UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS PSEUDOCOMPLETOS Y DE OXTOBY

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

Mario Alejandro López Pérez

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Roberto Pichardo Mendoza
2014

Ciudad Universitaria, D. F.

Había una buja.
Pomelo cortó una lima,
después cortó otra lima.
Cabó quento.

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo estudiaremos, a lo largo de cuatro capítulos, tres clases de espacios topológicos estrechamente relacionados entre sí: los espacios π-completos, π^0-completos y de Oxtoby, en cuyas definiciones se destila la esencia de la prueba clásica del afamado Teorema de Categoría de Baire.

En el primer capítulo estableceremos la notación y los resultados preliminares necesarios para el ulterior desarrollo del tema de nuestro interés, enunciando algunos de los más conocidos teoremas de Topología General concernientes a espacios topológicos metrizables, completamente metrizables y localmente compactos. Por ser dichos teoremas considerados parte del acervo clásico de Topología General, en algunos casos no daremos las demostraciones correspondientes, bastándonos con referir al lector interesado en conocer o revisitar las pruebas a [6].

En el segundo capítulo probaremos el Teorema de Categoría de Baire en su versión para espacios completamente metrizables y Hausdorff localmente compactos (teorema 2.8), mostrando su utilidad mediante el Teorema de Banach-Mazurkiewicz (teorema 2.11). Continuaremos desarrollando la teoría básica de los espacios de Baire, para cerrar probando la existencia de un par de espacios de Baire cuyo producto no es de Baire (corolario 2.27). Dicho resultado, descubierto por vez primera en 1961 por J. C. Oxtoby en [13] (añadiendo la Hipótesis del Continuo a los axiomas clásicos de la Teoría de Conjuntos), vino a zanjar la cuestión, abierta por décadas, sobre si los productos de espacios de Baire son espacios de Baire. Esta desencantadora respuesta dio paso al llamado problema de Unificación, que plantea la búsqueda de subclases de la clase de los espacios de Baire lo suficientemente especializadas como para ser cerradas bajo productos topológicos arbitrarios y lo suficientemente amplias como para contener a las clases de los espacios completamente metrizables y Hausdorff localmente compactos.

Tras el resultado mencionado, Oxtoby define, también en [13] y como propuesta al problema de Unificación, los espacios topológicos "pseudo-completos", probando que satisfacen los requerimientos mínimos de dicho problema. Veinte años después, A. R. Todd

introduce en [15] su propia noción de "pseudo-completez", que generaliza a la de Oxtoby y responde también al problema de Unificación, planteándose además una pregunta en apariencia simple, pero que continúa sin respuesta: ¿existen espacios pseudo-completos en el sentido de Todd que no lo sean en el sentido de Oxtoby? Tras casi otra veintena de años, Todd, en compañia de M. Henriksen, R. Kopperman y M. Rayburn, vuelve sobre el tema de la pseudo-completez en [9], definiendo los "espacios de Oxtoby", que demuestran ser una respuesta más general que las anteriores (esta vez con certeza de ser una clase de espacios estrictamente mayor) al problema de Unificación. Estas tres clases de espacios (la primera bajo el nombre de espacios π-completos, la segunda rebautizada como espacios π^0-completos y la tercera conservando su nombre original) son definidas y estudiadas en el tercer capítulo de este trabajo, en el que se aborda la cuestión de su preservación bajo sumas topológicas y subespacios, además de dar una caracterización debida a J. M. Aarts y D. J. Lutzer de los espacios π-completos metrizables (teorema 3.39), publicada en [1]. Probaremos también que las tres clases de espacios son cerradas bajo uniones finitas, importante resultado de R. Pichardo cuya prueba, aquí reproducida (corolario 3.31), apareció hace apenas unos meses en [14]. También estudiaremos una relación de equivalencia entre topologías de un mismo conjunto que será de utilidad más adelante.

El cuarto y último capítulo lo dedicaremos, casi por entero, a tres de las más interesantes cuestiones que surgen al estudiar los espacios π-completos, π^0-completos y de Oxtoby. La primera de ellas, abierta hasta la fecha y que surge del conocido hecho de que ser de Baire es hereditario respecto a subespacios densos G_δ, es si lo mismo es cierto para alguno de los tres tipos de espacios que son objeto de nuestro estudio. Expondremos aquí algunas interesantes aproximaciones a dicha pregunta. La segunda cuestión versa sobre la relación entre los espacios casi-regulares, π-completos, π^0-completos y de Oxtoby por un lado, y las extensiones topológicas por el otro. Probaremos que todo espacio topológico (casi-regular) tiene una extensión de Oxtoby (π-completa) (teorema 4.18). Caracterizaremos además aquellos espacios casi-regulares cuya extensión de Alexandroff es también casi-regular (teorema 4.23). En la tercera sección del capítulo se probarán dos teoremas de gran importancia, el primero debido a Aarts y Lutzer y el segundo a Oxtoby: que el producto de un espacio de Baire casi-regular y un espacio π-completo es un espacio de Baire (teorema 4.29), y que el producto de dos espacios de Baire, uno de los cuales posee una π^0-base localmente numerable, es un espacio de Baire (teorema 4.30). Finalmente, en una cuarta sección se introducirán los espacios Čech-completos, de formulación anterior a los espacios π-completos, y que conforman una clase de espacios topológicos por demás interesante y, por supuesto, estrechamente relacionada con el problema de Unificación, además de ser cerrada bajo subespacios G_δ.

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

Antes de entrar de lleno en el tema de este trabajo y con la intención de evitar futuras confusiones, conviene mencionar algunos resultados y definiciones que jugarán un papel de importancia en lo que sigue. Las nociones de Topología General que no sean explícitamente definidas aquí deberán entenderse como en [6], excepto que para nosotros los espacios compactos no necesariamente son de Hausdorff.

1.1 Teoría de Conjuntos

Denotaremos por ω al primer cardinal infinito, que es también el conjunto de los números naturales. El símbolo ω_1 denotará al primer cardinal no numerable, a su vez el conjunto de todos los ordinales numerables.

En este texto concebimos a los números naturales como ordinales, es decir que si $n \in \omega$ entonces $n = \{k \in \omega : k < n\}$ y, por tanto, $\omega \setminus n = \{k \in \omega : n \leqslant k\}$. Esta notación será ampliamente usada en la sección de espacios metrizables.

Emplearemos la notación acostumbrada $\mathcal{P}(X)$ para denotar al conjunto potencia de X, es decir, la colección de todos los subconjuntos de X. También, para todo cardinal κ, $[X]^\kappa = \{Y \in \mathcal{P}(X) : |Y| = \kappa\}$, $[X]^{<\kappa} := \{Y \in \mathcal{P}(X) : |Y| < \kappa\}$ y $[X]^{\leqslant\kappa} = [X]^\kappa \cup [X]^{<\kappa}$.

Para nosotros las funciones coinciden con sus gráficas, es decir, si A y B son conjuntos, una función de A en B es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para cada elemento $a \in A$ existe un único elemento en B, que denotaremos por $f(a)$, tal que $(a, f(a)) \in f$ (este hecho se resume en el símbolo $f : A \to B$). Bajo tales circunstancias, A será llamado el *dominio* de f y lo denotaremos por $\operatorname{dom} f = A$, mientras que la *imagen* de f es el conjunto $\operatorname{im} f := \{f(a) : a \in A\}$. Además, si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, $f[C] := \{f(c) : c \in C\}$ y $f^{-1}[D] := \{a \in A : f(a) \in D\}$. También, $f \restriction C$ denota a la restricción de f a C, es decir, $f \restriction C := f \cap (C \times f[C])$.

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos, $f : A \to B$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Definimos entonces los símbolos $f``\mathcal{A} = \{f[C] : C \in \mathcal{A}\}$ y $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}[D] : D \in \mathcal{B}\}$.

Como de costumbre, si A y B son conjuntos, A^B es el conjunto de las funciones de B en A. En particular, en su momento nos interesarán los conjuntos A^n, donde $n \in \omega$ y $A^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} A^n$. Dado $s \in A^{<\omega}$, es claro luego de las aclaraciones anteriores que $|s| = \operatorname{dom} s$.

Definición 1.2. Si $s \in A^{<\omega}$ y $a \in A$, definimos $s^\frown a$ (se lee *s concatenado con a*) como el único elemento de $A^{|s|+1}$ que satisface

$$(s^\frown a)(i) := \begin{cases} s(i), & \text{si } i < |s| \\ a, & \text{si } i = |s|, \end{cases}$$

para cualquier $i < |s| + 1$.

De manera más sencilla, $s^\frown a = \langle s(0), ..., s(|s| - 1), a\rangle$.

Una *sucesión* en el conjunto A es una función $f : \omega \to A$. Aunque escribir $f \in A^\omega$ es suficiente para decir que f es una sucesión (y así lo haremos a menudo), a veces usaremos la notación estándar $f = \langle x_n : n \in \omega\rangle$, donde $x_n := f(n)$ para cada $n \in \omega$.

1.2 Topología

Usualmente denotaremos a los espacios topológicos por su primer entrada, es decir, X si (X, τ) es el espacio en cuestión (salvo cuando trabajemos con dos topologías diferentes en un mismo conjunto, en cuyo caso haremos las especificaciones pertinentes). Cuando sea necesario hacer referencia a su topología la denotaremos por τ_X en caso de no haber posibilidad de confusión. Además, $\mathcal{A}^* := \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ para cualquier $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de modo que, en particular, τ_X^* es la colección de abiertos no vacíos de X.

Sea $A \subseteq X$. Emplearemos los símbolos $\operatorname{int}_X A$, $\operatorname{int}_\tau A$ y $\operatorname{int} A$ para denotar al interior de A en el espacio topológico (X, τ), mientras que $\operatorname{cl}_X A$, $\operatorname{cl}_\tau A$ y $\overline{A}$ representarán todos a la cerradura de A en el espacio. El símbolo se escogerá de manera que evitemos toda posible confusión.

Un subconjunto del espacio topológico X es *de tipo* G_δ (o simplemente G_δ) si es la intersección de una familia numerable de abiertos en X. Los subconjuntos *de tipo* F_σ son los complementos de los G_δ, es decir, las uniones de familias numerables de cerrados en X.

Llamaremos *cerrabiertos* a los subconjuntos de X que sean simultáneamente abiertos y cerrados. Diremos que X es *cero-dimensional* si tiene una base consistente de cerrabiertos.

Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio topológico X es *localmente finita (localmente numerable)* si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau_X^*$ tal que $x \in U$ y $|\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}| < \omega$ $(\leqslant \omega)$.

Un espacio topológico X es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ existe un compacto K en X tal que $x \in \operatorname{int} K$. Normalmente estaremos interesados en espacios localmente compactos que además sean T_2, por lo que nos será útil el siguiente recordatorio de Topología General, cuya prueba puede consultarse en [6, Teoremas 3.3.1 y 3.3.2] (tómese en cuenta que la definición de compacidad del texto referido equivale a la acostumbrada más la propiedad de ser T_2):

Proposición 1.3. *Si X es un espacio topológico localmente compacto y T_2, entonces:*

1. *X es Tychonoff y*

2. *para cualesquiera $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tales que $x \in U$, existe $V \in \tau_X$ tal que $x \in V$, $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subseteq U$.*

El siguiente lema se sigue directamente de [6, Teorema 3.3.8].

Proposición 1.4. *Todo subespacio cerrado o abierto en un espacio (Hausdorff) localmente compacto es a su vez (Hausdorff) localmente compacto.*

La siguiente proposición se sigue de [6, Teorema 3.3.13]

Proposición 1.5. *Sean $n \in \omega$, $\{X_i : i \leqslant n\}$ una familia de espacios topológicos y $X := \prod_{i \leqslant n} X_i$ su producto topológico. Entonces, X es localmente compacto si y sólo si X_i es localmente compacto para cada $i \leqslant n$.*

Definición 1.6. Dado un espacio topológico X y un punto $\infty \notin X$, definimos la *extensión de Alexandroff de X*, que denotaremos por αX, como el espacio topológico que resulta de equipar al conjunto $X \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología:

$$\tau_{\alpha X} := \tau_X \cup \{U \subseteq X \cup \{\infty\} : X \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}.$$

Resulta así que X es un subespacio topológico de αX.

Definición 1.7. Diremos que un espacio topológico Y es *extensión* del espacio topológico X si X es un subespacio denso de Y.

Proposición 1.8. *Si X es un espacio topológico entonces αX es una extensión de X si y sólo si X no es compacto.*

Demostración. Si X es denso en αX entonces $\{\infty\} \notin \tau_{\alpha X}$. Como X es cerrado en sí mismo, se concluye de la definición de $\tau_{\alpha X}$ que $X = \alpha X \setminus \{\infty\}$ no es compacto.

Por otro lado, suponiendo que X no es denso en αX, debe existir $U \in \tau^*_{\alpha X}$ tal que $U \cap X = \emptyset$. Como $\alpha X = X \cup \{\infty\}$, se deduce que $\{\infty\} = U \in \tau_{\alpha X} \setminus \tau_X$, por lo que $X = \alpha X \setminus U$ es compacto. □

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en [6, Teorema 3.5.11].

Proposición 1.9. *Si X un espacio topológico, entonces αX es compacto. Más aún, αX es T_2 si y sólo si X es localmente compacto y T_2.*

Dados un espacio topológico X, $U \in \tau_X$ y $F \in [X]^{<\omega}$, definimos $[U|F] := (U \times 2) \setminus (F \times \{1\})$, $\mathcal{B}_0^X := \{[U|F] : U \in \tau_X \wedge F \in [X]^{<\omega}\}$ y $\mathcal{B}_1^X := \{\{(x,1)\} : x \in X\}$.

Definición 1.10. Para cualquier espacio topológico X, definimos el *duplicado de Alexandroff de X*, denotado por $A(X)$, como el espacio topológico que resulta de dotar al conjunto $X \times 2$ con la topología que tiene por base al conjunto $\mathcal{B}_0^X \cup \mathcal{B}_1^X$. Además, denotamos por p_X a la función de $A(X)$ en X dada por $(x,i) \mapsto x$ para cada $(x,i) \in X \times 2$.

Definición 1.11. Si X y Y son espacios topológicos, diremos que una función continua y cerrada $f : X \to Y$ es *perfecta* si $f^{-1}[\{y\}]$ es un subespacio compacto de X para toda $y \in Y$.

Proposición 1.12. *Para cualquier espacio topológico X, se satisface lo siguiente:*

1. *$X \times 1$ es cerrado en $A(X)$;*

2. *si X es T_1 entonces p_X es una función perfecta;*

3. $p_X \restriction (X \times 1) : X \times 1 \to X$ *es un homeomorfismo;*

4. si X *no contiene abiertos finitos no vacíos, entonces* $X \times \{1\}$ *es denso en* $A(X)$.

Demostración. Claramente, $X \times \{1\}$ es abierto en $A(X)$, pues consiste de puntos aislados en $A(X)$. Esto implica el primer inciso. Para el segundo inciso, note que si $U \in \tau_X$ entonces $p_X^{-1}[U] = [U|\emptyset] \in \tau_{A(X)}$, es decir que p_X es continua. Verifiquemos que también es cerrada: sean C un subconjunto cerrado de $A(X)$ y $x \in X \setminus p_X[C]$. Entonces, $(x,0),(x,1) \notin C$, por lo que existen $U \in \tau_X$ y $F \in [X]^{<\omega}$ tales que $(x,0) \in [U|F] \subseteq A(X) \setminus C$. Por otro lado, $F' := F \setminus \{x\}$ es finito y, por ser X un espacio T_1, cerrado en X, por lo que $x \in U \setminus F' \in \tau_X$. Así, como $(x,1) \notin C$, $[U \setminus F'|\emptyset] \subseteq [U|F'] = [U|F] \cup \{(x,1)\} \subseteq A(X) \setminus C$. Luego, para cualquier $y \in U \setminus F'$, $p_X^{-1}[\{y\}] = \{y\} \times 2 \subseteq [U \setminus F'|\emptyset] \subseteq A(X) \setminus C$, por lo que $y \notin p_X[C]$. Lo anterior se resume en que $x \in U \setminus F' \subseteq X \setminus p_X[C]$, es decir, $p_X[C]$ es cerrado en X y por ende p_X es cerrada. Es perfecta porque, para cada $x \in X$, $p_X^{-1}[\{x\}] = \{x\} \times 2$ es finito y por tanto compacto.

Demostremos (3): es claro que $p_X \restriction (X \times 1)$ es biyectiva y, por el párrafo anterior, continua, de modo que resta solamente probar que es abierta. Para ello, notemos que, si $U \in \tau_X$ y $F \in [X]^{<\omega}$, entonces $p_X[[U|F] \cap (X \times 1)] = p_X[U \times 1] = U \in \tau_X$, es decir, $p_X \restriction (X \times 1)$ es abierta y por ende un homeomorfismo.

Probemos ahora (4): si $U \in \tau_X^*$ y $F \in [X]^{<\omega}$, entonces $\emptyset \neq (U \setminus F) \times \{1\} \subseteq [U|F]) \cap (X \times \{1\})$, es decir que $X \times \{1\}$ intersecta a todos los básicos que definen a $A(X)$ (los que hacen falta están contenidos en $X \times \{1\}$). Luego, $X \times \{1\}$ es denso en $A(X)$. □

Definición 1.13. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua y suprayectiva. Diremos que f es *irreducible* si para todo cerrado F en X con $F \neq X$ sucede que $f[F] \neq Y$, es decir, el único cerrado en X cuya imagen es Y es X.

Lema 1.14. *Sean* κ *un cardinal,* $F \subseteq \kappa$, $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ *una familia de espacios topológicos,* $X := \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha$ *su producto topológico y* $P_\alpha \subseteq X_\alpha$ *para cada* $\alpha \in F$. *Denotemos por* π_α *a la proyección de* X *sobre su* α*-ésimo factor. Los siguientes enunciados son ciertos:*

1. $\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[\mathrm{cl}_{X_\alpha} P_\alpha] = \mathrm{cl}_X(\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[P_\alpha])$.

2. *Si F es finito, entonces* $\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[\operatorname{int}_{X_\alpha} P_\alpha]=\operatorname{int}_X(\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[P_\alpha])$.

Demostración. La prueba del primer inciso se encuentra en [6, Proposición 2.3.3]. Respecto al segundo inciso, note que la contención de izquierda a derecha se da porque, al ser F finito, $\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[\operatorname{int}_{X_\alpha} P_\alpha]$ es un abierto en X contenido en $\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[P_\alpha]$ y por tanto en su interior en X. Para argumentar la contención de derecha a izquierda, recordemos que las proyecciones son abiertas, por lo que, para cada $\alpha\in F$, $\pi_\alpha[\operatorname{int}_X(\bigcap_{\beta\in F}\pi_\beta^{-1}[P_\beta])]$ es un abierto contenido en P_α y por tanto en $\operatorname{int}_{X_\alpha} P_\alpha$. De este modo, $\operatorname{int}_X(\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[P_\alpha])\subseteq\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[\operatorname{int}_X(\bigcap_{\beta\in F}\pi_\beta^{-1}[P_\beta])]]\subseteq\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[\operatorname{int}_{X_\alpha} P_\alpha]$. □

Dada una familia $\{X_\alpha:\alpha\in\kappa\}$ ajena por pares de espacios topológicos, definimos su suma topológica, que denotaremos por $\bigoplus_{\alpha\in\kappa}X_\alpha$, como el espacio topológico que resulta de equipar al conjunto $\bigcup_{\alpha\in\kappa}X_\alpha$ con la topología que tiene por base a $\bigcup_{\alpha\in\kappa}\tau_\alpha$.

Como siempre, $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales, al que de ordinario entenderemos dotado de su topología usual. Cuando no sea así lo aclararemos oportunamente. Los símbolos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ denotarán a las colecciones de números racionales e irracionales respectivamente, mientras que I denotará al intervalo cerrado $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

1.3 Espacios métricos y metrizables

Definición 1.15. Sea X un conjunto. Una función $d:X\times X\to[0,\infty)$ será llamada una *métrica* en X si para cada $x,y,z\in X$ se verifica que

1. $d(x,y)=d(y,x)$.

2. $d(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$.

3. $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

Bajo tales condiciones, la pareja (X,d) es un *espacio métrico*.

Definición 1.16. Dados (X,d), un espacio métrico, $x\in X$ y $r>0$, definimos

1. *el disco abierto con centro en x y radio r con respecto a d* como

$$B_d(x,r):=\{y\in X:d(x,y)<r\};$$

2. *el disco cerrado con centro en* x *y radio* r *con respecto a* d como

$$\overline{B}_d(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leqslant r\}.$$

Naturalmente, si el espacio métrico en el que estamos trabajando queda claro por el contexto, prescindiremos del subíndice d y emplearemos los símbolos $B(x,r)$ y $\overline{B}(x,r)$.

Si (X,d) es un espacio métrico, puede verse que $\{B(x,r) : x \in X, r > 0\}$ forma una base para una topología en X, que denotaremos por τ_d.

Definición 1.17. Un espacio topológico (X,τ) es *metrizable* si existe una métrica d en X tal que $\tau_d = \tau$ y, en este caso, diremos que d es *compatible* con la topología de X.

Es bien sabido que los espacios topológicos metrizables son T_4.

Si d es una métrica compatible con la topología del espacio topológico X y A es un subespacio de X, entonces $d \restriction (A \times A)$ es una métrica compatible con la topología de A. Por lo tanto, los subespacios de cualquier espacio metrizable son metrizables.

Es fácil verificar que si d es una métrica compatible con la topología del espacio topológico X, entonces $e : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $e(x,y) := \min\{d(x,y),1\}$ es una métrica en X que también es compatible con la topología de X. Así, todo espacio metrizable tiene una métrica compatible con su topología y acotada por 1.

Proposición 1.18. *El producto topológico de una familia numerable de espacios metrizables es metrizable.*

Demostración. Sean $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia es espacios metrizables y X su producto topológico.

Para cada $n \in \omega$ denotemos por $\pi_n : X \to X_n$ a la proyección correspondiente y fijemos d_n, una métrica acotada por 1 compatible con la topología de X_n. Con estos antecedentes, la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\pi_n(x), \pi_n(y))}{2^{n+1}}$$

resulta ser una métrica compatible con la topología de X (ver [6, Teorema 4.2.2]). $\square$

Definición 1.19. Si (X, d) es un espacio métrico, $f \in X^\omega$ y $x \in X$, diremos que f *converge a x en (X, d)* o que x es el *límite de f en (X, d)* (o simplemente *converge a x* y x es el *límite de f* cuando el espacio métrico esté claro por el contexto) si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$ existe $n \in \omega$ tal que $d(f(k), x) < \varepsilon$ para toda $k \in \omega \setminus n$ (o, equivalentemente, $f[\omega \setminus n] \subseteq B(x, \varepsilon)$), y lo resumiremos en cualquiera de los símbolos $f \to x$, $f(n) \to x$ o $\lim_{n\to\infty} f(n) = x$.

Diremos que una sucesión $f \in X^\omega$ es *convergente en (X, d)* (o simplemente *convergente* cuando podamos ser más breves) si existe $x \in X$ tal que $f \to x$

Es ampliamente sabido que si d es una métrica compatible con la topología del espacio topológico X y $A \subseteq X$, entonces la cerradura de A consiste precisamente de todos aquellos puntos de X que son el límite de alguna sucesión en A. En particular, A es cerrado si y sólo si contiene a los límites de sus sucesiones convergentes en X.

Definición 1.20. Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión $f \in X^\omega$ es *de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \omega$ tal que para toda $m, n \in \omega \setminus k$, $d(f(n), f(m)) < \varepsilon$.

Además diremos que la métrica d es *completa* en X o que (X, d) es un *espacio completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Naturalmente, un espacio topológico será llamado *completamente metrizable* si existe una métrica completa compatible con su topología.

Lema 1.21. *Los subespacios cerrados de espacios completamente metrizables son completamente metrizables.*

Si F es un subconjunto cerrado del espacio completamente metrizable X y d es una métrica completa compatible con la topología de X, entonces, para cada $n \in \omega$, $U_n := \{x \in X : \inf\{d(x, y) : y \in F\} < 2^{-n}\} \in \tau_X$. Además, el que F sea cerrado implica que $F = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, es decir que todo cerrado en X es también G_δ. Así, el lema anterior es un caso particular del siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en [6, Teorema 4.3.23].

Teorema 1.22 (Alexandroff)**.** *Todo subespacio G_δ de un espacio completamente metrizable es completamente metrizable.*

Definición 1.23. Si (X,d) es un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subseteq X$ es tal que $\{d(x,y) : x,y \in X\}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, definimos el *diámetro de A (en (X,d))* como

$$\delta(A) := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

La prueba del siguiente lema es un ejercicio rutinario.

Lema 1.24. *Si (X,d) es un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subseteq X$, entonces $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.*

Lema 1.25. *Si d es una métrica completa compatible con la topología del espacio topológico X, $\{F_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos cerrados y no vacíos en X con $F_{n+1} \subseteq F_n$ para $n \in \omega$ y $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} F_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$, fijemos $x_n \in F_n$. De este modo, si $m > n$, se tiene que $x_n, x_m \in F_n$, por lo que $d(x_m, x_n) \leqslant \delta(F_n)$. Como $\delta(F_n) \to 0$, $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ es de Cauchy, así que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Por otro lado, si $n \in \omega$, entonces $\{x_m : m \in \omega \setminus n\} \subseteq F_n$, y como este último es cerrado, se sigue que $x \in F_n$. Así, $x \in \bigcap_{n\in\omega} F_n$ $\square$

Dada una familia $\{X_n : n \in \omega\}$ de espacios completamente metrizables, es posible hallar para cada $n \in \omega$, como se muestra en [6, Proposición 4.3.8], una métrica completa d_n compatible con la topología de X_n y acotada por 1. Puede verse que, bajo estas condiciones, la métrica definida en la proposición 1.18 es completa (véase [6, Teorema 4.3.12]), es decir:

Proposición 1.26. *El producto topológico de cualquier familia numerable de espacios completamente metrizables es completamente metrizable.*

Definición 1.27. Denotamos por $C(I)$ al conjunto de las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$. Además, definimos la *métrica uniforme* como $d_u : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_u(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}.$$

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en [6, Teorema 4.3.13].

Proposición 1.28. *$(C(I), d_u)$ es un espacio métrico completo.*

Por su parte, la demostración del siguiente teorema, de gran importancia, es consecuencia de [6, Teorema 3.2.21] y el comentario posterior.

Teorema 1.29 (Stone-Weierstrass)**.** *Para cualesquiera $f \in C(I)$ y $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $d_u(f, p \restriction I) < \varepsilon$.*

CAPÍTULO 2: ESPACIOS DE BAIRE

En este capítulo estudiaremos la importante clase de los espacios de Baire, así llamados en honor al matemático francés R. Baire, que probó en [3] que $\mathbb{R}^n$ es miembro de dicha clase para cada $n \in \omega$, pese a que poco antes y de manera independiente W. Osgood hiciera otro tanto para la recta real en [12].

Demostraremos los resultados básicos referentes a dichos espacios, entre ellos el Teorema de Categoría de Baire (al que nos referiremos como TCB para ser más breves), una considerable generalización de los resultados obtenidos por Baire y Osgood que será uno de los ejes que guíen el curso de este trabajo. Este resultado fue formulado en su versión para espacios completamente metrizables por F. Hausdorff en [7], y con el paso del tiempo se posicionó como un resultado estándar en matemáticas que mostró su valía en múltiples e importantes aplicaciones. Quizá el ejemplo más notorio sea en el Análisis Funcional, donde el TCB es la clave para las demostraciones estándar de tres importantísimos teoremas: el Teorema de Banach-Steinhaus (también conocido como Principio del Acotamiento Uniforme), el Teorema del Mapeo Abierto y el Teorema de la Gráfica Cerrada (todos ellos debidos a S. Banach, el primero, como el nombre ya lo anuncia, en colaboración con H. Steinhaus). No obstante, enunciar dichos teoremas requiere de varias definiciones previas que nos desviarían demasiado del tema que nos proponemos estudiar en este texto. Así pues, referimos al lector interesado a [4], y confiaremos en que el Teorema de Banach-Mazurkiewicz, que sí demostraremos aquí (teorema 2.11) y que afirma que el conjunto de funciones continuas y no diferenciables en punto alguno del intervalo (0,1) es denso en el espacio usual de las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$ equipado con la métrica uniforme, bastará para convecer al lector de la utilidad del TCB y de la relevancia de los espacios de Baire en general.

2.1 Teorema de Categoría de Baire

Definición 2.1. Dado un espacio topológico X:

1. Diremos que un subconjunto A de X es *denso en ninguna parte* si $\operatorname{int}\overline{A} = \emptyset$.

2. Un subconjunto B de X es *magro* si existe una familia numerable $\{B_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos de X densos en ninguna parte tal que $B = \bigcup_n B_n$.

3. Los subconjuntos de X cuyos complementos son magros serán llamados *co-magros*.

Observación. De la definición anterior se infiere inmediatamente que las siguientes propiedades son equivalentes para cualquier subconjunto A de X:

1. A es denso en ninguna parte.

2. $\overline{A}$ es denso en ninguna parte.

3. $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.

A su vez, de lo anterior deducimos que $B \subseteq X$ es magro si y sólo si está contenido en la unión de una familia numerable de cerrados con interior vacío (es decir, densos en ninguna parte). Como el complemento de un cerrado con interior vacío es un abierto denso, un subconjunto C de X es co-magro si y sólo si existe una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de densos abiertos en X, de tal modo que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subseteq C$.

Podemos imaginar a los conjuntos densos en ninguna parte como aquellos que son "topológicamente pequeños", pues, aún cuando los agrandamos a su cerradura, no contienen abiertos no vacíos. De ahí el término "magro" que se emplea para denotar a sus uniones numerables, pues es de esperarse que dichas uniones no puedan ser muy "gruesas". Esto se apreciará en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 2.2. *Todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$, considerados como subespacios de $\mathbb{R}$, son densos en ninguna parte. En efecto, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{Q}$, lo es también de $\mathbb{R}$, al ser éste un supraespacio de aquel. Así pues, K es cerrado en $\mathbb{R}$. De este modo, si $\operatorname{int}_{\mathbb{Q}} K \neq \emptyset$, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, de forma que $(a,b) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$, por lo que $[a,b] = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}}((a,b)\cap\mathbb{Q}) \subseteq \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} K = K \subseteq \mathbb{Q}$. Esta contradicción prueba que $\operatorname{int}_{\mathbb{Q}} K = \emptyset$. Análogamente se prueba que cada compacto en $\mathbb{P}$ tiene interior vacío. Como los compactos en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son cerrados, concluimos que son densos en ninguna parte. En particular, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ no son localmente compactos.*

Ejemplo 2.3. *El conjunto ternario de Cantor es denso en ninguna parte en el intervalo cerrado I.*

Ejemplo 2.4. *Si X es un espacio perfecto (es decir, sin abiertos de cardinalidad 1) y T_1, entonces todo subconjunto numerable de X es magro, pues $\{x\}$ es cerrado y con interior vacío para cada $x \in X$. En particular, $\mathbb{Q}$ es magro en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.5. *Si X es un espacio topológico arbitrario y U es un abierto en X, entonces $\overline{U} \setminus U$ es denso en ninguna parte. En efecto, si V es abierto y no vacío con $V \subseteq \overline{U}$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$, por lo que $V \nsubseteq \overline{U} \setminus U$, de modo que $\overline{U} \setminus U$ es un cerrado con interior vacío.*

Si ahora pensamos en un espacio segundo numerable X y en una correspondiente base numerable $\mathcal{B}$, podemos definir $F := \bigcup\{\overline{B} \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$ y notar que, como consecuencia de lo expuesto en el párrafo anterior, F es magro y de tipo F_σ. Probaremos que $Y := X \setminus F$ es cero-dimensional. En primer lugar, $Y = \bigcap\{X \setminus (\overline{B} \setminus B) : B \in \mathcal{B}\}$, de modo tal que, para $B \in \mathcal{B}$, $\overline{B} \cap Y \subseteq \overline{B} \cap (X \setminus (\overline{B} \setminus B)) = \overline{B} \cap ((X \setminus \overline{B}) \cup B) = B$, de donde $\overline{B} \cap Y \subseteq B \cap Y$. Luego, $\overline{B} \cap Y = B \cap Y$. Así, $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de cerrabiertos en Y y, por ende, Y es un subconjunto co-magro, cero-dimesional y G_δ en X.

Consecuentemente con lo anterior, podemos notar que nuestra noción de pequeñez (ser denso en ninguna parte o magro) es satisfactoria, pues, denotando como $\mathcal{I}$ a la colección de los subconjuntos densos en ninguna parte de un espacio X, se satisface lo siguiente:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ (el vacío es pequeño);

2. si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$ (todo subconjunto de un conjunto pequeño es pequeño también) y

3. para cada $\mathcal{A}$ subconjunto finito de $\mathcal{I}$, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}$ (la unión finita de conjuntos pequeños sigue siendo un conjunto pequeño).

Las propiedades (1) y (2) son triviales de la definición. Para verificar (3), basta con ver que si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$ y luego aplicar un clásico argumento inductivo. Veamos pues que, si A y B son densos en ninguna parte y V es un abierto tal que $V \subseteq \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, entonces $V \setminus \overline{A}$ es un abierto contenido en $\overline{B}$. Como $A, B \in \mathcal{I}$, $V \setminus \overline{A} = \emptyset$, o, equivalentemente, $V \subseteq \overline{A}$, por lo que $V = \emptyset$. Como V fue arbitrario, concluimos que $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Proposición 2.6. *Para cualquier espacio topológico X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Ningún abierto no vacío en X es magro en X.*

2. *Todo co-magro en X es denso en X.*

3. *La intersección de cualquier familia numerable de abiertos densos en X es densa en X.*

Demostración. Supongamos (1) y sea A un subconjunto co-magro en X. Entonces, si U es un abierto tal que $U \cap A = \emptyset$, se tiene que $U \subseteq X \setminus A$, y este último es magro. Luego, U es magro y, por (1), $U = \emptyset$. Así, A es denso, es decir que (2) se satisface.

Una consecuencia inmediata de la observación 2.1 es que la intersección de cualquier familia numerable de densos abiertos es un conjunto co-magro. Con esto en mente, resulta claro que (2) implica (3).

Finalmente supongamos que (3) es cierto y sea U un abierto magro en X. Entonces, $X \setminus U$ es co-magro. De la observación 2.1 obtenemos que $X \setminus U$ contiene una intersección numerable de densos abiertos. Por (3), dicha intersección resulta ser un denso en X que esquiva a U. Luego, $U = \emptyset$. $\square$

Definición 2.7. Un espacio topológico será llamado *espacio de Baire* si satisface cualquiera de las condiciones listadas en la proposición anterior (y, por dicha proposición, todas las condiciones).

Como corolario del ejemplo 2.5 se obtiene que todo espacio segundo numerable y de Baire contiene un subespacio denso, cero-dimensonal y G_δ.

Después del siguiente teorema estaremos en condiciones de dar múltiples ejemplos de espacios de Baire.

Teorema 2.8 (Teorema de Categoría de Baire)**.** *Si X es un espacio topológico, cada una de las siguientes condiciones implica que X es un espacio de Baire.*

1. *X es completamente metrizable.*

2. X es localmente compacto y Hausdorff.

Demostración. Comencemos con (1): sean d una métrica completa compatible con la topología de X y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en X. Para probar que la intersección de ésta es un subespacio denso en X, fijemos un abierto no vacío U en X. Como U_0 es denso y abierto, $U \cap U_0$ es un abierto no vacío, de modo que, por la regularidad de X, existe una bola abierta B_0 de radio menor a 1 tal que $\overline{B_0} \subseteq U \cap U_0$. Análogamente, el que U_1 sea denso y abierto garantiza que existe una bola abierta B_1 de radio menor a $1/2$ tal que $\overline{B_1} \subseteq B_0 \cap U_1$. Continuando con este argumento, obtenemos una sucesión de bolas abiertas $\langle B_n : n \in \omega \rangle$ de tal modo que el radio de B_n es menor a 2^{-n} y $\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n \cap U_{n+1}$ para cada $n \in \omega$, por lo que $\delta(\overline{B_{n+1}}) \leqslant \delta(B_n) \leqslant 2^{-n+1}$ para cada $n \in \omega$. Luego, en virtud del lema 1.25, se tiene que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} \overline{B_n} = \bigcap_{n\in\omega} B_n \subseteq \left(\bigcap_{n\in\omega} U_n \right) \cap U.$$

Ahora asumamos (2) y procedamos de manera similar: sean U un abierto en X y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos densos en X. Construyamos por inducción una sucesión $\langle V_n : n \in \omega \rangle$ de abiertos no vacíos en X tal que $\overline{V_0} \subseteq U \cap U_0$ y, para cada $n \in \omega$, $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n \cap U_{n+1}$ y $\overline{V_n}$ es compacto (véase la proposición 1.3). Naturalmente, $\{\overline{V_n} : n \in \omega\}$ es una familia decreciente de cerrados en el compacto $\overline{V_0}$ y, por ende,

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} \subseteq \left(\bigcap_{n\in\omega} U_n \right) \cap U.$$

□

Ejemplo 2.9. *Para cada $\alpha \leqslant \omega$ y cualquier espacio discreto A, se tiene que $\mathbb{R}^\alpha$, I^α, $\mathbb{C}^\alpha$ y A^α son espacios completamente metrizables (por la proposición 1.26) y por tanto de Baire. Como $\mathbb{P} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \setminus \{q\})$ es un G_δ en $\mathbb{R}$, el TCB y el teorema 1.22 implican que $\mathbb{P}$ es de Baire.*

Cualquier ordinal con la topología del orden es localmente compacto y de Hausdorff, por tanto de Baire.

Del TCB, en conjunción con el comentario posterior a la definición 2.7 y el teorema 1.22, obtenemos el siguiente interesante resultado:

Corolario 2.10. *Si X es un espacio completamente metrizable y segundo numerable, entonces X contiene un subespacio denso, cero-dimensional y completamente metrizable.*

En la siguiente sección exhibiremos, además de nuestra aplicación estrella del TCB, la manera en que este teorema suele aplicarse.

2.2 Una aplicación del TCB al Análisis

Una de las ventajas de trabajar en espacios de Baire es que, por la propiedad (2) de la proposición 2.6, nos vemos provistos de una técnica muy útil para probar la existencia de objetos del modo siguiente: suponga que X es un espacio de Baire no vacío y que P es co-magro en X. Entonces, P es denso en X y por tanto no vacío. De este modo, si queremos probar que existe un elemento del espacio que satisface cierta propiedad de nuestro interés, basta con probar que el conjunto de los elementos que satisfacen la propiedad en cuestión es co-magro (con ello obtenemos en realidad mucho más, pues, como ya señalamos, los co-magros son densos en espacios de Baire; no obstante, en muchos casos basta con hallar un elemento con la propiedad requerida). El TCB nos permite usar dicha técnica en dos importantes clases de espacios, a saber, los completamente metrizables y los Hausdorff localmente compactos.

A guisa de ejemplo, probaremos la existencia de funciones continuas de I en $\mathbb{R}$ que no son diferenciables en ningún punto. Para ello haremos uso de los resultados y definiciones finales de la sección 1.3.

Teorema 2.11 (Banach-Mazurkiewicz)**.** *El conjunto de todas las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$ que no son diferenciables en ningún punto de $[0,1)$ es co-magro en $(C(I),d)$, donde $d = d_u$ es la métrica uniforme. Más aún, dicho conjunto es denso en $C(I)$ y por tanto no vacío.*

Demostración. Sean $n \in \omega$ y $h > 0$. Definamos el conjunto

$$A_n^h := \left\{ (f,x) \in C(I) \times I : (x+h \in I) \wedge \left(\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leqslant n \right) \right\}.$$

Probaremos que A_n^h es cerrado en el producto topológico $C(I) \times I$ para cualesquiera $n \in \omega$ y $h > 0$. Dicho producto es metrizable en vista de la proposición 1.18, de modo que, como ya comentamos tras la definición 1.19, bastará con probar que A_n^h contiene a los límites de sus sucesiones convergentes en $C(I) \times I$.

Si $\langle (f_k, x_k) : k \in \omega \rangle$ es una sucesión en A_n^h que converge a algún (f, x) en $C(I) \times I$, entonces $f_k \to f$ y $x_k \to x$ en $C(I)$ e I respectivamente. Lo primero que verificaremos es que $x + h \in I$. En efecto, esto se deduce del hecho de que $x_k \to x$, por lo que $x_k + h \to x + h$, y de que $x_k + h \in I$ para toda $k \in \omega$. Note ahora que $f_k(x_k) \to f(x)$, ya que $|f_k(x_k) - f(x)| \leqslant |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \leqslant d(f_k, f) + |f(x_k) - f(x)| \to 0$ (recuerde que f es continua). Análogamente, $f_k(x_k + h) \to f(x + h)$. Luego,

$$\left| \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} \right| \to \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right|$$

y, como $\left| \dfrac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} \right| \leqslant n$ para cada $k \in \omega$, se deduce que $(f, x) \in A_n^h$.

Ahora, para cada $n \in \omega$, definamos

$$A_n := \pi_1 \left[\bigcap \{ A_n^h : h \in (0, 2^{-n}] \} \right],$$

donde $\pi_1 : C(I) \times I \to C(I)$ denota la proyección sobre el primer factor. Es un hecho conocido que, por ser I compacto, dicha proyección es cerrada (para una demostración, consúltese [6, Teorema 3.1.16]) y por ende A_n es cerrado en $C(I)$ para cada $n \in \omega$. El plan a seguir se divide en dos pasos. El primero es probar que cada A_n tiene interior vacío en $C(I)$. El segundo consiste en probar que el conjunto de las funciones en $C(I)$ que son diferenciables en algún punto de $[0, 1)$ está contenido en $\bigcup_{n \in \omega} A_n$, siendo éste, por lo que habremos hecho en el primer paso, un conjunto magro, de donde concluiremos que aquel también lo es. Como $(C(I), d)$ es un espacio métrico completo (proposición 1.28), el Teorema de Categoría de Baire termina la prueba de la proposición. Así pues, concentrémonos en llevar a buen término el plan aquí esbozado.

Sea $n \in \omega$. Probaremos ahora que A_n tiene interior vacío. Para ello, sean $f \in C(I)$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema 1.29, existe un polinomio p tal que $d(f, p \restriction I) < \varepsilon/2$. Como

p', la derivada de p, es continua e I es compacto, podemos definir el número real $M := \sup\{|p'(x)| : x \in I\}$. Sean $m \in \omega$ y $\{a_i : i \leqslant m\} \subseteq I$ tales que

1. $a_0 = 0$ y $a_m = 1$;
2. $a_i < a_{i+1}$ siempre que $i + 1 \leqslant m$;
3. la pendiente de la de la recta que conecta $(a_{2i}, -\varepsilon/2)$ con $(a_{2i+1}, \varepsilon/2)$ es $M + n + 1$ (véase la figura 2.1);
4. la pendiente de la recta que conecta los puntos $(a_{2i+1}, -\varepsilon/2)$ y $(a_{2i+2}, \varepsilon/2)$ es $-(M + n + 1)$.

Denotemos por L a la función de I en $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ cuya gráfica son los segmentos descritos en (3) y (4), tal y como se muestra en la figura 2.1, y definamos $g = L + p$. Entonces, para cada $x \in I$, $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - p(x)| + |L(x)| \leqslant d(f, p \restriction I) + \varepsilon/2 < \varepsilon$, de modo que $d(f, g) < \varepsilon$, es decir, $g \in B(f, \varepsilon)$.Veamos ahora que $g \notin A_n$. Ello equivale a probar que, para cada $x \in I$, existe $h \in (0, 2^{-n}]$ tal que $(g, x) \notin A_n^h$. Para $x = 1$ esto es trivial, ya que cualquier $h \in (0, 2^{-n}]$ satisface que $x + h \notin I$ y por tanto $(g, x) \notin A_n^h$. Tomemos pues $x \in I \setminus \{1\}$ y sean $i < m$ y $k \in \omega \setminus n$ tales que $a_i \leqslant x < x + 2^{-k} < a_{i+1}$. Entonces, para cada $h \in (0, 2^{-k}]$, $x + h \in (a_i, a_{i+1})$, de modo que, por definición de L,

$$\left| \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \right| = M + n + 1.$$

Además, existe $l \in \omega \setminus k$ tal que $h \in (0, 2^{-l}]$ implica

$$\left| p'(x) - \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \right| < 1/2,$$

y por tanto también

$$\left| \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \right| < |p'(x)| + 1/2 \leqslant M + 1/2.$$

Luego, fijando $h \in (0, 2^{-l}] \subseteq (0, 2^{-n}]$,

$$n < M + n + 1 - M - 1/2 \leqslant \left|\frac{L(x+h) - L(x)}{h}\right| - \left|\frac{p(x+h) - p(x)}{h}\right| \leqslant \left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right|,$$

es decir, $g \notin A_n^h$.

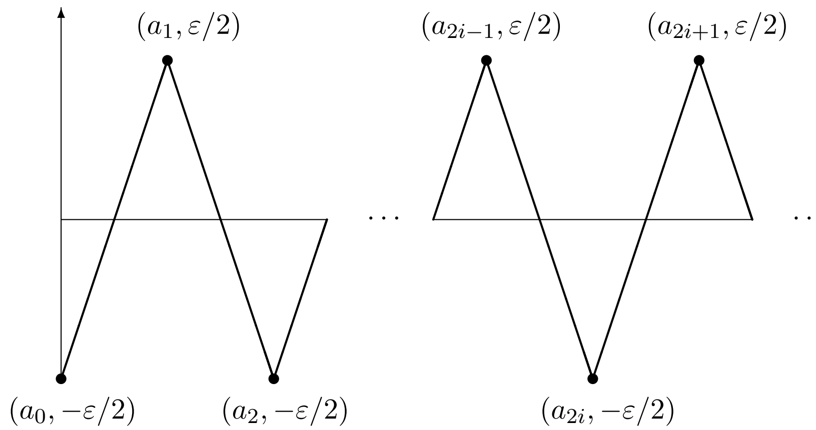

Figura 2.1: Gráfica de la función L

Para terminar la prueba, sean $f \in C(I)$ y $x \in [0, 1)$ tales que f es diferenciable en x. Fijemos ahora $m \in \omega$ tal que $|f'(x)| < m$. Existe entonces, por definición de $f'(x)$, $l \in \omega$ de modo tal que

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant m \text{ para todo } h \in (0, 2^{-l}].$$

Así, si definimos $n = \max\{l, m\}$, encontramos que $(f, x) \in A_n^h$ para cada $h \in (0, 2^{-n}]$ y, por ende, $f \in A_n$. $\square$

2.3 Propiedades de preservación de los espacios de Baire

El propósito de esta sección es presentar algunas condiciones bajo las cuales un espacio de Baire transmite esta propiedad a otros espacios. Por ejemplo, el primer resultado dice que un espacio de Baire le hereda la propiedad de ser de Baire a todos sus subespacios abiertos.

Proposición 2.12. *En un espacio de Baire, todos los subespacios abiertos son de Baire.*

Demostración. Sean X un espacio de Baire, U un abierto en X y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en U. Entonces cada U_n es abierto en X y por tanto lo es también cada $(X \setminus \mathrm{cl}_X U_n) \cup U_n$. Además, $\mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X U_n) \cup U_n) = \mathrm{cl}_X((X \setminus \mathrm{cl}_X U_n)) \cup \mathrm{cl}_X U_n \supseteq X$, de modo que cada $(X \setminus \mathrm{cl}_X U_n) \cup U_n$ es denso en X. Luego, $D := \bigcap_{n\in\omega}((X \setminus \mathrm{cl}_X U_n) \cup U_n)$ es denso en X. Como U es abierto y $U = \mathrm{cl}_U U_n = U \cap \mathrm{cl}_X U_n \subseteq \mathrm{cl}_X U_n$ para cada $n \in \omega$, $D \cap U = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es denso en U. □

Proposición 2.13. *Si X es un espacio de Baire y Y es un subespacio denso G_δ en X, entonces Y es un espacio de Baire*

Demostración. Fijemos $\{U_n : n \in \omega\}$ y $\{V_n : n \in \omega\}$, dos familias de abiertos en X, tales que $Y = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ y $Y \cap V_n$ es denso en Y para cada $n \in \omega$. Entonces, como Y es denso en X, $Y \cap V_n$ es denso en X para cada $n \in \omega$, y como $Y \cap V_n \subseteq V_n$, V_n resulta ser un abierto denso en X para cada $n \in \omega$. Lo mismo es cierto para cada U_n, ya que $Y \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Luego, $\mathcal{D} := \{U_n : n \in \omega\} \cup \{V_n : n \in \omega\}$ es una familia numerable de densos abiertos en X, que es de Baire, y por ende $\bigcap_{n\in\omega}(Y \cap V_n) = \bigcap \mathcal{D}$ es denso en X, por lo que lo es también en Y. □

Proposición 2.14. *Sean X y Y espacios topológicos, con X de Baire y $f : X \to Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Entonces, Y es de Baire.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos densos en Y. La continuidad de f garantiza que, para cada $n \in \omega$, $f^{-1}[U_n]$ es abierto en X y, como era de esperarse, ahora verificaremos que también es denso: en efecto, si U es un abierto no vacío en X, $f[U]$ es abierto y no vacío en Y, pues f es abierta. Luego, si $n \in \omega$, $U_n \cap f[U] \neq \emptyset$. Fijemos $y \in U_n \cap f[U]$. Existe pues $x \in U$ tal que $f(x) = y$, resultando así que $x \in U \cap f^{-1}[U_n]$.

Como X es de Baire, $f^{-1}[\bigcap_{n\in\omega} U_n] = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}[U_n]$ es denso en X. Por último, verifiquemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es denso en Y: si V es un abierto no vacío en Y, entonces, como f es suprayectiva y continua, $f^{-1}[V]$ es abierto y no vacío en X, de modo que existe $x \in f^{-1}[\bigcap_{n\in\omega} U_n] \cap f^{-1}[V]$. Así, $f(x) \in V \cap (\bigcap_{n\in\omega} U_n)$. □

Proposición 2.15. *Sean X y Y espacios topológicos, con Y de Baire y $f : X \to Y$ una función cerrada e irreducible. Entonces, X es de Baire.*

Demostración. Fijemos $\mathcal{U}$, una familia numerable de densos abiertos en X. Como f es cerrada, $\mathcal{V} := \{Y \setminus f[X \setminus U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia numerable de abiertos en Y que satisface $\bigcap \mathcal{V} \subseteq f[\bigcap \mathcal{U}]$: en efecto, si $y \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}$, entonces, dado que f es sobre, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, pero, por definición de $\mathcal{V}$, se tiene que $x \notin X \setminus U$ para cada $U \in \mathcal{U}$, es decir, $x \in \bigcap \mathcal{U}$ y por ende $y \in f[\bigcap \mathcal{U}]$.

De lo anterior y del hecho de que f es cerrada se concluye que $\mathrm{cl}_Y \bigcap \mathcal{V} \subseteq \mathrm{cl}_Y f[\bigcap \mathcal{U}] \subseteq f[\mathrm{cl}_X \bigcap \mathcal{U}] \subseteq Y$. De este modo, si logramos probar que cada $V \in \mathcal{V}$ es denso en Y, tendremos que, dado que Y es de Baire, $\bigcap \mathcal{V}$ es denso en Y, lo cual implica, junto con la cadena de contenciones anterior, que $\mathrm{cl}_X \bigcap \mathcal{U}$ es un cerrado cuya imagen bajo f es Y, y de la irreducibilidad de f se concluiría que $\mathrm{cl}_X \bigcap \mathcal{U} = X$, es decir, $\bigcap \mathcal{U}$ es denso en X y por tanto X es de Baire. Así pues, sólo nos resta probar que, en efecto, cada $V \in \mathcal{V}$ es denso en Y.

Sea $V \in \mathcal{V}$ y supongamos, buscando una contradicción, que existe $W \in \tau_Y^*$ tal que $W \cap V = \emptyset$. Fijemos $U \in \mathcal{U}$ tal que $V = Y \setminus f[X \setminus U]$. Entonces, $W \subseteq f[X \setminus U]$. Como f es continua y suprayectiva, $f^{-1}[W] \in \tau_X^*$, y dado que U es abierto y denso en X, se tiene que $U \cap f^{-1}[W] \in \tau_X^*$, de donde $F := X \setminus (U \cap f^{-1}[W])$ es un cerrado propio de X tal que

$$Y = W \cup (Y \setminus W) \subseteq f[X \setminus U] \cup f[X \setminus f^{-1}[W]] = f[X \setminus (U \cap f^{-1}[W])] = f[F],$$

una contradicción a la irreducibilidad de f. $\square$

No obstante todas estas linduras, la razón de ser de este trabajo es precisamente el lado oscuro de los espacios de Baire, que queda expuesto en lo que resta de este capítulo.

2.4 Espacios de Baire cuyo producto no es de Baire

Hemos visto en la sección anterior que los espacios de Baire tienen muchas propiedades deseables: los subespacios abiertos, los densos G_δ, las imágenes continuas y abiertas y las imágenes inversas de funciones cerradas e irreducibles de un espacio de Baire son de Baire. El Teorema de Categoría de Baire nos brinda lo siguiente:

Corolario 2.16. *Todo subespacio abierto o denso G_δ, toda imagen continua y abierta y toda preimagen bajo una función cerrada e irreducible de un espacio Hausdorff localmente* *compacto o completamente metrizable es de Baire.*

En realidad, de la proposición 1.4 sabemos que los subespacios abiertos de un espacio Hausdorff localmente compactos son Hausdorff localmente compactos. También es cierto que todo subespacio G_δ de un espacio completamente metrizable es completamente metrizable (véase el teorema 1.22).

Por otra parte, $\mathbb{P} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R}\setminus\{q\})$ es un subespacio denso G_δ de $\mathbb{R}$ que no es localmente compacto (ver ejemplo 2.2).

En cuanto a las imágenes continuas y abiertas, observemos que si equipamos a 2 con la topología de Sierpiński, $\{\emptyset, \{0\}, 2\}$, la función $f : \mathbb{R} \to 2$ dada por $f[\mathbb{Z}] = \{1\}$ y $f[\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}] = \{0\}$ es suprayectiva, continua y abierta ya que para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe $x \in (a, b) \setminus \mathbb{Z}$, por lo que $f[(a, b)] \in \{\{0\}, 2\}$. No obstante, $f[\mathbb{R}] = 2$ no es Hausdorff y por tanto tampoco metrizable. En particular, no es completamente metrizable ni Hausdorff localmente compacto, pese a que $\mathbb{R}$ sí lo es. Así pues, el corolario anterior no es irrelevante.

Las consideraciones anteriores nos inducen a preguntarnos cuán estrecha es la relación entre los espacios de Baire por un lado y los completamente metrizables o Hausdorff localmente compactos por el otro. Con esto en mente, es natural preguntarnos por alguna proposición del estilo de las proposiciones 1.26 y 1.5 que pueda formularse para espacios de Baire, es decir, si el producto finito, numerable o arbitrario de espacios de Baire es de Baire. El propósito de esta sección es dar una respuesta decepcionante a esta cuestión, es decir, exhibir un par de espacios de Baire cuyo producto no sea de Baire. La existencia de este tipo de espacios fue una pregunta abierta durante mucho tiempo. Finalmente, Oxtoby mostró en [13] que, suponiendo cierta la Hipótesis del Continuo, existen tales espacios, es decir que esta aberración es consistente con ZFC, lo cual es notable tratándose de una propiedad topológica tan útil e importante. El ejemplo que se muestra aquí fue descubierto por Fleissner y Kunen en [11], y es francamente más notable en tanto que no hace uso de la Hipótesis del Continuo. Nuestra construcción es un caso muy particular de la clase original de espacios que aparece en [11], cuya exposición excede los límites de este trabajo.

La mayoría de los símbolos que usaremos en lo que resta de la presente sección han sido definidos en la sección 1.1. Las nociones conjuntistas que no sean explícitamente definidas aquí deberán entenderse como aparecen en [2].

Definición 2.17. Diremos que $C \subseteq \omega_1$ es *acotado* si existe $\lambda \in \omega_1$ tal que $\xi \leqslant \lambda$ para cada $\xi \in C$. C es *cerrado en* ω_1 (o simplemente cerrado) si lo es cuando consideramos a ω_1 con la topología del orden. C es *estacionario en* ω_1 (o, más brevemente, estacionario) si intersecta a todos los subconjuntos cerrados y no acotados de ω_1.

Lema 2.18. *$C \subseteq \omega_1$ es cerrado si y sólo si para cada $B \subseteq C$ acotado y no vacío se tiene que* $\sup B \in C$.

Demostración. Si C es cerrado en ω_1 y $B \subseteq C$ satisface que $B \neq \emptyset$ y $\beta := \sup B \in \omega_1$, entonces se distinguen dos casos: si $\beta = 0$, entonces $B = \{0\}$ y por ende $\beta \in B \subseteq C$. En caso contrario, es decir, si $\beta \neq 0$, entonces, para cada $\lambda < \beta$, existe $\xi \in B \subseteq C$ tal que $\lambda < \xi \leqslant \beta$, es decir, $\xi \in (\lambda, \beta] \cap C$. Como los intervalos $(\lambda, \beta]$ con $\lambda < \beta$ forman una base local para β en ω_1 con la topología del orden, se concluye que $\beta \in C$, ya que C es cerrado.

Para la implicación restante, sea $\lambda \in \operatorname{cl}_{\omega_1} C$. Si $\lambda = 0$, entonces, como $\{0\} = [0, 1)$ es un abierto que contiene a λ, $\{0\} \cap C \neq \emptyset$, es decir, $\lambda = 0 \in C$. Si $\lambda \neq 0$, entonces, para cada $\xi < \lambda$, fijemos $\lambda_\xi \in C \cap (\xi, \lambda]$. Es claro entonces que el conjunto $B := \{\lambda_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq C$ es no vacío y está acotado por λ. Así, de la hipótesis concluimos que $\lambda = \sup B \in C$. $\square$

En adelante consideraremos a ω_1^ω como el producto topológico que resulta de pensar a ω_1 como un espacio discreto.

Dado $s \in \omega_1^{<\omega}$, definimos $[s] := \{f \in \omega_1^\omega : s \subseteq f\}$, es decir, el conjunto de las sucesiones que extienden a la función finita s.

Cada $[s]$ es no vacío, ya que, definiendo $f \in \omega_1^\omega$ como $f \restriction |s| = s$ y $f[\omega \setminus |s|] = \{0\}$, se tiene que $f \in [s]$.

Probemos ahora que si $s, s' \in \omega_1^{<\omega}$ y $[s'] \subseteq [s]$, entonces $s \subseteq s'$: primero, si $|s'| < |s|$ entonces $g \in \omega_1^\omega$ definida mediante $g \restriction |s'| = s'$, $g(n) = s(n) + 1$ para cada $n \in |s| \setminus |s'|$ y $g[\omega \setminus |s|] = \{0\}$ satisface que $g \in [s'] \setminus [s] = \emptyset$. Luego, $|s| \leqslant |s'|$. Por otro lado, como ya vimos, existe $f \in [s'] \subseteq [s]$, y de ello se obtiene que $s' \restriction |s| = (f \restriction |s'|) \restriction |s| = f \restriction |s| = s$, es decir, $s \subseteq s'$.

Lema 2.19. *La colección $\{[s] : s \in \omega_1^{<\omega}\}$ es una base para ω_1^ω.*

Demostración. En efecto, si $\pi_n : \omega_1^\omega \to \omega_1$ denota a la proyección en el n-ésimo factor, $[s] = \bigcap_{i<|s|} \pi_i^{-1}\{s(i)\}$ es abierto, ya que, como ω_1 es discreto, los subconjuntos unipuntuales de ω_1 forman una base para su topología. Además, si U es abierto en ω_1^ω y $f \in U$, entonces existen $n \in \omega$, $\{m_i : i \leqslant n\} \subseteq \omega$ y $\{\alpha_i : i \leqslant n\} \subseteq \omega_1$ de tal modo que $f \in \bigcap_{i \leqslant n} \pi_{m_i}^{-1}\{\alpha_i\} \subseteq U$. En particular, debe tenerse que $f(m_i) = \alpha_i$, para cada $i \leqslant n$. Por lo tanto, si $m > \max\{m_i : i \leqslant n\}$ y $s : m \to \omega_1$ está definido mediante $s(m_i) = \alpha_i$ para $i \leqslant n$ y $s(k) = 0$ en otro caso, se tiene que $f \in [s] \subseteq U$. □

Como corolario del siguiente resultado se tiene que todos los cerrados no acotados son estacionarios.

Proposición 2.20. *Si $\mathcal{C}$ es una familia numerable de subconjuntos cerrados y no acotados en ω_1, entonces $\bigcap \mathcal{C}$ es cerrado y no acotado en ω_1.*

Demostración. Es claro, de la definición, que $\bigcap \mathcal{C}$ es cerrado. Veamos que no es acotado. Dado $\lambda < \omega_1$, definamos, para cada $C \in \mathcal{C}$, $f_C(\lambda) := \min\{\xi \in C : \lambda < \xi\}$, y $g(\lambda) := \sup\{f_C(\lambda) : C \in \mathcal{C}\}$. Entonces, $\lambda < g(\lambda) < \omega_1$, puesto que $|\mathcal{C}| < \omega_1$. Definamos entonces $g^0(\lambda) := \lambda$, $g^{n+1}(\lambda) := g(g^n(\lambda))$ para $n \in \omega$ y $g^\omega(\lambda) := \sup\{g^n(\lambda) : n \in \omega\}$. Tenemos que $\lambda < g^\omega(\lambda) < \omega_1$, ya que $g^n(\lambda) < \omega_1$ para cada $n \in \omega$. Además, para cada $n \in \omega$ y $C \in \mathcal{C}$, $g^n(\lambda) < f_C(g^n(\lambda)) \leqslant g^{n+1}(\lambda)$, con $f_C(g^n(\lambda)) \in C$. Luego, $g^\omega(\lambda) = \sup\{f_C(g^n(\lambda)) : n \in \omega\} \in C$, ya que C es cerrado (ver lema 2.18). Así, $\lambda < g^\omega(\lambda) \in \bigcap \mathcal{C}$. □

Dado un conjunto A, establecemos la notación $A^0 := \{\emptyset\}$ y $\mathcal{F}_A := \bigcup\{A^{(A^n)} : n \in \omega\}$, es decir, el conjunto de funciones de una potencia finita de A en A. Dado $f \in \mathcal{F}_A$ con $A^n = \operatorname{dom} f$, diremos que un subconjunto B de A es *cerrado bajo f* si $f(B^n) \subseteq B$. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$, diremos que B es *cerrado bajo $\mathcal{F}$* si es cerrado bajo f para cada $f \in \mathcal{F}$.

Por ejemplo, si $(G, \cdot)$ es un grupo algebraico, entonces las funciones $m : G \times G \to G$, $i : G \to G$ y $n : G^0 \to G$ definidas mediante $m(x, y) = x \cdot y$, $i(x) = x^{-1}$ y $n(\emptyset) = e$ (donde e es la identidad del grupo) satisfacen $m, i, n \in \mathcal{F}_G$. De este modo, resulta que si $H \subseteq G$, entonces:

1. H es cerrado bajo m si y sólo si es cerrado bajo la multiplicación del grupo;

2. H es cerrado bajo i si y sólo si el inverso de todo elemento de H es un elemento de H y

3. H es cerrado bajo n si y sólo si $e \in H$.

Por lo anterior, los subgrupos de G son precisamente los subconjuntos de G que son cerrados bajo $\{m, i, n\}$. Además, todo subconjunto B de G está contenido en un subgrupo mínimo, es decir, existe un subconjunto mínimo de G que contiene a B y es cerrado bajo $\{m, i, n\}$. Esta es una propiedad general como veremos a continuación.

Dados $B \subseteq A$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$, es claro que la familia

$$\{C \subseteq A : B \subseteq C \wedge C \text{ es cerrada bajo } \mathcal{F}\}$$

es cerrada bajo intersecciones arbitrarias y además no vacía, pues A es un elemento de dicha familia. Definimos la cerradura de B bajo $\mathcal{F}$ como la intersección de dicha familia, es decir, el más pequeño de entre los subconjuntos de A que contienen a B y son cerrados bajo $\mathcal{F}$, y lo denotaremos por $\operatorname{cl}_{\mathcal{F}} B$.

Lema 2.21. *Si A es un conjunto, $B \subseteq A$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$ con* $\max\{|B|, |\mathcal{F}|\} \leqslant \omega$, *entonces* $|\operatorname{cl}_{\mathcal{F}} B| \leqslant \omega$.

Demostración. Para cada $C \subseteq A$ y $f \in \mathcal{F}$, definimos $f * C := f(C^n)$, donde $\operatorname{dom} f = A^n$. Definamos ahora $B_0 := B$, $B_{n+1} := B_n \cup \bigcup\{f * B_n : f \in \mathcal{F}\}$ para $n \in \omega$ y $B_\omega := \bigcup\{B_n : n \in \omega\}$. De la definición se obtiene inmediatamente que la sucesión $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ es creciente. Como $|B_0| = |B| \leqslant \omega$, $|f * B| \leqslant \omega$ para cada $f \in \mathcal{F}$, y como $|\mathcal{F}| \leqslant \omega$, $|B_1| \leqslant \omega \cdot \omega + \omega = \omega$ (donde las operaciones anteriores son suma y producto de cardinales). Aplicando el mismo argumento a B_n y B_{n+1} se obtiene que $|B_n| \leqslant \omega$ para cada $n \in \omega$. Luego, $|B_\omega| \leqslant \omega \cdot \omega = \omega$. Así pues, habremos terminado si probamos que, como era de esperarse, $\operatorname{cl}_{\mathcal{F}} = B_\omega$.

B_ω es cerrado bajo $\mathcal{F}$: si $f \in \mathcal{F}$ con $\operatorname{dom} f = A^n$ y $x \in B_\omega^n$, existen $m_i \in \omega$ y $x_i \in B_{m_i}$ para cada $i < n$ de forma tal que $x = \langle x_i : i < n\rangle$. Escribiendo $m := \max\{m_i : i < n\}$, se tiene que $x_i \in B_{m_i} \subseteq B_m$ para cada $i < n$, de modo que $f(x) \in f * B_m \subseteq B_{m+1} \subseteq B_\omega$.

Ahora bien, es claro que si $B \subseteq C \subseteq A$ y C es cerrado bajo $\mathcal{F}$, entonces $B_0 \subseteq C$ y si $B_n \subseteq C$, se sigue que $f * B_n \subseteq f * C \subseteq C$ para toda $f \in \mathcal{F}$, de donde $B_{n+1} \subseteq C$. Así,

$B_\omega \subseteq C$. □

Proposición 2.22. *Si* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{\omega_1}$ *con* $|\mathcal{F}| < \omega_1$*, entonces* $C := \{\alpha < \omega_1 : \operatorname{cl}_{\mathcal{F}} \alpha = \alpha\}$*, el conjunto de ordinales en* ω_1 *cerrados bajo* $\mathcal{F}$*, es cerrado y no acotado en* ω_1*.*

Demostración. Sea $B \subseteq C$ de tal modo que $\beta := \sup B < \omega_1$. Si $f \in \mathcal{F}$ satisface $\operatorname{dom} f = \omega_1^n$, entonces para cada $s \in \beta^n$ existe $\lambda \in B$ tal que $\max(\operatorname{im} s) < \lambda$, es decir, $s \in \lambda^n$. Así, $f(s) \in \lambda \subseteq \beta$. Luego, $\beta \in C$ y por ende C es cerrado (por el lema 2.18).

C no es acotado: dado $\lambda < \omega_1$, de la proposición anterior se obtiene que $|\operatorname{cl}_{\mathcal{F}} \lambda| \leqslant \max\{|\lambda|, |\mathcal{F}|\} < \omega_1$. Como ω_1 es regular, $h(\lambda) := (\sup \operatorname{cl}_{\mathcal{F}} \lambda) + 1 < \omega_1$, y como $\lambda \subseteq \operatorname{cl}_{\mathcal{F}} \lambda$, $\lambda < h(\lambda)$. Definamos $h^0(\lambda) = \lambda$, $h^{n+1}(\lambda) = h(h^n(\lambda))$ para $n \in \omega$ y $h^\omega(\lambda) = \sup\{h^n(\lambda) : n \in \omega\}$. Entonces, nuevamente por la regularidad de ω_1, $h^\omega(\lambda) \in \omega_1$. Habremos terminado si probamos que $\operatorname{cl}_{\mathcal{F}} h^\omega(\lambda) = h^\omega(\lambda)$, pues $h^\omega(\lambda) \geqslant h^1(\lambda) = h(\lambda) > \lambda$.

Tomemos $f \in \mathcal{F}$ con $\operatorname{dom} f = \omega_1^n$ y $s \in (h^\omega(\lambda))^n$. Existe entonces $m \in \omega$ de forma que $\max(\operatorname{im} s) < h^m(\lambda)$. Esta última desigualdad implica que $s \in (h^m(\lambda))^n$ y por definición de la cerradura se sigue que $f(s) \in \operatorname{cl}_{\mathcal{F}} h^m(\lambda) \subseteq h^{m+1}(\lambda) \subseteq h^\omega(\lambda)$. □

Denotaremos por E al conjunto de ordinales límite en ω_1.

Corolario 2.23. *E es cerrado y no acotado en ω_1.*

Demostración. Definamos $f : \omega_1 \to \omega_1$ mediante $f(\lambda) = \lambda + 1$ para toda $\lambda \in \omega_1$. Por la proposición anterior, el conjunto de ordinales cerrados bajo $\{f\}$ es cerrado y no acotado en ω_1, pero $\xi \in \omega_1$ es cerrado bajo $\{f\}$ si y sólo si para cada $\lambda < \xi$ se tiene que $\lambda+1 = f(\lambda) < \xi$, lo cual equivale a que ξ sea un ordinal límite. □

Sean G un abierto denso en ω_1^ω y $s \in \omega_1^{<\omega}$. Como se mostró en el lema 2.19 y los comentarios anteriores, $[s]$ es un abierto no vacío en ω_1^ω. Entonces $G \cap [s]$ es un abierto no vacío, así que se puede fijar $s' \in \omega_1^{<\omega}$ de tal modo que $[s'] \subseteq [s] \cap G$. Definimos entonces $g_G : \omega_1^{<\omega} \to \omega_1^{<\omega}$ mediante $g_G(s) = s'$. De este modo, $[g_G(s)] \subseteq [s] \cap G$. Así, por el comentario anterior al lema 2.19, $s \subseteq g_G(s)$.

Diremos que un ordinal λ es un *punto fijo de g_G* si $g_G[\lambda^{<\omega}] \subseteq \lambda^{<\omega}$.

Corolario 2.24. *Si G es un abierto denso en ω_1^ω, entonces el conjunto de puntos fijos de g_G es cerrado y no acotado en ω_1.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$, definimos $f_n : \omega_1^n \to \omega_1$ dada por $f_n(s) = \max(\operatorname{im} g_G(s))$. Así, $\mathcal{F} := \{f_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}_{\omega_1}$ y $|\mathcal{F}| \leqslant \omega$. Por la proposición anterior, $C := \{\lambda < \omega_1 : \operatorname{cl}_{\mathcal{F}} \lambda = \lambda\}$ es cerrado y no acotado en ω_1. Para finalzar, probemos que C es el conjunto de puntos fijos de g_G.

Sea $\lambda < \omega_1$. Si $n \in \omega$ y $s \in \lambda^n$, entonces $f_n(s) < \lambda$ equivale a que $\operatorname{im}(g_G(s)) \subseteq \lambda$, es decir, a que $g_G(s) \in \lambda^{<\omega}$. Por lo anterior, la contención $f_n[\lambda^n] \subseteq \lambda$ se da si y sólo si $g_G[\lambda^n] \subseteq \lambda^{<\omega}$. En conclusión, λ es un punto fijo de g_G si y sólo si λ es cerrado bajo $\mathcal{F}$. $\square$

El teorema que sigue muestra una manera de obtener los espacios que buscamos, es decir, un par de espacios de Baire cuyo producto no sea de Baire.

Teorema 2.25. *Sea A un subconjunto estacionario de ω_1. Entonces $A^* := \{f \in \omega_1^\omega : \sup f[\omega] \in A\}$ es, como subespacio de ω_1^ω, un espacio de Baire; Además, si B es otro subconjunto de ω_1 que es estacionario y $A \cap B = \emptyset$, entonces $A^* \times B^*$ no es de Baire.*

Demostración. Comencemos por notar que la regularidad de ω_1 implica que $\sup f[\omega] \in \omega_1$ para todo $f \in \omega_1^\omega$, de modo que la definición de A^* es apropiada. Además, observemos que, dado que A es estacionario, intersecta a todos los conjuntos de la forma $\omega_1 \setminus \lambda$, $\lambda < \omega_1$, que son cerrados y no acotados en ω_1. En otras palabras, A es no acotado en ω_1. Entonces, A^* es denso en ω_1^ω, pues para cualquier $s \in \omega_1^{<\omega}$ podemos encontrar $\lambda \in A$ con $\max(\operatorname{im} s) < \lambda$, y definir $f \in \omega_1^\omega$ mediante $f \restriction |s| = s$ y $f[\omega \setminus |s|] = \{\lambda\}$, de modo que $\sup f[\omega] = \lambda \in A$, es decir, $f \in A^* \cap [s]$.

Sean $\{G_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en A^*, $s \in \omega_1^{<\omega}$ y $U := [s] \cap A^*$. Mostraremos que $U \cap \bigcap\{G_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$, lo cual probará, en vista de ser $[s] \cap A^*$ un abierto básico arbitrario de A^*, que $\bigcap\{G_n : n \in \omega\}$ es denso en A^*. Fijemos, para cada $n \in \omega$, $H_n \in \tau_{\omega_1^\omega}$ tal que $H_n \cap A^* = G_n$. Como A^* es denso en ω_1^ω, cada G_n es denso en ω_1^ω, y como $G_n \subseteq H_n$, cada H_n es denso también. Sea C_n el conjunto de puntos fijos de g_{H_n} para cada $n \in \omega$. Tenemos entonces, por el corolario 2.24 que cada C_n es cerrado y no acotado en ω_1

y, por la proposición 2.20 y el lema 2.23, que

$$C := E \cap \bigcap \{C_n : n \in \omega\}$$

también lo es. Como A es estacionario, existe $\lambda \in C \cap A$ tal que $\max(\operatorname{im} s) < \lambda$, obteniendo así que $s \in \lambda^{<\omega}$. Dado que $\lambda \in C \subseteq E$, existe $\langle \lambda_n : n \in \omega \rangle$, una sucesión estrictamente creciente de elementos en λ, tal que $\sup\{\lambda_n : n \in \omega\} = \lambda$. Definamos inductivamente, $s_0 = s$ y

$$s_{n+1} = g_{H_n}(s_n)^\frown \lambda_n \text{ para cada } n \in \omega.$$

Como λ es un punto fijo de g_{H_n}, $\lambda_n \in \lambda$ para cada $n \in \omega$ y $s \in \lambda^{<\omega}$, se tiene que, por un argumento inductivo, $s_n \in \lambda^{<\omega}$ para cada $n \in \omega$. Además, en el penúltimo párrafo anterior al corolario 2.24 vimos que necesariamente $s_n \subseteq g_{H_n}(s_n) \subsetneq s_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. Luego,

$$f := \bigcup \{s_n : n \in \omega\} \in \lambda^\omega,$$

de donde

$$\lambda = \sup\{\lambda_n : n \in \omega\} \leqslant \sup f[\omega] \leqslant \lambda,$$

es decir que $\sup f[\omega] = \lambda \in A$ y por tanto $f \in A^*$. Además, si $n \in \omega$, $g_{H_n}(s_n) \subseteq s_{n+1} \subseteq f$, y por ende

$$f \in [g_{H_n}(s_n)] \subseteq [s_n] \cap H_n,$$

es decir, $f \in \bigcap \{H_n : n \in \omega\} \cap A^* = \bigcap \{G_n : n \in \omega\}$. Como $s = s_0 \subseteq f$, concluimos finalmente que $f \in U \cap \bigcap \{G_n : n \in \omega\}$.

Pasemos a la segunda parte de la proposición: sea, para cada $n \in \omega$,

$$G_n := \{(f, g) \in A^* \times B^* : \max\{f(n), g(n)\} < \min\{\sup f[\omega], \sup g[\omega]\}\}.$$

Sean $n \in \omega$ y $(f, g) \in G_n$. Entonces, existen $m, m' \in \omega$ tales que $\max\{f(n), g(n)\} < \min\{f(m), g(m')\}$. Así, haciendo $s = f \upharpoonright (m + n + 1)$ y $s' = g \upharpoonright (m' + n + 1)$, se tiene que $U := ([s] \times [s']) \cap (A^* \times B^*)$ es un abierto en $A^* \times B^*$ que tiene a (f, g) como elemento y, para cualquier $(f', g') \in U$, se deduce que $s \subseteq f'$ y $s' \subseteq g'$; luego, $f'(m) = s(m) = f(m)$, $f'(n) = s(n) = f(n)$ y por supuesto también $g'(m') = g(m')$ y $g(n) = g'(n)$; de todo lo anterior concluimos que

$$\min\{\sup f'[\omega], \sup g'[\omega]\} \geqslant \min\{f(m), g(m')\} > \max\{f'(n), g'(n)\},$$

es decir, $(f, g) \in U \subseteq G_n$. En pocas palabras, G_n es abierto en $A^* \times B^*$.

Probemos ahora que, para cualquier $n \in \omega$, G_n es denso en $A^* \times B^*$: sean $s, s' \in \omega_1^{<\omega}$. Queremos probar que $([s] \times [s']) \cap (A^* \times B^*) \cap G_n \neq \emptyset$. Podemos hallar $t, t' \in \omega_1^{<\omega}$ tales que $s \subseteq t$, $s' \subseteq t'$ y $n \in |t| \cap |t'|$ (si $n \in |s|$ entonces $t = s$, si no, $t \in \omega_1^{n+1}$ se define por $t \restriction |s| = s$ y $t[(n+1) \setminus |s|] = \{0\}$ y análogamente para s' y t'), por lo que $[t] \subseteq [s]$ y $[t'] \subseteq [s']$. Bastará pues con probar que $V \cap G_n \neq \emptyset$, donde $V := ([t] \times [t']) \cap (A^* \times B^*)$. Como A y B son estacionarios, son no acotados, por lo que existen $\lambda \in A$ y $\lambda' \in B$ tales que $\max\{t(n), t'(n)\} < \min\{\lambda, \lambda'\}$. Definamos entonces $f_0, g_0 : \omega \to \omega_1$ como $f_0 \restriction |t| = t$, $g_0 \restriction |t'| = t'$, $f_0[\omega \setminus |t|] = \{\lambda\}$ y $g_0[\omega \setminus |t'|] = \{\lambda'\}$. Entonces, $\sup f_0[\omega] = \lambda \in A$ y $\sup g_0[\omega] = \lambda' \in B$; además

$$\max\{f_0(n), g_0(n)\} = \max\{t(n), t'(n)\} < \min\{\lambda, \lambda'\} = \min\{\sup f_0[\omega], \sup g_0[\omega]\}.$$

Así, $(f_0, g_0) \in V \cap G_n$.

No obstante lo anterior, $\bigcap\{G_n : n \in \omega\} = \emptyset$: si $(f, g) \in A^* \times B^*$ entonces $\sup f[\omega] \neq \sup g[\omega]$, pues $A \cap B = \emptyset$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\sup g[\omega] < \sup f[\omega]$, de modo que existe $n \in \omega$ tal que $\sup g[\omega] < f(n)$. Luego, $(f, g) \notin G_n$. Esto prueba que $A^* \times B^*$ no es de Baire. □

Así pues, para concluir nuestro ejemplo sólo hace falta probar que existen dos subconjuntos ajenos y estacionarios de ω_1. Esto es un corolario del siguiente importante teorema de combinatoria infinita.

Teorema 2.26 (Ulam)**.** *Existe una familia ajena por pares y no numerable de subconjuntos estacionarios de ω_1.*

Demostración. Para cada $\xi \in \omega_1$, $|\xi| \leqslant \omega$, de modo que podemos fijar una función inyectiva

$f_\xi : \xi \to \omega$. Definamos ahora, para cualesquiera $\xi \in \omega_1$ y $n \in \omega$, $X_\xi^n := \{\rho < \omega_1 : \xi < \rho \wedge f_\rho(\xi) = n\}$.

Supongamos que $n \in \omega$ y $\xi, \lambda \in \omega_1$ satisfacen $X_\xi^n \cap X_\lambda^n \neq \emptyset$. Entonces, fijando un elemento ρ de dicha intersección, se tiene que $f_\rho(\xi) = n = f_\rho(\lambda)$, lo cual implica, dado que f_ρ es inyectiva, que $\xi = \lambda$. Por tanto, $\xi \neq \lambda$ implica $X_\xi^n \cap X_\lambda^n = \emptyset$.

Sea $\xi \in \omega_1$. Suponiendo que para cada $n \in \omega$ se tiene que X_ξ^n es no estacionario en ω_1, fijemos, para cada $n \in \omega$, un subconjunto cerrado y no acotado C_n de ω_1 tal que $X_\xi^n \cap C_n = \emptyset$. Entonces, por la proposición 2.20, $C := \bigcap_{n\in\omega} C_n$ es cerrado y no acotado en ω_1. Además, $C \cap \bigcup_{n\in\omega} X_\xi^n = \emptyset$, pero $\bigcup_{n\in\omega} X_\xi^n = \{\rho < \omega_1 : \xi < \rho \wedge \exists n \in \omega(f_\rho(\xi) = n)\} = [\xi + 1, \omega_1)$, una contradicción al hecho de que C es no acotado. Así pues, podemos fijar $h(\xi) \in \omega$ tal que $X_\xi^{h(\xi)}$ es estacionario en ω_1.

De lo hecho en el párrafo previo se deduce la existencia de una función $h : \omega_1 \to \omega$ de tal forma que $X_\xi^{h(\xi)}$ es estacionario para cada $\xi < \omega_1$. Naturalmente, $\omega_1 = \bigcup_n h^{-1}[n]$ y por lo tanto existe $n_0 \in \omega$ tal que $|h^{-1}[\{n_0\}]| = \omega_1$.

De todo lo anterior se concluye que la familia $\{X_\xi^{n_0} : h(\xi) = n_0\}$ satisface las condiciones requeridas en el enunciado del teorema. $\square$

Finalmente, de los dos teoremas anteriores obtenemos el resultado prometido:

Corolario 2.27. *Existen dos espacios de Baire cuyo producto no es de Baire.*

Notemos que, como ω_1 es completamente metrizable como espacio discreto, ω_1^ω es completamente metrizable (proposición 1.26). Así pues, los espacios que acabamos de exhibir son no sólo de Baire, sino también metrizables. Su producto es por tanto metrizable también, ¡y ni siquiera bajo tan especiales condiciones resulta de Baire! Este catastrófico ejemplo nos inspirará para lo que sigue.

CAPÍTULO 3: ESPACIOS π-COMPLETOS, π^0-COMPLETOS Y DE OXTOBY

Como resultado de los descubrimientos de Oxtoby, Fleissner y Kunen sobre la no productividad de los espacios de Baire (sección 2.4) y del entrañable Teorema de Categoría de Baire (teorema 2.8), surgió el llamado *problema de Unificación*, que consiste en la búsqueda de clases de espacios de Baire que sean cerradas bajo productos topológicos y que contengan a las clases de los Hausdorff localmente compactos y los completamente metrizables. Es este el eje principal de la presente tesis, que expondrá tres de las más importantes, generales y prolíficas propuestas que se han hecho frente al problema de Unificación, a saber, los espacios π-completos, definidos y estudiados por J. C. Oxtoby en [13], los aún más generales espacios π^0-completos, ideados por A. R. Todd en [15] y los espacios de Oxtoby, definidos por Todd, M. Henriksen, R. Kopperman y M. Rayburn en [9].

3.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 3.1. Si X es un espacio topológico, diremos que una colección $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X es una π^0-*base* de X si todos sus elementos tienen interior no vacío y para cada $U \in \tau_X^*$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq U$. Si además todos los elementos de $\mathcal{P}$ son abiertos, la llamaremos una π-*base* para X.

Definición 3.2. Un espacio topológico X es *casi-regular* si para cada $U \in \tau_X^*$ existe $V \in \tau_X^*$ de tal suerte que $\overline{V} \subseteq U$.

La casi-regularidad es una condición parecida a la regularidad, pero desprovista del carácter puntual de ésta.

Ejemplo 3.3. *Exhibiremos ahora un espacio topológico X, casi-regular que no es regular en ningún punto, es decir, que para cada $x \in X$ existe un abierto que lo tiene como elemento pero que no contiene a la cerradura de ningún abierto que tenga a x por elemento.*

Sean $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}$ la colección de los conjuntos de la forma $[a,b) \setminus D$, donde $a, b \in X$, $a < b$ y $D \in [[a,b)]^{\leqslant\omega}$ se acumula, a lo más, en a. Es fácil ver que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo *intersecciones finitas, pues si E es a $[c,d)$ lo que D a $[a,b)$, entonces $([a,b)\setminus D)\cap([c,d)\setminus E) = [e,f)\setminus((E\cup D)\cap[e,f))$, donde $e := \max\{a,c\}$, $f := \min\{b,d\}$ y $(E\cup D)\cap[e,f)$ es un subconjunto numerable de $[e,f)$ que se acumula, a lo más, en e. También es claro, que $\bigcup\mathcal{B} = X$, pues $x\in[x,x+1)\in\mathcal{B}$ para cada $x\in X$. De este modo, $\mathcal{B}$ es base para alguna topología en X, que denotaremos por τ.*

Probaremos que si a, b y D son como en el párrafo anterior, entonces $\mathrm{cl}_\tau([a,b)\setminus D) = [a,b)$. En primer lugar, $[a,b)$ es claramente cerrado, ya que $X\setminus[a,b) = \bigcup\{[x,a)\cup[b,y) : x < a\wedge b < y\}$. Luego, $\mathrm{cl}_\tau([a,b)\setminus D)\subseteq[a,b)$. Además, si $x\in[a,b)$, entonces para cualesquiera c, d y E como en el párrafo previo y tales que $x\in[c,d)\setminus E$, se tiene que, definiendo e y f como antes, $e\leqslant x < f$, y como $E\cup D$ es numerable, $([a,b)\setminus D)\cap([c,d)\setminus E) = [e,f)\setminus((E\cup D)\cap[e,f))\neq\emptyset$. Por tanto, $[a,b) = \mathrm{cl}_\tau([a,b)\setminus D)$.

Verifiquemos ahora la casi-regularidad de τ: si U es un abierto no vacío en (X,τ), en particular existen $a, b\in X$ y $D\subseteq[a,b)$ como arriba, de modo que $[a,b)\setminus D\subseteq U$. Cuando $D=\emptyset$, $[a,b)\setminus D = [a,b)$ es cerrado y por ende es un abierto cuya cerradura está contenida en U. Si $D\neq\emptyset$, entonces $a\leqslant\max D < b$, de modo que, si $c := (b+\max D)/2$, $\mathrm{cl}_\tau[c,b) = [c,b)\subseteq[a,b)\setminus D\subseteq U$.

Por otro lado, si $a\in X$ es arbitrario, entonces, definiendo $U := [a,a+1)\setminus D$, donde $D := \{a+\dfrac{1}{n} : n\in\omega\setminus 1\}$, se obtiene que $a\in U$, pero si c, d y E son como en el párrafo antepasado con $a\in V := [c,d)\setminus E\subseteq U$, entonces $a = c$ y $\mathrm{cl}_\tau V = [a,d)$ no está contenido en U.

Proposición 3.4. *Si Y es un subespacio denso del espacio casi-regular X, entonces Y es casi-regular.*

Demostración. Dado $U\in\tau_X^*$, fijemos $V\in\tau_X^*$ de modo que $\mathrm{cl}_X V\subseteq U$. Así, como Y es denso, $V\cap Y\in\tau_Y^*$. Además, $\mathrm{cl}_Y(V\cap Y) = Y\cap\mathrm{cl}_X V\subseteq Y\cap U$. □

La implicación complementaria a la proposición anterior es falsa, es decir, un espacio topológico que posee un subespacio denso y casi-regular no es, en general, casi-regular, como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.5. *Consideremos $X = \alpha\mathbb{Q}$, la extensión de Alexandroff del espacio usual $\mathbb{Q}$ de los racionales (véase la definición 1.6). Entonces, $\mathbb{Q}$ es un subespacio denso, abierto y* *casi-regular (de hecho, normal) de X. Probaremos que $\mathbb{Q} \in \tau_X^*$ no contiene a la cerradura de ningún abierto no vacío en X, de donde concluiremos que X no es casi-regular.*

Sea U un abierto no vacío en $\mathbb{Q}$ y por tanto en X. Ahora bien, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{Q}$, lo explicado en el ejemplo 2.2 nos asegura que $U \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$. En conclusión, $\infty \in (\mathrm{cl}_X U) \setminus \mathbb{Q}$.

Proposición 3.6. *Si X es un espacio topológico casi-regular y $U \in \tau_X^*$, entonces U es, como subespacio de X, casi-regular.*

Demostración. Si V es un abierto no vacío en U, lo es también en X, pues U es abierto. Así, existe un abierto no vacío W en X tal que $\mathrm{cl}_X W \subseteq V$. En particular, $W \subseteq U$, es decir, W es un abierto en U, y además $\mathrm{cl}_U W = U \cap \mathrm{cl}_X(W \cap U) = \mathrm{cl}_X W \subseteq V$, por lo que U es casi-regular. □

Veremos a continuación que la casi-regularidad no se hereda a cerrados.

Ejemplo 3.7. *Para cualquier espacio no casi-regular X sin abiertos finitos no vacíos ($\alpha\mathbb{Q}$ por ejemplo) se tiene que su duplicado de Alexandroff $A(X)$ (véase la definición 1.10) es casi-regular. En efecto, para cada $x \in X$, $\mathrm{cl}_{A(X)}\{(x,1)\} = \{(x,1)\}$. Además, si $U \in \tau_X^*$ y $F \in [X]^{<\omega}$, entonces $(U \times \{1\}) \setminus (F \times \{1\}) \neq \emptyset$, de modo que existe $y \in X$ tal que $(y,1)$ es un elemento de dicha diferencia. Por otro lado, $\{(y,1)\} \in \tau_{A(X)}$ y $\mathrm{cl}_{A(X)}\{(y,1)\} = \{(y,1)\} \subseteq [U|F]$. Por la definición de $A(X)$ se concluye que este es casi-regular.*

De la proposición 1.12 se tiene que $X \times 1$ es un subespacio cerrado de $A(X)$ que es homeomorfo a X.

Proposición 3.8. *Si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de espacios topológicos casi-regulares, entonces $X := \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, el producto topológico, es casi-regular.*

Demostración. Si U es un abierto no vacío en X, entonces existen $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}^*$ para cada $\alpha \in F$, de modo tal que $\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] \subseteq U$; por otro lado, para cada $\alpha \in F$ la casi-regularidad de X_α garantiza que existe $V_\alpha \in \tau_{X_\alpha}^*$ tal que $\mathrm{cl}_{X_\alpha} V_\alpha \subseteq U_\alpha$, de modo que, por el lema 1.14, $\mathrm{cl}_X(\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]) = \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[\mathrm{cl}_{X_\alpha} V_\alpha]) \subseteq U$. □

Proposición 3.9. *Si* $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ *es una familia ajena por pares de espacios topológicos casi-regulares, entonces* $X := \bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$*, la suma topológica, es un espacio casi-regular.*

Demostración. Si U es un abierto no vacío en X, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $U' := U \cap X_\alpha \neq \emptyset$. Más aún, por definición de X, U' resulta un abierto en X_α, que es casi-regular por hipótesis. Así, existe un abierto $V \in \tau^*_{X_\alpha} \subseteq \tau^*_X$ tal que $\operatorname{cl}_X V = \operatorname{cl}_{X_\alpha} V \subseteq U' \subseteq U$. Luego, X es casi-regular. $\square$

La casi-regularidad es un invariante inverso de funciones cerradas e irreducibles:

Proposición 3.10. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función cerrada e irruducible. Si* Y *es casi-regular entonces* X *es casi-regular.*

Demostración. Si $U \in \tau^*_X$ entonces $X \setminus U$ es un cerrado propio en X. Como f es irreducible y cerrada, $V := Y \setminus f[X \setminus U] \in \tau^*_Y$. Luego, al ser Y casi-regular, existe $W \in \tau^*_Y$ tal que $\operatorname{cl}_Y W \subseteq V$. De la continuidad y suprayectividad de f se infiere que $f^{-1}[W] \in \tau^*_X$ y $\operatorname{cl}_X f^{-1}[W] \subseteq f^{-1}[V] \subseteq U$, es decir, X es casi-regular. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la casi-regularidad no se preserva bajo imágenes perfectas (ver definición 1.11).

Ejemplo 3.11. *Como se vio en el ejemplo 3.7,* $A(\alpha\mathbb{Q})$ *es casi-regular, mientras que* $\alpha\mathbb{Q}$ *no lo es (ejemplo 3.5). No obstante, la proposición 1.12 afirma que la función* $p_{\alpha\mathbb{Q}} : A(\alpha\mathbb{Q}) \to \alpha\mathbb{Q}$ *definida en 1.10 es perfecta.*

3.2 Tres nociones de completez

Definición 3.12. Dada una sucesión $\vec{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ de familias de subconjuntos de algún espacio topológico X (es decir, cada $\mathcal{A}_n$ es un subconjunto del potencia de X), diremos que la sucesión $\vec{A} = \langle A_n : n \in \omega \rangle$ es un *nido asociado a* $\vec{\mathcal{A}}$ si para cada $n \in \omega$, $A_n \in \mathcal{A}_n$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$. Por otro lado, $\vec{A}$ será llamada *nido fuerte asociado a* $\vec{\mathcal{A}}$ si para cualquier $n \in \omega$ se satisface que $A_n \in \mathcal{A}_n$ y que $\overline{A_{n+1}} \subseteq \operatorname{int} A_n$.

Ahora sí, pasamos a definir los espacios anunciados arriba.

Definición 3.13. Un espacio topológico X será llamado π^0*-completo* (o pseudocompleto según Todd) si es casi-regular y posee una sucesión de π^0-bases de tal modo que todo nido fuerte asociado a ésta tiene intersección no vacía. Cuando los elementos de la sucesión son de hecho π-bases, diremos que X es un espacio *π-completo* (o pseudocompleto según Oxtoby).

En adelante, la frase "sea $\langle \mathcal{A}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión que atestigua que X es π-completo" quiere decir que tal sucesión consta de π-bases de X y que todo nido fuerte asociado a ésta tiene intersección no vacía, y similarmente con los espacios π^0-completos.

Definición 3.14. Un espacio X será llamado *espacio de Oxtoby* si posee una sucesión de π^0-bases con la propiedad de que todo nido asociado a ésta tiene intersección no vacía. A una sucesión con estas características se le llama *sucesión de Oxtoby*.

Note que la casi-regularidad no es un requisito para ser un espacio de Oxtoby.

Como parte de la definición se obtiene que todo espacio π-completo es π^0-completo. El recíproco es todavía una cuestión sin resolver, planteada por Todd en [15]. Respecto a la relación entre la última clase de espacios que definimos y las dos primeras, tenemos el siguiente:

Teorema 3.15. *Un espacio topológico X es π^0-completo si y sólo si es de Oxtoby y casi-regular.*

Demostración. Si X posee una sucesión de Oxtoby, todo nido fuerte asociado a ésta es en particular un nido y tiene por tanto intersección no vacía. Cuando X es además casi-regular, obtenemos la π^0-completez.

Comencemos ahora suponiendo que $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión que atestigua la π^0-completez de X. Definamos, para $n \in \omega$,

$$\mathcal{P}_n := \begin{cases} \{\overline{Q} : Q \in \mathcal{Q}_k\} & \text{si } n = 3k \\ \mathcal{Q}_k & \text{si } n = 3k+1 \\ \{\operatorname{int} Q : Q \in \mathcal{Q}_k\} & \text{si } n = 3k+2 \end{cases} .$$

De esta forma, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$, definamos $Q_n := P_{3n+1} \in \mathcal{Q}_n$. Así, si $n \in \omega$, se tiene que $Q_{n+1} \subseteq P_{3n+3} \subseteq P_{3n+2} \subseteq Q_n$, y como P_{3n+3} es cerrado y P_{3n+2} es abierto (por definición de $\mathcal{P}_{3n+3}$ y $\mathcal{P}_{3n+2}$), $\overline{Q_{n+1}} \subseteq \operatorname{int} Q_n$. Es decir que

$\langle Q_n : n \in \omega\rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega\rangle$ y, por ende, $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} Q_n = \bigcap_{n\in\omega} P_n$. Lo anterior se traduce que que $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ es una sucesión de Oxtoby para X. $\square$

Corolario 3.16. *Todo espacio π^0-completo es de Oxtoby.*

Proposición 3.17. *Si X es un espacio π-completo o π^0-completo o de Oxtoby, entonces es de Baire.*

Demostración. En virtud del corolario anterior, bastará con probar que los espacios Oxtoby son de Baire.

Comencemos por fijar una sucesión de Oxtoby $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ en X, una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos densos en X y $U \in \tau_X^*$. Fijemos ahora $P_0 \in \mathcal{P}_0$ tal que $P_0 \subseteq U \cap U_0$. Tenemos que $U_1 \cap \operatorname{int} P_0 \in \tau_X^*$, de modo que existe $P_1 \in \mathcal{P}_1$ tal que $P_1 \subseteq U_1 \cap \operatorname{int} P_0$. Una vez que hayamos elegido $P_n \in \mathcal{P}_n$ para $n \leqslant m$, con $P_{n+1} \subseteq U_{n+1} \cap \operatorname{int} P_n$ siempre que $n < m$, podemos notar que $U_{m+1} \cap \operatorname{int} P_m \in \tau_X^*$, de modo que es posible escoger $P_{m+1} \in \mathcal{P}_{m+1}$ tal que $P_{m+1} \subseteq U_{m+1} \cap \operatorname{int} P_m$. De este modo, $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ es un nido asociado a la sucesión de Oxtoby $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$, de tal suerte que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} P_n \subseteq U \cap (\bigcap_{n\in\omega} U_n)$. $\square$

La prueba anterior es, como podrá notar el lector, casi una copia de la prueba del Teorema de Categoría de Baire, cosa que no es casual, pues fue precisamente el estudio de dicha prueba lo que llevó a Oxtoby a proponer los espacios π-completos, que emergen de la observación de ciertas propiedades compartidas por los espacios completamente metrizables y los Hausdorff localmente compactos, y que son la clave de la prueba modelo del TCB. El gran aporte de Oxtoby fue abstraer dichas propiedades, eliminando, con sus definiciones de π-base y casi-regularidad, el papel que jugaban individualmente los puntos del espacio en turno. A fin de cuentas, lo que se requería para resolver el problema de Unificación era una subclase de la clase de los espacios de Baire y la definición de estos no hace mención de puntos en lugar alguno, es decir, ser de Baire no es una propiedad puntual como lo son ser localmente compacto o regular. Después, Todd se encargó de generalizar aún más la idea de Oxtoby y de profundizar en su estudio. Lo mismo sucedió posteriormente con los espacios de Oxtoby. Todo esto se aprecia perfectamente en la siguiente proposición, inspirada también en el TCB, que es su razón de ser.

Proposición 3.18. *Si X es un espacio topológico Hausdorff localmente compacto o completamente metrizable, entonces X es π-completo y por tanto π^0-completo y Oxtoby.*

Demostración. Comencemos con un espacio X localmente compacto y Hausdorff, de modo que, en particular, es completamente regular y por tanto, casi-regular. Denotemos por $\mathcal{P}_n$ a la colección de los abiertos no vacíos con cerradura compacta en X, y esto para cada $n \in \omega$. Así, en vista de la proposición 1.3, cada $\mathcal{P}_n$ es una base y por tanto una π-base para X. Además, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$, entonces $\langle \overline{P_n} : n \in \omega \rangle$ es una sucesión anidada de compactos no vacíos en X, de modo que $\bigcap_{n\in\omega} P_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{P_n} \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que X es completamente metrizable y fijemos una métrica completa d compatible con su topología. Definamos, para $n \in \omega$, $\mathcal{P}_n := \{B(x, \varepsilon) : x \in X \wedge \varepsilon \in (0, 2^{-n})\}$. Es claro entonces que, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{P}_n$ es base y por tanto π-base para X. Además, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$, entonces, de los lemas 1.24 y 1.25, $\bigcap_{n\in\omega} P_n = \bigcap_{n\in\omega} \overline{P_n} \neq \emptyset$. Que X es casi-regular es consecuencia de que es metrizable y por tanto normal. $\square$

Lema 3.19. *Si X es un espacio topológico π^0-completo (π-completo, Oxtoby) entonces existe una sucesión $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ que atestigua que X es π^0-completo (π-completo, Oxtoby) y de modo que $X \in \mathcal{P}_n$ para toda $n \in \omega$.*

Demostración. Sea $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión que atestigua que X es π^0-completo. Definamos recursivamente $\mathcal{P}_0 := \mathcal{Q}_0$ y, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{P}_{n+1} := \{P \in \mathcal{Q}_{n+1} : \exists P' \in \mathcal{P}_n(\overline{P} \subseteq \operatorname{int} P')\}$. Probaremos, por inducción, que cada $\mathcal{P}_n$ es una π^0-base para X.

Para $n = 0$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}_0$ es una π^0-base por hipótesis. Ahora bien, suponiendo que, para alguna $n \in \omega$, se tiene que $\mathcal{P}_n$ es una π^0-base para X, si $U \in \tau_X^*$ entonces existe $P' \in \mathcal{P}_n$ tal que $P' \subseteq U$. Como $\operatorname{int} P' \neq \emptyset$ y X es casi-regular, existe $P \in \mathcal{Q}_{n+1}$ tal que $\overline{P} \subseteq \operatorname{int} P'$ ($\mathcal{Q}_{n+1}$ es una π^0-base para X). Luego, $P \subseteq U$ y $P \in \mathcal{P}_{n+1}$, es decir que $\mathcal{P}_{n+1}$ es una π^0-base para X (que todos sus elementos tienen interior no vacío se infiere de que es un subconjunto de $\mathcal{Q}_{n+1}$).

Del párrafo anterior se concluye que $\langle \mathcal{P}_n \cup \{X\} : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de π^0-bases para X. Verifiquemos que esta atestigua la π^0-completez de X: sea $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ un nido fuerte asociado a dicha sucesión. En caso de que $P_n = X$ para cada $n \in \omega$, trivialmente se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} P_n \neq \emptyset$. En caso contrario, podemos definir $n_0 := \min\{n \in \omega : P_n \subsetneq X\}$. Entonces, como $P_n \subseteq P_{n_0}$ para cada $n \geqslant n_0$, se tiene que $P_n \in \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{Q}_n$ para cada $n \geqslant n_0$. Si $n_0 = 0$ entonces el nido fuerte que estamos considerando es de hecho un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega\rangle$, por lo que $\bigcap_{n\in\omega} P_n \neq \emptyset$. Si por el contrario $n_0 > 0$ entonces existe $P'_{n_0-1} \in \mathcal{P}_{n_0-1}$ tal que $\overline{P_{n_0}} \subseteq \operatorname{int} P'_{n_0-1}$. Iterando este proceso n_0 veces y definiendo $P'_{n_0} := P_{n_0}$, obtenemos, para cada $n < n_0$, un conjunto $P'_n \in \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{Q}_n$ de modo tal que $\overline{P'_{n+1}} \subseteq \operatorname{int} P'_n$. Finalmente, si definimos $P'_n = P_n$ para cada $n > n_0$, se tiene que $\langle P'_n : n \in \omega\rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega\rangle$, por lo que $\bigcap_{n\in\omega} P_n = \bigcap_{n\in\omega} P'_n \neq \emptyset$, es decir que $\langle \mathcal{P}_n \cup \{X\} : n \in \omega\rangle$ atestigua la π^0-completez de X.

Naturalmente, si X es π-completo y cada $\mathcal{Q}_n$ es de hecho una π-base para X, cada $\mathcal{P}_n \cup \{X\}$ lo es también, es decir que en dicho caso la sucesión que construimos atestigua la π-completez de X

Cuando sólo suponemos que X es Oxtoby y $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega\rangle$ lo atestigua, definimos $\mathcal{P}_0 := \mathcal{Q}_0$ y $\mathcal{P}_{n+1} := \{P \in \mathcal{Q}_{n+1} : \exists P' \in \mathcal{P}_n(P \subseteq P')\}$ para cada $n \in \omega$. Una simplificación del argumento anterior prueba que $\langle \mathcal{P}_n \cup \{X\} : n \in \omega\rangle$ es una sucesión de Oxtoby para X.

□

Proposición 3.20. *Si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de espacios topológicos π-completos (π^0-completos u Oxtoby), entonces $X := \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, el producto topológico, es π-completo (π^0-completo u Oxtoby).*

Demostración. En virtud del lema anterior, es posible fijar, para cada $\alpha < \kappa$, una sucesión $\langle \mathcal{P}^\alpha_n : n \in \omega\rangle$ que atestigua que X_α es π^0-completo y tal que $X_\alpha \in \mathcal{P}^\alpha_n$ para cualquier $n \in \omega$. Definamos entonces, para $n \in \omega$,

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[P_\alpha] : F \in [\kappa]^{<\omega} \wedge \forall \alpha \in F(P_\alpha \in \mathcal{P}^\alpha_n) \right\},$$

donde $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ denota la proyección en el α-ésimo factor.

Veamos que, para $n \in \omega$, $\mathcal{P}_n$ es π^0-base para X. Esto es sencillo ya que si U es un abierto no vacío en X, existen $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ de tal modo que $U_\alpha \in \tau^*_{X_\alpha}$ para cada $\alpha \in F$ y $\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[U_\alpha] \subseteq U$. Para cada $\alpha \in F$ fijemos $P_\alpha \in \mathcal{P}_n^\alpha$ tal que $P_\alpha \subseteq U_\alpha$. Así, $\bigcap_{\alpha\in F}\pi_\alpha^{-1}[P_\alpha] \subseteq U$. Además, del lema 1.14 se desprende que todos los elementos de $\mathcal{P}_\alpha$ tienen interior no vacío.

Ahora bien, si $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$, podemos fijar, para cada $n \in \omega$, $F_n \in [\kappa]^{<\omega}$ y $P_n^\alpha \in \mathcal{P}_n^\alpha$ para cada $\alpha \in F_n$ de tal forma que $P_n = \bigcap_{\alpha\in F_n}\pi_\alpha^{-1}[P_n^\alpha]$, esto por la definición de $\mathcal{P}_n$. Así, en virtud del lema 1.14, se tiene que, para cada $n \in \omega$,

$$\mathrm{cl}_X P_n = \bigcap_{\alpha\in F_n}\pi_\alpha^{-1}[\mathrm{cl}_{X_\alpha} P_n^\alpha] \text{ y } \mathrm{int}_X P_n = \bigcap_{\alpha\in F_n}\pi_\alpha^{-1}[\mathrm{int}_{X_\alpha} P_n^\alpha].$$

Por otra parte, haciendo $P_n^\alpha := X_\alpha \in \mathcal{P}_n^\alpha$ siempre que $\alpha \notin F_n$, podemos observar que $\pi_\alpha^{-1}[\mathrm{cl}_{X_\alpha} P_n^\alpha] = \pi_\alpha^{-1}[\mathrm{int}_{X_\alpha} P_n^\alpha] = X$ para cualesquiera $n \in \omega$ y $\alpha \in \kappa \setminus F_n$. Esto, aunado a las igualdades anteriores, implica que, para cada $n \in \omega$,

$$\mathrm{cl}_X P_n = \bigcap_{\alpha\in \kappa}\pi_\alpha^{-1}[\mathrm{cl}_{X_\alpha} P_n^\alpha] \text{ y } \mathrm{int}_X P_n = \bigcap_{\alpha\in \kappa}\pi_\alpha^{-1}[\mathrm{int}_{X_\alpha} P_n^\alpha].$$

Luego, $\mathrm{cl}_{X_\alpha} P_{n+1}^\alpha = \pi_\alpha[\mathrm{cl}_X P_{n+1}] \subseteq \pi_\alpha[\mathrm{int}_X P_n] = \mathrm{int}_{X_\alpha} P_n^\alpha$ para cualesquiera $\alpha \in \kappa$ y $n \in \omega$, es decir que, para cada $\alpha \in \kappa$, $\langle P_n^\alpha : n \in \omega\rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n^\alpha : n \in \omega\rangle$.

Concluimos pues que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} P_n^\alpha$ para cada $\alpha \in \kappa$, por lo cual, definiedo $Y_\alpha := \bigcap_{n\in\omega} P_n^\alpha$ para cada $\alpha \in \kappa$, se concluye, dado que $Y_\alpha \subseteq P_n^\alpha$ para cada $n \in \omega$, que $\emptyset \neq \prod_{\alpha\in\kappa} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\kappa}\pi_\alpha^{-1}[Y_\alpha] \subseteq \bigcap_{\alpha\in\kappa}\pi_\alpha^{-1}[P_n^\alpha] = P_n$ para cada $n \in \omega$, es decir que $\emptyset \neq \prod_{\alpha\in\kappa} Y_\alpha \subseteq \bigcap_{n\in\omega} P_n$. En otras palabras, todo nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ tiene intersección no vacía.

Que X es casi-regular es lo que afirma la proposición 3.8.

Notemos que si cada sucesión $\langle \mathcal{P}_n^\alpha : n \in \omega\rangle$ atestigua que X_α es π-completo, los mismos argumentos de arriba, incluso simplificados, muestran que X resulta π-completo.

Cuando, para cada $\alpha < \kappa$, la sucesión de $\mathcal{P}_n^\alpha$'s es de Oxtoby para X_α, un argumento como el de los primeros tres párrafos de la prueba (aunque algo más breve) demuestra que $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$, definido de la misma forma que antes, es una sucesión de Oxtoby en X. $\square$

Corolario 3.21. *El producto de cualquier familia de espacios completamente metrizables o Hausdorff localmente compactos es un espacio π-completo y por tanto de Baire.*

Las últimas proposiciones muestran que, en efecto, las tres clases de espacios que dan nombre a este capítulo contestan al problema de Unificación, y en vista del teorema 3.15, los espacios de Oxtoby constituyen la respuesta más general de las tres. Como era de esperarse por lo expuesto en la sección 2.4, dichas respuestas no pueden abarcar a clases de espacios con propiedades bastante fuertes, como los de Baire metrizables. Formalmente hablando:

Proposición 3.22. *Existe un espacio de Baire metrizable que no es Oxtoby.*

Demostración. Del último comentario de la sección 2.4, se tiene que existen dos espacios de Baire metrizables cuyo producto no es de Baire, de modo que, por la proposición 3.17, tampoco es Oxtoby. De la proposición anterior se infiere que alguno de los factores no es Oxtoby. □

3.3 Sumas, uniones y subespacios

Proposición 3.23. *Si $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia ajena por pares de espacios topológicos π-completos (π^0-completos u Oxtoby), entonces $X := \bigoplus_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, la suma topológica, es un espacio π-completo (π^0-completo u Oxtoby).*

Demostración. Como vimos en la proposición 3.9, la suma topológica de espacios casi-regulares es casi-regular.

Tomemos, para cada $\alpha < \kappa$, una sucesión $\langle \mathcal{P}_n^\alpha : n \in \omega \rangle$ que atestigua que X_α es π^0-completo y definamos, para $n \in \omega$,

$$\mathcal{P}_n := \bigcup \{\mathcal{P}_n^\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

Es claro que para cualesquiera $n \in \omega$, $\alpha < \kappa$ y $P \in \mathcal{P}_n^\alpha$ se tiene que $\operatorname{int}_X P = \operatorname{int}_{X_\alpha} P \neq \emptyset$. Además, para cada $n \in \omega$, si $U \in \tau_X^*$ entonces existe $\alpha \in \kappa$ tal que $U \cap X_\alpha \in \tau_{X_\alpha}^*$. Como $\mathcal{P}_n^\alpha$ es una π^0-base para X_α, existe $V \in \mathcal{P}_n^\alpha \subseteq \mathcal{P}_n$ tal que $V \subseteq U \cap X_\alpha \subseteq U$, esto es, cada $\mathcal{P}_n$ es una π^0-base para X.

Finalmente, sea $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$. Entonces existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $P_0 \in \mathcal{P}_0^{\alpha_0}$, por lo que $P_0 \subseteq X_{\alpha_0}$, de modo que $P_n \subseteq P_0 \subseteq X_{\alpha_0}$ para cada $n \in \omega$. Por otro lado, el hecho de que la familia de espacios topológicos sea ajena por pares implica que también lo es, para cada $n \in \omega$, la familia $\{\mathcal{P}_n^\alpha : \alpha < \kappa\}$. De todo esto se infiere que $P_n \in \mathcal{P}_n^{\alpha_0}$ para cada $n \in \omega$, es decir, que $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ es de hecho un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n^{\alpha_0} : n \in \omega\rangle$ en X_{α_0}, de modo que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} P_n$.

Nótese que, si cada $\langle \mathcal{P}_n^\alpha : n \in \omega\rangle$ es una sucesión que atestigua que X_α es de hecho π-completo, los mismos argumentos de arriba, con una ligerísima modificación, prueban que X es π-completo. Algo similar sucede cuando cada X_α es de Oxtoby y se quiere probar que X es de Oxtoby □

Proposición 3.24. *Si X es un espacio π^0-completo (π-completo, Oxtoby) y U es un abierto no vacío en X, entonces U, como subespacio de X, es π^0-completo (π-completo, Oxtoby).*

Demostración. Como X es casi-regular, U también lo es (proposición 3.6)

Ahora bien, si $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ es una sucesión que atestigua que X es π^0-completo, podemos definir, para cada $n \in \omega$,

$$\mathcal{Q}_n := \{P \in \mathcal{P}_n : \mathrm{cl}_X P \subseteq U\}.$$

Es fácil convencerse de que cada $\mathcal{Q}_n$ es una π^0-base para U, pues éste es abierto y cada $\mathcal{P}_n$ es π^0-base para el espacio casi-regular X. Por otro lado, si $P, Q \subseteq U$ y $\mathrm{cl}_U Q \subseteq \mathrm{int}_U P \subseteq \mathrm{cl}_X P \subseteq U$, entonces $\mathrm{cl}_X Q = \mathrm{cl}_X(Q \cap U) = \mathrm{cl}_U Q$ y $\mathrm{int}_X P = \mathrm{int}_U P$. Como $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{P}_n$ para cada $n \in \omega$, se deduce que todo nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega\rangle$ en U es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ en X y por tanto tiene intersección no vacía.

Es fácil notar que la sucesión $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega\rangle$ atestigua que U es π-completo cuando la sucesión $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ hace lo propio con X.

Cuando $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ es una sucesión de Oxtoby en X, cada $\mathcal{R}_n := \{Q \in \mathcal{P}_n : P \subseteq U\}$ es claramente una π^0-base para U, pues éste es abierto y $\mathcal{P}_n$ es π^0-base de X. Además, cada nido asociado a $\langle \mathcal{R}_n : n \in \omega\rangle$ es un nido asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$, por lo que aquella es una sucesión de Oxtoby para U. □

Teorema 3.25. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio denso de X. Los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *Si $\mathcal{Q}$ es una π^0-base (π-base) para Y, entonces existe una π^0-base (π-base) $\mathcal{P}$ de X tal que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \restriction Y := \{P \cap Y : P \in \mathcal{P}\}$.*

2. *Si Y es Oxtoby entonces X es Oxtoby. Si además X es casi-regular y Y es π^0-completo (π-completo), entonces X es π^0-completo (π-completo).*

Demostración.

(1): Definamos $\mathcal{P} := \{V \cup Q : V \in \tau_X \wedge Q \in \mathcal{Q} \wedge V \cap Y = \operatorname{int}_Y Q\}$. Es claro que si $V \in \tau_X$ y $Q \in \mathcal{Q}$ satisfacen $V \cap Y = \operatorname{int}_Y Q$, entonces $(V \cup Q) \cap Y = Q$. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{Q}$, existe $V \in \tau_X$ de modo que $V \cap Y = \operatorname{int}_Y Q$, de modo que $V \cup Q \in \mathcal{P}$ y $(V \cup Q) \cap Y = Q$. En resumen, $\mathcal{P} \restriction Y = \mathcal{Q}$.

Probemos ahora que $\mathcal{P}$ es una π^0-base para X. En primer lugar, si $V \in \tau_X$ y $Q \in \mathcal{Q}$ satisfacen $V \cap Y = \operatorname{int}_Y Q$, entonces $V \neq \emptyset$, pues $\operatorname{int}_Y Q \neq \emptyset$, y como $V \subseteq V \cup Q$, se concluye que todos los elementos de $\mathcal{P}$ tienen interior no vacío en X. Además, si $U \in \tau_X^*$, entonces $U \cap Y \in \tau_Y^*$, de modo que existe $Q \in \mathcal{Q}$ de forma que $Q \subseteq U \cap Y$. Fijemos $V_0 \in \tau_X^*$ tal que $V_0 \cap Y = \operatorname{int}_Y Q$. Definiendo $V = U \cap V_0$, se observa que $V \cup Q \subseteq U$. Además, $V \cap Y = U \cap \operatorname{int}_Y Q = \operatorname{int}_Y Q$, de modo que $V \cup Q \in \mathcal{P}$.

Cuando comenzamos con una π-base para Y, es decir, $\mathcal{Q} \subseteq \tau_Y$, se verifica que $\mathcal{P} \subseteq \tau_X$, es decir, obtenemos una π-base para X.

(2): Fijemos una sucesión de Oxtoby $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ en Y y, para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{P}_n$ una π^0-base en X tal que $\mathcal{P}_n \restriction Y = \mathcal{Q}_n$. De este modo, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ en X, entonces $\langle P_n \cap Y : n \in \omega \rangle$ es un nido asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ en Y. Luego, $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} (P_n \cap Y) \subseteq \bigcap_{n \in \omega} P_n$. Así, $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de Oxtoby en X.

Si Y es π^0-completo y X es casi-regular, el teorema 3.15 y lo que acabamos de probar implican que X es π^0-completo. Resta pues verificar que si, además, Y es π-completo, también lo es X.

Sea $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión que atestigua que Y es π-completo y, para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{P}_n$ una π-base en X tal que $\mathcal{P}_n \restriction Y = \mathcal{Q}_n$. De este modo, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ en X, entonces , para $n \in \omega$, $\operatorname{cl}_Y (Y \cap P_{n+1}) = Y \cap \operatorname{cl}_X P_{n+1} \subseteq Y \cap P_n$, es decir, $\langle Y \cap P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ en Y. Luego, $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} (Y \cap P_n) \subseteq \bigcap_{n \in \omega} P_n$. $\square$

Pasemos ahora a probar algunas consecuencias de importancia de lo hecho hasta aquí.

Proposición 3.26. *Si un espacio topológico X tiene una casi-cubierta abierta (es decir, una colección de abiertos cuya unión es densa en X) de subespacios Oxtoby, entonces X es Oxtoby. Cuando cada elemento de la casi-cubierta es π^0-completo (π-completo) y X es casi-regular, X es π^0-completo (π-completo).*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una casi-cubierta abierta para X de modo que cada $U \in \mathcal{U}$ es Oxtoby. Consideremos al conjunto

$$P := \{\mathcal{V} \subseteq \tau_X^* : \forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U}(V \subseteq U)\}$$

parcialmente ordenado con la contención. Usando el Lema de Zorn como es usual, podemos hallar un elemento de P, digamos, $\mathcal{V}$, que sea una familia ajena por pares y maximal con esta propiedad en P (note que $\emptyset$ es un elemento de $\mathcal{P}$ que es ajeno por pares).

Afirmamos que $\bigcup \mathcal{V}$ es denso en X. En efecto, si $W \in \tau_X^*$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V := U \cap W \neq \emptyset$, ya que $\mathcal{U}$ es casi-cubierta en X, de modo que, si $W \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$, entonces también $V \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$, o, en otras palabras, $V \notin \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \cup \{V\}$ es ajena por pares, y como $V \subseteq U$, $\mathcal{V} \cup \{V\} \in P$, contradiciendo así la maximalidad de $\mathcal{V}$. Luego, $W \cap \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset$, es decir, $\bigcup \mathcal{V}$ es denso en X, de modo que, gracias al inciso (2) del teorema anterior, habremos terminado la demostración de la primera parte del corolario si probamos que $Y := \bigcup \mathcal{V}$ es Oxtoby.

Observe que cada elemento de $\mathcal{V}$ es un abierto en Y, y como $\mathcal{V}$ es ajena por pares, Y es homeomorfo a $\bigoplus_{V \in \mathcal{V}} V$, que es Oxtoby por las proposiciones 3.24 y 3.23 (recordemos que, de la definición de P, cada elemento de $\mathcal{V}$ es un abierto en un espacio de Oxtoby, a saber, un elemento de $\mathcal{U}$).

Nótese que lo único que usamos en lo que va de la prueba es que las sumas topológicas, los subespacios abiertos y las extensiones de espacios de Oxtoby son a su vez espacios de Oxtoby. Las dos primeras propiedades son ciertas también reemplazando espacio de Oxtoby por espacio π^0-completo (o π-completo), y la tercera lo es añadiendo la hipótesis de que la extensión (que en este caso es X) sea casi-regular. Luego, los argumentos del párrafo anterior prueban también la segunda parte del corolario. $\square$

Obtenemos así el siguiente resultado.

Corolario 3.27. *Un espacio topológico X es localmente Oxtoby (esto es, cada punto de X tiene una vecindad que es de Oxtoby) si y sólo si es Oxtoby y similarmente con los espacios π-completos y π^0-completos cuando X es casi-regular.*

Ser de Oxtoby, π-completo o π^0-completo son propiedades topológicas que se heredan a abiertos, como vimos en la proposición 3.24. Los cerrados no son tan afortunados:

Ejemplo 3.28. *Consideremos la línea de Michael X, es decir, la recta real con la topología $\{U \cup P : U \in \tau_{\mathbb{R}} \wedge P \subseteq \mathbb{P}\}$, donde $\tau_{\mathbb{R}}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Este espacio contiene, como subespacio denso, a $\mathbb{P}$ con la topología discreta. Como todo espacio discreto es localmente compacto y Hausdorff, dicho subespacio es π-completo, y, en virtud del teorema 3.25 inciso (2), X lo es también (es casi regular porque cualquier abierto contiene al singulete de un irracional, que es un abierto y cerrado). En particular, es π^0-completo y Oxtoby. No obstante, contiene como subespacio cerrado al espacio usal de los racionales, $\mathbb{Q}$, que no es Oxtoby porque ni siquiera es de Baire ($\bigcap_{q \in \mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \setminus \{q\}) = \emptyset$ y cada intersectando es abierto y denso en $\mathbb{Q}$).*

Hemos visto que los espacios de nuestro interés (Oxtoby's, π^0-completos y π-completos) se comportan tan bien como podría desearse con el producto y la suma topológicos (proposiciones 3.20 y 3.23). Pasamos ahora a preguntarnos por su relación con la unión no necesariamente disjunta o en la cual no todos los uniendos son abiertos en el espacio total (como es el caso de la suma topológica). Para zanjar la cuestión, veremos un par de resultados previos:

Proposición 3.29. *Si X es un espacio topológico, entonces existen $X_O, X_N \in \tau_X$ tales que:*

1. *$X_O \cap X_N = \emptyset$ y $X_O \cup X_N$ es denso en X,*
2. *X_O es Oxtoby como subespacio de X y*
3. *cada subespacio Oxtoby de X_N es denso en ninguna parte en X_N y, por ende, en X.*

Si además X es casi-regular, lo mismo es cierto cambiando "Oxtoby" por "π-completo" o "π^0-completo" en todo el enunciado.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ la colección de subconjuntos abiertos de X que, como subespacios, son Oxtoby. Definiendo $X_O := \bigcup \mathcal{U}$ y $X_N := X \setminus \mathrm{cl}_X X_O$, podemos notar que, de la proposición 3.26, se tiene que X_O es abierto y Oxtoby, pues $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X_O que consiste de subespacios Oxtoby de X_O. Además, $X_N \cap X_O = \emptyset$ y

$$\mathrm{cl}_X(X_O \cup X_N) \supseteq \mathrm{cl}_X X_O \cup X_N = X.$$

Así pues, resta sólo verificar (3).

Sea Y un subespacio Oxtoby de X_N. Como Y es un denso en $\mathrm{cl}_{X_N} Y$ y $V := \mathrm{int}_{X_N} \mathrm{cl}_{X_N} Y \in \tau_{\mathrm{cl}_{X_N} Y}$, se tiene que $Y \cap V$ es denso en V. Por otro lado, como $X_N \in \tau_X$, $V \in \tau_{X_N} \subseteq \tau_X$, de modo que $Y \cap V \in \tau_Y$. Así, por la proposición 3.24, $Y \cap V$ es Oxtoby, por lo que, al ser denso en V y por el teorema 3.25, V es un abierto Oxtoby en X, es decir que $V \subseteq X_O$ y, por ende, $Y \cap V \subseteq X_O \cap X_N = \emptyset$. Como $Y \cap V$ es denso en V, $V = \emptyset$. Luego, Y es denso en ninguna parte en X_N.

Revisando el corolario, el teorema y la proposición en que nos basamos para nuestros argumentos anteriores, queda claro que, para probar que, en caso de ser X casi-regular, el teorema se mantiene cierto tras cambiar la palabra "Oxtoby" por "π-completo" o "π^0-completo", sólo hacer falta hacer notar en el párrafo anterior que V es casi-regular. Esto, en vista de la proposición 3.6, es sencillo, ya que $V \in \tau_X$.

Para terminar sólo resta notar que si $A \subseteq X_N$ es tal que $U := \mathrm{int}_X \mathrm{cl}_X A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq U \cap A \subseteq U \cap X_N \subseteq X_N \cap \mathrm{cl}_X A = \mathrm{cl}_{X_N} A$, de donde $\mathrm{int}_{X_N} \mathrm{cl}_{X_N} A \neq \emptyset$. En otras palabras, si $A \subseteq X_N$ es denso en ninguna parte en X_N entonces lo es también en X. $\square$

Diremos que un espacio topológico es *σ-Oxtoby* ($\sigma\pi^0$-completo, $\sigma\pi$-completo) si es la unión de una familia numerable de subespacios Oxtoby (π^0-completos, π-completos).

Corolario 3.30. *Para un espacio σ-Oxtoby ($\sigma\pi^0$-completo y casi-regular, $\sigma\pi$-completo y casi-regular) es equivalente ser Oxtoby (π^0-completo, π-completo) a ser Baire.*

Demostración. Sea X un espacio σ-Oxtoby y fijemos una familia $\{Y_n : n \in \omega\}$ de subespacios Oxtoby de X tal que $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ y un par de subespacios X_O y X_N que satisfagan las condiciones de la proposición anterior.

Ahora bien, para cada $n \in \omega$ se tiene que $Y_n \cap X_N$ es Oxtoby por ser un abierto en Y_n. Más aún, $Y_n \cap X_N$ también es denso en ninguna parte en X por ser un subespacio Oxtoby de X_N. Luego, $X_N = \bigcup_{n\in\omega}(Y_n \cap X_N)$ es un abierto magro en X.

Por lo anterior y en vista de la proposición 2.6, si X es de Baire entonces $X_N = \emptyset$, resultando así que X_O es un espacio Oxtoby denso en X, lo cual implica que X es Oxtoby (teorema 3.25). La otra implicación es parte de la proposición 3.17.

Nuevamente, los mismos argumentos prueban la parte faltante de la proposición. □

Corolario 3.31. *La unión finita (y casi-regular) de espacios Oxtoby (π^0-completos, π-completos) es un espacio Oxtoby (π^0-completo, π-completo).*

Demostración. Lo probaremos para dos uniendos, ya que iterando tal resultado se obtiene el caso general por inducción.

Sean X un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ subespacios Oxtoby tales que $A \cup B = X$. Como A es denso en $Y := \mathrm{cl}_X A$, Y es Oxtoby, y también lo es $Z := X \setminus Y$ ya que es un subespacio abierto en B.

En vista del corolario anterior, bastará con probar que X es de Baire. Tomemos pues una familia numerable $\mathcal{D}$ de densos abiertos en X y $U \in \tau_X^*$. Como Z es abierto en X, $\mathcal{D} \upharpoonright Z$ es una familia numerable de densos abiertos en Z, de modo que, al ser Z Oxtoby y por tanto de Baire, $\emptyset \neq (U \cap Z) \bigcap(\mathcal{D} \upharpoonright Z) \subseteq U \cap \bigcap \mathcal{D}$ siempre que $U \cap Z \neq \emptyset$.

En caso contrario, es decir, si $U \cap Z = \emptyset$, se tiene que $U \subseteq Y$. Por otro lado, Y es Oxtoby y por tanto de Baire, de modo que, al ser U un abierto no vacío en Y, U es de Baire. Como U es abierto en X, $\mathcal{D} \upharpoonright U$ es una familia de densos abiertos en U, de modo que $U \cap \bigcap(\mathcal{D} \upharpoonright U)$ es denso en U y por tanto no vacío.

Notemos que la prueba se apoya básicamente en el hecho de que Y y Z son de Baire, cosa que se mantiene cierta si A y B son π^0-completos (π-completos), ya que en tal caso A y B son nuevamente Oxtoby. Así, X es de Baire (por el argumento dado en los párrafos anteriores) y por tanto, si además es casi-regular, π^0-completo (π-completo). □

Por supuesto la unión infinita de espacios Oxtoby (π^0-completos, π-completos) no es necesariamente Oxtoby (π^0-completo. π-completo): el espacio casi-regular $\mathbb{Q}$ no es siquiera de Baire, aunque cada subespacio de la forma $\{q\}$ con $q \in \mathbb{Q}$ es π-completo y $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$.

Como era de esperarse, en el corolario anterior no podemos prescindir de la casi-regularidad cuando formulamos el enunciado para espacios π^0-completos o π-completos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.32. *Consideremos la extensión de Alexandroff $\alpha\mathbb{P}$ del espacio usual de los números irracionales (ver definición 1.6). $\mathbb{P}$, como subespacio de $\alpha\mathbb{P}$, tiene la misma topología que como subespacio de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{P} = \bigcap\{\mathbb{R} \setminus \{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$ es un G_δ en $\mathbb{R}$, es completamente metrizable (véase el teorema 1.22) y por tanto π-completo. Además, claramente también $\{\infty\}$ es π-completo.*

Por otro lado, $\alpha\mathbb{P}$ no es casi-regular (la prueba es una copia de la que hicimos para $\alpha\mathbb{Q}$ en el ejemplo 3.5).

Como se vio en las proposiciones 2.12 y 3.24, ser de Baire y ser Oxtoby (π^0-completo, π-completo) es una propiedad que se hereda a subespacios abiertos. Es natural preguntarnos entonces por otras propiedades compartidas por estas clases de espacios. Así, teniendo en cuenta las proposiciones 2.13, 2.14 y 2.15, surge la siguiente pregunta: ¿se puede decir lo mismo reemplazando a los espacios de Baire por los π-completos o los π^0-completos o los Oxtoby en dichas proposiciones, es decir, son las imágenes continuas y abiertas, las preimágenes cerradas e irreducibles y los subespacios densos G_δ de un espacio π-completo (π^0-completo, Oxtoby) necesariamente π-completos (π^0-completos, Oxtoby)?

La cuestión sobre los subespacios G_δ, que abordaremos en la sección 4.1, no ha sido todavía completamente contestada.

En cuanto a las preimágenes cerradas e irreducibles, la siguiente proposición responde afirmativamente para las tres clases de espacios.

Proposición 3.33. *Si X y Y son espacios topológicos, con Y de Oxtoby (π^0-completo, π-completo) y $f : X \to Y$ cerrada e irreducible, entonces X es de Oxtoby (π^0-completo, π-completo).*

Demostración. Sea $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión de Oxtoby para Y. Definamos ahora, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{Q}_n := f^{-1}\mathcal{P}_n$. El plan es probar que $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de Oxtoby para X.

Notemos en primer lugar que, para cualesquiera $n \in \omega$ y $P \in \mathcal{P}_n$, la continuidad y suprayectividad de f implican que $\emptyset \neq f^{-1}[\operatorname{int}_Y P] \subseteq \operatorname{int}_X f^{-1}[P]$. Ahora bien, si $U \in \tau_X^*$ entonces, como argumentamos en la prueba de la proposición 3.10, $V := Y \setminus f[X \setminus U] \in \tau_Y^*$, de modo que existe $P \in \mathcal{P}_n$ tal que $P \subseteq V$. Luego, $U \supseteq f^{-1}[V] \supseteq f^{-1}[P] \in \mathcal{Q}_n$, es decir que $\mathcal{Q}_n$ es una π^0-base para X.

Sea $\langle Q_n : n \in \omega \rangle$ un nido asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$. Entonces, para cada $n \in \omega$ existe $P_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $Q_n = f^{-1}[P_n]$. Como f es suprayectiva, $f[Q_n] = P_n$ para cada $n \in \omega$, de donde $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ que tiene por tanto intersección no vacía. De la suprayectividad de f se concluye que $\bigcap_{n \in \omega} Q_n = f^{-1}[\bigcap_{n \in \omega} P_n] \neq \emptyset$. Luego, X es Oxtoby

El hecho de que X es π^0-completo si Y lo es se infiere de lo anterior junto con el teorema 3.15 y la proposición 3.10.

Finalmente, notemos que si cada $\mathcal{P}_n$ es una π-base para Y, se obtiene, por la continuidad de f, que cada $\mathcal{Q}_n$ es una π-base para X. Además, si $\langle Q_n : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{Q}_n : n \in \omega \rangle$, fijando, para cada $n \in \omega$, $P_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $Q_n = f^{-1}[P_n]$, se obtiene como antes que $f[Q_n] = P_n$. Como f es cerrada, $\operatorname{cl}_Y P_{n+1} = \operatorname{cl}_Y f[Q_{n+1}] \subseteq f[\operatorname{cl}_X Q_{n+1}] \subseteq f[Q_n] = P_n$ para cada $n \in \omega$, es decir que $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$. Nuevamente, la suprayectividad de f garantiza que $\bigcap_{n \in \omega} Q_n = f^{-1}[\bigcap_{n \in \omega} P_n] \neq \emptyset$ $\square$

Respecto a la pregunta sobre las imágenes continuas y abiertas de espacios de Oxtoby (π^0-completos, π-completos), no existe aún una respuesta final. No obstante, en la siguiente sección mostraremos un primer y gran resultado en esta dirección.

3.4 Espacios π-completos metrizables

Como dijimos antes, no se sabe si la imágenes continuas y abiertas de un π-completo son siempre π-completas. No obstante, Aarts y Lutzer probaron en [1] que cuando el espacio sobre el que nos preguntamos es metrizable la respuesta es afirmativa.

Teorema 3.34. *Sean X un espacio π-completo, Y un espacio metrizable y $f : X \to Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Entonces Y contiene un subespacio denso, completamente metrizable y cero-dimensional. En particular, Y es π-completo.*

Este teorema será el resultado de una serie de cinco lemas que desarrollaremos en esta sección, a lo largo de los cuales usaremos la notación del teorema 3.34. Además, fijamos una sucesión $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ que atestigua que X es π-completo y una métrica d compatible con la topología de Y.

Lema 3.35. *Existe una sucesión $\langle \mathcal{P}'_n : n \in \omega \rangle$, tal que $\mathcal{P}'_n \subseteq \mathcal{P}_n$ para cada $n \in \omega$, que satisface:*

1. *Para cualesquiera $P, Q \in \mathcal{P}'_n$, si $P \neq Q$ entonces $f[P] \cap f[Q] = \emptyset$.*
2. *La unión de la colección $f``\mathcal{P}'_n$ (véase la definición 1.1) es densa en $Y$ y para cada $G \in f``\mathcal{P}'_n$, $\delta(G) \leqslant 2^{-n}$ (ver definición 1.23).*
3. *$\mathcal{P}'_{n+1}$ refina a $\mathcal{P}'_n$, es decir, para cada $Q \in \mathcal{P}'_{n+1}$ existe $P \in \mathcal{P}'_n$ tal que $Q \subseteq P$.*
4. *Cada vez que $P \in \mathcal{P}'_n$, $Q \in \mathcal{P}'_{n+1}$ y $f[Q] \subseteq f[P]$, se tiene que $\overline{Q} \subseteq P$.*

Demostración. Para obtener $\mathcal{P}'_0$, hagamos

$$\mathcal{P} := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_0 : \forall P, Q \in \mathcal{A}(\delta(f[P]) \leqslant 1 \wedge (P \neq Q \Rightarrow f[Q] \cap f[P] = \emptyset))\},$$

y notemos que $\mathcal{P}$ es una familia no vacía ya que $\emptyset$ es uno de sus elementos. De este modo, un argumento rutinario con el Lema de Zorn nos permite hallar un elemento maximal en $\mathcal{P}$, parcialmente ordenado con la contención, que llamaremos $\mathcal{P}'_0$. Verifiquemos que dicha elección funciona correctamente: en efecto, $\mathcal{P}'_0 \subseteq \mathcal{P}_0$ y, por definición de $\mathcal{P}$, se satisface (1). Supongamos, buscando una contradicción, que (2) no es cierto para $n = 0$. Entonces $Y \setminus \mathrm{cl}_Y \bigcup f``\mathcal{P}'_0 \in \tau_Y^*$, de modo que, por la continuidad y suprayectividad de $f$, $f^{-1}[Y \setminus \mathrm{cl}_Y \bigcup f``\mathcal{P}'_0] \in \tau_X^*$. Ahora bien, si x es un elemento de esta imagen inversa, por continuidad existe $U \in \tau_X^*$ tal que $x \in U$ y $f[U] \subseteq B(f(x), \frac{1}{2})$. Además, existe $P \in \mathcal{P}_0$ contenido en $U \cap f^{-1}[Y \setminus \mathrm{cl}_Y \bigcup f``\mathcal{P}'_0] \in \tau_X^*$, por lo que $\delta(f[P]) \leqslant 1$ y $f[P] \cap \bigcup f``\mathcal{P}'_0 = \emptyset$. Luego, $\mathcal{P}'_0 \cup \{P\} \in \mathcal{P}$, una contradicción a la maximalidad de $\mathcal{P}'_0$. Es claro que, por construcción,

$\delta(G) \leqslant 1$ para cada $G \in f``\mathcal{P}'_0$. Respecto a los incisos restantes, no hay nada que verificar de momento.

Supongamos ahora que, para algún $n \in \omega$, hemos definido exitosamente $\mathcal{P}'_n$. Entonces, para cada $P \in \mathcal{P}'_n$, notemos que $\mathcal{Q}^P_{n+1} := \{Q \in \mathcal{P}_{n+1} : \mathrm{cl}_X\, Q \subseteq P\}$ es una π-base para P, ya que éste es abierto en el espacio casi-regular X y $\mathcal{P}_{n+1}$ es una π-base para X. Además, $f \restriction P : P \to f[P]$ es continua, abierta y suprayectiva, de modo que, igual a como hicimos antes con X al definir $\mathcal{P}'_0$ (con la salvedad de que pondremos 2^{-n-1} en lugar de 1), podemos hallar un subconjunto $\mathcal{P}^P_{n+1}$ de $\mathcal{Q}^P_{n+1}$ tal que, siempre que $R, Q \in \mathcal{P}'_{n+1}$ con $R \neq Q$, se tiene que $f[R] \cap f[Q] = \emptyset$ y $\bigcup f``\mathcal{P}^P_{n+1}$ es denso en $f[P]$. Definimos entonces

$$\mathcal{P}'_{n+1} := \bigcup\{\mathcal{P}^P_{n+1} : P \in \mathcal{P}'_n\},$$

y veamos que (1)-(4) se satisfacen.

Para cada $P \in \mathcal{P}'_n$, $\mathcal{P}^P_{n+1} \subseteq \mathcal{Q}^P_{n+1} \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$, de modo que $\mathcal{P}'_{n+1} \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$. Además, si $R, Q \in \mathcal{P}'_{n+1}$, con $R \neq Q$, existen $P, P' \in \mathcal{P}'_n$ tales que $R \in \mathcal{P}^P_{n+1}$ y $Q \in \mathcal{P}^{P'}_{n+1}$; en particular $R \subseteq P$ y $Q \subseteq P'$. Hay dos posibilidades: si $P \neq P'$, entonces $f[R] \cap f[Q] \subseteq f[P] \cap f[P'] = \emptyset$, ya que $P, P' \in \mathcal{P}'_n$, que, por hipótesis, satisface (1). En caso contrario, es decir, si $P = P'$, entonces, por la forma en que elegimos a $\mathcal{P}^P_{n+1}$, $f[R] \cap f[Q] = \emptyset$. Así pues, (1) se satisface.

Veamos que también se da (2): por como $\mathcal{P}^P_{n+1}$ fue escogido, $\bigcup f``\mathcal{P}^P_{n+1}$ es denso en en $f[P]$ para cada $P \in \mathcal{P}'_n$, por lo que $\bigcup f``\mathcal{P}'_{n+1}$ es denso en $\bigcup f``\mathcal{P}'_n$, que, por hipótesis, es denso en $Y$. Luego, $\bigcup f``\mathcal{P}'_{n+1}$ es denso en Y. Por la elección de cada $\mathcal{P}^P_{n+1}$, el diámetro de cada elemento de $\mathcal{P}'_{n+1}$ no excede a 2^{-n-1}.

(3) también se satisface ya que si $Q \in \mathcal{P}'_{n+1}$, existe $P \in \mathcal{P}'_n$ tal que $Q \in \mathcal{P}^P_{n+1}$. En particular, $Q \subseteq P$.

Por último, (4) es cierto para n ya que, si $P \in \mathcal{P}'_n$ y $Q \in \mathcal{P}'_{n+1}$ satisfacen $f[Q] \subseteq f[P]$, entonces existe $P' \in \mathcal{P}'_n$ tal que $Q \in \mathcal{P}^{P'}_{n+1} \subseteq \mathcal{Q}^{P'}_{n+1}$ y por ende $\mathrm{cl}_X\, Q \subseteq P'$, por lo que $f[Q] \subseteq f[P] \cap f[P']$, lo cual implica en conjunción con (1) que $P = P'$. $\square$

Fijando una sucesión como la del lema anterior, definimos, para cada $n \in \omega$, $W_n := \bigcup f``\mathcal{P}'_n$ y $Z := \bigcap_{n\in\omega} W_n$. El plan es probar que Z es un subespacio de Y que satisface las condiciones del teorema 3.34. En adelante, para cada $i \in 5 \setminus 1$, (i) hará referencia al inciso de dicho número en el enunciado del lema anterior.

Lema 3.36. *Z es denso en Y.*

Demostración. Como X es π-completo, también es de Baire. Además, el hecho de que f es continua, abierta y suprayectiva implica, por la proposición 2.14, que Y es de Baire.

Observemos que para cada $n \in \omega$ se tiene, por (2), que W_n es denso en Y, y como $\mathcal{P}'_n \subseteq \mathcal{P}_n$ y f es abierta, W_n también es abierto en Y. Luego, $Z = \bigcap_{n\in\omega} W_n$ es denso en Y. □

Lema 3.37. *Z es cero-dimensional.*

Demostración. Verifiquemos que

$$\mathcal{B} := \left\{ f[P] \cap Z : P \in \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}'_n \right\}$$

es una base para Z que consiste de cerrabiertos en Z. Que $\mathcal{B} \subseteq \tau_Z$ es claro. Notemos que, dado $n \in \omega$, $Z \subseteq \bigcup f``\mathcal{P}'_n$, por lo que $Z = \bigcup\{f[P] \cap Z : P \in \mathcal{P}'_n\}$, y los uniendos involucrados en la última igualdad son, por (1), ajenos por pares y abiertos en Z; por ende también cerrados. Esto nos asegura que todos los elementos de $\mathcal{B}$ son cerrabiertos en Z.

Ahora, si $y \in Z$ y $r > 0$, existen $n \in \omega$ y $P \in \mathcal{P}'_n$ tales que $2^{-n} < r$ y $y \in f[P]$. Por (2), $f[P] \subseteq B(y, r)$, de donde $f[P] \cap Z \subseteq B(y, r) \cap Z$. Lo anterior se traduce en que $\mathcal{B}$ es base de Z. □

Observemos que para cada $z \in Z$ existe una sucesión $\langle P_n^z : n \in \omega \rangle$ tal que, para cualquier $n \in \omega$, $P_n^z \in \mathcal{P}'_n$ y $z \in \bigcap_{n\in\omega} f[P_n^z]$. Además dicha sucesión es única, ya que si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es tal que $P_n \in \mathcal{P}'_n$ para cada $n \in \omega$ y existe $m \in \omega$ tal que $P_m \neq P_m^z$, entonces, por (2), $f[P_m] \cap f[P_m^z] = \emptyset$. Por tanto, $z \notin f[P_m]$. De este modo, la función $g : Z \to \prod_{n\in\omega} \mathcal{P}'_n$ dada por

$$g(z) = \langle P_n^z : n \in \omega \rangle \text{ para cada } z \in Z$$

está bien definida.

Consideremos ahora el producto topológico $A := \prod_{n\in\omega} \mathcal{P}'_n$ que resulta de considerar a cada $\mathcal{P}'_n$ como un espacio discreto.

Lema 3.38. *g es un encaje y $g[Z]$ es cerrado en A.*

Demostración. Recordemos que los elementos de un producto cartesiano son funciones de elección, de modo que si $h \in A$, h es una función de ω en $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}'_n$ y para cada $n \in \omega$, $h(n) \in \mathcal{P}'_n$ es su n-ésima coordenada.

Para probar que $g[Z]$ es cerrado en A, empecemos por mostrar que, de hecho, $g[Z] = \{h \in A : \forall n \in \omega(h(n+1) \subseteq h(n))\}$. En efecto, si h es un elemento del conjunto de la derecha de la última igualdad, entonces, al definir $P_n = h(n)$ para cada $n \in \omega$, obtenemos una sucesión decreciente $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ de tal modo que $P_n \in \mathcal{P}'_n$ para cada $n \in \omega$, por lo que $f(P_{n+1}) \subseteq f(P_n)$ y, por (4), $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$. Luego, $\bigcap_{n\in\omega} P_n \neq \emptyset$ y, si x es un elemento de dicha intersección, entonces $f(x) \in \bigcap_{n\in\omega} f[P_n]$. Por definición de g, $g(f(x)) = \langle P_n : n \in \omega\rangle = h$. Esto nos da la contención de derecha a izquierda. Respecto a la otra, dado $z \in Z$ se tiene, por el inciso (3), que existe, para cada $n \in \omega$, $P_n \in \mathcal{P}'_n$ tal que $P^z_{n+1} \subseteq P_n$ y por ende $z \in f[P^z_{n+1}] \cap f[P^z_n] \subseteq f[P_n] \cap f[P^z_n]$, lo cual implica, junto con (2), que $P_n = P^z_n$. Así, $P^z_{n+1} \subseteq P^z_n$, lo cual concluye la contención faltante.

Ahora sí, sea $h \in A \setminus g[Z]$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $h(n+1) \nsubseteq h(n)$, de modo que para cualquier $h' \in [h \restriction (n+2)]$ se tiene que

$$h'(n+1) = h(n+1) \nsubseteq h(n) = h'(n),$$

es decir, $h' \in A \setminus g[Z]$. Por tanto, $h \in [h \restriction (n+2)] \subseteq A \setminus g[Z]$, es decir, $g[Z]$ es cerrado.

Probemos ahora que g es inyectiva: si $z \in Z$ entonces, dado que $z \in \bigcap_{n\in\omega} f[P^z_n]$ y, por (2), $\lim_{n\to\infty} \delta(f[P^z_n]) = 0$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} f[P^z_n] = \{z\}$, de modo tal que, si $y \in Z$ es tal que $g(z) = g(y)$, entonces $z = y$.

Para cualesquiera $m \in \omega$ y $s \in \prod_{n<m} \mathcal{P}'_n$, definimos $[s] := \{h \in A : s \subseteq h\}$, es decir, lo análogo a lo que ya hicimos justo antes del lema 2.19. Tal y como hicimos en dicho lema se

puede ver que

$$\mathcal{B}' := \bigcup_{m\in\omega\setminus\{0\}} \left\{[s] : s \in \prod_{n<m} \mathcal{P}'_n\right\}$$

es una base para A. Por otro lado, en la prueba del lema 3.37 vimos que $\mathcal{B}$, definida como entonces, es una base para Z. De esta forma, habremos terminado la prueba del presente lema si probamos que $g``\mathcal{B} = (\mathcal{B}' \restriction g[Z]) \setminus \{\emptyset\}$.

Dados $n \in \omega$ y $P_n \in \mathcal{P}'_n$, aplicando n veces el inciso (3) se puede hallar una sucesión decreciente $\langle P_i : i \leqslant n\rangle$ tal que $P_i \in \mathcal{P}'_i$ para cada $i < n$. Definimos $s := \langle P_i : i \leqslant n\rangle \in \prod_{i<n+1} \mathcal{P}'_i$. Probemos que $g[f[P_n] \cap Z] = [s] \cap g[Z]$: si $z \in f[P_n] \cap Z$, entonces, como $z \in f[P^z_n] \cap f[P_n] \subseteq f[P^z_i] \cap f[P_i]$ para cada $i \leqslant n$, se obtiene por (2) que $P_i = P^z_i$ para cada $i \leqslant n$, por lo que $g(z) \in [s] \cap g[Z]$. Luego, $g[f[P_n] \cap Z] \subseteq [s] \cap g[Z]$. Ahora bien, si $h = g(z) \in [s]$ con $z \in Z$, entonces $P^z_n = h(n) = s(n) = P_n$, de modo que $z \in f[P_n]$ y por ende $h \in g[f[P_n] \cap Z]$. Concluimos pues que $\emptyset \neq g[f[P_n] \cap Z] = [s] \cap g[Z]$. Todo lo anterior se resume en que $g``\mathcal{B} \subseteq (\mathcal{B}' \restriction g[Z]) \setminus \{\emptyset\}$.

Veamos ahora que si $n \in \omega \setminus \{0\}$ y $s \in \prod_{i<n} \mathcal{P}'_n$ es tal que $[s] \cap g[Z] \neq \emptyset$, entonces $[s] \cap g[Z] \in g``\mathcal{B}$. De hecho, fijando $h \in [s] \cap g[Z]$ vemos que, como se mostró arriba, $s(i+1) = h(i+1) \subseteq h(i) = s(i)$ para cada $i < |s| - 1$, por lo que, definiendo $P_i = s(i)$ para $i < |s|$, $s = \langle P_i : i \leqslant |s| - 1\rangle$, de modo que estamos en la misma situación del párrafo anterior, con $|s| - 1$ en el lugar de n. Así pues, lo explicado en el párrafo precedente nos permite concluir que $g[f[P_{|s|-1}] \cap Z] = [s] \cap g[Z]$, es decir, $[s] \cap g[Z] \in g``\mathcal{B}$. Finalmente concluimos, de los dos últimos párrafos, que $g``\mathcal{B} = (\mathcal{B}' \restriction g[Z]) \setminus \{\emptyset\}$, lo cual implica que g es un encaje. □

Como A es completamente metrizable (ver proposición 1.26), el lema anterior implica que $g[Z]$ es completamente metrizable (ver lema 1.21). Luego, también por el lema anterior, Z es completamente metrizable, lo cual concluye la primera parte del teorema 3.34. La segunda parte es consecuencia de la primera, de la proposición 3.18 y del teorema 3.25.

Como corolario del teorema 3.34 obtenemos la siguiente caracterización de los espacios metrizables π-completos, que se presta a comparación con el corolario 2.10.

Corolario 3.39. *Un espacio metrizable es π-completo si y sólo si contiene un subespacio* *denso y completamente metrizable, que puede ser escogido cero-dimensional.*

Demostración. Para la implicación directa, tómese $X = Y$ y f como la identidad en el teorema anterior. La otra implicación es consecuencia de la proposición 3.18 y del inciso (4) del teorema 3.25. $\square$

Con la ayuda del corolario anterior, puede probarse que todo conjunto de Bernstein de $\mathbb{R}$ (consultar [6, Ejercicio 5.5.4 (a)]) es un espacio de Baire metrizable pero no es π-completo. De este tipo de espacios ya teníamos un ejemplo que ni siquiera es Oxtoby (véase la proposición 3.22). La ventaja de los conjuntos de Berstein es que, por ser subespacios de $\mathbb{R}$, son espacios separables, mientras que el ejemplo anterior no lo es, puesto que, como se vio en la prueba del teorema 2.25, es denso en el espacio no separable ω_1^ω.

3.5 La relación Π

Con la definición de π^0-base entre manos, podemos definir una relación entre distintas topologías en un conjunto X, que denotaremos por Π y que será de utilidad más adelante:

Definición 3.40. Dado un conjunto X y dos topologías τ y σ en X, diremos que τ está Π-relacionada con σ (en símbolos, $\tau\Pi\sigma$) si $\tau^* := \tau \setminus \{\emptyset\}$ es una π^0-base para (X, σ).

Proposición 3.41. *Si X es un conjunto, la relación Π es de equivalencia en el conjunto de las topologías de X.*

Demostración. La reflexividad es inmediata. Veamos que Π es simétrica: si $\tau\Pi\sigma$ y $U \in \sigma^*$, entonces existe $V \in \tau^*$ tal que $V \subseteq U$, de donde $\operatorname{int}_\tau U \neq \emptyset$. Además, para cualquier $V \in \tau^*$, $\operatorname{int}_\sigma V \in \sigma^*$ y $\operatorname{int}_\sigma V \subseteq V$. En otras palabras, $\sigma\Pi\tau$.

Ahora, si $\tau\Pi\sigma$ y $\sigma\Pi\rho$, entonces, para cada $V \in \tau^*$, $\operatorname{int}_\sigma V \in \sigma^*$, de modo que $\operatorname{int}_\rho \operatorname{int}_\sigma V \in \rho^*$, así que este último es un ρ-abierto no vacío contenido en V. Luego, $\operatorname{int}_\rho V \neq \emptyset$. Además, si $U \in \rho^*$ entonces existe $U' \in \sigma^*$ tal que $U' \subseteq U$, de modo que existe $V \in \tau^*$ con $V \subseteq U' \subseteq U$. Luego, $\tau\Pi\rho$. $\square$

De ahora en adelante, diremos que dos topologías son Π-equivalentes en lugar de decir que están Π-relacionadas.

Una primer muestra de la importancia de la relación recién definida es la siguiente.

Proposición 3.42. *Si* (X,τ) *es un espacio de Baire y* $\tau\Pi\sigma$*, entonces* (X,σ) *es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en (X,σ). Probaremos primero que $\operatorname{int}_\tau U_n$ es denso en (X,τ) para cada $n \in \omega$. Para esto, fijamos $n \in \omega$ y $V \in \tau^*$, con lo que $\operatorname{int}_\sigma V \in \sigma^*$, y en consecuencia $U_n \cap \operatorname{int}_\sigma V \in \sigma^*$. Así, $\emptyset \neq \operatorname{int}_\tau(U_n \cap \operatorname{int}_\sigma V) = (\operatorname{int}_\tau U_n) \cap (\operatorname{int}_\tau \operatorname{int}_\sigma V) \subseteq (\operatorname{int}_\tau U_n) \cap V$.

Ahora, del párrafo anterior se obtiene que $D := \bigcap_{n\in\omega} \operatorname{int}_\tau U_n$ es denso en (X,τ). Como $D \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n$, habremos terminado si mostramos que D es denso en (X,σ). Esto es claro, ya que D intersecta a todos los miembros de τ^*, una π^0-base de (X,σ). $\square$

También tenemos un resultado sencillo pero agradable a la luz del teorema 3.15:

Proposición 3.43. *Si* τ *y* σ *son topologías en un conjunto* X *y* $\tau\Pi\sigma$*, entonces:*

1. *toda* π^0*-base de* (X,τ) *es* π^0*-base para* (X,σ)*, y*
2. *si* (X,τ) *es un espacio de Oxtoby, lo es también* (X,σ)*.*

Demostración. El primer inciso es directo de la definición de Π y el segundo es consecuencia del primero. $\square$

De la proposición y del teorema 3.15 tenemos lo siguiente:

Corolario 3.44. *Si* (X,τ) *es un espacio topológico* π^0*-completo y* σ *es una topología en* X *con* $\tau\Pi\sigma$*, entonces* (X,σ) *es* π^0*-completo si y sólo si es casi-regular.*

Formulado de otra manera:

Corolario 3.45. *Si* (X,τ) *y* (X,σ) *son espacios casi-regulares con* $\tau\Pi\sigma$*, entonces uno es* π^0*-completo si y sólo si el otro lo es.*

Ejemplo 3.46. *La recta de Sorgenfrey, que denotaremos por* $\mathbb{S}$*, es el espacio que resulta de equipar al conjunto de los números reales con la topología que tiene por base a la colección* $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$*. Esta topología está* Π*-relacionada con la del espacio usual de los reales.*

Notemos que, para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$ *y* $c \in [a,b)$ *se tiene que* $\operatorname{cl}_{\mathbb{S}}[a,b) = [a,b)$*, por lo que* $\mathbb{S}$ *es regular y por tanto casi-regular. Así,* $\mathbb{S}$ *es un espacio* π^0*-completo.*

Aunque la anterior es una manera muy cómoda de probar que $\mathbb{S}$ es π^0-completo, un poco de esfuerzo adicional nos permite llegar a una conclusión más fuerte:

Ejemplo 3.47. *La recta de Sorgenfrey es un espacio π-completo. En efecto, ya vimos que $\mathbb{S}$ es casi-regular. Ahora definamos, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{P}_{2n} := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$ y $\mathcal{P}_{2n+1} := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{P} \wedge a < b\}$. Por supuesto, $\mathcal{P}_n \subseteq \tau^*_{\mathbb{S}}$ para cada $n \in \omega$. Además, dado $n \in \omega$, la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ en $\mathbb{R}$ nos garantiza que, para cada $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe $c,d \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$ y $e,f \in \mathbb{P} \cap (a,b)$ tales que $c < d$ y $e < f$, de donde $[a,b) \supseteq [c,d) \in \mathcal{P}_{2n}$ y $[a,b) \supseteq [e,f) \in \mathcal{P}_{2n+1}$. Así, $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de π-bases para $\mathbb{S}$.*

Sea $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$. Entonces, para cada $n \in \omega$ existen $c_n, d_n \in \mathbb{Q}$ y $e_n, f_n \in \mathbb{P}$ con $c_n < d_n$, $e_n < f_n$, $P_{2n} = [c_n, d_n)$ y $P_{2n+1} = [e_n, f_n)$. Así, para cada $n \in \omega$, $[c_{n+1}, d_{n+1}) \subseteq [e_n, f_n) \subseteq [c_n, d_n)$, por lo que $d_{n+1} \leqslant f_n \leqslant d_n$. Como $d_n, d_{n+1} \in \mathbb{Q}$ y $f_n \in \mathbb{P}$, se obtiene que $d_{n+1} < f_n < d_n$, de donde $P_{2n+2} \subseteq [c_{n+1}, d_{n+1}] \subseteq [e_n, f_n] \subseteq P_{2n} \subseteq [c_n, d_n]$. Así, $\langle [c_n, d_n] : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de compactos anidados en $\mathbb{R}$, por lo que $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} [c_n, d_n] = \bigcap_{n\in\omega} P_{2n} = \bigcap_{n\in\omega} P_n$. Luego, $\mathbb{S}$ es π-completo.

Más adelante (en el ejemplo 4.1) veremos que, de hecho, todo subespacio G_δ de la recta de Sorgenfrey es π^0-completo.

El ejemplo que viene muestra que el corolario anterior es lo mejor que se puede hacer en esa dirección, es decir, que la casi-regularidad no se preserva bajo la relación Π.

Ejemplo 3.48. *Sean $X = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ con $\infty \notin \mathbb{Q}$, τ la topología de la extensión de Alexandroff $\alpha\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ definida en 1.6, y σ la topología que hereda X como subespacio de $\alpha\mathbb{R}$, la extensión de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es localmente compacto, $\alpha\mathbb{R}$ es compacto y Hausdorff (véase 1.9), por tanto regular. De modo que (X, σ) es regular y en particular casi-regular. Además, todo τ-abierto en X contiene un conjunto de la forma $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a,b \in \mathbb{R}$, que es σ-abierto y también τ-abierto, por lo que $\tau \Pi \sigma$. Finalmente, el ejemplo 3.5 nos garantiza que (X, τ) no es casi-regular.*

La siguiente proposición nos da una idea de cuán "parecidas" deben ser dos topologías para ser Π-equivalentes.

Proposición 3.49. *Si τ y σ son topologías en un conjunto X y $\tau\Pi\sigma$, entonces, para cada $A \subseteq X$,*

$$\operatorname{int}_\sigma A \subseteq \operatorname{cl}_\sigma \operatorname{int}_\tau A \text{ y } \operatorname{int}_\sigma \operatorname{cl}_\tau A \subseteq \operatorname{cl}_\sigma A.$$

Demostración. Sean $x \in \operatorname{int}_\sigma A$ y $U \in \sigma$ tales que $x \in U$. Entonces $x \in U \cap \operatorname{int}_\sigma A \in \sigma^*$. Como $\tau\Pi\sigma$,

$$\emptyset \neq \operatorname{int}_\tau(U \cap \operatorname{int}_\sigma A) \subseteq U \cap \operatorname{int}_\tau A,$$

y dado que U fue un σ-abierto arbitrario, $x \in \operatorname{cl}_\sigma \operatorname{int}_\tau A$, lo cual prueba la primera parte de la proposición.

Para concluir, notemos que, de lo probado en el párrafo anterior,

$$X \setminus \operatorname{cl}_\sigma A = \operatorname{int}_\sigma(X \setminus A) \subseteq \operatorname{cl}_\sigma \operatorname{int}_\tau(X \setminus A) = X \setminus \operatorname{int}_\sigma \operatorname{cl}_\tau A.$$

Tomando complementos se cierra el argumento. □

Dados un conjunto X, un espacio topológico Y y una función $f : X \to Y$, es fácil verificar que $f^{-1}\tau_Y$ es una topología en X y es además la más pequeña que hace continua a f. A esta topología se le conoce como la *topología débil inducida por f y τ_Y*.

Proposición 3.50. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva tal que $(f^{-1}\tau_Y)\Pi\tau_X$. Si Y es casi-regular, entonces X es casi-regular.*

Demostración. Sea $U \in \tau_X^*$. Existe entonces $V \in \tau_Y^*$ tal que $f^{-1}[V] \subseteq U$, y por ende existe también $W \in \tau_Y^*$ tal que $\operatorname{cl}_Y W \subseteq V$. Como f es continua, $f^{-1}[W] \in \tau_X^*$ y

$$\operatorname{cl}_X f^{-1}[W] \subseteq f^{-1}[\operatorname{cl}_Y W] \subseteq f^{-1}[V] \subseteq U,$$

es decir, X es casi-regular. □

Proposición 3.51. *Sean τ y σ topologías en un conjunto X, con $\tau \subseteq \sigma$ y tales que $\tau\Pi\sigma$. Si (X, τ) es casi-regular, entonces (X, σ) es casi-regular. Si además (X, σ) es π^0-completo entonces (X, τ) también lo es.*

Demostración. La primer parte es corolario de la proposición anterior, poniendo f como la identidad de (X, σ) en (X, τ).

La segunda parte de la proposición es consecuencia del teorema 3.15 y la proposición 3.43. $\square$

Corolario 3.52. *Si X es un espacio π^0-completo, Y es casi-regular y $f : X \to Y$ es una condensación (esto es, una función continua y biyectiva) de modo tal que $f``\tau_X^*$ es una π^0-base para Y, entonces Y es π^0-completo.*

Demostración. Como f es continua, $\tau := f^{-1}\tau_Y$ es una topología en X contenida en τ_X, la topología original del dominio.

Como f es suprayectiva, tenemos que $f[f^{-1}[V]] = V$ para cada $V \in \tau_Y$, es decir que $f : (X, \tau) \to Y$ es abierta. Como además es claramente continua y por hipótesis es inyectiva, es un homeomorfismo de (X, τ) en Y, así que bastará ver que (X, τ) es π^0-completo para finalizar la prueba.

Dado que (X, τ_X) es π^0-completo por hipótesis, que $\tau \subseteq \tau_X$ y que (X, τ) es casi-regular (por ser homeomorfo a Y), nos será suficiente con probar que $\tau \Pi \tau_X$ para, con la ayuda de la proposición anterior, concluir que (X, τ) es π^0-completo.

Como $\tau \subseteq \tau_X$, $\operatorname{int}_{\tau_X} V \neq \emptyset$ para cada $V \in \tau$.

Ahora bien, como $f``\tau_X^*$ es π^0-base para Y, se tiene que, para cada $U \in \tau_X$, $U' := \operatorname{int}_Y f[U] \neq \emptyset$, de modo que, al ser f biyectiva, $U \supseteq f^{-1}[U'] \in \tau^*$. Así, $\tau \Pi \tau_X$. $\square$

CAPÍTULO 4: DENSOS G_δ, EXTENSIONES Y PRODUCTOS

El presente capítulo se dividirá en las tres secciones que se adivinan ya en el título del mismo más una extra, a lo largo de las cuales estudiaremos algunos de los más interesantes problemas que han surgido a lo largo de este trabajo.

En la primera sección nos abocaremos a indagar en la cuestión ya planteada al final de la sección 3.3: ¿son π-completos (π^0-completos, de Oxtoby) los subespacios densos G_δ de un espacio π-completo (π^0-completo, Oxtoby)? Como ya anticipamos entonces, esta pregunta no ha sido completamente contestada. No obstante y como se verá en breve, la respuesta es afirmativa en clases de espacios de gran importancia, como los metrizables (corolario 4.4), los localmente compactos casi-regulares (corolario 4.14) y los productos de espacios completamente metrizables (teorema 4.6).

En la segunda sección probaremos que todo espacio topológico (casi-regular) tiene una extensión que es un espacio de Oxtoby (π-completo) (teorema 4.18).

Como se vio en el ejemplo 3.5, las extensiones de un espacio casi-regular no son, en general, espacios casi-regulares. El corolario 4.21 nos provee de condiciones suficientes para que cierto tipo de extensiones de espacios casi-regulares sean a su vez casi-regulares. Caracterizaremos además, a partir de dicho corolario, a aquellos espacios casi-regulares cuya extensión de Alexandroff es casi-regular, mostrando que ello equivale además a que dicha extensión sea π-completa (teorema 4.23).

Considerando los resultados obtenidos en la sección 2.4, en la tercera sección se darán condiciones razonables para que el producto de dos espacios de Baire sea de Baire. Concretamente se probarán dos resultados de gran importancia, a saber, que el producto de un espacio de Baire casi-regular y un espacio π-completo resulta un espacio de Baire (teorema 4.29), y que el producto de dos espacios de Baire, uno de los cuales posee una π-base localmente numerable, es un espacio de Baire (teorema 4.30).

Finalmente, introduciremos en la cuarta y última sección los espacios Čech-completos, que constituyen una sólida candidatura para (casi) responder al problema de Unificación, con la ventaja adicional de que, siendo una subclase de la clase de los espacios π-completos, la clase de los espacios Čech-completos es cerrada bajo subespacios G_δ (proposición 4.36).

4.1 Densos G_δ

Como ya hemos dicho al inicio del capítulo, en esta sección nos enfocaremos en encontrar clases significativas de espacios π-completos (π^0-completos, de Oxtoby) tales que sus subespacios densos G_δ sean π-completos (π^0-completos, de Oxtoby).

Comencemos con un ejemplo, que mostrará que algunos espacios π-completos satifacen la propiedad deseada e incluso más:

Ejemplo 4.1. *Todo subespacio G_δ (no necesariamente denso) de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ (ejemplo 3.46), es π^0-completo.*

Sean $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_{\mathbb{S}}$ y $A := \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Definamos, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{P}_n$ mediante la siguiente fórmula: $P \in \mathcal{P}_n$ si y sólo se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. *Existen $a, b \in A$ tales que $a < b$, $[a, b] \subseteq U_n$ y $P = A \cap [a, b]$.*

2. *Existe $c \in A$ tal que $P = \{c\} \in \tau_A$.*

Por supuesto, si n, P, a y b son como en la primer condición, entonces $a \in [a, b) \cap A \subseteq \operatorname{int}_A P$ y, si P y c son como en el segundo caso, entonces $P \in \tau_A^*$, es decir que los elementos de cada $\mathcal{P}_n$ tienen interior no vacío en A. Además, dados $n \in \omega$ y $U \in \tau_{\mathbb{S}}$ tales que $U \cap A \in \tau_A^*$, podemos fijar $x \in U \cap A$. Como $A \subseteq U_n$, se tiene que $x \in U \cap U_n \in \tau_{\mathbb{S}}^*$, por lo que existen $e, f \in \mathbb{R}$ tales que $x \in [e, f) \subseteq U \cap U_n$, de donde $x \in A \cap [e, f) \subseteq U \cap A$. Definamos $P \in \mathcal{P}_n$ de la siguiente manera: si $|A \cap [e, f)| = 1$, $P := \{c\}$, donde $A \cap [e, f) = \{c\}$, y en caso contrario, fijamos $a, b \in A \cap [e, f)$ tales que $a < b$ y definimos $P := [a, b] \cap A$. Nótese que el hecho de que $a, b \in [e, f)$ implica que $[a, b] \subseteq [e, f) \subseteq U_n \cap U$. En cualquier caso se verifica que $P \in \mathcal{P}_n$ y $P \subseteq U \cap A$. En resumen, cada $\mathcal{P}_n$ es una π^0-base para A.

Finalmente, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$, entonces tenemos dos casos: si existe $k \in \omega$ tal que $|P_k| = 1$, entonces, como $\emptyset \neq P_m \subseteq P_k$ si $m > k$, se concluye que $P_m = P_k$ para cada $m > k$ y por tanto $\emptyset \neq P_k = \bigcap_{n\in\omega} P_n$. En caso contrario se tiene que, para cada $n \in \omega$ existen $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_n < b_n$ y $P_n = A \cap [a_n, b_n] \subseteq U_n$. Como

$a_n \in P_n = \bigcap_{i \leqslant n} P_i \subseteq \bigcap_{i \leqslant n} [a_i, b_i]$, $\{[a_n, b_n] : n \in \omega\}$ es una familia de compactos en $\mathbb{R}$ con la propiedad de la intersección finita, lo cual garantiza que $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} [a_n, b_n] \subseteq \bigcap_{n \in \omega} U_n = A$, de donde $\bigcap_{n \in \omega} P_n \neq \emptyset$. Luego, A es Oxtoby.

Como vimos en el ejemplo 3.46, $\mathbb{S}$ es regular, por lo que A también lo es. El teorema 3.15 muestra que A es π^0-completo.

4.1.1 Espacios metrizables y productos

Del teorema 3.25 sabemos que basta con que un espacio topológico (casi-regular) contenga un subespacio denso y Oxtoby (π-completo, π^0-completo) para poder asegurar que él mismo es Oxtoby (π-completo, π^0-completo). Cuando dicho subespacio es hereditariamente Oxtoby (π^0-completos, π-completos) respecto a densos G_δ, se concluye que el espacio original satisface lo mismo, como se ve el siguiente teorema, recientemente publicado por R. Pichardo en [14].

Teorema 4.2. *Sean X es un espacio topológico (casi-regular) y Z un subespacio denso de X. Si todos los subespacios densos G_δ de Z son Oxtoby (π^0-completos, π-completos), entonces todos los subespacios densos G_δ de X son Oxtoby (π^0-completos, π-completos).*

Demostración. Sean Y es un denso G_δ en X y $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de densos abiertos en X cuya intersección es Y. Para cada $n \in \omega$, dado que Z es denso en X, $Z \cap U_n$ es denso en U_n y por tanto en X. Luego, $Z \cap U_n$ es denso y abierto en Z para cada $n \in \omega$. Como Z, al ser un denso G_δ en sí mismo, es Oxtoby y por tanto de Baire, $Z \cap Y = \bigcap_{n \in \omega}(Z \cap U_n)$ es un denso G_δ en Z y, por lo tanto, es Oxtoby. Como Z es denso en X y $Z \cap Y$ lo es en Z, concluimos que $Z \cap Y$ es denso en X y por ende también en Y. Del teorema 3.25 se deduce que Y es Oxtoby.

Si X es casi-regular, obtenemos de la proposición 3.4 que Y es casi-regular y, por el teorema 3.15, π^0-completo.

Cuando además cada subespacio denso G_δ de Z es π-completo, los mismos argumentos prueban que Y es π-completo. $\square$

Del teorema anterior, junto con el corolario 3.39, se desprende el siguiente importante corolario:

Corolario 4.3. *Sea X un espacio topológico (casi-regular) que contiene un subespacio denso y completamente metrizable. Entonces, todos los subespacios densos G_δ de X son Oxtoby (π-completos).*

Demostración. Si Z es un subespacio denso y completamente metrizable entonces, por el teorema 1.22 y la proposición 3.18, todo subespacio denso G_δ de Z es π-completo. □

El corolario anterior, junto con el corolario 3.39, nos brindan un resultado notable.

Corolario 4.4. *Todos los subespacios densos G_δ de un espacio metrizable y π-completo son a su vez π-completos.*

La proposición 1.26 dice que el producto numerable de espacios completamente metrizables es completamente metrizable, lo cual junto con el teorema 1.22 y la proposición 3.18 implica que todos los subespacios G_δ de un producto de este tipo son π-completos. Este razonamiento no puede extenderse a productos arbitrarios de espacios completamente metrizables:

Proposición 4.5. *Sean $\kappa > \omega$ un cardinal y $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos de tal manera que $|X_\alpha| > 1$ para cada $\alpha < \kappa$. Entonces, $X := \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ no es metrizable.*

Demostración. Como el lector puede consultar en [6, Ejercicio 2.3.E(b)], X no es hereditariamente normal. Así, en vista de los comentarios posteriores a la definición 1.17, se obtiene que X no es metrizable. □

Por otro lado, sabemos, por las proposiciones 3.18 y 3.20, que los productos de espacios completamente metrizables son π-completos, lo cual justifica que incluyamos estos espacios en la presente sección por medio del siguiente resultado, tomado de [14].

Teorema 4.6. *Sean κ un cardinal, $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una familia de espacios completamente metrizables y $X := \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ su producto topológico. Si Y es un subespacio denso G_δ de X, entonces Y es π-completo.*

Demostración. En primer lugar, fijemos una familia $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_X$ tal que $Y = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ y, para cada $\alpha \in \kappa$, una métrica completa d_α compatible con la topología de X_α.

Para cada $\alpha \in \kappa$, denotemos por π_α a la proyección natural de X en X_α. Abreviemos, para cada $x \in X_\alpha$ y $r \in \mathbb{R}$, $B_\alpha(x, r) := B_{d_\alpha}(x, r)$.

Definamos $\mathcal{P} := \{x \restriction F : x \in X \wedge F \in [\kappa]^{<\omega}\}$ y, para cada $p \in \mathcal{P}$ y $m \in \omega$, $[p; m] := \bigcap_{\alpha \in \operatorname{dom} p} \pi_\alpha^{-1}[B_\alpha(p(\alpha), 2^{-m})]$. Resulta claro entonces que $\{[p; m] : p \in \mathcal{P} \wedge m \in \omega\}$ es una base para X.

Definamos ahora, para cada $n \in \omega$,

$$\mathcal{P}_n := \{Y \cap [p; m] : p \in \mathcal{P} \wedge m \in \omega \setminus n \wedge \operatorname{cl}_X[p; m] \subseteq U_n\}.$$

Para cualesquiera $q \in \mathcal{P}$ y $k, n \in \omega$, el hecho de que U_n es denso implica que $[q; k] \cap U_n \in \tau_X^*$. Como X es casi-regular y por el comentario final del tercer párrafo de la prueba, existen $p \in \mathcal{P}$ y $l \in \omega$ tales que $\operatorname{cl}_X[p; l] \subseteq [q; k] \cap U_n$, por lo que, definiendo $m := n + l$, se obtiene que $m \in \omega \setminus n$, $[p; m] \subseteq [p; l] \subseteq [q; k]$ y $\operatorname{cl}_X[p; m] \subseteq U_n$; así, $P := Y \cap [p; m]$ satisface que $P \subseteq Y \cap [q; k]$ y $P \in \mathcal{P}_n$. Además, el hecho de que Y es denso en X implica que $\mathcal{P}_n \subseteq \tau_Y^*$. En resumen, $\mathcal{P}_n$ es una π-base para X.

Sea $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$. Para cada $n \in \omega$, existen $p_n \in \mathcal{P}$ y $m_n \in \omega \setminus n$ tales que $\operatorname{cl}_X[p_n; m_n] \subseteq U_n$ y $P_n = Y \cap [p_n; m_n]$. Para cada $n \in \omega$ se tiene, dado que Y es denso en X y $[p_n; m_n] \in \tau_X$, que

$$\operatorname{cl}_Y P_n = Y \cap \operatorname{cl}_X P_n = Y \cap \operatorname{cl}_X(Y \cap [p_n; m_n]) = Y \cap \operatorname{cl}_X[p_n; m_n]. \tag{$*$}$$

Para cualesquiera $n \in \omega$ y $\alpha \in \operatorname{dom} p_n$, abreviemos aún más y escribamos $B_\alpha^n := B_\alpha(p_n(\alpha), 2^{-m_n})$. También, definamos $a_\alpha := \{i \in \omega : \alpha \in \operatorname{dom} p_i\}$. Tenemos, por el lema 1.14, que

$$\operatorname{cl}_X[p_n; m_n] = \bigcap\{\pi_\alpha^{-1}[\operatorname{cl}_{X_\alpha} B_\alpha^n] : \alpha \in \operatorname{dom} p_n\}. \tag{$\star$}$$

Afirmación. Para cualquier $\alpha \in A := \bigcup_{n \in \omega} \operatorname{dom} p_n$, existe $z_\alpha \in \bigcap\{\operatorname{cl}_{X_\alpha}(B_\alpha^n) : n \in a_\alpha\}$.

Fijemos, para cada $n \in \omega$, $x_n \in P_n$ y sea $\alpha \in A$. Si $k, l \in a_\alpha$ son tales que $k < l$, entonces, $x_k, x_l \in P_k \subseteq \operatorname{cl}_X[p_k; m_k]$ y, por ($\star$) y la desigualdad $k \leqslant m_k$,

$$\max\{d_\alpha(p_k(\alpha), x_k(\alpha)), d_\alpha(p_k(\alpha), x_l(\alpha))\} \leqslant 2^{-m_k} \leqslant 2^{-k}$$

y por ende $d_\alpha(x_l(\alpha), x_k(\alpha)) \leqslant 2 \cdot 2^{-k} = 2^{-k+1}$.

Dividamos el argumento en dos casos: si a_α es infinito, entonces la última desigualdad implica que $\langle x_n(\alpha) : n \in a_\alpha \rangle$ es una sucesión de Cauchy en (X_α, d_α) y por lo tanto converge a algún punto $z_\alpha \in X_\alpha$. Por otra parte, notemos que para cualesquiera $n \in a_\alpha$ y $i \in a_\alpha \setminus n$ se tiene que $x_i \in P_n$ y por tanto $x_i(\alpha) \in B_\alpha^n$, es decir, $\{x_i(\alpha) : i \in a_\alpha \setminus n\} \subseteq B_\alpha^n$, por lo que $z_\alpha \in \operatorname{cl}_{X_\alpha} B_\alpha^n$, para cada $n \in a_\alpha$, tal como dice la afirmación.

En otro caso, es decir, si a_α es finito, definamos $k := \max a_\alpha$. Así, para cada $n \in a_\alpha$ se verifica que $x_k \in P_n$, por lo que para concluir la prueba de la afirmación bastará con proponer $z_\alpha := x_k(\alpha) \in B_\alpha^n$.

Definamos ahora $z := \langle z_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$, donde z_α es un punto arbitrario de X_α para cada $\alpha \in \kappa \setminus A$.

Note ahora que, para cualquier $n \in \omega$, si $\alpha \in \operatorname{dom} p_n$ entonces $n \in a_\alpha$ y por tanto $\pi_\alpha(z) = z_\alpha \in \operatorname{cl}_{X_\alpha} B_\alpha^n$. De este modo, por $(\star)$, $z \in \operatorname{cl}_X[p_n; m_n] \subseteq U_n$. Así, $z \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = Y$ y, por $(*)$, $z \in Y \cap \operatorname{cl}_X[p_{n+1}; m_{n+1}] = \operatorname{cl}_Y P_{n+1} \subseteq P_n$ para cada $n \in \omega$. Luego, $z \in \bigcap_{n\in\omega} P_n$.

$\square$

4.1.2 Espacios tenuemente compactos

Comencemos esta subsección con un par de definiciones: un espacio topológico es *tenuemente compacto* si toda colección localmente finita de abiertos en X es finita, y diremos que X es *numerablemente compacto* si toda cubierta abierta numerable de X contiene una subcubierta finita.

Vale la pena mencionar que "tenuemente compacto" es nuestra traducción del término en inglés "feebly compact".

La compacidad tenue y la compacidad numerable pertenecen al grupo de propiedades topológicas estrechamente ligadas a la compacidad que tanto interés han despertado en la comunidad matemática desde el siglo pasado, tales como la compacidad local y la pseudocompacidad (véase [6, Sección 3.10]). De hecho, tal y como se prueba en el teorema 3.10.22 de la sección recién citada, los espacios pseudocompactos son precisamente los espacios de Tychonoff que son tenuemente compactos.

Proposición 4.7. *Todo espacio numerablemente compacto es tenuemente compacto.*

Demostración. Argumentando por contrapuesta, sea X un espacio topológico no tenuemente compacto. Existe entonces una familia $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_X^*$ localmente finita y tal que para cualesquiera $n, m \in \omega$, $n \neq m$ implica $U_n \neq U_m$.

Probaremos que, para cada $n \in \omega$, $F_n := \bigcup\{\overline{U_m} : n < m < \omega\}$ es cerrado en X. En efecto, si $x \in X \setminus F_n$, fijemos $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $|\{m \in \omega : U \cap U_m \neq \emptyset\}| < \omega$. Note que, como $U \in \tau_X$, para cada $m \in \omega$ se tiene que $U \cap \overline{U_m} \neq \emptyset$ implica que $U \cap U_m \neq \emptyset$, por lo que $|\{m \in \omega : U \cap \overline{U_m} \neq \emptyset\}| < \omega$. Luego, $F := \bigcup\{\overline{U_m} : n < m < \omega \wedge U \cap \overline{U_m} \neq \emptyset\}$ es cerrado en X. Como $F \subseteq F_n$, se sigue que $x \in U \setminus F \in \tau_X$. Además, $U \cap F_n \subseteq F$, por lo que $U \setminus F \subseteq X \setminus F_n$, es decir que F_n es cerrado en X.

Verifiquemos ahora que $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$. Para cada $x \in X$, existe U tal como en el párrafo anterior. De este modo, podemos definir el número $k := \max\{m \in \omega : U \cap \overline{U_m} \neq \emptyset\} \in \omega$, resultando así que $x \in U \subseteq X \setminus F_k$, de donde $x \notin F_k$ y por ende $x \notin \bigcap_{n\in\omega} F_n$.

Por otra parte, para cada $n \in \omega$ se tiene que $\bigcap_{m \leqslant n} F_m = F_n \neq \emptyset$.

Todo lo anterior implica que $\{X \setminus F_n : n \in \omega\}$ es una cubierta abierta numerable de X que no contiene subcubiertas finitas, de donde se concluye que X no es numerablemente compacto. □

La relación de equivalencia que estudiamos en la sección 3.5 nos permitirá probar que los espacios topológicos π^0-completos que poseen una π^0-base consistente de subespacios tenuemente compactos heredan la π^0-completez a sus subespacios densos G_δ.

Lema 4.8. *Si X es un espacio topológico tenuemente compacto y $\{P_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es tal que la familia $\{\operatorname{int} P_n : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces $\bigcap_{n\in\omega} \overline{P_n} \neq \emptyset$.*

Demostración. Definiendo, para cada $n \in \omega$, $P'_n := \bigcap_{i \leqslant n} \operatorname{int} P_n$, se tiene que $\{P'_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_X^*$ y $P'_{n+1} \subseteq P'_n$ para cada $n \in \omega$. Además, $\overline{P'_n} \subseteq \bigcap_{i \leqslant n} \overline{\operatorname{int} P_n} \subseteq \bigcap_{i \leqslant n} \overline{P_n}$ para cada $n \in \omega$, por lo que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{P'_n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{P_n}$. Así pues, bastará con probar que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{P'_n} \neq \emptyset$.

Supongamos que, por el contrario, $\bigcap_{n\in\omega} \overline{P'_n} = \emptyset$. Entonces, para cada $x \in X$ existe $n \in \omega$ tal que $x \notin \overline{P'_n}$, por lo que $X \setminus \overline{P'_n}$ es un abierto que contiene a x y esquiva a P'_m para cada $m \geqslant n$. Esto implica que la familia $\{P'_n \setminus \overline{P'_{n+1}} : n \in \omega\} \subseteq \tau_X$ es localmente finita, y como X es tenuemente compacto, es de hecho finita. Además, si $m' < m < \omega$, entonces

$P'_m \subseteq \overline{P'_{m'+1}}$, por lo que $(P'_m \setminus \overline{P'_{m+1}}) \cap (P'_{m'} \setminus \overline{P'_{m'+1}}) = \emptyset$. Luego, debe existir $k \in \omega$ tal que $P'_m \setminus \overline{P'_{m+1}} = \emptyset$ para cada $m \geqslant k$, o, equivalentemente, $P'_m \subseteq \overline{P'_{m+1}}$ para cada $m \geqslant k$. Por otro lado, se tiene por construcción que, para toda $m \in \omega$, $P'_{m+1} \subseteq P'_m$, lo cual implica, junto con lo anterior, que $\overline{P'_{m+1}} = \overline{P'_m}$ para toda $m \geqslant k$, de donde $\emptyset \neq \overline{P'_k} = \bigcap_{m\in\omega} \overline{P'_m}$, contradicción que concluye la prueba. $\square$

Corolario 4.9. *Todo espacio tenuemente compacto y casi-regular es π-completo.*

Demostración. Si X es un espacio topológico tenuemente compacto y casi-regular, el lema anterior implica que la sucesión constante τ_X^* atestigua que X es π-completo. $\square$

Observe que $\mathbb{Q}$ es un subespacio abierto que no es de Baire en $\alpha\mathbb{Q}$, de modo que $\alpha\mathbb{Q}$ es un espacio compacto y por tanto tenuemente compacto que no es siquiera de Baire (por la proposición 2.12). Esto prueba que la condición de casi-regularidad no puede evadirse en el corolario anterior.

Lema 4.10. *Si X es un espacio topológico tenuemente compacto y $U \in \tau_X^*$ entonces* $\mathrm{cl}_X U$ *es tenuemente compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una colección localmente finita de abiertos en $\mathrm{cl}_X U$. Fijemos, para cada $V \in \mathcal{V}$, un abierto W_V en X tal que $W_V \cap \mathrm{cl}_X U = V$; en particular, $W_V \cap U = V \cap U$. Probaremos que la familia $\mathcal{U} := \{V \cap U : V \in \mathcal{V}\}$, consistente de abiertos en X en virtud de lo que hemos dicho, es localmente finita en X.

Sea $x \in X$. Si $x \notin \mathrm{cl}_X U$, es claro que $X \setminus \mathrm{cl}_X U$ es un abierto que contiene a x y no intersecta a miembro alguno de la familia $\mathcal{U}$. Si, por el contrario, $x \in \mathrm{cl}_X U$ entonces, dado que $\mathcal{V}$ es localmente finita, existe $W \in \tau_X^*$ tal que $x \in W$ y $\{V \in \mathcal{V} : V \cap (W \cap \mathrm{cl}_X U) \neq \emptyset\}$ es finito. Observe que, dado que $V \subseteq \mathrm{cl}_X U$ para cada $V \in \mathcal{V}$, lo anterior puede simplificarse diciendo que $\{V \in \mathcal{V} : W \cap V \neq \emptyset\}$ es finito, lo cual implica trivialmente que $\{V \in \mathcal{V} : W \cap (U \cap V) \neq \emptyset\}$ es finito, es decir, $\mathcal{U}$ es localmente finita y por tanto finita.

Finalmente, notemos que para cualquier $V \in \mathcal{V}$, dado que U es denso en $\mathrm{cl}_X U$ y $V \in \tau_{\mathrm{cl}_X U}$, se tiene que $U \cap V$ es denso en V, es decir que $\mathrm{cl}_V(U \cap V) = V$. Luego, $\mathcal{V} = \{\mathrm{cl}_V(U \cap V) : V \in \mathcal{V}\}$ es finito. $\square$

Teorema 4.11. *Sea X un subespacio denso G_δ en el espacio casi-regular (Y,τ). Si (Y,τ) posee una π^0-base de subespacios tenuemente compactos y $\sigma \supseteq \tau$ es una topología en Y tal que $\sigma \Pi \tau$, entonces $(X, \sigma \restriction X)$ es π^0-completo.*

Demostración. Comenzaremos probando que

$$\mathcal{P} := \{P \subseteq Y : \operatorname{int}_\tau P \neq \emptyset \wedge P = \operatorname{cl}_\tau P \wedge ((P, \tau \restriction P) \text{ es tenuemente compacto})\}$$

es una π^0-base para (Y,τ). Note que, para cualquier $U \in \tau^*$, la hipótesis sobre (Y,τ) garantiza la existencia de un subconjunto C de Y, tenuemente compacto y con interior no vacío en (Y,τ), tal que $C \subseteq U$. Como (Y,τ) es casi-regular, existe $V \in \tau^*$ tal que $\operatorname{cl}_\tau V \subseteq \operatorname{int}_\tau C$. Entonces, V es un abierto en el espacio tenuemente compacto $(C, \tau \restriction C)$, por lo que $\operatorname{cl}_\tau V = \operatorname{cl}_{\tau \restriction C} V$ es, por el lema anterior, tenuemente compacto. Así, $\operatorname{cl}_\tau V \in \mathcal{P}$. Luego, $\mathcal{P}$ es una π^0-base para (Y,τ).

Observe que, en virtud de la proposición 3.51, (Y,σ) es casi-regular. Además, de la proposición 3.49 se tiene que $Y = \operatorname{int}_\sigma Y = \operatorname{int}_\sigma \operatorname{cl}_\tau X \subseteq \operatorname{cl}_\sigma X$, lo cual implica, junto con la anterior y la proposición 3.4, que $(X, \sigma \restriction X)$ es casi-regular.

Fijemos ahora una colección $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \tau$ tal que $X = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Dado $n \in \omega$, definamos

$$\mathcal{P}_n := \{P \cap X : P \in \mathcal{P} \wedge P \subseteq G_n\}$$

y verifiquemos que $\mathcal{P}_n$ es una π^0-base para $(X, \sigma \restriction X)$: como $\tau \subseteq \sigma$ y X es denso en (Y,τ), para cada $P \in \mathcal{P}$ se tiene que $\emptyset \neq X \cap \operatorname{int}_\tau P \subseteq X \cap \operatorname{int}_\sigma P \subseteq \operatorname{int}_{\sigma\restriction X}(X \cap P)$. Además, la hipótesis $\tau \Pi \sigma$ garantiza que, para cada $V \in \sigma^*$ existe $U \in \tau^*$ tal que $U \subseteq V$, y como G_n es denso en (Y,τ) (ya que X lo es), obtenemos que $U \cap G_n \in \tau^*$, por lo que existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq U \cap G_n$; en conclusión, $V \cap X \supseteq P \cap X \in \mathcal{P}_n$, es decir, $\mathcal{P}_n$ es una π^0-base para $(X, \sigma \restriction X)$.

Sea $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ en $(X, \sigma \restriction X)$. Entonces, para cada $n \in \omega$ existe $P_n' \in \mathcal{P}$ tal que $P_n' \subseteq G_n$ y $P_n' \cap X = P_n$. Fijemos, para cada $n \in \omega$, $V_n \in \sigma^*$ tal que $V_n \cap X = \operatorname{int}_{\sigma\restriction X} P_n$.

Probaremos que la familia $\{\operatorname{int}_{\tau\restriction P_0'} P_n' : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita: fijemos en primer lugar $n \in \omega$, y notemos que, si $i < j < \omega$, entonces $V_j \cap X = \operatorname{int}_{\sigma\restriction X} P_j \subseteq \operatorname{int}_{\sigma\restriction X} P_i = V_i \cap X$ y, por ende, $\emptyset \neq \operatorname{int}_{\sigma\restriction X} P_n = V_n \cap X = \bigcap_{i\leqslant n}(V_i \cap X) \subseteq \bigcap_{i\leqslant n} V_i$. Esto último, aunado a la hipótesis $\tau\Pi\sigma$, implica que $\operatorname{int}_\tau \bigcap_{i\leqslant n} V_i \neq \emptyset$. Además, dado que X es denso en (Y, σ) y P'_n es σ-cerrado (recuerde que $\tau \subseteq \sigma$), se sigue que $V_n \subseteq \operatorname{cl}_\sigma V_n = \operatorname{cl}_\sigma(V_n \cap X) \subseteq P'_n$. Así, $\emptyset \neq \operatorname{int}_\tau \bigcap_{i\leqslant n} V_i \subseteq \operatorname{int}_\tau \bigcap_{i\leqslant n} P'_i = \bigcap_{i\leqslant n} \operatorname{int}_\tau P'_i$.

Por otra parte, para cada $i \leqslant n$ se tiene, dado que $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ es un nido fuerte, que $X \cap \operatorname{int}_\tau P'_i \subseteq X \cap P'_i = P_i \subseteq P_0 \subseteq P'_0$. De lo anterior, de la densidad de X en (Y, τ) y del hecho de que P'_0 es τ-cerrado, se obtiene que $\operatorname{int}_\tau P'_i \subseteq \operatorname{cl}_\tau \operatorname{int} \tau P'_i = \operatorname{cl}_\tau(X \cap \operatorname{int}_\tau P'_i) \subseteq P'_0$, por lo que $\operatorname{int}_\tau P'_i = P'_0 \cap \operatorname{int}_\tau P'_i \subseteq \operatorname{int}_{\tau\restriction P'_0} P'_i$. Esto, junto con el párrafo anterior, implica que $\emptyset \neq \bigcap_{i\leqslant n} \operatorname{int}_\tau P'_i \subseteq \bigcap_{i\leqslant n} \operatorname{int}_{\tau\restriction P'_0} P'_i$, es decir, $\{\operatorname{int}_{\tau\restriction P'_0} P'_n : n \in \omega\}$ es una familia con la propiedad de la intersección finita, tal como se afirmó.

Como $(P'_0, \tau \restriction P'_0)$ es un espacio tenuemente compacto por ser P'_0 un elemento de $\mathcal{P}$, de lo probado en el párrafo anterior, del lema 4.8 y del hecho de que cada P'_n es cerrado en $(P'_0, \tau \restriction P'_0)$, se concluye que $\bigcap_{n\in\omega} P'_n = \bigcap_{n\in\omega} \operatorname{cl}_{\tau\restriction P'_0} P'_n \neq \emptyset$.

Observe ahora que, dado que $P'_n \subseteq G_n$ para cada $n \in \omega$, la última intersección está contenida en $\bigcap_{n\in\omega} G_n = X$, por lo que $\bigcap_{n\in\omega} P_n = \bigcap_{n\in\omega}(P'_n \cap X) = \bigcap_{n\in\omega} P'_n \neq \emptyset$. Luego, $(X, \sigma \restriction X)$ es π^0-completo. □

Una ligera modificación de la prueba anterior nos dará un resultado más fuerte para el caso en que $\tau = \sigma$.

Teorema 4.12. *Sea X un subespacio denso G_δ del espacio casi-regular Y. Si Y posee una π^0-base de subespacios tenuemente compactos, entonces X es π-completo. En particular, Y es π-completo.*

Demostración. Tomando $\sigma = \tau = \tau_Y$ en la prueba del teorema anterior, se obtiene que la colección de los subespacios cerrados, tenuemente compactos y con interior no vacío en Y forma una π^0-base para Y. Veamos ahora que la colección $\mathcal{P} := \{P \in \tau^*_Y : \operatorname{cl}_Y P \text{ es tenuemente compacto}\}$ es una π-base para Y. Claramente, $\mathcal{P} \subseteq \tau^*_X$. Por otro lado, del comentario anterior se obtiene que, para cada $U \in \tau^*_Y$, existe un subespacio cerrado, tenuemente compacto y con interior no vacío C de Y tal que $C \subseteq U$, por lo que, en vista del lema 4.10, $V := \operatorname{int}_Y C \in \tau^*_C$ satisface que $\operatorname{cl}_Y V = \operatorname{cl}_C V$ es tenuemente compacto, es decir, $V \in \mathcal{P}$. Luego, $\mathcal{P}$ es una π-base para Y.

Fijando una familia $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_Y$ tal que $X = \bigcap_{n\in\omega} G_n$, definamos, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{P}_n := \{P \cap X : P \in \mathcal{P} \wedge \mathrm{cl}_Y P \subseteq G_n\}$. Note que, para cualesquiera $n \in \omega$ y $U \in \tau_Y^*$, el hecho de que G_n sea abierto y denso en Y implica que $U \cap G_n \in \tau_Y^*$, de modo que, por lo expuesto en el párrafo anterior y la casi-regularidad de Y, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $\mathrm{cl}_Y P \subseteq U \cap G_n$; luego, $P \cap X \subseteq U \cap X$ y $P \cap X \in \mathcal{P}_n$. Además, la densidad de X en Y garantiza que $\mathcal{P}_n \subseteq \tau_X^*$. En resumen, $\mathcal{P}_n$ es una π-base para X.

Sea $\langle P_n : n \in \omega\rangle$ un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega\rangle$ y, para cada $n \in \omega$, fijemos $P_n' \in \mathcal{P}$ tal que $P_n' \cap X = P_n$ y $\mathrm{cl}_Y P_n' \subseteq G_n$. Para cada $n \in \omega$ se tiene que $P_n' \in \tau_Y$ y, al ser X es denso en Y,

$$\mathrm{cl}_X P_n = X \cap \mathrm{cl}_Y P_n = X \cap \mathrm{cl}_Y(P_n' \cap X) = X \cap \mathrm{cl}_Y P_n'. \tag{$\star$}$$

Para cada $n \in \omega \setminus 1$ se tiene, por lo anterior, que $X \cap P_n' \subseteq X \cap \mathrm{cl}_Y P_n' = \mathrm{cl}_X P_n \subseteq P_0 \subseteq P_0'$. De lo anterior se sigue que si $n \in \omega$, entonces $\mathrm{cl}_Y P_n' = \mathrm{cl}_Y(X \cap P_n') \subseteq \mathrm{cl}_Y P_0'$ y, por ende, $\mathrm{cl}_{\mathrm{cl}_Y P_0'} P_n' = \mathrm{cl}_Y P_n'$.

Por otro lado, para cada $n \in \omega$ se tiene que $P_n' \in \tau_{\mathrm{cl}_Y P_0'}$ y $\emptyset \neq P_n = \bigcap_{i\leqslant n} P_i \subseteq \bigcap_{i\leqslant n} P_i'$. Así, se concluye de los párrafos previos, del lema 4.8 y de la compacidad tenue de $\mathrm{cl}_Y P_0'$, que $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_Y P_n' \neq \emptyset$. Además, el hecho de que $\mathrm{cl}_Y P_n' \subseteq G_n$, para cada $n \in \omega$, implica que $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_Y P_n' \subseteq \bigcap_{n\in\omega} G_n = X$, así que, por ($\star$), $\bigcap_{n\in\omega} P_n = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X P_n = X \cap \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_Y P_n' = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_Y P_n' \neq \emptyset$.

Como ya se vio en la demostración del teorema anterior, X es casi-regular. Luego, es π-completo. $\square$

El siguiente resultado, debido a Oxtoby, fue el que inspiró el teorema anterior, que lo generaliza (véase la proposición 4.7).

Corolario 4.13. *Sea X un subespacio denso G_δ en el espacio casi-regular Y. Si Y posee una π^0-base de subespacios numerablemente compactos, entonces X es π-completo. En particular, Y es π-completo.*

La prueba del siguiente corolario, aunque sencilla, sería un ejercicio repetitivo sin el teorema anterior. Su importancia radica en debilitar la condición dada en la proposición 3.18 para concluir que un espacio localmente compacto es π-completo (ya que, en virtud de la proposición 1.3, para espacios localmente compactos ser de Hausdorff equivale a ser de Tychonoff).

Corolario 4.14. *Todo espacio localmente compacto y casi-regular es π-completo y por tanto de Baire, y lo mismo sucede para sus subespacios densos G_δ.*

Demostración. Sean X un espacio topológico localmente compacto y casi-regular y $U \in \tau_X^*$. Fijemos $x \in U$. Existe entonces $U' \in \tau_X$ tal que $x \in U'$ y $\overline{U'}$ es compacto. Entonces, $x \in U \cap U' \in \tau_X^*$. La casi-regularidad de X garantiza que existe $V \in \tau_X^*$ tal que $\overline{V} \subseteq U \cap U' \subseteq U$. Así, $\overline{V}$ es compacto y por tanto tenuemente compacto. Además, $\emptyset \neq V \subseteq \operatorname{int} \overline{V}$, es decir que la colección de subconjuntos tenuemente compactos con interior no vacío en X es una π^0-base para X y por tanto el teorema 4.12 aplica. $\square$

Tal como lo afirma el teorema 1.22, todo subespacio G_δ de un espacio completamente metrizable es completamente metrizable, en particular π-completo (proposición 3.18). El siguiente corolario afirma que lo mismo es cierto para los espacios Hausdorff localmente compactos, lo cual, junto con lo anterior, constituye un resultado vistoso al haber sido estas clases de espacios las que inspiraron la definición de π-completez. Note que, en estos dos resultados, la densidad del subespacio G_δ no es un requisito para que éste sea π-completo.

Corolario 4.15. *Si X es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto entonces todos sus subespacios G_δ son π-completos.*

Demostración. Si A es un G_δ en X, entonces también lo es en $Y := \overline{A}$. Además, A es denso en Y y Y es, por la proposición 1.4, Hausdorff y localmente compacto. El corolario anterior concluye la prueba. $\square$

Del corolario anterior y el teorema 4.2 se concluye lo siguiente:

Corolario 4.16. *Si X es un espacio topológico (casi-regular) que contiene un subespacio denso, localmente compacto y de Hausdorff, entonces todos sus subespacios densos G_δ son Oxtoby (π-completos).*

El último corolario, junto con el corolario 4.3, muestran que las extensiones (casi-regulares) de espacios completamente metrizables o Hausdorff localmente compactos forman parte de la clase de espacios que estamos investigando, es decir, aquellos que heredan a sus subespacios densos G_δ la propiedad de ser Oxtoby (π-completo).

Corolario 4.17. *Si el espacio casi-regular* (Y, τ) *posee una* π^0*-base de subespacios tenuemente compactos y* $\sigma \supseteq \tau$ *es una topología en* Y *tal que* $\sigma \Pi \tau$*, entonces, todos los subespacios densos* G_δ *de* (Y, σ) *son* π^0*-completos.*

Demostración. Sea Z un subespacio denso G_δ de (Y, σ) y fijemos una colección $\{H_n : n \in \omega\} \subseteq \sigma$ tal que $Z = \bigcap_{n\in\omega} H_n$. Entonces, cada H_n es abierto y denso en (Y, σ). Como se vio en la prueba de la proposición 3.42, lo anterior implica, junto con la hipótesis $\tau \Pi \sigma$, que $\operatorname{int}_\tau H_n$ es denso en (Y, τ) y $\operatorname{int}_\sigma \operatorname{int}_\tau H_n$ es denso en (Y, σ) para cada $n \in \omega$. Por otro lado, del teorema 4.12 se infiere que (Y, τ) es π-completo y por tanto de Baire. Luego, por la proposición 3.42, (Y, τ) es de Baire, de donde $X := \bigcap_{n\in\omega} \operatorname{int}_\tau H_n$ es un denso G_δ en (Y, τ), así que, por el teorema 4.11, $(X, \sigma \restriction X)$ es π^0-completo.

Por otro lado, $\bigcap_{n\in\omega} \operatorname{int}_\sigma \operatorname{int}_\tau H_n$ es denso en (Y, σ) y está contenido en X. Por tanto, X es denso en (Y, σ) y, como $X \subseteq Z$, también lo es en $(Z, \sigma \restriction Z)$. Además, la proposición 3.51 implica que (Y, σ) es casi-regular, de lo cual se obtiene, por la proposición 3.4, que Z es casi-regular, es decir que $(Z, \sigma \restriction Z)$ es una extensión casi-regular del espacio π^0-completo $(X, \sigma \restriction X)$. Concluimos, en virtud del segundo inciso del teorema 3.25, que $(Z, \sigma \restriction Z)$ es π^0-completo. □

4.2 Extensiones

Dado un espacio topológico arbitrario, es natural preguntarnos por la posibilidad de extenderlo (en el sentido de la definición 1.7) a un espacio topológico con ciertas propiedades deseadas. En nuestro caso, nos interesan extensiones π-completas (π^0-completas, Oxtoby), como lo son $\mathbb{R}$ y la línea de Michael (ejemplo 3.28) para $\mathbb{Q}$, que no es de Baire. Así pues, tiene sentido preguntarnos por condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico pueda ser considerado como un subespacio denso de un espacio π-completo (π^0-completo, Oxtoby). Como todo espacio π^0-completo es casi regular, la proposición 3.4 dice que una condición necesaria es que el espacio a extender sea casi-regular. A continuación probaremos que también es suficiente.

Teorema 4.18. *Si X es un espacio topológico, entonces existe un espacio Y de Oxtoby que contiene un subespacio denso y homeomorfo a X. Si además X es casi-regular, Y puede ser escogido π-completo y por tanto π^0-completo.*

Demostración. Definamos el conjunto Δ del modo siguiente: $\mathcal{U} \in \Delta$ si y sólo si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos en X con la propiedad de la intersección finita y es maximal con respecto a esta propiedad. Definamos ahora $\Omega := \{\mathcal{U} \in \Delta : \bigcap \mathcal{U} = \emptyset\}$ y, para cada $U \in \tau_X$, $\widehat{U} := U \cup \{\mathcal{U} \in \Omega : U \in \mathcal{U}\}$.

Sea Y la unión disjunta de X y Ω. Probaremos que $\mathcal{B} := \{\widehat{U} : U \in \tau_X\}$ es base para una topología τ_Y en Y.

Afirmación 1. Si $\mathcal{U} \in \Omega$ y $\mathcal{F} \in [\mathcal{U}]^{<\omega} \setminus \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{U}$.

Para cada $\mathcal{F}' \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ se tiene que $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}' \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$, y como $\mathcal{U}$ tiene la propiedad de la intersección finita, se concluye que $\bigcap(\{\bigcap \mathcal{F}\} \cup \mathcal{F}') = \bigcap(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') \neq \emptyset$. Luego, la familia de abiertos $\mathcal{U} \cup \{\bigcap \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y contiene a $\mathcal{U}$. La maximalidad de $\mathcal{U}$ implica que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{U}$.

Afirmación 2. $\bigcup \mathcal{B} = Y$.

Si $\mathcal{U} \in \Omega \subseteq \Delta$, entonces, de la definición de Δ, se infiere que $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y, por ende, puede elegirse $U \in \mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U} \in \widehat{U}$. Luego, $\Omega \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Claramente, $X \subseteq \widehat{X} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Afirmación 3. Para cualesquiera $U, V \in \tau_X$, si $\widehat{U} \cap \widehat{V} \neq \emptyset$ entonces $W := U \cap V \neq \emptyset$ y $\widehat{W} = \widehat{U} \cap \widehat{V}$.

Observe que si $\emptyset \neq \widehat{U} \cap \widehat{V} = (U \cap V) \cup \{\mathcal{U} \in \Omega : U, V \in \mathcal{U}\}$, se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$ o existe $\mathcal{U} \in \Omega \subseteq \Delta$ tal que $U, V \in \mathcal{U}$. En el segundo escenario se tiene, dado que todo elemento de Δ tiene la propiedad de la intersección finita, que $U \cap V \neq \emptyset$. Así pues, $W \neq \emptyset$ en cualquier caso. Por otro lado, si $W \in \mathcal{U} \in \Omega$, entonces, para cualquier $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ finito, $\mathcal{F} \cup \{W\}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{U}$, por lo que $\emptyset \neq \bigcap(\mathcal{F} \cup \{W\}) = \bigcap(\mathcal{F} \cup \{U, V\})$, es decir que $\mathcal{U} \cup \{U, V\}$ es una familia de abiertos en X con la propiedad de la intersección finita que contiene a $\mathcal{U}$. De la maximalidad de $\mathcal{U}$ se implica que $U, V \in \mathcal{U}$. Luego, $\widehat{W} \subseteq \widehat{U} \cap \widehat{V}$. La otra contención es consecuenia de la Afirmación 1.

Las dos últimas afirmaciones muestran que $\mathcal{B}$ es en efecto base para una topología en Y. El plan es probar que el espacio topológico resultante funciona como la extensión deseada.

X es claramente un subespacio de Y ya que $\widehat{U} \cap X = U$ para cada $U \in \tau_X$. Además X es denso en Y porque si $U \in \tau_X$ es tal que $U = \widehat{U} \cap X = \emptyset$, entonces, para cualquier $\mathcal{U} \in \Omega$, $U \notin \mathcal{U}$, ya que $\{U\}$ es un conjunto finito de abiertos con intersección vacía. Luego, $\widehat{U} \cap \Omega = \emptyset$, de donde $\widehat{U} = \emptyset$.

Probaremos que, definiendo $\mathcal{P}_n := \mathcal{B}$ para cada $n \in \omega$, se obtiene que $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión de Oxtoby para Y. Comencemos por hacer notar que cada término de la sucesión propuesta es una base y por tanto un π-base (y por supuesto una π^0-base) para Y. Además, si $\langle P_n : n \in \omega \rangle$ es un nido asociado a dicha sucesión, podemos fijar, para cada $n \in \omega$, $U_n \in \tau_X^*$ tal que $\widehat{U_n} = P_n$. De este modo, para cada $n \in \omega$ se obtiene que $U_{n+1} = X \cap P_{n+1} \subseteq X \cap P_n = U_n$. Así, $\{U_n : n \in \omega\}$ es una familia de abiertos en X con a propiedad de la intersección finita. Mediante un argumento estándar con el Lema de Zorn, podemos hallar $\mathcal{U} \in \Delta$ tal que $U_n \in \mathcal{U}$ para cada $n \in \omega$. Tenemos entonces dos casos: si $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$, entonces, en particular, $\emptyset \neq \bigcap\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcap\{P_n : n \in \omega\}$. Si, por el contrario, $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, entonces $\mathcal{U} \in \Omega$. Como además $\mathcal{U}$ tiene a cada U_n por elemento, se concluye que $\mathcal{U} \in \widehat{U_n} = P_n$ para cada $n \in \omega$, por lo que nuevamente $\bigcap\{P_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$. Luego, Y es Oxtoby.

Supongamos ahora que X es casi-regular y fijemos $U \in \tau_X$ con $\widehat{U} \neq \emptyset$. Como hicimos notar arriba, esta hipótesis implica que $U \neq \emptyset$. Por la casi-regularidad de X, existe $V \in \tau_X^*$ tal que $\mathrm{cl}_X V \subseteq U$. Para probar que $\mathrm{cl}_Y \widehat{V} \subseteq \widehat{U}$, empecemos por demostrar que $\Omega \cap \mathrm{cl}_Y \widehat{V} \subseteq \Omega \cap \widehat{V}$. En efecto, note que si $\mathcal{U} \in \Omega \setminus \widehat{V}$, entonces $V \notin \mathcal{U}$, por lo que, en vista de la maximalidad de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \cup \{V\}$ no tiene la propiedad de la intersección finita, por lo que existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ finito y no vacío tal que $V \cap \bigcap \mathcal{F} = \bigcap(\mathcal{F} \cup \{V\}) = \emptyset$. De la Afirmación 2 se deduce que $\widehat{V} \cap \widehat{\bigcap \mathcal{F}} = \emptyset$. Por otro lado, la Afirmación 1 muestra que $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{U}$, de modo que $\mathcal{U} \in \widehat{\bigcap \mathcal{F}} \subseteq Y \setminus \widehat{V}$, es decir que $\mathcal{U} \notin \mathrm{cl}_Y \widehat{V}$. Así pues, $\Omega \setminus \widehat{V} \subseteq \Omega \setminus \mathrm{cl}_Y \widehat{V}$, o, equivalentemente,

$$\Omega \cap \mathrm{cl}_Y \widehat{V} \subseteq \Omega \cap \widehat{V} \subseteq \widehat{V}.$$

Además, el que X sea denso en Y nos garantiza que $X \cap \mathrm{cl}_Y \widehat{V} = \mathrm{cl}_X(\widehat{V} \cap X) = \mathrm{cl}_X V$. Así, $\mathrm{cl}_Y \widehat{V} \subseteq \widehat{V} \cup \mathrm{cl}_X V \subseteq \mathrm{cl}_Y \widehat{V}$. Por otro lado, como $V \subseteq U$, si $\mathcal{U} \in \Omega$ es tal que $V \in \mathcal{U}$, entonces, como $V = U \cap V$, se concluye, nuevamente por la Afirmación 1, que $U \in \mathcal{U}$. Luego, $\widehat{V} \subseteq \widehat{U}$. Todo lo dicho en este párrafo se traduce en que

$$\mathrm{cl}_Y \widehat{V} = \widehat{V} \cup \mathrm{cl}_X V \subseteq \widehat{U} \cup U = \widehat{U},$$

es decir, Y es casi regular.

Por lo tanto, como la sucesión $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ es de Oxtoby y consiste de π-bases para Y, también atestigua que Y es π-completo. $\square$

La siguiente cuestión de interés es cuándo ciertas extensiones prefijadas de un espacio casi-regular son casi-regulares, π-completas o π^0-completas. Nos concentraremos en esto a continuación.

Definición 4.19. Un espacio topológico Y es una *extensión de tipo KC* del espacio topológico X si es una extensión de X en la que todos los subespacios compactos de X son cerrados.

Proposición 4.20. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una π^0-base para X consistente de subconjuntos compactos de X. Si Y es una extensión de tipo KC de X, entonces $\mathrm{int}_Y X$ es denso en Y y $\mathcal{P}$ es una π^0-base para Y consistente de subconjuntos compactos y cerrados en Y.*

Demostración. Primero veremos que $\mathcal{P}$ es una π^0-base para Y: sea $P \in \mathcal{P}$. Fijemos $W \in \tau_Y^*$ tal que $W \cap X = \mathrm{int}_X P \neq \emptyset$. Como P es compacto, Y es una extensión de tipo KC de X y X es denso en Y, se tiene que $W \subseteq \mathrm{cl}_Y W = \mathrm{cl}_Y(W \cap X) \subseteq P$, de donde $\emptyset \neq \mathrm{int}_Y P$. Además, para cualquier $V \in \tau_Y^*$ se tiene, por ser X denso en Y, que $X \cap V \in \tau_X^*$, por lo que existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq X \cap V$.

El que Y sea una extensión de tipo KC de X garantiza que cada miembro de $\mathcal{P}$ es compacto y cerrado en Y.

Definamos ahora $U := \bigcup\{\mathrm{int}_Y P : P \in \mathcal{P}\}$. Es claro que $X \supseteq U \in \tau_Y$. Verifiquemos ahora que U es denso en Y: si $V \in \tau_Y^*$, entonces, como ya vimos, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que

$P \subseteq X \cap V$, de donde $\emptyset \neq \operatorname{int}_Y P \subseteq V \cap U$. $\square$

Corolario 4.21. *Si X es un espacio topológico que posee una π^0-base consistente de subconjuntos compactos de X y Y es una extensión de tipo KC de X, entonces Y es casi-regular*

Demostración. Por la proposición anterior, Y posee una π^0-base consistente de subonjuntos cerrados de Y. Entonces, para cada $U \in \tau_Y^*$ existe un cerrado P en Y tal que $V := \operatorname{int}_Y P \neq \emptyset$, de donde $\operatorname{cl}_Y V \subseteq P \subseteq U$. $\square$

Pasamos a considerar ahora el caso de la extensión de Alexandroff.

Proposición 4.22. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ una π^0-base consistente de subconjuntos cerrados y compactos de X. Entonces, αX tiene una π^0-base consistente de subconjuntos cerrados y compactos en αX.*

Demostración. Si X es compacto entonces $\mathcal{P} \cup \{\{\infty\}\}$ resuelve el problema. En otro caso, note que para cualquier $P \in \mathcal{P}$ se tiene que $\alpha X \setminus P \in \tau_{\alpha X}$, por lo que P es cerrado en αX. El resto de la prueba se argumenta igual que en la proposición 4.20. $\square$

Caracterizaremos ahora los espacios cuya extensión de Alexandroff es casi-regular o, equivalentemente, π-completa.

Teorema 4.23. *Si X es un espacio topológico casi-regular y no compacto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *αX es casi-regular.*

2. *X posee una π^0-base consistente de subconjuntos compactos y cerrados en X.*

3. *αX es π-completo.*

Demostración. Si αX es casi-regular entonces, como X es abierto en αX, la prueba de la proposición 3.6 muestra que la colección $\mathcal{P} := \{P : \exists U \in \tau_X^* (P = \operatorname{cl}_{\alpha X} U \subseteq X)\}$ es una π^0-base para X. Por supuesto, cada elemento de $\mathcal{P}$ es cerrado y compacto en X (por ser cerrado en αX, que es compacto por la proposición 1.9). Esto prueba que (2) es consecuencia de (1).

Supongamos ahora que X posee una π^0-base de subconjuntos cerrados y compactos. La proposición anterior implica que αX tiene una π^0-base de subconjuntos cerrados en αX, lo cual, como se vio en la prueba del corolario 4.21, implica que αX es casi-regular. Así, (1) y (2) son equivalentes.

Por otro lado, el corolario 4.14 nos dice que, dado que αX es compacto, que sea casi-regular es equivalente a que sea π-completo y por tanto también a que sea π^0-completo. □

4.3 Productos

Hasta antes de que Oxtoby probara en [13] que bajo la Hipótesis del Continuo existen dos espacios de Baire cuyo producto no es de Baire, la cuestión sobre la productividad de los espacios de Baire había permanecido sin respuesta. Aún así y a falta de certeza sobre dicha cuestión, previo al resultado de Oxtoby hubo varios resultados en los que se probaba que, añadiendo algunas condiciones a los factores, el producto de dos espacios de Baire resulta un espacio de Baire (véase [6, Ejercicio 3.9.J]). Por otro lado, como ya hemos visto en el corolario 2.27, ciertas condiciones adicionales sobre al menos uno de dos espacios de Baire son ciertamente necesarias para poder concluir que su producto es de Baire. Así pues, es natural preguntarse en nuestro contexto por tales condiciones. En esta sección se probará que la casi-regularidad de uno de los factores y la π-completez del otro garantizan que el producto de dos espacios de Baire sea de Baire. Para llegar a este primer resultado sobre productos necesitamos introducir una nueva noción, que será de ayuda para reconocer subespacios de Baire de un espacio de Baire dado.

Definición 4.24. Diremos que un subconjunto X del espacio topológico Y está *A-encajado en Y* si cualquier subconjunto G_δ en Y contenido en X es denso en ninguna parte en X.

Teorema 4.25. *Sea X un subespacio denso del espacio de Baire Y.*

1. *Si $Y \setminus X$ está A-encajado en Y entonces X es de Baire.*

2. *Si $Y \setminus X$ es denso en Y, entonces X es de Baire si y sólo si $Y \setminus X$ está A-encajado en Y.*

Demostración. (1): Supongamos que X no es de Baire. Existen entonces $\{U_n : n \in \omega\} \subseteq \tau_Y$ y $U \in \tau_Y^*$ de tal modo que $U \cap X \neq \emptyset$, $U_n \cap X$ es denso en X para cada $n \in \omega$ y $X \cap U \cap \bigcap\{U_n : n \in \omega\} = \emptyset$. Como X es denso en Y, cada U_n es denso en Y, por lo que $U_n \cap U$ es abierto y denso en U, que es un espacio de Baire al ser abierto en Y (proposición 2.12). Así, $D := U \cap \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$ es denso en U y en particular es no vacío. De este modo, el que $X \cap D = \emptyset$ implica que $D \nsubseteq X$, y como $D \subseteq U$, se concluye que $U \nsubseteq X$, es decir, $U \setminus X \neq \emptyset$. Como además D es denso en U y $D \subseteq Y \setminus X$, se tiene que D es un G_δ en Y que es denso en $U \setminus X$, un abierto en $Y \setminus X$. Luego, $\emptyset \neq U \setminus X \subseteq \operatorname{int}_{Y \setminus X} \operatorname{cl}_{Y \setminus X} D$, es decir, que D no es denso en ninguna parte en $Y \setminus X$ y por tanto $Y \setminus X$ no está A-encajado en Y.

(2): Para demostrar la implicación directa procederemos nuevamente por contrapuesta: supongamos que $Y \setminus X$ no está A-encajado en Y y fijemos $H \subseteq Y \setminus X$, un G_δ en Y, y $U \in \tau_Y$ tal que $\emptyset \neq U \cap (Y \setminus X) \subseteq \operatorname{cl}_{Y \setminus X} H$. Esto implica que $U \cap H$ es denso en $U \cap (Y \setminus X)$, que a su vez es denso en U ya que $Y \setminus X$ es denso en Y. Luego, $U \cap H$ es un G_δ en Y, denso en U y contenido en $U \cap (Y \setminus X)$. Fijemos una colección $\{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos en Y tales que $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} = U \cap H$. Entonces, como $U \cap H$ es denso en U, cada $U_n \cap U$ es abierto y denso en U. Por tanto, como X es denso en Y, $U_n \cap U \cap X$ es denso y abierto en $U \cap X$ para cada $n \in \omega$. No obstante, $\bigcap\{U_n \cap U \cap X : n \in \omega\} = H \cap X = \emptyset$. Luego, $U \cap X$ es un subespacio abierto y no vacío (porque X es denso en Y) de X que no es de Baire. Por ende, X no es de Baire. $\square$

Proposición 4.26. *Si X es un espacio topológico tal que todos sus subespacios Oxtoby son densos en ninguna parte en X, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es de Baire.*
2. *Para cualquier supraespacio Oxtoby Y de X tal que X es denso en Y, se tiene que $Y \setminus X$ está A-encajado en Y.*
3. *Existe un supraespacio Oxtoby Y de X tal que X es denso en Y y $Y \setminus X$ está A-encajado en Y.*

Cuando además X es casi-regular, lo mismo es cierto reemplazando "Oxtoby" por "π-completo" (o "π^0-completo") en todo el enunciado.

Demostración. Asumiendo (1), sea Y un espacio Oxtoby en el que X es denso. Entonces, todo abierto no vacío en Y es Oxtoby como subespacio de Y (ver proposoción 3.24), de modo que no puede estar contenido en X, ya que en tal caso dicho abierto en Y lo sería también en X, siendo por tanto un subespacio Oxtoby de X con interior no vacío y por tanto no denso en ninguna parte en X, contrario a la hipótesis de la proposición. Por ende, cada abierto no vacío en Y intersecta a $Y \setminus X$, es decir que $Y \setminus X$ es denso en Y. En vista del segundo inciso del teorema anterior, $Y \setminus X$ está A-encajado en Y, es decir, se satisface (2).

Que (2) implica (3) es consecuencia del teorema 4.18, mientras que la implicación de (3) a (1) se sigue del primer inciso del teorema 4.25.

Los mismos argumentos prueban la parte faltante de la proposición. □

Dados dos espacios topológicos X y Y, denotaremos por π_X a la proyección natural de $X \times Y$ sobre X.

Lema 4.27. *Sean X un espacio de Baire y Y un espacio π-completo. Si D es un conjunto denso G_δ en $X \times Y$, entonces $\pi_X[D]$ contiene un subconjunto denso G_δ en X.*

Demostración. Sean $\{U_n : n \in \omega\}$ una familia de abiertos (necesariamente densos) en $X \times Y$ cuya intersección es D y $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión que atestigua que Y es π-completo.

Construiremos recursivamente una sucesión $\langle \mathcal{V}_n : n \in \omega \rangle$ de tal modo que, para cada $n \in \omega$, se satisface lo siguiente:

1. $\mathcal{V}_n$ es una familia ajena por pares de abiertos no vacíos en X tal que $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$ es denso en X;
2. $\mathcal{V}_{n+1}$ refina a $\mathcal{V}_n$;
3. para cada $V \in \mathcal{V}_n$ existe $P_n^V \in \mathcal{P}_n$ tal que $V \times P_n^V \subseteq U_n$;
4. para cualesquiera $V_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ y $V_n \in \mathcal{V}_n$ tales que $V_{n+1} \subseteq V_n$, se tiene que $\operatorname{cl}_Y P_{n+1}^{V_{n+1}} \subseteq P_n^{V_n}$.

Definamos $\mathcal{U}_0 := \{U \in \tau_X^* : \exists P \in \mathcal{P}_0(U \times \mathrm{cl}_Y P \subseteq U_0)\}$. Comprobemos que $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X. Observe que para cualquier $V \in \tau_X^*$ se tiene que $V \times Y \in \tau_{X\times Y}^*$, lo cual aunado al hecho de que U_0 es abierto y denso en $X \times Y$ implica que $(V \times Y) \cap U_0 \in \tau_{X\times Y}^*$. Existen entonces $U \in \tau_X^*$ y $W \in \tau_Y^*$ tales que $U \times W \subseteq (V \times Y) \cap U_0$. Como $\mathcal{P}_0$ es una π-base para Y, y éste es un espacio casi-regular, existe $P \in \mathcal{P}_0$ tal que $\mathrm{cl}_Y P \subseteq W$. Así, $U \times \mathrm{cl}_Y P \subseteq U \times W \subseteq U_0$ y $U \subseteq V$, por lo que $U \cap V = U \neq \emptyset$ y $U \in \mathcal{U}_0$. En resumen, $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X.

Tal como hicimos en la proposición 3.26, podemos hallar una familia $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{U}_0$ ajena por pares que sea maximal con respecto a dicha propiedad. Como en el corolario recién citado, se obtiene que $W_0 := \bigcup \mathcal{V}_0$ es denso en $\bigcup \mathcal{U}_0$ y, por el párrafo anterior, en X.

Para cada $V \in \mathcal{V}_0$, fijemos $P_0^V \in \mathcal{P}_0$ tal que $V \times \mathrm{cl}_Y P_0^V \subseteq U_0$. De este modo, es claro que $\mathcal{V}_0$ satisface los incisos (1)-(4).

Ahora, supongamos que para alguna $n \in \omega$ tenemos construida la sucesión $\langle \mathcal{V}_k : k \leqslant n\rangle$ de tal modo que (1)-(4) se satisfacen. Notemos que, si $V \in \mathcal{V}_n$, entonces P_n^V es π-completo por ser abierto en Y (por la proposición 3.24). Además, $U_{n+1} \cap (V \times P_n^V)$ es denso y abierto en $V \times P_n^V$. Definamos entonces $\mathcal{U}_{n+1}^V := \{U \in \tau_V^* : \exists P \in \mathcal{P}_{n+1}(U \times \mathrm{cl}_Y P \subseteq U_{n+1} \cap (V \times P_n^V))\}$ y verifiquemos que $\bigcup \mathcal{U}_{n+1}^V$ es denso en V: si $V' \in \tau_V^*$, los mismos argumentos que usamos para ver que $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X muestran que existen $U \in \tau_V^*$ y $W \in \tau_{P_n^V}^*$ tales que $U \times W \subseteq (V' \times P_n^V) \cap (U_{n+1} \cap (V \times P_n^V)) \subseteq (V' \times P_n^V) \cap U_{n+1}$. Por otro lado, $\mathcal{P}_{n+1}$ es una π-base para el espacio casi-regular Y y $W \in \tau_{P_n^V}^* \subseteq \tau_Y^*$, de modo que existe $P \in \mathcal{P}_{n+1}$ tal que $\mathrm{cl}_Y P \subseteq W$. Así, $U \times \mathrm{cl}_Y P \subseteq U \times W \subseteq (V' \times P_n^V) \cap U_{n+1}$ y $U \subseteq V'$, por lo que $U \cap V' = U \neq \emptyset$ y $U \in \mathcal{U}_{n+1}^V$. Luego, $\bigcup \mathcal{U}_{n+1}^V$ es denso en V.

Como antes, podemos hallar un subconjunto $\mathcal{V}_{n+1}^V$ de la colección $\mathcal{U}_{n+1}^V$ que sea ajeno por pares y cuya unión sea densa en $\bigcup \mathcal{U}_{n+1}^V$ y, por el párrafo anterior, en V.

Para cada $V' \in \mathcal{V}_{n+1}^V$, fijemos $P_{n+1}^{V'} \in \mathcal{V}_{n+1}^V$ tal que $V' \times \mathrm{cl}_Y P_{n+1}^{V'} \subseteq (V \times P_n^V) \cap U_{n+1}$; en particular, se obtiene que $\mathrm{cl}_Y P_{n+1}^{V'} \subseteq P_n^V$. Así, si definimos $\mathcal{V}_{n+1} := \bigcup\{\mathcal{V}_{n+1}^V : V \in \mathcal{V}_n\}$, se obtiene que $W_{n+1} := \bigcup \mathcal{V}_{n+1} = \bigcup\{\bigcup \mathcal{V}_{n+1}^V : V \in \mathcal{V}_n\}$ es denso en $\bigcup \mathcal{V}_n$, y por tanto en X (ya que, por la hipótesis inductiva, $\bigcup \mathcal{V}_n$ es denso en X). El resto de las propiedades requeridas son producto claro de la construcción.

Definamos ahora $E = \bigcap\{W_n : n \in \omega\}$. Como X es de Baire, E es denso en X, de modo que habremos terminado si probamos que $E \subseteq \pi_X[D]$. Para ello, comencemos por notar que si $x \in E$ entonces, para cada $n \in \omega$, existe $V_n \in \mathcal{V}_n$ tal que $x \in V_n$. Las propiedades (1) y (2) garantizan que para cada $n \in \omega$ se tiene que $V_{n+1} \subseteq V_n$, por lo que, en virtud del inciso (4), $\mathrm{cl}_Y P_{n+1}^{V_{n+1}} \subseteq P_{n+1}^{V_n}$, es decir que $\langle P_n^{V_n} : n \in \omega \rangle$ es un nido fuerte asociado a $\langle \mathcal{P}_n : n \in \omega \rangle$. Luego, $\bigcap \{P_n^{V_n} : n \in \omega\} \neq \emptyset$, por lo podemos fijar un elemento y en dicha intersección. Así, del inciso (3) se deduce que $(x, y) \in V_n \times P_n^{V_n} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$, por lo que $x = \pi_X(x, y) \in \pi_X[D]$. □

Lema 4.28. *Sean X un espacio topológico y $U, V \in \tau_X$ tales que $U \cup V$ es denso en X. Si U y V son de Baire como subespacios de X, entonces X también lo es.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una colección de abiertos densos en X y $W \in \tau_X^*$. Entonces, $W \cap (U \cup V) \in \tau_X^*$, de modo que $W \cap U \in \tau_X^*$ o $W \cap V \in \tau_X^*$. Asumiendo, sin pérdida de generalidad, el primer caso, note que, para cada $n \in \omega$, $U_n \cap U$ es abierto y denso en U. Luego, $\emptyset \neq (W \cap U) \cap \bigcap \{U_n \cap U : n \in \omega\} \subseteq W \cap \bigcap \{U_n : n \in \omega\}$. Por lo tanto, X es de Baire. □

Teorema 4.29. *Si X es un espacio de Baire casi-regular y Y es un espacio π-completo, entonces $X \times Y$ es de Baire.*

Demostración. Por la proposición 3.29, existen $X_P, X_N \in \tau_X$, ajenos, tales que $X_P \cup X_N$ es denso en X, X_P es π-completo y cualquier subespacio π-completo de X_N es denso en ninguna parte en X_N. Entonces, $X_P \times Y$ y $X_N \times Y$ son abiertos en $X \times Y$ tales que $(X_P \times Y) \cup (X_N \times Y) = (X_P \cup X_N) \times Y$ es denso en $X \times Y$. Además, de las proposiciones 3.20 y 3.17 se obtiene que $X_P \times Y$ es de Baire. Así pues, en virtud del lema anterior, habremos terminado si probamos que $X_N \times Y$ es de Baire.

Como X_N es abierto en X y en vista de las proposiciones 2.12 y 3.6, X_N es de Baire y casi-regular. Entonces, en vista de la proposición 4.26, existe un supraespacio π-completo Z de X_N tal que X_N es denso en Z y $X' := Z \setminus X_N$ está A-encajado en Z.

Notemos que $X_N \times Y$ es denso en el espacio π-completo $Z \times Y$, de modo que, en vista de la proposición 4.25, bastará con probar que $X' \times Y = (Z \times Y) \setminus (X_N \times Y)$ está A-encajado en $Z \times Y$.

Supongamos, con una contradicción en la mira, que existe un G_δ en $Z \times Y$, digamos, D, tal que $D \subseteq X' \times Y$ y D no es denso en ninguna parte en $X' \times Y$. Existen entonces $U \in \tau_Z$ y $V \in \tau_Y$ tales que $\emptyset \neq (U \cap X') \times V \subseteq \mathrm{cl}_{X' \times Y} D$; de modo que $D \cap (U \times V)$ es denso en $(U \cap X') \times V$.

Ahora bien, como cualquier subespacio π-completo de X_N es denso en ninguna parte en X_N, X_N no contiene ningún abierto no vacío de Z, es decir que X' es denso en Z. De esta forma, $X' \cap U$ es denso en U y por ende $(U \cap X') \times V$ es denso en $U \times V$. En conclusión, $D \cap (U \times V)$ resulta ser un denso G_δ en $U \times V$.

De las proposiciones 3.6 y 3.24 obtenemos, dado que $U \in \tau_Z^*$ y $V \in \tau_Y^*$, que U es de Baire y V es π-completo. Luego, del lema 4.27, $\pi_X[D \cap (U \times V)]$ contiene un subconjunto E, denso G_δ en U. Como U es abierto en Z, E es un G_δ en Z. Además, $E \subseteq \pi_X[D] \cap \pi_X[U \times V] \subseteq X' \cap U$, por lo que $U = \mathrm{cl}_U E = U \cap \mathrm{cl}_Z E \subseteq \mathrm{cl}_Z E$, de donde $\emptyset \neq X' \cap U \subseteq X' \cap \mathrm{cl}_Z E = \mathrm{cl}_{X'} E$, es decir, E no es denso en ninguna parte en X', una contradicción al hecho de que X' está A-encajado en Z. Esto prueba que $X' \times Y$ está A-encajado en $Z \times Y$. Luego, $X \times Y$ es de Baire. $\square$

Por supuesto, si X y Y son espacios topológicos tales que $X \times Y$ es de Baire, entonces, en vista de la proposición 2.14 y de que las proyecciones son abiertas, continuas y suprayectivas, se obtiene que X y Y son necesariamente espacios de Baire. Por otro lado, las condiciones de casi-regularidad sobre uno de los factores o de π-completez sobre el otro no son necesarias. De hecho, Oxtoby probó en [13] el siguiente resultado:

Teorema 4.30. *Si X y Y son espacios de Baire y Y tiene una π-base localmente numerable, entonces $X \times Y$ es un espacio de Baire.*

Demostración. Comencemos fijando una π-base localmente numerable $\mathcal{P}$ para Y y, buscando una contradicción, supongamos que $X \times Y$ no es de Baire. Existe entonces un abierto magro y no vacío en $X \times Y$ (véanse la proposición 2.6 y la definición 2.7). Dicho abierto contiene a otro de la forma $U \times V_0$ con $U \in \tau_X^*$ y $V_0 \in \tau_Y^*$, de modo tal que $U \times V_0$ resulta magro en $X \times Y$. Fijando $y_0 \in V_0$, existe $V_1 \in \tau_Y^*$ tal que $y_0 \in V_1$ y $\{P \in \mathcal{P} : P \cap V_1 \neq \emptyset\}$ es numerable, por lo que, definiendo $V := V_0 \cap V_1 \in \tau_Y^*$, se obtiene que $\mathcal{B} := \{P \in \mathcal{P} : P \subseteq V\}$ es una π-base numerable para V y que $U \times V$ es magro en $X \times Y$.

Fijemos una colección numerable $\mathcal{F}$ de cerrados con interior vacío en $X \times Y$ tal que $U \times V \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Como $U \times V \in \tau_{X \times Y}$, para cada $F \in \mathcal{F}$ se tiene que $F \cap (U \times V)$ es un cerrado con interior vacío en $U \times V$, es decir que $U \times V$ es magro en sí mismo.

Para cualquier $F \in \mathcal{F}$ se obtiene que $G_F := (U \times V) \setminus F$ es abierto y denso en $U \times V$ y $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} G_F = \emptyset$. Por tanto, para cualesquiera $F \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{B}$ se verifica que $(U \times B) \cap G_F$ es denso y abierto en $U \times B$. Luego, $H_B^F := \pi_U[(U \times B) \cap G_F]$ es denso y abierto en U, donde π_U denota la proyección de $U \times B$ sobre el primer factor. Como X es de Baire y tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{F}$ son numerables, podemos fijar un punto $x_0 \in \bigcap\{H_B^F : B \in \mathcal{B}, F \in \mathcal{F}\}$ (nuevamente por la proposición 2.6 y la definición 2.7).

Fijemos $F \in \mathcal{F}$. Definiendo $G'_F := \{y \in Y : (x_0, y) \in G_F\}$, hallamos que, para cada $B \in \mathcal{B}$, $G'_F \cap B \neq \emptyset$, lo cual implica, dado que $\mathcal{B}$ es una π-base para X, que G'_F es denso en Y. Además, en vista de que G_F es abierto en $U \times V$, es fácil convencerse de que G'_F es abierto en Y. Así, como Y es de Baire, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} G'_F$ es denso en Y y en particular no vacío. Finalmente, fijando $y_0 \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} G'_F$, se obtiene que $(x_0, y_0) \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} G_F$, una contradicción. Luego, $X \times Y$ es de Baire. $\square$

Del teorema anterior se obtiene como corolario el siguiente resultado, probado por Kuratowski y Ulam en 1932, es decir, casi 30 años antes de la publicación del teorema anterior y de la prueba de la consistencia de la no productividad de los espacios de Baire con ZFC en [13].

Corolario 4.31. *El producto de dos espacios de Baire, uno de los cuales es segundo numerable, es un espacio de Baire.*

4.4 Espacios Čech-completos

A la largo de este escrito nos hemos dedicado a profundizar en el estudio de los espacios π-completos, π^0-completos y de Oxtoby como soluciones al problema de Unificación. Hay sin embargo otro candidato natural:

Definición 4.32. Un espacio topológico es *Čech-completo* si es homeomorfo a un subespacio denso G_δ de un espacio compacto y de Hausdorff.

Los espacios Čech-completos fueron introducidos por Čech en [5], artículo en que se probó que todo espacio completamente metrizable es Čech-completo y todo espacio Čech-completo es de Baire, todo esto en 1937, mucho antes de que Oxtoby mostrara en [13] que la existencia de dos espacios de Baire cuyo producto no es de Baire es consistente con ZFC e introdujera los espacios π-completos. Así, aunque ligados desde su origen a los espacios completamente metrizables y de Baire, los espacios Čech-completos no fueron pensados para resolver el problema de Unificación, que no existía en aquel entonces. Es pues notable el hecho de que *casi* lo consiguen, tan notable como el que los espacios "pseudocompletos" que aquí hemos definido no sólo dan respuesta a nuestro problema sino que engloban a la clase de los espacios Čech-completos.

En cuanto a la relación entre los espacios Čech-completos y los completamente metrizables o Hausdorff localmente compactos, en [6, Teorema 4.3.26] se prueba que, para cualquier espacio topológico, ser completamente metrizable es equivalente a ser metrizable y Čech-completo, mientras que [6, Teorema 3.9.5] afirma que todo espacio Čech-completo es homeomorfo a un espacio cociente de algún espacio Hausdorff y localmente compacto.

Proposición 4.33. *Los siguientes enunciados son ciertos:*

1. *Todo espacio completamente metrizable o Hausdorff localmente compacto es Čech-completo.*
2. *Todo espacio Čech-completo es π-completo y por tanto de Baire.*
3. *El producto de cualquier familia numerable de espacios Čech-completos es Čech-completo*

Demostración. (1): Como se dijo en el párrafo anterior a esta proposición, para espacios metrizables ser completamente metrizable es equivalente a ser Čech-completo. Además, cada espacio Hausdorff localmente compacto es abierto en su extensión de Alexandroff, que es un espacio compacto y de Hausdorff (véase la proposición 1.9).

(2): Dado un espacio Čech-completo X, fijemos un espacio compacto y de Hausdorff Y tal que X es denso G_δ en Y. Se sigue del corolario 4.15 que X es π-completo y por tanto de Baire (proposición 3.17).

(3): Sean $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios Čech-completos y $X := \prod_{n\in\omega} X_n$ su producto topológico. Fijemos, para cada $n \in \omega$, un espacio compacto de Hausdorff Y_n tal que X_n es un denso G_δ en Y_n. Definamos $Y := \prod_{n\in\omega} Y_n$ y escojamos, para cada $n \in \omega$, una sucesión decreciente $\langle U_m^n : m \in \omega\rangle$ de abiertos en Y_n tal que $\bigcap_{m\in\omega} U_m^n = X_n$. Es claro entonces que, para cada $n \in \omega$, $U_n := \bigcap_{m\leqslant n} \pi_m^{-1}[U_n^m] \in \tau_Y$ y por tanto $X = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es un G_δ en Y. Además, del lema 1.14 se obtiene que $\mathrm{cl}_Y X = \prod_{n\in\omega} \mathrm{cl}_{Y_n} X_n = \prod_{n\in\omega} Y_n = Y$, es decir, X es denso en Y. Por el Teorema de Tychonoff ([6, Teorema 3.2.4]), Y es compacto y de Hausdorff. Luego, X es Čech-completo. $\square$

Así, la clase de los espacios Hausdorff localmente compactos y la de los completamente metrizables son subclases de la clase de los espacios Čech-completos, a su vez contenida en la clase de los espacios π-completos. Además, estas contenciones son estrictas, como veremos a continuación.

Ejemplo 4.34. *Como se vio en el ejemplo 3.32, $\mathbb{P}$ es completamente metrizable, mientras que el Teorema de Tychonoff implica que 2^{ω_1} es Hausdorff y compacto, por tanto localmente compacto. Así, de los incisos (1) y (3) del teorema anterior se deduce que el espacio $X := \mathbb{P} \times 2^{\omega_1}$ es Čech-completo. Por otro lado, $\mathbb{P}$ no es localmente compacto (ejemplo 2.2), de modo que, por las proposiciones 1.5 y 4.5, X no es localmente compacto ni completamente metrizable.*

La recta de Sorgenfrey es un espacio π-completo (ver ejemplo 3.47) que no es Čech-completo (consúltese [6, Ejercicio 3.9.F(b)]).

Aunque la proposición 4.33 es una gran noticia, lo que sigue es el desaire:

Ejemplo 4.35. *Pese a que ω es, como espacio discreto, completamente metrizable y por tanto Čech-completo, ω^{ω_1} no es Čech-completo (consúltese [6, Ejercicio 3.9.D(a)]).*

Así, la clase de los espacios Čech-completos es cerrada bajo productos numerables pero no bajo productos arbitrarios, es decir, que no constituye una respuesta completa al problema de Unificación. Aún así es una gran solución parcial de la que es difícil quejarse, ya que, después de todo y en vista del teorema 2.27 y de las proposiciones 4.5 y 1.5, parece bastante razonable debilitar un poco los requisitos del problema de Unificación para considerar clases de espacios cerradas bajo productos numerables. Además, la clase de los espacios

Čech-completos, aunque menos general que la de los π-completos, posee propiedades muy fuertes. Por ejemplo, de la definición se infiere que todo espacio Čech-completo es Tychonoff y, como ya se ha comentado, dentro de la clase de los espacios metrizables ser Čech-completo equivale a ser completamente metrizable. También se tiene el siguiente resultado, de gran relevancia para este trabajo:

Proposición 4.36. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Si X es un espacio Čech-completo, entonces todos sus subespacios G_δ son Čech-completos.*

2. *Si κ es un cardinal y $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una familia ajena por pares de espacios topológicos Čech-completos, entonces su suma topológica $\bigoplus_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$ es un espacio Čech-completo.*

Demostración. (1): Sea Y un subespacio G_δ en X y fijemos un espacio compacto y Hausdorff Z tal que X es denso G_δ en Z. Entonces, Y es un G_δ en un subespacio G_δ de Z. Luego, Y es un G_δ en Z y por tanto en $\mathrm{cl}_Z Y$, un espacio compacto y de Hausdorff en el que Y es denso. Por ende, Y es Čech-completo.

La prueba del segundo inciso de la proposición puede consultarse en [6, Teorema 3.9.7].

□

Para más sobre espacios Čech-completos, referimos al lector a [6, sección 3.9].

[1] J. M. Aarts and D. J. Lutzer, *Pseudo-completeness and the product of Baire spaces*, Pacific J. Math 48, no. 1 (1973): 1-10.

[2] J. A. Amor Montaño, G. Campero Arena y F. Miranda Perea, *Teoría de Conjuntos, Curso Intermedio*, Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2011.

[3] R. Baire, *Sur les fonctions de variables relles*, Ann. Mat. 3 (1899), 1123.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Apaces and Partial Differential Equations*, Primera Edicin, Springer New York, 2010, (Univesitext) ISBN 978-0-387-70913-0.

[5] E. Čech, *On bicompact spaces*, Ann. Math. 38 (1937), 823-844.

[6] R. Engelking, *General Topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989. MR 91c:54001

[7] F. Hausdorff, *Grundzge der Mengenlehre*, von Veit (1914).

[8] M. Henriksen, R. Kopperman, M. Rayburn and A. R. Todd, *Corrections to "Oxtoby's pseu- docompleteness revisited"*: [Topology and its Applications 100 (2000) 119-132], Topology and its Applications 114, no. 1 (2001): 115-116.

[9] M. Henriksen, R. Kopperman, M. Rayburn and A. R. Todd, *Oxtoby's pseudocompleteness revisited*, Topology and its Applications 100, no. 2 (2000): 119-132.

[10] K. Kunen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[11] K. Kunen and W. G. Fleissner, *Barely Baire spaces*, Fund. Math., 101 (1978), 229-240.

[12] W. Osgood, *Non-uniform convergence and the integration of series term by term*, Amer. J. Math. 19 (1897), 155190.

[13] J. C. Oxtoby, *Cartesian products of Baire spaces*, Fund. Math., 49 (1961), 157-166.

[14] R. Pichardo-Mendoza, *Notes on Oxtoby Spaces and Pseudocompleteness*, Top. Proc. 46 (2015) pp. 117-134.

[15] A. R. Todd, *Quasiregular, pseudocomplete, and Baire spaces*, Pacific J. Math 95, no. 1 (1981): 233-250.