se cumplen las ecuaciones de Einstein, el universo está descrito por una métrica de FRW plana y contiene un fluido barotrópico con densidad de energía positiva y un campo escalar no canónico con Lagrangiano $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$ que puede tomar valores negativos de densidad de energía.³

El sistema de variables (\tilde{x}, \tilde{y}) debe satisfacer una restricción proveniente de la ecuación de Friedmann que aquí puede escribirse como

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}|\tilde{y}| - \tilde{\Omega}_m = 1 \cdot \text{sign}(\rho_k), \quad (2.56)$$

donde $\tilde{\Omega}_m = \Omega_m/|\rho_k|$ está relacionada con la densidad del fluido barotrópico y es no negativa. De esta ecuación obtenemos la condición

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}|\tilde{y}| \geq 1 \cdot \text{sign}(\rho_k), \quad (2.57)$$

que deben cumplir \tilde{x} y \tilde{y} y que define las regiones permitidas del espacio fase.

El signo de ρ_k juega aquí un papel importante en la determinación de estas regiones. Para el caso de un campo no fantasma (*non phantom*) en que $\rho_k > 0$ se obtiene

$$\tilde{x}^2 - \text{sign}(V)\tilde{y}^2 \geq 1, \quad (2.58)$$

³Como nos interesa el sistema únicamente en tiempos cercanos al rebote, no estudiaremos la evolución de σ , y nos concentraremos en las otras dos variables, así que las gráficas bidimensionales presentadas en esta sección deberán considerarse únicamente como representaciones esquemáticas del espacio fase completo con tres variables.

que para \tilde{y} positiva corresponde a la región dentro de las ramas de la hipérbola $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 1$, y para \tilde{y} negativa a la región fuera de la circunferencia $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$. En la figura 2.8 hemos graficado el espacio fase para este caso y la región en blanco corresponde a aquella que no cumple la constricción.

Si el campo es tipo fantasma (*phantom*), es decir su energía cinética es negativa, la región permitida del espacio fase está dada por

$$\tilde{x}^2 - \text{sign}(V)\tilde{y}^2 \geq -1, \quad (2.59)$$

que corresponde a la región debajo de la rama positiva de la hipérbola $\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 = 1$ como puede verse en la región graficada en la figura 2.9.

El signo de la variable \tilde{x} define el tipo de cosmología en que nos encontramos donde un signo:

- positivo corresponde a un universo en expansión,
- negativo corresponde a un universo en contracción y
- cero puede corresponder a un rebote, un recolapso o un universo estático.

Para $\tilde{x} = 0$ será la derivada la que nos da información acerca de si se trata de un rebote, en que el universo pasa de un estado de contracción a uno de expansión, o un recolapso en que ocurre lo contrario. Así

- $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{N}} > 0$ corresponde a un rebote,
- $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{N}} < 0$ corresponde a un recolapso y
- $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{N}} = 0$ no da suficiente información para saber de qué se trata.

En las ecuaciones de evolución (2.55) tenemos suficiente información para determinar las condiciones cuando ocurre un rebote, pues éste corresponde a cuando $\tilde{x} = 0$ y su derivada es positiva, la cual en este punto está dada por

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{N}} = \frac{3}{2} [(\gamma_m - \gamma_k) \text{sign}(\rho_k) + \gamma \tilde{y} |\tilde{y}|]. \quad (2.60)$$

Para que sea positiva tenemos que \tilde{y} debe cumplir

$$\tilde{y} > \sqrt{\left| \frac{\gamma_k - \gamma_m}{\gamma_m} \right|} \text{sign}(\rho_k (\gamma_k - \gamma_m)). \quad (2.61)$$

Para que el rebote sea posible, esta condición debe ser compatible con la condición proveniente de la ecuación de Friedmann (2.57) para $\tilde{x} = 0$

$$\tilde{y} \leq \text{sign}(-\rho_k). \quad (2.62)$$

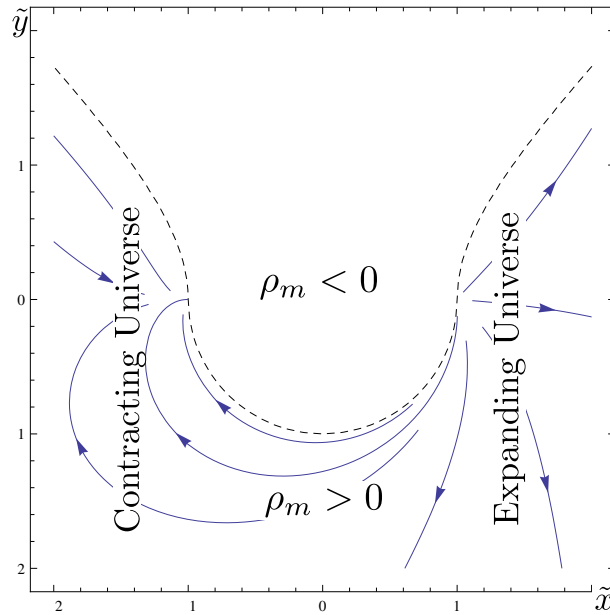


FIGURA 2.7: Espacio fase para un campo escalar canónico con potencial exponencial más una componente de radiación. Todas las soluciones que cruzan $\tilde{x} = 0$ corresponden a recolapsos, un rebote no es posible.

El signo de ρ_k una vez más juega un papel importante pues determina las condiciones bajo las cuales las dos desigualdades anteriores pueden ser satisfechas simultáneamente. Para que esto ocurra en un campo con energía cinética positiva, es necesario tener $\gamma_k < 0$. Por ejemplo, para el campo escalar canónico en que la energía cinética es positiva con $F(X) = X$, la ecuación de estado cinética es $\gamma_k = 2$ por lo que este campo no puede dar origen a un rebote, como fue mostrado en [85], y puede verse en el espacio fase 2.7. Un rebote correspondería a una solución que va de la región de colapso (x negativa) a la región de expansión (x positiva) como ocurre en el ejemplo de la figura 2.8 correspondiente a $\gamma_k = -4$; pero en el caso canónico todas las soluciones que cruzan $x = 0$ van en sentido contrario, correspondientes a recolapsos.

Para un campo con energía cinética negativa, la condición para que un rebote sea posible es tener $\gamma_k > 0$. El campo tipo fantasma propuesto originalmente en que el signo del término cinético en el Lagrangiano era simplemente invertido $F(X) = -X$ tiene $\gamma_k = 2$ por lo que satisface la condición. En la figura 2.9 esto puede verse pues hay soluciones que cruzan el eje vertical de izquierda (región de un universo en contracción) a derecha (región de un universo en expansión).

También podemos preguntarnos sobre la posibilidad de que un campo cuya energía esté almacenada únicamente en la componente cinética produzca un rebote. En el lenguaje del espacio fase, lo anterior significaría una solución que va de izquierda a derecha y pasa por el punto $(0, 0)$. Esto solo es posible para campos con energía cinética negativa que cumplan $\gamma_k > \gamma_m$. En el ejemplo de la figura 2.9 con el campo fantasma esto es posible, pero en la figura 2.10 tenemos un caso en el que no. Las condiciones obtenidas aquí, como veremos

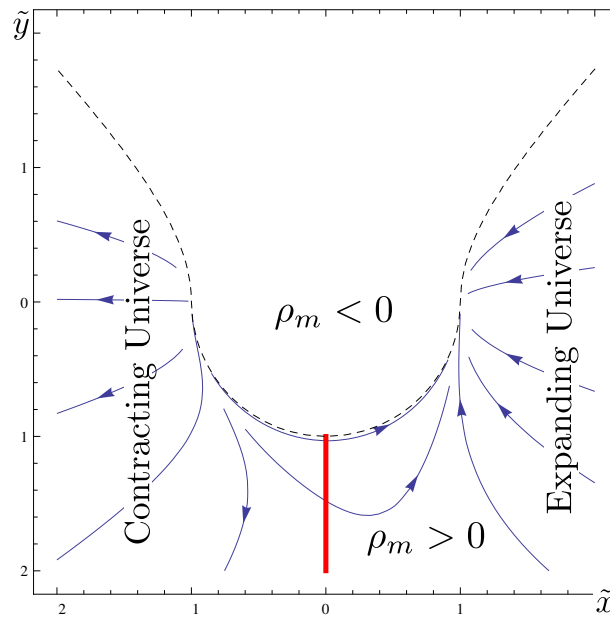


FIGURA 2.8: Proyección del espacio fase para un campo no canónico con energía cinética positiva, $\gamma_k = -4$ y $\sigma \sim \sqrt{2/3}$, más un fluido tipo radiación. El rebote ocurre cuando las soluciones cruzan la línea roja de izquierda a derecha.

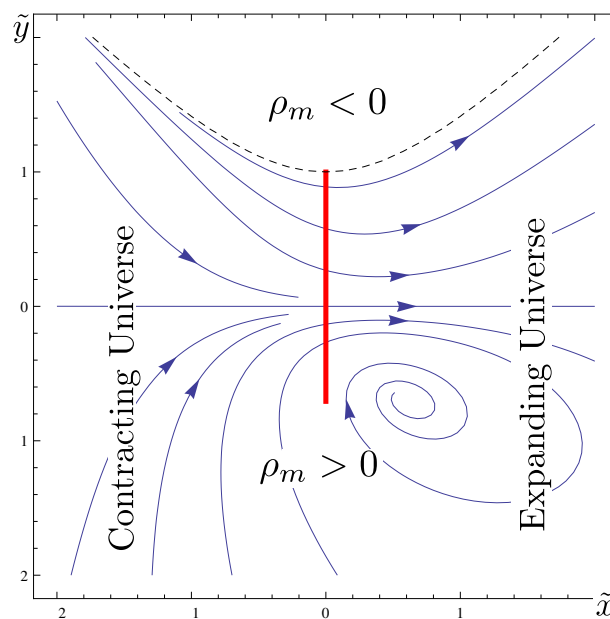


FIGURA 2.9: Espacio fase para un campo tipo fantasma con $F(X) = -X$ y potencial exponencial más un fluido de radiación. El rebote puede ocurrir cuando las soluciones cruzan de \tilde{x} negativa a positiva (línea roja). También podemos observar el punto crítico (d) que en este caso es una espiral estable

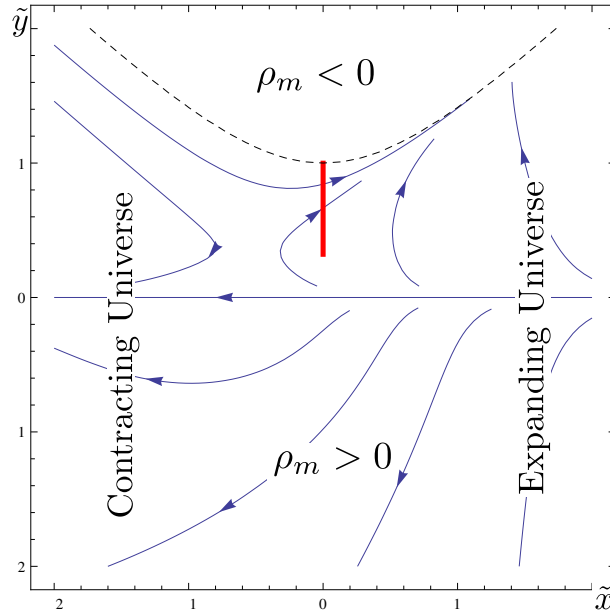


FIGURA 2.10: Proyección del espacio fase para un campo escalar con energía cinética negativa, $\gamma_k = 7/6$, $\sigma \sim -\sqrt{2/3}$ y un fluido tipo radiación. El rebote es posible para algunos valores del campo (línea roja), pero no cuando el potencial se anula ($\tilde{y} = 0$).

a continuación, pueden generalizarse para casos en que el campo tenga energía cinética y potencial.

Para generalizar las condiciones del párrafo anterior a campos con potencial distinto de cero, debemos observar que la densidad total del campo debe ser negativa, pues durante el rebote debe cancelar a la densidad proveniente del fluido barotrópico. Además, la ecuación de estado del campo γ_ϕ debe ser mayor que la del fluido barotrópico para asegurar que el campo se diluya más rápido al crecer el factor de escala, y así que la densidad de energía sea positiva tanto antes como después del rebote, como puede verse en la figura 2.11. En caso contrario la energía total será positiva solo para $a < a_{rebote}$, lo cual corresponde a un recolapso y no a un rebote.

Estas dos condiciones son equivalentes a las desigualdades en términos de las variables dinámicas. La condición de tener densidad del campo negativa puede traducirse a la expresión (2.62), mientras que la condición de tener una ecuación de estado del campo mayor que la del fluido puede ser reescrita después de un poco de álgebra como la desigualdad (2.61).

La condición de que el campo tenga una densidad de energía negativa y una ecuación de estado mayor que la del fluido barotrópico, implican una violación a la condición de energía nula (NEC por sus siglas en inglés) que restringe $\rho_\phi + p_\phi$ a ser positivo, como puede verse en la figura 2.12. En los últimos años, se ha escrito una extensa literatura estudiando campos que violan esta condición de energía, con el principal interés de estudiar modelos de energía oscura con $\gamma_{de} < 0$, los cuales están ligeramente favorecidos por las mediciones [65]. Sin embargo, estos campos tienen distintos tipos de inestabilidades, por ejemplo, velocidades del sonido imaginarias que dan lugar al crecimiento exponencial de inhomogeneidades [86, 87];

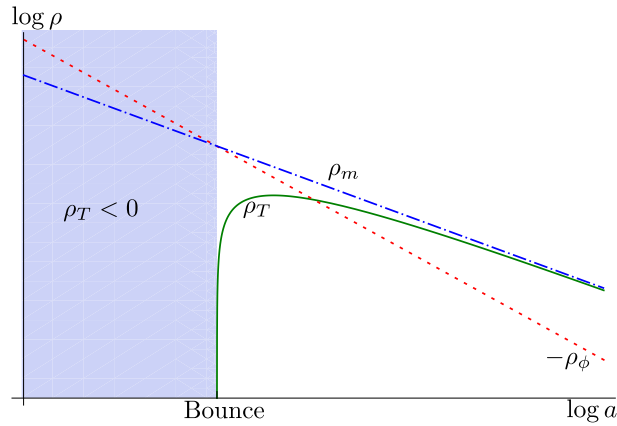


FIGURA 2.11: Densidades del fluido barotrópico (línea azul), el campo escalar (línea roja) y la densidad total de universo (línea verde), como función del factor de escala. La densidad del campo debe decrecer más rápido que la del fluido para tener energía positiva en la región con a grande

o decaimientos espontáneos del vacío en partículas del campo [88–90]. La inclusión de términos de orden mayor en el Lagrangiano se ha propuesto como un método para obtener campos cuyas partículas asociadas tienen energía positiva; estos modelos son conocidos como condensados de fantasmas (*Ghost condensate*) [75, 81, 82, 91]; sin embargo, generalmente estos términos extra agregan nuevos problemas de estabilidad a los modelos, que se espera sean curados al introducir la teoría adecuada de altas energías de las que estos provienen, aunque no es claro que dicha teoría exista [92]. Otros trabajos enfocados en la introducción de nuevas simetrías pueden asegurar la estabilidad de estos modelos, véase [93–95]. Dichos modelos son conocidos como Galileónicos, sin embargo, no fueron estudiados en este trabajo, ver referencia [96].

2.7. Conclusiones

En este capítulo obtuvimos un sistema autónomo de ecuaciones dinámicas asociado a la evolución de un campo escalar con Lagrangiano $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$. Esto nos permitió obtener los puntos críticos asociados al sistema y analizar su estabilidad, lo cual resumimos en la tabla (2.1).

El sistema autónomo de ecuaciones (2.9-2.11) es especialmente útil para analizar Lagrangianos con término cinético tipo ley de potencias y término potencial de tipo exponencial o ley de potencias. Pero encontramos que los puntos críticos (c) y (d) no están presentes para todos los campos con Lagrangiano de este tipo. Demostramos que para esta subclase de Lagrangianos el número de grados de libertad del sistema se reduce a 2 debido a un tipo de simetría que para el caso de los campos canónicos con potencial exponencial ya había sido analizada, pero nosotros lo generalizamos para campos no canónicos con potencial tipo ley de potencias.

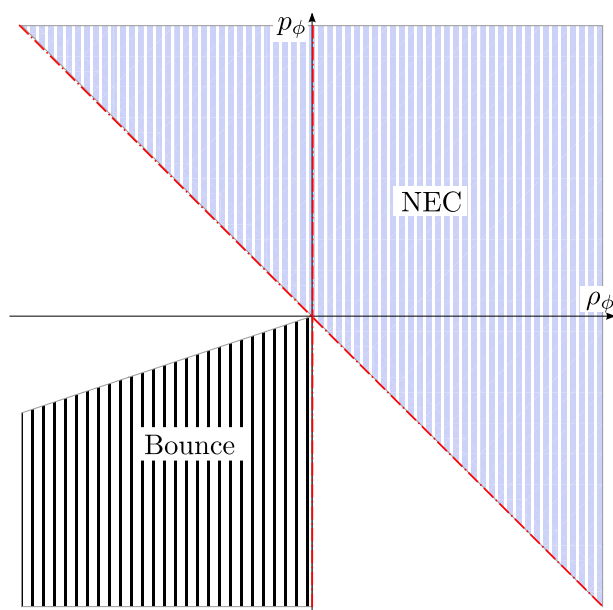


FIGURA 2.12: Plano $\rho - p$ para un campo escalar. La región inferior izquierda corresponde a la parte del espacio que puede generar un rebote si el fluido externo se comporta como radiación; mientras que la región superior derecha satisface la condición de energía nula. Las líneas punteadas no pueden ser cruzadas por un campo como el estudiado aquí, según el trabajo [86].

Para estos casos, encontramos que existe una solución tipo escalamiento a pesar de que el Lagrangiano no se pueda reducir a la forma $\mathcal{L} = Xg(Xe^{\lambda\phi})$ encontrada en la literatura como la forma general para la presencia de este tipo de soluciones. La razón es que en los trabajos donde se obtiene esta expresión se supone la existencia de una interacción distinta de cero entre el campo escalar y la materia oscura. Sin embargo, aquí encontramos que este tipo de soluciones se pueden generar usando únicamente la interacción gravitacional entre el campo escalar y la materia oscura.

Para estudiar el caso en que el campo escalar produce un rebote no singular fue necesario cambiar las variables usadas para obtener un nuevo sistema de ecuaciones dado por (2.55). Mostramos que las condiciones para este rebote pueden entenderse como tener una densidad negativa de campo con una ecuación de estado mayor que la de materia. Esto requiere que el campo viole la condición nula de la energía, lo cual se ha estudiado en la literatura y causa inestabilidades tanto clásicas como cuánticas en este tipo de campos. Esto probablemente signifique que los campos escalares del tipo $F - V$ son muy simples para producir este tipo de comportamientos y es necesario recurrir a otros que aseguren la estabilidad, como los llamados campos Galileónicos; sin embargo, esto queda fuera del alcance de este trabajo.

En el siguiente capítulo estudiaremos cómo este tipo de campos escalares puede ser usado para la unificación de la inflación con la materia y la energía oscuras. Para ello, será útil el análisis de este capítulo pues nos permitirá estudiar si el tipo de solución que sirve para la unificación de los tres fenómenos es una solución típica o tenemos que hacer un ajuste fino de las condiciones iniciales para obtenerla.

Unificación

El presente capítulo está basado en el trabajo [17], en el cual presentamos un modelo particular de unificación de energía oscura, materia oscura e inflación. Para ello consideraremos un campo escalar con Lagrangiano no canónico como los estudiados en la sección 1.4. Dicho trabajo está basado en el modelo propuesto por Bose y Majumdar en [12], usando una clase más general de Lagrangianos propuestos inicialmente por Chimento en [16].

La posibilidad de unificar bajo un mismo esquema los fenómenos de energía oscura, materia oscura e inflación ha sido discutida en la literatura motivada por la falta de información que tenemos sobre esos tres fenómenos. No existe una teoría establecida sobre el origen microscópico de estos fenómenos, pero sabemos que no se encuentran en el marco del modelo estándar de partículas. Un principio de economía nos puede llevar a preguntarnos si estos tres fenómenos que han dominado al universo en distintas épocas pueden considerarse como resultados de un mismo mecanismo subyacente como se ha investigado en [5, 8, 9, 11–13, 17]. En nuestro caso y el de muchos de los trabajos de la literatura, dicho mecanismo es un campo escalar cuya densidad de energía permite la aparición de los tres fenómenos. Por ejemplo tenemos el trabajo de Liddle y Ureña-López [5], en que un único campo canónico es responsable de producir inflación en el universo temprano y posteriormente, gracias a oscilaciones alrededor de un mínimo de potencial, generar también la materia y energía oscuras [29]. En nuestro caso [17] y el de Bose y Majumdar [12, 13] el campo es no canónico y puede generar la materia y energía oscura al acercarse suavemente a un mínimo de su parte cinética.

Un elemento importante en este tipo de modelos es la introducción de algún mecanismo que permita que parte de la energía acumulada en el campo escalar durante inflación se conserve en él sin convertirse en radiación durante la época de recalentamiento [97, 98], esto con el objetivo de tener suficiente densidad de energía para producir la materia y energía oscuras en el universo tardío. Para el modelo de Liddle y Ureña se propuso que el escenario de *preheating* cumpliría con este objetivo; sin embargo, los valores para los parámetros de este escenario serían poco naturales; por ello se han propuesto otros escenarios como el uso

de plasmas [6, 48], la presencia de un periodo corto de inflación térmica [8], el uso de las ecuaciones cosmológicas en un escenario de branas [9] o la producción y posterior evaporación de agujeros negros al final de inflación [99]. En nuestro modelo propondremos como mecanismo la producción gravitacional de partículas. Este mecanismo fue propuesto como método de recalentamiento en [100, 101], y será analizado en la sección 3.7.2. Una característica importante de este tipo de recalentamiento es que no consume toda la energía del campo escalar, por lo que puede ser ajustado para producir la cantidad correcta de radiación.

Reduciendo un poco nuestras ambiciones, es posible considerar la unificación de solo dos de los tres fenómenos. Por ejemplo, de materia oscura e inflación en que las partículas de la materia oscura provienen del mismo campo que produjo la inflación [102–104] o con el uso de modelos de materia oscura escalar [105]. También podemos encontrar en la literatura unificación de la energía oscura y la inflación en lo que se conoce como *quintessential inflation* [106–108]. Finalmente tenemos la unificación de energía y materia oscura, la cual es posible debido a que únicamente hemos detectado efectos gravitacionales de ambos fenómenos [15]. Ésta se ha estudiado en [16, 28, 38, 109, 110] con el uso de campos escalares no canónicos similares a los que usaremos aquí, o con el uso del fluido conocido como gas generalizado de Chaplygin [30, 111], cuyo espacio de parámetros está bastante constreñido por las observaciones [31], al igual que cualquier modelo de unificación de la materia y energía oscuras con ecuación de estado barotrópica $P(\rho)$ como se muestra en [112, 113].

3.1. Lagrangiano no canónico

Este modelo usa una clase de campos escalares φ cuyos Lagrangianos son separables con la forma

$$\mathcal{L}(X, \varphi) = F(X) - V(\varphi). \quad (3.1)$$

En particular, basados en un término cinético propuesto por Chimento en [16] con la adición de un término potencial como se propone en [12], trabajaremos con el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(X, \varphi) = \frac{1}{(2\alpha - 1)} \left[(AX)^\alpha - 2\alpha\alpha_0\sqrt{AX} \right] - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + M, \quad (3.2)$$

donde α es una constante adimensional que usaremos para diferenciar entre distintas clases de modelos; A , y α_0 son parámetros constantes del término cinético con unidades $[A] = E^{4/\alpha-4}$ y $[\alpha_0] = E^{4-2/\alpha}$, donde E es energía; m es un parámetro con unidades de masa, aunque no corresponde a la masa del campo escalar excepto para campos canónicos. M tiene unidades $[M] = E^4$ y juega el papel de una constante cosmológica ($M = M_{\text{pl}}\Lambda$), aunque observaremos que su valor no será el valor usual de la densidad de energía oscura ($10^{-3}eV$)⁴ ya que ésta incluirá una contribución de los otros términos del campo escalar. Definiremos también

$$n = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}, \quad (3.3)$$

como una constante adimensional auxiliar, la cual consideraremos entera y positiva por razones que serán claras en la sección 3.4. Ésto restringirá los valores que puede tomar α a un conjunto discreto.

El uso de un Lagrangiano con un término cinético tan complejo se debe a la simplicidad de las soluciones cosmológicas asociadas a éste. Como se verá en la sección 3.4, la densidad asociada a este término cinético corresponderá a una suma finita de términos de densidad, algunos de los cuáles podrán identificarse con la energía oscura y la materia oscura. Por otro lado, en la sección 3.5 observaremos que un término cinético mucho más simple puede generar un comportamiento parecido, pero únicamente de forma aproximada al encontrarse cerca del mínimo. En el presente capítulo, se estudiará el comportamiento de este campo escalar en un fondo cosmológico plano y con la presencia de materia bariónica o radiación dependiendo de la época cosmológica. Los parámetros del Lagrangiano se ajustarán para que el campo escalar cumpla el papel de los tres fenómenos, materia oscura, energía oscura e inflación.

3.2. Soluciones cosmológicas y espacio fase

Para aplicar los criterios de la tabla 2.1 es necesario que γ_k y Γ sean constantes. En este caso, si consideramos a la constante M como parte del potencial tenemos

$$\gamma_k = n \left(1 - \frac{\alpha_0}{(AX)^{(2\alpha-1)/2}} \right), \quad (3.4)$$

y

$$\Gamma = \frac{1}{2} - \frac{M}{m^2 \varphi^2}. \quad (3.5)$$

Observamos que el exponente que aparece en la ecuación (3.4) dado por $(2\alpha-1)/2 = 1/(2(n-1))$ es positivo por lo que, al estar en el denominador, este término puede despreciarse para energías grandes; lo mismo ocurre con el segundo término en la expresión (3.5). Con ello, en el régimen en que se cumplen las desigualdades

$$(AX)^{(2\alpha-1)/2} \gg \alpha_0, \quad (3.6)$$

$$m^2 \varphi^2 \gg M, \quad (3.7)$$

el Lagrangiano (3.2) puede simplificarse a

$$\mathcal{L}(X, \varphi) = \frac{(AX)^\alpha}{(2\alpha-1)} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (3.8)$$

Aquí, las variables auxiliares γ_k y Γ corresponden a las constantes

$$\gamma_k = n, \quad (3.9)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

además de que la variable σ queda escrita como

$$\sigma = -\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi} \text{sign}(\dot{\phi}) \sqrt{\frac{4(2\alpha - 1)}{3\alpha} \frac{X}{(AX)^\alpha}}. \quad (3.11)$$

Supondremos que este régimen de altas energías es en el que empieza el universo. De la desigualdad 3.6 se puede pensar que el universo se encuentra lejos del régimen de inflación, pues el término cinético es grande. En efecto, es posible que inicialmente el término cinético domine, y el universo no se encuentre en un régimen inflacionario; sin embargo, en el siguiente párrafo argumentaremos que, aun si esto ocurre, la evolución posterior del campo escalar lo llevará a un régimen inflacionario. Esta época del universo será analizada con detalle en la sección 3.7.1. Antes de ver este comportamiento, queremos recordar que la desigualdad 3.6 no excluye el que ocurra inflación, pues el término cinético debe compararse con el potencial, es decir, inflación puede ocurrir aunque se cumpla 3.6 siempre y cuando la densidad de energía cinética sea menor que la potencial, lo cual está dado en este caso por

$$\frac{2\alpha}{2\alpha - 1} (AX)^\alpha \ll \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.12)$$

De la tabla 2.1 podemos observar que un sistema como éste con $\gamma_k = n$ y $\Gamma = 1/2$ tiene únicamente los tres puntos críticos (a), (α) y (b). De ellos (a) $x = y = 0$ es un punto silla y corresponde a un universo en que el campo escalar no está presente; (α) $x = 0, y = 1$ es un nodo estable, presente cuando $\sigma \approx 0$; y (b) $x = 1, y = 0$ es un nodo inestable para $n > \sigma$ y punto silla para $n < \sigma$. El comportamiento de (α) como un nodo estable es interesante en este caso pues la vecindad de este punto corresponde al régimen inflacionario, en que la parte potencial del campo escalar es dominante. Su estabilidad nos permite explicar porque nuestro modelo entrará a un periodo de inflación; esto quiere decir que, inclusive si el universo inicia lejos de esta solución, después de un periodo transitorio, el campo evolucionará a su régimen inflacionario. Hay que recordar que esto solo ocurre cuando X y ϕ son suficientemente grandes para que σ , obtenida en la expresión (3.11) sea cercana a cero. Posteriormente, cuando σ crece lo suficiente, este punto deja de ser estable y esperamos que el sistema se acerque al punto (b) $x = 1, y = 0$ en que la parte cinética del campo es dominante; sin embargo, para este momento ya no se cumplirán las condiciones (3.6) con lo que el análisis anterior ya no es válido. A continuación llevaremos a cabo un análisis particular para este sistema en que buscaremos observar este comportamiento.

Por lo analizado en el capítulo 2, sabemos que los puntos críticos fijos solo son válidos cuando γ_k y Γ son constantes. Cuando las desigualdades (3.4) y (3.5) dejan de ser válidas, debido a que X o ϕ hayan reducido su valor debido a la evolución del campo, este análisis dejará de ser válido. Sabemos, por lo discutido en dicho capítulo, que nos encontraremos con un espacio fase de 3 dimensiones. Una forma de simplificar este sistema es despreciando la contribución de los fluidos extra en el universo, aquellos que no provienen del campo escalar y

que denotamos con el término ρ_m en que se incluyen los bariones y la radiación. Dicha simplificación está justificada para periodos cercanos a inflación, en que el campo escalar es la componente dominante en el universo; lo mismo puede decirse de los tiempos posteriores a la época de la igualdad entre materia y radiación, ya que si el campo escalar genera la materia oscura y la energía oscura, a partir de este momento dicho campo contribuye aproximadamente al 80% de la densidad de energía del universo, y dicha cantidad crece al aumentar la contribución de la energía oscura en la época actual. Dicha simplificación, sin embargo, no será válida durante la época de dominación de radiación.

Las ecuaciones de evolución para este periodo serán la ecuación de Friedmann y la de continuidad:

$$\begin{aligned} 2XF_X - F + V - 3M_{\text{Pl}}^2 H^2 &= 0, \\ \frac{d}{dt}(2XF_X - F + V) + 6HXF_X &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

que para el Lagrangiano que estamos estudiando se convierten en

$$\frac{A^\alpha}{2^\alpha} |\dot{\phi}|^{2\alpha} + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - M - 3M_{\text{Pl}}^2 H^2 = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\alpha A^\alpha}{2^{\alpha-1}} \ddot{\phi} + \frac{6H\alpha}{2\alpha-1} \left(\frac{A}{2}\right)^\alpha \dot{\phi} + |\dot{\phi}|^{2(1-\alpha)} \left(m^2 \varphi - \frac{6H\alpha\alpha_0}{2\alpha-1} \sqrt{\frac{A}{2}} \text{sign}(\dot{\phi}) \right) = 0. \quad (3.15)$$

Este sistema se puede convertir en uno de dos variables si realizamos un cambio de variable definiendo

$$Z \equiv \dot{\phi}. \quad (3.16)$$

Con ello la ecuación de evolución (3.15) se convierte en una ecuación de primer grado para Z

$$\dot{Z} = -\frac{3H}{2\alpha-1} Z - |Z|^{2(1-\alpha)} \left[\frac{m^2}{\sqrt{2A\alpha}} \varphi - \frac{3H\alpha_0}{2\alpha-1} \text{sign}(Z) \right], \quad (3.17)$$

donde la ecuación de Friedmann se puede usar para sustituir el valor de la constante de Hubble

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}} \sqrt{Z + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - M}. \quad (3.18)$$

Usando esto, podemos escribir un sistema de ecuaciones autónomas de primer orden en las variables φ y Z de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \sqrt{\frac{2}{A}} Z, \\ \dot{Z} &= \frac{\sqrt{3}Z}{M_{\text{Pl}}} \sqrt{Z + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - M(\alpha_0 |Z|^{1-2\alpha} - 1)} - \frac{m^2}{\sqrt{2A\alpha}} \varphi |Z|^{2(1-\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

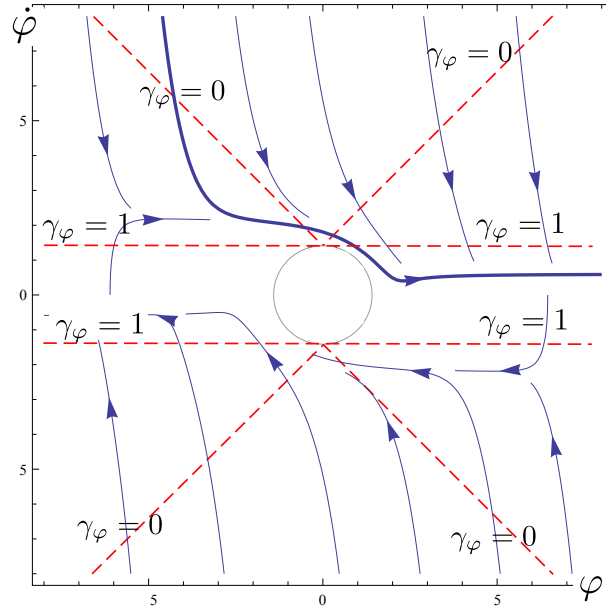


FIGURA 3.1: Espacio fase para las ecuaciones 3.19 con $\alpha = 1$. Las líneas punteadas corresponden a líneas de ecuación de estado constante. Una solución típica representada por la línea gruesa, se acerca primero a $\gamma_\varphi \sim 0$ (inflación), atraviesa $\gamma_\varphi \sim 1$ emulando materia oscura y finalmente regresa a $\gamma_\varphi \sim 0$ para comportarse como energía oscura.

el cual puede ser analizado numéricamente. La ecuación de estado del campo en términos de estas variables está dada por

$$\gamma_\varphi = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1} \frac{|Z|^{2\alpha} - \alpha_0|Z|}{|Z|^{2\alpha} + m^2\varphi^2/2 - M}. \quad (3.20)$$

El sistema dinámico (3.19) puede ser resuelto numéricamente para obtener su espacio fase. Por ejemplo, para el caso particular $\alpha = 1$ graficamos este sistema en la figura 3.1, donde con líneas punteadas se encuentran señalados los puntos con ecuación de estado constante. Como se puede ver, el sector de condiciones iniciales con grandes valores de φ negativa y valores positivos de Z evoluciona hacia una solución atractora con ecuación de estado cercana a $\gamma_\varphi = 0$. Esto en el modelo unificado se interpreta como el periodo inicial de inflación en que la ecuación de estado se encuentra cercana a -1 . Estas soluciones posteriormente cruzan las líneas correspondientes a 0 (líneas puntuadas diagonales) que en los modelos unificados corresponden a la época de dominación de materia. Luego, estas soluciones evolucionan hacia un segundo periodo con γ_φ cercana a 0, comportándose como un modelo de energía oscura tipo *freezing* [114]. Un comportamiento equivalente ocurre también para cualquier solución que inicie con valores grandes de φ positiva y valores negativos de Z ; en ese caso la solución evoluciona de valores positivos a negativos de φ con y vive en la región del espacio fase con $Z < 0$.

El análisis de este espacio fase es importante para entender la dinámica de las soluciones cosmológicas del sistema dominado por el campo escalar con Lagrangiano (3.2). Un problema que podemos observar aquí es que el sistema de la figura 3.1 cruza la línea $\gamma_\varphi = 0$, lo cual

puede generar inestabilidades en el campo escalar, como se ha visto en trabajos como [86]. Sin embargo, este cruce se encontraría en el futuro ya que $\gamma_\varphi = 0.25$ actualmente [12].

Finalmente, podemos concluir que un sector importante de las posibles condiciones iniciales puede producir el comportamiento necesario para unificar los fenómenos de materia oscura, energía oscura e inflación. En las siguientes secciones se analizarán más a fondo las condiciones para que la unificación se lleve a cabo. En la sección 3.4 obtendremos las condiciones para que el campo reproduzca la energía y materia oscuras, mientras que en la sección 3.7 obtendremos las condiciones para que el campo reproduzca el periodo de inflación. En la subsección 3.7.2 incluimos una breve propuesta para el proceso por el cual parte de la energía del campo escalar es transferida en las partículas del modelo estándar.

3.3. Lagrangianos puramente cinéticos

En la tabla (2.1) observamos que el punto crítico (b) corresponde a un nodo estable cuando γ_k es menor que γ_m ¹ y σ . En este caso el campo evolucionará a uno en que su dinámica se encuentra dominada por su parte cinética. En esta sección iniciaremos el análisis de dicha dinámica, para en los siguientes analizar la posibilidad de que reproduzcan la energía y materia oscuras. En la sección 3.4 mostraremos para el caso particular del Lagrangiano (3.2) que su parte cinética puede reproducir la materia y energía oscuras; y lo mismo haremos en la sección 3.5 para cualquier Lagrangiano cuyo término cinético $F(X)$ tenga un mínimo que pueda ser aproximado por una función cuadrática.

Para este análisis supondremos que el campo ya se encuentra cerca del punto crítico (b) (Véase tabla 2.1) y por lo tanto su Lagrangiano puede aproximarse de la forma

$$\mathcal{L} = F(X). \quad (3.21)$$

La dinámica de los campos escalares asociados a este tipo de Lagrangianos se ve simplificada debido a que dependen de una única variable. Con ello concluimos que el campo escalar con un Lagrangiano puramente cinético es equivalente a un fluido cuya ecuación de estado $\gamma_\varphi = (\rho + P)/\rho$ es función solo de la densidad, en otras palabras un fluido barotrópico.

Como en todos los fluidos barotrópicos, las perturbaciones lineales están dadas por la velocidad del sonido

$$c_{baro}^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{P_X}{\rho_X}. \quad (3.22)$$

Esta expresión es la misma que la obtenida por Garriga y Mukhanov en [115] para la velocidad de perturbaciones isotrópicas c_s^2 . En el caso de Lagrangianos puramente cinéticos debido a

¹ γ_m se refiere a la ecuación de estado correspondiente a los fluidos presentes en el universo distintos del campo escalar. No está limitado a valer 1 que corresponde a polvo, podría valer 4/3 si el fluido extra es tipo radiación.

que todas las variables físicas del campo dependen solo de una variable (X), las perturbaciones isotrópicas son las únicas posibles y $c_s^2 = c_{baro}^2$.

Las soluciones cosmológicas de este tipo de campos escalares pueden obtenerse observando que el Lagrangiano es invariante con respecto a la transformación

$$\varphi \mapsto \varphi + \varphi_0, \quad (3.23)$$

con lo cual esta es una simetría del sistema. Por tanto, aplicando el teorema de Noether podemos obtener una corriente conservada de la forma $J^\mu = F_X \partial^\mu \varphi$ que satisface $J^\mu{}_{;\mu} = 0$, usando el teorema de la divergencia [116] observamos que

$$(\sqrt{-g} J^\mu)_{;\mu} = 0, \quad (3.24)$$

donde el determinante para una métrica de FRW plana está dado por $g = -a^6$. Usando la propiedad de homogeneidad, las derivadas espaciales en (3.24) se cancelan quedando solo la derivada temporal que puede ser integrada como

$$a^6 F_X^2 X = \kappa, \quad (3.25)$$

donde κ es una constante de integración. Este resultado puede ser obtenido directamente de la integración de las ecuaciones de evolución (1.28, 1.30) como se hace en las referencias [16, 37, 117].

Hay que señalar también que este resultado no se ve afectado por la presencia de otras componentes en el universo. A diferencia de los resultados de la sección previa en que se suponía la presencia o ausencia de un fluido extra, aquí no hemos hecho ninguna suposición sobre los otros fluidos presentes en el universo.

3.4. Energía y materia oscura

Una vez que hemos especificado la forma funcional para $F(X)$ es posible obtener la ecuación de estado y velocidad del sonido barotrópicas, así como la expresión para X en términos del factor de escala a partir de la ecuación (3.25). En el caso del Lagrangiano (3.2), usando los términos que no dependen explícitamente del campo escalar, obtenemos la parte cinética dada por

$$F(X) = \frac{1}{2\alpha - 1} \left((AX)^\alpha - 2\alpha\alpha_0 \sqrt{AX} \right) + M, \quad (3.26)$$

la cual, excepto por la constante M , fue propuesta por Chimento en [16]. La densidad del campo escalar para esta expresión, calculada a partir de la ecuación (1.43) está dada por

$$\rho = (AX)^\alpha - M, \quad (3.27)$$

y la ecuación de estado puede escribirse explícitamente como

$$P = n(M - \alpha_0(M + \rho)^{n/(n-1)}) + (n-1)\rho, \quad (3.28)$$

donde $n = 2\alpha/(2\alpha - 1)$ como lo habíamos especificado en la sección previa. La velocidad de sonido puede expresarse entonces como

$$c_s^2 = (n-1) \left(1 + \frac{\alpha_0}{(M + \rho)^{1/n}} \right). \quad (3.29)$$

El término cinético puede ser obtenido como función del factor de escala usando (3.25), quedando

$$AX = (\alpha_0 + c_0 a^{-3})^{2/(2\alpha-1)}, \quad (3.30)$$

donde c_0 es una constante de integración. A partir de esta ecuación podemos obtener las expresiones para las distintas cantidades físicas en términos del factor de escala. Así, la densidad queda como

$$\rho = \left[\alpha_0 + \frac{c_0}{a^3} \right]^n - M, \quad (3.31)$$

la presión

$$P = \frac{1}{(2\alpha-1)} \left[\left(\alpha_0 + \frac{c_0}{a^3} \right)^n - 2\alpha\alpha_0 \left(\alpha_0 + \frac{c_0}{a^3} \right)^{n/2\alpha} \right] + M, \quad (3.32)$$

y la velocidad del sonido

$$c_s^2 = \frac{P_X}{\rho_X} = \frac{1}{(2\alpha-1)} \frac{1}{\alpha_0 a^3 / c_0 + 1}. \quad (3.33)$$

A partir de la expresión (3.31) es posible identificar términos que evolucionan en el régimen homogéneo de la misma forma que una constante cosmológica y una componente de materia. Como hemos supuesto que n es un entero positivo, es posible expandir la solución (3.31) como la serie finita

$$\rho = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_0^{n-k} \left(\frac{c_0}{a^3} \right)^k - M. \quad (3.34)$$

Los primeros términos de esta serie son

$$\rho = \alpha_0^n - M + \underbrace{\frac{nc_0\alpha_0^{n-1}}{a^3}}_{\rho_3} + \underbrace{\frac{n(n-1)c_0^2\alpha_0^{n-2}}{2a^6}}_{\rho_6} + \dots \quad (3.35)$$

donde los primeros dos términos son constantes y podemos identificarlos con una componente de energía oscura tipo constante cosmológica, y el término ρ_3 evoluciona de la misma forma que un fluido tipo polvo que identificaremos con la materia oscura. Los últimos términos, como el denotado por ρ_6 se harán pequeños en la época de nucleosíntesis ajustando

adecuadamente los parámetros, de otra forma podrían modificar la producción de elementos ligeros al inicio del universo. Para los primeros términos, explícitamente hacemos las siguientes identificaciones

$$\alpha_0^n - M = \rho_{de0}, \quad (3.36)$$

$$\frac{nc_0\alpha_0^{n-1}}{a_0^3} = \rho_{dm0}, \quad (3.37)$$

donde ρ_{de0} y ρ_{dm0} son los valores presentes para la energía y materia oscura respectivamente. Según los resultados del satélite Planck, [3] en el modelo Λ CDM la densidad actual de materia oscura está dada respecto a la densidad de energía oscura como $\rho_{dm0} = 2.7\rho_{de0}$, a lo largo de este capítulo usaremos esta relación para cancelar todas las dependencias en ρ_{dm0} .

El número de términos extra en la expansión (3.35) dependen del valor de n . Para $n = 2$ correspondiente a la más pequeña posible, ρ_6 es el único término extra; este caso fue analizado en [12, 13]. Si $n = 3$ tendremos además un término ρ_9 proporcional a a^{-9} y así sucesivamente. Todos estos términos tienden a dominar en el pasado como puede verse en la figura 3.2. Para que no destruyan la evolución conocida del universo, debemos asegurar que sean pequeños no solo en la actualidad, sino también en el pasado y en particular en la época de nucleosíntesis; de otra forma el cambio en la historia de la expansión del universo modificaría las abundancias observadas de los elementos ligeros en éste. Definiendo

$$\rho_{3k} \equiv \binom{n}{k} \alpha_0^{n-k} \left(\frac{c_0}{a^3}\right)^k, \quad (3.38)$$

esta condición puede escribirse como $\rho_k(a_{\text{nuc}}) \ll \rho_r(a_{\text{nuc}})$, la cual puede reescribirse usando la condición (3.37) y la densidad ρ_{dm0} medida por Planck como

$$\binom{n}{k} z_{\text{nuc}}^{3k-4} \ll (2.7n)^k \frac{\rho_{r0}}{\rho_{de0}} \left(\frac{\alpha_0^n}{\rho_{de0}}\right)^{k-1} \quad (3.39)$$

para $k = 2, 3, \dots, n$, donde z es el corrimiento al rojo. Estas desigualdades se convierten en $n-1$ condiciones que α_0 debe cumplir pues es el único parámetro libre en ellas; así obtenemos

$$\alpha_0^n \gg \rho_{de0} \left[\binom{n}{k} \frac{z_{\text{nuc}}^{3k-4}}{(2.7n)^k} \frac{\rho_{de0}}{\rho_{r0}} \right]^{1/(k-1)}. \quad (3.40)$$

Como la condición más restrictiva corresponde a $k = n$, es necesario únicamente pedir a α_0 que satisfaga la desigualdad

$$\alpha_0^n \gg \left[\frac{z_{\text{nuc}}^{3n-4}}{(3n)^n} \frac{\rho_{de0}}{\rho_{r0}} \right]^{1/(n-1)} \rho_{de0}. \quad (3.41)$$

Esta desigualdad se obtuvo de requerir que términos como ρ_6 sean pequeños durante nucleosíntesis; sin embargo, para el caso $n=2$ pareciera que α_0 no aparece en ρ_6 por lo que no debería haber una restricción sobre este parámetro. En la sección 3.4.1 observaremos que

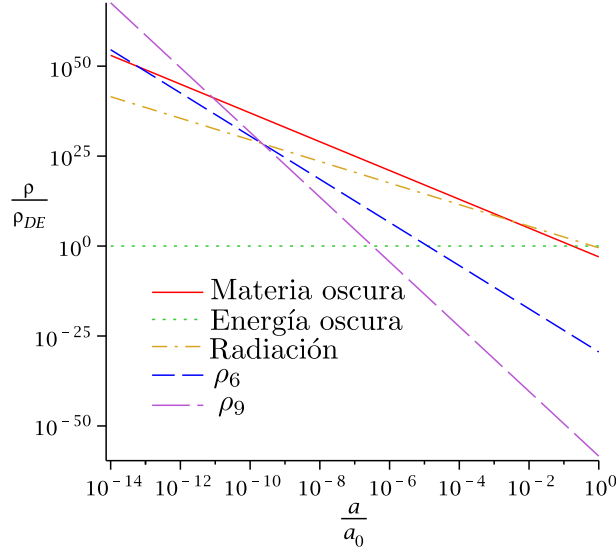


FIGURA 3.2: Evolución de los distintos componentes de la densidad de energía para $n = 3$, $M = (10^{-24} M_{\text{pl}})^4$. ρ_9 y ρ_6 son subdominantes desde antes de la época de nucleosíntesis y hasta nuestros días.

para este caso particular la restricción sí está presente y observaremos con más detalle el porqué.

Como $z_{\text{nuc}} \simeq 10^{10}$, de la expresión anterior concluimos que α_0^n tiene una magnitud al menos 10^{10} veces aquella de la energía oscura, mientras que al mismo tiempo la condición (3.36) señala que la diferencia de este término y M debe explicar la energía oscura. Esto implica que ambas cantidades son prácticamente iguales, con una diferencia de una parte en 10^{10} lo cual representa un problema de ajuste fino (*fine tuning*) para este modelo. Por otro lado la condición (3.41) puede describirse también como una condición sobre M

$$M \gg \left[\frac{z_{\text{nuc}}^{3n-4} \rho_{de0}}{(3n)^n \rho_{r0}} \right]^{1/(n-1)} \rho_{de0}, \quad (3.42)$$

donde al observar el Lagrangiano (3.2) vemos que M entra como una constante cosmológica la cual no tiene la condición tan restrictiva del modelo Λ CDM y aquí tiene posibilidad de tomar los valores grandes obtenidos de consideraciones de teoría cuántica de campos. Para evitar valores de la densidad por arriba de la escala de Planck, exigimos $M < M_{\text{pl}}^4 \sim 10^{122} \rho_{de0}$. Como la condición (3.42) implica que M en el caso más restrictivo debe ser mayor que $\sim 10^{29} \rho_{de0}$, aún tenemos 93 ordenes de magnitud en que M puede tomar valores, o incluso más en casos de n menos restrictivos como veremos en la siguiente sección con modelos específicos.

3.4.1. Casos particulares

El caso particular para $n = 2$, $\alpha = 1$ fue estudiado por primera vez en las referencias [12, 13]. Para este caso se aprovecha que A es un parámetro adimensional y se hace igual a uno. La

densidad del campo estará dada, como función del factor de escala, por la expresión

$$\rho = \alpha_0^2 - M + \frac{2c_0\alpha_0}{a^3} + \frac{c_0^2}{a^6}. \quad (3.43)$$

Al identificar los primeros dos términos con la materia y energía oscuras, y el último término hacerlo pequeño en la época de nucleosíntesis, obtenemos

$$\alpha_0^2 - M = \rho_{de0}, \quad (3.44)$$

$$\frac{2c_0\alpha_0}{a_0^3} = \rho_{dm0}, \quad (3.45)$$

$$\frac{c_0^2}{a_{nuc}^6} \ll \rho_{nuc}. \quad (3.46)$$

La densidad de radiación en la época de nucleosíntesis, que denotamos como ρ_{nuc} , es del orden de $(1MeV)^4$; con esto, la desigualdad (3.46) se convierte en una condición para c_0 . Si suponemos que el factor de escala es 1 en la época actual, en la época de nucleosíntesis $a_{nuc} = 10^{-10}$, por lo que tenemos como condición

$$c_0 \ll (10^{-9} eV)^2. \quad (3.47)$$

Este parámetro puede parecer muy pequeño, pero debemos recordar que en realidad es una constante de integración que aparece por primera vez en la ecuación (3.30). De esta ecuación observamos que c_0 determina que tan cerca se encuentra el parámetro cinético del mínimo de $F(X)$. Si denotamos como X_m al parámetro que minimiza a la función F , tenemos que

$$X - X_m \approx \frac{2\alpha_0 c_0}{a^3}, \quad (3.48)$$

que no es más que la densidad de materia oscura.

Aunque la constante de integración c_0 no tiene significado físico por si sola, la ecuación (3.47) en conjunto con la ecuación (3.45) nos permite obtener la condición

$$\alpha_0 \gg \frac{\rho_{dm0} z_{nuc}^3}{2\sqrt{\rho_{nuc}}}. \quad (3.49)$$

Esta condición es equivalente a la que habríamos obtenido sustituyendo $n = 2$ en (3.41), aunque la expresión se escribiría distinto, como

$$\alpha_0 \gg \frac{z_{nuc} \rho_{de0}}{36\sqrt{\rho_{r0}}}. \quad (3.50)$$

Ambas expresiones son equivalentes, y numéricamente implican que α_0 debe ser mucho mayor que $(1KeV)^2$. En términos de masas de Planck, esto equivale aproximadamente a que α_0 debe ser mucho mayor que $10^{-50} M_{pl}^2$. Escogiendo como límite seguro

$$\alpha_0 = (1MeV)^2. \quad (3.51)$$

De la ecuación (3.44) obtenemos el valor de la constante M como

$$M = (1MeV)^4 - (10^{-3}eV)^4. \quad (3.52)$$

Esta última ecuación ejemplifica el ajuste fino que introduce nuestro modelo. La velocidad del sonido dada por la ecuación (3.33) resulta ser $c_s(t_{eq}) \simeq 4.1 \times 10^{-26}$ en la época de igualdad de la densidad de materia y radiación, lo cual es suficientemente pequeño para permitir la formación de estructura.

El caso $n = 3$, $\alpha = 3/4$ fue desarrollado con detalle en el trabajo [17]. La densidad para este caso corresponde a

$$\rho = \alpha_0^3 - M + \frac{3c_0\alpha_0^2}{a^3} + \frac{3c_0^2\alpha_0}{a^6} + \frac{c_0^3}{a^9}, \quad (3.53)$$

que tiene dos términos extra que deben hacerse pequeños antes de la época de nucleosíntesis. Esto se logra con la condición (3.41) que implica que $\alpha_0^3 \ll 10^{-97} M_{pl}$.

Podemos escoger, por ejemplo $\alpha_0^3 \sim (10^{-24} M_{pl})^4$, como M es del mismo orden de magnitud que α_0^3 , ambas cantidades tendrán un valor de alrededor de $10^{28} \rho_{de0}$ mientras que su diferencia será exactamente ρ_{de0} ; esto es el problema de ajuste fino que mencionamos en la anterior subsección. Al escoger estos valores para α_0 y M podemos determinar usando la ecuación (3.37) que $c_0 \sim 10^{-53} M_{pl}^{4/3} \alpha_0^3$, con lo cual la evolución de las distintas componentes de la ecuación (3.53) queda completamente determinada, como se muestra en la figura 3.2. Los corrimientos al rojo a los cuales los valores de ρ_6 y ρ_9 son iguales a la densidad de energía de radiación son, respectivamente, $z_6 = 1.6 \times 10^{14}$ y $z_9 = 1.3 \times 10^{11}$, en una época anterior a nucleosíntesis. La contribución total de los términos extra en nucleosíntesis será $\Omega_{extra}(t_{nuc}) = 10^{-6}$ y en el tiempo actual $\Omega_{extra}(t_0) = 10^{-56}$, así que no afectarán la dinámica homogénea del universo en comparación con el modelo Λ CDM.

Este mismo análisis puede ser hecho para cualquier otra elección particular del parámetro n . Primero usar (3.42) para determinar la cota inferior de M . Luego de escoger un valor particular para este parámetro. Finalmente obtener los demás parámetros usando las condiciones (3.36, 3.37). Por ejemplo, para $n = 4$ se obtiene la condición $M \gg 3 \times 10^{26} \rho_{de0}$.

3.5. Modelo de Scherrer

El modelo propuesto por Sherrer en [37] consiste en un campo escalar con Lagrangiano puramente cinético al igual que el estudiado en la sección anterior. Sin embargo, debido a su simplicidad, este campo ha sido muy usado en trabajos de unificación de materia oscura con energía oscura [28, 37, 38, 118]. La forma del Lagrangiano

$$F(X) = F_0 + F_2(X - X_0)^2 \quad (3.54)$$

consiste en una parábola con mínimo en $X = X_0$, donde F_0 y F_2 son constantes. Al igual que en el Lagrangiano (3.26) es posible obtener la densidad del campo en términos de X como

$$\rho = -F_0 + F_2(X^2 - X_0^2), \quad (3.55)$$

y con ello obtener la presión $P = F(X)$ en términos de la densidad

$$P = F_0 + F_2 \left(\sqrt{\frac{\rho + F_0}{F_2} + X_0^2} - X_0 \right)^2, \quad (3.56)$$

así como la expresión para la velocidad del sonido

$$c_s^2 = \frac{X - X_0}{X}. \quad (3.57)$$

Podemos observar que cuando $X \rightarrow X_0$ el sistema se comporta como una constante cosmológica con densidad $\rho = -P = -F_0$ y ecuación de estado $\gamma_\varphi = 0$, mientras la velocidad del sonido tiende a cero.

La evolución para el término cinético X calculada a partir de la ecuación (3.25) está dada por

$$(X - X_0)^2 X = \frac{d}{a^6}, \quad (3.58)$$

donde d es una constante de integración. Para obtener X como función del factor de escala vemos que esta ecuación tiene tres soluciones, como se observa en la figura 3.3. Se considerará solo la solución con $X > X_0$ pues es la única válida para todos los valores de a ; esta solución está dada por

$$X = \frac{2X_0}{3} + \frac{a^2 X_0^2}{3 \left(\frac{27c}{2} - a^6 X_0^3 + \frac{3}{2} \sqrt{3} \sqrt{27c^2 - 4a^6 c X_0^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left(\frac{27c}{2} - a^6 X_0^3 + \frac{3}{2} \sqrt{3} \sqrt{27c^2 - 4a^6 c X_0^3} \right)^{1/3}}{3a^2}. \quad (3.59)$$

La evolución del parámetro cinético dada por esta ecuación tiene dos comportamientos asintóticos importantes; el primero ocurre para factores de escala grandes, cuando X se acerca a X_0 de tal forma que

$$\epsilon = \frac{X - X_0}{X_0} \ll 1. \quad (3.60)$$

En este caso la evolución de X puede reducirse a

$$X = X_0 \left[1 + \epsilon_1 \left(\frac{a_1}{a} \right)^3 \right], \quad (3.61)$$

y la densidad evoluciona como

$$\rho \simeq -F_0 + 4F_2 X_0^2 \epsilon_1 \left(\frac{a_1}{a} \right)^3. \quad (3.62)$$

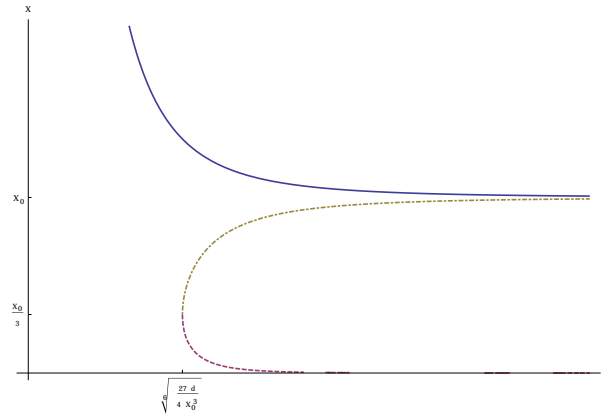


FIGURA 3.3: Evolución del parámetro cinético X como función del factor de escala en el modelo de Scherrer. Existen tres soluciones, para factores de escala grandes; dos de ellas tienden a $X = X_0$ (línea azul, y línea verde) y una tiende a $X = 0$ (línea magenta). Solo tomaremos en cuenta la solución dada por la línea continua pues es la única válida para todo el rango del factor de escala.

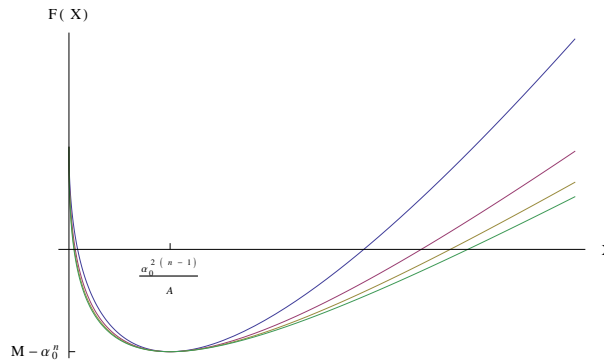


FIGURA 3.4: Gráfica del Lagrangiano (3.26) para los valores de $n = 2, 3, 4$ y 5 .

Esta densidad tiene un comportamiento parecido a una constante más una componente de materia sin presión. Este comportamiento lo presentará cualquier campo escalar con Lagrangiano puramente cinético cuyo parámetro cinético X se encuentre cerca de un mínimo suave.

El segundo comportamiento asintótico ocurre cuando $X \gg X_0$. En este caso, $X^3 = c/a^6$ y $\rho = F_2 c/a^4$; por lo que la densidad de campo, al menos al nivel homogéneo, evoluciona de la misma forma que la radiación. Este comportamiento, a diferencia del estudiado en el párrafo anterior, no es genérico. Por ejemplo, la densidad para el Lagrangiano (3.26) en este mismo régimen es proporcional a a^{-3n} .

En la sección 3.4 observamos que el campo escalar que estudiamos, cuyo Lagrangiano está dado en (3.26) puede tener una densidad de energía compuesta por una parte constante más otra que evoluciona como a^{-3} si los parámetros se ajustan adecuadamente. Este comportamiento coincide con el encontrado para el campo de Scherrer cuando $X \sim X_0$. La razón de que ambos comportamientos coincidan es que los Lagrangianos correspondientes son parecidos en el régimen adecuado. Puede verse de la figura 3.4 que el Lagrangiano (3.26) tiene

un mínimo suave y que puede ser aproximado por una función cuadrática. Haciendo una expansión de Taylor alrededor del mínimo $\alpha_0^{2(n-1)}/A$ se obtiene

$$F(X) \approx M - \alpha_0^n + \frac{1}{4} A^2 \alpha_0^{-3n+4} \left(X - \frac{\alpha_0^{2(n-1)}}{A} \right)^2, \quad (3.63)$$

con lo cual es fácil identificar los parámetros de este Lagrangiano con los correspondientes en el de Scherrer como

$$X_0 = \frac{\alpha_0^{2(n-1)}}{A}, \quad (3.64)$$

$$F_0 = M - \alpha_0^n, \quad (3.65)$$

$$F_2 = \frac{1}{4} A^2 \alpha_0^{-3n+4}. \quad (3.66)$$

En nuestro modelo, el campo se acerca al mínimo del Lagrangiano desde épocas tempranas del universo y permanece en dicho régimen. Esto se puede ver pues el parámetro de desviación respecto al mínimo está dado en este caso por $\epsilon \simeq \rho_3 / \alpha \alpha_0^n$, que de la condición (3.41) se encuentra acotado como

$$\epsilon \ll \frac{(n-1)\rho_3}{n\rho_{\text{de}0}} \left(\frac{(3n)^n \rho_{r0}}{z_{\text{nuc}}^{3n-4} \rho_{\text{de}0}} \right)^{1/(n-1)} \quad (3.67)$$

o

$$\epsilon \ll (z+1)^3 (n-1) (3n)^{1/(n-1)} 10^{-30+36/(n-1)}. \quad (3.68)$$

Para los casos con $n = 2$ y $n = 3$, la desviación al inicio de la dominación de materia z_{eq} es menor que 10^{-13} y 10^{-16} , respectivamente. Y esta desviación continúa reduciéndose con la evolución del universo. Este resultado será importante en la siguiente sección pues usaremos dicho parecido entre los campos para aplicar resultados del modelo de Scherrer al nuestro.

3.6. Perturbaciones lineales

Las perturbaciones lineales para modelos de campo escalar que unifican materia y energía oscuras se han estudiado en trabajos como [38] y, en particular para el modelo de Scherrer en [118]. En este último se cuantifica la desviación entre la función de transferencia del modelo de Scherrer $T(k)$ y la del modelo Λ CDM a través de la función $T_Q(k)$ definida como $T(K) = T_Q(k) T_{\text{CDM}}(k)$. El cálculo de esta función se realiza de forma numérica pero puede ser aproximada por

$$T_Q(k) \approx \frac{3j_1(x)}{x} [1 + (x/3.4)^2]^{1/(\beta+1)} \quad (3.69)$$

con

$$x = \left(\frac{k\eta_*}{7.74} \right), \quad \beta = 0.21 \left[\frac{\epsilon_0}{10^{-18}} \left(\frac{\Omega_m h^2}{0.14} \right)^3 \right]^{0.12}, \quad (3.70)$$

donde where η_* es el tiempo conforme evaluado en $a_* = 14\epsilon_0^{1/3}$.

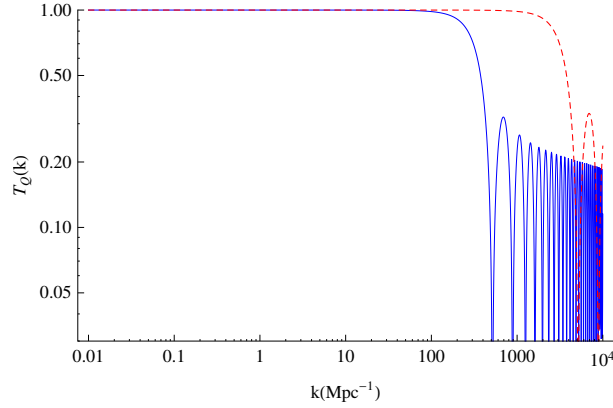


FIGURA 3.5: Desviación de la función de transferencia entre nuestro modelo y el de Λ CDM para $n = 2$ (línea azul continua) y $n = 3$ (línea roja punteada). La desviación es significativa solo para escalas menores que una centésima de megaparsec, en las cuales la teoría de perturbaciones lineales ya no es válida.

Para $\epsilon_0 \rightarrow 0$ la función de transferencia se vuelve cada vez más parecida a la de Λ CDM pues $T_Q(k) \rightarrow 1$. En [118] se concluye que el valor actual de ϵ debe ser menor que 10^{-16} para generar un espectro adecuado en la radiación cósmica de fondo. En nuestro modelo, esta condición es satisfecha pues, como se demostró en la sección anterior, se cumple la desigualdad (3.68) que se traduce para los modelos con $n = 2$ y 3 en que ϵ al tiempo actual es menor que 10^{-23} y 10^{-26} , respectivamente. La figura 3.5 muestra la función $T_Q(k)$ para ambos casos, la cual se desvía significativamente de 1 únicamente para escalas pequeñas (k 's grandes) fuera de la región en que la teoría de perturbaciones lineales es válida. Para n 's mayores las desviaciones de $T(k)$ ocurren para escalas aun más pequeñas.

3.7. Inflación y universo temprano

La solución encontrada para el Lagrangiano puramente cinético en la sección 3.4 es una solución exacta que vale para todas las energías si el Lagrangiano no tiene un término potencial o si éste nunca es importante. Es fácil darse cuenta de que esta solución no produce un periodo de expansión acelerada en la época temprana del universo, pero aquí demostraremos que no es compatible con una época de inflación aun si ésta es generada por un campo externo, y en la siguiente subsección observaremos cómo se resuelve este problema.

Una longitud típica del universo, al inicio de inflación está dada por el factor de Hubble de la época $\lambda_i = H_i^{-1}$ la cual evoluciona de forma proporcional al factor de escala cuando el universo se expande

$$\lambda_i(a) = \lambda_i \left(\frac{a}{a_i} \right). \quad (3.71)$$

Esta longitud debe expandirse lo suficiente durante inflación de forma que en el presente sea mayor que nuestro universo observable $\lambda_0 = H_0^{-1}$. Para un periodo de expansión exponencial donde $a_0/a_i = e^N a_0/a_f$, este requisito se cumple si N es del orden de 60. En este caso, la

razón entre ambas longitudes está dada por

$$\frac{\lambda_i(a_0)}{\lambda_0} = \frac{H_i^{-1}}{H_0^{-1}} e^N \left(\frac{a_0}{a_f} \right), \quad (3.72)$$

y debe ser mayor que uno para que nuestro universo observable provenga de regiones causalmente conectadas en el universo temprano.

La razón (3.72), está relacionada con ρ_3 , una de las componentes de la expansión (3.35) si consideramos que $\Omega_3 \equiv \rho_3/3M_{\text{pl}}^2 H^2$ y reemplazamos los factores de escala, obteniéndose

$$\frac{\lambda_i(a_0)}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{\Omega_{3i}\rho_{30}}{\Omega_{30}\rho_{3i}}} e^N \left(\frac{a_0}{a_f} \right), \quad (3.73)$$

pero como ρ_3 es proporcional a a^{-3} , podemos simplificar a

$$\frac{\lambda_i(a_0)}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{\Omega_{3i}}{\Omega_{30}}} \left(\frac{a_i}{a_0} \right). \quad (3.74)$$

En el caso límite en que la inflación es apenas suficiente, esta razón es uno, lo que implica

$$\Omega_{3i} = \Omega_{30} \frac{a_0}{a_i}. \quad (3.75)$$

Pero como $\Omega_{30} \approx 0.26$ y a_0/a_i es típicamente mayor que 10^{60} , el parámetro de densidad al inicio de inflación es enorme.

Esto es de esperarse pues para este resultado supusimos que el término ρ_3 que hemos identificado con la materia oscura en la época actual estuviera presente aún antes de inflación; en lugar de ser generado al final de este periodo. Para que esto pase, la densidad inicial debe ser exageradamente grande. Para resolver este problema, en la siguiente subsección usaremos el Lagrangiano completo (3.2) con su parte potencial, la cual modificará el comportamiento de la densidad a tiempos tempranos y permitirá que el mismo campo actúe como el generador de inflación. Otra posible solución, aplicable en caso de considerar un campo externo como el inflatón, consistiría en introducir un término de interacción en el Lagrangiano del campo que permitiera al inflatón decaer en nuestro campo durante el periodo de recalentamiento del universo, al final de inflación. Esta posibilidad no fue considerada ya que estamos interesados en el caso en que el mismo campo que produce inflación también produzca la materia oscura y energía oscura.

3.7.1. Inflación debida al campo escalar

Como se demostró en la sección 3.2, para energías grandes, el campo escalar tiende a un estado donde el potencial domina sobre el término cinético. En este estado es válida la aproximación de rodamiento lento (*Slow Roll*) donde las ecuaciones de movimiento dadas originalmente por

$$3M_{\text{pl}}^2 H^2 = 2XF_X - F + V, \quad (3.76)$$

$$(F_X \dot{\varphi})' + 3HF_X \dot{\varphi} + V_{\varphi} = 0, \quad (3.77)$$

se simplifican despreciando los términos debidos a la componente cinética del Lagrangiano. Las ecuaciones simplificadas quedan de la forma

$$3M_{\text{pl}}^2 H^2 = V(\varphi), \quad (3.78)$$

$$3HF_X \dot{\varphi} + V_{\varphi}(\varphi) = 0. \quad (3.79)$$

Esta aproximación se mantendrá válida durante el periodo de inflación.

Usando las ecuaciones anteriores es posible obtener la relación $F_X = -V_{\varphi} M_{\text{pl}} / \dot{\varphi} \sqrt{3V}$, que para el caso del potencial cuadrático que estamos usando se reduce a

$$F_X = \frac{m M_{\text{pl}}}{\sqrt{3X}}, \quad (3.80)$$

donde esta ecuación define totalmente el valor de X durante el periodo de rodamiento lento una vez que se ha especificado la forma de la función $F(X)$, por lo que este valor para el parámetro cinético se mantendrá aproximadamente constante durante todo el periodo de inflación. A este valor le llamaremos X_{sr} y es constante debido a la elección que hicimos de un potencial cuadrático. Para otros tipos de potencial la ecuación (3.80) también dependerá de φ y X_{sr} no será constante.

Los parámetros de slow roll para este tipo de Lagrangianos están dados por [119, 120]

$$\epsilon = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2F_X} \left(\frac{V_{\varphi}}{V} \right)^2, \quad (3.81)$$

$$\eta = \frac{M_{\text{pl}}^2}{F_X^2} \frac{V_{\varphi\varphi}}{V}, \quad (3.82)$$

los cuales difieren de las expresiones para campos canónicos en el factor F_X , que para este caso es constante pues depende solamente de X_{sr} . La aproximación de rodamiento lento es válida mientras estos parámetros sean pequeños comparados con uno.

El final de inflación ocurre cuando $\epsilon \sim 1$, que para el Lagrangiano (3.2) corresponde a

$$\varphi_f^2 = \frac{2M_{\text{pl}}^2}{F_X}. \quad (3.83)$$

Podemos suponer que el parámetro η también se vuelve uno en este tiempo, lo cual implica que $F_X(X_{\text{sr}}) = 1$. Con esto, los parámetros de rodamiento lento y las ecuaciones de movimiento (3.78, 3.79) se convierten en las canónicas, así que el análisis siguiente se puede realizar de forma similar al que se lleva a cabo para la aproximación estándar de rodamiento lento.

El número de *e-folds* se obtiene de la integral del parámetro de Hubble, dada por

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{\varphi_f}^{\varphi_i} \frac{F_X}{M_{\text{pl}}^2} \frac{V'}{V} dt \approx \frac{(\varphi_i^2 - \varphi_f^2)}{4M_{\text{pl}}^2}, \quad (3.84)$$

donde φ_i y φ_f son los valores del campo al inicio y final de inflación, respectivamente. Suponiendo $N \approx 60$ y usando (3.83), obtenemos

$$\varphi_i = 15.5M_{\text{pl}}. \quad (3.85)$$

El parámetro m se puede obtener usando la amplitud medida de las perturbaciones de temperatura en el CMB [121, 122] $\delta = 2 \times 10^{-5}$, como en [47, 123]; obtenemos $m = 7 \times 10^{-6} M_{\text{pl}}(n-1)^{1/4}$.

Con el valor del campo al inicio de inflación también es posible obtener los valores para los parámetros de rodamiento lento, que en este caso dan

$$\epsilon_i = 8.3 \times 10^{-3} \sqrt{n-1}, \quad (3.86)$$

$$\eta_i = 8.3 \times 10^{-3} \sqrt{n-1}, \quad (3.87)$$

donde n es el parámetro que hemos usado a lo largo de este capítulo, dado por $2\alpha/(2\alpha-1)$. Con lo que obtenemos que efectivamente estamos dentro del régimen de rodamiento lento. Con estos valores es posible calcular el índice espectral y la razón entre perturbaciones tensoriales y escalares. En particular, para el Lagrangiano de altas energías dado por (3.8), estas expresiones fueron calculadas en la referencia [48]. Siguiendo a esta referencia obtenemos que

$$n_s = 1 - 0.03\sqrt{n-1}, \quad (3.88)$$

$$r = 0.15\sqrt{n-1}. \quad (3.89)$$

El índice espectral n_s reportado por el satélite Planck en [3] tiene un valor de 0.960 ± 0.007 . Comparando con nuestro modelo obtenemos que el caso con $n = 3$ es favorecido, pues en este caso el índice espectral $n_s \approx 0.957$ se encuentra en el rango observado. Por su parte, los modelos con $n = 2$ y $n = 4$ se encuentran en el rango entre 1σ y 2σ del valor observado, por lo que, aunque se encuentran desfavorecidos por las observaciones, no son descartados. En cambio, para el resto de los valores de n los modelos se encuentran más alejados que dos desviaciones estándar del valor observado.

La escala de energía durante inflación puede ser determinada usando las ecuaciones (3.83) y (3.85) con el valor del parámetro m . Para el inicio y el fin de inflación obtenemos

$$\begin{aligned} V_i &= 5.9 \times 10^{-9} M_{\text{pl}}^4 \sqrt{n-1}, \\ V_f &= 4.9 \times 10^{-11} M_{\text{pl}}^4 \sqrt{n-1}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

la cual es baja comparada con la densidad de energía de Planck.

El valor de η se puede obtener de la ecuación (3.82) sustituyendo la segunda derivada del potencial con la relación $V'' = 3F_X^2 X / M_{\text{pl}}^2$, obtenida de la aproximación de rodamiento lento. De ella obtenemos la expresión $\eta = 3X/V$. Como al final de inflación este parámetro es de orden 1 concluimos que el valor del parámetro cinético en este momento es del mismo orden de magnitud que el potencial, lo cual es de esperarse pues la época de inflación termina cuando el potencial deja de ser dominante sobre el término cinético. De (3.90) obtenemos que el parámetro cinético durante inflación vale

$$X_{\text{sr}} \sim 1.6 \times 10^{-11} M_{\text{pl}}^4 \sqrt{n-1}, \quad (3.91)$$

siendo, como dijimos, aproximadamente constante. Esta cantidad también se puede escribir en otras unidades como $X_{\text{sr}} \sim (4.8 \times 10^{15} \text{ GeV})^4 \sqrt{n-1}$.

Durante el análisis supusimos que $F_X(X_{\text{sr}}) = 1$. Esta suposición nos permite obtener el valor del parámetro A que es el único que no ha sido constreñido con ninguna de las condiciones para inflación, energía oscura o materia oscura. Así obtenemos

$$\frac{n}{2} \left(A^\alpha X_{\text{sr}}^{\alpha-1} - \alpha_0 \sqrt{\frac{A}{X_{\text{sr}}}} \right) = 1, \quad (3.92)$$

donde el término que contiene α_0 es pequeño comparado con el otro, por lo que obtenemos $A^\alpha = 2X_{\text{sr}}^{1-\alpha} / n$. Para el caso $n = 2$ que es el único en que este parámetro es adimensional obtenemos $A = 1$, para $n = 3$, $A = 10^{-4} M_{\text{pl}}^{4/3}$.

En las figuras 3.6 y 3.7 hemos integrado numéricamente las ecuaciones de evolución para el caso $n = 2$. En la primera de ellas vemos cómo se justifica nuestra suposición de rodamiento lento; la escala de energía asociada al potencial está varios órdenes de magnitud por arriba de la asociada a la parte cinética. También vemos cómo al final de inflación el potencial decae varios órdenes de magnitud en pocos e -folds. Esto justifica la aproximación hecha en la sección 3.3 donde supusimos que la energía contenida en el campo escalar estaría contenida principalmente en la parte cinética. Por su parte, en la figura 3.7 observamos como el parámetro cinético llega rápidamente a su valor constante y se mantiene en él durante los primeros e -folds de inflación, para alejarse de él al finalizar este periodo.

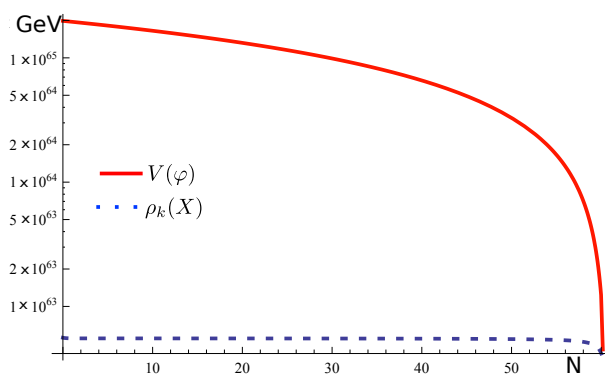


FIGURA 3.6: Comportamiento de las densidades de energía potencial y cinética para el caso $n = 2$. El eje horizontal es el número de e -folds. Luego de integrar numéricamente las ecuaciones de evolución del campo, observamos que el potencial está varios órdenes de magnitud por arriba de la densidad de energía cinética. Esto justifica el uso que hicimos de la aproximación de rodamiento lento. También vemos cómo al final de inflación el potencial decae varios órdenes de magnitud en pocos e -folds.

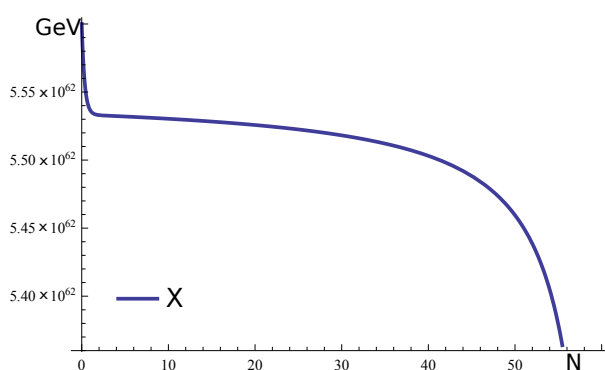


FIGURA 3.7: Comportamiento del parámetro cinético X para el caso $n = 2$. El eje horizontal es el número de e -folds. Luego de integrar numéricamente las ecuaciones de evolución del campo, observamos que X se acerca rápidamente a su valor constante X_{sr} . Podemos leer en la escala de energías que su valor se mantiene en el mismo orden de magnitud durante los 60 e -folds que dura inflación.

3.7.2. Fin de inflación

Al final de inflación, el término cinético empezará a dominar y el campo tenderá hacia el estado puramente cinético analizado en la sección 3.4. Parte de la densidad de energía contenida en el universo durante la época de inflación deberá transformarse en otros campos que a final de cuentas den origen a las partículas del modelo estándar que sabemos que están presentes en el universo desde la época de nucleosíntesis. En el modelo más simple de inflación con un campo escalar, esta transformación convierte toda la energía del inflatón en partículas de otros campos. En nuestro modelo, sin embargo, requerimos que el campo conserve parte de su energía de forma que sea subdominante en la época de dominación de radiación y, posteriormente, vuelva a dominar en forma de materia y energía oscuras. Este aspecto de los modelos de unificación es algo problemático, pues con los procesos usuales de recalentamiento no es fácil obtener la cantidad correcta de campo remanente.

En las referencias [6, 8, 9, 48, 97–99] se exploran diversas formas de producir este recalentamiento sin consumir toda la energía del campo escalar. Por ejemplo, en [98] se ajustan los parámetros el escenario conocido como *preheating* de forma que solo parte del campo decaiga. Por otro lado, en [99] se estudia la posibilidad de que, al final de inflación, la producción y posterior evaporación de agujeros negros primordiales cree la densidad requerida de radiación sin consumir toda la energía del inflatón. En otros trabajos, como la referencia [104], también se ha considerado que, aunque el campo pierda toda su energía, algún decaimiento posterior de una de las componentes de radiación podría regresar parte de esta energía al campo. En el presente trabajo exploramos el escenario conocido como producción gravitacional de partículas, el cuál fue propuesto inicialmente en [124] y aplicado como método de recalentamiento en [100, 101]. A continuación resumimos sus resultados y analizamos su aplicación a nuestro modelo.

La producción de partículas en un universo en expansión fue reportada inicialmente en [124]. En ese trabajo se considera un campo escalar con Lagrangiano canónico χ distinto del campo φ que hemos usado hasta ahora. Si este campo se cuantiza con una métrica de fondo de tipo FRW se observará que, a diferencia de lo que ocurre para la métrica de Minkowski, el estado de vacío dependerá del tiempo $|0\rangle_t$. Debido a que la cuantización se realiza en el esquema de Heisenberg, un estado inicial $|0\rangle_i$ se mantendrá constante pero sólo corresponderá al estado de vacío en un tiempo inicial t_i . A un cierto tiempo t_f el estado del campo, que sigue siendo $|0\rangle_i$, ya no corresponderá al estado de vacío dado ahora por $|0\rangle_f$. El estado por lo tanto tendrá un número de partículas distinto de cero dado por el valor esperado del operador de número \hat{N}_k el cual depende del tiempo

$${}_i\langle 0|\hat{N}_k(t_f)|0\rangle_i \neq 0. \quad (3.93)$$

Si este estado inicial ocurre al inicio de inflación en que todos los campos excepto φ se encuentran en su estado de vacío, entonces al final de inflación el campo (y de hecho todos los campos similares) tendrá un número de partículas distinto de cero. Dichas partículas finalmente decaerán a los componentes del modelo estándar que se encuentran presentes en el universo.

Para observar este efecto, se considera que el campo χ obedece la ecuación de Klein-Gordon (1.34), que para una métrica de fondo tipo FRW está dada por

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\chi + m_\chi^2\chi = 0. \quad (3.94)$$

De forma similar a la cuantización canónica en espacio plano, se propone una descomposición del campo en ondas planas dada por

$$\chi(x, t) = (aL)^{-3/2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega(k, t)}} \left(b_k(t) \exp \left[ik \cdot x - i \int_{t_i}^t \omega(k, t') dt' \right] + H.c. \right), \quad (3.95)$$

donde «H.c.» significa Hermitiano conjugado, L es una escala de volumen sobre la que se imponen condiciones periódicas ², k es el vector de onda y ω la frecuencia. La amplitud de las ondas planas, dada por b_k , se convertirá en el operador de aniquilación al momento de cuantizar el campo ³. A diferencia del campo en un espacio de fondo de Minkowski, en este caso la frecuencia ω y las amplitudes b_k dependerán del tiempo.

Para cuantizar se eleva el campo χ a la categoría de operador y se imponen las relaciones de conmutación usuales

$$[\hat{\chi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.96)$$

donde $\hat{\pi}$ es el momento conjugado dado por $\hat{\pi} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\chi}$. De esta relación es posible mostrar que los operadores \hat{b}_k satisfacen las relaciones de conmutación usuales para los operadores de aniquilación

$$[\hat{b}_k(t), \hat{b}_{k'}(t)] = \delta_{k,k'}. \quad (3.97)$$

Debido a que los operadores \hat{b}_k dependen del tiempo, es necesario analizar su evolución temporal. Considerando el ansatz

$$\hat{b}_k(t) = \alpha(k, t)^* \hat{b}_k(t_i) + \beta(k, t) \hat{b}_{-k}^\dagger(t_i), \quad (3.98)$$

se pueden obtener ecuaciones de evolución para los factores $\alpha(k, t)$ y $\beta(k, t)$.

Una vez que se tiene el operador de aniquilación, se puede obtener el estado de vacío como aquel que se ve anulado por este operador

$$\hat{b}_k(t) |0\rangle_t = 0. \quad (3.99)$$

Debido a que este estado cambia con el tiempo, si el campo se encuentra en el estado de vacío al inicio de inflación $|0\rangle_i$, dicho estado contendrá un número de partículas distinto de cero al final de inflación. Para observar esto, definiremos el operador de número de partículas, como $\hat{N}_k(t) = \hat{b}_k^\dagger(t) \hat{b}_k(t)$, el cual dependerá del tiempo al igual que \hat{b}_k . Es posible mostrar que el valor esperado del número de partículas estará dado por

$$\langle \hat{N}_k(t) \rangle = |\beta(k, t)|^2, \quad (3.100)$$

donde el factor β es el que aparece en la ecuación (3.98).

Por lo anterior, el cálculo del número de partículas producidas por este proceso al final de inflación, se reduce a calcular la evolución del factor $\beta(k, t)$. Para el caso de campos sin masa, este cálculo se fue realizado por Zel'dovich y Starobinsky en [125] y por Birrell y Davies en [126]. Posteriormente, en [100], estos resultados fueron aplicados a universos que transitan de un régimen tipo De Sitter a uno desacelerado, como ocurre al final de inflación. La

²Al final de los cálculos esta escala se hace tender a infinito $L \rightarrow \infty$.

³Es usual llamar a_k al operador de aniquilación, pero aquí usamos b_k con el fin de evitar confusión con el factor de escala.

densidad de energía se calcula a través de la expresión

$$\rho_\chi = \frac{1}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty k^3 |\beta(k, t)|^2 dk, \quad (3.101)$$

y se es del orden de $\rho_\chi \sim 10^{-2} H_f^4$. Si se considera que habrán g grados de libertad de distintos campos con el mismo comportamiento que χ , la densidad total estará dada por

$$\rho_{rf} \sim 0.01 g H_f^4, \quad (3.102)$$

donde H_f es el valor del factor de Hubble al final de inflación.

Siguiendo a la referencia [101] consideraremos que el número de grados de libertad g de los campos al final de inflación es cercano a 100; además, usando la ecuación (3.90) podemos calcular el factor de Hubble al final de inflación como $H_f = 2V_f/3M_{\text{pl}}$. Sustituyendo los valores, se obtiene una densidad

$$\rho_{rf} \sim 10^{-21} M_{\text{pl}}^4. \quad (3.103)$$

Si la energía potencial al final de inflación se transforma en energía cinética y se empieza a comportar como la solución (3.34), ésta inicialmente decaerá como a^{-3n} mientras que la densidad de radiación decae solo como a^{-4} . Entonces, luego de una expansión de $25/(3n-4)$ *e-folds* después de inflación, estas densidades se cruzarán y la radiación empezará a dominar. Es importante, para que el modelo sea viable, que este cruce ocurra antes de la época de nucleosíntesis. Se puede observar en la fórmula que el cruce es más rápido entre mayor sea n ; por ejemplo, para $n = 2$ el universo debe expandirse 10^5 veces (12 *e-folds*) luego del final de inflación; pero el modelo con $n = 4$ solo necesita 23 veces (3 *e-folds*). También podemos calcular la densidad del universo al momento en que el cruce ocurre, que está dada por

$$\rho_c \sim V_f \left(\frac{a_f}{a_c} \right)^{3n}. \quad (3.104)$$

Por ejemplo para $n = 2$, la energía será 10^{30} GeV^4 ; para $n = 3$ $\rho_c \sim 10^{43} \text{ GeV}^4$; e irá creciendo para n 's mayores. En todos los casos la época dominación de radiación inicia a energías mayores que la de nucleosíntesis, que ocurre a energías alrededor de 1 MeV.

Un problema reportado en las referencias [127–129] para este tipo de procesos de recalentamiento consiste en que, durante el periodo de transición entre inflación y dominación de radiación, la proporción de densidad de ondas gravitacionales crece. Por ello, este periodo no debe ser demasiado largo o se pueden dar escenarios como el investigado en [127] donde la densidad de energía de las ondas gravitacionales domina sobre el resto de las componentes del universo. La producción de ondas gravitacionales en este escenario ocurre debido al mismo mecanismo cuántico que la producción gravitacional de partículas estudiada en esta sección. Esto se debe a que cada una de las polarizaciones de las ondas gravitacionales cumplen por separado una ecuación de Klein-Gordon con masa igual a cero. De lo anterior,

la densidad de energía contenida en ondas gravitacionales al final de inflación se puede calcular con la expresión (3.102) para dos grados de libertad ($g_{GW} = 2$). Durante la subsecuente dominación de la componente con $\rho_\phi \propto a^{-3n}$, la densidad de ondas gravitacionales evolucionará por su parte con $\rho_{GW} \propto a^{-4}$, por lo que su proporción respecto a la densidad total del universo crecerá como $\Omega_{GW} \propto a^{3n-4}$. De este último resultado podría parecer que un periodo de transición demasiado largo permitiría que las ondas gravitacionales dominaran la densidad del universo, sin embargo, falta considerar la evolución de la densidad de radiación. Debido a que tanto la radiación como las ondas gravitacionales escalan de forma proporcional a a^{-4} , ambas densidades se mantendrán en la misma proporción al pasar el tiempo. Considerando, como lo habíamos hecho, que el número de grados de libertad al final de inflación es de $g = 100$ para la radiación y de $g_{GW} = 2$ para las ondas gravitacionales, podemos concluir de la ecuación (3.102) que

$$\rho_{GW} \sim \frac{\rho_r}{50}. \quad (3.105)$$

Esta proporción se mantendrá constante al pasar el tiempo por lo que la densidad de ondas gravitacionales siempre será menor que la de la radiación. En particular, durante la época de nucleosíntesis, se satisfará la cota observacional de $\rho_{GW} < 0.2\rho_r$ dada en las referencias [128, 129].

3.8. Conclusiones

En este capítulo consideramos un tipo de campo escalar no canónico que permite unificar la energía oscura, materia oscura e inflación. Esto se logra gracias a que la parte cinética del Lagrangiano del campo puede producir la materia y energía oscuras y que la parte potencial puede producir inflación. También obtuvimos los valores de los parámetros del Lagrangiano que son necesarios para que se reproduzcan adecuadamente las observaciones de la historia de expansión del universo.

Observamos que, aunque fue necesaria la introducción de un término tipo constante cosmológica M , su valor no es el de la energía oscura como ocurre en el modelo Λ CDM, sino que puede ser tan grande como se quiera, lo cual alivia el problema del valor tan pequeño que se obtiene en el modelo cosmológico estándar. Sin embargo, se introduce un ajuste fino en el sentido de que la densidad de este parámetro debe anularse casi por completo con α_0^n pero no exactamente para que la diferencia produzca la densidad actual de energía oscura.

Considerando las perturbaciones lineales asociadas al modelo, concluimos que éste se encuentra cerca del mínimo del potencial cinético antes del inicio de la era de dominación de materia. Gracias a esto, observamos que las perturbaciones no se alejan demasiado del modelo Λ CDM en la época en que domina la materia y la energía oscuras.

Para el periodo de inflación observamos que puede usarse una aproximación de rodamiento lento. Esta aproximación nos permite obtener expresiones para el índice espectral de las perturbaciones escalares, y la razón entre perturbaciones escalares y tensoriales, las cuales pueden compararse con observaciones. Al final de inflación introdujimos la producción gravitacional de partículas como mecanismo de recalentamiento. Este proceso crea una densidad de radiación inicial sin consumir toda la energía del campo escalar, la cual producirá posteriormente a la materia y energía oscuras. La densidad de radiación inicialmente es una pequeña fracción de la densidad del campo escalar; pero el periodo de dominación cinética que sigue después de inflación permite que la densidad del campo decaiga suficientemente rápido para que la radiación domine después de un tiempo.

El uso de este tipo de Lagrangianos para realizar la unificación de los 3 fenómenos se hizo inicialmente en la referencia [12] a partir de la cual en nuestro trabajo [17], en el que este capítulo está basado, generalizamos este trabajo para una clase mayor de campos escalares.

Vacío interactuante

En este capítulo estudiaremos modelos en que la energía del vacío es usada para reproducir la energía oscura. Las discusiones de este capítulo están basadas en las referencias [20–22]. Estos modelos incluyen a la constante cosmológica que, hasta la escritura de este texto, es el modelo más simple que reproduce todas las observaciones asociadas a la energía oscura. Además de ella, se han propuesto en la literatura otros modelos en que la densidad de energía del vacío depende del tiempo. En la mayoría de estos modelos, sin embargo, se ha considerado únicamente la dependencia temporal de esta densidad de energía en el régimen homogéneo. En este capítulo observaremos que para que un análisis de las perturbaciones del universo sea consistente se deben incluir también las perturbaciones de esta energía del vacío. También encontraremos que, para que la densidad de vacío dependa del tiempo es necesario que ésta interactúe con otros fluidos del universo.

En los modelos en que se tiene una teoría microfísica de la interacción del vacío se puede obtener claramente la forma de las perturbaciones de éste; sin embargo, para modelos efectivos, como lo son gran cantidad de modelos de la literatura, dicha microfísica es poco clara. Para estos modelos efectivos concluiremos que es necesario obtener la forma covariante de la interacción para poder obtener las perturbaciones del vacío. La expresión para la evolución temporal de la densidad de vacío podrá ser usada como referencia para obtener la expresión covariante; pero siempre habrán grados de libertad extra que nos permitirán formular más de un modelo de perturbaciones para el mismo modelo homogéneo.

En relación con lo estudiado en capítulos anteriores, observaremos que los campos escalares con Lagrangianos como los estudiados en los capítulos 2 y 3 también pueden verse como modelos de vacío interactuante. En ellos la densidad de vacío está dada por el potencial $V(\varphi)$, el cual interactúa con la parte cinética del campo. Gracias a la ecuación de Euler-Lagrange para el campo, tendremos una expresión covariante para el término de interacción y un modelo único para las perturbaciones.

4.1. Energía del vacío

Definimos la energía del vacío V como aquella que tiene asociado un tensor de energía-momento proporcional a la métrica

$$\check{T}_v^\mu = -V g_v^\mu, \quad (4.1)$$

donde en adelante usaremos el símbolo ($\check{}$) para denotar cantidades relacionadas con el vacío. En el caso particular de la constante cosmológica, la densidad de energía es constante y está dada por $V = M_{\text{pl}}^2 \Lambda$.

Si consideramos al vacío como un fluido, podemos preguntarnos por su velocidad y su densidad de energía en reposo, los cuales son, respectivamente, el eigenvector (unitario) y el (menos) eigenvalor del tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu} u^\mu = -\rho u_\nu. \quad (4.2)$$

Debido a ser proporcional a la métrica, todos los vectores son eigenvectores de este tensor de energía-momento pues

$$\check{T}_{\mu\nu} u^\mu = -V u_\nu \quad \forall u^\mu. \quad (4.3)$$

Esto es un resultado esperado que nos dice que el vacío no tiene una velocidad definida y por tanto tampoco un sistema de referencia preferencial. Por otro lado observamos que la densidad de energía asociada a este tensor de energía-momento está dada por $\check{\rho} = V$. Comparando con el tensor de energía momento del fluido perfecto

$$T_v^\mu = P g_v^\mu + (\rho + P) u^\mu u_\nu, \quad (4.4)$$

podemos identificar además, que la presión estará dada por $\check{P} = -\check{\rho} = -V$.

En el caso de que el vacío no interactúe con otros campos, como se supone usualmente en los trabajos de cosmología, de la conservación del tensor de energía-momento obtendremos que su densidad de energía es constante pues

$$\nabla_\mu \check{T}_v^\mu = -\nabla_\nu V = 0, \quad (4.5)$$

correspondiendo a una constante cosmológica. Para reproducir los modelos en que la energía del vacío cambia de valor en el tiempo, en cambio, es necesario considerar un término de interacción entre ésta y el resto de los campos. La interacción estará dada por el vector Q_ν de forma que

$$\nabla_\mu \check{T}_v^\mu = Q_\nu; \quad (4.6)$$

lo cual implica

$$\nabla_\nu V = -Q_\nu. \quad (4.7)$$

Si el vector de interacción es distinto de cero, el vacío podrá depender del tiempo pero también, necesariamente, dependerá del espacio para algún sistema de referencia o norma escogida. De ahí la importancia de estudiar las perturbaciones lineales asociadas a este sistema.

Si consideramos que $T^{(M)}_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento asociado al fluido o fluidos con los que interactúa el vacío, debido a la conservación del tensor de energía-momento completo $T^{(M)\mu}_{\nu} + \check{T}^{\mu}_{\nu}$, tendremos que el vector de interacción Q_{ν} también aparecerá en la ecuación de conservación de $T^{(M)\mu}_{\nu}$ como

$$\nabla_{\mu} T^{(M)\mu}_{\nu} = -Q_{\nu}, \quad (4.8)$$

donde Q_{ν} podría estar definido en base a cantidades vectoriales asociadas a alguno de los fluidos del universo.

A pesar de que, como lo mencionamos arriba, el vacío no tiene una velocidad única, cuando el flujo de energía Q_{ν} es distinto de cero se genera una dirección preferencial dada por el vector unitario

$$\check{u}^{\mu} = \frac{-\nabla^{\mu} V}{|\nabla_{\nu} V \nabla^{\nu} V|^{1/2}}, \quad (4.9)$$

que cuando es tipo tiempo puede ser asociado a una velocidad. Por las mismas razones que las definidas en el párrafo anterior esta velocidad tiene vorticidad cero, es decir $\nabla_{[\mu} \check{u}_{\nu]} = 0$.

4.2. Ecuaciones de balance de energía y momento

En el modelo de interacción desarrollado aquí, el tensor de energía-momento total se conserva

$$\nabla_{\mu} (T^{\mu}_{\nu} + \check{T}^{\mu}_{\nu}) = 0, \quad (4.10)$$

mas no cada componente por separado, pues éstas satisfacen las ecuaciones (4.6) y (4.8). Si la parte de materia se comporta como un fluido perfecto, entonces tendremos

$$T^{(M)\mu\nu} = u^{\mu} u^{\nu} (\rho + P) + g^{\mu\nu} P, \quad (4.11)$$

y las variables asociadas al tensor de energía momento serán la densidad y presión de la materia, tres de sus componentes de velocidad (pues una cuarta queda determinada por la condición de unitariedad). Estas variables más la densidad del vacío y las cuatro componentes de la interacción Q^{μ} suman 10 variables que deben ser encontradas usando las 8 ecuaciones de continuidad a nuestra disposición, más una ecuación de estado para la materia y una ecuación que especifique la interacción.

Es interesante que solo se necesite una ecuación para especificar el vector de interacción Q^{μ} ; la razón es que, como puede verse en la ecuación (4.7), este vector proviene de un potencial. Este hecho debe considerarse al momento de construir modelos de interacción, pues no cualquier vector de interacción que se especifique cumplirá con esta condición. En particular, se deberá verificar que dicho vector sea irrotacional. A continuación observaremos

que, dependiendo del tipo de interacción en que estemos interesados, existirán diferentes métodos para especificarla adecuadamente.

Una de las formas para especificar modelos de interacción consiste en hacer que el vector de interacción sea proporcional a la velocidad de la materia a través de la ecuación $Q_\mu = Qu_\mu$, donde Q es alguna función escalar. Esta condición puede ser muy restrictiva para la velocidad del fluido de materia pues implica que debe ser no-rotacional con $u_\mu \propto \nabla_\mu V$. Estos modelos serán estudiados en la sección 4.4.2 y tienen como ventaja que el fluido de materia no sentirá fuerza debido a la interacción con el vacío, permitiendo que se comporte como un fluido sin presión.

Otra posibilidad consiste en escribir las ecuaciones de continuidad de la forma

$$\begin{aligned} Q_\nu &= -\nabla_\nu V, \\ \nabla_\mu T^{(M)\mu}_\nu &= \nabla_\nu V, \end{aligned} \quad (4.12)$$

y simplemente especificar V en términos de las otras variables dinámicas. En este caso, no se especifica la interacción sino directamente la forma de la densidad de vacío. Este método es equivalente a lo que sucede en electromagnetismo cuando se especifica el potencial eléctrico. Este método lo observaremos en la sección 4.5 en que estudiaremos diversas formas en que los modelos de vacío interactuante pueden reproducir el gas de Chaplygin generalizado (gCg); uno de ellos consiste en usar la ecuación $V = A\rho^{-\alpha}$ más la especificación de que la materia es tipo polvo $P = 0$, observaremos que este modelo es equivalente al gas de Chaplygin generalizado a todos los órdenes de perturbaciones si se identifican las presiones y densidades totales del modelo de vacío con las del gCg como $V = -P_{\text{gCg}}$ y $\rho + V = \rho_{\text{gCg}}$.

En ciertas ocasiones no tenemos la forma exacta del potencial y lo que deseamos es especificar la interacción. Para ello es útil separar la divergencia de los tensores de energía-momento en una parte en dirección de la velocidad y otra en dirección ortogonal¹ como lo hicimos en la sección 1.2. Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de balance de energía y momento; las cuales, para fluidos generales que interactúan entre sí, están dadas por las ecuaciones (1.17) y (1.18).

Para nuestro caso específico en que tenemos dos fluidos y uno de ellos es el vacío, separando la interacción de la forma

$$Q^\nu = Qu^\nu + f^\nu, \quad (4.13)$$

llegamos a las ecuaciones

$$(\rho + P)\Theta + \frac{d\rho}{d\tau} = -Q, \quad (4.14)$$

$$\frac{dV}{d\tau} = Q, \quad (4.15)$$

¹Como la velocidad del vacío no está bien definida, las proyecciones se hacen con la velocidad de la materia. Recordemos que \dot{u}^μ no representa estrictamente la velocidad del vacío sino únicamente la dirección de su gradiente.

para la conservación de la energía, con $\Theta \equiv \nabla_\mu u^\mu$; mientras, para la conservación de momento obtenemos las ecuaciones

$$(\rho + P) \frac{du^\sigma}{d\tau} + D^\sigma P = -f^\sigma, \quad (4.16)$$

$$D_\sigma V = -f_\sigma. \quad (4.17)$$

también conocidas como ecuaciones de balance de fuerzas o de Euler.

Las ecuaciones (4.14) - (4.17) provienen de las ecuaciones para la divergencia del tensor de energía-momento correspondientes al vacío y a la materia. Como lo mencionamos antes, éstas corresponden a 4 ecuaciones independientes cada una, siendo 8 en total. Aquí podría parecer que tenemos 10 ecuaciones, una por cada una de las ecuaciones de balance de energía y cuatro por cada una de las de momento; sin embargo, la condición de que f_μ es ortogonal a la velocidad del fluido implica que este vector solo tenga tres direcciones independientes y, por tanto, que las ecuaciones de momento solo correspondan a tres ecuaciones cada una; seis en total que, más las ecuaciones de conservación de energía, suman las 8 ecuaciones.

Como se había señalado, solo hay opción para una ecuación escalar que especifique la interacción. Una posibilidad, por tanto, sería una ecuación para Q . Esto es suficiente para cerrar el sistema, por lo que con ésta no es necesario especificar la forma de f_μ . De hecho podemos eliminar este término del sistema de ecuaciones igualando (4.16) y (4.17) y obteniendo

$$(\rho + P) \frac{du^\sigma}{d\tau} + D^\sigma P = -D^\sigma V. \quad (4.18)$$

A pesar de ésto, sin embargo, aún es posible obtener información de las ecuaciones separadas pues éstas tienen una forma muy sugerente acerca de la naturaleza física de esta energía del vacío. La ecuación (4.17) nos dice que la fuerza ejercida por el vacío sobre la materia está dada por el gradiente de éste, de la misma forma que la energía potencial en física clásica genera una fuerza proporcional a su gradiente. Este hecho nos hace identificar al vacío como una generalización relativista de la energía potencial, y a la ecuación (4.16) como una ecuación de balance de fuerzas para el fluido de materia con fuerza externa $-f_\mu$ dada por un potencial $-V$.

4.3. Ecuaciones cosmológicas

4.3.1. Fondo homogéneo

Las ecuaciones de Einstein para una métrica de FRW toman la forma de la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} (\rho + V) - \frac{K}{a^2}. \quad (4.19)$$

Además, las ecuaciones de continuidad para el vacío y la materia provienen de las ecuaciones (4.14 y 4.15) con $\Theta = 3H$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = -Q, \quad (4.20)$$

$$\dot{V} = Q. \quad (4.21)$$

La energía del vacío depende del tiempo cósmico gracias al efecto del término de interacción. Este término deberá incluirse en la ecuación para la materia o de otra forma no se cumplirá la ecuación de continuidad global y por tanto se violarán las ecuaciones de Einstein. El término $-Q$ en la ecuación de continuidad para la materia no siempre se incluye en los modelos tipo *Decaying vacuum*, lo cual es una inconsistencia ya que en ese caso no se satisface la conservación del tensor de energía-momento total y por tanto las identidades de Bianchi.

En este caso, la condición de homogeneidad implica que todos los vectores que representen cantidades físicas apuntarán en la misma dirección; la cual corresponde a aquella de crecimiento del tiempo cósmico. Así, u^μ y \check{u}^μ , la velocidad de la materia y la dirección del flujo de energía, serán paralelos. Además, la fuerza f^μ será cero pues ningún vector espacial puede ser distinto de cero en esta situación puramente homogénea.

4.3.2. Perturbaciones lineales

Siguiendo la sección 1.5 podemos estudiar las ecuaciones de evolución asociadas a nuestro sistema. Así, obtenemos que a nivel lineal la densidad y presión de la materia están dadas por $\rho + \delta\rho$ y $P + \delta P$; mientras su velocidad satisface (1.58)

$$u^\mu = \left[1 - \phi, a^{-1} \partial^i v \right], \quad u_\mu = \left[-1 - \phi, \partial_i \theta \right], \quad (4.22)$$

con $\partial^i v = a^{-1} \partial x^i / \partial t$ y $\theta = a(v + B)$, donde B proviene de la ecuación (1.53). Para el vacío, su densidad está dada por $V + \delta V$ y su velocidad, como señalamos antes, no está bien definida y de hecho su momento $(\check{\rho} + \check{P})\theta$ es cero en todos los sistemas de referencia. Sin embargo, se puede definir al vector \check{u} en la dirección del gradiente del potencial como en la ecuación (4.9), la cual escribimos, en analogía con la expresión para la velocidad de materia, como

$$\check{u}^\mu = \left[1 - \phi, a^{-1} \partial^i \check{v} \right], \quad \check{u}_\mu = \left[-1 - \phi, \partial_i \check{\theta} \right]. \quad (4.23)$$

donde identificamos $\check{\theta} = -\delta V / \dot{V}$.

Las ecuaciones de conservación de energía para la materia y el vacío, están dadas por

$$\delta\dot{\rho} = -3H(\delta\rho + \delta P) + (\rho + P) \left(3\dot{\psi} - \frac{\nabla^2}{a^2} (\theta + \sigma) \right) - \delta Q - Q\phi, \quad (4.24)$$

$$\delta\dot{V} = \delta Q + Q\phi. \quad (4.25)$$

Éstas son equivalentes a la ecuación (1.61) pero con los términos Q y δQ asociados a la interacción. Equivalentemente, las ecuaciones de balance de momentos se escriben como

$$\begin{aligned}(\rho + P)(\dot{\theta} + \phi) + \delta P + \dot{P}\theta &= -f, \\ \delta V + \dot{V}\theta &= -f,\end{aligned}\tag{4.26}$$

donde las componentes de la interacción especificadas en la expresión (4.13) para el caso de perturbaciones escalares se escriben como

$$Q_\mu = [-Q(1 + \phi) - \delta Q, \partial_i(f + Q\theta)],\tag{4.27}$$

con $f_i = \partial_i f$. De las ecuaciones (4.26) vemos que la fuerza ejercida por el vacío sobre la materia es proporcional a la derivada del vacío, en analogía con lo que ocurre en mecánica clásica para la energía potencial.

Las ecuaciones de Einstein asociadas a las perturbaciones, obedecen las ecuaciones

$$3H(\dot{\psi} + H\phi) - \frac{\nabla^2}{a^2}[\psi + H\sigma] = -4\pi G(\delta\rho + \delta V),\tag{4.28}$$

$$\dot{\psi} + H\phi = -4\pi G(\rho + P)\theta.\tag{4.29}$$

La energía de vacío aparece únicamente en la ecuación para la energía (4.28) pero no en la del momento (4.29).

Como siempre, para cerrar el sistema necesitamos una ecuación de estado para la materia y una ecuación para la interacción. Es decir que es suficiente con especificar Q o f en una ecuación. Incluir dos ecuaciones una para cada una de las componentes de la interacción sobredetermina al sistema y puede llevar a contradicciones.

4.3.3. Perturbaciones invariantes de norma

Es bien conocido que la métrica y las perturbaciones de materia son dependientes de norma, sin embargo, es posible construir combinaciones que no lo sean. Bajo una transformación de norma de primer orden tenemos que $t \mapsto t + \delta f(t, x^i)$, mientras que la densidad y presión se transforman como $\delta\rho \mapsto \delta\rho - \dot{\rho}\delta t$ y $\delta P \mapsto \delta P - \dot{P}\delta t$. Por ello, la perturbación de presión no adiabática $\delta P_{\text{nad}} = \delta P - (\dot{P}/\dot{\rho})\delta\rho$, es invariante de norma. De la misma manera, la perturbación de la energía de vacío se transforma como $\delta V \mapsto \delta V - Q\delta t$ y la interacción como $\delta Q \mapsto \delta Q - \dot{Q}\delta t$. Dados $\delta\check{P} = -\delta\check{\rho} = -\delta V$ y $\check{P} = -\check{\rho} = -Q$ se observa que la perturbación no adiabática para la presión es cero, como de hecho es el caso para cualquier fluido barotrópico con $P = P(\rho)$.

La 3-velocidad θ se transforma como $\theta \rightarrow \theta + \delta t$, con lo que la velocidad relativa $\check{\theta} - \theta$ es invariante de norma. La perturbación de densidad en hipersuperficies ortogonales a la velocidad u^μ , también conocida como la perturbación de densidad en la norma comóvil-ortogonal,

también es invariante de norma, y está dada por

$$\delta\rho_{\text{com}} = \delta\rho + \dot{\rho}\theta. \quad (4.30)$$

Para el vacío, la perturbación de densidad está dada por

$$\delta\check{\rho}_{\text{com}} = \delta V + \dot{V}\theta, \quad (4.31)$$

que en general es distinta de cero; sin embargo, si tomamos las superficies ortogonales al flujo de energía \check{u}^μ , las perturbaciones de densidad del vacío serán cero

$$\Delta\check{\rho}_{\text{com}} = \delta V + \dot{V}\check{\theta} = 0. \quad (4.32)$$

De aquí obtenemos que $\check{\theta} = -\delta V/\dot{V}$. Lo anterior es consecuencia de que el flujo de energía \check{u}^μ sea paralelo al gradiente de la densidad de energía como puede verse en la ecuación (4.9); así, por construcción, el vacío es homogéneo sobre las hipersuperficies ortogonales a este flujo. La perturbación comóvil de la densidad de vacío también se puede reescribir como

$$\delta\check{\rho}_{\text{com}} = \dot{V}(\theta - \check{\theta}), \quad (4.33)$$

por lo que, si $\theta = \check{\theta}$, el vacío será espacialmente homogéneo en sistemas de referencia comóviles con el fluido. En estos sistemas de referencia $\theta = 0$ y, por tanto, $\delta\check{\rho}_{\text{com}} = 0$. Esto ocurre en una clase de modelos en los que se demanda que el flujo de energía vaya en la dirección de la velocidad del fluido $\check{u}^\mu = u^\mu$; sin embargo, estos modelos son muy restrictivos sobre la velocidad del fluido ya que ésta no debe presentar vorticidad para que esta igualdad se cumpla.

La perturbación de la densidad de vacío en sistemas de referencia cuyas superficies de tiempo constante son planas, también es un invariante de norma. Esta cantidad puede escribirse como

$$\check{\zeta} = -\psi - \frac{H}{\dot{V}}\delta V. \quad (4.34)$$

En general esta perturbación será distinta de cero. En la literatura de cosmología, a esta perturbación se le denota simplemente como la *perturbación de curvatura* (véase [?] como un ejemplo de este uso), y su importancia proviene de que es a menudo usada para fijar las condiciones iniciales de las ecuaciones de perturbación.

Otra expresión invariante de norma para la perturbación de energía del vacío es aquella medida en superficies con densidad homogénea del fluido; ésta representa la perturbación de densidad relativa y está dada por

$$\check{S} = 3(\check{\zeta} - \zeta) = -3H\left(\frac{\delta V}{\dot{V}} - \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}\right). \quad (4.35)$$

En caso de que la densidad de energía fuera una función de la densidad de materia, esta perturbación se cancelará $\check{S} = 0$.

La perturbación de presión no adiabática debido a la perturbación de presión relativa entre el fluido y el vacío está dada por

$$\delta P_{\text{nad}} = \delta P - c_s^2 \delta \rho = \frac{(1 + c_s^2)Q[Q + 3H(\rho + P)]}{9H^2(\rho + P)} \check{S}. \quad (4.36)$$

Esta perturbación se anula en sistemas en que las fluctuaciones del vacío son adiabáticas $\check{S} = 0$, o cuando no interactúa $Q = 0$.

4.4. Fluido efectivo

El modelo de vacío interactuante permite estudiar fluidos existentes en la literatura observándolos desde una nueva óptica. Los fluidos que estudiaremos en esta sección pueden tener una ecuación de estado arbitraria; así que este tratamiento no estará limitado a ecuaciones de estado barotrópicas sino que pueden ser más generales. La densidad y presión del fluido se pensarán como cantidades efectivas (ρ_{ef} y P_{ef}) que serán originadas por la suma de un fluido tipo polvo ($P_m = 0$) y el vacío interactuando entre sí; por lo cual, se tendrán las expresiones

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ef}} &= \rho_m + V, \\ P_{\text{ef}} &= -V, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde la presión del fluido efectivo estará dada únicamente por el vacío pues supusimos que el fluido de materia no tiene presión. Si consideramos que el sistema interactuante solo será medido en conjunto, es decir, que se medirán solamente la presión y densidad totales, entonces estos fluidos serán equivalentes a uno único dado por la combinación de ambos. Este fluido obedecerá una ecuación para la conservación de la energía y una para la conservación del momento dadas por

$$\begin{aligned} (\rho_{\text{ef}} + P_{\text{ef}})\Theta + \dot{\rho}_{\text{ef}} &= 0, \\ (\rho_{\text{ef}} + P_{\text{ef}})\dot{u}^\sigma + D^\sigma P_{\text{ef}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde la velocidad del fluido efectivo será la misma que la del fluido original tipo polvo. El hecho de que el vacío no tenga una velocidad definida permite que no haya imprecisiones sobre cuál velocidad elegir para el fluido efectivo.

Las ecuaciones anteriores no serán suficientes para resolver el sistema completo pues usualmente es necesario introducir una ecuación de estado. En este caso dicha ecuación deberá obtenerse a partir de la especificación de la interacción entre las componentes originales.

Como este fluido proviene de dos elementos, el fluido tipo polvo y el vacío, el comportamiento efectivo no necesariamente presentará una ecuación de estado sencilla. En lo siguiente estudiaremos modelos en que esto es usado como una ventaja pues, por ejemplo, podemos

construir un fluido efectivo que a nivel de la cosmología homogénea se comporte como el gas de Chaplygin pero que a nivel perturbativo tenga velocidad del sonido cero, lo cual reduce en varios órdenes de magnitud las fuertes constricciones que dicho modelo tiene actualmente.

Debido a que el fluido efectivo cumple las ecuaciones de continuidad (4.38) correspondientes a un fluido perfecto sin interacción, podemos identificar a este fluido con alguno de los que se usan para modelar la energía oscura y dividir sus componentes de presión y densidad en una parte de vacío y otra de materia. Esto lo podemos realizar para una de las numerosas soluciones tipo $\rho_{\text{de}}(a)$ o $P_{\text{de}}(\rho_{\text{de}})$ que se encuentran en la literatura. Algunos de estos modelos han sido propuestos como modelos de unificación de materia y energía oscura [111]. Cualquier modelo de energía oscura que esté descrito por un fluido perfecto, por tanto, podrá ser descompuesto de la forma inversa a las ecuaciones (4.37) como

$$\rho_m = \rho_{\text{de}} + P_{\text{de}}, \quad V = -P_{\text{de}}. \quad (4.39)$$

donde el flujo de energía será $Q_\mu = \nabla_\mu P_{\text{de}}$ que en un fondo de FRW está dado por $Q = -\dot{P}_{\text{de}}$.

Uno podría escoger descomponer cualquier modelo de energía oscura $\rho_{\text{de}}(a)$ en cualesquiera dos fluidos interactuando $\rho_{\text{de}} = \rho_1 + \rho_2$, pero esto doblaría los grados de libertad del modelo excepto cuando uno de estos dos fluidos es el vacío. Linder y Scherrer [130] demostraron que cualquiera de estos modelos de energía oscura puede ser representado por una energía del vacío constante $V = M_{\text{pl}}^2 \Lambda$ más un fluido con la ecuación de estado apropiada dada por $\gamma = (\rho_{\text{de}} + P_{\text{de}})/(\rho_{\text{de}} - V)$. En este caso, el fluido de materia necesitaba una ecuación de estado apropiada ya que la energía del vacío era constante. En nuestro caso, en cambio, el especificar una interacción apropiada nos permite tener para la materia la ecuación de estado que deseemos, la cual escogeremos casi siempre como $\gamma_m = 1$ para tener $P_m = 0$.

Si del modelo de energía oscura se obtiene $P_{\text{de}}(a)$, la interacción asociada estará dada en el fondo de FRW por $Q = -\dot{P}_{\text{de}}$; sin embargo, esto no especifica la forma de la interacción en el régimen de perturbaciones lineales, menos aún para el modelo en forma covariante. Gracias a esto tendremos libertad para escoger la generalización a nivel perturbativo de los modelos, obteniendo distintos comportamientos para un mismo modelo homogéneo. Esto lo estudiaremos particularmente en el gas de Chaplygin en la sección 4.5, donde la generalización a nivel de perturbaciones nos podrá llevar a un modelo barotrópico como el gas original o a uno con cero velocidad del sonido, la cual es ventajosa en el momento de la formación de estructura, que es un problema del gas original.

4.4.1. Fluido barotrópico

En esta sección analizaremos las condiciones necesarias para que el sistema interactuante entre polvo y vacío produzca como fluido efectivo uno barotrópico. Partimos de que el fluido efectivo tiene una ecuación de estado $P_{\text{ef}} = P_{\text{ef}}(\rho_{\text{ef}})$. De la ecuación de conservación de energía (4.15) escrita en términos del fluido efectivo obtenemos que la interacción está dada por

$Q = -\dot{P}_{\text{ef}}$, que se convertirá en $Q = -F(\rho_{\text{ef}})\dot{\rho}_{\text{ef}}$ si definimos a F como

$$F \equiv \frac{dP_{\text{ef}}}{d\rho_{\text{ef}}}. \quad (4.40)$$

De la ecuación (4.38) podemos sustituir la derivada de la densidad de energía. Con ello obtenemos la expresión para la interacción que, en términos de las densidades de vacío y polvo, está dada por

$$Q = \Theta \rho F. \quad (4.41)$$

Esta será la forma general de la interacción para que el fluido efectivo corresponda con un fluido barotrópico.

Por ejemplo, para el gas generalizado de Chaplygin la ecuación de estado tiene la forma $P_{\text{ef}} = -A\rho_{\text{ef}}^{-\alpha}$, con lo que la función F definida en (4.40) estará dada por $F = \alpha P_{\text{ef}}/\rho_{\text{ef}}$ y la interacción como

$$Q = \alpha \Theta \frac{\rho V}{\rho + V}. \quad (4.42)$$

Aquí podemos ver que una ventaja de especificar la interacción es que la constante A que aparece en la ecuación de estado del gas no se necesita poner a mano como en el modelo original, sino que aparece aquí como una constante de integración.

Al hacer el procedimiento en sentido opuesto, sin embargo, podemos observar que la especificación de la interacción no es suficiente para asegurar el carácter barotrópico del fluido efectivo resultante. En este caso partimos de una interacción del tipo (4.41) y usando la ecuación de conservación de energía (4.15), además de cambiando las variables por la densidad y presión efectivas, llegamos a la ecuación

$$\dot{P}_{\text{ef}} = F \dot{\rho}_{\text{ef}}, \quad (4.43)$$

que puede integrarse. Esta ecuación es equivalente a (4.40); sin embargo, solo puede integrarse sobre las líneas de mundo del fluido. Como la ecuación no da información sobre la forma de la constante de integración a lo largo de la superficie ortogonal a la velocidad, aún queda libertad para obtener un fluido no barotrópico. Por ejemplo, para el gas de Chaplygin el especificar la interacción (4.42) nos llevará a la ecuación diferencial de la forma

$$\dot{P}_{\text{ef}} = \frac{\alpha P_{\text{ef}}}{\rho_{\text{ef}}} \dot{\rho}_{\text{ef}}, \quad (4.44)$$

cuya solución corresponde a $P_{\text{bar}} = A(x^i)\rho_{\text{bar}}^{-\alpha}$, donde A es una función de la posición sobre las superficies ortogonales a la velocidad, por lo que no llegamos al modelo original en que A es constante. Esto sucederá con todos los modelos equivalentes, donde solo se especifica la interacción, aunque como veremos en las siguientes secciones, se puede obtener que A es constante a nivel de la cosmología homogénea e incluso de perturbaciones lineales.

4.4.2. Fluidos geodésicos

Un tipo de modelos que no son reducibles a fluidos barotrópicos son los que aquí llamaremos modelos geodésicos. En estos modelos usaremos un fluido tipo polvo al igual que el usado en la subsección 4.4.1; pero además se especificará que la fuerza ejercida por el vacío, dada por el vector f^μ , será cero. Esto produce que la ecuación de momento para la materia (4.16) satisfaga la ecuación

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0, \quad (4.45)$$

correspondiente a la ecuación geodésica, de ahí el nombre dado a estos modelos.

Por otro lado, la ecuación (4.17) se convierte en

$$D_\sigma V = 0, \quad (4.46)$$

lo que implica que el vacío es constante sobre hipersuperficies ortogonales a la velocidad, por lo que puede considerarse como una función únicamente del tiempo propio del fluido $V = V(\tau)$. Así, el potencial de hecho puede ser usado como una reparametrización del tiempo propio si es una función monótona. Con ello, ésta puede ser usada para etiquetar las superficies ortogonales a u^σ . Para cerrar el sistema de ecuaciones en estos casos es necesario obtener una forma para Q que asegure que f^μ sea cero; esto no es fácil de encontrar por lo que alternativamente se puede especificar $V = V(\tau)$, lo cual automáticamente implica que el modelo es tipo geodésico.

La ecuación (4.46) implica además que el gradiente del potencial se encuentra en la dirección de la velocidad de la materia $\dot{u}^\mu = u^\mu$, lo cual es una condición bastante restrictiva para esta velocidad, pues significa que está dada por un potencial $u^\mu \propto \nabla^\mu V$ y no tiene vorticidad.

En cualquiera de los modelos geodésicos las ecuaciones de perturbación (4.24) y (4.26) se reducen a

$$\delta\dot{\rho}_m + 3H\delta\rho_m - 3\rho_m\dot{\psi} + \rho_m \frac{\nabla^2}{a^2} (\theta + a^2\dot{E} - aB) = -\delta\dot{V}, \quad (4.47)$$

$$\dot{\theta} = -\phi, \quad (4.48)$$

$$\delta V = -\dot{V}\theta. \quad (4.49)$$

Debido a la última de las ecuaciones podemos ver que $\dot{\theta} = \theta$, por lo que la perturbación de densidad comóvil para el vacío (4.33) es cero. Como no hay perturbación de presión en la norma comóvil, la velocidad del sonido del fluido es cero $c_s^2 = 0$.

Si escogemos la norma comóvil síncrona para escribir estas ecuaciones, su expresión será más simple. Aquí $\theta = 0$, y $\phi = 0$, la ecuación (4.48) se satisface de manera trivial, y la constricción de momento derivada de las ecuaciones de Einstein (4.29) requiere que $\dot{\phi} = 0$, por lo que $\phi = C(x^i)$. Debido a que $\dot{\theta} = 0$ en la norma comóvil, también tenemos que $\delta V = 0$. Entonces, la ecuación (4.47) para la perturbación de la densidad de materia y la constricción de energía

de la ecuación de Einstein (4.28) son las mismas que en ausencia de energía del vacío

$$\delta\dot{\rho}_m + 3H\delta\rho_m + \rho_m \frac{\partial}{\partial t} (\psi + \nabla^2 E) = 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{\nabla^2}{a^2} [\psi + H\sigma] = 4\pi G\delta\rho_m, \quad (4.51)$$

excepto en que la evolución homogénea se debe tomar en cuenta la cosmología generada por la materia y vacío interactuantes.

La forma de estas ecuaciones para las perturbaciones es extremadamente simple, como si tuviéramos un vacío que es espacialmente homogéneo, a pesar de que estas ecuaciones permiten una perturbación del vacío $\check{\zeta} = -C(x^i)$ distinta de cero, y por tanto una perturbación de entropía \check{S} .

Los modelos geodésicos pueden ser ventajosos en la unificación de materia y energía oscura pues el hecho de que las líneas de flujo sigan geodésicas permite que este fluido forme las estructuras del universo de la misma forma que una componente de materia sin presión, como la materia oscura fría; pero con una presión efectiva distinta de cero $P_{\text{ef}} = -V$. En nuestros trabajos [20] y [21] esta ventaja fue explorada para el caso del gas de Chaplygin, en que es posible obtener un fluido efectivo que a nivel homogéneo se comporta como el modelo original pero que a nivel de perturbaciones lineales permite formar estructura, reduciendo las constricciones actuales que existen sobre el parámetro α como observamos en [22].

Estos modelos fueron estudiados por primera vez en la referencia [131] *Dusty dark energy*. Ahí se usa un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = K(\varphi, X) + \lambda(X - \frac{1}{2}\mu^2(\varphi)), \quad (4.52)$$

donde φ y λ son campos escalares, y $X = -\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}/2$ es el término cinético asociado al campo φ . El segundo campo no tiene término cinético en el Lagrangiano, y por su forma actúa como un multiplicador de Lagrange que restringe a X a ser igual al término con μ de la forma

$$X = \frac{1}{2}\mu^2(\varphi). \quad (4.53)$$

Esta ecuación se obtiene al escribir la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a λ y es equivalente a $d\varphi/d\tau = \mu(\varphi)$ donde, como definimos en la introducción, $d/d\tau = u^\alpha d/dx^\alpha$. Además, la velocidad estará dada por $u^\alpha = -\varphi^{,\alpha}/\mu(\varphi)$. De la ecuación (4.53) podemos mostrar que esta velocidad cumple con la ecuación geodésica.

El tensor de energía-momento en este modelo está dado por la expresión

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}(K_{,X} + \lambda) + g_{\alpha\beta}K, \quad (4.54)$$

de la cual podemos leer que las componentes tipo polvo y tipo vacío del modelo son $\rho = \mu^2(K_X + \lambda)$ y $V = -K$. Con esta información, podemos obtener las ecuaciones de movimiento

del modelo usando las ecuaciones de conservación de la energía y el momento obtenidas al inicio de este capítulo, y dichas ecuaciones serán las mismas que se obtendrían de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

El hecho de que la ecuación geodésica se satisfaga implica que la fuerza f^σ es cero. La interacción escalar puede ser obtenida de (4.15) como

$$Q = -\mu(K_{,\varphi} + \mu\mu_{,\varphi}K_{,X}), \quad (4.55)$$

la cual es una función de φ y sus derivadas. Esta interacción produce de la ecuación (4.14) la ecuación de continuidad

$$\dot{\lambda} = -\mu_\varphi\lambda - \mu K_{,X\varphi} - \mu^2\mu_\varphi K_{XX} + \frac{(K_{,X} + \lambda)\square\varphi + K_{,\varphi}}{\varphi}. \quad (4.56)$$

que es la misma que se obtiene de la ecuación de Euler-Lagrange asociada al campo φ , como de hecho se obtiene en el trabajo original.

En la referencia [131] se concluye que φ actúa como una reparametrización del tiempo $\varphi(x^\alpha) = f(\tau - \psi(\mathbf{x}))$, donde ψ es una función de las coordenadas espaciales \mathbf{x} en la hipersuperficie normal a la velocidad del campo. Este resultado es equivalente al que obtuvimos nosotros respecto a la energía del vacío V que en este caso es una función del campo φ a través de la ecuación $V = -K(\varphi, \mu^2(\varphi)/2)$. La ecuación (4.17) implica que la fuerza es igual a cero y que $D_\sigma\varphi = 0$. Además de esto, esta ecuación implica que la función ψ no es arbitraria, sino constante en todas las hipersuperficies ortogonales.

Un problema para estos modelos, además del hecho de que la velocidad del fluido tenga vorticidad cero, es que la densidad y otras cantidades físicas estarán multivaluadas en puntos en los que se crucen las geodésicas. Este fenómeno es conocido como *caustics* para el caso de campos escalares como el de la *dusty dark energy* estudiada aquí, y en nuestro caso estará presente no solo para los campos escalares, sino para cualquier modelo de fluido geodésico interactuante.

4.5. Gas de Chaplygin

El gas generalizado de Chaplygin («gCg» por sus siglas en inglés) es definido en las referencias [30, 111] como un fluido que cumple la ecuación de estado

$$P_{\text{gCg}} = -A\rho_{\text{gCg}}^{-\alpha}, \quad (4.57)$$

donde A y α son parámetros del modelo. En el régimen homogéneo es posible resolver de forma exacta su densidad en términos del factor de escala, obteniendo

$$\rho_{\text{gCg}} = (A + Ba^{-3(1+\alpha)})^{1/(1+\alpha)}, \quad (4.58)$$

donde B es una constante de integración. Esta solución se comporta en épocas tempranas como $\rho_{\text{gCg}} \propto a^{-3}$; mientras que para tiempos grandes se aproxima a una constante $\rho_{\text{gCg}} \rightarrow A^{1/(1+\alpha)}$. Debido a este comportamiento, el gCg ha sido propuesto como un modelo de unificación del sector oscuro del universo. Sin embargo, este modelo está sumamente restringido debido a que, a nivel perturbativo, solo puede reproducir el espectro de potencias de materia cuando α es muy cercana a cero, es decir, cuando el modelo es indistinguible de Λ CDM [31, 32].

La descomposición (4.39) para este modelo fue analizada a nivel homogéneo en [132] y generalizada a nivel de perturbaciones lineales en [20–22]. Esta descomposición está dada por

$$\rho_{\text{gCg}} = \rho_m + V, \quad P_{\text{gCg}} = -V. \quad (4.59)$$

Con ello, la ecuación de estado (4.57) se convierte en una relación entre la energía del vacío y la de materia, dada por

$$A = (\rho_m + V)^\alpha V; \quad (4.60)$$

mientras que las densidades evolucionarán a nivel homogéneo como

$$\begin{aligned} V &= A(A + Ba^{-3(1+\alpha)})^{-\alpha/(1+\alpha)}, \\ \rho_m &= Ba^{-3(1+\alpha)}(A + Ba^{-3(1+\alpha)})^{-\alpha/(1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

De la ecuación (4.21) es posible obtener una expresión para la interacción, la cual estaría dada por

$$Q = 3\alpha H \left(\frac{\rho_m V}{\rho_m + V} \right). \quad (4.62)$$

Esta interacción en la época de dominación de materia se aproxima a $Q \propto HV$, mientras que en la época de dominación de la energía de vacío $Q \propto H\rho_m$; ambos límites han sido estudiados previamente en [133].

Es interesante notar que, para el modelo definido en términos de la interacción, α es el único parámetro. Por ello, A y B surgen como constantes de integración en la solución homogénea que serán determinadas como condiciones de frontera; por ejemplo, a través de las relaciones

$$A = V(\rho_m + V)^\alpha \Big|_0, \quad (4.63)$$

$$B = \frac{V}{\rho_m + V} \Big|_0. \quad (4.64)$$

Esto constituye una diferencia con respecto al modelo original definido en términos de la ecuación de estado (4.57), pues en este modelo tanto α como A son parámetros, y la única constante de integración es B . De las ecuaciones (4.35) y (4.60) podemos observar que la

perturbación en la entropía a nivel lineal está dada por

$$\check{\delta} = -\frac{(\rho_m + V)^2}{\alpha \rho_m (\rho_m + (1 + \alpha)V)} \frac{\delta A}{A}, \quad (4.65)$$

donde δA es la variación lineal del parámetro A y depende de la posición. Esta expresión se anula para el modelo original, pues A tiene un valor fijo dado por el modelo; sin embargo, esto no necesariamente ocurre en el modelo con interacción, pues A es una constante de integración que surgió de resolver el modelo en el caso homogéneo, y es posible que tenga una variación espacial cuando se introduzcan perturbaciones lineales. De lo anterior podemos concluir que, mientras que el modelo original es adiabático, en el modelo nuevo es posible obtener perturbaciones no adiabáticas. La perturbación de presión no adiabática puede ser calculada por la expresión (4.36), quedando para este modelo como $\delta P_{\text{nad}} = -V\delta A/A$.

Roy y Buckert [134] han considerado previamente un gas de Chaplygin con una constante A que depende de la posición y es una descripción efectiva al promediar en un universo inhomogéneo. Las perturbaciones no adiabáticas en un gCg también fueron discutidas previamente por Zimdahl y Fabris [135] quienes introdujeron una componente extra de polvo que interactúa con el gas barotrópico de Chaplygin, lo cual introduce nuevos grados de libertad internos. En nuestro caso, las perturbaciones no adiabáticas surgen naturalmente de la descomposición del gas en dos componentes, una de vacío y otra de materia, que pueden tener perturbaciones de densidad relativas, sin introducir grados de libertad adicionales.

Hasta ahora el término de interacción está definido únicamente a nivel homogéneo. Debido a que no existe una única generalización covariante de la expresión (4.62), es posible hacer diversas elecciones que a nivel homogéneo se reduzcan a la misma expresión. En las siguientes subsecciones analizaremos dos ejemplos de estas generalizaciones que, a pesar de ser indistinguibles a nivel homogéneo, a nivel perturbativo arrojarán resultados distintos y, por lo tanto, distintas predicciones observacionales.

4.5.1. Modelo barotrópico

Como lo señalamos en la sección 4.4.1, el fluido barotrópico es equivalente a un modelo de vacío interactuante en el cual la interacción es proporcional al factor de expansión $\Theta = u^\mu{}_{;\mu}$, donde u^μ es la velocidad de la componente de materia. En el caso del gas de Chaplygin, esta interacción está dada por

$$Q = \alpha \Theta \left(\frac{\rho_m V}{\rho_m + V} \right). \quad (4.66)$$

En esta expresión, el término de expansión Θ funciona como la generalización covariante del factor de Hubble. De hecho, es fácil comprobar que en un fondo homogéneo de FRW la expresión (4.66) se reduce a (4.62), pues en este caso $\Theta = 3H$.

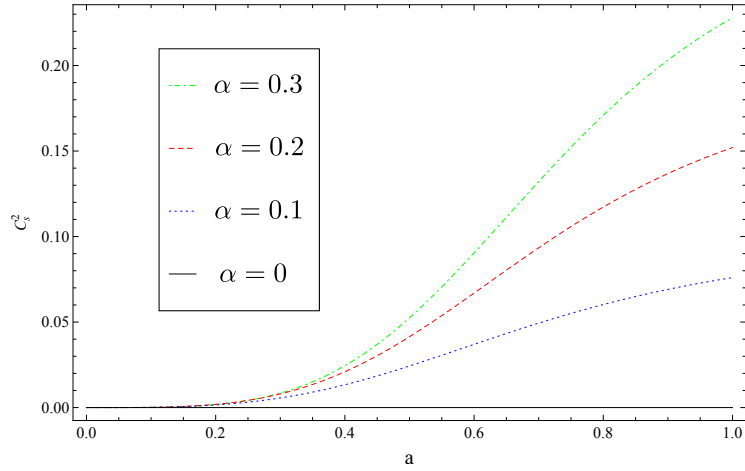


FIGURA 4.1: Velocidad del sonido como función del factor de escala para el modelo barotrópico. El caso $\alpha = 0$ es equivalente al modelo Λ CDM en que la velocidad del sonido se anula.

El hecho de que la presión efectiva sea función de la densidad efectiva implica, en términos del modelo de interacción, que la densidad de vacío es función de la densidad de materia,

$$V = V(\rho_m). \quad (4.67)$$

De esta relación se puede concluir que el vector de interacción Q_μ estará en dirección del gradiente de la densidad de materia ∇_μ .

Desarrollando las densidades a orden lineal, de la ecuación (4.67) tenemos que

$$\delta V = \frac{\dot{V}}{\dot{\rho}_m} \delta \rho_m. \quad (4.68)$$

Comparando esta ecuación con la expresión (4.35), observamos que en este caso \check{S} se anula, por lo que las perturbaciones relativas entre el vacío y la materia serán adiabáticas. Con ello podemos calcular la velocidad del sonido adiabática, dada por

$$c_s^2 = \frac{-\delta V}{\delta \rho_m + \delta V} = \frac{\alpha V}{\rho_m + V}. \quad (4.69)$$

En la figura 4.1 se puede observar que esta velocidad del sonido se aleja de cero dependiendo el valor del parámetro α . El caso $c_s^2 = 0$ equivale al modelo Λ CDM, por lo que las predicciones observacionales cambiarán con respecto a este modelo cuando $\alpha \neq 0$. En lo siguiente no usaremos α negativo para este modelo, pues implica una velocidad del sonido imaginaria.

Para resolver las perturbaciones a nivel lineal necesitamos las reglas de evolución para las variables δV , $\delta \rho_m$ y θ_m . Generalmente estas reglas se dan en la forma de un sistema de tres

ecuaciones diferenciales de primer orden; sin embargo, para este caso la ecuación (4.69) permite que una de las ecuaciones sea algebraica y esté dada por

$$\delta V = \frac{-\alpha V \delta \rho_m}{\rho_m + (1 + \alpha)V}. \quad (4.70)$$

Esta ecuación puede usarse junto con (4.24) y (4.25) para obtener una expresión para la perturbación de la densidad de materia; después de un poco de álgebra es posible obtener

$$\delta \dot{\rho}_m = \frac{(1 + \alpha)Q}{\rho_m + (1 + \alpha)V} \delta \rho_m - \rho_m \left(\frac{\rho_m + (1 + \alpha)V}{\rho_m + V} \right) \left(\frac{3H}{\rho_m} \delta \rho_m - 3\psi + \frac{\nabla^2}{a^2} (\theta_m + \sigma) \right). \quad (4.71)$$

Por último, las ecuaciones (4.26) nos permiten obtener una ecuación de evolución para θ_m , la cual estará dada por

$$\dot{\theta}_m = \frac{Q}{\rho_m} \theta_m - \frac{\alpha V}{\rho_m + (1 + \alpha)V} \delta \rho_m - \phi. \quad (4.72)$$

Para resolver las ecuaciones (4.70), (4.71) y (4.72) se deben incluir ecuaciones equivalentes para la densidad y velocidad del resto de las componentes del universo más otras para los términos de perturbación de la métrica. Un resumen de estas ecuaciones puede encontrarse en el artículo de Ma y Bertschinger [42]. Una vez hecho esto podemos resolver numéricamente y comparar las cantidades obtenidas con observaciones como el espectro de potencias de materia y las anisotropías de la radiación cósmica de fondo.

Para implementar estas ecuaciones en uno de los programas cosmológicos ya existentes, es necesario elegir una norma y adaptar las ecuaciones a las convenciones usadas por el programa. En este trabajo usamos el código CAMB [136] (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*), el cual puede encontrarse en la página «<http://camb.info>». Primero debemos notar que este código trabaja en la norma síncrona, en la cual $\phi = B = 0$. El potencial de corte σ , dado por la ecuación (1.56), se simplifica a $\sigma = a^2 \dot{E}$. Con lo anterior, los términos ψ y σ de la ecuación (4.71) se reducen a

$$-3\psi + \frac{\nabla^2}{a^2} \sigma = \frac{\partial}{\partial t} (-3\psi + \nabla^2 E). \quad (4.73)$$

De lo escrito en la sección 1.5 puede verse que el término entre paréntesis es igual a un medio de la traza de la perturbación del tensor métrico, la cual denotaremos por h . En lugar de evolucionar la variable $\delta \rho_m$, el programa evoluciona la variable adimensional $\delta_m = \delta \rho_m / \rho_m$. Con esto, las ecuaciones (4.71) y (4.72) se convierten en

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_m &= \frac{(1 + \alpha)Q}{\rho_m + (1 + \alpha)V} \delta_m + \frac{\rho_m - (1 + \alpha)V}{\rho_m + V} \frac{\nabla^2}{a^2} \theta_m - \frac{\rho_m + (1 + \alpha)V}{\rho_m + V} \frac{\dot{h}}{2}, \\ \dot{\theta}_m &= \frac{Q}{\rho_m} \theta_m - \frac{\alpha V}{\rho_m + (1 + \alpha)V} \delta_m. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Finalmente, el último cambio que necesitan estas ecuaciones para implementarse en CAMB es el escribirlas en el espacio de Fourier asociado a las perturbaciones; el único efecto sobre la forma de las ecuaciones (4.74) es la sustitución de ∇^2 por $-k^2$. Las perturbaciones, que

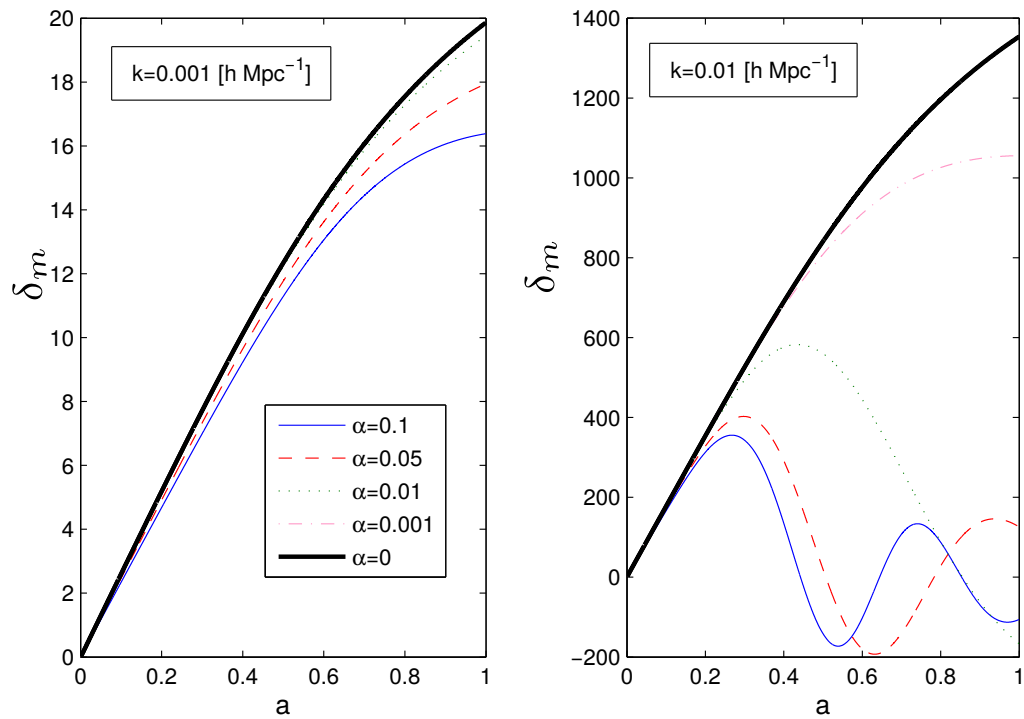


FIGURA 4.2: Densidad de las perturbaciones de materia a las escalas $k = 0.001[hMpc^{-1}]$ y $k = 0.01[hMpc^{-1}]$ como función del factor de escala. Observamos que para escalas grandes las perturbaciones disminuyen un poco, mientras que para escalas pequeñas oscilan alrededor de cero. Este efecto es más importante entre mayor sea α . El caso $\alpha = 0$ coincide con el modelo Λ CDM.

originalmente dependían de la posición y el tiempo, ahora dependerán del número de onda k y el tiempo.

Después de resolver numéricamente, mostramos en la figura 4.2 la evolución de las perturbaciones de materia para este modelo. Podemos observar que el aumentar α disminuye el crecimiento en la perturbación para escalas grandes; mientras para escalas pequeñas estas perturbaciones oscilan alrededor de cero. Este efecto es muy importante pues implicará un espectro de potencias muy distinto del observado y, como veremos, será la razón de las restricciones tan fuertes sobre el parámetro α .

El código CAMB nos permite calcular el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo asociado a este modelo, como podemos observar en la figura 4.3 el mayor cambio con respecto al modelo Λ CDM ocurre para l 's pequeñas. El cambio de la curva para estas escalas ocurre debido al efecto Sachs-Wolfe integrado (ISW) [137]. Aunque el código resuelve numéricamente las ecuaciones completas, es posible, haciendo algunas aproximaciones, ver la razón de este efecto. El efecto ISW puede ser aproximado por la integral de los potenciales Newtonianos a partir de la época de última dispersión (l_s) hasta nuestros días; la fórmula está dada por

$$\delta T_l^{ISW}(k) \approx \int_{\tau_{l_s}}^{\tau_0} dt (\phi^N(k, \tau) + \psi^N(k, \tau)) j_l[k(\tau_0 - \tau)], \quad (4.75)$$

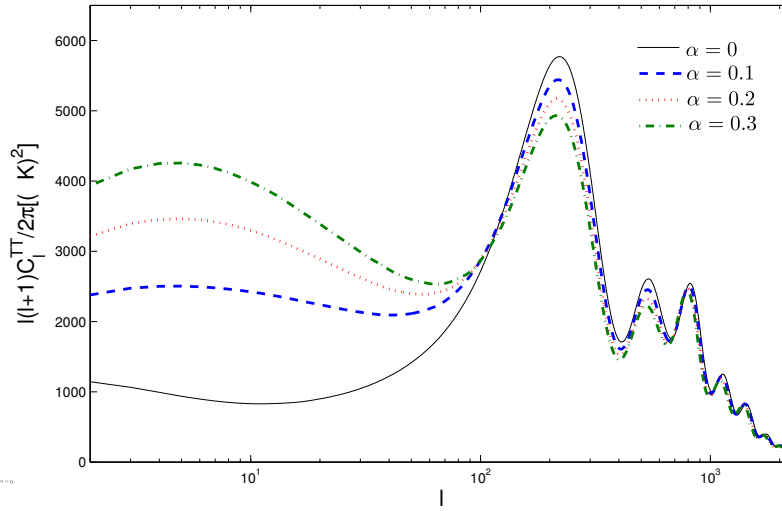


FIGURA 4.3: Espectro de potencias del CMB para el modelo barotrópico. Las ecuaciones de perturbación para el caso $\alpha = 0$ coinciden con el modelo Λ CDM. Observamos que el mayor cambio es debido al efecto Sachs-Wolfe integrado, correspondiente a ángulos grandes (l 's pequeñas).

donde j_l son las funciones esféricas de Bessel, τ es el tiempo conforme y ϕ^N, ψ^N son las perturbaciones a la métrica en la norma Newtoniana. La ecuación de Poisson para el caso sin esfuerzos anisotrópicos nos puede relacionar los potenciales de esta integral con las perturbaciones de densidad como [27]

$$\phi^N(k, \tau) + \psi^N(k, \tau) = -\frac{a^2}{k^2 M_{\text{Pl}}^2} \sum_I \rho_I [\delta_I - 2H\gamma_I \theta_I], \quad (4.76)$$

donde la suma es sobre todas las especies materiales del universo incluyendo la materia y el vacío. Estas fórmulas nos permiten entender cómo la supresión en la perturbación de materia observada en la figura 4.2 se ve reflejada en la gráfica 4.3.

El espectro de potencias de materia es el más afectado debido a los cambios con respecto al modelo Λ CDM. En las gráficas de la figura 4.4 se observa como el espectro de potencias de la componente de materia oscura se ve suprimido a escalas pequeñas debido a la velocidad del sonido distinta de cero. El espectro de potencias de los bariones se ve afectado indirectamente y sus perturbaciones también se ven suprimidas. Esto es muy importante pues este espectro de potencias puede medirse a través del conteo de galaxias en estudios como el *Sloan Digital Sky Survey* [138].

Para la comparación de las predicciones del modelo con las observaciones, usamos el código público COSMOMC [139] que puede ser encontrado en la página «<http://cosmologist.info/cosmomc/>». Este código usa el método de cadenas de Markov para encontrar las distribuciones de probabilidad de los parámetros cosmológicos. En este caso usamos datos de la radiación cósmica de fondo del satélite WMAP [122], y de la estructura a gran escala de la

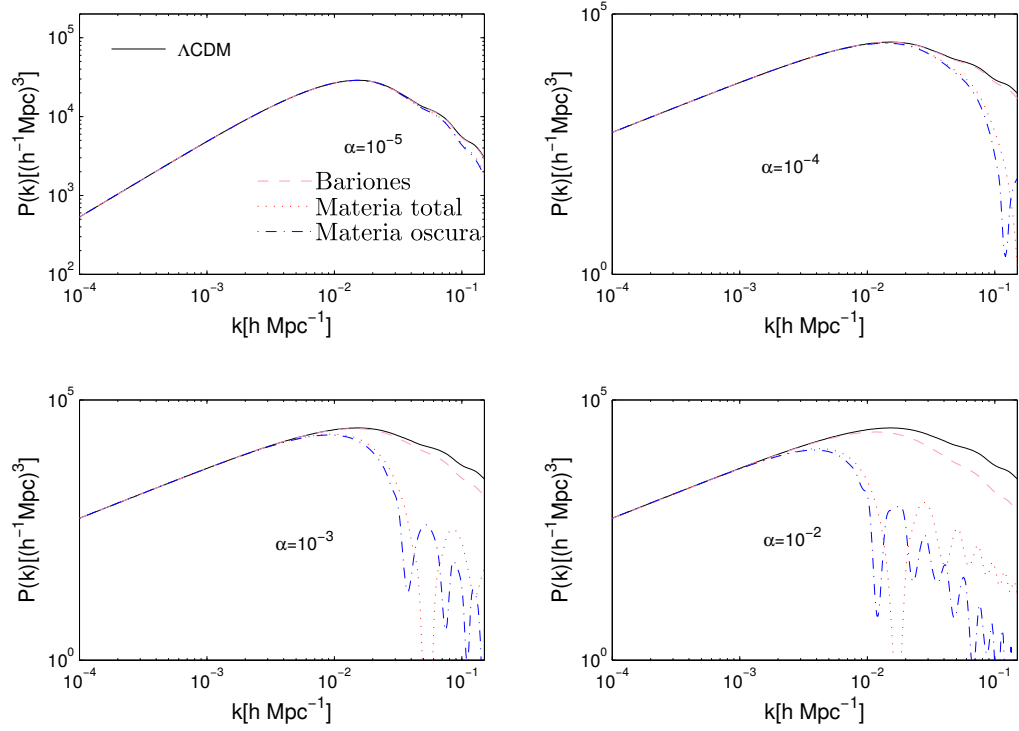


FIGURA 4.4: Espectro de potencias de materia para el modelo barotrópico. La línea azul corresponde al espectro de perturbaciones para la componente de materia ρ_m que interactúa con el vacío. El espectro para escalas pequeñas se ve suprimido respecto del modelo Λ CDM en negro. El espectro de los bariones (línea magenta, rayada) se ve suprimido en menor medida pues sus perturbaciones solo se modifican indirectamente a través de la interacción gravitacional con la materia oscura.

séptima publicación de datos del *Sloan Digital Sky Survey* [138]. En la tabla 4.1 podemos observar que las cotas observacionales al parámetro α son un orden de magnitud más fuertes al usar datos del espectro de potencias de materia.

4.5.2. Modelo geodésico

El segundo ejemplo que consideraremos corresponde al caso en que el modelo se comporta como los estudiados en la sección 4.4.2. En este caso, la interacción (4.62) definida a nivel homogéneo se generalizará de forma que el flujo de energía se encuentre a lo largo de la velocidad de materia, es decir

$$Q_\mu = Qu_\mu. \quad (4.77)$$

Esta ecuación ya se cumple en el caso homogéneo, pues a ese nivel todos los vectores con significado físico están en la misma dirección; así que en este modelo simplemente generalizaremos este hecho requiriendo que se cumpla siempre.

Parámetros	WMAP+SNIa+BAO	WMAP+SNIa+SDSS
$\Omega_b h^2$	$0.0225^{+0.0005}_{-0.0005}$	$0.0224^{+0.0005}_{-0.0005}$
$\Omega_{dm} h^2$	$0.1115^{+0.0033}_{-0.0032}$	$0.1156^{+0.0035}_{-0.0034}$
Θ_s	$1.0396^{+0.0025}_{-0.0025}$	$1.0395^{+0.0025}_{-0.0025}$
τ	$0.0872^{+0.0060}_{-0.0067}$	$0.0855^{+0.0061}_{-0.0066}$
α	$< 2.68 \times 10^{-3}$	$< 5.66 \times 10^{-6}$
n_s	$0.970^{+0.013}_{-0.012}$	$0.964^{+0.012}_{-0.012}$
$\log[10^{10} A_s]$	$3.081^{+0.033}_{-0.033}$	$3.091^{+0.032}_{-0.032}$
Ω_V	$0.73^{+0.01}_{-0.01}$	$0.71^{+0.02}_{-0.02}$
H_0	$70.8^{+1.3}_{-1.2}$	$69.1^{+1.5}_{-1.5}$

CUADRO 4.1: Valores de los parámetros cosmológicos con errores a 1σ para el modelo barotrópico. En la segunda columna, el uso de datos de la estructura a gran escala proporcionados por SDSS, permite poner cotas muy restrictivas al parámetro α .

A diferencia del modelo barotrópico, en este caso no tendremos una forma explícita de la interacción a nivel covariante $Q = -u^\mu Q_\mu$. En lugar de esto podremos construir las ecuaciones de perturbación a partir de los requerimientos de que la interacción tenga la forma (4.62) a nivel homogéneo y que, a nivel no homogéneo, sea paralela a la velocidad de la materia.

De la ecuación (4.49) obtenemos que $\delta V = -Q\theta_m$, por lo que la evolución para la perturbación del vacío queda dada por la fórmula

$$\delta V = -3\theta_m \alpha H \left(\frac{\rho_m V}{\rho_m + V} \right). \quad (4.78)$$

Una vez más tenemos una ecuación algebraica en lugar de una diferencial. La evolución de las otras dos perturbaciones se obtiene de las ecuaciones (4.47) y (4.48), quedando

$$\begin{aligned} \dot{\delta\rho}_m &= -3H\delta\rho_m + 3\rho_m\dot{\psi} - \rho_m \frac{\nabla^2}{a^2} (\theta_m + a^2\dot{E} - aB) - \delta\dot{V}, \\ \dot{\theta}_m &= -\phi. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Al igual que en el caso barotrópico, necesitamos elegir la norma síncrona y adaptar la notación para implementar estas ecuaciones en CAMB. En esta norma $\phi = B = 0$, por lo que la ecuación para la derivada de θ_m se anula. Aprovechando este hecho y eligiendo que θ_m sea cero a un tiempo inicial, tendremos

$$\theta_m = 0, \quad (4.80)$$

para todo tiempo. Esto es una simplificación característica del modelo geodésico, a diferencia del caso barotrópico en que, aunque se elija θ_m como cero a un tiempo inicial, la ecuación de evolución la llevará a otros valores al avanzar el tiempo. Debido a que la ecuación para δV es proporcional a θ_m , esta cantidad también será cero en esta elección de norma

$$\delta V = 0. \quad (4.81)$$

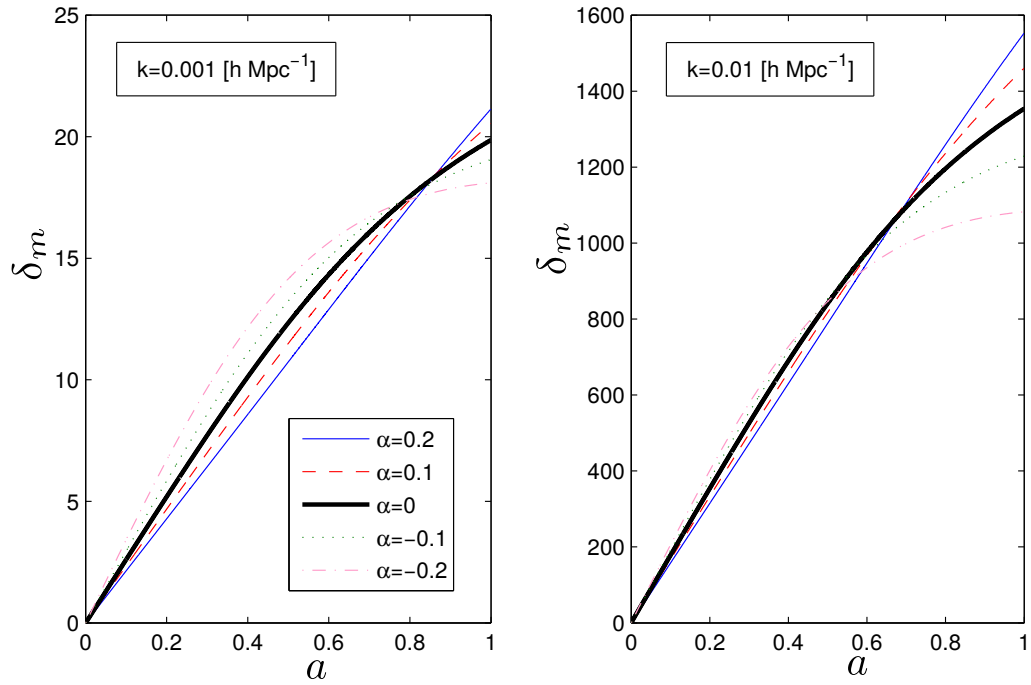


FIGURA 4.5: Densidad de las perturbaciones de materia a las escalas $k = 0.001[hMpc^{-1}]$ y $k = 0.01[hMpc^{-1}]$ como función del factor de escala.

Aquí hay que señalar que esta perturbación solo se anula para esta norma; por lo que, si quisiéramos usar otra norma, tendríamos que considerar una perturbación distinta de cero dada por la ecuación (4.81) que es válida para una norma arbitraria. De la misma forma que para el caso barotrópico, necesitamos hacer el cambio de variable $\delta_m = \delta\rho_m/\rho_m$ y cambiar los potenciales $-3\psi + \nabla^2 E = h/2$; con esto tendremos la ecuación de evolución

$$\dot{\delta}_m = \frac{Q}{\rho_m} \delta_m - \frac{\dot{h}}{2}. \quad (4.82)$$

Una vez más, podemos introducir las ecuaciones (4.80), (4.81) y (4.82) en el código CAMB y evolucionar las perturbaciones para obtener el espectro de potencias. En la figura 4.5 observamos que la evolución de las perturbaciones no varía tanto como en el caso barotrópico de la figura 4.2. En este caso las ecuaciones son muy parecidas a las del modelo Λ CDM, el único término extra es el proporcional a la interacción en la ecuación (4.82).

Al igual que en el caso barotrópico, podemos obtener el espectro de potencias del CMB en la figura 4.6 y el de materia en la figura 4.7. Vemos que ambos se ven modificados mucho menos con respecto al caso Λ CDM esto se debe a que las perturbaciones de la materia oscura, como las observadas en la figura 4.5 se ven menos modificadas que en el caso barotrópico. En particular, el cambio en la altura de los picos acústicos del CMB se debe al cambio en la época de igualdad entre materia y radiación. Aumentar α provoca que esta época ocurra antes, lo cual disminuye la amplitud de los picos. Por esta misma razón, al aumentar α la época de

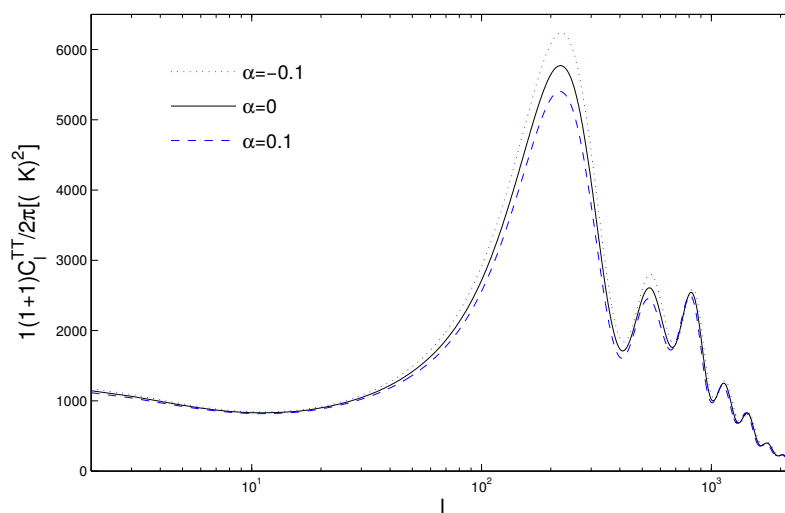


FIGURA 4.6: Espectro de potencias del CMB para para el modelo geodésico. El hecho de que las perturbaciones de materia no se vean suprimidas como en el caso barotrópico, permite que el modelo no cambie con respecto al modelo Λ CDM .

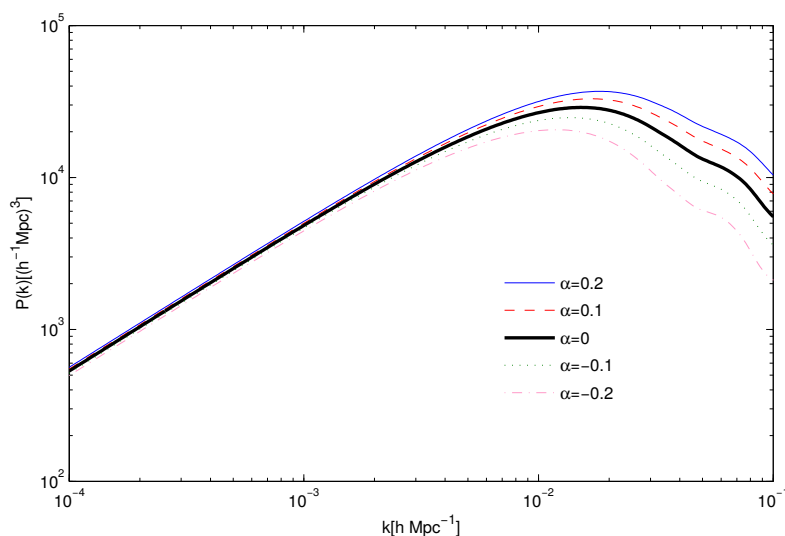


FIGURA 4.7: Espectro de potencias de materia para el modelo geodésico. A diferencia del modelo barotrópico, aquí no vemos una supresión abrupta del espectro para escalas pequeñas. Esto se debe a que la velocidad del sonido de este modelo es cero.

dominación de materia es más larga, aumentando el espectro de potencias de materia como se observa en la figura 4.7.

Al usar el código COSMOMC y comparar con las observaciones podemos obtener las restricciones sobre los parámetros cosmológicos, las cuales escribimos en la tabla 4.2. Vemos que las cotas sobre α se ven reducidas en 3 ordenes de magnitud con respecto al caso barotrópico de la tabla 4.1.

Parámetros	WMAP+SNiA+BAO	WMAP+SNiA+SDSS
$\Omega_b h^2$	$0.0224^{+0.0005}_{-0.0005}$	$0.0224^{+0.0005}_{-0.0005}$
$\Omega_{dm} h^2$	$0.1077^{+0.0144}_{-0.0146}$	$0.1167^{+0.0149}_{-0.0150}$
Θ_S	$1.0395^{+0.0026}_{-0.0026}$	$1.0394^{+0.0026}_{-0.0026}$
τ	$0.0864^{+0.0063}_{-0.0072}$	$0.0862^{+0.0063}_{-0.0072}$
α	$0.04^{+0.11}_{-0.11}$	$-0.01^{+0.11}_{-0.11}$
n_s	$0.964^{+0.013}_{-0.013}$	$0.965^{+0.013}_{-0.013}$
$\log[10^{10} A_s]$	$3.081^{+0.033}_{-0.033}$	$3.086^{+0.033}_{-0.033}$
Ω_V	$0.74^{+0.04}_{-0.04}$	$0.71^{+0.04}_{-0.04}$
H_0	$70.6^{+1.5}_{-1.5}$	$69.3^{+1.9}_{-1.9}$

CUADRO 4.2: Valores de los parámetros cosmológicos con errores a 1σ para el modelo geodésico. Vemos que las cotas sobre α son mucho menos restrictivas que para el caso barotrópico observado en la tabla 4.1.

4.6. Modelos autointeractuantes

En esta sección estudiaremos un tipo de fluidos compuestos por colecciones de partículas con masa que sienten una autointeracción. Dicha autointeracción se manifestará como una densidad de energía del vacío que será función de la distancia típica de las partículas, o de su densidad. Este tipo de fluidos por ejemplo, puede pensarse como gases de baja entropía en los que las partículas sienten una fuerza entre sí que depende de su distancia. En ese sentido, estos modelos podrán simular variados tipos de fluidos en que las partículas pueden sentir fuerzas de atracción o repulsión entre ellas. Este modelo ha sido estudiado previamente en [140–142] y se adapta al análisis del vacío interactuante de forma natural.

Considerando que la componente de materia consiste en un fluido compuesto de partículas con densidad n y masa m que no tienen movimientos aleatorios entre sí, la densidad de energía del fluido estará dada por $\rho = nm$. La conservación del número de partículas dada por $\nabla_\mu(nu^\mu) = 0$, puede usarse para obtener la derivada temporal tanto de la densidad de partículas

$$\dot{n} = -n\Theta, \quad (4.83)$$

como de la densidad de energía $\dot{\rho} = -n\rho\Theta$. Si la densidad de vacío proviene de las interacciones entre las partículas del fluido, esta será función de su densidad de la forma $V(n)$. La forma de la interacción se puede obtener de la ecuación (4.15) como $Q = V'(n)\dot{n}$, donde la prima significa derivada con respecto a n ; de la ecuación (4.83), la interacción se transforma a

$$Q = -\Theta nV'(n). \quad (4.84)$$

Con estos resultados podemos obtener la presión del fluido a partir de la ecuación (4.14) como $P = nV'(n)$; con lo que en general es distinta de cero a diferencia de lo que ocurre en los demás modelos estudiados en las secciones previas.

La presión y densidad efectivas no obedecen las ecuaciones de la sección 4.4, donde supusimos que el fluido de materia no tenía presión, sino que están dadas por $\rho_{\text{ef}}(n) = mn + V(n)$ y $P_{\text{ef}}(n) = nV'(n) - V(n)$. Es claro que, una vez conocida la expresión para $V(n)$, estas expresiones pueden combinarse para obtener a la presión como función de la densidad, por lo que el fluido efectivo es uno barotrópico.

Pensando en que este fluido pueda servir para unificar la materia y la energía oscura, podemos separar las densidades y presiones del fluido efectivo entre una componente de polvo con $\rho_{DM} = mn$ y presión cero y una componente extra con densidad $\rho_{DE} = V(n)$ y presión $P_{DE} = nV'(n) - V(n)$. La componente que identificamos como energía oscura (DE) tendrá una ecuación de estado $\gamma_{DE} = nV'(n)/V(n)$ que podría ajustarse para ser cercana a cero y producir aceleración en el universo. El problema con estos fluidos, sin embargo es que al provenir de un fluido efectivo que en el fondo es barotrópico, tienen graves restricciones derivadas de sus ecuaciones de perturbación. En este caso la velocidad de sonido del fluido está dada por $c_s^2 = nV''(n)/(m + V'(n))$.

Como un ejemplo para este tipo de sistemas, podemos tomar una densidad de vacío que esté relacionada con la densidad a través de una ley de potencias $V = An^\gamma$, donde A y γ son constantes. Aquí la densidad y presión totales tendrán las expresiones

$$\rho_{\text{ef}} = mn + An^\gamma, \quad (4.85)$$

$$P_{\text{ef}} = A(\gamma - 1)n^\gamma. \quad (4.86)$$

Este fluido efectivo puede verse como la suma de un fluido tipo polvo con densidad mn más otro con ecuación de estado γ . Si queremos que este modelo pueda producir aceleración en el universo se requiere que $\gamma < 2/3$. Por otro lado, la velocidad del sonido asociada está dada por $c_s^2 = \gamma P_{\text{ef}}/\rho_{\text{ef}}$, que será negativa excepto que $\gamma < 0$, con lo que, para evitar inestabilidades clásicas, es necesario tener una ecuación de estado tipo *phantom* que introducirá inestabilidades cuánticas. Esto limita mucho el modelo para unificar energía y materia oscura excepto cuando γ es tan cercano a cero que el modelo es indistinguible de Λ CDM.

Una posibilidad para obtener la forma particular de la función $V(n)$ es considerando que las partículas del fluido interactúan con sus vecinas con una energía potencial que depende de la distancia; este potencial estará dado por $\Phi(\lambda)$ donde λ es la distancia entre dos partículas del fluido. Entonces, la densidad de energía estará dada por la suma de potenciales dividida entre el volumen. Si N es el número de partículas y $\bar{\Phi}$ el potencial promedio, la densidad será

$$V = \frac{N^2 \overline{\Phi(\lambda)}}{2Vol}. \quad (4.87)$$

En ciertos potenciales, el promedio se podrá realizar sobre la distancia, obteniendo $\bar{\Phi} = \Phi(\bar{\lambda})$. La distancia promedio puede escribirse en términos de la densidad de partículas como $\bar{\lambda} \approx$

$(N/n)^{1/3}$. Así, la densidad queda de la forma

$$V(n) = \frac{Nn}{2} \Phi \left(\left(\frac{N}{n} \right)^{1/3} \right), \quad (4.88)$$

donde el número de partículas N es constante.

Este sistema se puede ver a nivel homogéneo como la combinación de un fluido tipo polvo más uno con una ecuación de estado

$$\gamma_{DE} = 1 - \frac{\lambda \Phi'(\lambda)}{3\Phi(\lambda)} \Big|_{\lambda=(N/n)^{1/3}}. \quad (4.89)$$

La velocidad del sonido estará dada por

$$c_s^2 = \frac{\lambda^2 \Phi''(\lambda) - 2\lambda \Phi'(\lambda)}{3 \left(\frac{6m}{\lambda^3 n} + 3\Phi(\lambda) - \lambda \Phi'(\lambda) \right)} \Big|_{\lambda=(N/n)^{1/3}}. \quad (4.90)$$

Por ejemplo, si el potencial entre las partículas está dado por la expresión $\Phi(\lambda) \propto \lambda^\alpha$, la densidad estará dada por $V(n) = An^{(3-\alpha)/3}$. Esta forma para la densidad corresponde en el nivel homogéneo a un fluido de polvo más uno con ecuación de estado $\gamma_{ex} = -\alpha/3 + 1$. Para un potencial cuadrático el fluido correspondería a un fluido con ecuación de estado $\gamma = 1/3$. Esta ecuación de estado es capaz de producir aceleración en el universo; sin embargo, no es suficiente para satisfacer las cotas actuales sobre la ecuación de estado de la energía oscura, que son especialmente restrictivas cuando la ecuación de estado es constante como en este caso. Según datos del satélite Planck [3], en combinación con datos de polarización de WMAP y BAO, la ecuación de estado γ se encuentra entre 0.12 y -0.26 con 95% de probabilidad; la ecuación de estado $\gamma = 1/3$, estando a 4σ del valor central. Resultados similares se obtienen de las mediciones de supernovas [143, 144] con $\gamma < 0.17$ a 95% de probabilidad.

Basados en este ejemplo, otro caso interesante sería que el potencial entre las partículas fuera cuadrático pero con el mínimo para una cierta distancia λ_0 distinta de cero. Esto correspondería a $\Phi(\lambda) = A(\lambda - \lambda_0)^2$. En este caso, el fluido extra tendría una ecuación de estado

$$\gamma_{DE} = 1 - \frac{2\lambda}{3(\lambda - \lambda_0)} \Big|_{\lambda=(N/n)^{1/3}}. \quad (4.91)$$

Esta ecuación de estado no está bien definida para $\lambda = \lambda_0$, pues la densidad del potencial se hace cero en este punto; sin embargo, las densidades de las distintas componentes del fluido están bien definidas. Como puede verse en la Figura 4.8, se observa que para ciertos valores de λ la ecuación de estado del fluido puede ser menor que $1/3$ e incluso negativa.

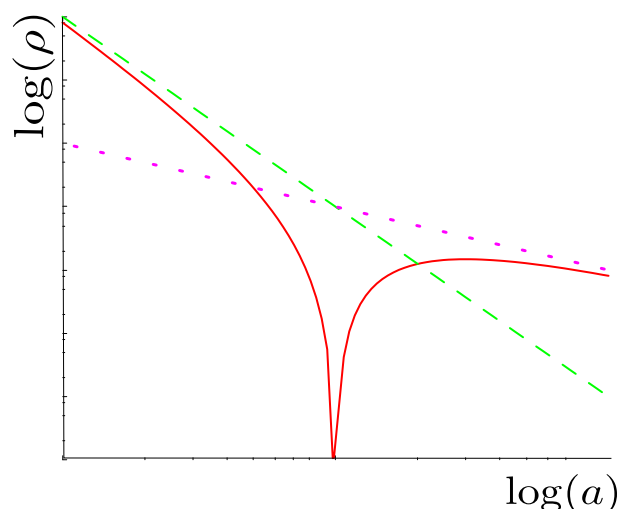


FIGURA 4.8: La curva roja continua muestra la densidad del componente extra para un potencial del tipo $\Phi(\lambda) = A(\lambda - \lambda_0)^2$. Las líneas verde (rayada) y magenta (punteada) muestran los comportamientos asintóticos del fluido, primero tipo polvo y luego con ecuación de estado $\gamma = 1/3$.

4.7. Campo escalar como un modelo de vacío interactuando con un fluido barotrópico

En esta sección consideraremos un campo escalar con Lagrangiano separable del tipo de los estudiados en los capítulos 2 y 3, es decir con

$$\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi). \quad (4.92)$$

Al observar el tensor de energía-momento del campo, que tiene la forma

$$T_{\mu\nu} = -V(\varphi)g_{\mu\nu} + Fg_{\mu\nu} + F_X\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}, \quad (4.93)$$

podemos notar que el término correspondiente al potencial tiene la forma de una energía de vacío, como en la ecuación (4.1). Por ello en esta sección interpretaremos al potencial como una densidad de vacío proveniente de la autointeracción del campo escalar φ . Dicha energía, a su vez, interactúa con la parte cinética del campo escalar. En esta sección obtendremos las expresiones para esta interacción tanto a nivel covariante como a primer orden en perturbaciones cosmológicas.

Primero dividamos al tensor de energía-momento en una parte correspondiente al vacío, dada por el potencial

$$\check{T}_{\mu\nu} = -V(\varphi)g_{\mu\nu}, \quad (4.94)$$

y otra correspondiente a un fluido que interactúa con el vacío, dada por la parte cinética

$$T_{\mu\nu}^{(k)} = F(X)g_{\mu\nu} + F_X(X)\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}. \quad (4.95)$$

De aquí podemos ver que la densidad del vacío es $V(\phi)$ mientras la densidad y presión de la componente cinética están dadas por

$$\rho_k = 2XF_X(X) - F(X), \quad P_k = F(X). \quad (4.96)$$

Para la parte cinética tanto la densidad como la presión dependen de una única variable escalar X ; por lo que, en general, es posible despejar X en términos de la densidad y sustituir en la presión obteniendo que este fluido es barotrópico, es decir $P_k = P(\rho_k)$. La ecuación de estado coincide con aquella que usamos en los análisis del capítulo 2 dada por (2.12)

$$\gamma_k = \frac{\rho_k + P_k}{\rho_k} = \frac{2XF_X}{2XF_X - F}. \quad (4.97)$$

La velocidad del vacío, como habíamos señalado, no está definida. Por otro lado, la velocidad del fluido cinético, cuando esté definida, será proporcional al gradiente del campo $\varphi_{,\mu}$. Para estos modelos en particular, esta velocidad coincide con la dirección del flujo de energía del vacío definida en la ecuación (4.9), es decir $u^\mu = \check{u}^\mu$. Como la interacción está en la dirección del flujo de energía del vacío (ver ecuación (4.7)), concluimos que en este caso es proporcional a la velocidad del fluido, obteniendo

$$Q^\nu = Qu^\nu, \quad (4.98)$$

que comparado con la ecuación (4.13) implica que la fuerza f^ν asociada a la interacción es cero.

Las divergencias de los tensores de vacío y materia están dadas por

$$\nabla_\mu \check{T}_\nu^\mu = -V_\varphi \varphi_{,\nu}, \quad (4.99)$$

$$\nabla_\mu T^{(k)\mu}_\nu = (F_X \square \varphi + F_{XX} \varphi_{,\mu} X'^\mu) \varphi_{,\nu}, \quad (4.100)$$

los cuales son iguales al vector de interacción. De aquí podemos leer la forma de la parte escalar de la interacción Q , que mide el flujo de energía entre ambos fluidos. Esta interacción puede escribirse en términos del potencial o en términos de la parte cinética con las expresiones

$$Q = \sqrt{2X} V_\varphi, \quad (4.101)$$

$$Q = \sqrt{2X} (F_X \square \varphi + F_{XX} \varphi_{,\mu} X'^\mu). \quad (4.102)$$

Usando la ecuación de movimiento que sigue el campo escalar (1.40) es posible comprobar que ambas expresiones son iguales.

En el régimen de perturbaciones lineales alrededor de un fondo homogéneo y plano de FRW, el campo φ puede dividirse entre una parte homogénea y una perturbación de primer orden $\varphi_0 + \delta\varphi$; de forma similar todas las cantidades que dependen del campo se separarán. El

tensor de energía-momento para el vacío tendrá la expresión

$$\check{T}_v^\mu = \delta_v^\mu (V_0 + V_\varphi \delta\varphi). \quad (4.103)$$

De ahora en adelante, para simplificar la notación escribiremos $V_\varphi(\varphi_0)$ como V_φ y lo mismo para las otras cantidades homogéneas. El tensor de energía-momento de la parte cinética tendrá los términos

$$T^{(k)0}_0 = -2X_0 F_X + F - \delta X (2X_0 F_{XX} + F_X), \quad (4.104)$$

$$T^{(k)0}_i = -\frac{\dot{\varphi}_0}{a} F_{,X} \delta\varphi_{,i}, \quad (4.105)$$

$$T^{(k)i}_0 = \frac{\dot{\varphi}_0}{a} F_{,X} (a\dot{\varphi}_0 B^i + \delta\varphi^{,i}), \quad (4.106)$$

$$T^{(k)j}_i = \delta_i^j (F + F_X \delta X), \quad (4.107)$$

donde el término cinético está ha sido separado en sus componentes a nivel homogéneo y a primer orden respectivamente $X = X_0 + \delta X$, las cuales están dadas por las expresiones

$$X_0 = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2}, \quad (4.108)$$

$$\delta X = \dot{\varphi}_0 (\delta\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0 \phi). \quad (4.109)$$

De estas ecuaciones se pueden leer la densidad y presión a orden homogéneo

$$\check{\rho}_0 = -\check{P}_0 = V_0, \quad (4.110)$$

$$\rho_0^{(k)} = 2X_0 F_X - F, \quad (4.111)$$

$$P_0^{(k)} = F, \quad (4.112)$$

y a primer orden

$$\delta\check{\rho} = V_\varphi \delta\varphi, \quad (4.113)$$

$$\delta\rho^{(k)} = \delta X (2X_0 F_{XX} + F_X), \quad (4.114)$$

$$\delta P^{(k)} = \delta X F_X. \quad (4.115)$$

La parte escalar de la interacción se puede obtener en términos del potencial a través de la ecuación (4.101), su expresión a nivel homogéneo será

$$Q_0 = \dot{\varphi}_0 V_\varphi, \quad (4.116)$$

mientras que a primer orden

$$\delta Q = Q_0 \left(\frac{\delta\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} + \frac{\delta\varphi V_{\varphi\varphi}}{V_\varphi} - \phi \right). \quad (4.117)$$

Ambas expresiones se pueden escribir en términos de la parte cinética usando la ecuación

(4.102). Estas ecuaciones, a pesar de ser más elaboradas, son equivalentes a las dos expresiones anteriores gracias a la ecuación de movimiento del campo. Para la parte homogénea, la interacción está dada por

$$Q_0 = -\rho_X^{(k)} \dot{X} - 6HXF_X, \quad (4.118)$$

donde la derivada de la densidad de energía está dada por $\rho_X^{(k)} = 2X_0F_{XX} - F_X$. Por otro lado, a nivel lineal tenemos

$$\begin{aligned} \delta Q = & 4X_0^2 \left(\phi - \frac{\delta\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} \right) \left(\dot{X}_0 F_{XXX} + 3F_{XX} \left(H + \frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0} \right) \right) \\ & + \left(2\frac{\delta\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} - 3\phi \right) Q_0 + \rho_X \dot{\phi}_0 \delta\dot{\phi} \\ & + 2X_0 \rho_X \left[\dot{\phi} - \frac{\delta\ddot{\phi}}{\dot{\phi}_0} + c_s^2 \left(\nabla^2 \left(\frac{\delta\phi}{\phi_0} - \frac{\sigma}{a} \right) + 3\dot{\psi} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.119)$$

donde c_s^2 es la velocidad del sonido del fluido cinético. Esta velocidad del sonido, debido a que el fluido cinético es barotrópico, puede escribirse como $c_s^2 = P_X^{(k)} / \rho_X^{(k)}$ siguiendo la ecuación (3.22) o simplemente como el cociente de la presión y la densidad perturbadas $c_s^2 = \delta P^{(k)} / \delta \rho^{(k)}$. Los términos de fuerza de la interacción f^μ son cero como ya se dijo, no solo a nivel lineal sino a todos los órdenes.

4.8. Conclusiones

En este capítulo estudiamos la dinámica de la energía de vacío, en particular para el caso cosmológico, tanto a nivel homogéneo como a primer orden de perturbaciones. Observamos que, para que esta energía sea dependiente del tiempo, necesariamente debe tener alguna interacción con otro tipo de materia. Así, propusimos diversos escenarios en que esta interacción puede ocurrir.

Mostramos que, en el caso de los campos escalares, el potencial $V(\varphi)$ puede verse como una energía inhomogénea de vacío que interactúa con la parte cinética del campo escalar. Las ecuaciones obtenidas en este caso son las mismas que en el análisis usual de los campos escalares pero nos permiten verlos desde otra perspectiva. Por otro lado, en vez de considerar la interacción del vacío con el campo escalar, es posible considerar la interacción con otros tipos de materia como polvo o radiación.

Observamos que a través del vacío interactuante también es posible modelar fluidos efectivos, en los que el campo de materia y el vacío se comporten en conjunto de alguna forma que deseemos. Un ejemplo es el caso en que el fluido efectivo se comporta como uno barotrópico en que la velocidad del sonido está dada por la ecuación de estado. Si por otro lado, definimos la interacción proporcional a la velocidad del fluido, es posible obtener un fluido efectivo con presión distinta de cero, pero velocidad del sonido igual a cero. A estos modelos los llamamos modelos geodésicos. Como un ejemplo usamos el gas generalizado de Chaplygin y construimos tanto el modelo barotrópico como el geodésico asociados a este, donde

ambos se comportan igual a nivel homogéneo, pero tienen comportamientos distintos a nivel perturbativo.

En particular, para el gas generalizado de Chaplygin observamos que el modelo geodésico y el modelo barotrópico tienen perturbaciones muy distintas. Aprovechamos este comportamiento para calcular el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo y de la materia modificando el código CAMB. Posteriormente comparamos estos espectros con observaciones de WMAP y SDSS para obtener el valor de los parámetros cosmológicos. Obtuvimos que los límites observacionales para el modelo barotrópico son mucho más fuertes que para el modelo geodésico.

Usando estos modelos de interacción entre el vacío y la materia oscura podemos obtener, entonces, modelos unificados de energía y materia oscura. Una ventaja de estos modelos es que no se introducen nuevos grados de libertad perturbativos con respecto al modelo Λ CDM debido a que la energía de vacío no tiene una velocidad definida.

Conclusiones generales

A lo largo de este trabajo exploramos algunas posibilidades para unificar la energía oscura, materia oscura e inflación.

En los capítulos 2 y 3 estudiamos modelos con campos escalares cuyo Lagrangiano es del tipo $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$. En particular encontramos un modelo que permite reproducir las características generales de la materia oscura y energía oscuras gracias a la contribución de su parte cinética, mientras el potencial produce el periodo de inflación; este modelo estuvo dado por el Lagrangiano (3.2)

$$\mathcal{L}(X, \varphi) = \frac{1}{(2\alpha - 1)} \left[(AX)^\alpha - 2\alpha\alpha_0\sqrt{AX} \right] - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + M. \quad (5.1)$$

La ventaja de este campo es que, pese a la complejidad aparente de su parte cinética, evoluciona a nivel homogéneo como un fluido tipo polvo más una constante cosmológica.

En el capítulo 3, encontramos las condiciones sobre los parámetros del Lagrangiano anterior para que el campo escalar asociado reprodujera los efectos de los tres fenómenos, materia oscura, energía oscura e inflación.

Observamos que para reproducir la materia oscura, es necesario que la parte potencial del Lagrangiano sea poco importante y que la parte cinética se encuentre cerca de un mínimo. En este trabajo pedimos que ambas condiciones se cumplieran a partir de la época de nucleosíntesis en adelante; esto con el fin de asegurar que el comportamiento del campo no incluya términos extra de densidad; ya que sabemos que una desviación en la densidad de esa época respecto al modelo Λ CDM se reflejaría en un cambio de las proporciones de núcleos ligeros en el universo, lo cual no se observa. El hecho de que la parte cinética se vuelva dominante es provocado por la dinámica del campo escalar, de la cual estudiamos sus características generales en el capítulo 2 y su el comportamiento particular de nuestro modelo en la sección 3.2. Por otro lado, el hecho de que el campo se encuentre cerca del mínimo de su potencial cinético, se obtiene ajustando el parámetro α_0 al cual le encontramos una cota

mínima dada por la desigualdad (3.41). Cuando esta desigualdad no se cumple, o en otras palabras el campo se encuentra lejos del mínimo, surgen términos extra en la densidad que evolucionan proporcionalmente a a^{-6} , a^{-9} y que pueden modificar la evolución usual del universo en contradicción con las observaciones.

Para reproducir la energía oscura necesitamos un ajuste fino de los parámetros M y α_0 . Esto ocurre debido a que el modelo tiene una constante cosmológica efectiva, cuya densidad está dada por la resta $\alpha_0^n - M$, que es de orden $(10^{-3} eV)^4$, mientras que el parámetro α_0 está constreñido a tomar valores mucho mayores para que el campo genere a la materia oscura, como se mencionó en el párrafo anterior. Por ejemplo, en la sección 3.4.1 observamos que para el caso $n = 3$, la resta entre α_0^3 y M debe cancelarse casi exactamente, excepto por una parte en 10^{28} la cual corresponde a la energía oscura. Sin embargo, aunque nuestro modelo crea este problema de ajuste fino, al mismo tiempo resuelve el problema del valor pequeño de la constante cosmológica; esto debido a que el parámetro M que aparece en el Lagrangiano jugando el papel de la constante cosmológica puede tomar valores tan grandes como se quiera.

En la sección 3.5 observamos que la unificación entre energía y materia oscura observada en nuestro modelo es un fenómeno común para cualquier campo escalar en que la parte potencial del Lagrangiano pueda ser despreciada y que la parte cinética se encuentre cerca del mínimo. Un modelo muy usado en la literatura que cumple con estas características es el propuesto por Scherrer en [37], en él la parte potencial corresponde a una función cuadrática de X . También observamos que nuestro modelo puede aproximarse por uno de Scherrer cuando se encuentra cerca del mínimo, lo cuál sucede desde la época de nucleosíntesis en adelante. Este resultado fue aprovechado en la sección 3.6 para obtener las perturbaciones lineales relacionadas con nuestro modelo y demostrar que no se alejan de las del modelo Λ CDM.

Para la inflación, obtuvimos que el campo puede ser considerado en el régimen de rodamiento lento y modelado de forma similar al campo canónico con potencial cuadrático. La modificación en el término cinético tiene efectos únicamente para los casos con $n \neq 2$ cambiando el índice espectral de las perturbaciones escalares y la razón entre perturbaciones tensoriales y escalares. Encontramos que estas cantidades tendrían expresiones dadas por

$$n_s = 1 - 0.03\sqrt{n-1}, \quad (5.2)$$

$$r = 0.15\sqrt{n-1}. \quad (5.3)$$

El índice espectral para n entre 2 y 4, se encuentra a menos de dos desviaciones estándar del valor reportado por el satélite Planck [3] de 0.960 ± 0.007 ; siendo el modelo con $n = 3$ el que mejor coincide con esta observación. En cuanto a la razón entre perturbaciones tensoriales y escalares, el experimento BICEP2 [4] ha reportado un valor de $r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$ que concuerda con nuestro resultado.

En el capítulo 2 estudiamos el sistema dinámico asociado a un universo plano de FRW en el que se encuentra presente un fluido barotrópico (que podría representar la radiación, o la materia bariónica dependiendo el caso) y un campo escalar con Lagrangiano del tipo $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$. Nuestro objetivo principal era usar estos resultados en el modelo particular del capítulo 3. Obtuvimos el sistema autónomo y los puntos críticos asociados a éste, con él pudimos compilar la tabla 2.1 y en la sección 2.2 hicimos un recuento de los comportamientos asintóticos asociados al sistema. Dependiendo de la relación entre la ecuación de estado del fluido barotrópico y los parámetros del Lagrangiano escalar, fue posible encontrar sistemas en que la parte potencial del campo tiende a dominar la densidad de universo, aproximándose éste a una etapa de inflación tipo rodamiento lento. En otros casos la energía cinética del campo tendía a dominar, o el fluido. También encontramos casos en que el campo reproduce la ecuación de estado del fluido, estas soluciones son conocidas como de tipo escalamiento (*scaling*).

Encontramos que los casos en que las soluciones tipo escalamiento existen, coinciden con sistemas en que las ecuaciones de evolución pueden reducirse de 3 a 2. En la sección 2.3 encontramos que, a pesar de que el sistema tiene 3 grados de libertad dados por la densidad del fluido, el valor del campo y el de su derivada temporal, en ciertos casos una simetría puede reducir el número de ecuaciones. Mostramos que una de estas simetrías se encuentra presente en los campos canónicos con potencial exponencial; para ellos, un resultado conocido es que tienen soluciones tipo escalamiento. Encontramos también la simetría asociada a los campos no canónicos que también tienen este tipo de soluciones.

Usamos una variante del sistema dinámico para estudiar un escenario del universo temprano en que la expansión actual fue precedida por un periodo de contracción, este suceso es conocido como un gran rebote (*Big Bounce*). En la sección 2.5 reformulamos las ecuaciones dinámicas para ajustarlas al estudio de este escenario y obtuvimos las condiciones para que el campo escalar produjera el rebote. Concluimos que el campo debe tener una densidad de energía negativa y una ecuación de estado mayor que la del fluido barotrópico. Estas condiciones violan la condición de energía nula, lo cual introduce inestabilidades en el modelo que se expresan en la forma de perturbaciones que crecen muy rápidamente y de partículas creadas a partir del vacío. Estas inestabilidades constituyen un importante argumento en contra de que el escenario de gran rebote pueda ser producido por un campo del tipo de los estudiados aquí. Se ha dicho que estas inestabilidades podrían eliminarse introduciendo términos de mayor orden en el Lagrangiano; sin embargo, esto solo se ha logrado para los campos escalares de tipo Galileónico como los estudiados en [94].

En el capítulo 4 se estudió un tipo de modelos basados en la interacción del vacío con algún otro fluido. Estos modelos permiten una gran variedad de comportamientos dinámicos, algunos de los cuáles fueron estudiados en las secciones 4.4 a 4.5.

Una de las razones iniciales para el estudio de estos modelos es la cantidad de trabajos en la literatura donde se hace referencia a una constante cosmológica dependiente del tiempo.

En la sección 4.2 mostramos que, para que estos modelos satisfagan la conservación del tensor de energía-momento y sean compatibles con las ecuaciones de Einstein, el vacío debe tener algún tipo de interacción con el resto de los fluidos del universo. Además, dicha interacción necesariamente introduce inhomogeneidades en el vacío, como lo mostramos en la sección 4.3, las cuales no pueden ser ignoradas en un análisis de perturbaciones lineales. La interacción, además, a nivel homogéneo transfiere energía entre el vacío y otros fluidos del universo y, a nivel lineal, ejerce fuerzas sobre dichos fluidos; ambos efectos cambian el comportamiento de los fluidos afectados lo cual debe tomarse en cuenta en los análisis de los modelos. Como un resultado interesante encontramos que estas fuerzas son proporcionales al gradiente del vacío, actuando éste de forma similar a un potencial en mecánica clásica.

En la sección 4.4 mostramos un método para descomponer cualquier tipo de fluido en un fluido tipo polvo interactuando con el vacío, escogiendo apropiadamente el término de interacción. Estos fluidos efectivos nos permiten proponer modelos de unificación de la energía y materia oscuras, donde el fluido tipo polvo se identifica con la materia oscura y el vacío con la energía oscura.

La posibilidad de simular un fluido arbitrario se presentó a nivel covariante, con lo cual el sistema reproducirá al fluido deseado a cualquier orden en perturbaciones cosmológicas. Si, por otro lado, del fluido que se quiere modelar sólo se conoce su comportamiento a nivel homogéneo, no existirá una forma única de describir la interacción entre los fluidos. Un ejemplo práctico de lo anterior lo analizamos en la sección 4.5 donde obtuvimos dos modelos distintos que a nivel homogéneo se comportan como el gas generalizado de Chaplygin, pero no coinciden a nivel perturbativo.

En la sección 4.4.1 obtuvimos la forma que debe tener la interacción para que el fluido efectivo sea barotrópico. Esta interacción debe ser proporcional al factor de expansión Θ del fluido. Por otro lado en la sección 4.4.2 obtuvimos un tipo de modelos en que la velocidad del fluido tipo polvo sigue geodésicas, a pesar de su interacción con el vacío. Esto ocurre debido a que la fuerza de interacción en esos modelos se anula. Observamos que estos modelos permiten favorecer la unificación entre la materia y energía oscuras pues la materia oscura, al seguir geodésicas, puede generar estructura de la misma forma que se generaría en el modelo Λ CDM. Encontramos también que estos modelos geodésicos son equivalentes a un tipo de modelos propuestos en la referencia [131] y que consisten en dos campos escalares, uno de los cuáles no tiene asociado un término cinético en el Lagrangiano y actúa como un multiplicador de Lagrange que obliga al otro campo a que su velocidad asociada siga geodésicas.

De los modelos basados en el gas generalizado de Chaplygin, se estudió el caso barotrópico y el caso geodésico en la sección 4.5. Observamos que, a pesar de tener el mismo comportamiento a nivel homogéneo, sus ecuaciones de perturbación son distintas. Para el caso barotrópico, observamos que el fluido produce perturbaciones de presión adiabáticas, mientras que para el caso geodésico existen perturbaciones no adiabáticas. Esto se ve reflejado en que la velocidad del sonido para el modelo barotrópico sea distinta de cero, mientras que para

el modelo geodésico sea cero. Al analizar la evolución de las perturbaciones de densidad en el modelo barotrópico, encontramos que la velocidad del sonido distinta de cero produce que las perturbaciones de escalas pequeñas decaigan. En el caso geodésico, las perturbaciones evolucionan de forma similar al modelo Λ CDM, creciendo para todas las escalas. Estas diferencias de comportamiento tienen efectos en el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo y en el de la materia. Los cambios más importantes ocurren en el modelo barotrópico para escalas pequeñas en el espectro de potencias de materia y para ángulos grandes en la radiación cósmica de fondo. Ambos espectros pueden compararse con observaciones para obtener cotas observacionales a los parámetros del modelo. Como era de esperarse, el modelo barotrópico resulta mucho más restringido que el geodésico.

En la subsección 4.5.1 y 4.5.2 analizamos las perturbaciones de un modelo barotrópico y uno geodésico respectivamente, donde ambos se reducen al gas generalizado de Chaplygin en el caso homogéneo. Modificando el código CAMB obtuvimos el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo y de la materia. Estos resultados los comparamos con observaciones cosmológicas usando el código COSMOMC. Obtuvimos que los parámetros para el caso barotrópico están mucho más restringidos que para el caso geodésico. Esto se debe a la velocidad del sonido distinta de cero para el caso barotrópico.

En la sección 4.6, guiados por el hecho de que el vacío se comporta de forma similar al potencial newtoniano, encontramos un tipo de modelos en que la densidad de vacío es una función de la separación promedio entre las partículas del fluido. Analizamos algunos modelos con funciones particulares que son capaces de generar aceleración en el universo. Aunque falta comparar dichos modelos con las observaciones cosmológicas usando programas como COSMOMC o MontePython. Estos modelos ofrecen una interesante opción para la unificación de la materia y energía oscuras debido a la simplicidad física de su origen, pues la energía oscura sería el resultado de la autointeracción de las partículas de materia oscura.

Finalmente, en la sección 4.7 encontramos que los campos escalares del tipo $\mathcal{L} = F(X) - V(\varphi)$ pueden modelarse como una energía de vacío dada por $V(\varphi)$ interactuando con un fluido barotrópico con densidad de energía $2XF_X(X) - F(X)$. Obtuvimos la expresión para el término de interacción a nivel covariante, así como sus perturbaciones lineales. Esto nos permite ver desde otra óptica los modelos estudiados en los capítulos 2 y 3, lo cual es importante porque es posible que la formulación de algunos de estos modelos desde la perspectiva de campo requiera un Lagrangiano muy complejo, mientras que desde la perspectiva de fluidos interactuantes la interacción tenga una expresión simple o viceversa. Como esta identificación fue hecha a nivel covariante todos los resultados para las variables físicas del sistema, densidad, presión y velocidad, serán iguales sin importar si se calculan desde el punto de vista de campo escalar o desde el punto de vista de fluidos interactuantes.

Apéndice **A**

Símbolos y abreviaciones

a	Factor de escala	
B	Perturbación escalar de la métrica (Shift)	
c_s^2	Velocidad del sonido adiabática	
D_μ	Proyección de la derivada covariante	$D_\mu \equiv \mathcal{P}_\mu^\nu \nabla_\nu$
ds	Elemento de línea infinitesimal	
E	Perturbación escalar de la métrica	
f^μ	Parte ortogonal de la interacción	
$F(X)$	Parte cinética del Lagrangiano	
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico	
H	Factor de Hubble	$H \equiv \dot{a}/a$
\mathcal{L}	Densidad Lagrangiana	
M_{Pl}	Masa de Planck reducida	$M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2} \approx 2.435 \times 10^{18} \text{ GeV}$
N	Número de e -folds	$N = \int H dt$
P	Presión	
$\mathcal{P}_{\mu\nu}$	Operador de proyección ortogonal	$\mathcal{P}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$
$Q_{(\alpha)}^\mu$	Vector de interacción para el fluido (α)	
Q^μ	Vector de interacción para el vacío	
Q	Interacción en la dirección de la velocidad	
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci	
t	Tiempo cósmico	
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía momento	
u^μ	Velocidad	
v	Perturbación escalar de la velocidad	$\partial^i v = a \dot{x}^i$
V	Densidad del vacío	
$V(\varphi)$	Potencial escalar	
X	Parámetro cinético del campo escalar	$X \equiv -\frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu}$
x	Variable del sistema autónomo	$x \equiv \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_c}}$

y	Variable del sistema autónomo	$y \equiv \sqrt{\frac{V}{\rho_c}}$
γ	Ecuación de estado	$\gamma \equiv (\rho + P)/\rho$
θ	Perturbación de momento	$\theta = a(v + B)$
Θ	Razón de expansión	$\Theta = u^\mu{}_{;\mu}$
Λ	Constante cosmológica	
ρ	Densidad de energía	
ρ_c	Densidad de energía crítica	$\rho_c \equiv 3M_{\text{pl}}^2 H^2$
$\sigma_{\mu\nu}$	Deformación cortante	
σ	Variable del sistema autónomo	$\sigma \equiv -\frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{3\rho_k}} \frac{d \log V}{dt}$
τ	Tiempo propio	$d\tau^2 = -ds^2$
ϕ	Función de lapso	
φ	Campo escalar	
ψ	Perturbación de curvatura	
Ω	Razón de densidad entre densidad crítica	$\Omega = \rho/\rho_c$
(\cdot)	Derivada respecto al tiempo coordinado	
\square	D'Alambertiano	$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$
FRW	F riedmann R obertson W alker	
gCg	g eneralized C haplign g as	
ΛCDM	Λ Cold D ark M atter	

Simetrías

En este apéndice observaremos como la presencia de una simetría en un grupo de ecuaciones diferenciales puede reducir el número de variables en un sistema de ecuaciones diferenciales, resultado que usamos en la sección 2.3. Consideramos un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales dado por las variables dinámicas φ, X, ρ_m , este sistema estará compuesto por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dN} &= F(\varphi, X, \rho_m), \\ \frac{dX}{dN} &= G(\varphi, X, \rho_m), \\ \frac{d\rho_m}{dN} &= I(\varphi, X, \rho_m).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Llamamos una simetría del sistema a un grupo de transformaciones sobre el sistema dinámico que dejan invariantes las ecuaciones anteriores.

Si las transformaciones T_ξ corresponden a una simetría del sistema, éstas actuarán sobre las variables dinámicas llevando cada una de ellas a una función que depende de las variables originales

$$\begin{aligned}\varphi &\mapsto \varphi_\xi(\varphi, X, \rho_m), \\ X &\mapsto X_\xi(\varphi, X, \rho_m), \\ \rho_m &\mapsto \rho_{m\xi}(\varphi, X, \rho_m),\end{aligned}\tag{B.2}$$

donde las transformaciones satisfacen las propiedades de grupo, para $\xi = 0$ la transformación corresponde a la identidad, es decir

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \varphi, \\ X_0 &= X, \\ \rho_{m0} &= \rho_m.\end{aligned}\tag{B.3}$$

Decimos que el sistema queda invariante ante el grupo de transformaciones si se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} F(\varphi_\xi, X_\xi, \rho_{m\xi}) &= F(\varphi, X, \rho_m), \\ G(\varphi_\xi, X_\xi, \rho_{m\xi}) &= G(\varphi, X, \rho_m), \\ I(\varphi_\xi, X_\xi, \rho_{m\xi}) &= I(\varphi, X, \rho_m). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Basados en las transformaciones (B.2) es posible definir una transformación de variables invertible y diferenciable dada por las variables

$$\begin{aligned} x(\varphi, X, \rho_m), \\ y(\varphi, X, \rho_m), \\ z(\varphi, X, \rho_m), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

con la propiedad de que las primeras dos variables sean invariantes ante la transformación, es decir que

$$\begin{aligned} x(\varphi_\xi, X_\xi, \rho_{m\xi}) &= x(\varphi, X, \rho_m), \\ y(\varphi_\xi, X_\xi, \rho_{m\xi}) &= y(\varphi, X, \rho_m). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Con lo cual la transformación (B.2) se verá como

$$\begin{aligned} x &\mapsto x, \\ y &\mapsto y, \\ z &\mapsto z_\xi. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Las ecuaciones diferenciales (B.1) se transformaran en términos de las nuevas variables a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= f(x, y, z), \\ \frac{dy}{dN} &= g(x, y, z), \\ \frac{dz}{dN} &= i(x, y, z), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

a través de las relaciones

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} F + \frac{\partial x}{\partial X} G + \frac{\partial x}{\partial \rho_m} I, \\ g(x, y, z) &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} F + \frac{\partial y}{\partial X} G + \frac{\partial y}{\partial \rho_m} I, \\ i(x, y, z) &= \frac{\partial z}{\partial \varphi} F + \frac{\partial z}{\partial X} G + \frac{\partial z}{\partial \rho_m} I. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Debido a que las funciones F , G e I son invariantes ante la transformación de simetría, las funciones f , g e i también lo serán, como además x y y también lo son obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x_\xi, y_\xi, z_\xi) &= f(x, y, z_\xi) = f(x, y, z), \\ g(x_\xi, y_\xi, z_\xi) &= g(x, y, z_\xi) = g(x, y, z), \\ i(x_\xi, y_\xi, z_\xi) &= i(x, y, z_\xi) = i(x, y, z). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Debido a que, en general $z_\xi \neq z$ podemos concluir que ninguna de las tres funciones dependen de z , lo que nos deja un sistema efectivo de dos ecuaciones diferenciales acopladas a resolver

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dN} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dN} &= g(x, y), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

más una ecuación para z que puede resolverse por separado

$$\frac{dz}{dN} = i(x, y). \quad (\text{B.12})$$

Para el caso de Lagrangianos de campo escalar canónicos con potencial exponencial tenemos que las ecuaciones de evolución (2.39) definen a F , G e I como

$$\begin{aligned} F(\varphi, X, \rho_m) &= \text{sign}(\dot{\varphi}) \frac{\sqrt{2X}}{H}, \\ G(\varphi, X, \rho_m) &= -6X - V_0 e^{-\lambda\varphi/M_{\text{Pl}}} \text{sign}(\dot{\varphi}) \frac{\sqrt{2X}}{H}, \\ I(\varphi, X, \rho_m) &= -3\gamma_m \rho_m, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

con

$$H(\varphi, X, \rho_m) = \frac{1}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}} \sqrt{X + V_0 e^{-\lambda\varphi/M_{\text{Pl}}} + \rho_m}. \quad (\text{B.14})$$

Es posible comprobar que el grupo de transformaciones

$$(\varphi, X, \rho_m) \mapsto (\varphi + \xi, e^{-\lambda\xi/M_{\text{Pl}}} X, e^{-\lambda\xi} \rho_m). \quad (\text{B.15})$$

cumplen las condiciones de formar un grupo que deja invariante a las ecuaciones de evolución. En este caso podemos definir las nuevas variables como

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}H}, \\ y &= \frac{\sqrt{V_0} e^{-\lambda\varphi/2M_{\text{Pl}}}}{\sqrt{3}M_{\text{Pl}}H}, \\ z &= \varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Podemos comprobar que las primeras dos variables son invariantes ante la transformación y

la tercera no lo es. Las ecuaciones de evolución son, como lo anticipamos, dependientes solo de x y y

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dN} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda y^2 - 3x + \frac{3}{2}x(2x^2 + \gamma_m(1 - x^2 - y^2)), \\ \frac{dy}{dN} &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda y^2 + \frac{3}{2}y(2x^2 + \gamma_m(1 - x^2 - y^2)), \\ \frac{dz}{dN} &= \sqrt{6}M_{\text{pl}}x.\end{aligned}\tag{B.17}$$

Este resultado es el que permite que en la referencia [53] se escriba un sistema de ecuaciones autónomo de dos variables para este sistema físico que en realidad tiene tres grados de libertad.

Esta misma propiedad, pero con una transformación de simetría distinta, se puede usar para simplificar a dos variables el sistema dinámico definido por un campo escalar no canónico con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = AX^\eta - B\varphi^n,\tag{B.18}$$

donde $\eta = n/(2 + n)$. Este resultado lo presentamos en la referencia [19] y en la sección 2.3.

Bibliografía

- [1] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys.Rev.*, D23:347–356, 1981. doi: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- [2] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys.Lett.*, B108:389–393, 1982. doi: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.
- [3] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *arXiv:1303.5076*, 2013.
- [4] P.A.R. Ade et al. BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales. *arXiv:1403.3985*, 2014.
- [5] Andrew R Liddle and L Arturo Urena-Lopez. Inflation, dark matter and dark energy in the string landscape. *Phys. Rev. Lett.*, 97:161301, 2006. doi: 10.1103/PhysRevLett.97.161301.
- [6] Victor H. Cardenas. Inflation, Reheating and Dark Matter. *Phys. Rev.*, D75:083512, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.083512.
- [7] Grigoris Panotopoulos. A brief note on how to unify dark matter, dark energy, and inflation. *Phys. Rev.*, D75:127301, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.127301.
- [8] Andrew R. Liddle, Cedric Pahud, and L. Arturo Urena-Lopez. Triple unification of inflation, dark matter, and dark energy using a single field. *Phys.Rev.*, D77:121301, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.121301.
- [9] Chia-Min Lin. Triple Unification of Inflation, Dark matter and Dark energy in Chaotic Brane Inflation. *arXiv:0906.5021*, 2009.
- [10] S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same standard. *Phys. Lett.*, B632:597–604, 2006. doi: 10.1016/j.physletb.2005.11.012.

- [11] Alfredo B. Henriques, Robertus Potting, and Paulo M. Sa. Unification of inflation, dark energy, and dark matter within the Salam-Sezgin cosmological model. *Phys. Rev.*, D79:103522, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.103522.
- [12] Nilok Bose and A. S. Majumdar. A k-essence Model Of Inflation, Dark Matter and Dark Energy. *Phys. Rev.*, D79:103517, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.103517.
- [13] N. Bose and A. S. Majumdar. Unified Model of k-Inflation, Dark Matter and Dark Energy. *Phys. Rev.*, D80:103508, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.103508.
- [14] Kyle S. Dawson et al. The Baryon Oscillation Spectroscopic Survey of SDSS-III. *Astron.J.*, 145:10, 2013. doi: 10.1088/0004-6256/145/1/10.
- [15] Alejandro Aviles and Jorge L. Cervantes-Cota. Dark degeneracy and interacting cosmic components. *Phys.Rev.*, D84:083515, 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.083515,10.1103/PhysRevD.84.089905.
- [16] Luis P. Chimento. Extended tachyon field, Chaplygin gas and solvable k- essence cosmologies. *Phys. Rev.*, D69:123517, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.123517.
- [17] Josue De-Santiago and Jorge L. Cervantes-Cota. Generalizing a Unified Model of Dark Matter, Dark Energy, and Inflation with Non Canonical Kinetic Term. *Phys.Rev.*, D83:063502, 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.83.063502.
- [18] Josue De-Santiago and Jorge L. Cervantes-Cota. On the dynamics of unified k-essence cosmologies. *AIP Conf.Proc.*, 1473:59–67, 2012. doi: 10.1063/1.4748535.
- [19] Josue De-Santiago, Jorge L. Cervantes-Cota, and David Wands. Cosmological phase space analysis of the $F(X) - V(\phi)$ scalar field and bouncing solutions. *Phys.Rev.*, D87:023502, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.87.023502.
- [20] David Wands, Josue De-Santiago, and Yuting Wang. Inhomogeneous vacuum energy. *Class.Quant.Grav.*, 29:145017, 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/14/145017.
- [21] Josue De-Santiago, David Wands, and Yuting Wang. Inhomogeneous and interacting vacuum energy. In *Accelerated Cosmic Expansion*, volume 38, pages 183–196. Springer International Publishing, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-02063-1_13.
- [22] Yuting Wang, David Wands, Lixin Xu, Josue De-Santiago, and Alireza Hojjati. Cosmological constraints on a decomposed Chaplygin gas. *Phys.Rev.*, D87:083503, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.87.083503.
- [23] Jorge L. Cervantes-Cota, Alejandro Aviles, and Josue De-Santiago. Probing two approaches to Unified Dark Dynamics. *AIP Conf.Proc.*, 1548:299–313, 2013. doi: 10.1063/1.4817061.

- [24] Josue De-Santiago and Jorge L. Cervantes-Cota. Phase space analysis of the $F(X) - V(\phi)$ scalar field Lagrangian and scaling solutions in flat cosmology. *J.Phys.Conf.Ser.*, 485:012017, 2014. doi: 10.1088/1742-6596/485/1/012017.
- [25] Hideo Kodama and Misao Sasaki. Cosmological Perturbation Theory. *Prog.Theor.Phys.Suppl.*, 78:1–166, 1984. doi: 10.1143/PTPS.78.1.
- [26] Karim A. Malik and David Wands. Adiabatic and entropy perturbations with interacting fluids and fields. *JCAP*, 0502:007, 2005. doi: 10.1088/1475-7516/2005/02/007.
- [27] Karim A. Malik and David Wands. Cosmological perturbations. *Phys.Rept.*, 475:1–51, 2009. doi: 10.1016/j.physrep.2009.03.001.
- [28] Daniele Bertacca, Sabino Matarrese, and Massimo Pietroni. Unified Dark Matter in Scalar Field Cosmologies. *Mod.Phys.Lett.*, A22:2893–2907, 2007. doi: 10.1142/S0217732307025893.
- [29] Juan Magana and Tonatiuh Matos. A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model. *J.Phys.Conf.Ser.*, 378:012012, 2012. doi: 10.1088/1742-6596/378/1/012012.
- [30] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-matter unification. *Phys. Rev.*, D66:043507, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.043507.
- [31] Havard B. Sandvik, Max Tegmark, Matias Zaldarriaga, and Ioav Waga. The end of unified dark matter? *Phys. Rev.*, D69:123524, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.123524.
- [32] Chan-Gyung Park, Jai-chan Hwang, Jaehong Park, and Hyerim Noh. Observational constraints on a unified dark matter and dark energy model based on generalized Chaplygin gas. *Phys.Rev.*, D81:063532, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.063532.
- [33] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and Viatcheslav F. Mukhanov. k-Inflation. *Phys. Lett.*, B458:209–218, 1999. doi: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6.
- [34] Takeshi Chiba, Takahiro Okabe, and Masahide Yamaguchi. Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev.*, D62:023511, 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.62.023511.
- [35] C. Armendariz-Picon, Viatcheslav F. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. A dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441, 2000. doi: 10.1103/PhysRevLett.85.4438.
- [36] C. Armendariz-Picon, Viatcheslav F. Mukhanov, and Paul J. Steinhardt. Essentials of k-essence. *Phys. Rev.*, D63:103510, 2001. doi: 10.1103/PhysRevD.63.103510.
- [37] Robert J. Scherrer. Purely kinetic k-essence as unified dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 93:011301, 2004. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.011301.
- [38] Daniele Bertacca, Nicola Bartolo, and Sabino Matarrese. Unified Dark Matter Scalar Field Models. *Adv.Astron.*, 2010:904379, 2010. doi: 10.1155/2010/904379.

- [39] T. Damour and Alexander M. Polyakov. The String dilaton and a least coupling principle. *Nucl.Phys.*, B423:532–558, 1994. doi: 10.1016/0550-3213(94)90143-0.
- [40] James E. Lidsey, David Wands, and Edmund J. Copeland. Superstring cosmology. *Phys.Rept.*, 337:343–492, 2000. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00064-8.
- [41] Viatcheslav F. Mukhanov, H.A. Feldman, and Robert H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys.Rept.*, 215:203–333, 1992. doi: 10.1016/0370-1573(92)90044-Z.
- [42] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. *Astrophys.J.*, 455:7–25, 1995. doi: 10.1086/176550.
- [43] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Academic Press, 2003.
- [44] Frank van den Bosch Houjun Mo and Simon White. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [45] Daniel J. Eisenstein and Wayne Hu. Power spectra for cold dark matter and its variants. *Astrophys.J.*, 511:5, 1997. doi: 10.1086/306640.
- [46] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark energy: Theory and observations*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [47] Viatcheslav F. Mukhanov and Alexander Vikman. Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation. *JCAP*, 0602:004, 2006. doi: 10.1088/1475-7516/2006/02/004.
- [48] Grigoris Panotopoulos. Detectable primordial non-gaussianities and gravitational waves in k-inflation. *Phys.Rev.*, D76:127302, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.127302.
- [49] E. Babichev. Global topological k-defects. *Phys.Rev.*, D74:085004, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.085004.
- [50] C. Adam, J.M. Queiruga, and J. Sanchez-Guillen. A simple supersymmetric extension of K field theories. *arXiv:1012.0323*, 2010.
- [51] C. Adam, N. Grandi, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. Compact boson stars in K field theories. *Gen.Rel.Grav.*, 42:2663–2701, 2010. doi: 10.1007/s10714-010-1006-4.
- [52] M. Sharif, K. Yesmakhanova, S. Rani, and R. Myrzakulov. Solvable K-essence Cosmologies and Modified Chaplygin Gas Unified Models of Dark Energy and Dark Matter. *Eur.Phys.J.*, C72:2067, 2012. doi: 10.1140/epjc/s10052-012-2067-1.
- [53] Edmund J. Copeland, Andrew R Liddle, and David Wands. Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Phys.Rev.*, D57:4686–4690, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.4686.

- [54] A. de la Macorra and G. Piccinelli. General scalar fields as quintessence. *Phys.Rev.*, D61:123503, 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.61.123503.
- [55] Edmund J. Copeland, Shuntaro Mizuno, and Maryam Shaeri. Cosmological Dynamics of a Dirac-Born-Infeld field. *Phys.Rev.*, D81:123501, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.123501.
- [56] Seyen Kouwn, Taeyoon Moon, and Phillial Oh. Exact solution and exotic fluid in cosmology. *Entropy*, 14:1771, 2012. doi: 10.3390/e14091771.
- [57] Chen Xu, Emmanuel N. Saridakis, and Genly Leon. Phase-Space analysis of Teleparallel Dark Energy. *JCAP*, 1207:005, 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/07/005.
- [58] Zahra Haghani, Hamid Reza Sepangi, and Shahab Shahidi. Cosmological dynamics of brane $f(R)$ gravity. *JCAP*, 1202:031, 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/02/031.
- [59] Dagoberto Escobar, Carlos R. Fadrugas, Genly Leon, and Yoelsy Leyva. Phase space analysis of quintessence fields trapped in a Randall-Sundrum Braneworld: anisotropic Bianchi I brane with a Positive Dark Radiation term. *Class.Quant.Grav.*, 29:175006, 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/17/175006.
- [60] Alfio Bonanno and Sante Carloni. Dynamical System Analysis of Cosmologies with Running Cosmological Constant from Quantum Einstein Gravity. *New J.Phys.*, 14:025008, 2012. doi: 10.1088/1367-2630/14/2/025008.
- [61] Christian G. Boehmer, Nyein Chan, and Ruth Lazkoz. Dynamics of dark energy models and centre manifolds. *Phys.Lett.*, B714:11–17, 2012. doi: 10.1016/j.physletb.2012.06.064.
- [62] L. Arturo Urena-Lopez. Unified description of the dynamics of quintessential scalar fields. *JCAP*, 1203:035, 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/03/035.
- [63] Jorge L. Cervantes-Cota, Roland de Putter, and Eric V. Linder. Induced Gravity and the Attractor Dynamics of Dark Energy/Dark Matter. *JCAP*, 1012:019, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/12/019.
- [64] Genly Leon and Emmanuel N. Saridakis. Dynamics of the anisotropic Kantowsky-Sachs geometries in R^n gravity. *Class.Quant.Grav.*, 28:065008, 2011. doi: 10.1088/0264-9381/28/6/065008.
- [65] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int.J.Mod.Phys.*, D15:1753–1936, 2006. doi: 10.1142/S021827180600942X.
- [66] Burin Gumjudpai, Tapan Naskar, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Coupled dark energy: Towards a general description of the dynamics. *JCAP*, 0506:007, 2005. doi: 10.1088/1475-7516/2005/06/007.

- [67] Federico Piazza and Shinji Tsujikawa. Dilatonic ghost condensate as dark energy. *JCAP*, 0407:004, 2004. doi: 10.1088/1475-7516/2004/07/004.
- [68] Damien J. Holden and David Wands. Selfsimilar cosmological solutions with a nonminimally coupled scalar field. *Phys.Rev.*, D61:043506, 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.61.043506.
- [69] David Wands. Cosmological perturbations through the big bang. *Adv. Sci. Lett.*, 2:194–2004, 2009. doi: 10.1166/asl.2009.1026.
- [70] Patrick Peter and Nelson Pinto-Neto. Cosmology without inflation. *Phys.Rev.*, D78:063506, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.78.063506.
- [71] Robert H. Brandenberger. Unconventional Cosmology. *arXiv:1203.6698*, 2012.
- [72] M. Gasperini and G. Veneziano. The Pre - big bang scenario in string cosmology. *Phys.Rept.*, 373:1–212, 2003. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00389-7.
- [73] Justin Khoury, Burt A. Ovrut, Paul J. Steinhardt, and Neil Turok. The Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang. *Phys.Rev.*, D64:123522, 2001. doi: 10.1103/PhysRevD.64.123522.
- [74] Renata Kallosh, Lev Kofman, and Andrei D. Linde. Pyrotechnic universe. *Phys.Rev.*, D64:123523, 2001. doi: 10.1103/PhysRevD.64.123523.
- [75] Evgeny I. Buchbinder, Justin Khoury, and Burt A. Ovrut. New Ekpyrotic cosmology. *Phys.Rev.*, D76:123503, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.123503.
- [76] Jean-Luc Lehners. Ekpyrotic and Cyclic Cosmology. *Phys.Rept.*, 465:223–263, 2008. doi: 10.1016/j.physrep.2008.06.001.
- [77] Jose Fonseca and David Wands. Tilted Ekpyrosis. *Phys.Rev.*, D84:101303, 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.101303.
- [78] Paul J. Steinhardt and Neil Turok. A Cyclic model of the universe. *Science*, 296:1436–1439, 2002. doi: 10.1126/science.1070462.
- [79] Paul J. Steinhardt and Neil Turok. Cosmic evolution in a cyclic universe. *Phys.Rev.*, D65:126003, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.126003.
- [80] Laura E. Allen and David Wands. Cosmological perturbations through a simple bounce. *Phys.Rev.*, D70:063515, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.063515.
- [81] Nima Arkani-Hamed, Hsin-Chia Cheng, Markus A. Luty, and Shinji Mukohyama. Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity. *JHEP*, 0405:074, 2004. doi: 10.1088/1126-6708/2004/05/074.

- [82] Paolo Creminelli, Markus A. Luty, Alberto Nicolis, and Leonardo Senatore. Starting the Universe: Stable Violation of the Null Energy Condition and Non-standard Cosmologies. *JHEP*, 0612:080, 2006. doi: 10.1088/1126-6708/2006/12/080.
- [83] Renata Kallosh, Jin U. Kang, Andrei D. Linde, and Viatcheslav Mukhanov. The New ekpyrotic ghost. *JCAP*, 0804:018, 2008. doi: 10.1088/1475-7516/2008/04/018.
- [84] Nima Arkani-Hamed, Sergei Dubovsky, Alberto Nicolis, Enrico Trincherini, and Giovanni Villadoro. A Measure of de Sitter entropy and eternal inflation. *JHEP*, 0705:055, 2007. doi: 10.1088/1126-6708/2007/05/055.
- [85] Carmen Molina-Paris and Matt Visser. Minimal conditions for the creation of a Friedman-Robertson-Walker universe from a 'bounce'. *Phys.Lett.*, B455:90–95, 1999. doi: 10.1016/S0370-2693(99)00469-4.
- [86] Alexander Vikman. Can dark energy evolve to the phantom? *Phys.Rev.*, D71:023515, 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.023515.
- [87] Jun-Qing Xia, Yi-Fu Cai, Tao-Tao Qiu, Gong-Bo Zhao, and Xinmin Zhang. Constraints on the Sound Speed of Dynamical Dark Energy. *Int.J.Mod.Phys.*, D17:1229–1243, 2008. doi: 10.1142/S0218271808012784.
- [88] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, and Mark Trodden. Can the dark energy equation - of - state parameter w be less than -1? *Phys.Rev.*, D68:023509, 2003. doi: 10.1103/PhysRevD.68.023509.
- [89] Jaume Garriga and Alexander Vilenkin. Living with ghosts in Lorentz invariant theories. *JCAP*, 1301:036, 2013. doi: 10.1088/1475-7516/2013/01/036.
- [90] Ignacy Sawicki and Alexander Vikman. Hidden Negative Energies in Strongly Accelerated Universes. *Phys.Rev.*, D87(6):067301, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.87.067301.
- [91] Paolo Creminelli and Leonardo Senatore. A Smooth bouncing cosmology with scale invariant spectrum. *JCAP*, 0711:010, 2007. doi: 10.1088/1475-7516/2007/11/010.
- [92] Allan Adams, Nima Arkani-Hamed, Sergei Dubovsky, Alberto Nicolis, and Riccardo Rattazzi. Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion. *JHEP*, 0610:014, 2006. doi: 10.1088/1126-6708/2006/10/014.
- [93] Paolo Creminelli, Alberto Nicolis, and Enrico Trincherini. Galilean Genesis: An Alternative to inflation. *JCAP*, 1011:021, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/11/021.
- [94] Damien A. Easson, Ignacy Sawicki, and Alexander Vikman. G-Bounce. *JCAP*, 1111:021, 2011.
- [95] Taotao Qiu, Jarah Evslin, Yi-Fu Cai, Mingzhe Li, and Xinmin Zhang. Bouncing Galileon Cosmologies. *JCAP*, 1110:036, 2011.

- [96] Stephen Appleby and Eric V. Linder. The Paths of Gravity in Galileon Cosmology. *JCAP*, 1203:043, 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/03/043.
- [97] Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev.*, D56:3258–3295, 1997. doi: 10.1103/PhysRevD.56.3258.
- [98] Andrew R. Liddle and D.H. Lyth. *Cosmological inflation and large scale structure*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [99] J.C. Hidalgo, L. Arturo Urena-Lopez, and Andrew R. Liddle. Unification models with reheating via Primordial Black Holes. *Phys.Rev.*, D85:044055, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.044055.
- [100] L. H. Ford. Gravitational Particle Creation and Inflation. *Phys. Rev.*, D35:2955, 1987. doi: 10.1103/PhysRevD.35.2955.
- [101] Boris Spokoiny. Deflationary universe scenario. *Phys. Lett.*, B315:40–45, 1993. doi: 10.1016/0370-2693(93)90155-B.
- [102] Rose Natalie Lerner and John McDonald. Gauge singlet scalar as inflaton and thermal relic dark matter. *Phys.Rev.*, D80:123507, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.123507.
- [103] Nobuchika Okada and Qaisar Shafi. WIMP Dark Matter Inflation with Observable Gravity Waves. *Phys.Rev.*, D84:043533, 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.043533.
- [104] A. de la Macorra and F. Briscece. Inflation-Dark Matter unified through Quantum Generation. *arXiv:0911.5172*, 2009.
- [105] James E. Lidsey, Tonatiuh Matos, and L. Arturo Urena-Lopez. The Inflaton field as self-interacting dark matter in the brane world scenario. *Phys.Rev.*, D66:023514, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.023514.
- [106] P.J.E. Peebles and A. Vilenkin. Quintessential inflation. *Phys.Rev.*, D59:063505, 1999. doi: 10.1103/PhysRevD.59.063505.
- [107] Victor H. Cardenas. Tachyonic quintessential inflation. *Phys.Rev.*, D73:103512, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.73.103512.
- [108] Mar Bastero-Gil, Arjun Berera, Brendan M. Jackson, and Andy Taylor. Hybrid Quintessential Inflation. *Phys.Lett.*, B678:157–163, 2009. doi: 10.1016/j.physletb.2009.06.025.
- [109] T. Padmanabhan and T. Roy Choudhury. Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field? *Phys.Rev.*, D66:081301, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.66.081301.
- [110] Alexandre Arbey. Dark fluid: A Complex scalar field to unify dark energy and dark matter. *Phys.Rev.*, D74:043516, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.043516.

- [111] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An Alternative to quintessence. *Phys.Lett.*, B511:265–268, 2001. doi: 10.1016/S0370-2693(01)00571-8.
- [112] Davide Pietrobon, Amedeo Balbi, Marco Bruni, and Claudia Quercellini. Affine parameterization of the dark sector: constraints from WMAP5 and SDSS. *Phys. Rev.*, D78:083510, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.78.083510.
- [113] Oliver F. Piattella, Daniele Bertacca, Marco Bruni, and Davide Pietrobon. Unified Dark Matter models with fast transition. *JCAP*, 1001:014, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/01/014.
- [114] R. R. Caldwell and Eric V. Linder. The limits of quintessence. *Phys. Rev. Lett.*, 95:141301, 2005. doi: 10.1103/PhysRevLett.95.141301.
- [115] Jaume Garriga and Viatcheslav F. Mukhanov. Perturbations in k-inflation. *Phys. Lett.*, B458:219–225, 1999. doi: 10.1016/S0370-2693(99)00602-4.
- [116] B.F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Series in physics. Cambridge University Press, 1985. ISBN 9780521277037.
- [117] Frederico Arroja and Misao Sasaki. A note on the equivalence of a barotropic perfect fluid with a K-essence scalar field. *Phys. Rev.*, D81:107301, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.107301.
- [118] Dimitrios Giannakis and Wayne Hu. Kinetic unified dark matter. *Phys. Rev.*, D72:063502, 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.72.063502.
- [119] Michael S. Turner. Inflation after COBE: Lectures on inflationary cosmology. *Proc. of the Int. School of Physics Enrico Fermi*, 1992.
- [120] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [121] George F. Smoot et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps. *Astrophys. J.*, 396:L1–L5, 1992.
- [122] N. Jarosik, C.L. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M.R. Greason, et al. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results. *Astrophys.J.Suppl.*, 192:14, 2011. doi: 10.1088/0067-0049/192/2/14.
- [123] David H. Lyth and Antonio Riotto. Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Phys. Rept.*, 314:1–146, 1999. doi: 10.1016/S0370-1573(98)00128-8.
- [124] Leonard Parker. Quantized fields and particle creation in expanding universes. 1. *Phys.Rev.*, 183:1057–1068, 1969. doi: 10.1103/PhysRev.183.1057.
- [125] Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinsky. Rate of particle production in gravitational fields. *Pis'ma Zh Eksp. Teor. Fiz.*, 26(5):373–377, 1977.

- [126] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [127] Massimo Giovannini. Gravitational waves constraints on postinflationary phases stiffer than radiation. *Phys.Rev.*, D58:083504, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.58.083504.
- [128] Varun Sahni, M. Sami, and Tarun Souradeep. Relic gravity waves from brane world inflation. *Phys.Rev.*, D65:023518, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.023518.
- [129] Latham A. Boyle and Alessandra Buonanno. Relating gravitational wave constraints from primordial nucleosynthesis, pulsar timing, laser interferometers, and the CMB: Implications for the early Universe. *Phys.Rev.*, D78:043531, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.78.043531.
- [130] Eric V. Linder and Robert J. Scherrer. Aetherizing Lambda: Barotropic Fluids as Dark Energy. *Phys.Rev.*, D80:023008, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.023008.
- [131] Eugene A. Lim, Ignacy Sawicki, and Alexander Vikman. Dust of Dark Energy. *JCAP*, 1005:012, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/05/012.
- [132] M.C. Bento, O. Bertolami, and Anjan Ananda Sen. The Revival of the unified dark energy - dark matter model? *Phys.Rev.*, D70:083519, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.083519.
- [133] John D. Barrow and T. Clifton. Cosmologies with energy exchange. *Phys.Rev.*, D73:103520, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.73.103520.
- [134] Xavier Roy and Thomas Buchert. Chaplygin gas and effective description of inhomogeneous universe models in general relativity. *Class.Quant.Grav.*, 27:175013, 2010. doi: 10.1088/0264-9381/27/17/175013.
- [135] Winfried Zimdahl and Julio C. Fabris. Chaplygin gas with non-adiabatic pressure perturbations. *Class.Quant.Grav.*, 22:4311–4324, 2005. doi: 10.1088/0264-9381/22/20/011.
- [136] Antony Lewis, Anthony Challinor, and Anthony Lasenby. Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *Astrophys. J.*, 538:473–476, 2000.
- [137] Gennaro Miele Julien Lesgourgues, Gianpiero Mangano and Sergio Pastor. *Neutrino Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [138] K. N. Abazajian, J. K. Adelman-McCarthy, M. A. Agüeros, S. S. Allam, C. Allende Prieto, D. An, K. S. J. Anderson, S. F. Anderson, J. Annis, N. A. Bahcall, and et al. The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey. *ApJS*, 182:543, June 2009. doi: 10.1088/0067-0049/182/2/543.
- [139] Antony Lewis and Sarah Bridle. Cosmological parameters from CMB and other data: a Monte- Carlo approach. *Phys. Rev.*, D66:103511, 2002.

-
- [140] Ephraim Fischbach, Daniel Sudarsky, Aaron Szafer, Carrick Talmadge, and S.H. Aronson. Reanalysis of the Eotvos Experiment. *Phys.Rev.Lett.*, 56:3, 1986. doi: 10.1103/PhysRevLett.56.3.
- [141] S. Capozziello, Vincenzo F. Cardone, S. Carloni, S. De Martino, M. Falanga, et al. Constraining Van der Waals quintessence by observations. *JCAP*, 0504:005, 2005. doi: 10.1088/1475-7516/2005/04/005.
- [142] Richard Holman and Siddhartha Naidu. Dark energy from 'water'. *astro-ph/0408102*, 2004.
- [143] Pierre Astier et al. The Supernova legacy survey: Measurement of $\omega(m)$, $\omega(\lambda)$ and W from the first year data set. *Astron.Astrophys.*, 447:31–48, 2006. doi: 10.1051/0004-6361:20054185.
- [144] M. Kowalski et al. Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets. *Astrophys.J.*, 686:749–778, 2008. doi: 10.1086/589937.