UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LONGITUD DE ARCO ASOCIADA A FUNCIONES DISTANCIA GENERALIZADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

HÉRICA SÁNCHEZ LARIOS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SERVIO TULIO GUILLÉN BURGUETE

Ciudad Universitaria, D.F. 2014

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	Larios
Nombre(s)	Hérica
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	406004170
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Servio Tulio
Apellido paterno	Guillén
Apellido materno	Burguete
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Hugo
Apellido paterno	Arizmendi
Apellido materno	Peimbert
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombre(s)	José Lino
Apellido paterno	Samaniego
Apellido materno	Mendoza
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dra.
Nombre(s)	Isabel Patricia
Apellido paterno	Aguilar
Apellido materno	Juárez
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dr.
Nombre(s)	Adrián Ulises
Apellido paterno	Soto
Apellido materno	Bañuelos
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Longitud de arco asociada a funciones distancia generalizadas
Número de páginas	41
Año	2014

Resumen

En este trabajo proponemos una generalización de la definición tradicional de longitud de arco sobre una variedad diferenciable arco conexa. En la definición propuesta, la longitud de arco está asociada a una función distancia d que satisface la propiedad de identidad pero puede no satisfacer la desigualdad del triángulo, no negatividad, definitoreidad y simetría. También introducimos el concepto de *premétrica*, la cual es una función distancia que satisface la desigualdad del triángulo y la propiedad de identidad. Por tanto, una premétrica, a diferencia de las métricas, puede ser asimétrica y tomar valores negativos, y a diferencia de las distancias Lp, puede ser no uniforme. De nuestra definición de longitud de arco, surge de manera natural, una nueva clase de arcos, los cuales llamamos d-conservativos. Un arco d-conservativo (o un arco inducido por una función distancia d) es un arco dirigido tal que para cualquier triada ordenada de puntos del arco, la desigualdad del triángulo se cumple en su forma de igualdad. Probamos que cada arco d-conservativo tiene una d-longitud igual a la d-distancia entre sus puntos extremos, y que si d satisface la desigualdad del triángulo (i.e., si d es una premétrica), entonces los arcos d-conservativos coinciden con los arcos de mínima d-longitud. También demostramos que la d-longitud de un arco se puede expresar como la integral de una función F a lo largo del arco, donde F es la derivada direccional unilateral de d. En esta demostración no requerimos que la función distancia satisfaga la desigualdad del triángulo y no negatividad. Esta relación entre d y F fue probada por Busemann y Mayer (1941) para funciones distancia (distancias de Finsler) que satisfacen, entre otras condiciones, la desigualdad del triángulo y no negatividad. También demostramos que si la derivada direccional unilateral F de una función distancia d es continua, entonces d satisface la desigualdad del triángulo si, y sólo si, F es convexa.

Índice

Introducción

H. Busemann [2] dice en su trabajo que la meta que se fijó Riemann [6] a sí mismo fue dar una definición y discusión del espacio finito dimensional más general en el cual toda curva tiene una longitud $\int F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))dt$ *obtenida a partir de una longitud infinitesimal* o elemento línea $F(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$.

En este trabajo de tesis coincidimos con Riemann en el sentido de que toda curva suave tiene una longitud. Sin embargo, en la definición de longitud de arco que proponemos en este trabajo de tesis, la longitud de un arco se *obtiene a partir de una función distancia d* dada, en lugar de a partir de un elemento línea $F(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ dado. La expresión de longitud de arco en términos de $F(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ se puede obtener a partir de una función distancia d, siempre que $F(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ sea la derivada direccional unilateral de d en $\mathbf{x}$ en la dirección $d\mathbf{x}$.

La definición más común de longitud de arco obtenida a partir de una función distancia d define longitud como la mínima cota superior de las longitudes de todos los posibles polígonos inscritos. Esta definición tiene la desventaja de requerir que la función distancia d satisfaga tanto la desigualdad del triángulo como la condición de no negatividad.

En el capítulo 1 se presenta la aportación principal de esta tesis. Esta consiste en el concepto que proponemos de longitud de arco asociada a una función distancia d que cumple la propiedad de identidad pero no necesariamente la desigualdad del triángulo y no negatividad, condiciones que se requieren en el concepto tradicional de longitud de arco. Nuestro concepto se basa en una definición alterna de la integral de Riemann (ver, e.g., [7, p.160]) que se expresa en términos de refinamientos sucesivos de particiones del arco. Como no se pide simetría de la función distancia d, la longitud de un arco en un sentido puede ser diferente a la longitud de ese arco en el sentido contrario, por lo que los arcos considerados son arcos dirigidos. Podemos afirmar entonces que de las propiedades que satisfacen las funciones distancia tradicionales (no negatividad, simetría, desigualdad del triángulo e identidad) solamente la propiedad de identidad (la distancia de un punto a sí mismo es cero) es necesaria para que a una función distancia d se le pueda asociar una longitud de arco. De aquí que se define a una función distancia (generalizada) sobre una variedad conexa diferenciable M como una función binaria que satisface la propiedad de identidad. A partir de la definición propuesta de longitud de arco, surge la existencia de ciertos arcos: aquellos que cumplen que todas sus particiones tienen la misma d-longitud. Estos arcos, que llamamos d-conservativos, satisfacen una propiedad de conservación de la distancia d (d-distancia) a lo largo del arco, y se puede pensar en ellos como una generalización de los segmentos de línea recta en R^n. Se muestra que cada arco d-conservativo dirigido $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tiene una d-longitud igual a la d-distancia de $\mathbf{a}$ hasta $\mathbf{b}$, $d(\mathbf{a},$

b), y satisface la propiedad de que para cualquier sucesión de puntos sobre el arco conteniendo los puntos extremos **a** y **b**, la suma de las d-distancias entre todos los puntos consecutivos ordenados en la dirección del arco es exactamente igual a $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Esta propiedad se usa en el bien conocido procedimiento empírico para medir la distancia entre dos puntos lejanos. También se prueba que si una función distancia d es completa (para todo par de puntos ordenados **a**, **b** en M existe al menos un arco d-conservativo que conecta **a** con **b**), entonces la desigualdad del triángulo es una condición necesaria y suficiente para que ambos, los arcos d-conservativos y los arcos de mínima d-longitud, sean los mismos. Además, en este capítulo se obtiene la bien conocida fórmula de la longitud de arco, que es la integral de una función continua F a lo largo del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\int F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))\ ds$, donde $\mathbf{x}:[a, b] \rightarrow M$ es una representación paramétrica de $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; también demostramos que esta integral es la longitud de arco asociada a una función distancia d si, y sólo si, la función $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))$ es la derivada direccional unilateral de d, i.e.,

$$F(\ ,\ )\quad \lim_{t\quad 0}\frac{d(\ ,\ (t))\quad d(\ ,\ )}{}\quad \lim_{t\quad 0}\frac{d(\ ,\ (t))}{}\quad \text{para toda}\qquad ,\qquad ,$$

como en la definición tradicional, están formadas por arcos de mínima d-longitud. La función fundamental, a diferencia de la premétrica, contiene información puramente local, que se refiere a la tasa de cambio o "eficiencia" del desplazamiento en cada punto para cada dirección del espacio. La función fundamental nos permite encontrar algunas propiedades de su premétrica, tales como uniformidad, isotropía, simetría y antisimetría. Estas propiedades las mostramos en la sección 2.6.

En el capítulo 3 demostramos que los arcos que son simultáneamente arcos inducidos de varias premétricas, son también arcos inducidos de cualquier combinación lineal positiva de esas premétricas, propiedad que también se cumple para las geodésicas de las premétricas.

En el capítulo 4 se analizan las métricas Lp. Demostramos que los arcos inducidos por estas métricas son segmentos de recta; en particular para las métricas L_1 y L_∞ también son arcos conservativos todos los arcos monótonos entre pares de puntos y, según sea la dirección del camino, éstos arcos monótonos son crecientes o decrecientes. En este capítulo también se obtienen las funciones fundamental, postfundamental y de desviación para las métricas Lp. Las funciones distancia obtenidas, tanto de métricas Lp pesadas como de combinaciones lineales positivas de éstas, conducen forzosamente a funciones distancia positivas definidas, simétricas y uniformes.

1. Longitud de arco asociada a una función distancia generalizada

1.1 *d*-longitud de arco y arcos *d*-conservativos

En esta sección proponemos una definición de longitud de arco asociada a una función distancia en una variedad diferenciable. Nuestra definición requiere que la función distancia satisfaga la propiedad de identidad, pero puede no satisfacer la desigualdad del triángulo, simetría y no negatividad. También, en esta sección se introduce una nueva clase de arcos asociados a una función distancia d. Estos arcos (los cuales llamamos arcos d-conservativos) satisfacen una propiedad de conservación de la distancia d a lo largo del arco, y se puede pensar en ellos como una generalización de los segmentos de línea recta en R^n. Demostramos que, bajo ciertas condiciones, la desigualdad del triángulo es una condición necesaria y suficiente para que los arcos d-conservativos y los arcos de mínima d-longitud sean los mismos.

Sea M una variedad diferenciable k-dimensional en R^n, con $k \leq n$. Denotemos por $T_{\mathbf{x}}M$ el espacio tangente en $\mathbf{x}\in M$, $T_{\mathbf{x}}M := \{\mathbf{v}\in R^n\text{: } \mathbf{x} + \mathbf{v}h\in M$ para h positiva suficientemente pequeña$\}$, y por $TM := \cup_{\mathbf{x}\in M} T_{\mathbf{x}}M$ el haz tangente de M. Cada elemento de TM tiene la forma $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, donde $\mathbf{x}\in M$ y $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M$. El subconjunto de TM cuyos elementos tienen la forma $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ donde $\mathbf{x}\in M$ y $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus\{\mathbf{0}\}$ se denota por $TM \setminus\{\mathbf{0}\}$.

Un *camino* en M de $\mathbf{a}\in M$ a $\mathbf{b}\in M$ es una función continua $\mathbf{x}$:$[a, b]\to M$, donde $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$, y $a < b$ son números reales. La imagen dirigida $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subseteq M$ del camino $\mathbf{x}$:$[a, b]\to M$ se llama un *arco* (*dirigido*) que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. En este trabajo de tesis, con arco se quiere decir arco dirigido. Un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se dice que es un arco C^1 si este tiene una representación paramétrica $\mathbf{x}$:$[a, b] \to M$ con una derivada acotada $\mathbf{x}'$ la cual es continua en todo $[a, b]$ excepto posiblemente en un número finito de puntos. El conjunto de todos los arcos que son C^1 a trozos se denotará por Ω. Por razones de simplicidad, el conjunto de todos los arcos C^1 a trozos que van de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, y el conjunto de las representaciones paramétricas de estos arcos se denotarán por $\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$.

Definición 1. Se define una *función distancia* (*generalizada*) d sobre M como una función binaria d:$M \times M \to R$ que satisface la propiedad de identidad ($d(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$ para toda $\mathbf{a}\in M$).

Si d también satisface la desigualdad del triángulo ($d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ para todo $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in M$), entonces se le llama *premétrica*.

Una *métrica* es una premétrica que satisface la condición de simetría ($d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a},\mathbf{b}\in M$), la condición de no negatividad ($d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \geq 0$ para todo $\mathbf{a},\mathbf{b}\in M$), y la condición de definitoreidad ($d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{a},\mathbf{b}\in M$).

Una sucesión de puntos en M de la forma ($\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$), donde $k \geq 0$, se dice que es una *sucesión en M de* **a** *a* **b**. Los puntos **a** y **b** se llaman *puntos extremos de la sucesión*. El conjunto de todas las sucesiones en M de **a** a **b** se denota por $P[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Para cada sucesión en M dada por $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$, la función distancia $d : M \times M \to R$ determina un número real $\Lambda(P)$, que llamamos *d-longitud de la sucesión* P, y se define como la suma de las d-distancias:

$$\Lambda(P) = \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \quad \text{para toda } P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

En este trabajo de tesis, una partición de un arco quiere decir una partición del arco en subarcos. Cada partición P de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ determina una sucesión ($\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$) de puntos a lo largo del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Recíprocamente, tal sucesión ($\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$) de puntos a lo largo del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ determina la partición P. Con el fin de simplificar, también se denota por P a la sucesión de puntos a lo largo del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ que corresponde a la partición P. La *partición trivial* de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es el conjunto $\{C(\mathbf{a},\mathbf{b})\}$, el cual está determinado por la sucesión trivial ($\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$). A *refinamiento* de una partición P del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es una partición Q de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ tal que cada elemento de Q está contenido en un elemento de P. El conjunto de todas las particiones de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se denota por $P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]$. Se define la *d-longitud de una partición* $P\in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]$ de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ como la longitud de la sucesión P con respecto a la función distancia d, denotada por $\Lambda(P)$.

Definición 2. Se define la *longitud asociada a una función distancia d sobre M* de un arco dirigido C (*d-longitud* de un arco C) como un número real L tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de C tal que $|\Lambda(P) - L| < \varepsilon$ para todo refinamiento P de P_ε.

La d-longitud de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ la denotamos por $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Si $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es finita, entonces $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se dice que es *d-rectificable*. Si la d-longitud de un arco existe, entonces ésta es única. Es inmediato que todos los subarcos de cualquier partición P de un arco d-rectificable $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ son d-rectificables, y que la suma de sus d-longitudes es igual a la d-longitud de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

$C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco de *mínima d-longitud* si este es rectificable y su d-longitud es menor o igual que la d-longitud de cualquier otro arco que va de **a** a **b**. Cada subarco de un arco de mínima d-longitud es un arco de mínima d-longitud.

La definición 2 nos permite deducir la existencia de ciertos arcos los cuales pueden imaginarse como una generalización de los segmentos de línea recta en R^n. La propiedad de identidad que se le pide a una función distancia d es suficiente para determinar ciertas curvas dirigidas formadas por arcos dirigidos que cumplen una condición, llamada por *igualdad del triángulo* *condición de conservación de la distancia d*

x **x'**

b d **x**

d **x** **b** $- d$ **x'** **b** d **x''**

x, **x''** **a** **x** d **x''** **x'** $- d$ **x''** **x**

d **x** **b** $- d$ **x'** **b** d **x''** **x'** d **x'** **b** d **x''** **x** d **x** **b**

d

d

d

Definición 3. $d \; M \times M \to R$

donde $\mathbf{x}:[a, b]\to M$ es una representación paramétrica de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Se puede probar directamente que (1.1) es equivalente a cualquiera de las siguientes dos condiciones:

$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(z)) = d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(z))$, donde $a \le s \le t \le z \le b$,

$$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(r)) - d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) = d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(z)) - d(\mathbf{x}(r), \mathbf{x}(z)),\quad a \le s \le t \le r \le z \le b. \qquad (1.2)$$

Claramente, las dos últimas condiciones son mutuamente equivalentes. La primera de ellas expresa la "desigualdad del triángulo" para cualesquiera tres puntos ordenados sobre $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La ecuación (1.2) expresa una ley de conservación de la d-distancia. Sea $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ un arco d-conservativo con una representación paramétrica $\mathbf{x}$: $[a, b]\to M$, donde $a \le s \le t \le r \le z \le b$. Supóngase que el arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es descrito por el movimiento de una partícula que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Supóngase también que el intervalo $[a, b]$ es un intervalo de tiempo y que el vector $\mathbf{x}(w)$, donde $w\in[a, b]$, especifica la posición de la partícula en el tiempo w. Para cualquier intervalo $[t, r] \subseteq [a, b]$ la partícula viaja a lo largo del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que va de $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{x}(r)$. Si $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un arco d-conservativo, entonces cuando la partícula va de $\mathbf{x}(t)$ a $\mathbf{x}(r)$, el incremento de la d-distancia desde cualquier punto sobre $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ya visitado por la partícula, $\mathbf{x}(s)$, donde $s \le t$, a la partícula misma, $d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(r)) - d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t))$, es igual al decremento de la d-distancia desde la partícula hasta cualquier punto sobre $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ que visitará la partícula, $\mathbf{x}(z)$, donde $r \le z$, $d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(z)) - d(\mathbf{x}(r), \mathbf{x}(z))$. Esta es la razón por la que le llamamos "*arco d-conservativo*" al arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Una función distancia d es *completa* si para todo par ordenado de puntos $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en M existe al menos un arco d-conservativo C^1 a trozos que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Si una función distancia d es completa, entonces toda partición de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ d-rectificable tiene asociada una *d-poligonal inscrita* formada por arcos d-conservativos, cada uno de los cuales conecta dos puntos consecutivos de la partición. Por lo tanto, la d-longitud de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ d-rectificable es igual al límite de la d-longitud de la d-poligonal d-rectificable inscrita en $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Teorema 1.1. **(*Propiedades de las premétricas*)**. *Sea d: $M \times M \to R$ una función distancia que satisface la desigualdad del triángulo (i.e., d es una premétrica) y sea $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ un arco d-rectificable C^1 a trozos cuya d-longitud es $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$. Entonces*:

(a) *Si $P,Q\in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]$ son dos particiones de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ tal que P es un refinamiento de Q, entonces $\Lambda(Q) \le \Lambda(P)$;*

(b) $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \le \Lambda(P) \le \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ *para toda* $P\in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]$;

(c) $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \sup\{\Lambda(P): P\in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]\}$;

(d) $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ *si y solo si* $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *es un arco d-conservativo*;

(e) *Todo arco d-conservativo es un arco de mínima d-longitud*;

(f) *Si d es una función distancia completa, entonces todo arco de mínima d-longitud es un arco d-conservativo*.

Demostración.

(a) Se puede demostrar directamente usando la desigualdad del triángulo.

(b) Esta conclusión es una consecuencia inmediata de (a): $d(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\Lambda(P)$, y $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ son d-longitudes de tres particiones de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. La correspondiente partición para $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ es un refinamiento de P, y P es un refinamiento de la partición trivial.
(c) Debido a (b), $\Lambda(P) \leq \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ para toda $P \in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]$. Usando la definición de d-longitud del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y por la definición del supremo de un conjunto, se obtiene $\ell C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \sup \{\Lambda(P) : P \in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]\}$.
(d) $\Leftarrow$) Como se mencionó en la definición 3, si $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco d-conservativo, entonces $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell\ (C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$. $\Rightarrow$) Supóngase que $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell\ (C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$. Usando (b), se obtiene $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \Lambda(P)$ para toda $P \in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]$, y por tanto $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco d-conservativo.
(e) Si $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco d-conservativo el cual no es un arco de mínima d-longitud, entonces $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ y $\ell(C^*(\mathbf{a},\mathbf{b})) < \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ para algún $C^*(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$. Entonces $\ell(C^*(\mathbf{a},\mathbf{b})) < d(\mathbf{a},\mathbf{b})$, lo cual contradice (b). Por tanto, todo arco d-conservativo es un arco de mínima d-longitud.
(f) Debido a (b), $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$. Por el hecho de que d es una función distancia completa, existe un arco d-conservativo C^1 a trozos que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ de d-longitud $d(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Puesto que $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco C^1 a trozos de mínima d-longitud, entonces $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) \leq d(\mathbf{a},\mathbf{b})$; y por tanto, se cumple la igualdad $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$. Por (d), $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco d-conservativo. □

Por (c) del teorema 1.1, la bien conocida expresión para calcular la longitud de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en un espacio euclidiano, dada por $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \sup\{\Lambda(P) : P \in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]\}$ (ver, e.g., [5, p. 463]), es aplicable a cualquier función distancia d que satisface la desigualdad del triángulo. Si d no satisface la desigualdad del triángulo, esta expresión no es válida, como se muestra en el siguiente ejemplo: Sea d_p una función distancia dada por $d_p(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\sum_i |b_i - a_i|^p)^{1/p}$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$, $i = 1, \ldots, n$, donde $p \in (0, 1)$ (a_i y b_i denotan las componentes de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente). Supónganse tres puntos en R^2, $\mathbf{a} = (0,0)$, $\mathbf{c} = (1,0)$, y $\mathbf{b} = (1,1)$. Sea $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ el arco formado por dos subarcos, el primero va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$, y el segundo va de $\mathbf{c}$ a $\mathbf{b}$. Para $p = 0.5$, la $d_{0.5}$-longitud de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es $1 + 1 = 2$. Sin embargo, el segmento de línea recta que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ es el supremo de todas las particiones de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, y su $d_{0.5}$-longitud es $(1+1)^2 = 4$, de aquí que $\sup \{\Lambda(P) : P \in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})]\} = 4 > 2 = \ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$.

1.2 Funcional *d*-longitud

En esta sección, a partir de la definición propuesta de longitud de arco se obtiene una fórmula para calcular la longitud de arco asociada a una función distancia d dada. También demostramos que si la derivada direccional unilateral F de una función distancia d es continua, entonces d satisface la desigualdad del triángulo si, y sólo si, F es convexa.

Una función $f: M \to R$ se dice que tiene una *derivada direccional unilateral en un punto* $\mathbf{x} \in M$ con respecto a $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$ si, y solo si, el límite

$$D^+ f(\mathbf{x};\mathbf{v}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{\sigma}(t)) - f(\mathbf{x})}{t}$$

existe en el conjunto de los números reales extendidos, donde $\boldsymbol{\sigma}$: $[0,1] \to M$ es un camino en M con $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}$ y $(d\boldsymbol{\sigma}(t)/dt)(0) = \mathbf{v}$. Se puede demostrar directamente que $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{v})$ es homogénea positiva de grado uno en el argumento $\mathbf{v}$, i.e., $D^+f(\mathbf{x};\alpha\mathbf{v}) = \alpha D^+f(\mathbf{x};\mathbf{v})$ para toda $\alpha > 0$, para toda $\mathbf{x}\in M$. Entonces D^+f es independiente de la representación paramétrica de la curva $\boldsymbol{\sigma}$. El segundo argumento de $D^+f(\mathbf{x};\mathbf{v})$, donde $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$, se puede llamar *una dirección en* $\mathbf{x}\in M$.

Sea d: $M \times M \to R$ una función distancia sobre M. La *derivada direccional unilateral* de $d(\mathbf{x},\cdot)$ en $\mathbf{x}\in M$ con respecto a una dirección $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$ se define como el límite

$$F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma}(t)) - d(\mathbf{x},\mathbf{x})}{t},$$

si este existe. Por la propiedad de identidad de d, $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ viene a ser

$$F(\mathbf{x},\mathbf{v}) := \lim_{t\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma}(t))}{t} \quad \text{para toda } \mathbf{x}\in M, \mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{0\}, \tag{1.3}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$:$[0, 1] \to M$ es un camino en M tal que $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}$ y $(d\boldsymbol{\sigma}/ds)(0) = \mathbf{v}$. La función F: $TM\to R$ dada por (1.3) evaluada en el punto $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$ se denotará por $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$, y la función F a lo largo de un camino $\mathbf{x}$:$[a, b] \to M$ se denotará por $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))$ y está dada por

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(s+t))}{t}. \tag{1.4}$$

Es fácil ver que F: $TM\to R$ dada por (1.3) es homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento, i.e., $F(\mathbf{x},\alpha\mathbf{v}) = \alpha F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ para toda $\alpha > 0$, para todo $\mathbf{x}\in M$ y $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Una función F: $TM\to R$ es *convexa en un punto* $\mathbf{x}\in M$ si $F(\mathbf{x},\alpha\mathbf{v} + (1-\alpha)\mathbf{w}) \le \alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (1-\alpha)F(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, para todo $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\alpha\in[0, 1]$.

Considerando que la función $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ es homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento, F es convexa en $\mathbf{x}$ si y solo si $F(\mathbf{x},\mathbf{v}+\mathbf{w}) \le F(\mathbf{x},\mathbf{v}) + F(\mathbf{x},\mathbf{w})$, para todo $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se dice que F es una *función convexa* si F es convexa en todo $\mathbf{x}\in M$.

Ahora se determinará la d-longitud de un arco d-rectificable $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ clase C^1 a trozos en términos de la función derivada direccional unilateral F de d. Sea $\mathbf{x}$:$[a, b] \to M$ una representación paramétrica C^1 a trozos de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Cualquier conjunto de puntos interiores del intervalo $[a, b]$, $s_1,s_2, \dots , s_k\in (a, b)$, donde $k > 0$, determina una partición no trivial (a

$= s \quad s \; \ldots \; s_k \quad = b \qquad [a \;\; b]$ $\qquad P = \; \mathbf{a} = \mathbf{x}\, s \quad \mathbf{x}\, s \quad \ldots \mathbf{x}\, s_k$

$\mathbf{x}\; s_k \quad = \mathbf{b} \qquad C \; \mathbf{a} \; \mathbf{b}$

$$\Lambda \;\, P \;\; = \sum_{i=}^{k} d \;\; \mathbf{x} \; s_i \quad \mathbf{x} \; s_{i+}$$

$F \; \mathbf{x} \; \mathbf{v}$ $\qquad F \; \mathbf{x} \; s$

s $\qquad [a \; b]$

$F \qquad t \in [a \; b \qquad \varepsilon > \qquad \Delta s >$

$$\left| F \;\; \mathbf{x} \;\; \xi \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi \quad - \frac{d \;\; \mathbf{x} \;\; \xi \quad \mathbf{x} \;\; \xi \;\; + \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi \;\; \Delta s}{\Delta s} \right| < \varepsilon \qquad \xi \in \left[t \;\; t + \Delta s \right)$$

$a = s \quad s \quad \ldots \quad s_k \quad = b \qquad [a \;\; b]$

$\varepsilon > \qquad P_\varepsilon \quad C \; \mathbf{a} \; \mathbf{b}$

$$\left| F \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \quad - \frac{d \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \mathbf{x} \;\; \xi_i \;\; + \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \;\; \Delta s_i}{\Delta s_i} \right| < \varepsilon \qquad \xi_i \in \left[s_i \;\; s_{i+} \right) \;\; i = \quad \ldots \; k$$

$P \qquad P_\varepsilon$

$$\left| F \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \quad \Delta s_i - d \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \mathbf{x} \;\; \xi_i \;\; + \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \;\; \Delta s_i \;\right| < \varepsilon \Delta s_i \qquad \xi_i \in \left[s_i \;\; s_{i+} \right) \;\; i = \quad \ldots \; k$$

$$\Lambda \;\; P \;\; = \sum_{i=}^{k} d \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \mathbf{x} \;\; \xi_i \;\; + \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \;\; \Delta s_i$$

$$\left| \sum_{i=}^{k} F \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \quad \Delta s_i - \Lambda \;\; P \; \right| < \varepsilon \;\; b - a \qquad \xi_i \in \left[s_i \;\; s_{i+} \right)$$

$\varepsilon \;\; b - a \qquad \varepsilon$

$$\left| \sum_{i=}^{k} F \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \quad \Delta s_i - \Lambda \;\; P \; \right| < \frac{\varepsilon}{} \qquad \xi_i \in \left[s_i \;\; s_{i+} \right) \;\; i = \quad \ldots \; k$$

$C \; \mathbf{a} \; \mathbf{b} \qquad d \qquad \varepsilon > \qquad P_\varepsilon$

$C \; \mathbf{a} \; \mathbf{b}$

$$\left| L - \Lambda \;\; P \; \right| < \frac{\varepsilon}{}$$

$P \qquad P_\varepsilon \qquad L \qquad C \; \mathbf{a} \; \mathbf{b}$

$\varepsilon > \qquad P_\varepsilon \quad C \; \mathbf{a} \; \mathbf{b}$

$$\left| L - \sum_{i=}^{k} F \;\; \mathbf{x} \;\; \xi_i \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; \xi_i \quad \Delta s_i \right| < \varepsilon \qquad \xi_i \in \left[s_i \;\; s_{i+} \right) \;\; i = \quad \ldots \; k$$

$P \qquad P_\varepsilon$ $\qquad L = \int_a^b F \;\; \mathbf{x} \;\; s \quad \dot{\mathbf{x}} \;\; s \quad ds$

$$\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds \quad \text{para todo } C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \Omega, \tag{1.5}$$

si y solo si F: $TM \to R$ es continua y es la derivada direccional unilateral de d dada por (1.3), *donde* $\mathbf{x}$: $[a, b] \to M$ *es una representación paramétrica C^1 del arco* $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Considerando que la función F en (1.5) no depende explícitamente del parámetro s, y que F es homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento, se sigue que $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds$ es invariante bajo cualquier transformación del parámetro s, y por tanto la d-longitud de cualquier arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es independiente de la representación paramétrica de la curva.

***Teorema 1.3* (*Dos caracterizaciones de premétricas*).** *Sea d una función distancia sobre M y sea F: $TM \to R$ la derivada direccional unilateral de d. Entonces se tiene:*
(a) *Si d satisfice la desigualdad del triángulo* (*i.e., d es una premétrica*), *entonces F es una función convexa*;
(b) *Si F función convexa continua, entonces la función distancia d es una premétrica y está dada por*

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds \quad \text{para todo } \mathbf{a},\mathbf{b} \in M,\ \dot{\mathbf{x}}(s) \in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{1.6}$$

donde $\mathbf{x}$: $[a, b] \to M$ *es una representación paramétrica C^1 a trozos de* $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

***Demostración*:**

(a) Sea $\boldsymbol{\sigma}$: $[0, 1] \to M$ y $\boldsymbol{\rho}$: $[0, 1] \to M$ dos caminos tales que $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{x}$, $(d\boldsymbol{\sigma}(t)/dt)(0) = \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\rho}(0) = \mathbf{x}$, y $(d\boldsymbol{\rho}(t)/dt)(0) = \mathbf{w}$. Por (1.3) y por la homogeneidad positive de F,

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x},\alpha\mathbf{v}+(1-\alpha)\mathbf{w}) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t)+(1-\alpha)\boldsymbol{\rho}(t))}{t}\\
&\le \lim_{t\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t))+d(\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t),(\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t)+(1-\alpha)\boldsymbol{\rho}(t)))}{t}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t))}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t),(\mathbf{x}+\alpha\boldsymbol{\sigma}(t)+(1-\alpha)\boldsymbol{\rho}(t)))}{t}\\
&= F(\mathbf{x},\alpha\mathbf{v})+F(\mathbf{x},(1-\alpha)\mathbf{w}) = \alpha F(\mathbf{x},\mathbf{v})+(1-\alpha)F(\mathbf{x},\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

(b) Por el teorema 1.2, es suficiente probar que si F es convexa, entonces la derivada direccional unilateral de d en (1.6) es justo el integrando de (1.6). Sustituyendo (1.6) en (1.4):

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{v}]}}\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+t\mathbf{v}} F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds\right) = F(\mathbf{x},\mathbf{v}).$$

La última igualdad se puede explicar de la siguiente forma: en el límite cuando $t \to 0^+$, se puede considerar a $\mathbf{x}(s)$ como una constante, y por tanto el integrando $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))$ solamente depende de $\dot{\mathbf{x}}(s)$; debido a la convexidad de F, $F(\mathbf{x}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) \le F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}M \setminus \{\mathbf{0}\}$, la integral alcanza su mínimo valor si $\dot{\mathbf{x}}(s)$ tiene la dirección $\mathbf{v}$ en cada punto a lo largo del arco que va de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x} + \mathbf{v}t$. Por tanto, el integrando $F(\mathbf{x}(s),$

$\dot{\mathbf{x}}(s)$) permanece constante a lo largo del arco que va de **x** a **x** + **v**t y este es igual a $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

□

En la geometría de Finsler, la longitud de arco en una variedad M está dada por (1.5), y la función distancia está *definida* por (1.6), donde la función F es homogénea positiva de grado uno en su segundo argumento, estrictamente convexa, no negativa, y de clase C^∞ sobre $TM\setminus\{\mathbf{0}\}$ (ver, e.g., [4, p. 1] o [10, p. 484]). Busemann y Mayer [3, p. 186] (ver también [1, p. 161]) probaron que bajo estas condiciones, la función F es la derivada direccional unilateral de d, dada por (1.3).

La fórmula bien conocida para calcular la longitud de arco en R^n,

$$\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \|\dot{\mathbf{x}}(s))\| ds, \tag{1.7}$$

se puede obtener como caso particular de (1.5): Supóngase que d es una función distancia sobre R^n que satisface la condición $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(0, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ para todo **a**, **b**, $\mathbf{c}\in R^n$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma usual en R^n. Esta condición se satisfice si d es invariante bajo traslaciones (i.e., $d(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, o equivalentemente, $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ no depende de **x**) y es no negativa. Se sigue de (1.3) que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+t))}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+t)\|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+t)}{t} \right\| = \left\| \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+t)}{t} \right\| = \|\dot{\mathbf{x}}(s)\|.$$

Sustituyendo el lado derecho en (1.5) se obtiene (1.7).

Nótese que el valor de la derivada direccional unilateral $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ es el límite de la razón de cambio de la distancia desde el punto $\mathbf{x}\in M$ a un punto cercano a **x** sobre la dirección $\mathbf{v}\in T_{\mathbf{x}}M$ que emana desde **x**. Esta interpretación de F como la derivada direccional unilateral de la función distancia d surge en algunas aplicaciones, ver e.g. [3,4], donde d se puede referir a energía gastada, tiempo de recorrido, costo de recorrido, etc. Nuestro enfoque para modelar funciones distancia se basa en esta interpretación.

2. Longitud de arco asociada a una función distancia sobre $R^n \times R^n$

En este capítulo se desarrolla lo descrito en la capítulo anterior para el caso particular en el que la variedad M sobre la cual se definen las funciones distancia generalizadas es R^n. En este espacio se presentan nuevas propiedades de las funciones distancia, tales como uniformidad (invariante bajo traslaciones) e isotropía (invariante bajo rotaciones).

2.1 Algunas definiciones

Sea S^n la *n-esfera euclidiana*, $S^n = \left\{ \mathbf{u} \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1 \right\} \subseteq R^n$.

Una función binaria $d : R^n \times R^n \to R$ cumple la propiedad PX, si para todo $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in R^n$ y para toda $\mathbf{u},\mathbf{v} \in S^n$:

P1. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \le d(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d(\mathbf{c},\mathbf{b})$	(*Desigualdad del triángulo*)
P2. $d(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$	(*Identidad*)
P3. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \ge 0$	(*No negatividad*)
P4. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b},\mathbf{a})$	(*Simetría*)
P5. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$	(*Definitoreidad*)
P6. $d(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = d(\mathbf{a},\mathbf{b})$	(*Uniformidad*)
P7. $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -d(\mathbf{b},\mathbf{a})$	(*Antisimetría*)
P8. $d(\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{v}\lambda) = d(\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{u}\lambda)$ para toda $\lambda > 0$ pequeña	(*Isotropía*)
P9. $d(\lambda\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}) = \lambda d(\mathbf{a},\mathbf{b})$ para toda $\lambda \in R$	(*Homogénea positiva de grado uno en* $\lambda > 0$).

Salvo en el caso trivial ($d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv 0$), (P7) es incompatible con (P3) y (P4). La propiedad (P6) de uniformidad de una función binaria significa que d es invariante bajo traslaciones, y se puede definir también de las siguientes dos formas equivalentes:

a) $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{0},\mathbf{b}-\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$;

b) $d(\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{c}) = d(\mathbf{b},\mathbf{b}+\mathbf{c})$ para todo $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in R^n$.

La propiedad (P8) de isotropía de una función binaria significa que d es invariante bajo rotaciones sobre el primer argumento cuando el segundo argumento se encuentra próximo a este.

Toda función binaria $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ se puede expresar de manera única como la suma de su *componente simétrico*, $d^+: R^n \times R^n \rightarrow R$, más su *componente antisimétrico*, $d^-: R^n \times R^n \rightarrow R$, i.e., $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d^+(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d^-(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$, definidos respectivamente por

$$d^+(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{a})}{2} \quad \text{y} \quad d^-(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{d(\mathbf{a},\mathbf{b}) - d(\mathbf{b},\mathbf{a})}{2} \qquad \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n.$$

Claramente d^+ es una función binaria simétrica y d^- una función binaria antisimétrica.

Una *función distancia* sobre R^n es una función binaria $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ que cumple la propiedad de identidad (P2).

Una *premétrica en* R^n es una función distancia que cumple la desigualdad del triángulo (P1).

Una *métrica débil* es una premétrica no negativa (P3). Una *cuasimétrica* es una métrica débil que cumple definitoreidad (P5) o en otras palabras, es una premétrica estrictamente positiva ($d(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$). Una *pseudométrica* es una métrica débil simétrica (P4). Una *métrica* es una pseudométrica que cumple la propiedad de definitoreidad (P5).

En la tabla 1 se da una clasificación de estas funciones distancia acomodada tal que resalte que la definición propuesta de función distancia (premétrica) es aquella función que cumple menos condiciones, comparada con otras que se encuentran en la literatura.

Tabla 1. Clasificación de las funciones distancia

Nombre	Desigualdad del triángulo e identidad (P1, P2)	No negatividad (P3)	Simetría (P4)	Definitoreidad (P5)
Premétrica	*V*			
Métrica débil	*V*	*V*		
Cuasimétrica	*V*	*V*		*V*
Pseudométrica	*V*	*V*	*V*	
Métrica	*V*	*V*	*V*	*V*

El siguiente teorema se puede demostrar directamente y permite construir nuevas funciones distancia a partir de combinaciones lineales positivas de funciones distancia:

***Teorema 2.1* (*Cerradura de las propiedades PX bajo combinaciones lineales positivas*).** Cada una de las propiedades (P1) a (P9) es cerrada bajo combinaciones lineales positivas: si $d_1, \ldots, d_m$ son m funciones binarias sobre R^n que cumplen la propiedad PX ($X = 1, \ldots, 9$) y $k_1, \ldots, k_m$, son m números reales no negativos, entonces la función binaria sobre R^n definida por $d = k_1 d_1 + \ldots + k_m d_m$ cumple la misma propiedad PX.

Por tanto, toda combinación lineal positiva de funciones distancia, premétricas, métricas débiles, cuasimétricas, pseudométricas o métricas es a su vez una función distancia, una premétrica, una métrica débil, una cuasimétrica, una pseudométrica o una métrica, respectivamente.

Un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en R^n cumple la *forma simple de la igualdad del triángulo* para una función binaria d: $R^n \times R^n \to R$ si

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{a},\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) \qquad \forall t \in [a, b] \tag{2.1}$$

para alguna representación paramétrica $\mathbf{x}$: $[a, b] \to R^n$ de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en R^n es un *arco inducido* por la función distancia d (o arco *d-inducido*) si cumple la *igualdad del triángulo*, es decir si para todo arreglo de tres puntos del arco satisface

$$d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(u)) = d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(u)) \quad \text{si } a \le s \le t \le u \le b \tag{2.1'}$$

No se pierde generalidad y en cambio se gana simplicidad en las demostraciones, si en esta definición de arco d-inducido se exige que el tercer punto, $\mathbf{x}(u)$, sea el extremo $\mathbf{b}$ del arco, es decir,

$$d(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) \qquad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b].$$

***Teorema 2.2* (*Definiciones equivalentes de arco d-conservativo*).** Sea una función binaria d: $R^n \times R^n \to R$. Para todo arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en R^n las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) *Igualdad del triángulo*:

$$d(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) \qquad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b] \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{x} : [a,b] \to R^n$, con $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$, es una representación paramétrica del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$;

(b) *Propiedad de aditividad*: la longitud de toda partición $P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$, $k \ge 1$, del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es igual a la distancia del inicio al final del arco, $d(\mathbf{a},\mathbf{b})$,

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b}) \in P[C(\mathbf{a},\mathbf{b})] \tag{2.3}$$

***Demostración*:**

Sea $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$ una partición del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y sea $\mathbf{x}$:$[a, b] \to R^n$ una representación paramétrica de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Entonces existen $s_1, s_2, \ldots, s_k \in (a,b)$, tales que a $s_0 < s_1 \ldots < s_k < s_{k+1} = b$, $k \ge 1$ y $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$.

$\Rightarrow$) Supóngase que $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ cumple la igualdad del triángulo, (2.2). Entonces $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ cumple la forma simple de la igualdad del triángulo, (2.1), que corresponde a la afirmación (2.3) para $k = 1$ (primer paso de la demostración por inducción). Si (2.3) se cumple para toda partición del intervalo $[a, b]$ de k puntos localizados arbitrariamente en el intervalo (a, b), $s_1, s_2, \ldots, s_k \in (a, b)$, donde $a = s_0 < s_1 \ldots < s_k < s_{k+1} = b$, $k \ge 1$, $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$, entonces (2.3) también se cumple si a esta sucesión se le adiciona un nuevo punto dentro del intervalo abierto (a, b), por decir $t \in (s_j, s_{j+1})$, $0 \le j \le k$, pues al despejar $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1}))$ de $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\mathbf{b})$ y aplicar (2.2) dos veces resulta,

$$
\begin{aligned}
d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{x}(s_{j+1})) &= d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\, \mathbf{b}) \\
&= d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\, \mathbf{b}) \\
&= d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\, \mathbf{b}) \\
&= d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{x}(s_{j+1}),
\end{aligned}
$$

y al sustituir $d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{x}(s_{j+1})) = d(\mathbf{x}(s_j),\, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{x}(s_{j+1}))$ en (2.3) se obtiene lo que se quiere demostrar.

$\Leftarrow$) Para las particiones a, s, t, b, y a, s, b, la igualdad (2.3) se escribe como $d(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a},\, \mathbf{x}(s)) + d(\mathbf{x}(s),\, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{b})$ y $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{a},\, \mathbf{x}(s)) + d(\mathbf{x}(s),\, \mathbf{b})$, respectivamente, y al resolver estas dos ecuaciones se obtiene (2.2).

$\square$

El teorema anterior muestra dos definiciones equivalentes de arco d-conservativo. La primera, a través de la igualdad del triángulo (2.2), expresa una ley de conservación de la d-distancia: para todo desplazamiento de un punto **x** a un punto **x'** sobre uno de estos arcos, con dirección a su punto final **b**, la reducción en la d-distancia de **x** al final del arco, $d(\mathbf{x},\, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}',\, \mathbf{b})$, es igual al aumento en la d-distancia de cualquier punto **x''** a **x,** donde **x''** se encuentra entre el inicio del arco **a** y **x**, $d(\mathbf{x}'',\, \mathbf{x}') - d(\mathbf{x}'',\, \mathbf{x})$, esto es, $d(\mathbf{x}'',\, \mathbf{x}') - d(\mathbf{x}'',\, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x},\, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}',\, \mathbf{b})$, lo cual se puede expresar en términos de (2.2): $d(\mathbf{x}'',\, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}',\, \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}'',\, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x},\, \mathbf{b})$. La segunda definición de arco inducido por una función distancia d, dada por la afirmación (b) del mismo teorema, expresa un principio conocido en la medición de distancias: la distancia de un punto **a** a un punto **b** es igual a la suma de las distancias entre puntos consecutivos, situados arbitrariamente a lo largo de un arco d-conservativo; el valor de esta suma no depende de la representación paramétrica del arco.

Corolario. Sea una función binaria d: $R^n \times R^n \to R$ y $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ un arco d-conservativo. Entonces:

(a) Todos los subarcos de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ son arcos d-conservativos;

(b) Todos los puntos de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ cumplen la propiedad de identidad $d(\mathbf{c},\, \mathbf{c}) = 0$ para todo $\mathbf{c} \in C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, y

(c) $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ cumple la forma simple de la igualdad del triángulo, ecuación (2.1).

***Demostración*:**

(a) Si $C'(\mathbf{a}',\mathbf{b}') \subseteq C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un subarco del arco d-conservativo $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, entonces por el teorema 2.2 todas las particiones del arco d-conservativo $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ cumplen (2.3), y en particular cualquier partición con la forma $(\mathbf{a},\, \mathbf{a}' = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}',\, \mathbf{b})$, es decir,

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{a},\mathbf{a}') + d(\mathbf{a}',\mathbf{b}') + d(\mathbf{b}',\mathbf{b}),$$

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{a},\mathbf{a}') + \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) + d(\mathbf{b}',\mathbf{b}),$$

y por tanto $d(\mathbf{a}',\mathbf{b}') = \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$ para cualquier partición $(\mathbf{a}',\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2, \ldots,\mathbf{x}_k, \mathbf{b}')$. Por tanto $C'(\mathbf{a}',\mathbf{b}')$ es un arco d-conservativo.

(b) Al hacer $t = s$ en la igualdad (2.2), resulta $d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) = 0$ para todo t en $[a, b]$.

(c) La igualdad (2.1) se obtiene de (2.2) haciendo $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a}$.

□

Por el inciso (b) del corolario anterior, la propiedad de identidad (P2) es una condición necesaria para que una función binaria induzca arcos. Por tal motivo esta es la condición mínima para que una función binaria sea una función distancia. Una función distancia en general podrá inducir más de un arco entre dos puntos dados de R^n. El contraejemplo 8.1 muestra que una premétrica puede ser una métrica continua y no inducir arcos para al menos algunos pares de puntos.

2.2 *d*-geodésicas

La definición que proponemos permite que por dos puntos dados pase incluso una infinidad de curvas d-geodésicas, como es el caso de las métricas L_1 y L_∞ (sección 4.2).

Un par ordenado de arcos $C(\mathbf{a},\mathbf{c})$, $C(\mathbf{c},\mathbf{b})$ en R^n es *concatenable* si el final del primer arco coincide con el inicio del segundo, en cuyo caso la *concatenación* de estos dos arcos es la unión de ambos, se denota por $C(\mathbf{a},\mathbf{c}) \oplus C(\mathbf{c},\mathbf{b})$, y es un arco con inicio en el inicio $\mathbf{a}$ de $C(\mathbf{a},\mathbf{c})$, y final en el final $\mathbf{b}$ de $C(\mathbf{c},\mathbf{b})$. En general, un conjunto ordenado de k arcos es concatenable si el final de cada arco coincide con el inicio del siguiente. Por tanto, se pueden concatenar las representaciones paramétricas $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_k$ de arcos concatenables $C_1, \ldots,C_k$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1\ldots\oplus\ldots\mathbf{x}_k$ es una representación paramétrica del arco concatenado, $C_1\ldots\oplus\ldots C_k$. En general, para cualquier partición $(\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$ de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en R^n, los respectivos subarcos $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \subset C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $i= 0,\ldots,k$ son concatenables, de modo que $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) = C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)\ldots\oplus\ldots C(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$. Cualquier arco con ciclos se puede representar concatenando arcos simples y cualquier arco clase C^1 por pedazos es una concatenación de arcos simples clase C^1.

La propiedad que caracteriza a los arcos d-conservativos, de que todos sus subarcos son también arcos d-conservativos (corolario teorema 2.2), se puede entonces ampliar, y definir *curva d-inducida* como toda curva cuyos subarcos suficientemente pequeños son arcos d-conservativos, y *curva d-geodésica* como una curva que no puede ser extendida cuyos subarcos suficientemente pequeños son arcos d-conservativos. Por tanto, una curva d-geodésica es una curva tal que todas sus tercias de puntos suficientemente próximos cumplen la igualdad del triángulo. Cabe hacer notar que los arcos d-conservativos y las d-geodésicas son curvas d-inducidas.

La concatenación $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ de dos curvas d-inducidas $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ es curva d-inducida, siempre que el extremo común, $\mathbf{b}$ sea un punto interior de algún subarco d-

conservativo de la concatenación, $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$. En estas condiciones, se dice que el arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es una *extensión* (*hacia atrás*) del arco $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$, y que el arco $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ es una *extensión* (*hacia adelante*) del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Resulta el siguiente teorema.

***Teorema 2.3.* (*El conjunto de las curvas d-inducidas es cerrado respecto de la operación de extensión*).** Si $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ son dos curvas d-inducidas concatenables, cuyo extremo común, **b**, es un punto interior de algún subarco d-conservativo de $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$, entonces $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ es una curva d-inducida. □

Las curvas d-inducidas son de dos clases, las que admiten alguna extensión, es decir, que están contenidas en alguna curva d-inducida, y las que no. Estas últimas se denominan *curvas d-geodésicas* o simplemente *d-geodésicas*. Puesto que todo arco d-conservativo es una curva d-inducida, resulta que todo arco d-conservativo está contenido en alguna curva d-geodésica.

Cuando una d-geodésica tiene un extremo, al final, por ejemplo, significa que ella no puede ser extendida hacia adelante con un nuevo arco d-conservativo, lo cual podrá deberse a discontinuidades de la función distancia o sus derivadas.

Una función distancia es *completa* si todo par ordenado de puntos **a**,**b** en R^n está conectado por un arco d-conservativo, o equivalentemente, si todo par ordenado de puntos está conectado por una d-geodésica. Para algunas funciones distancia, como es el caso de la métrica euclidiana, todo tramo de una d-geodésica es un arco d-conservativo, pero esto no es lo general, porque puede ocurrir que un tramo *suficientemente grande* entre **a** y **b** de una d-geodésica no sea un arco d-conservativo, pero si se considera que la función distancia d es completa, entonces existirá al menos un arco d-conservativo de **a** a **b**, que forma parte de otra d-geodésica que los conecta.

Para una función distancia completa cualquier arco d-conservativo $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se puede extender hasta llegar a ser una d-geodésica. Esta d-geodésica contendrá por supuesto a dicho arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y está contenida en el conjunto,

$$G(\mathbf{a},\mathbf{b}) = C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \cup G^{+}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \cup G^{-}(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

donde $G^{+}(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $G^{-}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ son extensiones hacia adelante y hacia atrás de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, dados respectivamente por

$$G^{+}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^n \mid d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{x}) = d(\mathbf{a},\mathbf{x})\}$$
$$G^{-}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{y} \in R^n \mid d(\mathbf{y},\mathbf{a}) + d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{y},\mathbf{b})\}$$

El siguiente teorema establece que las líneas rectas son d-geodésicas, aunque no necesariamente las únicas, de toda función distancia que sea uniforme y homogénea de grado uno.

***Teorema 2.4.* (*Las líneas rectas son d-geodésicas, no necesariamente las únicas, de las funciones distancia uniformes y homogéneas de grado uno*).** Si d: $R^n \times R^n \to R$ es una función distancia uniforme (P6) y homogénea de grado uno (P9), entonces cada línea recta de R^n es una d-geodésica.

***Demostración*:**

Sean $\mathbf{a}$ un punto de R^n, $\mathbf{v}$ una dirección de R^n y s, t y b tres números reales tales que $s < t < b$. La demostración consiste en probar que los puntos $\mathbf{a} + s\mathbf{v}$, $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ y $\mathbf{a} + b\mathbf{v}$, que se encuentran alineados sobre una recta, cumplen la igualdad del del triángulo (2.2), para lo cual se usa la propiedad de uniformidad (P6) (el valor de la función d no se altera si se le suma o se le resta el mismo valor a sus dos argumentos), y la condición de homogeneidad positiva (P9) (los factores comunes en los argumentos de d se pueden factorizar):

$$d(\mathbf{a} + s\mathbf{v}, \mathbf{a} + t\mathbf{v}) + d(\mathbf{a} + t\mathbf{v}, \mathbf{a} + b\mathbf{v}) - d(\mathbf{a} + s\mathbf{v}, \mathbf{a} + b\mathbf{v}),$$

por la propiedad (P6), se tiene que:

$$d(\mathbf{a} + s\mathbf{v}, \mathbf{a} + t\mathbf{v}) + d(\mathbf{a} + t\mathbf{v}, \mathbf{a} + b\mathbf{v}) - d(\mathbf{a} + s\mathbf{v}, \mathbf{a} + b\mathbf{v}) = d(s\mathbf{v}, t\mathbf{v}) + d(t\mathbf{v}, b\mathbf{v}) - d(s\mathbf{v}, b\mathbf{v}),$$

nuevamente, por la propiedad (P6) si se resta $s\mathbf{v}$**,** $t\mathbf{v}$ y $s\mathbf{v}$ al primer argumento de la última igualdad, se obtiene:

$$d(s\mathbf{v}, t\mathbf{v}) + d(t\mathbf{v}, b\mathbf{v}) - d(s\mathbf{v}, b\mathbf{v}) = d(\mathbf{0}, (t-s)\mathbf{v}) + d(\mathbf{0}, (b-t)\mathbf{v}) - d(\mathbf{0}, (b-s)\mathbf{v}),$$

y por la propiedad de uniformidad (P9), se cumple que:

$$\begin{aligned} &d(\mathbf{0}, (t - s)\mathbf{v}) + d(\mathbf{0}, (b - t)\mathbf{v}) - d(\mathbf{0}, (b - s)\mathbf{v}) = \\ &= (t - s)d(\mathbf{0}, \mathbf{v}) + (b - t)d(\mathbf{0}, \mathbf{v}) - (b - s)d(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

por lo que se cumple la igualdad del triángulo (2.2). Por tanto toda línea recta es un d-geodésica. □

2.3 Conos conservativos, funciones *d*-desviación, fundamental, y postfundamental

Se define una función de tres variables, llamada función d-desviación, la cual depende de dos puntos en R^n, uno "inicial" y el otro "final", y de una "dirección", la cual se asocia al punto "inicial". Esta función se anula únicamente si la "dirección" coincide con la tangente en el punto "inicial" de algún arco d-conservativo que va del punto "inicial" al punto "final". A partir de esta función se define el cono d-conservativo de un punto "inicial" a otro "final", con vértice en el primero, como el conjunto de las direcciones en el punto "inicial" de los arcos d-conservativos que van del punto "inicial" al "final". Se define también la función fundamental $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ asociada a una función distancia, con dos argumentos: una posición $\mathbf{x}$ y una dirección $\mathbf{v}$. El valor de esta función, F, representa el factor por el que hay que multiplicar una unidad de avance en el parámetro s del camino para obtener la correspondiente d-longitud del segmento de arco que parte de $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$.

Sea $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ un arco d-conservativo de una función distancia d: $R^n \times R^n \to R$, y $\mathbf{x}$: $[a, b] \to R^n$ una representación paramétrica de este arco, diferenciable por la derecha en $s \in [a, b]$. Entonces el subarco $C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+h)) \subseteq C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un arco d-conservativo, el cual, para h positiva suficientemente pequeña se puede aproximar por un segmento de recta tangente por la derecha al arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en $s \in [a,b]$. Por tanto existe una transformación lineal $\boldsymbol{\lambda}(s)^+$: $[a, b] \to R^n$, que es la derivada por la derecha de la función $\mathbf{x}$ en $s \in [a, b]$, cuya imagen se denota también por $\mathbf{x}$. La dirección de $\boldsymbol{\lambda}(s)^+$ se denota por $\mathbf{v}$, que es el vector tangente por la derecha al arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en el punto $\mathbf{x}$. Por ser $C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+h))$ un tramo del arco d-conservativo $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, para h positiva suficientemente pequeña se cumple la igualdad del triángulo,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}+h\mathbf{v}) + d(\mathbf{x}+h\mathbf{v}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0 .$$

Supóngase que la función distancia d es *diferenciable en el punto* $\mathbf{x}$ *con dirección* $\mathbf{v}$ y *con destino* $\mathbf{b}$, esto es, que existe el límite que define a la función $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ dada por:

$$D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}+h\mathbf{v}) + d(\mathbf{x}+h\mathbf{v}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{h} .$$

Por lo anterior, si existe un arco d-conservativo del punto $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{b}$ diferenciable por la derecha en $\mathbf{x}$, y $\mathbf{v}$ tiene la dirección de la tangente al arco en el punto $\mathbf{x}$, entonces, por cumplir el numerador la igualdad del triángulo, se obtiene que $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = 0$.

Si $D(\mathbf{x},\cdot,\mathbf{b})$ es una función continua, entonces $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ es una medida de la desviación de $\mathbf{v}$ respecto de la tangente en $\mathbf{x}$ a un arco d-conservativo que va de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$, tomando el valor cero cuando ambas direcciones coinciden.

Si la expresión que define a D se descompone en dos términos, uno que depende del punto inicial y el otro que depende del punto final, se tiene:

$$D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}+h\mathbf{v})}{h} - \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}+h\mathbf{v}, \mathbf{b})}{h}, \quad \mathbf{x},\mathbf{v} \in R^n \times R^n \tag{2.4}$$

o lo que es lo mismo,

$$D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = F(\mathbf{x},\mathbf{v}) - G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}),$$

donde las funciones F: $R^n \times R^n \to R$ y G :$R^n \times R^n \times R^n \to R$, denominadas *función d-fundamental* y *función postfundamental*, (*de la función distancia d*), respectivamente, se definen por

$$F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}+h\mathbf{v})}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}+h\mathbf{v}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{h} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in R^n \tag{2.5}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}+h\mathbf{v},\mathbf{b})}{h} \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b} \in R^n \tag{2.6}$$

Por cumplir d la condición de identidad, $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ dada por (2.5) es la derivada direccional unilateral de la función d en $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ con respecto a $\mathbf{v}$.

El valor de $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ representa la tasa de aumento en la d-distancia del punto $\mathbf{x}$ al punto cercano $\mathbf{x}+h\mathbf{v}$, debido a un desplazamiento pequeño a partir de $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$.

El valor de $G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ representa la tasa de reducción en la distancia del punto $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{b}$, debido a un desplazamiento pequeño a partir de $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$.

El siguiente teorema se refiere a las funciones F, G y D restringidas a un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, las cuales se expresan en términos de una parametrización $\mathbf{x} : [a,b] \to R^n$ mediante

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = \lim_{\Delta s\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s)}{\Delta s}. \tag{2.7}$$

$$G(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b}) = \lim_{\Delta s\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s, \mathbf{b})}{\Delta s},$$

obteniendo D:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b}) &= F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) - G(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b}) \\ &= \lim_{\Delta s\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s)}{\Delta s} - \lim_{\Delta s\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s, \mathbf{b})}{\Delta s}, \end{aligned}$$

donde $\dot{\mathbf{x}}(s)$ es la derivada de $\mathbf{x}$ respecto de s.

***Teorema 2.5* (*Homogeneidad positiva de las funciones F, G y D*).** Las funciones F, G y D, definidas por (2.4)-(2.6), cumplen:

(a) Son homogéneas positivas de grado uno[1] en el segundo argumento.

(b) Los valores $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds$, $G(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b})ds$ y $D(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b})ds$ no dependen de la representación paramétrica de $\mathbf{x}$, es decir, son invariantes bajo una transformación de la forma $s = s(t)$, con $ds/dt > 0$.

***Demostración*:**

(a) Las funciones F y G son funciones homogéneas positivas de grado uno en el segundo argumento, porque para $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{v}) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \alpha h\mathbf{v})}{h} = \alpha \lim_{h\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \alpha h\mathbf{v})}{\alpha h} \\ &= \alpha \lim_{\beta\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \beta\mathbf{v})}{\beta} = \alpha F(\mathbf{x},\mathbf{v}). \end{aligned}$$

[1] Una función real f es *homogénea positiva de grado uno* si $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ para toda $\lambda > 0$.

$$G(\mathbf{x},\alpha\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lim_{h\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{b})-d(\mathbf{x}+\alpha h\mathbf{v},\mathbf{b})}{h} = \alpha\lim_{h\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{b})-d(\mathbf{x}+\alpha h\mathbf{v},\mathbf{b})}{\alpha h}$$
$$= \alpha\lim_{\beta\to 0^+}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{b})-d(\mathbf{x}+\beta\mathbf{v},\mathbf{b})}{\beta} = \alpha\, G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$$

Por tanto D es también homogénea positiva en el segundo argumento.

(b) Dado que F no depende explícitamente del parámetro s y por ser F una función homogénea positiva de grado uno en el segundo argumento, $F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))ds$ es invariante frente a una transformación de la forma $s = s(t)$, con $ds/dt > 0$:

$$F(\mathbf{x}, d\mathbf{x}(t)/dt)dt = F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}ds/dt)dt = F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})(ds/dt)dt = F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})ds.$$

y similarmente para las funciones G y D.

□

Nota: $ds/dt > 0$ implica que la función $s(t)$ es invertible y que ambas representaciones del arco tienen la misma dirección de recorrido.

El inciso (b) del teorema 2.5 expresa que la función fundamental de una función distancia no depende explícitamente del parámetro s. Esta afirmación no aplica cuando $n = 1$ porque el parámetro de la representación paramétrica de los arcos es también la variable coordenada.

El siguiente teorema establece que si la función fundamental de una función distancia existe y es continua en todo su dominio, entonces los arcos d-conservativos forman un campo de direcciones tal que en cada punto y en cada dirección pasa un arco d-conservativo, y por tanto en cada punto y en cada dirección pasa una d-geodésica.

***Teorema 2.6* (*Existencia de un arco d-conservativo para cada dirección*).** Si la función fundamental F de una función distancia d: $R^n \times R^n \to R$ es una función continua sobre una vecindad de $\mathbf{a}\in R^n$, entonces para cada dirección $\mathbf{v}\in R^n$ existe un arco d-conservativo que parte de $\mathbf{a}$ en la dirección $\mathbf{v}$.

***Demostración*:**

Por la continuidad de $F(\mathbf{a},\mathbf{v})$, existe un $\varepsilon>0$ tal que sobre la imagen del camino $\mathbf{x}$: $[0,\varepsilon] \to R^n$, dado por $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} + s\mathbf{v}$, $0 \le s \le \varepsilon$, la función F permanece **constante**, es decir, $F(\mathbf{x}(s),\mathbf{v}) = F(\mathbf{a},\mathbf{v})$, $0 \le s \le \varepsilon$. Por la definición (2.7) de la función F y por ser F integrable en el intervalo $[0, \varepsilon]$, para una Δs suficientemente pequeña, la función distancia d sobre este arco está dada por

$$d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) = \int_s^t F(\mathbf{x}(s'),\dot{\mathbf{x}}(s'))ds' = F(\mathbf{a},\mathbf{v})(t-s) \quad \text{para todo } 0\le s\le t\le\varepsilon$$

y cumple la igualdad del triángulo (2.2):

$$d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(\varepsilon)) - d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(\varepsilon)) = F(\mathbf{a},\mathbf{v})\,[(t-s) + (\varepsilon - t) - (\varepsilon - s)] = 0.$$

La imagen de $\mathbf{x}$, que es el segmento de recta de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{x}(\varepsilon)$, tiene dirección $\mathbf{v}$ y es un arco d-conservativo pequeño. □

2.3.1 Interpretación de las funciones fundamental, postfundamental y *d*-desviación

Como se muestra en detalle, $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$, $G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ y $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ representan las siguientes razones de cambio respecto del parámetro s cuando el punto $\mathbf{x}$ se desplaza en la dirección $\mathbf{v}$, pasando de la posición $\mathbf{x}$ a una posición cercana $\mathbf{x}+\mathbf{v}\,\Delta s$:

$F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ es la razón de cambio en la dirección $\mathbf{v}$ de la función $d(\mathbf{x},\mathbf{x})$ respecto del segundo argumento.

$G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ es la razón de cambio en la dirección $\mathbf{v}$ de la función $d(\mathbf{x},\mathbf{b})$ respecto del primer argumento.

La diferencia $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = F(\mathbf{x},\mathbf{v}) - G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ vale cero si y solamente si, la dirección de $\mathbf{v}$ coincide con la tangente en $\mathbf{x}$ a un arco d-conservativo que va de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$; es positiva si la tasa de alejamiento de $\mathbf{a}$ es mayor que la tasa de acercamiento a $\mathbf{b}$, y negativa en caso contrario. $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ es entonces la tasa a la que se desvía de cero la igualdad del triángulo cuando $\mathbf{x}$ se mueve en la dirección $\mathbf{v}$.

Lo anterior se puede ilustrar como sigue. considérese un punto $\mathbf{x}$ de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, cuya tangente en la dirección hacia $\mathbf{b}$ tiene dirección $\mathbf{v}$. Sea el segmento de recta en R^n, $C(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{v})$, que parte de $\mathbf{x}$ y termina en $\mathbf{x}+\mathbf{v}$, con representación paramétrica $\mathbf{z}$: $[0,1]\to R^n$, dada por $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}+t\mathbf{v}$, $0 \le t \le 1$. Si suponemos que la longitud de este segmento es suficientemente pequeña, las funciones F, G y D permanecen constantes a lo largo de dicho segmento, y el segmento $C(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{v})$ queda contenido en $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Entonces para todo $t\in[0,1]$ la d-distancia de $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{z}(t)$ vale $F(\mathbf{x},\mathbf{v})t$ y la d-distancia de $\mathbf{z}(t)$ a $\mathbf{b}$ vale $G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})t$. Por el inciso (b) del teorema 2.5, $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ y $G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ no dependen de la representación paramétrica del camino $\mathbf{z}$, y por tanto, $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ y $G(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$ son constantes que representan las tasas de cambio mencionadas en el párrafo anterior.

Por tanto, una condición necesaria para que un arco $C(\mathbf{x},\mathbf{b})$ diferenciable por la derecha del punto $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{b}$ sea un arco d-conservativo, es que la tangente, $\boldsymbol{\lambda}(x)^+$, al arco por la derecha en el punto $\mathbf{x}$, cumpla que $D(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}(x)^+, \mathbf{b}) = 0$, es decir, que la dirección de $\boldsymbol{\lambda}(x)^+$ esté contenida en el conjunto

$$K(\mathbf{x},\mathbf{b}) = \left\{\mathbf{v}\in R^n \mid D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = 0\right\}.$$

En el inciso (a) del teorema 2.5, se demostró que la función d-desviación D, es una función homogénea positiva de grado uno en el segundo argumento: $D(\mathbf{x},\lambda\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lambda D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$. Por esto, para toda $\lambda > 0$ se cumple que $\mathbf{v}\in K(\mathbf{x},\mathbf{b})$ implica $\lambda\mathbf{v}\in K(\mathbf{x},\mathbf{b})$. Esto es: el conjunto $K(\mathbf{x},\mathbf{b})$ que es el conjunto de vectores $\mathbf{v}$ que satisfacen $D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = 0$, también cumplirán con $D(\mathbf{x},\lambda\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lambda D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lambda(0) = 0$, es decir que todos los múltiplos escalares de los vectores $\mathbf{v}$, $\lambda\mathbf{v}$, cumplen con la definición de K, y por tanto $K(\mathbf{x},\mathbf{b})$ es un cono, denominado *cono d-conservativo en* $\mathbf{x}\in R^n$ *hacia* $\mathbf{b}\in R^n$.

Se tiene entonces el siguiente teorema.

***Teorema 2.7* (*Condiciones para la existencia de arcos d-conservativos*).** Sean d: $R^n \times R^n \to R$ una función distancia, $\mathbf{x}$: $[a, b] \to R^n$ una representación paramétrica diferenciable por la derecha del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y $\boldsymbol{\lambda}(s)^+$ la derivada por la derecha del camino $\mathbf{x}$ en s. Entonces:

(a) Si existe un arco d-conservativo de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$, entonces el cono d-conservativo en $\mathbf{x} \in R^n$ hacia $\mathbf{b} \in R^n$ es no vacío, $K(\mathbf{x},\mathbf{b}) \neq \varnothing$.

(b) $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco d-conservativo si y sólo si para todo $s \in [a, b]$ se cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones equivalentes:

  (*i*) $D(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\lambda}(s)^+, \mathbf{b})$ existe y vale cero;

  (*ii*) $\boldsymbol{\lambda}(s)^+ \in K(\mathbf{x}(s), \mathbf{b})$.

□

2.4 Longitud de un arco asociada a una función distancia d:$R^n \times R^n \to R$

Una función distancia, cuya función fundamental es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), determina una funcional[2] sobre el conjunto de los arcos suaves por pedazos, la cual a cada arco suave le asocia un número real, denominado d-longitud del arco. Esta funcional es aditiva respecto de la concatenación de arcos, en el sentido que la d-longitud de un arco se puede descomponer como la suma de las d-longitudes de los subarcos que lo componen. Se muestra que la d-longitud de un arco d-conservativo es igual a la d-distancia entre sus extremos. Se dan condiciones suficientes para que una función distancia d sea completa, es decir, para que induzca al menos un arco para cada par ordenado de puntos.

***Teorema 2.8* (*Condiciones para que una función distancia d determine una funcional longitud cuyo valor en un arco d-conservativo es la d-distancia entre sus extremos*).** Una función distancia d: $R^n \times R^n \to R$ cuya función fundamental F es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (y por tanto integrable) determina una funcional $\ell_d : \Omega \to R$ sobre el conjunto Ω de los arcos suaves por pedazos, y está dada por:

$$\ell_d(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))\, ds\,, \qquad \forall\, C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \Omega \qquad (2.8)$$

El valor de esta funcional para un arco d-conservativo, $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, es igual a la d-distancia entre sus extremos, es decir, $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$.

***Demostración*:**

Sea una función distancia d: $R^n \times R^n \to R$ cuya función fundamental F: $R^n \times R^n \to R$ dada por (2.5) es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable). Entonces para cada arco suave por pedazos

[2] Una *funcional* se puede definir como una función cuyo dominio es un conjunto de funciones y cuyo rango está en R.

$C(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\Omega$ la integral (2.8) existe y por (b) del teorema 2.5, el valor $\ell_d\,(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ no depende de su parametrización $\mathbf{x}$:$[a,\ b]\to R^n$. Para demostrar la última afirmación del teorema, sea P = ($\mathbf{a} = \mathbf{x}(s_0)$, $\mathbf{x}(s_1)$, …, $\mathbf{x}(s_{k+1}) = \mathbf{b}$) una partición de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, donde s_1, s_2, … , $s_k\in(a,b)$, $a = s_0 < s_1$ … $< s_k < s_{k+1} = b$. Si $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco d-conservativo, entonces la igualdad (2.3) se cumple para toda partición del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, incluyendo la del paso al límite que define la integral de Riemann:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds = \ell_d\ (C(\mathbf{a},\mathbf{b}))\,. \qquad \square$$

La función $\ell_d : \Omega \to R$ se denomina *funcional longitud de la función distancia d* y el valor $\ell_d\,(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ es la *d-longitud del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$*.

Por la aditividad de la integral de Riemann, para toda partición ($\mathbf{a} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$) de un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\Omega$, la funcional longitud de una función distancia d cumple la *propiedad de aditividad* respecto de la concatenación de arcos:

$$\ell_d\,(C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)\oplus\cdots\oplus C(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_{k+1})) = \sum_{i=0}^{k}\ell_d\,(C(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}))\,. \qquad (2.9)$$

2.5 Premétricas y arcos mínimos

Para que la d-distancia de un punto a otro sea precisamente la d-longitud del arco de mínima d-longitud entre ellos es necesario y suficiente que la función distancia d sea una premétrica, y que entre dichos extremos exista un arco d-conservativo inducido por la función distancia. En estas condiciones, los arcos d-conservativos y los arcos d-mínimos coinciden. Esta igualdad establece una relación entre la función distancia d y su función fundamental F, que es precisamente la relación inversa de la ecuación (2.5) que define a la función fundamental F en términos de su d-distancia. Dicha igualdad permite obtener una premétrica a partir de su función fundamental mediante un problema variacional simple (sin restricciones) el cual puede resolverse mediante las ecuaciones de Euler Lagrange.

El siguiente teorema establece que la desigualdad del triángulo equivale a una condición de subaditividad de la función distancia. Esta equivalencia se usa para mostrar que en una premétrica los arcos d-conservativos son arcos d-mínimos.

***Teorema 2.9.* (*La desigualdad del triángulo como una condición de subaditividad*)** Una función binaria $d : R^n \times R^n \to R$ cumple la desigualdad del triángulo (P1) si y solo si cumple la propiedad de *subaditividad* siguiente: la d-distancia $d(\mathbf{a},\mathbf{b})$ entre los puntos extremos de una sucesión P= ($\mathbf{a} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$) $\in P[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ con inicio $\mathbf{a}$ y final $\mathbf{b}$, es menor o igual que la longitud de la sucesión, $\Lambda(P)$, es decir,

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in \mathcal{P}[\mathbf{a},\mathbf{b}], \tag{2.10}$$

o sea, $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq \Lambda(P)$ para toda $P \in \mathcal{P}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

***Demostración*:**

Sea $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$ una partición del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y $\mathbf{x}: [a, b] \to R^n$ una representación paramétrica de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Entonces existen $s_1, s_2, \ldots, s_k \in (a,b)$, tales que $a = s_0 < s_1 \ldots < s_k < s_{k+1} = b$, $k \geq 1$ y $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$.

$\Rightarrow$) Para $k = 1$ la igualdad (2.10) expresa la desigualdad del triángulo (P1).

$\Leftarrow$) Ahora se muestra por inducción que la desigualdad del triángulo va a implicar (2.10). Supóngase que d cumple la desigualdad del triángulo (P1). Entonces para $k = 1$ (primer paso de la demostración por inducción) se cumple (2.10). Si (2.10) se cumple para toda partición del intervalo $[a, b]$ de k puntos localizados arbitrariamente en el intervalo (a,b), $s_1, s_2, \ldots, s_k \in (a,b)$, donde $a = s_0 < s_1 \ldots < s_k < s_{k+1} = b$, $k \geq 1$, $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \ldots$, $\mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$, entonces (2.10) también se cumple si a esta sucesión se le adiciona un nuevo punto dentro del intervalo abierto (a,b), digamos $t \in (s_j, s_{j+1})$, $0 \leq j \leq k$, pues al despejar $d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(s_{j+1}))$ de $d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{b}) \leq d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\mathbf{b})$ y aplicar (2.2) dos veces resulta,

$$d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(s_{j+1})) \geq d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\mathbf{b}) \geq d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\mathbf{b}) \geq$$
$$d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}),\mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(s_{j+1})),$$

y al sustituir $d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(s_{j+1})) \geq d(\mathbf{x}(s_j),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(s_{j+1}))$ en la ecuación (2.10) se obtiene lo que se quiere demostrar. □

Un arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \Omega$ es un *arco d-mínimo* de **a** a **b**, si resuelve

$$\ell_d(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds, \; C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \Omega \tag{2.11}$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \to R^n$ es una parametrización de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. El correspondiente valor $\ell_d(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ es la *d-longitud mínima de los arcos* de **a** a **b**.

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que la d-distancia entre dos puntos cualesquiera sea igual a la correspondiente d-longitud mínima. Esta igualdad constituye una relación entre d y F, que es precisamente la relación inversa de la ecuación (2.5) que define a la función fundamental F en términos de su d-distancia.

***Teorema 2.10* (*Condiciones para que la d-longitud mínima y la d-distancia de un punto a otro sean iguales*).** Si $d: R^n \times R^n \to R$ es una función distancia completa cuya función fundamental F es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), entonces las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) La función distancia $d: R^n \times R^n \to R$ cumple la desigualdad del triángulo (P1);

(b) La d-distancia de un punto **a** a un punto **b** es igual a la d-longitud mínima de **a** a **b**:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds\,,\ \forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in R^n. \tag{2.12}$$

***Demostración*:**

(a) $\Rightarrow$ (b): Supóngase que d cumple la desigualdad del triángulo (P1) y que $C(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\Omega$ es un arco suave por pedazos con una parametrización $\mathbf{x}:[a,b]\to R^n$. Entonces, por el teorema 2.9, para *cualquier partición* P = ($\mathbf{a}$ = $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_{k+1}$ = $\mathbf{b}$) $\in P[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se cumple la desigualdad (2.10), y al tomar en cuenta la definición de la integral de Riemann y por la definición (2.8) de $\ell_d\,(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ resulta:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \le \sum_{i=0}^{k} d\,(\mathbf{x}(s_i),\mathbf{x}(s_{i+1})) \le \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds = \ell_d\,(C(\mathbf{a},\mathbf{b})).$$

Por ser d completa, existe un arco d-conservativo $C_0(\mathbf{a},\mathbf{b})$ de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, el cual por el teorema 2.8 cumple $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell_d\,(C_0(\mathbf{a},\mathbf{b}))$. Por tanto $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \ell_d\,(C_0(\mathbf{a},\mathbf{b})) \le \ell_d\,(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ para todo $C(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\Omega$, pero como $C_0(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\Omega$, resulta que este arco, $C_0(\mathbf{a},\mathbf{b})$, es una arco con d-longitud mínima, es decir cumple (2.12).

(b) $\Rightarrow$ (a): Por ser d completa existen arcos d-conservativos suaves por pedazos $C_0(\mathbf{a},\mathbf{c})$, $C_0(\mathbf{c},\mathbf{b})$ y $C_0(\mathbf{a},\mathbf{b})$, que van de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$, de $\mathbf{c}$ a $\mathbf{b}$ y de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, respectivamente, por el teorema 2.8 y la igualdad (2.12) estos arcos resuelven los mínimos

$$d(\mathbf{a},\mathbf{c}) = \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{c}]}} \int_a^c F(\mathbf{y}(s),\dot{\mathbf{y}}(s))\,ds\,,$$

$$d(\mathbf{c},\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{c},\mathbf{b}]}} \int_c^b F(\mathbf{z}(s),\dot{\mathbf{z}}(s))\,ds\,,$$

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds\,.$$

La concatenación de $C_0(\mathbf{a},\mathbf{c})$ y $C_0(\mathbf{c},\mathbf{b})$ es un arco $C_0(\mathbf{a},\mathbf{c})\oplus C_0(\mathbf{c},\mathbf{b})$ de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, por lo que usando la aditividad de la funcional longitud, expresada por la igualdad (2.9),

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d(\mathbf{c},\mathbf{b}) &= \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{c}]}} \int_a^c F(\mathbf{y}(s),\dot{\mathbf{y}}(s))\,ds + \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{c},\mathbf{b}]}} \int_c^b F(\mathbf{z}(s),\dot{\mathbf{z}}(s))\,ds \\ &= \ell_d\,(C_0(\mathbf{a},\mathbf{c})\oplus C_0(\mathbf{c},\mathbf{b})) \ge \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds = d\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Con lo que se llega a que $d(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d(\mathbf{c},\mathbf{b}) \ge d(\mathbf{a},\mathbf{b})$, que es lo que se quería demostrar.

En cuanto a esta última parte de la demostración, cabe señalar que la primera igualdad es por la definición de la d-distancia, la segunda igualdad se debe a que los arcos $C_0(\mathbf{a},\mathbf{c})$ y $C_0(\mathbf{c},\mathbf{b})$ son d-conservativos y la desigualdad $\ge$ es por propiedad de los mínimos).

$\square$

d d

***Teorema 2.11* (*En una premétrica los arcos d-conservativos son arcos d-mínimos*).**

$d \ R^n \times R^n \to R$ F

$\ell_d \ \Omega \to R$

$d \ \mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \leq \ell_d \ C \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}$ $C \ \mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \in \Omega$

$d \ \mathbf{a} \ \mathbf{b} \ = \ell_d \ C \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}$ $C \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}$ d

d d

***Demostración*:**

$C \ \mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \in \Omega$ $\mathbf{x} \ \ a \ \ b \to$

ecuación (2.11), y por el inciso (b) del teorema 2.10, $\ell_d(C(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ cumple la ecuación (2.12). Entonces, por la aditividad de la integral de Riemann respecto a concatenaciones, y porque el mínimo global implica mínimos locales, para toda partición de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ se cumple:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x}\in\Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\,ds = \sum_{i=0}^{k} \min_{\mathbf{x}\in\Omega} \int_{\mathbf{x}(s_i)}^{\mathbf{x}(s_{i+1})} F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s)) = \sum_{i=0}^{k} d(\mathbf{x}(s_i),\mathbf{x}(s_{i+1})) \,.$$

Esta igualdad es la condición (2.3) para que el arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ sea un arco *d*-conservativo.

□

2.6 Propiedades de una premétrica a partir de su función fundamental

La función fundamental nos permite encontrar algunas propiedades de su premétrica, tales como uniformidad, isotropía, simetría y antisimetría.

Sea d una premétrica completa de clase C^1 en R^n con $n \geq 2$. La premétrica d es *isotrópica en un punto* $\mathbf{x}\in R^n$ si su función fundamental F satisface la igualdad: $F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{x},\mathbf{u})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}\in S^n$ en caso contrario, d es *anisotrópica en* $\mathbf{x}\in R^n$. Isotropía significa que la función fundamental $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$, no depende de la dirección $\mathbf{v}$. Si la premétrica d es isotrópica en todos los puntos de su dominio, decimos que d es *isotrópica sobre* R^n, en cuyo caso $F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ no depende explícitamente de $\mathbf{v}$ para toda $\mathbf{x}\in R^n$. Si d no es isotrópica sobre R^n entonces es *anisotrópica sobre* R^n. Una premétrica d completa es *uniforme* (invariante bajo traslaciones), si y sólo si $F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{y},\mathbf{v})$ $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y}\in R^n$ y $\forall\, \mathbf{v}\in S^n$, lo cual equivale a que F no dependa de $\mathbf{x}$.

En la siguiente tabla se resumen algunas de las propiedades que tiene una premétrica a partir de propiedades que cumple la función fundamental correspondiente a dicha premétrica, también se mencionan ejemplos de premétricas para cada caso.

Tabla 2. Propiedades de una premétrica en términos de su función fundamental

	Si	entonces d es:	invariante bajo:	Ejemplos y referencias
(a)	$F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{y},\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in R^n$, $\forall \mathbf{v}\in S^n$	Uniforme	traslaciones	Métricas L_p (sección 4.2)
(b)	$F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{x},\mathbf{u})$ $\forall \mathbf{x}\in R^n$, $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in S^n$	Isotrópica	rotaciones	Métrica euclidiana (sección 4.2)
(c)	$F(\mathbf{x},-\mathbf{v}) = F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{x}\in R^n$, $\forall \mathbf{v}\in S^n$	Simétrica	inversiones de dirección	Métricas L_p (sección 4.2)
(d)	$F(\mathbf{x},-\mathbf{v}) = -F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{x}\in R^n$, $\forall \mathbf{v}\in S^n$	Antisimétrica	-------------------	Premétrica asociada a una función (sección 4.2)

Las afirmaciones de la tabla anterior se demuestran en el siguiente teorema.

***Teorema 2.12* (*Propiedades de una premétrica obtenidas a partir de su función fundamental*).** Sea $d: R^n \times R^n \to R$ una premétrica y $F: R^n \times R^n \to R$ su función fundamental. Entonces tenemos:

(a) *Invariancia bajo traslaciones.* Si $F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{y},\mathbf{v})$ para toda $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$ y para toda dirección $\mathbf{v} \in S^n$, entonces d es una premétrica uniforme, $d(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = d(\mathbf{a},\mathbf{b})$ para toda $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in R^n$.

(b) *Invariancia bajo rotaciones.* Si $F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{x},\mathbf{u})$ para toda $\mathbf{x} \in R^n$ y para toda $\mathbf{u},\mathbf{v} \in S^n$, entonces d es una premétrica isotrópica, $d(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{v}\Delta s) = d(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{u}\Delta s)$ para toda $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in S^n$ y para una $\Delta s > 0$ suficientemente pequeña.

(c) *Invariancia bajo inversiones de dirección.* Si $F(\mathbf{x},-\mathbf{v}) = F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ para toda $\mathbf{x} \in R^n$ y para toda $\mathbf{v} \in S^n$, entonces d es una premétrica simétrica, $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b},\mathbf{a})$, para toda $\mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$.

(d) *Antisimetría.* Si $F(\mathbf{x},-\mathbf{v}) = -F(\mathbf{x},\mathbf{v})$ para toda $\mathbf{x} \in R^n$ y para toda dirección $\mathbf{v} \in S^n$, entonces d es una premétrica antisimétrica, $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -d(\mathbf{b},\mathbf{a})$ para toda $\mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$.

***Demostración*:**

(a) Supóngase que $F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{y},\mathbf{v})$ $\forall$ $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$, $\forall$ $\mathbf{v} \in S^n$ y que $\mathbf{x}: [a,b] \to R^n$ es una parametrización del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Entonces para toda $\mathbf{c} \in R^n$ el arco $C(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{c})$ admite la parametrización $\mathbf{y}$: $[a, b] \to R^n$, donde $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s) + \mathbf{c}$ implica que $\dot{\mathbf{y}}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s)$. Entonces el integrando de la ecuación (2.8) para el arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es igual al integrando para el arco $C(\mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{b}+\mathbf{c})$, es decir,

$$F(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s)) = F(\mathbf{x}(s)+\mathbf{c},\dot{\mathbf{x}}(s)) = F(\mathbf{y}(s),\dot{\mathbf{y}}(s)),$$

y por tanto $\ell(C(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \ell(C(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{c}))$, y por la ecuación (2.12),

$$d(\mathbf{a}+\mathbf{c},\ \mathbf{b}+\mathbf{c}) = d(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

(b) Si $F(\mathbf{x},\mathbf{v}) = F(\mathbf{x},\mathbf{u})$ $\forall \mathbf{x} \in R^n$, $\forall \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in S^n$, entonces por la ecuación (2.5), $d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta s) = d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta s)$, $\forall$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in S^n$, y para alguna $\Delta s > 0$ suficientemente pequeña.

(c) Supóngase que $F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{x} \in R^n$, $\forall \mathbf{v} \in S^n$. Sean $\mathbf{x}$: $[a, b] \to R^n$ y $\mathbf{y}$: $[a', b'] \to R^n$ dos parametrizaciones del arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, y sea s: $[a', b'] \to [a, b]$ una función real, continua y estrictamente decreciente sobre $[a', b']$ con rango $[a,b]$, tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(s(t))$ para $a' \leq t \leq b'$. Entonces los caminos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ trazan el mismo arco $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en direcciones opuestas. Por la regla de la cadena $\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(s(t))ds/dt$, donde ds/dt es estrictamente negativa, y por la homogeneidad positiva de grado uno de F en su segundo argumento, F cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))dt &= F(\mathbf{x}(s(t)),\dot{\mathbf{x}}(s(t))ds/dt)dt \\ &= F(\mathbf{x}(s(t)),-\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds/dt)dt \\ &= F(\mathbf{x}(s(t)),-\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds) \\ &= F(\mathbf{x}(s(t)),\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.8) y puesto que las diferenciales ds y dt tienen direcciones opuestas, entonces $\ell(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{y})$, y por tanto $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b},\mathbf{a})$.

(d) Bajo las mismas consideraciones del inciso anterior, excepto que aquí la función fundamental es $F(\mathbf{x},-\mathbf{v}) = -F(\mathbf{x},\mathbf{v})$. Entonces F cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))dt &= F(\mathbf{x}(s(t)),\dot{\mathbf{x}}(s(t))ds/dt)dt \\
&= F(\mathbf{x}(s(t)),-\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds/dt)dt \\
&= F(\mathbf{x}(s(t)),-\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds) \\
&= -F(\mathbf{x}(s(t)),\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds)\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.8) y considerando que las diferenciales ds y dt tienen direcciones opuestas, entonces $\ell(\mathbf{x}) = -\ell(\mathbf{y})$, y por tanto $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -d(\mathbf{b},\mathbf{a})$.

$\square$

3. Geodésicas de combinaciones de premétricas

3.1 Geodésicas de una combinación lineal positiva de premétricas

Demostramos que los arcos que son simultáneamente arcos inducidos de varias premétricas, son también arcos inducidos de cualquier combinación lineal positiva de esas premétricas, propiedad que también se cumple para las geodésicas de las premétricas.

***Teorema 3.1* (*Arcos inducidos por una combinación lineal positiva de premétricas*).** Sea una premétrica d sobre R^n, definida como una combinación lineal positiva de m premétricas $d_1, \ldots, d_m$ sobre R^n, $d = k_1 d_1 + \ldots + k_m d_m$, donde $k_1, \ldots, k_m$, son m números reales positivos. Si un arco es inducido por todas las premétricas $d_1, \ldots, d_m$, entonces es también un arco inducido por d. Si las premétricas $d_1, \ldots, d_m$ son no negativas (métricas débiles), entonces todo arco inducido por d es también un arco inducido por todas las premétricas $d_1, \ldots, d_m$. Estas afirmaciones se cumplen si se sustituye "arco inducido" por "geodésica".

***Demostración*:**

$\Rightarrow$: Si $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \subseteq R^n$ es un arco d_i -inducido para todo $i = 1,\ldots,m$, entonces para cualquier representación paramétrica de $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathbf{x}$: $[a, b] \rightarrow R^n$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$ y para toda $i = 1,\ldots,m$ se cumple

$$d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) = 0 \qquad \forall\ s \in [a, b] \text{ y } \forall\ t \in [s, b],$$

por lo que $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es también arco inducido por la premétrica d:

$$d(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m} k_i\ (d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{b})) = 0,$$

$$\forall\ s \in [a, b] \text{ y } \forall\ t \in [s, b].$$

$\Leftarrow$: Recíprocamente, si $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es un arco inducido por la premétrica d,

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\ (d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{b})) = 0 \qquad \forall\ s \in [a, b] \text{ y } \forall\ t \in [s, b],$$

y además las premétricas $d_1, \ldots, d_m$ son no negativas, y como las constantes $k_1, \ldots, k_m$ son positivas, entonces

$$d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) = 0 \qquad \forall\ s \in [a, b] \text{ y } \forall\ t \in [s, b],$$

por lo que $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es también un arco inducido por cada premétrica $d_1, \ldots, d_m$. □

3.2 Premétrica asociada a una función real

Como se mencionó en la sección 2.1, toda función distancia asimétrica se puede descomponer como la suma de dos funciones distancia: una simétrica y otra antisimétrica. La premétrica asociada a una función real que se define a continuación es una premétrica antisimétrica que tiene la propiedad de que todos los arcos para cada par ordenado de puntos son arcos inducidos. Estas premétricas son una herramienta para modelar funciones distancia asimétricas.

Al sumarse una premétrica asociada a una función real con cualquier premétrica, la suma es una premétrica asimétrica, la cual es completa si y sólo si la segunda premétrica es completa.

Sea una función real h: $R^n \to R$. La función binaria d_h:$R^n \times R^n \to R$ determinada por una función mediante

$$d_h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a}) \qquad \text{para todo } \mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n,$$

cumple la desigualdad del triángulo en su forma de igualdad,

$$d_h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d_h(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d_h(\mathbf{c},\mathbf{b}) \qquad \text{para todo } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in R^n,$$

así como la propiedad de identidad (P2), y por tanto d_h es una premétrica, denominada *premétrica asociada a la función real h*. Esta premétrica es antisimétrica y, como se demuestra directamente, tiene la singularidad de que todo arco, simple o no, que va de **a** a **b** es un arco inducido por d_h; es decir, todos los arcos de **a** a **b** tienen la misma d_h-longitud. Esta premétrica es completa, aun cuando sea una función binaria discontinua. Si la función h es diferenciable, entonces la función fundamental asociada a d_h es

$$F_h(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{d_h(\mathbf{x},\mathbf{x}+\dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{h(\mathbf{x}+\dot{\mathbf{x}}\Delta s) - h(\mathbf{x})}{\Delta s} = (\nabla h) \cdot \dot{\mathbf{x}} \qquad \forall\ \mathbf{x} \in R^n,\ \dot{\mathbf{x}} \in S^n,$$

donde ∇h es el gradiente de la función h y $\cdot$ la operación de producto punto. Por tanto, la longitud con respecto a esta premétrica de cualquier arco **x** con inicio **a** y final **b** está dado por

$$\ell_h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla h) \cdot \dot{\mathbf{x}}\, ds = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a}) = d_h(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$$

lo que confirma que respecto de esta premétrica d_h, todos los arcos con inicio **a** y final **b** tienen la misma longitud $h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})$.

Esta premétrica d_h cumple además que si se suma a otra premétrica d_F, la premétrica suma tiene exactamente las mismas geodésicas que está última, d_F, como lo expresa el siguiente teorema.

***Teorema 3.2* (*Geodésicas de una suma de premétricas*).** Sea d_F una premétrica y d_h la premétrica asociada a la función real h: $R^n \to R$. Entonces las geodésicas de d_F y las geodésicas de la premétrica suma, $d = d_h + d_F$, coinciden.

Demostración:

La premétrica d se define como la suma de dos premétricas,

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d_h(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d_F(\mathbf{a},\mathbf{b}), \qquad \text{para todo } \mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$$

donde $d_h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})$ es la premétrica asociada a la función h, entonces las geodésicas de la premétrica d coinciden con las de la premétrica del sumando d_F, pues para cualquier s se cumple (2.1) en ambos lados de la equivalencia:

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{a},\mathbf{x}(s)) + d(\mathbf{x}(s),\mathbf{b}) \Leftrightarrow [h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})] + d_F(\mathbf{a},\mathbf{b})$$
$$= [h(\mathbf{x}(s)) - h(\mathbf{a})] + [h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{x}(s))] + d_F(\mathbf{a},\mathbf{x}(s)) + d_F(\mathbf{x}(s),\mathbf{b})$$

y similarmente se demuestra que $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d_h(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d_F(\mathbf{a},\mathbf{b})$ cumple (2.2).

□

Observar que si d_F es una premétrica simétrica y h no es una función constante, entonces la premétrica suma $d = d_F + d_h$ es una premétrica asimétrica, en este caso d_F y d_h son los componentes simétrico y antisimétrico de d, respectivamente.

4. Métricas L_p

Lp

L L_∞

***Demostración*:**

La demostración se restringe a R^2 y se considera $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ b_2)$: Su generalización a R^n es inmediata. Sea f una función definida sobre $[a_1, b_1]$, con $a_1 < b_1$, que pasa por los puntos $(a_1,\ a_2)$ y $(b_1,\ b_2)$; es decir, $f(a_1) = a_2$, $f(b_1) = b_2$, la cual es monótona; esto es, $x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$. Como caso particular f podría ser la recta que une los dos puntos (a_1, a_2) y (b_1, b_2). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_2 \leq b_2$. Entonces por la monotonía de f se obtiene que $a_2 \leq f(x) \leq b_2$.

Caso 1. Primero consideramos el caso cuando $1 \leq p < \infty$.

Por las tres suposiciones previas, $a_1 < b_1$, $a_1 \leq x \leq b_1$, y la monotonía de f, la igualdad del triángulo

$$\left(|x-a_1|^p + |y-a_2|^p\right)^{1/p} + \left(|b_1-x|^p + |b_2-y|^p\right)^{1/p} = \left(|b_1-a_1|^p + |b_2-a_2|^p\right)^{1/p}, \tag{4.1}$$

viene a ser

$$[(x-a_1)^p + (y-a_2)^p]^{1/p} + [(b_1-x)^p + (b_2-y)^p]^{1/p} = [(b_1-a_1)^p + (b_2-a_2)^p]^{1/p}. \tag{4.2}$$

Si $p = 1$, se obtiene la siguiente identidad:

$$x - a_1 + y - a_2 + b_1 - x + b_2 - y = b_1 - a_1 + b_2 - a_2,$$

lo que demuestra que para $p = 1$ cualquier arco monótono que une $(a_1,\ a_2)$ con $(b_1,\ b_2,)$ representa un arco inducido por la métrica L_1.

Si f es una recta, entonces su pendiente es

$$m = (b_2 - a_2)/(b_1 - a_1) = (y - a_2)/(x - a_1) = (b_2 - y)/(b_1 - x),$$

por lo que al multiplicar y dividir apropiadamente cada término de (4.2) por $(x - a_1)$, $(b_1 - x)$ y $(b_1 - a_1)$, respectivamente, obtenemos la identidad:

$$(x - a_1)\ (1^p + m^p)^{1/p} + (b_1 - x)\ (1^p + m^p)^{1/p} = (b_1 - a_1)\ (1^p + m^p)^{1/p},$$

lo que demuestra que la recta que une $(a_1,\ a_2)$ con $(b_1,\ b_2,)$ es un arco inducido por las métricas Lp con $1 \leq p < \infty$.

Caso 2. Ahora consideramos el caso cuando $p = \infty$.

Con el fin de que la gráfica de la función $y = f(x)$ sea un arco inducido por la métrica L_∞ se requiere que ésta cumpla la igualdad de la desigualdad del triángulo:

$$\text{máx}\{(x - a_1), (y - a_2)\} + \text{máx}\{(b_1 - x), (b_2 - y)\} = \text{máx}\{(b_1 - a_1), (b_2 - a_2)\},$$

suponiendo que la gráfica de f representa la línea recta que une los puntos (a_1, a_2) y $(b_1, b_2,)$,

$$\text{máx}\{(x - a_1),\ m(x - a_1)\} + \text{máx}\{(b_1 - x), m(b_1 - x)\} = \text{máx}\{(b_1 - a_1),\ m(b_1 - a_1)\},$$

factorizando $(x - a_1)$:

$$(x - a_1)\ \text{máx}\{1, m\} + (b_1 - x)\ \text{máx}\{1, m\} = (b_1 - a_1)\ \text{máx}\{1, m\},$$

llegando finalmente a la identidad

$$(x - a_1) + (b_1 - x) = (b_1 - a_1),$$

lo que demuestra que la recta que une (a_1, a_2) con $(b_1, b_2,)$ es un arco inducido por la métrica L_∞.

Lo anterior demuestra (2.1); pero también demuestra (2.2) si se considera que las implicaciones usadas siguen siendo válidas si (a_1, a_2) ya no es el punto **a** sino algún punto intermedio del arco conservativo que va de **a** a **b**, donde este arco conservativo puede ser una recta o una función monótona. □

4.3 Función fundamental, postfundamental y *d*-desviación de las métricas *Lp*

Primero se va a determinar la función fundamental F para cada métrica Lp, la cual sirve para determinar la longitud de cualquier arco en esa métrica a través de (2.8). Si $p \geq 1$ la función fundamental F de d_p es

$$F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{d_p(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i + \dot{x}_i \Delta s - x_i \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \Delta s \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\left| \Delta s \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \right|^p \right)^{1/p},$$

es decir,

$$F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \right|^p \right)^{1/p} \qquad p \geq 1, \qquad \forall \mathbf{x} \in R^n, \dot{\mathbf{x}} \in 1^n,$$

donde los componentes $\dot{x}_i$ de $\dot{\mathbf{x}}$ son los cosenos directores de $\dot{\mathbf{x}}$. Por la ecuación (2.8)

$$L_p(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \right|^p \right)^{1/p} ds \qquad p \geq 1, \ \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]},$$

ecuación, que como se sabe proporciona la longitud de un arco correspondiente al camino **x**.

Para $p = \infty$ la función fundamental correspondiente a d_p es

$$F_\infty(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\text{máx}\left\{ \left| x_i + \dot{x}_i \Delta s - x_i \right| \right\}}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\text{máx}\left| \dot{x}_i \Delta s \right|}{\Delta s} = \text{máx}\left| \dot{x}_i \right|$$

Aquí es oportuno mencionar la necesidad de especificar que la función fundamental $F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ se obtiene mediante un paso al límite por la derecha, $\Delta s \to 0^+$, como indica la definición (2.5), pues si este signo se omite resulta la derivada direccional en el segundo argumento de la función d_p en la dirección $\dot{\mathbf{x}}$, la cual en las métricas que nos ocupa no existe porque el límite por la derecha, $\Delta s \to 0^+$, difiere del límite por la izquierda, $\Delta s \to 0^-$:

$$\lim_{\Delta s\to 0^\pm} \frac{d_p(\mathbf{x},\mathbf{x}+\dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0^\pm} \frac{(|\Delta s|)^{1/p}}{\Delta s}\left(\sum_{i=1}^{n}|\dot{x}_i|^p\right)^{1/p} = \pm\left(\sum_{i=1}^{n}|\dot{x}_i|^p\right)^{1/p}, \tag{4.3}$$

obteniéndose dos resultados, uno positivo que corresponde al límite cuando $\Delta s \to 0^+$ y otro negativo, correspondiente al límite cuando $\Delta s \to 0^-$, lo cual era de esperarse porque la función valor absoluto no es diferenciable en el vértice.

Como se mencionó en la sección 2.6, la función fundamental permite recuperar propiedades de las premétricas. Para el caso de las métricas *Lp*, la función fundamental, $F_p(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$, depende de la dirección $\dot{\mathbf{x}}$ pero no del punto $\mathbf{x}\in R^n$, por lo que d_p es una premétrica uniforme, y es simétrica porque $F_p(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = F_p(\mathbf{x},-\dot{\mathbf{x}})$. Además, para el caso $p = 2$ (métrica euclidiana), si el parámetro del camino s es la longitud de arco euclidiano a partir de un punto dado, entonces $F_2(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = 1$; por tanto, la métrica euclidiana es isotrópica.

Ahora se va a determinar la función postfundamental G, dada por la ecuación (2.6), para cada métrica *Lp*, la cual junto con la función fundamental F va a determinar los conos que determinan las d-geodésicas.

Si $p \geq 1$, de la definición obtenemos que la función postfundamental G_p de d_p es

$$G_p(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{b}) = \lim_{\Delta s\to 0^+} \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{b}) - d(\mathbf{x}+\dot{\mathbf{x}}\Delta s,\mathbf{b})}{\Delta s},$$

$$G_p(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{b}) = \lim_{\Delta s\to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i - x_i|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i - x_i - \dot{x}_i\Delta s|^p\right)^{1/p}}{\Delta s} \tag{4.4}$$

La dirección $\dot{\mathbf{x}}$ del segmento de recta de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$, denotada por $\mathbf{v}_0$, está dada por

$$\dot{x}_i = \frac{b_i - x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - x_i)^2}}, \tag{4.5}$$

por tanto,

$$b_i - x_i = \dot{x}_i\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - x_i)^2}. \tag{4.6}$$

Sustituyendo (4.6) en la ecuación (4.4):

$$
G_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} \right|^p \right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \dot{x}_i \Delta s \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s}
$$

$$
= \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \left(\left| \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} \right|^p \right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \dot{x}_i \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \Delta s \right) \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s}
$$

$$
= \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \left(\left| \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} \right| \right) - \left(\left| \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \Delta s \right) \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s}
$$

$$
= \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\left| \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} \right| \right) - \left(\left| \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \Delta s \right) \right|^p \right)^{1/p}}{\Delta s}
$$

$$
= \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \left| \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \Delta s \right) \right|}{\Delta s}.
$$

Considerando que $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} \geq \Delta s$, lo cual se cumple puesto que $\Delta s \to 0^+$, se llega finalmente a que

$$
G_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_i - x_i)^2} - \Delta s \right)}{\Delta s}
$$

$$
= \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\Delta s}{\Delta s}
$$

y, por tanto, la función postfundamental para las métricas Lp es:

$$
G_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} . \tag{4.7}
$$

La función de d-desviación, D, para el caso de las métricas Lp es:

$$D_p(\mathbf{x},\mathbf{v}_0,\mathbf{b}) = F_p(\mathbf{x},\mathbf{v}_0) - G_p(\mathbf{x},\mathbf{v}_0,\mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i|^p\right)^{1/p} = 0\,. \qquad (4.8)$$

Por el inciso (b) del teorema 2.7, la dirección $\mathbf{v}_0$ del segmento de recta de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$ es tangente a un arco conservativo que va de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$. Esto demuestra que para toda métrica Lp ($p \geq 1$ o $p = \infty$), el segmento de recta que une dos puntos es un arco inducido por las métricas Lp (teorema 4.1).

<u>Caso $p = 1$</u>. Por la ecuación (4.4)

$$G_1(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - x_i|\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - x_i - v_i \Delta s|\right)}{\Delta s}$$

Por el inciso (b) del teorema 2.7, las geodésicas que van de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$ tienen derivadas por la derecha en $\mathbf{x}$ que se encuentran en el cono $K(\mathbf{x},\mathbf{b}) = \{\, \mathbf{v} \in R^n \mid D(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b}) = 0 \}$, el cual está dado por las direcciones $\mathbf{v}$ que resuelven $F_1(\mathbf{x},\mathbf{v}) = G_1(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{b})$, donde

$$F_1(\mathbf{x},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

es decir, que resuelven

$$F = \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} |b_i - x_i| - \sum_{i=1}^{n} |b_i - x_i - v_i \Delta s|}{\Delta s} = G \qquad (4.9)$$

Si $b_i > x_i$, y $b_i - x_i > v_i \Delta s$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces la igualdad (4.9) se escribe como

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} (b_i - x_i) - \sum_{i=1}^{n} (b_i - x_i - v_i \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i \Delta s}{\Delta s} = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Esta última igualdad se cumple solamente si $v_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Por tanto todas las geodésicas de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$ son arcos monótonos de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (ver teorema 4.1).

<u>Caso $p = \infty$</u>. Se desarrolla de manera similar.

Referencias

[1] D. Bao, S. Chern, Z. Shen, An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] H. Busemann, The geometry of finsler spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 56(1), 1 (1950) 5-16.

[3] H. Busemann, W. Mayer, On the foundatios of calculus of variations, Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941) 173-198.

[4] S. Chern, Z. Shen, Riemann-Finsler Geometry, World Scientific Publishing, Singapore, 2005.

[5] S. B. Myers, Arc length in metric and Finsler manifolds, Annals of Mathematics 39(2) (1938) 463-471.

[6] B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abhandlungen der KöniglichenGesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1867) 133-152.(English translation by W. K. Clifford, On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry, Nature 8 (1873)).

[7] H. Sagan, Advanced Calculus of Real-valued Functions of a Real Variable and Vector-valued Functions of a Vector Variable, Houghton Mifflin Company, Boston, 1974.