UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS APLICACIONES DEL AXIOMA DE MARTIN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

JOSÉ MAURO ALEJANDRO GONZÁLEZ LUNA ORTIZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

2014

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	González Luna
Apellido materno	Ortiz
Nombre(s)	José Mauro Alejandro
Teléfono	55 25 05 02 83
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	306656642
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	Fidel
Apellido paterno	Casarrubias
Apellido materno	Segura
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	José Juan
Apellido paterno	Angoa
Apellido materno	Amador
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombre(s)	Roberto
Apellido paterno	Pichardo
Apellido materno	Mendoza
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dr.
Nombre(s)	Reynaldo
Apellido paterno	Rojas
Apellido materno	Hernández
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Mat.
Nombre(s)	Loiret Alejandria
Apellido paterno	Dosal
Apellido materno	Trujillo
7. Datos del trabajo escrito	Datos del trabajo escrito
Título	Algunas aplicaciones del Axioma de Martin
Número de páginas	67
Año	2014

Agradecimientos

A mis padres y mis hermanas por su apoyo incondicional y sus enseñanzas,

a Isabel y Sabina por ser una fuente constante de motivación e inspiración,

a Fidel Casarrubias por mostrarme, durante los cursos y la realización del presente trabajo, que las matemáticas son mucho más que un conjunto de símbolos.

Algunas aplicaciones del Axioma de Martin

José Mauro Alejandro González Luna Ortiz

Noviembre 3 de 2014

El presente trabajo de tesis fue parcialmente apoyado por una beca de cuatro meses por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Inovación Tecnológica (PAPIIT) clave IN115312.

Índice general

Introducción

En este trabajo nos ocuparemos del Axioma de Martin, uno de los axiomas de forcing más conocidos. La técnica de forcing ha tenido gran auge desde su nacimiento en los trabajos de Cohen. Joan Bagaria nos dice al respecto lo siguiente [1]:

«El problema indemostrable más famoso es, sin duda, la *Hipótesis del Continuo* (Continuum Hypotesis, CH), esto es, determinar la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Cantor postula en 1878 que todo conjunto de reales infinito es o bien numerable o bien biyectable con $\mathbb{R}$. La formulación clásica de CH establece que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

En 1938 Gödel demuestra, construyendo su modelo L, el universo constructible, la consistencia de la *Hipótesis Generalizada del Continuo* (Generalized Continuum Hypothesis, GHC): $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ para cualquier ordinal α. Dado que la contrucción de L no requiere del Axioma de Elección (Axiom of Choice, AC) el resultado de Gödel demuestra que si ZF es consistente, entonces también lo son ZFC y GHC. En 1963 Cohen demostró que tanto la negación de CH, así como la negación de AC, también son consistenes con ZF; completando así la prueba de independencia de CH y AC de ZF. Para hacer esto, Cohen descubrió una técnica de construcción de modelos de la teoría de conjuntos que representó una revolución en la resolución de numerosos problemas y conjeturas, esta técnica es conocida como *forcing*.

La técnica de forcing ha sido desarrollada de manera impresionante desde su descubrimiento. Ha permitido resolver muchos problemas abiertos, tanto de la teoría de conjuntos como de otras áreas matemáticas.

A grandes rasgos podemos resumir la técnica de forcing de la siguiente forma: Dado un modelo M numerable y transitivo de un fragmento finito suficientemente grande de ZFC (recuerde que ZFC es una lista infinita de axiomas), y un orden parcial $\mathbb{P}$ en M, se construye una extensión de forcing $M[G]$, donde $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro genérico sobre M, esto es, intersecta a todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que pertenecen a M. El modelo $M[G]$ contiene nuevos conjuntos y sigue siendo un modelo de ZFC. Por ejemplo, Cohen probó la negación de CH añadiendo $\aleph_2$ reales nuevos, preservando el cardinal $\aleph_2$ de M. Mediante forcing se pueden colapsar cardinales, por ejemplo hacer que $\aleph_1$ sea numerable; hacer que el continuo tenga cualquier cardinalidad con cofinalidad no numerable; se pueden crear y destruir árboles de Suslin; construir grupos, espacios topológicos, etc., con propiedades especiales que no pueden ser demostradas en ZFC. »

Nuestro objetivo en este trabajo es presentar al lector una introducción al Axioma de Martin, como un primer paso en el estudio de la técnica de Forcing. En esta exposición seguimos muy de cerca del libro de K. Kunen [7]. Hemos dividido nuestro trabajo de tesis en tres capítulos y dos apéndices.

En el primer capítulo exponemos de manera breve algunos hechos de teoría de conjuntos y de topología general requeridos para la buena lectura de los capítulos restantes. Por ejemplo, en este capítulo exponemos brevemente la noción de familia κ casi ajena, la condición de la cadena contable y su relación con el producto de espacios. También se prueba el lema del Δ-sistema (Sanin), resultado clave para varias aplicaciones del Axioma de Martin.

El segundo capítulo está dedicado a la introducción del mencionado axioma, y por consecuencia, está dedicado a introducir los conceptos clave de este axioma de forcing. Particularmente introducimos algunas equivalencias del Axioma de Martin, como son la versión topológica del mismo y la versión relacionada a álgebras Booleanas completas.

En el tercer capítulo, exponemos las aplicaciones más clásicas del Axioma de Martin. Mostramos la relación que hay entre MA y algunos invariantes del continuo. Además de ello se expone cómo se puede generalizar un resultado de Teoría de la Medida acerca de los conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}$. Se demuestra también en el capítulo el resultado que muestra que bajo el Axioma de Martin la condición de la cadena contable es una propiedad topológica productiva. Asimismo, se trata el problema de la línea de Suslin.

Quiero agradecer a mis sinodales: Mat. Alejandría Dosal, Dr. José Juan Angoa, Dr. Roberto Pichardo y Dr. Reynaldo Rojas, pues con su revisón cuidadosa y sus aportaciones mejoraron sustancialmente la tesis.

José Mauro Alejandro González Luna Ortiz
3 de noviembre de 2014.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación y definiciones

Sea X un conjunto, denotaremos a la colección de los subconjuntos de X con $\mathcal{P}(X)$ y $|X|$ la cardinalidad de X. Las primeras letras griegas α, β y γ designarán ordinales y κ y λ designarán números cardinales. El primer ordinal infinito, asociado al conjunto de los números naturales, será designado por ω, y el primer ordinal no numerable, es decir, que no es biyectable con ω, será designado por ω_1; OR designará a la clase de los números ordinales. Al primero y segundo números cardinales infinitos los denotaramos por $\aleph_0$ y $\aleph_1$, respectivamente. A la cardinalidad del continuo ($|\mathcal{P}(\omega)|$ o $|\mathbb{R}|$) la designaremos por la letra $\mathfrak{c}$. Recuerde que un *ordinal* α es un conjunto bien ordenado y transitivo que es el conjunto de todos los ordinales menores que α. Si α es un ordinal, entonces al ordinal sucesor inmediato lo denotaremos con $\alpha+1$. Un ordinal es un *ordinal límite* si no es el 0 ni es el sucesor de algún ordinal. Un *cardinal* es un ordinal que no es biyectable con ninguno de sus elementos. Un cardinal κ se dice que es *regular* si no es el límite de menos que κ cardinales menores que κ. $[A]^\kappa$ es la colección de los subconjuntos de A de cardinalidad exactamente κ, y $[A]^{<\kappa}$ el conjunto de todos los subconjuntos de A de cardinalidad menor que κ.

Sea A un conjunto. Si R es una relación sobre A, diremos que R es *reflexiva* si para todo elemento $a \in A$ se tiene que aRa, R es *transitiva* si para cualesquiera elementos $a, b, c \in A$, aRb y bRc entonces aRc, y R es *antisimétrica* si para cualesquiera dos elementos $a, b \in A$, se tiene que si aRb y bRa entonces $a = b$. Si R cumple con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva diremos que A es un conjuntos *parcialmente ordenado* respecto a R. Sean A un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$ con el orden heredado de A, $\sup B$ designará al supremo del conjunto B, es decir, a la mínima cota superior de B; e $\text{ínf}\, B$ al ínfimo de dicho conjunto, es decir, a la máxima cota inferior de B.

Si A y B son conjuntos, la colección de las funciones con dominio A y contradominio B la denotaremos por ${}^{A}B$, y $Fn(A, B)$ denota al conjunto de las funciones con dominio finito contenido en A y contradomino B.

Un espacio topológico es una pareja $\langle X, \tau \rangle$ en donde X es un conjunto y τ es una topología. A los elementos de τ se les llama *subconjuntos abiertos* de X, y a los complementos de los elementos de τ se les llama *subconjuntos cerrados*. Para cada $A \subseteq X$ denotaremos por $intA$ al interior de A, que es el mayor subconjunto abierto de X contenido en A; denotaremos por $\overline{A}$ a la cerradura de A o $cl_X(A)$, que es el menor subconjunto cerrado de X que contiene a A. Un subconjunto $D \subseteq X$ es *denso* si $\overline{D} = X$; además, diremos que X es separable si existe $D \subseteq X$ denso y numerable.

Sean J un conjunto y $\{X_j : j \in J\}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. El producto $X = \prod_{j \in J} X_j$ es la colección de todas las funciones de elección de esta familia, es decir, todas las funciones f tales que $f : J \to \cup_{j \in J} X_j$ con $f(j) \in X_j$ para cada $j \in J$. Si cada X_j es un espacio topológico con topología τ_j, entonces podemos asociarle una topología a X tomando como base de la topología a los conjuntos A tales que $A = \prod_{j \in J} A_j$ con $A_j \in \tau_j$ para toda $j \in J$, y, además, $A_j \neq X_j$ para una colección finita de elementos de J. Al producto X con la topología que acabamos de definir se le llama *espacio producto*.

Como se verá a lo largo del presente trabajo es importante mencionar que nos será conveniente trabajar bajo el sistema axiomático ZFC + ¬CH.

1.2. Δ-sistema

Recordemos que una familia de conjuntos ajenos por pares es aquella donde cualesquiera dos elementos diferentes tienen intersección vacía. En esta sección nos concentraremos en familias que satisfacen una condición más débil.

1.1 Definición. Sea κ un cardinal infinito. Si $x, y \subseteq \kappa$, diremos que x y y son κ *casi ajenos* si $|x \bigcap y| < \kappa$. También diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es una *familia κ casi ajena* si cada elemento de $\mathcal{A}$ tiene cardinalidad κ y cualesquiera dos elementos diferentes de $\mathcal{A}$ son κ casi ajenos. Una *familia κ casi ajena maximal* es una familia κ casi ajena $\mathcal{A}$ tal que no está contenida propiamente en otra familia κ casi ajena $\mathcal{B}$. Cuando $\kappa = \aleph_0$ se acostumbra escribir familia casi ajena en lugar de familia $\aleph_0$ casi ajena.

1.2 Observación.

1. Claramente toda familia de conjuntos ajenos por pares es una familia κ casi ajena para cualquier cardinal infinito κ.

2. Para todo cardinal infinito κ, existe una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos ajenos por pares de cardinalidad exactamente κ.

   <u>En efecto</u>: Si $\kappa \geqslant \aleph_0$ y A es un conjunto tal que $|A| = \kappa$, como $|A \times A| = |A|$, entonces existe una función biyectiva $f : A \times A \to A$. Si definimos $B_a = f(A \times \{a\})$ para cada $a \in A$, entonces cada conjunto B_a tiene cardinal exactamente κ. Además, $\mathcal{A} = \{B_a : a \in A\}$ es una familia de cardinalidad κ formada por conjuntos ajenos por pares.

3. Existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tal que $\mathcal{A}$ es casi ajena y $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$.

   <u>En efecto</u>: Sea $D = \mathbb{Q}$. Como D es numerable, bastará construir una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(D)$ que satisfaga las propiedades antes listadas.

   Dado que D es denso en $\mathbb{R}$, para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe una sucesión $A_r \subseteq \mathbb{Q}$ que converge en $\mathbb{R}$ a r. Sea $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$. Claramente, $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$. Además, $\mathcal{A}$ es casi ajena. Efectivamente, obsérvese que si $r \neq r'$ entonces $|A_r \cap A_{r'}| < \aleph_0$ (en caso contrario, existiría una sucesión en $\mathbb{R}$ que convergería a r y a r'; lo cual evidentemente es imposible.)

Como es costumbre, el *Lema de Zorn* nos ayudará a probar la existencia de familias κ casi ajenas maximales.

1.3 Teorema. Sea $\kappa \geqslant \omega$ un cardinal regular, entonces:

1. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es una familia κ casi ajena y $|\mathcal{A}| = \kappa$, entonces $\mathcal{A}$ no es maximal.

2. Hay una familia κ casi ajena maximal $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ de cardinalidad mayor o igual que κ^+.

Demostración.

1. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \kappa\}$. Para cada $\xi < \kappa$, definamos
$$B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} A_\eta.$$
Dado que $B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi}(A_\xi \bigcap A_\eta)$, $|A_\xi| = \kappa$ y $|A_\xi \cap A_\eta| < \kappa$, por la regularidad de κ, $B_\xi \neq \emptyset$ para cada $\xi < \kappa$. Tomamos $\beta_\xi \in B_\xi$ para cada $\xi < \kappa$. Si ξ y η son distintos, entonces β_ξ es distinto a β_η pues B_ξ y B_η son ajenos. Luego $D = \{\beta_\xi : \xi < \kappa\}$ tiene cardinalidad κ.

   Por la elección de β_ξ, si $\beta_\xi \in A_\eta$, entonces $\eta \geqslant \xi$; de donde $D \cap A_\eta \subseteq \{B_\xi : \xi \leqslant \eta\}$. Por lo tanto para cada $\eta < \kappa$ se tiene que D y A_η son κ casi ajenos. Observe ahora que $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{D\}$ es κ casi ajena y $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$.

2. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ una familia κ casi ajena. Definamos
$$\mathcal{C} = \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \textit{ es } \kappa \textit{ casi ajena y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}.$$
Claramente $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ está parcialmente ordenada por la contención. Note también que si $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cadena en $\mathcal{C}$ entonces $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{B} \in \mathcal{C}$ y es cota superior de $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn aplicado a $\langle \mathcal{C}, \subseteq\rangle$, podemos concluir que existe $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ elemento maximal. Por el inciso anterior, podemos concluir que $|\mathcal{B}| > \kappa$ esto es, que $|\mathcal{B}| \geqslant \kappa^+$.

□

1.4 Definición. Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es un Δ-*sistema* si hay un conjunto fijo r, llamado *raíz* del Δ-sistema, tal que para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ distintos se tiene que $a \cap b = r$.

El nombre de Δ-sistema hace referencia a la forma (gráfica) que toman estos conjuntos, en los cuales hay un elemento *mínimo* fijo para cualesquiera dos elementos. Veamos que estos sistemas existen.

1.5 Teorema (Sanin)**.** Si $\mathcal{A}$ es una familia no numerable de conjuntos finitos, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ no numerable que forma un Δ-sistema.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia no numerable de conjuntos finitos. Entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \aleph_1$. Definamos, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{B}_n = \{B \in \mathcal{B} : |B| = n\}$. Entonces
$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n.$$

Como $|\mathcal{B}| = \aleph_1$, podemos concluir que existe $n \in \omega$ tal que $|\mathcal{B}_n| = \aleph_1$. De esta forma podemos suponer sin pérdida de generalidad que la familia original $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de que $\mathcal{A} \subseteq [\omega_1]^n$, para algún $n \in \omega$.

Demostraremos, por inducción sobre n, que $\mathcal{A}$ tiene una subcolección $\mathcal{C}$ de cardinalidad $\aleph_1$ que forma un Δ-sistema.

El caso $n = 0$ es imposible pues implicaría que $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ y, por lo tanto, $|\mathcal{A}| < \aleph_1$.

Supongamos que $n \geqslant 1$ y que el resultado se cumple para familias $\mathcal{D} \subseteq [\omega_1]^{n-1}$. Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. Existe $\alpha \in \omega_1$, para el cual existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| = \aleph_1$ y $\alpha \in \cap\mathcal{B}$. Definamos

$$\mathcal{D} = \{B \setminus \{\alpha\} : B \in \mathcal{B}\}.$$

Claramente $\mathcal{D} \subseteq [\omega_1]^{n-1}$. Así que por hipótesis de inducción existe $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ con $|\mathcal{D}_0| = \aleph_1$ tal que $\mathcal{D}_0$ forma un Δ-sistema. Por ello existe J tal que

$$\forall D, D' \in \mathcal{D}_0 : D \neq D' \to D \cap D' = J.$$

Definamos $\mathcal{C} = \{D \cup \{\alpha\} : D \in \mathcal{D}_0\}$. Entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, $|\mathcal{C}| = \aleph_1$ y $\mathcal{C}$ forma un Δ-sistema con raíz $J_0 = J \cup \{\alpha\}$.

Caso 2. Para toda $\alpha \in \omega_1$ no existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| = \aleph_1$ tal que $\alpha \in \cap\mathcal{B}$.

Entonces

$$\forall \alpha \in \omega_1 : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \textit{ con } \alpha \in \cap\mathcal{B} \to |\mathcal{B}| \leqslant \aleph_0.$$

Elijamos para $\alpha = 0$ un elemento $C_0 \in \mathcal{A}$. Supongamos que $\alpha < \omega_1$ y que para cada $\beta < \alpha$ hemos elegido un elemento $C_\beta \in \mathcal{A}$ tal que

$$\forall \gamma < \beta : C_\gamma \cap C_\beta = \emptyset.$$

Como $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$ es a lo más numerable, existe $\xi \in \omega_1$ tal que $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta \subseteq \xi$. Entonces existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $\xi \cap C = \emptyset$, puesto que de lo contrario, para todo $C \in \mathcal{A}$, se tiene que $\xi \cap C \neq \emptyset$, y como ξ es numerable, existiría un $\eta < \xi$ tal que

$$|\{C \in \mathcal{A} : \eta \in C\}| = \aleph_1$$

lo cual contradice la hipótesis del caso 2. Entonces podemos definir $C_\alpha = C$.

De esta forma, por recursión, hemos construido una subcolección

$$\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

tal que:

$$\forall \alpha, \beta < \omega_1 : \alpha \neq \beta \to C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset.$$

Claramente $\mathcal{C}$ forma un Δ-sistema. □

1.3. La condición de la cadena contable

1.6 Definición. Un espacio topológico X tiene la *condición de la cadena contable* (c.c.c.) o tiene *celularidad numerable* o la *propiedad de Suslin* si toda familia de conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares es a lo más numerable.

La c.c.c. en realidad habla sobre *anticadenas* que son conjuntos cuyos elementos no son comparables (estamos haciendo referencia a la noción común de *anticadena* en órdenes), y uno debería hablar de condición de la anticadena contable, pero es común encontrarla en la literatura como c.c.c.

El siguiente resultado establece la relación entre la separabilidad y la c.c.c.

1.7 Lema. Si X es un espacio topológico separable, entonces X tiene la c.c.c.

Demostración. Sea X un espacio topológico separable, entonces hay un subconjunto $D \subseteq X$ denso numerable. Si $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ fuera una familia de conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos por pares, entonces para cada $\alpha < \omega_1$ podemos elegir $d_\alpha \in D \cap U_\alpha$. Entonces $\{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sería un subconjunto de D de cardinalidad $\aleph_1$, hecho que contradice que D sea numerable. $\square$

La condición de la cadena contable es una propiedad topológica importante. Por ejemplo, es posible demostrar que todo espacio paracompacto con la c.c.c. es un espacio Lindelöf (vea la proposición B.2 del apéndice B).

Por otro lado, es sabido que algunas propiedades topológicas importantes no se preservan bajo productos arbitrarios; la separabilidad es una de ellas. Efectivamente, si $\kappa > \mathfrak{c}$ entonces el producto 2^κ no es separable, donde $2 = \{0, 1\}$ es el espacio discreto de cardinalidad 2 (vea la proposición B.7 del apéndice B una demostración de este hecho).

Debido a que la condición de cadena contable es una propiedad más débil que la separabilidad, es natural preguntarse si el producto de dos espacios que tienen la c.c.c. vuelve a tener la c.c.c. En ZFC no podemos contestar a esta pregunta. Más adelante veremos que bajo el *Axioma de Martin* la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Por ahora, lo único que podemos afirmar es lo que se establece en el siguiente teorema.

1.8 Teorema. Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios tal que para cualquier $J \subseteq I$ finito, $\prod_{j \in J} X_j$ tiene la c.c.c. Entonces $\prod_{i \in I} X_i$ también tiene la c.c.c.

Demostración. Supongamos que $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de conjuntos abiertos básicos ajenos por pares en $\prod_{i\in I} X_i$. Cada U_α tiene soporte finito, es decir, $U_\alpha = \prod_{i\in I} U_i^\alpha$, donde $U_i^\alpha \subseteq X_i$ es abierto en X_i y además el conjunto $a_\alpha = \{i \in I : U_i^\alpha \neq X_i\}$ es finito. El conjunto a_α es llamado soporte de U_α. Veamos que el conjunto $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es no numerable para poder aplicar el lema del Δ-sistema. Supongamos que $|\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}| \leqslant \aleph_0$, por lo tanto $H = \bigcup_{\alpha<\omega_1} a_\alpha \subseteq I$ es a lo más numerable. Si $\pi_H(U_\alpha)$ denota la proyección de U_α en $\prod_{i\in H} X_i$, entonces $\{\pi_H(U_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es una familia no numerable de abiertos ajenos por pares en $\prod_{i\in H} X_i$. Así existen $h \in H$ y $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{U_h^\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia no numerable de subconjuntos ajenos por pares de X_h, pero X_h tiene la c.c.c. Por lo tanto $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es no numerable. Por el lema del Δ-sistema, hay $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que el conjunto $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ forma un Δ-sistema con raíz J. Si $J = \emptyset$, entonces para cada $\alpha, \beta \in A$ distintos tenemos que $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$. Sean $g \in U_\alpha$, $h \in U_\beta$ y $x_i \in X_i$ para cada $i \in J$. Definamos $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, por medio de:

$$f(i) = \begin{cases} g(i) & \text{si } i \in a_\alpha \\ h(i) & \text{si } i \in a_\beta \\ x_i & \text{si } i \notin a_\alpha \cup a_\beta \end{cases}$$

Claramente f cumple que $f \in U_\alpha \bigcap U_\beta$; lo cual no puede suceder. Por lo tanto $J \neq \emptyset$. Como J es una raíz de $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ es fácil notar que J es finito. Si $\pi_J(U_\alpha)$ denota la proyección de U_α en $\prod_{i\in J} X_i$, entonces la familia $\{\pi_J(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ de abiertos en $\prod_{i\in J} X_i$ es ajena por pares y no numerable en $\prod_{i\in J} X_i$. Pero esto último contradice el hecho de que $\prod_{i\in J} X_i$ tiene la c.c.c. Por lo tanto, $\prod_{i\in I} X_i$ tiene la c.c.c. $\square$

Capítulo 2

Axioma de Martin

2.1. Introducción

En 1938, K. Gödel demostró que los axiomas de Zermelo-Fraenkel más el Axioma de Elección (ZFC) no pueden refutar la Hipótesis del Continuo. En 1963, P. Cohen demostró que usando ZFC tampoco se puede probar CH. Estos dos resultados implican que CH es independiente de ZFC.

La prueba de la independencia de CH trajo consigo algunos cuestionamientos. Al demostrarse que CH es independiente de ZFC, parecía que era necesario agregar un nuevo axioma a los axiomas de ZFC. Y los candidatos naturales eran entonces CH y la negación de CH; pero ninguno de los dos satisfacía a los matemáticos de la época. Uno de los principales problemas de CH es que es demasiado fuerte, pero su negación es demasaido débil.

En 1969, D. A. Martin y R. M. Solovay propusieron un nuevo axioma, al que llamaron *Axioma A*. Este nuevo axioma tiene muchas propiedades, entre ellas, que la CH implica el axioma A, pero el axioma A junto con la negación de CH conforman una proposición lo bastante fuerte para obtener con ellos resultados interesantes. Hoy en día el axioma A se conoce como el *Axioma de Martin* (Martin's Axiom, MA).

2.2. Conceptos elementales

En esta sección establecemos la primera versión del Axioma de Martin. Por ello, necesitamos introducir antes algunos conceptos relacionados.

2.1 Definición. Un *conjunto preordenado* es una pareja ordenada $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ donde $\mathbb{P}$ es un conjunto no vacío y $\leqslant$ es una relación transitiva y reflexiva sobre $\mathbb{P}$. Si $p, q \in \mathbb{P}$ y $p \leqslant q$, se dice que p *extiende a* q. Si $\leqslant$ es también antisimétrica, entonces se dice que $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un *conjunto parcialmente ordenado.*

De aquí en adelante la pareja ordenada $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ o simplemente $\mathbb{P}$ denotará a un conjunto preordenado.

2.2 Definición. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un conjunto preordenado.

1. Una *cadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ tal que

$$\forall p, q \in C \ (p \leqslant q \vee q \geqslant p).$$

2. Decimos que dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$ son *compatibles* si

$$\exists r \in \mathbb{P} \ (r \leqslant p \wedge r \leqslant q).$$

   En caso contrario se dice que p y q son *incompatibles* y en tal caso escribiremos $p \perp q$.

3. Una *anticadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que

$$\forall p, q \in A \ (p \neq q \to p \perp q).$$

2.3 Definición. Un conjunto preordenado $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ tiene la *condición de la cadena contable* (c.c.c.) si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

2.4 Ejemplos.

1. $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle = \langle \omega, \leqslant \rangle$ donde $\leqslant$ es el orden usual de ω. Todo subconjunto de $\mathbb{P}$ es una cadena, pero toda anticadena tiene cardinalidad $\leqslant 1$. Por lo tanto $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.

2. Sea $X \neq \emptyset$ y $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$, ordenándolo con la contención, es decir, $p \leqslant q$ si $p \subseteq q$; así $p \perp q$ si son ajenos. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena si los elementos de A son ajenos por pares, entonces $\mathbb{P}$ tiene la *c.c.c.* si y sólo si $|\mathbb{P}| \leqslant \aleph_0$.

3. Sea X un espacio topológico y $\mathbb{P}$=$\{p \subseteq X : p$ es abierto $\wedge\ p \neq \emptyset\}$, con $p \leqslant q$ si $p \subseteq q$. Entonces $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. si y sólo si X la tiene en el sentido topológico (vea 1.6).

2.5 Definición. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un conjunto preordenado.

1. $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* si para toda $p \in \mathbb{P}$, existe un elemento $q \in D$ tal que $q \leqslant p$.

2. $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* en $\mathbb{P}$ si:

   (a) $\forall p, q \in G\ \exists r \in G\ (r \leqslant p \wedge r \leqslant q)$, y

   (b) $\forall p \in G\ \forall q \in \mathbb{P}\ (p \leqslant q \to q \in G)$.

3. Si G es un filtro en $\mathbb{P}$ y $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, decimos que G es un filtro $\mathcal{D}$-*genérico* en $\mathbb{P}$ si

$$\forall D \in \mathcal{D}\ (G \cap D \neq \emptyset).$$

Una vez definidos los conceptos anteriores, podemos establecer la siguiente definición.

2.6 Definición. Sea κ un cardinal infinito. MA(κ) es la proposición siguiente: Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es no vacío, con la c.c.c. y $\mathcal{D}$ es una familia de a los más κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

La proposición MA(κ) se define para todo cardinal infinito κ. Los siguientes teoremas nos dicen que la proposición MA(κ) resulta interesante para aquellos cardinales κ tales que $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$ (donde $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$).

Antes de enunciarlos, es importante hacer notar que un resultado evidente acerca de la proposición MA(κ) es el siguiente.

2.7 Lema (Rasiowa-Sikorski)**.** MA$(\aleph_0)$ es cierto.

Demostración. Sean $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado que satisface la c.c.c. y $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Dado que $\mathbb{P} \neq \emptyset$, podemos fijar $p_0 \in \mathbb{P}$. Como D_0 es denso, entonces existe $p_1 \in D_0$ tal que $p_1 \leqslant p_0$. Supongamos que para $n \in \omega \setminus \{0\}$ tenemos que $p_n \leqslant p_m$ para toda $m \leqslant n$ y $p_n \in D_{n-1}$. Como D_n es denso, hay una extensión $p_{n+1} \in D_n$ de p_n. Así construimos una sucesión $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \ldots p_n \geqslant p_{n+1} \geqslant \ldots$ y si definimos $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega(q \geqslant p_n\}$, entonces G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico. $\square$

2.8 Observación. Note que en la demostración del lema 2.7 no se usó la c.c.c. A raíz de esto, una pregunta natural es: si es posible quitar la c.c.c. en la definición de MA(κ). El siguiente ejemplo muestra que esto no es posible:

Sea $\mathbb{P} = \{p : p \in Fn(\omega, \omega_1)\}$ (ver página 8). Si $p, q \in \mathbb{P}$, diremos que $p \leqslant q \leftrightarrow q \subseteq p$, es decir, p extiende a q como función. No es difícil notar que las funciones p y q son compatibles si toman el mismo valor en $dom(p) \cap dom(q)$, donde $p \cup q$ es una extensión común, es decir $p \cup q \leqslant p$ y $p \cup q \leqslant q$. Como $\{(0, \alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia no numerable de elementos incompatibles de $\mathbb{P}$, entonces $\mathbb{P}$ no tiene la c.c.c. Para cada $\alpha \in \omega_1$, definimos $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in ran(p)\}$. Observe que cada D_α es denso en $\mathbb{P}$. Por otro lado, si existiera un filtro $\mathcal{D}$-genérico G, para $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, como G es filtro, entonces $f_G = \cup G : \omega \to \omega_1$ sería una función suprayectiva; lo cual es imposible.

2.9 Lema. MA($2^{\aleph_0}$) es falso.

Demostración. Supongamos que MA($2^{\aleph_0}$) es verdadero. Sea $\mathbb{P} = \{p : p \in Fn(\omega, 2)\}$. Si $p, q \in \mathbb{P}$, diremos que $p \leqslant q \leftrightarrow q \subseteq p$, es decir, p extiende a q como función. Como $|\mathbb{P}| \leqslant \aleph_0$, entonces $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. Para cada $n \in \omega$, sea $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Claramente cada D_n es denso en $\mathbb{P}$.

La idea será construir una función que será una extensión de funciones con dominio finito a una función con dominio ω utilizando el filtro generado por MA($2^{\aleph_0}$). Para cada $h \in {}^\omega 2$, sea $E_h = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in dom(p)(p(n) \neq h(n))\}$. No es difícil demostrar que cada E_h es denso. Si

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in {}^\omega 2\},$$

$|\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0}$. Si MA($\mathfrak{c}$) se cumple, hay un filtro $\mathcal{D}$-genérico G. Por lo tanto si $f_G = \cup G$ entonces f_G es una función de ω en 2 que es distinta a toda función que vive en ${}^\omega 2$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, MA($2^{\aleph_0}$) es falso. $\square$

Con los anteriores resultados podemos concluir lo siguiente:

2.10 Corolario. MA($\aleph_1$) implica que la hipótesis del continuo es falsa.

2.11 Definición. El *Axioma de Martin* (Martin's Axiom, MA) es la proposición: Para todo cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$, se cumple MA(κ).

2.12 Corolario. La hipótesis del continuo implica el Axioma de Martin.

2.3. Algunas equivalencias de MA

En relación al axioma de Martin, hasta ahora sólo hemos tomado en cuenta la cardinalidad de la familia de conjuntos densos, pero en muchas de las aplicaciones de MA, utilizamos órdenes parciales cuya cardinalidad es a lo más la del continuo. A continuación veremos que es equivalente restringir, también, la cardinalidad del conjunto parcialmente ordenado.

2.13 Definición. Se dice que un conjunto B es cerrado respecto a una familia de funciones $\mathcal{F}$ si para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $f(B) \subseteq B$. De la misma forma si $g : A \times A \to A$, entonces diremos que $B \subseteq A$ es cerrado con respecto a g si $g(B \times B) \subseteq B$.

2.14 Lema. Sean $\kappa \geqslant \aleph_0$ y A un conjunto no vacío. Si $\{f_\alpha \in {}^A A : \alpha < \kappa\}$ es una familia de funciones y $g : A \times A \to A$ es una función, entonces existe $B \subseteq A$ no vacío con $|B| \leqslant \kappa$ tal que B es cerrado respecto a la familia $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{g\}$.

Demostración. Construiremos por recursión al conjunto B. Sea $a \in A$ y definamos $c_0 = \{a\}$. Es claro que $|c_0| \leqslant \kappa$. Supongamos ahora que $n \in \omega \setminus \{0\}$, y que tenemos construido a c_{n-1} tal que $|c_{n-1}| \leqslant \kappa$. Definamos

$$c_n = c_{n-1} \cup g(c_{n-1} \times c_{n-1}) \cup \bigcup_{\alpha<\kappa} f_\alpha(c_{n-1}).$$

Observe que $g \restriction_{c_{n-1}\times c_{n-1}}: c_{n-1} \times c_{n-1} \to g(c_{n-1} \times c_{n-1})$ y que $f_\alpha \restriction_{c_{n-1}}: c_{n-1} \to f_\alpha(c_{n-1})$ son funciones sobreyectivas, para cada $\alpha < \kappa$. Entonces

$$|g(c_{n-1} \times c_{n-1})| \leqslant |c_{n-1} \times c_{n-1}| \leqslant \kappa$$

y para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que

$$|f_\alpha(c_{n-1})| \leqslant |c_{n-1}| \leqslant \kappa.$$

De esta forma podemos concluir que $|c_n| \leqslant \kappa$. Finalmente definimos

$$B = \bigcup_{n\in\omega} c_n.$$

Resulta que por la construcción de B se tiene que $B \neq \emptyset$, $|B| \leqslant \kappa$, $g(B\times B) \subseteq B$ y para cada $\alpha < \kappa$, se tiene que $f_\alpha(B) \subseteq B$. De esta forma B es cerrado respecto a la familia $\mathcal{F}$.

$\square$

2.15 Definición. Dado un cardinal infinito κ, denotaremos con MA*(κ) a la proposición siguiente: Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un conjunto preordenado con $\mathbb{P} \neq \emptyset$ de cardinalidad menor o igual que κ que cumple la c.c.c. y $\mathcal{D}$ es una familia de a lo más κ densos en $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$.

De esta forma, MA*(κ) es la proposición MA(κ) restringida a conjuntos preordenados de cardinalidad a lo más κ.

2.16 Teorema. Sea κ un cardinal infinito. MA(κ) es equivalente a MA*(κ).

Demostración. Es claro que MA(κ) implica MA*(κ). Supongamos que MA*(κ) es verdadero. Sea $\langle \mathbb{Q}, \leqslant \rangle$ un conjunto preordenado con la c.c.c. y $\mathcal{D}$ una familia de a lo más κ densos de $\mathbb{Q}$. Si $D \in \mathcal{D}$ es un denso entonces para cada $p \in \mathbb{Q}$ podemos fijar un elemento $f_D(p) \in D$ tal que $f_D(p) \leqslant p$. De esta forma, para cada $D \in \mathcal{D}$ tenemos definida una función $f_D : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$\forall p \in \mathbb{Q} : f_D(p) \leqslant p \text{ y } f_D(p) \in D.$$

Por otro lado, si $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y p y q son compatibles podemos fijar un elemento $g(p, q) \in \mathbb{Q}$ tal que $g(p, q) \leqslant p$ y $g(p, q) \leqslant q$. En el caso en que p y q no sean compatibles, definimos $g(p, q) = p$. Resulta que $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es una función. Por el Lema 2.14, existe $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ no vacío tal que $\mathbb{P}$ es cerrado respecto a la familia $\mathcal{F} = \{f_D : D \in \mathcal{D}\} \cup \{g\}$ y además $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$. Ordenamos a $\mathbb{P}$ con el orden heredado de $\mathbb{Q}$.

Observe ahora que para cada $D \in \mathcal{D}$, el conjunto $D \cap \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$. Efectivamente, si $p \in \mathbb{P}$ como $\mathbb{P}$ es cerrado respecto a $\mathcal{F}$ y $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$, tenemos que $f_D(p) \in \mathbb{P}$, $f_D(p) \in D$ y $f_D(p) \leqslant p$, por la definición de f_D. De esta forma existe $f_D(p) \in D \cap \mathbb{P}$ tal que $f_D(p) \leqslant p$. Así, $D \cap \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$. Además, si $p, q \in \mathbb{P}$ son compatibles en $\mathbb{Q}$ entonces $g(p, q) \in \mathbb{P}$, $g(p, q) \leqslant p$ y $g(p, q) \leqslant q$, es decir, si p y q son compatibles en $\mathbb{Q}$ también lo son en $\mathbb{P}$. Recíprocamente, si p y q son compatibles en $\mathbb{P}$ entonces trivialmente también lo son en $\mathbb{Q}$. De esta forma, podemos concluir que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. porque $\mathbb{Q}$ tiene la c.c.c. Como $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$, por MA*($\kappa$) existe un filtro G que es $\mathcal{D}^*$-genérico en $\mathbb{P}$, donde $\mathcal{D}^* = \{D \cap \mathbb{P} : D \in \mathcal{D}\}$. Definamos ahora al conjunto

$$H = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in G(p \leqslant q)\}.$$

No es difícil demostrar que H es un filtro en $\mathbb{Q}$. Para demostrar que es $\mathcal{D}$-genérico, consideremos un $D \in \mathcal{D}$. Sabemos que $D \cap \mathbb{P} \in \mathcal{D}^*$. Como G es un filtro $\mathcal{D}^*$-genérico en $\mathbb{P}$, tenemos que existe $p \in D \cap \mathbb{P} \cap G$. Entonces $p \in H \cap G$. $\square$

2.4. La versión topológica de MA

En esta sección exponemos una aplicación de MA(κ) a la Topología General. Recuerde que un espacio topológico tiene la c.c.c. si toda familia de abiertos no vacíos y ajenos por pares es a lo más numerable.

2.17 Teorema. Sea $\aleph_0 \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$. Supongamos MA($\kappa$). Si X es un espacio Hausdorff, compacto y con la c.c.c., y $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos densos abiertos de X, entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \{p \subseteq X : p \textit{ es abierto } \wedge\ p \neq \emptyset\}$, con $p \leqslant q$ si $p \subseteq q$. Así p y q son incompatibles si son ajenos. Dado que X tiene la c.c.c. entonces $\mathbb{P}$ también la tiene.

Para cada $\alpha < \kappa$, definimos $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \overline{p} \subseteq \mathcal{U}_\alpha\}$. Verifiquemos que cada D_α es denso. En efecto, sean $p \in \mathbb{P}$ y $\alpha < \kappa$. Como $\mathcal{U}_\alpha$ es denso en X, entonces $\mathcal{U}_\alpha \cap p \neq \emptyset$. Además, $\mathcal{U}_\alpha \cap p$ es abierto. Por la regularidad de X (pues X es Hausdorff compacto), hay un abierto no vacío $q \in \mathbb{P}$ tal que $\overline{q} \subseteq \mathcal{U}_\alpha \cap p$. Por lo tanto $q \in D_\alpha$ y $q \leqslant p$. Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Por MA($\kappa$) hay un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico. Observe ahora que la colección $\{\overline{p} : p \in G\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (p.i.f.) puesto que si $p_1, p_2 \in G$ entonces existe $r \in G$ tal que

$$r \leqslant p_1 \ y \ r \leqslant p_2.$$

De esta forma, tenemos que

$$\overline{r} \subseteq \overline{p_1} \cap \overline{p_2}.$$

Como $\overline{r} \neq \emptyset$, claramente por inducción se concluye que $\{\overline{p} : p \in G\}$ tiene la p.i.f. Como X es compacto, lo anterior implica que $\bigcap\{\overline{p} : p \in G\} \neq \emptyset$. Dado que para cada $\alpha < \kappa$, existe $p_\alpha \in G \cap D_\alpha$ y en consecuencia $\overline{p_\alpha} \subseteq \mathcal{U}_\alpha$, tenemos que $\emptyset \neq \bigcap\{\overline{p} : p \in G\} \subseteq \bigcap\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$. □

Si la familia del teorema 2.17 es numerable, entonces éste es simplemente el *Teorema de categoría de Baire*.

Parte del enunciado del teorema anterior (Teorema 2.17) es conocido como la versión topológica de MA(κ). Por esto vale la pena introducir esta versión de MA(κ):

2.18 Definición. $\mathrm{MA}_{top}(\kappa)$ es la siguiente proposición: Si X es un espacio Hausdorff, compacto y con la c.c.c., y $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia subconjuntos densos abiertos de X, entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$.

Un poco más adelante veremos que esta versión es equivalente a MA(κ).

2.5. MA restringido a álgebras booleanas completas

2.19 Definición. Un *álgebra Booleana* es una estructura

$$\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle,$$

donde B es un conjunto, $\vee$ y $\wedge$ son funciones binarias, $-$ es es una función 1-aria, 0 y 1 son constantes tales que para cada $a, b, c \in B$ cumplen lo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
(1)\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),\\
(2)\ a \vee b = b \vee a, & a \wedge b = b \wedge a,\\
(3)\ a \vee (a \wedge b) = a, & a \wedge (a \vee b) = a,\\
(4)\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),\\
(5)\ a \vee (-a) = 1, & a \wedge (-a) = 0.
\end{array}$$

Por ejemplo, si A es un conjunto, entonces la estructura

$$\mathfrak{B} = \langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, \setminus, \emptyset, A\rangle,$$

donde las operaciones son las usuales de conjuntos y $\setminus$ representa al complemento de un conjunto en A, es un álgebra Booleana.

2.20 Observación. Si $\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ es un álgebra Booleana entonces podemos definir en B la siguiente relación:

$$a \leqslant b \text{ si y sólo si } a \wedge b = a$$

(o equivalentemente, si $a \vee b = b$). De esta forma, $\mathbb{P} = \langle B \setminus \{0\}, \leqslant\rangle$ es un conjunto preordenado.

Diremos que el álgebra Booleana $\mathfrak{B}$ tiene la c.c.c. si el conjunto preordenado $\mathbb{P} = \langle B \setminus \{0\}, \leqslant\rangle$ tiene la c.c.c. Asimismo, diremos que un conjunto $D \subseteq B \setminus \{0\}$ (respectivamente, $G \subseteq B \setminus \{0\}$) es un *denso* en el álgebra Booleana $\mathfrak{B}$ (respectivamente, un *filtro*) si D es denso en $\mathbb{P}$ (respectivamente, si G es un *filtro* en $\mathbb{P}$). De manera análoga podemos introducir la noción de filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathfrak{B}$.

2.21 Definición. Se dice que un álgebra booleana $\mathfrak{B}$ es *completa* si para todo $A \subseteq B$ no vacío existen $\sup A$ en B e $\operatorname{ínf} A$ en B.

Recuerde que si X es un espacio topológico, se dice que un subconjunto $x \subseteq X$ es *abierto regular* si $x = int\overline{x}$. Dado un espacio topológico X, definimos al conjunto

$$ro(X) = \{x \subseteq X : x \; es \; regular\}.$$

2.22 Proposición. Si X es un espacio topológico, $ro(X)$ es un álgebra Booleana completa.

Demostración. Las operaciones que hacen de $ro(X)$ un álgebra Booleana completa son las siguientes:

Si $A, B \in ro(X)$, entonces

$$A \vee B = int_X(cl_X(A \cup B))$$

$$y \; A \wedge B = A \cap B.$$

Además, $X = 1$ y $\emptyset = 0$. Y si $A \in ro(X)$ entonces $-A = X \setminus cl_X(A)$. Con esto,

$$\mathfrak{B} = \langle ro(X), \vee, \wedge, -, 0, 1 \rangle$$

es un álgebra Booleana (ver [6, Capítulo 13]). Ya observamos que se puede ordenar parcialmente a un álgebra Booleana, en este caso órdenamos a $ro(X)$ con la contención ($\subseteq$). Verificaremos a continuación que ella es completa. Para ello, demostraremos que si $\mathcal{U} \subseteq ro(X)$ entonces existe $\sup \mathcal{U}$ en $ro(X)$ (la verificación de que existe $\inf \mathcal{U}$ en $ro(X)$ es análoga, tomando $\inf \mathcal{U} = int_X(\cap \mathcal{U})$).

Si $\mathcal{U} \subseteq ro(X)$ entonces afirmamos que

$$\sup \mathcal{U} = int(cl_X(\cup \mathcal{U})).$$

Para cualquier $U \in \mathcal{U}$, se tiene que

$$U \subseteq \cup \mathcal{U}.$$

Por lo tanto,

$$cl_X(U) \subseteq cl_X(\cup \mathcal{U}).$$

Así que

$$U = int_X(cl_X(U)) \subseteq int_X(cl_X(\cup \mathcal{U})).$$

Por lo tanto, para cada $U \in \mathcal{U}$, se tiene que

$$U \subseteq int_X(cl_X(\cup \mathcal{U})).$$

Por ello, $int_X(cl_X(\cup\mathcal{U}))$ es cota superior de $\mathcal{U}$. Tomemos otra cota superior de $\mathcal{U}$, digamos $W \in ro(X)$. Tenemos que, para cada $U \in \mathcal{U}$, $U \subseteq W$. Por lo cual, $\cup\mathcal{U} \subseteq W$. Entonces

$$int_X(cl_X(\cup\mathcal{U})) \subseteq int_X(cl_X(W)) = W.$$

De esta forma, podemos concluir que

$$int_X(cl_X(\cup\mathcal{U})) = \sup\mathcal{U}.$$

□

Nuestro propósito ahora es establecer una versión de MA(κ) (para cualquier cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$) para álgebras Booleanas. Con este fin, enunciaremos y demostraremos el siguiente lema.

2.23 Lema. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Existen un álgebra Booleana completa

$$\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle,$$

e $i : \mathbb{P} \to B$ tales que

1. $i(\mathbb{P})$ es denso en $B \setminus \{0\}$.
2. $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leqslant q \to i(p) \leqslant i(q))$.
3. $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \perp q \leftrightarrow i(p) \wedge i(q) = 0)$.

Demostración. Definamos una topología para $\mathbb{P}$: Si $p \in \mathbb{P}$, definimos $N_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leqslant p\}$. Tomamos a $N = \{N_p : p \in \mathbb{P}\}$ como base de una topología, τ_N, para $\mathbb{P}$. Observe que si $q \in N_p$, entonces $N_q \subseteq N_p$. Recordemos que dado un espacio topológico X, el conjuntdo $ro(X) = \{a \subseteq X : a = int\overline{a}\}$ es un álgebra Booleana completa; así que podemos considerar a $B = ro(\langle\mathbb{P}, \tau_N\rangle)$ e $i(p) = int\overline{N}_p$. Verifiquemos que B e i cumplen las tres condiciones requeridas:

1. Sea $b \in B \setminus \{0\}$. Sea $p \in b$ fijo, entonces $N_p \subseteq b$, pues N es una base para la topología de $\mathbb{P}$. Así $i(p) = int\ \overline{N}_p \subseteq int\ \overline{b} = b$.

2. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ con $p \leqslant q$. Entonces $N_p \subseteq N_q \to int\overline{N}_p \subseteq int\overline{N}_q \to i(p) \leqslant i(q)$.

3. Supongamos que $p, q \in \mathbb{P}$ son compatibles, sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Por (2) $i(p) \wedge i(q) \neq 0$.

   Supongamos que $p \perp q$, entonces $N_p \cap N_q = \emptyset$; dado que N_q es abierto, $\overline{N}_p \cap N_q = \emptyset$, lo cual equivale a que $i(p) \cap N_q = \emptyset$. Como $i(p)$ es abierto, $i(p) \wedge i(q) = 0$. □

2.24 Definición. Sea κ un cardinal infinito con $\kappa < \mathfrak{c}$. $\mathrm{MA}_b(\kappa)$ es la proposición siguiente: Si $\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1 \rangle$ es un álgebra Booleana completa que satisface la c.c.c. y $\mathcal{D}$ es un familia de a lo más κ densos en B entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en B.

A continuación demostraremos otra equivalencia de $\mathrm{MA}(\kappa)$.

2.25 Teorema. Para todo cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$, $\mathrm{MA}(\kappa)$ es equivalente a $\mathrm{MA}_b(\kappa)$.

Demostración. Sea κ un cardinal infinito con $\kappa < \mathfrak{c}$. Es claro que $\mathrm{MA}(\kappa)$ implica $\mathrm{MA}_b(\kappa)$. Así que basta demostrar que $\mathrm{MA}_b(\kappa)$ implica $\mathrm{MA}(\kappa)$. Para ello, demostraremos que $\mathrm{MA}_b(\kappa)$ implica $\mathrm{MA}^*(\kappa)$ (vea el Teorema 2.16).

Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un conjuntos parcialmente ordenado con la c.c.c. con $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$. Y sea $\mathcal{D}$ una familia de a lo más κ densos en $\mathbb{P}$. Aplicando el lema 2.23, podemos considerar un álgebra Booleana completa $\mathfrak{B}$ y una función $i : \mathbb{P} \to B$ que satisface las condiciones (1), (2) y (3) del lema 2.23.

Verifiquemos que B satisface la c.c.c.: Si $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ fuera una anticadena en B entonces, por el lema 2.23, tenemos que

$$\forall \alpha < \omega_1 \exists p_\alpha (i(p_\alpha) \leqslant b_\alpha)$$

(aplicamos la densidad de $i(\mathbb{P})$ en $B \setminus \{0\}$). Observemos que $a \perp b$ en B si y sólo si $a \wedge b = 0$. Como $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena, podemos concluir que $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$. Por ello B satisface la c.c.c.

Veamos ahora que $D \in \mathcal{D}$ implica que $i(D)$ es denso en $B \setminus \{0\}$. Sea $b \in B \setminus \{0\}$, entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $i(p) \leqslant b$. Como D es denso en $\mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant p$. Entonces $i(d) \leqslant i(p) \leqslant b$. De esta forma, $i(D)$ es denso en $B \setminus \{0\}$.

Definamos ahora, para cada $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ al conjunto

$$D_{pq} = \{r \in \mathbb{P} : (r \leqslant p \wedge r \leqslant q) \vee r \perp p \vee r \perp q\}.$$

Veamos que cada conjunto D_{pq} es denso en $\mathbb{P}$. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ fijos y $r \in \mathbb{P}$ cualquiera. Si existe $r_0 \in \mathbb{P}$ tal que $r_0 \leqslant r \wedge (r_0 \perp p \vee r_0 \perp q)$, entonces

$r_0 \in D_{pq}$ y $r_0 \leqslant r$. Ahora, si no existe tal $r_0 \in \mathbb{P}$, entonces r es compatible con p, y por lo tanto, existe $r_1 \in \mathbb{P}$ tal que $r_1 \leqslant r$ y $r_1 \leqslant p$. Pero r_1 también debe ser compatible con q, y entonces existe $r_2 \in \mathbb{P}$ tal que $r_2 \leqslant r_1$ y $r_2 \leqslant q$. Como $r_2 \leqslant p$, tenemos que $r_2 \in D_{pq}$ y $r_2 \leqslant r$. Así hemos demostrado que D_{pq} es denso en $\mathbb{P}$.

Como cada D_{pq} es denso en $\mathbb{P}$, tenemos que $i(D_{pq})$ también es denso en $B \setminus \{0\}$ (vea, en esta demostración, la parte donde se demostró que si $D \in \mathcal{D}$ entonces $i(D)$ es denso en $B \setminus \{0\}$). Como $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$, tenemos que

$$\mathcal{D}' = \{i(D) : D \in \mathcal{D}\} \cup \{i(D_{pq}) : (p,q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}\}$$

es una familia de a lo más κ densos en $B \setminus \{0\}$. Aplicando ahora $\mathrm{MA}_b(\kappa)$ a $\langle B \setminus \{0\}, \leqslant\rangle$, y a $\mathcal{D}'$, tenemos que existe un filtro H que es $\mathcal{D}'$-genérico en $B \setminus \{0\}$.

Entonces la colección

$$G = i^{-1}(H)$$

es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $B \setminus \{0\}$. Primero veamos que es filtro. Si $q \in G$ y $p \in \mathbb{P}$ son tales que $q \leqslant p$ entonces $i(q) \leqslant i(p)$ y tenemos que $i(q) \in H$. Como H es filtro, tenemos que $i(p) \in H$. Por ello, $p \in i^{-1}(H) = G$. Además, si $p, q \in G$ entonces $i(D_{pq}) \in \mathcal{D}'$. Como H es $\mathcal{D}'$-genérico, tenemos que

$$H \cap D_{pq} \neq \emptyset.$$

Así, existe $t \in D_{pq}$ tal que $i(t) \in i(D_{pq}) \cap H$. Entonces $t \in i^{-1}(H) = G$ y $t \leqslant p$ y $t \leqslant q$. Así, G es un filtro.

Para ver que G es $\mathcal{D}$-genérico note que como H es $\mathcal{D}'$-genérico, si $D \in \mathcal{D}$ entonces $H \cap i(D) \neq \emptyset$. Por ello, existe $d \in D$ tal que $i(d) \in i(D) \cap H$. Entonces $d \in D \cap i^{-1}(H) = D \cap G$. Por lo tanto G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$. □

Recordemos que en la sección anterior hicimos notar que $\mathrm{MA}(\kappa)$ implica una generalización del teorema de categoría de Baire (véase teorema 2.17). En el siguiente teorema veremos que $\mathrm{MA}(\kappa)$ es de hecho equivalente a lo que llamamos $\mathrm{MA}_{top}(\kappa)$.

Antes de enunciar el resultado necesitaremos recordar algunos conceptos y resultados relacionados al espacio de Stone asociado a un álgebra Booleana.

2.26 Definición. Sea $\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ un álgebra Booleana. Una colección $F \subseteq B$ es un $\mathfrak{B}$-*filtro* si

(a) $0 \notin F$ y $F \neq \emptyset$;

(b) si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$; y

(c) si $a \in F$ y $b \in B$ es tal que $a \leqslant b$ entonces $b \in F$.

Un $\mathfrak{B}$-filtro F es un $\mathfrak{B}$-*ultrafiltro* si no existe algún $\mathfrak{B}$-filtro G tal que $F \subsetneq G$.

2.27 Definición. Si $\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ es un álgebra Booleana podemos considerar al conjunto

$$S(\mathfrak{B}) = \{U \subseteq B : U\ es\ \mathfrak{B} - ultrafiltro\}.$$

Además, podemos definir la función

$$\lambda : B \to \mathcal{P}(S(\mathfrak{B}))$$

como

$$\lambda(a) = \{U \in S(\mathfrak{B}) : a \in U\}.$$

Usando las propiedades de los $\mathfrak{B}$-ultrafiltros es posible demostrar el siguiente lema.

2.28 Lema. Sea $\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ un álgebra Booleana y sean $a, b \in B$. Entonces

1. $\lambda(0) = \emptyset$ y $\lambda(1) = S(\mathfrak{B})$
2. $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) \cup \lambda(b)$
3. $\lambda(a \wedge b) = \lambda(a) \cap \lambda(b)$
4. $\lambda(-a) = S(\mathfrak{B}) \setminus \lambda(a)$

Utilizando las propiedades de la función λ establecidas en el lema anterior podemos deducir que la colección

$$\{\lambda(a) : a \in B\}$$

es base para una topologa, τ_S, en $S(\mathfrak{B})$ como una base. La pareja $\langle S(\mathfrak{B}), \tau_S\rangle$ es llamada el *espacio de Stone asociado al álgebra Booleana* $\mathfrak{B}$. Es sabido que el espacio de Stone $\langle S(\mathfrak{B}), \tau_S\rangle$ es compacto Hausdorff (ver [6, Capítulo 13]).

Terminamos esta sección con el siguiente teorema que establece la equivalencia anunciada anteriormente.

2.29 Teorema. Para todo cardinal infinito $\kappa < \mathfrak{c}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) MA(κ)

(b) MA*(κ)

(c) $\mathrm{MA}_b(\kappa)$

(d) $\mathrm{MA}_{top}(\kappa)$

Demostración. Ya tenemos que (a), (b) y (c) son equivalentes por los Teoremas 2.16 y 2.25; además, por el teorema 2.17, (a)$\to$(d).

(d)$\to$(c). Sea $\mathfrak{B} = \langle B, \vee, \wedge, -, 0, 1\rangle$ un álgebra Booleana completa con la c.c.c. y $\mathcal{D}$ una familia de a lo más κ subconjuntos densos de B.

Sea $X = S(\mathfrak{B})$. Los elementos de X son los ultrafiltros en B, así si $b \in B$, un abierto básico en X es de la forma $\lambda(b) = \{G \in X : b \in G\}$.

Veamos que X tiene la c.c.c.: Supongamos que para $b, c \in B$ se tiene que $\lambda(b) \cap \lambda(c) = \emptyset$ y que $b \wedge c \neq 0$, entonces para algún ultrafiltro G de B se tiene que $b \wedge c \in G$, lo cual es imposible pues $\lambda(b) \cap \lambda(c) = \emptyset$. Por lo tanto para $b, c \in B$, $\lambda(b) \cap \lambda(c) = \emptyset$ implica que $b \wedge c = 0$. Como B tiene la c.c.c., lo anterior implica que X tiene la c.c.c.

Ahora, para cada $D \in \mathcal{D}$ definimos $W_D = \bigcup\{\lambda(b) : b \in D\}$. Claramente cada W_D es abierto, también es denso en X. En efecto: Sea $c \in B$ arbitrario. Como D es denso en B, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant c$. Entonces $\lambda(d) \subseteq \lambda(c)$. De esta forma,

$$\lambda(c) \cap (\bigcup\{\lambda(b) : b \in D\}) = \lambda(c) \cap W_D \neq \emptyset.$$

Por hipótesis tenemos que $\bigcap\{W_D : D \in \mathcal{D}\} \neq \emptyset$. Tomemos $G \in \bigcap\{W_D : D \in \mathcal{D}\}$. Entonces G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en B (evidentemente al ser $G \in \bigcap\{W_D : D \in \mathcal{D}\}$, G es un ultrafiltro en B), puesto que si $D \in \mathcal{D}$ entonces $G \in W_D$. Por ello, existe $b \in D$ tal que $G \in \lambda(b)$. Pero entonces $b \in G$. Así, $b \in G \cap D$. Es decir, $G \cap D \neq \emptyset$. $\square$

Capítulo 3

Algunas aplicaciones de MA

3.1. Introducción

Muchas estructuras matemáticas tienen asociadas de manera natural ciertos cardinales de los cuales uno puede asegurar que no son numerables. En esta sección veremos algunos cardinales invariantes del continuo, que son cardinales relacionados a $\mathfrak{c}$, es decir, a $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\omega)$ o ω^ω. Por ejemplo, en el Análisis Matemático tenemos dos ejemplos de ello:

1. La mínima cantidad de conjuntos densos en ninguna parte que se necesitan para cubrir a la recta real, según el teorema de categoría de Baire, es no numerable, pero debido a que los subconjuntos de un elemento de la recta real son densos en ninguna parte, este número es menor que el continuo $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

2. El número mínimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero que se necesitan para que su unión ya no sea de medida de Lebesgue cero es no numerable, pero de nuevo, como cada subconjunto de cardinalidad uno de $\mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero, este número es menor que el continuo $\mathfrak{c}$.

La mínima cantidad de conjuntos densos en ninguna parte que se necesitan para cubrir a la recta real $\mathbb{R}$ es denotado con el símbolo $cov(\mathcal{M})$ y la mínima cantidad de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero tal que su unión ya no es de medida de Lebesgue cero es denotado por $add(\mathcal{N})$. Una pregunta natural en relación a estos números cardinales es la siguiente: ¿De qué manera están colocados $cov(\mathcal{M})$ y $add(\mathcal{N})$ en $[\aleph_1, \mathfrak{c}]$?

Suponiendo la hipótesis del continuo esta pregunta no representa ningún problema: Ambos números son $\aleph_1$. ¿Pero qué ocurre si suponemos cierta la negación de la Hipótesis del Continuo? En este caso, la respuesta ya no es tan sencilla. Primeramente, debemos recordar que bajo la negación de la Hipótesis el Continuo, hay cardinales κ con $\aleph_1 < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, y que puede haber muchos, y las respuestas a las anteriores preguntas nos exige dar la posición exacta de esos números cardinales en el intervalo $[\aleph_1, \mathfrak{c}]$. Pues bien, no existe una respuesta a esas preguntas, o mejor dicho, no existe una sola respuesta a esas preguntas, ya que ello no es decidible en ZFC.

La idea de este capítulo es mostrar cómo el Axioma de Martin nos permite decidir qué posición ocupan esos números cardinales: demostraremos que, suponiendo el Axioma de Martin, estos dos números cardinales son iguales a $\mathfrak{c}$. Además de ello, damos algunas de las aplicaciones clásicas del Axioma de Martin. A través de todo este capítulo estaremos suponiendo la negación de la CH.

3.2. MA y algunos invariantes del continuo

En muchas aplicaciones del Axioma de Martin, la versión más débil de éste que está relacionada con la noción de preorden σ-centrado es frecuentemente usada. Para establecer de manera precisa esta versión más débil del Axioma de Martin, es que introducimos las siguiente definición.

3.1 Definición. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un conjunto preordenado.

1. Diremos que $B \subseteq \mathbb{P}$ es *centrado* si todo subconjunto finito $F \subseteq B$ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$, es decir, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que para cada $f \in F$ se tiene que $p \leqslant f$.

2. Por otro lado, diremos que $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es *σ-centrado* si $\mathbb{P}$ se puede ver como una unión a lo más numerable de conjuntos centrados, es decir, $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{P}_n$, donde cada $\mathbb{P}_n$ es centrado.

3. Si κ es un cardinal infinito con $\kappa < \mathfrak{c}$, entonces $\mathrm{MA}(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$ es la proposición: Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un conjunto preordenado no vacío, σ-centrado y $\mathcal{D}$ es una familia de a los más κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$.

Recuerde que en MA se exige que $\mathbb{P}$ tenga la c.c.c. En el siguiente lema veremos porqué en $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}}$ no es necesario.

3.2 Lema. Todo conjunto preordando σ-centrado tiene la c.c.c.

Demostración. Sea $\mathbb{P}$ un conjunto preordenado σ-centrado. Supongamos que existe un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ no numerable de conjuntos incompatibles por pares. Dado que $\mathbb{P}$ es σ-centrado, existe $\{\mathbb{P}_n : n \in \omega\}$, donde cada $\mathbb{P}_n$ es centrado, tal que $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{P}_n$. Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega}(A \cap \mathbb{P}_n)$, así que debe existir $m \in \omega$ con $|A \cap \mathbb{P}_m| = \omega_1$. Naturalmente, si $p, q \in A \cap \mathbb{P}_m$ son distintos, entonces p y q son compatibles, pues $\mathbb{P}_m$ es centrado. Por lo tanto toda familia de conjuntos incompatibles por pares es a lo más numerable. $\square$

Como hemos mencionado, y como constataremos más adelante, para algunos casos bastará suponer la siguiente versión más débil que MA.

3.3 Definición. El Axioma de Martin σ-centrado, $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}}$, es la proposición: $\forall\kappa < 2^{\aleph_0} : \mathrm{MA}(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$.

La primera aplicación que presentamos es la demostración de que bajo MA + $\neg$CH no pueden existir familias casi ajenas maximales $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ de tamaño κ con $\aleph_0 \leqslant \kappa < 2^{\aleph_0}$. De hecho, lo que haremos es demostrar que este tipo de familias no existen si suponemos $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}} + \neg\mathrm{CH}$.

3.4 Definición. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. El orden parcial de conjuntos casi ajenos respecto a la familia $\mathcal{A}$ se define en el conjunto

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}} = \{\langle s, F\rangle : s \subseteq \omega \wedge |s| < \aleph_0 \wedge F \subseteq \mathcal{A} \wedge |F| < \aleph_0\},$$

como $\langle s', F'\rangle \leqslant \langle s, F\rangle$ si $s \subseteq s'$, $F \subseteq F'$, y para cada $x \in F$ se tiene que $x \cap s' \subseteq s$.

A los elementos de $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ se les acostumbra llamar *condiciones*; estas condiciones intentan describir a un subconjunto $d \subseteq \omega$ que es casi ajeno con los elementos de $\mathcal{A}$.

A continuación, en una serie de lemas, demostraremos varias propiedades relevantes del conjunto parcialmente ordenado $\langle \mathbb{P}_{\mathcal{A}}, \leqslant\rangle$.

3.5 Lema. Para cualesquiera $\langle s_1, F_1\rangle, \langle s_2, F_2\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s_2, F_2\rangle$ son compatibles.
2. $\forall x \in F_1(x \cap s_2 \subseteq s_1) \wedge \forall x \in F_2(x \cap s_1 \subseteq s_2)$.
3. $\forall x \in F_1 \forall n \in x \setminus s_1(n \notin s_2) \wedge \forall x \in F_2 \forall n \in x \setminus s_2(n \notin s_1)$.

Demostración. (1)$\leftrightarrow$ (2) Sean $\langle s_1, F_1\rangle, \langle s_2, F_2\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ compatibles. Sea $\langle s, F\rangle$ una extensión común y $x \in F_1$, entonces $x \cap s \subseteq s_1$; como $s_2 \subseteq s$, tenemos que $x \cap s_2 \subseteq x \cap s \subseteq s_1$. Análogamente tenemos que $\forall x \in F_2(x \cap s_1 \subseteq s_2)$. Por otro lado supongamos que (2) es cierta y sea $\langle s, F\rangle = \langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$, entonces $\langle s, F\rangle$ es una extensión común de $\langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s_2, F_2\rangle$. Por lo tanto son compatibles.

(2)$\leftrightarrow$(3) Supongamos que (2) es cierta y sean $x \in F_1$ y $n \in x \setminus s_1$, como $x \cap s_2 \subseteq s_1$, $n \notin s_2$. Análogamente $\forall x \in F_2 \forall n \in x \setminus s_2(n \notin s_1)$. Ahora asumamos que (3) es cierta y sean $x \in F_1$, como $\forall n \in x \setminus s_1(n \notin s_2)$, se tiene que $x \cap s_2 \subseteq s_1$. Análogamente $\forall x \in F_2(x \cap s_1 \subseteq s_2)$. □

En el contexto de la definición 3.4, definimos lo siguiente: Si G es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, entonces definimos $d_G = \bigcup\{s : \exists F(\langle s, F\rangle \in G)\}$. Para cada $x \in \mathcal{A}$, definimos $D_x = \{\langle s, F\rangle : \langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \wedge x \in F\}$.

3.6 Lema. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Entonces tenemos lo siguiente:

1. Si G es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ y $\langle s, F\rangle \in G$, entonces $\forall x \in F(x \cap d_G \subseteq s)$.
2. Sea $x \in \mathcal{A}$. Si G es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ y $G \cap D_x \neq \emptyset$, entonces $|x \cap d_G| < \aleph_0$.
3. Si $x \in \mathcal{A}$, entonces D_x es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.
4. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tiene la c.c.c.

Demostración.

1. Si $\langle s', F'\rangle \in G$, entonces $\langle s', F'\rangle$ y $\langle s, F\rangle$ son compatibles, pues G es un filtro. Por el lema anterior, tenemos que $\forall x \in F(x \cap s' \subseteq s)$. Por lo tanto $\forall x \in F(x \cap d_G \subseteq s)$.
2. Como $G \cap D_x \neq \emptyset$, hay $\langle s, F\rangle \in G$ tal que $x \in F$. Por el lema anterior $x \cap d_G \subseteq s$; como s es finito, tenemos que $|x \cap d_G| < \aleph_0$.
3. Sea $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Entonces $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \leqslant \langle s, F\rangle$.
4. Por el Lema 3.2 $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. □

3.7 Lema (Solovay)**.** Suponiendo MA, si $\mathcal{A}, \mathcal{C} \in [[\omega]^{\aleph_0}]^{<2^{\aleph_0}}$ son tales que para cada $a \in \mathcal{C}$ y para cada subconjunto finito $E \subseteq \mathcal{A}$ tenemos que $|a \setminus \bigcup E| = \aleph_0$, entonces existe un conjunto $d \subseteq \omega$ tal que:

1. Para cada $x \in \mathcal{A}$ $|d \cap x| < \aleph_0$; y

2. Para cada $y \in \mathcal{C}$ $|d \cap y| = \aleph_0$.

Demostración. Sea $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$; definimos

$$E_n^y = \{\langle s, F\rangle : \langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \wedge s \cap y \nsubseteq n\}.$$

Sea $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$; como $|y \setminus \bigcup F| = \aleph_0$, sea $m \in y \setminus \bigcup F$ tal que $m > n$. Por un lado, tenemos que $\langle s \cup \{m\}, F\rangle \in E_n^y$ pues $(s \cup \{m\}) \cap y \nsubseteq n$; por el otro, si $x \in F$, entonces $x \cap (s \cup \{m\}) = x \cap s \subseteq s$, $s \subseteq s \cup \{m\}$ y $F \subseteq F$ por ende $\langle s \cup \{m\}, F\rangle \leqslant \langle s, F\rangle$. Por lo tanto para toda $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$, E_n^y es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.

Sea $x \in \mathcal{A}$. Por el Lema 3.5(3), D_x es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.

Si $\mathcal{D} = \{E_n^y : y \in \mathcal{C} \wedge n \in \omega\} \bigcup \{D_x : x \in \mathcal{A}\}$, entonces por $MA_{\sigma-centrado}$ hay un filtro $G \subseteq \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ que es $\mathcal{D}$-genérico. Por el Lema 3.5(2), $\forall x \in \mathcal{A}(|d_G \cap x| < \aleph_0)$.

Si $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$, $G \bigcap E_n^y \neq \emptyset$. Si $\langle s_n, F_n\rangle \in G \bigcap E_n^y$, $s_n \cap y \nsubseteq n$. Entonces $\forall n \in \omega$ se tiene que $s_n \subseteq d_G$, por lo tanto $\forall n \in \omega(d_G \cap y \nsubseteq n)$. Por lo tanto $|d_G \cap y| = \aleph_0$. □

Utilizando el lema de Solovay podemos demostrar primeramente lo siguiente.

3.8 Teorema. Suponiendo MA(κ), para toda $\kappa < 2^{\aleph_0}$ se tiene que $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una familia casi ajena de tamaño κ (en la observación 2 verificamos la existencia de estas familia para cualquier cardinal infinito). Sea $\Phi : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ donde $\Phi(d) = \{x \in \mathcal{B} : |d \cap x| < \aleph_0\}$. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Por el lema 3.7 hay $d \subseteq \omega$ tal que para toda $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $|d \cap x| < \aleph_0$, entonces $\mathcal{A} = \Phi(d)$. Por lo tanto Φ es suprayectiva, luego $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$. □

Recordemos que el teorema de Köning establece que si $\kappa \geqslant \aleph_0$ entonces $cf(2^\kappa) > \kappa$, donde $cf(2^\kappa)$ denota la cofinalidad de 2^κ.

3.9 Corolario. Suponiendo MA, el número $2^{\aleph_0}$ es un cardinal regular.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 3.8, si $\aleph_0 \leqslant \kappa < 2^{\aleph_0}$, $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto $cf(2^{\aleph_0}) > \kappa$. Como para toda $\kappa < 2^{\aleph_0}$, sucede que $\kappa < cf(2^{\aleph_0}) \leqslant 2^{\aleph_0}$, $cf(2^{\aleph_0}) = 2^{\aleph_0}$, es decir, $2^{\aleph_0}$ es regular. $\square$

En relación a la familias casi ajenas tenemos el siguiente resultado, el cual es corolario del Lema de Solovay.

3.10 Lema. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ una familia casi ajena de tamaño menor que $2^{\aleph_0}$. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Si suponemos MA, entonces hay $d \subseteq \omega$ tal que:

- $\forall x \in \mathcal{A}(|d \cap x| < \aleph_0)$ y
- $\forall x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}(|d \cap x| = \aleph_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Sea $y \in \mathcal{C}$ y $F \subseteq \mathcal{A}$ finito. Como y es infinito, entonces $|y \setminus \bigcup F| = |y| = \aleph_0$. Por el lema 3.7, tenemos lo que buscábamos. $\square$

3.11 Corolario. Supongamos MA. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es una familia casi-ajena de cardinalidad κ, donde $\aleph_0 \leqslant \kappa < 2^{\aleph_0}$, entonces $\mathcal{A}$ no es maximal.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{A}$ como en las hipótesis y $\mathcal{C} = \{\omega\}$. Sea $F \subseteq \mathcal{A}$ finito, entonces $|\omega \setminus \bigcup F| = \aleph_0$. En efecto, si $\omega \setminus \bigcup F$ fuera finito, como $\mathcal{A} \setminus F \neq \emptyset$, existe $x \in \mathcal{A} \setminus F$ tal que $|x \setminus \bigcup F| < \aleph_0$, luego hay $a \in F$ de tal modo que $|x \cap a| = \omega$; lo cual es imposible pues $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena. Por lo tanto $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cumplen las hipótesis del Lema de Solovay (3.7). Entonces hay $d \subseteq \omega$ infinito que es casi ajeno con todos los elementos de $\mathcal{A}$. Luego $\mathcal{B} = \mathcal{A} \bigcup \{d\}$ es una familia casi ajena que contiene propiamente a $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ no puede ser maximal. $\square$

3.12 Definición.

$$\mathfrak{a} = min\{|A| : A \subseteq \mathcal{P}(\omega) \wedge A\ es\ una\ familia\ casi\ ajena\ maximal\}.$$

Por el teorema 1.3 inciso (1), podemos concluir que $\mathfrak{a} > \aleph_0$ en ZFC, pero de hecho bajo $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}}$(corolario 3.11) tenemos que $\mathfrak{a} \geqslant 2^{\aleph_0}$. Como $\mathfrak{a} \leqslant 2^{\aleph_0}$ podemos concluir que $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}}$ implica que $\mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$. De manera particular podemos concluir lo siguiente.

3.13 Corolario. El Axioma de Martin implica que $\mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$.

Otro cardinal asociado a ω que juega un importante papel en el estudio de los cardinales invariantes del continuo es el cardinal $\mathfrak{p}$ introducido por F. Rothberger.

3.14 Definición.

1. Sean $a, b \subseteq \omega$. Decimos que a está *casi contenido* en b si $|a \setminus b| < \aleph_0$; lo que denotaremos por $a \subseteq^* b$. También diremos que a y b son *casi iguales* si $a \subseteq^* b$ y $b \subseteq^* a$.

2. Sean $b \subseteq \omega$ y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. Decimos que b es una *pseudo-intersección* para $\mathcal{C}$, si b es infinito y para todo elemento $c \in \mathcal{C}$ se tiene que $b \subseteq^* c$.

3. Una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tiene la *propiedad fuerte de la intersección finita (pfif)* si para todo $H \in [\mathcal{C}]^{<\aleph_0}$ no vacío se tiene que $|\bigcap H| = \aleph_0$

No es difícil demostrar que si una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tiene una pseudo-intersección, entonces tiene la pfif. El número de pseudointersección mide el tamaño mínimo de una familia que tiene la pfif pero no posee pseudo-intersección.

3.15 Lema.

1. Si $\mathcal{C}$ es un ultrafiltro no principal sobre ω, entonces $\mathcal{C}$ tiene la pfif pero no una pseudo-intersección.

2. Si $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ es una familia con la pfif, entonces $\mathcal{B}$ tiene una pseudo-intersección.

DEMOSTRACIÓN.

1. Por ser $\mathcal{C}$ un ultrafiltro no principal, entonces todos sus elementos son infinitos, por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene la pfif. Supongamos que $b \subseteq \omega$ es una pseudo-intersección para $\mathcal{C}$. Como b es infinito, existen $c, d \subseteq \omega$ infinitos tales que $b = c \cup d$ y $c \cap d = \emptyset$. Como $\mathcal{C}$ es ultrafiltro, entonces $c \in \mathcal{C}$ u $\omega \setminus c = d \cup (\omega \setminus b) \in \mathcal{C}$. Si $c \in \mathcal{C}$, entonces $b \subseteq^* c$, pero $|b \setminus c| = \aleph_0$; si $\omega \setminus c \in \mathcal{C}$, entonces $b \setminus (d \cup (\omega \setminus b)) = c$, pero $|c| = \aleph_0$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ no tiene pseudo-intersecciones.

2. Construiremos una pseudo-intersección para $\mathcal{B}$. Sea $b_0 \in B_0$. Como $B_0 \cap B_1$ es infinito, entonces existe $b_1 \in B_0 \cap B_1$ tal que $b_0 \neq b_1$. Sea $b_n \in \cap_{i=0}^{n} B_i$ tal que para toda $m < n$ se tiene que $b_m \neq b_n$,

entonces existe $b_{n+1} \in \cap_{i=0}^{n+1} B_i$ tal que para cada $m < n+1$, se tiene que $b_{n+1} \neq b_m$. Por lo tanto $b = \{b_n : n \in \omega\}$ es una pseudo-intersección para $\mathcal{B}$. En efecto: Sea $n \in \omega$, entonces $b \setminus B_n \subseteq \{b_0, ..., b_{n-1}\}$, es decir, $b \subseteq^* B_n$. $\square$

Una vez hecha esta observación sobre familias contenidas en $\mathcal{P}(\omega)$ podemos presentar la siguiente definición.

3.16 Definición. El número de pseudointersección es el número cardinal

$$\mathfrak{p} = min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \subseteq [\omega]^{\aleph_0} \text{ tiene la pfif pero no pseudo-intersección}\}.$$

Como hemos mencionado, el inciso (1) del lema anterior nos dice que el número $\mathfrak{p}$ existe, el segundo inciso nos permite mostrar de manera fácil que $\mathfrak{p}$ es no numerable.

3.17 Corolario. Existe $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} > \aleph_0$.

Enseguida mostraremos que el axioma $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}}$ implica que el número de pseudointersección es igual al continuo $\mathfrak{c}$.

3.18 Teorema. Suponiendo MA, tenemos que $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Por el Corolario 3.17, tenemos que $\aleph_0 < \mathfrak{p} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Por otra parte, para demostrar que $2^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{p}$, bastará demostrar que si $\mathcal{C} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ tiene cardinalidad menor que $2^{\aleph_0}$ y tiene la pfif entonces tiene una pseudo-intersección. Para ello, sean $\mathcal{A} = \{\omega\}$ y $\mathcal{B} = \{\omega \setminus c : c \in \mathcal{C}\}$. Como $\mathcal{C}$ tiene la pfif, entonces para cualquier subconjunto $E \subseteq \mathcal{B}$ finito tenemos que $|\omega \setminus \cup E| = \aleph_0$. Por lo tanto estas familias de conjuntos cumplen las hipótesis del Lema de Solovay (3.7), entonces existe $d \subseteq \omega$ infinito tal que para cada $b \in \mathcal{B}$ se tiene que $|d \cap b| < \aleph_0$. Por lo tanto d es una pseudo-intersección, pues toda $c \in \mathcal{C}$ cumple que $d \subseteq^* c$. $\square$

Existen otros dos cardinales asociados con ω que juegan un papel decisivo en el cálculo de invariantes cardinales; los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$, introducidos por F. Rothberger en 1939 y por M. Katětov en 1960, respectivamente. Para nuestros propósitos, el número de (no)acotación de Rothberger será de gran utilidad. Para poder definir a este cardinal necesitaremos de algunas definiciones previas.

Sean f y g dos funciones de ω en ω. Decimos que g *domina a* f si existe un $n_0 \in \omega$ tal que para todo $n \geqslant n_0$, $f(n) < g(n)$. Es decir, a excepción de una cantidad finita, g es más grande que f, en tal caso escribimos $f <^* g$.

Es claro que si tenemos una familia finita de funciones $\{f_0, ..., f_i\}$, entonces la función f tal que para cada $n \in \omega$,

$$f(n) = max\{f_0(n), ..., f_i\} + 1$$

domina cada función de dicha familia. Incluso podemos lograr esto cuando la familia de funciones es numerable.

3.19 Lema. Si $\{f_n : n \in \omega\}$ es una familia numerable de funciones de ω en ω, entonces existe f que domina a todas las funciones de dicha familia.

DEMOSTRACIÓN. Definimos a $f : \omega \to \omega$ tal que para cada $n \in \omega$,

$$f(n) = max\{f_i(n) + 1 : i \leqslant n\}.$$

Esta función es la que necesitamos. □

A continuación introducimos el llamado número de (no)acotación. El lema anterior nos permitirá mostrar que este número es no numerable.

3.20 Definición. $\mathfrak{b}$ es el mínimo cardinal infinito κ para el cual existe una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ con $|\mathcal{F}| = \kappa$ tal que no hay función $f : \omega \to \omega$ que domine a cualquier elemento de $\mathcal{F}$.

El cardinal $\mathfrak{b}$ es llamado el número de (no)acotación. La letra $\mathfrak{b}$ proviene de la palabra en francés *non borné* (no acotado). Por el Lema 3.19 podemos concluir lo siguiente:

3.21 Teorema. $\aleph_0 < \mathfrak{b} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

El número de (no)acotación tiene una estrecha relación con el número $\mathfrak{a}$, en el siguiente teorema se establece esto.

3.22 Teorema (Solomon)**.** $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta con mostrar que cualquier familia casi ajena de tamaño menor que $\mathfrak{b}$ no es maximal. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ casi ajena, con $\kappa < \mathfrak{b}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia ajena de conjuntos; si no, reemplazamos cada A_n con $A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{i=n-1} A_i$.

Para cada $\omega \leqslant \alpha < \kappa$ sea $f_\alpha : \omega \to \omega$ tal que $f_\alpha(n) = max(A_\alpha \cap A_n)$ si $A_\alpha \cap A_n \neq \emptyset$, en otro caso $f_\alpha(n) = 0$. Como $\kappa < \mathfrak{b}$, entonces existe $f : \omega \to \omega$ que domina a cada f_α. Para cada $n \in \omega$, sea $e_n : \omega \to A_n$

una biyección estrictamente creciente, es decir, para cada $i \in \omega$ se tiene que $e_n(i) < e_n(i+1)$. $B = \{b_n : n \in \omega\}$ donde $b_n = f(e_n(n))$, es decir, la imagen bajo f del elemento $e_n(n)$ de A_n.

Como B tiene sólo un elemento de A_n, entonces para cada $n \in \omega$ se tiene que $B \cap A_n$ es finito. Supongamos que $\alpha \geqslant \omega$. Dado que $f_\alpha <^* f$, existe $n_o \in \omega$ tal que para cada $n \geqslant n_0$, $f_\alpha(n) < f(n)$. Ahora, para dicha n, resulta que b_n es mayor que el elemento $f_\alpha(e_n(n))$ de A_n que a su vez es estrictamente mayor que todos los elemento de $A_\alpha \cap A_n$. Por lo tanto $b_n \notin A_\alpha$. Y así $A_\alpha \cap B \subseteq \{b_0, .., b_n\}$ que es finito. Concluimos que $\mathcal{A}$ no es maximal. $\square$

Nuestra intención ahora es demostrar que bajo el Axioma de Martin el número $\mathfrak{b}$ es igual al continuo $\mathfrak{c}$. Para ello, esencialmente mostraremos que si suponemos MA(κ), y si $\mathcal{F}$ es una familia de κ funciones de ω en ω, con $\aleph_0 \leqslant \kappa < 2^{\aleph_0}$, entonces existe una función que domina a todas.

3.23 Teorema (MA$_{\sigma\text{-centrado}}(\kappa)$)**.** $\mathfrak{b} > \kappa$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia de κ funciones. Definamos

$$\mathbb{P} = \{\langle p, A\rangle : p \in Fn(\omega, \omega) \wedge A \subseteq \mathcal{F} \ finito\}.$$

Decimos que $\langle q, B\rangle \leqslant \langle p, A\rangle$ cuando $p \subseteq q, A \subseteq B$ y para cualquier función $f \in A$, si $n \in (dom(q) \setminus dom(p))$ entonces $q(n) > f(n)$.

Veamos ahora que $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

Afirmación 1. $\mathbb{P}$ es σ-centrado.

En efecto:

Sea $p \in Fn(\omega, \omega)$. Sean $I \subseteq \omega$ finito y $\mathbb{P}_p = \{\langle p, A_n\rangle : n \in I \wedge A_n \subseteq \mathcal{F} \ finito\}$. Es claro que $\langle p, A\rangle = \langle p, \bigcup_{n\in I} A_n\rangle$ es una cota inferior de A_n. Por lo tanto $\mathbb{P} = \bigcup_{p\in Fn(\omega,\omega)} \mathbb{P}_p$ es un conjunto σ-centrado. $\boxtimes$

Ahora definamos a los conjuntos densos. Primero, para cada $n \in \omega$, definimos $D_n = \{\langle p, A\rangle \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$ y para cada $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $E_f = \{\langle p, A\rangle \in \mathbb{P} : f \in A\}$.

Afirmación 2. Para cada $n \in \omega$ y cada $f \in \mathcal{F}$, los conjuntos D_n y E_f son densos.

En efecto: Sea $\langle p, A\rangle \in \mathbb{P}$. Supongamos que $n \notin dom(p)$. Enumeramos $A = \{f_1, ..., f_k\}$. Tomemos $m \in \omega$ tal que es mayor que $max\{f_1(n), ..., f_k(n)\}$.

Si definimos $q = p \cup \{\langle n, m\rangle\}$, entonces $\langle q, A\rangle$ está en D_n, además $\langle q, A\rangle \leqslant \langle p, A\rangle$.

Por otro lado, es fácil notar que el par $\langle p, A \cup \{f\}\rangle$ está en E_f y $\langle p, A \cup \{f\}\rangle \leqslant \langle p, A\rangle$. ⊠

Estableciendo $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in \mathcal{F}\}$, sea $\mathcal{G}$ un filtro $\mathcal{D}$-genérico proporcionado por MA(κ). Definamos $g = \bigcup\{p : \exists A((p, A) \in \mathcal{G})\}$. Como $\mathcal{G}$ es un filtro, entonces g está bien definida como función y dado que para toda $n \in \omega$ se tiene que $\mathcal{G} \cap D_n \neq \emptyset$, entonces $g : \omega \to \omega$.

Ahora nos basta ver que g domina cada función de la familia $\mathcal{F}$. En efecto: Sea $f \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{G} \cap E_f$ es no vacío, entonces sea $\langle p, A\rangle \in \mathcal{G} \cap E_f$. Sea $n_0 = max(dom(p))$. Sea $n > n_0$ y $\langle q, B\rangle \in \mathcal{G} \cap D_n$. Como $\mathcal{G}$ es filtro, entonces existe $\langle r, C\rangle \leqslant \langle p, A\rangle, \langle q, B\rangle$, con $\langle r, C\rangle \in \mathcal{G}$. Como $g(n) = r(n)$, basta probar que $f(n) < r(n)$. Como $n > n_0$, entonces $n \in dom(r) \setminus dom(p)$, como $f \in A$ y $\langle r, C\rangle \leqslant \langle p, A\rangle$, tenemos que $r(n) > f(n)$. Por lo tanto, g domina a toda función de la familia $\mathcal{F}$. □

En particular, bajo MA tenemos el siguiente resultado.

3.24 Corolario. Suponiendo MA, tenemos que $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$.

3.3. Aplicaciones de MA a Teoría de la Medida

Hemos comentado al inicio del presente capítulo que la mínima cantidad de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero cuya unión ya no tiene medida de Lebesgue cero es denotado por $add(\mathcal{N})$. Y hemos observado también que $\aleph_1 \leqslant add(\mathcal{N}) \leqslant \mathfrak{c}$. Nuestro propósito ahora es demostrar que suponiendo el Axioma de Martin se tiene que $add(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$; para ello recordaremos primeramente algunos hechos acerca de la medida de Lebesgue de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Antes que nada, recordemos que la *medida* λ de Lebesgue es una función que asocia a cada subconjunto Lebesgue medible de $\mathbb{R}$ (recuerde que todos los borelianos de $\mathbb{R}$ son subconjuntos Lebesgue medibles) un número real extendido de tal forma que la medida de los intervalos (a, b) es su longitud, es decir, $\lambda((a, b)) = b - a = \lambda([a, b])$. Además, recuerde que siendo λ una medida, ella es una función σ-aditiva, esto es, si $\{A_n : n \in \omega\}$ es ajena por pares entonces $\lambda(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \Sigma_{n\in\omega}\lambda(A_n)$.

Recuerde también que $M \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero ($\lambda(M) = 0$) si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U \subseteq \mathbb{R} \ (U \text{ es abierto, } M \subseteq U \text{ y } \lambda(U) \leqslant \varepsilon).$$

También es fácil notar (utilizando la σ-aditividad de λ) que si $\{M_n : n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero, entonces $\bigcup_{n\in\omega} M_n$ tiene medida de Lebesgue cero. De esta forma el conjunto $\mathcal{N} = \{N \subseteq \mathbb{R} : \lambda(N) = 0\}$ es cerrado bajo uniones numerables (de hecho, $\mathcal{N}$ es un ideal σ-completo).

Veamos que con MA podemos generalizar este último hecho. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los intervalos abiertos con extremos racionales, y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas la uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Claramente $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son numerables. Para la prueba del teorema será de ayuda ver que podemos aproximar (en el sentido de la medida) cualquier conjunto abierto por elementos de $\mathcal{C}$. La demostración del siguiente lema requiere de técnicas elementales de teoría de la medida (propiamente de la construcción de la medida de Lebesgue), no obstante, remitimos al lector al libro [8] para su demostración (vea el teorema 4.2.1).

3.25 Lema. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tal que $\lambda(U) < \infty$. Sea $\delta > 0$, entonces existe $Y \in \mathcal{C}$ tal que $\lambda(U \Delta Y) \leqslant \delta$.

3.26 Teorema. Supongamos MA. Sean $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$ y $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue 0. Entonces $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ tiene medida de Lebesgue 0.

Demostración. Para demostrar que $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ tiene medida de Lebesgue 0, demostraremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto U tal que $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha \subseteq U$ y $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos al conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{P}, \leqslant)$ donde $\mathbb{P} = \{p \subseteq \mathbb{R} : p \text{ es abierto y } \lambda(p) < \varepsilon\}$, y $p \leqslant q$ si $q \subseteq p$. Es claro que p y q son compatibles si y sólo si $\lambda(p \cup q) < \varepsilon$, y que $p \cup q$ es una extensión de p y de q.

Primero probemos que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.. Supongamos que $A = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de elementos incompatibles por pares en $\mathbb{P}$. Si $\alpha < \omega_1$, tenemos que $\varepsilon - \lambda(p_\alpha) > 0$. Así que existe n_0 tal que $0 < \frac{3}{n_0} < \varepsilon - \lambda(p_\alpha)$. Entonces $A = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} \{p \in A : \lambda(p) \leqslant \varepsilon - \frac{3}{n}\}$. Como A tiene cardinalidad $\aleph_1$, existe $m \in \omega \setminus \{0\}$ tal que el conjunto $X = \{\alpha < \omega_1 : \lambda(p_\alpha) \leqslant \varepsilon - \frac{3}{m}\}$ tiene cardinalidad $\aleph_1$.

Observe ahora que si $\alpha \in X$ entonces $\lambda(p_\alpha) < \varepsilon$ y que p_α es un abierto de $\mathbb{R}$. Luego, para cada $\alpha \in X$, aplicando el lema anterior, podemos fijar $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $\lambda(p_\alpha \Delta C_\alpha) \leqslant \delta = \frac{1}{m}$.

Pero si $\alpha, \beta \in X$ son elementos diferentes, entonces p_α y p_β son elementos incompatibles, y por ello si $\alpha, \beta \in X$ son diferentes entonces $\lambda(p_\alpha \cup p_\beta) \geqslant \varepsilon$. Por otro lado, $\lambda(p_\alpha \cap p_\beta) \leqslant \lambda(p_\alpha) \leqslant \varepsilon - \frac{3}{m} \leqslant \varepsilon - 3\delta$. Entonces

$$\lambda(p_\alpha \Delta p_\beta) = \lambda((p_\alpha \cup p_\beta) \setminus (p_\alpha \cap p_\beta)) \geqslant \lambda(p_\alpha \cup p_\beta) - \lambda(p_\alpha \cap p_\beta) \geqslant \varepsilon - \varepsilon + 3\delta = 3\delta.$$

Pero como $\lambda(p_\alpha \Delta C_\alpha) \leqslant \delta$ y $\lambda(p_\beta \Delta C_\beta) \leqslant \delta$, tenemos que

$$\lambda(C_\alpha \Delta C_\beta) \geqslant \delta.$$

Efectivamente,

$$p_\alpha \Delta p_\beta \subseteq (C_\alpha \Delta C_\beta) \cup (p_\alpha \Delta C_\alpha) \cup (p_\beta \Delta C_\beta)$$

implica que

$$\lambda(p_\alpha \Delta p_\beta) \leqslant \lambda(C_\alpha \Delta C_\beta) + \lambda(p_\alpha \Delta C_\alpha) + \lambda(p_\beta \Delta C_\beta).$$

Luego

$$\lambda(C_\alpha \Delta C_\beta) \geqslant \lambda(p_\alpha \Delta p_\beta) - \lambda(p_\alpha \Delta C_\alpha) - \lambda(p_\beta \Delta C_\beta) \geqslant 3\delta - \delta - \delta = \delta.$$

Por lo tanto el hecho de que α y β sean elementos de X distintos implica que $C_\alpha \neq C_\beta$; lo cual es imposible pues $|\mathcal{C}| = \aleph_0$. Por lo tanto $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.

Definiremos ahora a los subconjuntos densos. Sea $\alpha \in \kappa$. Definimos el conjunto

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : M_\alpha \subseteq p\}.$$

Veamos ahora que cada conjunto D_α es denso en $\mathbb{P}$. En efecto, sea $q \in \mathbb{P}$. Como $\lambda(q) < \varepsilon$, tenemos que $\varepsilon - \lambda(p) > 0$. Entonces como M_α tiene medida de Lebesgue cero, existe un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $M_\alpha \subseteq V$ y $\lambda(V) < \varepsilon - \lambda(q)$. Por lo tanto V y q son tales que $\lambda(V) + \lambda(q) < \varepsilon$ y se tiene que $\lambda(V \cup q) < \varepsilon$. Definamos $p = q \cup V$, entonces tenemos que $\lambda(p) < \varepsilon$, $M_\alpha \subseteq p$. Entonces $p \in D_\alpha$. Además, $q \leqslant p$. Por lo tanto, D_α es denso en $\mathbb{P}$. Sea $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}$.

Por MA, hay un filtro $\mathcal{D}$-genérico G en $\mathbb{P}$. Si $U_G = \cup G$, entonces U_G es abierto. Como para cada $\alpha < \kappa$, $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, entonces para cada $\alpha < \kappa$

existe $p_\alpha \in G \cap D_\alpha$. Luego, para cada $\alpha < \kappa$ se tiene que $M_\alpha \subseteq U_G$. Con ello, $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha \subseteq U_G$.

Verifiquemos ahora que $\lambda(U_G) \leqslant \varepsilon$. Para ello primeramente notemos que si $n \in \omega$ y $\{p_i : 0 \leqslant i \leqslant n\} \subseteq G$, entonces $\bigcup_{i=0}^n p_i \in G$ y por ello $\lambda(\bigcup_{i=0}^n p_i) < \varepsilon$. Aplicando ahora la subaditividad de la medida de Lebesgue, podemos concluir que para cualquier $A \subseteq G$ a lo más numerable, se tiene que $\lambda(\bigcup A) \leqslant \varepsilon$.

Así que para poder demostrar que $\lambda(U_G) \leqslant \varepsilon$ bastará encontrar un conjunto a lo más numerable $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\cup A = \cup G$ para poder usar lo antes mencionado. Pero como $U_G \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es segundo numerable, tenemos que U_G también lo es. Por lo tanto U_G es Lindelöf (recuerde que un espacio es Lindelöf si de toda cubierta abierta se le puede extraer una cubierta abierta numerable), por ello existe $\{H_n : n \in \omega\} \subseteq G$ tal que $U_G = \bigcup_{n\in\omega} H_n$. Resulta entonces que $\lambda(U_G) = \lambda(\bigcup_{n\in\omega} H_n) \leqslant \varepsilon$. □

3.27 Corolario. El Axioma de Martin implica que $add(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$.

3.4. El número $cov(\mathcal{M})$

Recordemos que $M \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de *primera categoría* de Baire o un conjunto *magro* si existen $\{K_n : n \in \omega\}$ conjuntos densos en ninguna parte de $\mathbb{R}$ tales que $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n$. Recuerde también que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es denso en ninguna parte o nunca denso si $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(A)) = \emptyset$. Es fácil notar también que $A \subseteq \mathbb{R}$ es nunca denso si y sólo si $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(A)$ es nunca denso. De esta forma, en la definición de conjunto magro podemos suponer sin perder generalidad que cada conjunto K_n es un cerrado nunca denso.

A los complementos de subconjuntos de primera categoría o magros se les llama comagros. No es difícil demostrar que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es comagro si y sólo si, contiene una intersección de una colección numerable de subconjuntos densos y abiertos de $\mathbb{R}$ (para verificar esto último sólo habría que notar que $B \subseteq \mathbb{R}$ es denso en ninguna parte si y sólo si $\mathbb{R} \setminus \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(B)$ es abierto denso).

Es fácil notar que la unión numerable de conjuntos de primera categoría es de primera categoría. A continuación introducimos un importante número cardinal.

3.28 Definición. Definimos

$$cov(\mathcal{M}) = min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \textit{ es una cubierta de subconjuntos magros de } \mathbb{R}\}.$$

Una consecuencia del teorema de categoría de Baire es que $\mathbb{R}$ no puede ser escrito como una unión numerable de subconjuntos magros. Esto último claramente implica que $\aleph_1 \leqslant cov(\mathcal{M})$. Por otro lado, como cada subconjunto de cardinalidad uno de $\mathbb{R}$ sí es un conjunto magro y $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ se tiene que $cov(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{c}$. De esta forma tenemos que $\aleph_1 \leqslant cov(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{c}$. Como una consecuencia del siguiente resultado, obtendremos que bajo el Axioma de Martin se tiene que $cov(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

3.29 Teorema. Supongamos $\mathrm{MA}_{\sigma\text{-centrado}}$. Sean $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$ y $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos de primera categoría en $\mathbb{R}$. Entonces $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ es de primera categoría.

Demostración. Debemos demostrar que existe $\{H_n : n \in \omega\}$ familia de cerrados nunca densos tal que $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha \subseteq \bigcup_{n\in\omega} H_n$, pero como cada M_α está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados nunca densos, es suficiente demostrar que cada vez que tengamos una colección de κ subconjuntos cerrados nunca densos K_α de $\mathbb{R}$ entonces existe una colección numerable de cerrados nunca densos $\{H_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcup_{\alpha<\kappa} K_\alpha \subseteq \bigcup_{n\in\omega} H_n$.

Observe también que para demostrar esto último, es suficiente demostrar que existe una sucesión de subconjuntos abiertos densos $\{V_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, donde $U_\alpha = \mathbb{R} \setminus K_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$. Con la hipótesis adicional de que cada U_α es un subconjunto abierto denso de $\mathbb{R}$. La idea de la demostración es demostrar esta última afirmación.

Sea $\{B_i : i \in \omega\}$ una enumeración de todos los intervalos abiertos no vacíos con extremos racionales; recuerde que éstos forman una base para $\mathbb{R}$.

Para cada $j \in \omega$, definimos $c_j = \{i \in \omega : B_i \subseteq B_j\}$ y para cada $\alpha < \kappa$, definimos $a_\alpha = \{i \in \omega : B_i \nsubseteq U_\alpha\}$. Para aplicar el lema 3.7, veamos que $\mathcal{C} = \{c_j : j \in \omega\}$ y $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ cumplen las hipótesis del mismo. En efecto: sean $F \subseteq \kappa$ finito y $j \in \omega$. Entonces

$$c_j \setminus \cup_{\alpha\in F} a_\alpha = \{i \in \omega : B_i \subseteq (B_j \cap \bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha)\}.$$

Como $\bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha$ es denso, tenemos que $B_j \cap \bigcap_{\alpha\in F} U_\alpha$ es infinito; por lo tanto $c_j \setminus \cup_{\alpha\in F} a_\alpha$ es infinito. Aplicando ahora el lema 3.7, hay un $d \subseteq \omega$ tal que para todo elemento $x \in \mathcal{A}$ se tiene que $d \cap x$ es finito y para todo elemento $y \in \mathcal{C}$ se tiene que $d \cap y$ es infinito.

Si $n \in \omega$, definimos $V_n = \bigcup\{B_i : i \in d \wedge i > n\}$. Claramente cada V_n es abierto.

Sea $j \in \omega$. Como $|d \cap c_j| = \aleph_0$, tenemos que para cada $n \in \omega$ existe $i > n$ tal que $i \in d$ y $B_i \subseteq B_j$. Por lo tanto $V_n \cap B_j \neq \emptyset$, es decir, cada V_n es denso.

Finalmente, sea $\alpha < \kappa$. Como $|d \cap a_\alpha| < \aleph_0$, entonces para alguna $n \in \omega$ se tiene que $d \cap a_\alpha \subseteq n$. Así para toda $i > n$ que pertenezca a d se cumple que $B_i \subseteq U_\alpha$. Entonces $V_n \subseteq U_\alpha$. Por lo tanto $\bigcap_{m\in\omega} V_m \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. $\square$

3.30 Corolario. El Axioma de Martin implica que $cov(\mathcal{M}) = 2^{\aleph_0}$.

3.5. El producto de espacios con la c.c.c.

Hemos demostrado en la sección 3 del capítulo 1 que una condición suficiente para que un producto de espacios topológicos que tienen cada uno la c.c.c., sea un espacio con la c.c.c., es que cada producto finito de ellos tenga la c.c.c. En esta sección demostraremos que el Axioma de Martin implica que la c.c.c. se preserva bajo productos arbitrarios de espacios. Para establecer esto de manera precisa necesitamos un lema.

3.31 Lema. Supongamos MA($\aleph_1$). Sean X un espacio con la c.c.c. y $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X. Entonces hay un conjunto no numerable $A \subseteq \omega_1$ tal que $\{\mathcal{U}_\gamma : \gamma \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Demostración. Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup_{\gamma>\alpha} \mathcal{U}_\gamma$. Es claro que si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces $\mathcal{V}_\beta \subseteq \mathcal{V}_\alpha$.

Afirmación. $\exists \alpha < \omega_1 (\beta > \alpha \to \overline{\mathcal{V}_\beta} = \overline{\mathcal{V}}_\alpha)$.

En efecto: Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que

$$(**) \qquad \forall \alpha < \omega_1 \ \exists \beta_\alpha > \alpha (\overline{\mathcal{V}}_{\beta_\alpha} \neq \overline{\mathcal{V}}_\alpha).$$

Entonces existe una sucesión creciente $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ tal que

$$\forall \xi < \omega_1 (\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_\xi}).$$

Efectivamente, por (**) para $\xi = 0$ existe $\beta_0 < \omega_1$ tal que $\overline{\mathcal{V}}_{\beta_0} \neq \overline{\mathcal{V}}_0$. Definamos $\alpha_0 = \beta_0$.

Supongamos ahora que $0 < \xi < \omega_1$. Si $\xi = \eta + 1$ para algún $\eta < \omega_1$, definamos $A = \{\gamma < \omega_1 : \gamma > \alpha_\eta \wedge \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_\eta} \neq \overline{\mathcal{V}}_\gamma\}$. Por (**), $A \neq \emptyset$. Definamos entonces a $\alpha_\xi = minA$. Por otra parte, si $\xi \in$ **LIM** (es decir, si ξ es un ordinal límite), basta con establecer que $\alpha_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \alpha_\eta$.

Con todo lo anterior tenemos construida la sucesión creciente $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ prometida.

Ahora, como para todo $\xi < \omega_1$ se tiene que $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_\xi}$, entonces $\mathcal{V}_\alpha \setminus \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_\xi}$.

Note ahora que la definición de la sucesión $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ implica que $\{\mathcal{V}_{\alpha_\xi} \setminus \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{\xi+1}} : \xi < \omega_1\}$ es una familia de abiertos no vacíos en X ajenos por pares, lo cual es imposible pues X tiene la c.c.c. Por lo tanto nuestra afirmación es cierta. $\boxtimes$.

Por la afirmación anterior podemos fijar una $\alpha < \omega_1$ tal que $\beta > \alpha$ implica que $\overline{\mathcal{V}_\beta} = \overline{\mathcal{V}}_\alpha$.

Definamos $\mathbb{P} = \{p \subseteq \mathcal{V}_\alpha : p$ es abierto y $p \neq \emptyset\}$ y consideremos en $\mathbb{P}$ la relación $p \leqslant q$ si $p \subseteq q$. Como X tiene la c.c.c., $\mathbb{P}$ también la tiene. Una vez que tenemos nuestro orden parcial, basta encontrar la familia de densos para poder obtener un filtro conveniente. Para cada $\beta < \omega_1$, sea $D_\beta = \{p \in \mathbb{P} : \exists\gamma > \beta(p \subseteq \mathcal{U}_\gamma)\}$. Por la elección de α tenemos que $\overline{\mathcal{V}}_\alpha \subseteq \overline{\mathcal{V}}_\beta$, así si $p \in \mathbb{P}$ entonces $p \cap \mathcal{V}_\beta \neq \emptyset$. Luego para alguna $\gamma > \beta$ se tiene que $p \cap \mathcal{U}_\gamma \neq \emptyset$. Entonces $q = p \cap \mathcal{U}_\gamma$ es una extensión de p en D_β. Sea $\mathcal{D} = \{D_\beta : \beta < \omega_1\}$.

Por MA(ω_1), existe un filtro $\mathcal{G}$ $\mathcal{D}$-genérico. Definamos $A = \{\gamma < \omega_1 : \exists p \in \mathcal{G}(p \subseteq \mathcal{U}_\gamma)\}$. Como para cada β, $G \cap D_\beta \neq \emptyset$, entonces A no es acotado en ω_1.

Veamos por inducción que la familia $\{\mathcal{U}_\gamma : \gamma \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Para ello, sean $\gamma_1, \gamma_2 \in A$, entonces existen $p_1, p_2 \in \mathcal{G}$ tales que $p_1 \subseteq \mathcal{U}_{\gamma_1}$ y $p_2 \subseteq \mathcal{U}_{\gamma_2}$ y también existe $p_3 \in \mathcal{G}$ tal que $p_3 \subseteq p_1 \cap p_2$. Por lo tanto $p_3 \subseteq \mathcal{U}_{\gamma_1} \cap \mathcal{U}_{\gamma_2}$. Supongamos que para $n \in \omega$ se cumple la propiedad. Sea $\{\mathcal{U}_{\gamma_i} : i \leqslant n+1\}$. Entonces existen $p_n, p' \in \mathcal{G}$ tales que $p_n \subseteq \bigcap_{i\leqslant n} \mathcal{U}_{\gamma_i}$ y $p' \subseteq \mathcal{U}_{\gamma_{n+1}}$. Como $p_n, p' \in \mathcal{G}$, entonces hay $p \in \mathcal{G}$ tal que $p \subseteq p_n \cap p'$. Por lo tanto $p \subseteq \bigcap_{i\leqslant n+1} \mathcal{U}_{\gamma_i}$. Así $\{\mathcal{U}_\gamma : \gamma \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. $\square$

El siguiente teorema ya demuestra que el Axioma de Martin implica que la condición de la cadena contable es una propiedad productiva.

3.32 Teorema. Suponiendo MA($\aleph_1$), el producto arbitrario de espacios con la c.c.c. también tiene la c.c.c.

Demostración. Por el Teorema 1.8 basta demostrar que si X e Y tienen la c.c.c., entonces el producto $X \times Y$ también tiene la c.c.c.

Supongamos que los espacios X e Y tienen la c.c.c., pero que $X \times Y$ no la tiene.

Sea $\{\mathcal{W}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de abiertos no vacíos y ajenos por pares del producto $X \times Y$. Para cada α elegimos $\mathcal{U}_\alpha \subseteq X$ y $\mathcal{V}_\alpha \subseteq Y$ abiertos tales que $\emptyset \neq \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{W}_\alpha$. Por el lema 3.31 existe $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la *PIF*.

Note que si $\alpha, \beta \in A$ son diferentes entonces $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, pero entonces $(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\alpha) \cap (\mathcal{U}_\beta \times \mathcal{V}_\beta) = \emptyset$ implica que $\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta = \emptyset$. En consecuencia $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de abiertos no vacíos ajenos por pares de cardinalidad ω_1, lo cual contradice el hecho de que Y tiene la c.c.c. $\square$

3.6. Líneas de Suslin

G. Cantor demostró que si $(D, \leqslant)$ es un conjunto linealmente ordenado numerable que no tiene primero ni último elemento y que es denso en sí mismo (es decir, para cada $x, y \in D$ tales que $x < y$ existe $z \in D$ que satisface $x < z < y$), entonces $(D, \leqslant)$ es isomorfo a $\mathbb{Q}$ con su orden usual; o sea, existe una función biyectiva $f : D \to \mathbb{Q}$ tal que $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. A partir de este resultado es posible demostrar que si $(X, \leqslant)$ es un conjunto linealmente ordenado que satisface:

1. X no tiene ni primero ni último elemento;
2. X es conexo cuando se considera con su topología del orden; y
3. X es separable con su topología del orden;

entonces $(X, \leqslant)$ es isomorfo a la línea real $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

En 1920, Suslin publicó un trabajo en *Fundamenta Mathematicae* en donde conjeturó que es posible obtener el anterior resultado si en lugar de la condición (3) se pide la condición de que X con la topología del orden tenga la c.c.c. Dado que todo espacio separable tiene la c.c.c. (Lema 1.7), observe que esta conjetura implica que en estos órdenes lineales, es decir, conexos y sin extremos, la celularidad es equivalente a la separabilidad.

A los conjuntos linealmente ordenados que tienen la c.c.c pero que no son separables se les da un nombre especial.

3.33 Definición. Una *línea de Suslin* es un orden total $\langle X, < \rangle$ tal que, en la topología del orden, X tiene la c.c.c. pero no es separable.

3.34 Definición. La *Hipótesis de Suslin* (Suslin's Hypothesis, SH) es la afirmación: *No existen líneas de Suslin.*

Jensen demostró que la existencia de una línea de Suslin es consistente con ZFC. Previamente, Solovay y Tennenbaum demostraron que la hipótesis de Suslin también es consistente con ZFC.

Resulta que $\neg$SH y MA $+ \neg$CH producen realidades diferentes. Por ejemplo, ellas producen realidades diferentes en relación a la condición de la cadena contable.

3.35 Lema. Si X es una línea de Suslin, entonces X^2 no tiene la c.c.c..

Demostración. Si $a, b \in X$, entonces definimos $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. Por inducción sobre $\alpha < \omega_1$ construiremos $a_\alpha, b_\alpha\ y\ c_\alpha$ tales que

1. $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.

2. $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$.

3. $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

Sea W la colección de todos los puntos aislados de X. Como X tiene la c.c.c. y el conjunto singular de cada punto aislado es abierto, $|W| \leqslant \aleph_0$. Sean a_0, b_0 y c_0 elementos de X tales que $a_0 < b_0 < c_0$ y $(a_0, b_0) \neq \emptyset \neq (b_0, c_0)$. Dado que X no es separable, $A_0 = X \setminus \overline{W \cup \{b_0\}}$ es un abierto no vacío. Entonces hay $(a_1, c_1) \subseteq A_0$ no vacío e infinito (pues no contiene puntos aislados); tomemos $b_1 \in (a_1, c_1)$ tal que $(a_1, b_1) \neq \emptyset$ y $(b_1, c_1) \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que para $\xi < \alpha$ tenemos elegidos a los elementos a_ξ, b_ξ, c_ξ de tal forma que cumplen (1), (2) y (3). El conjunto $A_\alpha = X \setminus \overline{W \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\}}$ resulta ser un abierto no vacío, pues α es a lo más numerable. Tomemos $(a_\alpha, c_\alpha) \subseteq A_\alpha$ y $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ tales que $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$. Es fácil notar que a_α, b_α y c_α cumplen (1), (2) y (3).

Definamos $\mathcal{U}_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$. Por (2) tenemos que $\mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$. Si $\xi < \alpha$, $\mathcal{U}_\xi \cap \mathcal{U}_\alpha = \emptyset$; pues si $b_\xi \leqslant a_\alpha$, entonces $(a_\xi, b_\xi) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$ y si $b_\xi \geqslant c_\alpha$, entonces $(b_\xi, c_\xi) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$. Así $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de elementos ajenos por pares en X^2. Por el Lema 3.32, X^2 tiene la c.c.c.. $\square$

Así la existencia de líneas de Suslin implica que la c.c.c. no es una propiedad topológica que se preserve bajo productos topológicos, es decir, productiva. Pero nosotros hemos demostrado que el Axioma de Martin implica que la c.c.c. sí es una propiedad topológica productiva (Teorema 3.32). Se intuye entonces que el Axioma de Martin (junto con la negación de la Hipótesis del Continuo) implica la Hipótesis de Suslin.

3.36 Teorema. MA($\aleph_1$) implica SH.

Demostración. Por el Teorema 3.32, sabemos que MA($\aleph_1$) implica que el producto de dos espacios con la c.c.c. tiene la c.c.c. El lema 3.35 nos dice que de existir una línea de Suslin su cuadrado no satisface lo anterior. Por ello, podemos concluir que MA(ω_1) implica que no hay líneas de Suslin. □

Para finalizar esta sección veremos que si existe una línea de Suslin podemos construir una línea de Suslin más "agradable".

3.37 Teorema. Si existe una línea de Suslin, entonces existe una línea de Suslin X tal que

1. X es densa en sí misma, es decir,

$$\forall a, b \in X(a < b \to (a, b) \neq \emptyset),$$

y además

2. Ningún abierto no vacío y X es separable.

Demostración. Sea Y una línea de Suslin. Definimos la siguiente relación de equivalencia en Y. Sean $x, y \in Y$:

$$x \sim y \leftrightarrow (si\ x < y((x, y)) \vee\ si\ y < x((y, x))\ es\ separable.$$

Sea $X = {}^{Y}\!/\!\sim$. Si $I, J \in X$ son distintos entonces definimos $I < J$ si algún elemento de I es menor que algún elemento de J.

Ahora tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación.

1. Si $I \in X$, entonces I es convexo, es decir, si $x, y \in I$ y $x < y$, entonces $(x, y) \subseteq I$.

2. Sean $I, J \in X$ con $I < J$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

   (a) algún elemento de I es menor que alguno de J,

   (b) todo elemento de I es menor que todo elemento de J.

3. Si $I \in X$, entonces I es separable.

4. $\langle X, < \rangle$ es un orden total.

En efecto:

1. Sean $x, y \in I$ con $x < y$. Como (x, y) es separable, entonces para cada $z \in (x, y)$, el intervalo (x, z) es separable. Por lo tanto $z \in I$.

2. Sean $w \in I$ y $z \in J$. Como $I < J$, entonces existen $x \in I$ e $y \in J$ tales que $x < y$. Tenemos dos casos:

   caso 1: $x < z$.

   Supongamos que $w < z$. Como $(x, z) \subseteq I$, se tiene que $w \notin (x, z)$ y por lo tanto obtenemos la desigualdad $w < x < y$, lo que implica que $x \sim y$, contradiciendo el hecho de que $I \neq J$. Por lo tanto $z < w$

   caso 2: $z < x$.

   Supongamos que $w < z$. Por lo tanto $w < x < y$, así $x \sim y$, lo cual es imposible pues $I \neq J$. Por lo tanto $z < w$.

   Como z y w fueron elegidos arbitrariamente, se tiene que todo elemento de I es menor que todo elemento de J

3. Sea $\mathcal{M}$ una familia disjunta maximal de conjuntos abiertos de la forma (x, y) tales que $x, y \in I$ (esta familia existe por el lema de Zorn). Como Y tiene la c.c.c., entonces $\mathcal{M}$ es a lo más numerable. Por ello podemos escribir a $\mathcal{M} = \{(x_n, y_n) : n \in \omega\}$. Como para toda $n \in \omega$ tenemos que $x_n \sim y_n$, entonces (x_n, y_n) es separable. Podemos fijar D_n un denso numerable en el intervalo (x_n, y_n). Si $\mathcal{D} = \cup_{n\in\omega} D_n \cup \{x : x \textit{ es un extremo de } I\}$, entonces $\mathcal{D}$ es un denso numerable en $\cup(x_n, y_n)$. Si $z \in I$ y $z \in (x, y) \subseteq I$, por la maximalidad de $\mathcal{M}$ tenemos que $(x, y) \cap (x_n, y_n) \neq \emptyset$. Como el intervalo (x, y) que contenía a z fue elegido arbitrariamente, entonces $z \in \overline{D}$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ es un denso numerable en I.

4. Dado que Y es un orden total, entonces por (2) X resulta ser un orden total. $\boxtimes$.

Ahora demostremos que X es denso en sí mismo: Sean $I, J \in X$ con $I < J$. Supongamos que $(I, J) = \emptyset$. Sean $x \in I$ e $y \in J$. Tomamos a un elemento $z \in (x, y)$. Como $(I, J) = \emptyset$, $z \in I$ o $z \in J$; así $(x, y) \subseteq I \cup J$. Por (3), tenemos que (x, y) es separable, pero $I \neq J$. Por lo tanto $(I, J) \neq \emptyset$.

Sean $I, J \in X$ con $I < J$. Supongamos que (I, J) es separable. Sea $\{K_n : n \in \omega\}$ un conjunto denso de (I, J) con $K_0 = I$ y $K_1 = J$. En Y, para cada $n \in \omega$, sea D_n un denso numerable en K_n (recuerde que todos los elementos de X son separables). Ahora veamos que $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ es denso en $\bigcup\{L : I \leqslant L \leqslant J\}$. Sean $x \in U = \bigcup\{L : I \leqslant L \leqslant J\}$ y $(a,b) \subseteq U$ tales que $x \in (a,b)$. Si (a,b) es separable entonces lo podemos asociar con algún $K \in (I,J)$. Tenemos que $x \in (a,b)$ (en Y) y $K \in \overline{\{K_n : n \in \omega\}}$ (en X), entonces $(a,b) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$. Por lo tanto $x \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$. Si (a,b) no es separable, entonces existen $L_a, L_b \in (I,J)$ distintos tales que $a \in L_a$ y $b \in L_b$. Así se tiene que $\bigcup\{L : L_a \leqslant L \leqslant L_b\} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$. Entonces $x \in \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$. Como $x \in U$ fue elegido arbitrariamente, se tiene que $\bigcup\{L : I \leqslant L \leqslant J\} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} D_n}$. Como $\bigcup\{L : I \leqslant L \leqslant J\}$ es separable, entonces para cada $x \in I$ y cada $y \in J$ se tiene que $x \sim y$; lo cual es imposible. Por lo tanto (I,J) no es separable.

Finalmente, demostremos que X tiene la c.c.c.: Supongamos que hay $\{(I_\alpha, J_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos ajenos por pares de X. Para cada $\alpha < \omega_1$, elegimos $x_\alpha \in I_\alpha$ y $y_\alpha \in J_\alpha$; ahora tenemos una familia $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos ajenos por pares de Y; lo cual es una contradicción pues Y tiene la c.c.c. Así X tiene la c.c.c. $\square$

Apéndice A

Árboles de Suslin

En este apartado exponemos de manera muy breve algunos hechos relacionados con los árboles de Suslin y su relación con las líneas de Suslin. Remitimos al lector al libro de K. Kunen para más información. Otra excelente referencia del tema es el artículo [4].

Recordemos que una pareja $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto bien ordenado (y $\leqslant$ es un *buen orden*) si esta pareja es un conjunto totalmente ordenado y además todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento $\leqslant$-mínimo.

En adelante sólo escribiremos X en lugar de $\langle X, \leqslant \rangle$, a menos que el contexto no sea claro; también diremos que un elemento es *mínimo* en lugar de $\leqslant$-mínimo. Observemos que si $X \neq \emptyset$ y $\langle X, \leqslant \rangle$ es un conjunto bien ordenado, entonces X tiene un elemento mínimo.

A.1 Definición.

1. Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $\langle T, \leqslant \rangle$, tal que para todo $t \in T$ el segmento inicial $\hat{t} = \{x \in T : x < t\}$ es un buen orden (con el orden inducido).

2. Sea T un árbol.

   a) Si $t \in T$, *la altura de t en T*, denotada por $ht(t, T)$, es el tipo de orden de $\hat{t}$, es decir, el único ordinal isomorfo a $ht(t, T)$.

   b) Para todo ordinal α, *el nivel α de T* es el conjunto $Lev_\alpha(T) = \{x \in T : ht(x, T) = \alpha\}$.

c) *La altura de* T, $ht(T)$, es el mínimo ordinal α tal que $Lev_\alpha(T) = \emptyset$. Esto es
$$ht(T) = \text{mín}\{\alpha : Lev_\alpha(T) = \emptyset\}.$$

d) Un *sub-árbol* de T es un subconjunto $T' \subseteq T$ con el orden inducido de T tal que para cada $t \in T'$ se tiene que $\{x \in T' : x < t\} = \{x \in T : x < t\}$.

No es difícil verificar que un subconjunto T' de T (donde $\langle T, \leqslant\rangle$ es un árbol) es un subárbol de T si y sólo si $\forall x \in T' \forall y \in T(y < x \to y \in T')$.

En algunas ocasiones consideraremos árboles con elemento mínimo. Cuando un árbol tiene elemento mínimo éste se llama *raíz* del árbol.

A.2 Observación.

1. Sea T un árbol, entonces $ht(T) = sup\{ht(x,t) + 1 : x \in T\}$.

   Demostración. Supongamos que $ht(T) = \alpha$ y $sup\{ht(x,t) + 1 : x \in T\} = \beta$.

   Si $Lev_\beta(T) \neq \emptyset$, entonces hay $x \in T$ tal que $ht(x,T) = \beta$, pero $\beta \geqslant ht(x,T) + 1$. Entonces $\beta \geqslant \beta + 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Lev_\beta(T) = \emptyset$. Con esto tenemos que $\alpha \leqslant \beta$.

   Sean $x \in T$ y γ tales que $ht(x,T) = \gamma$. Como $Lev_\gamma(T) \neq \emptyset$, $\gamma < \alpha$. Por lo tanto $\gamma + 1 \leqslant \alpha$. Así $\beta \leqslant \alpha$. □

2. Si $T' \subseteq T$ es un subárbol y $x \in T'$ entonces $ht(x,T') = ht(x,T)$.

3. Si T es un árbol entonces $T = \cup\{Lev_\alpha(T) : \alpha < ht(T)\}$

A.3 Ejemplos.

1. Sea $\delta \in OR$. Es fácil notar que δ es un árbol con el orden usual, y que si $\alpha \in \delta$, entonces $ht(\alpha, \delta) = \alpha$ y $ht(\delta) = \delta$.

2. Sea I un conjunto no vacío y δ un ordinal. $I^{<\delta} = \cup\{{}^\alpha I : \alpha < \delta\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de I de longitud menor que δ. Definimos
$$\forall s, t \in I^{<\delta}(s \leqslant t \leftrightarrow s \subseteq t),$$
   es decir, $s \leqslant t$ si t extiende a s en el sentido de sucesiones.

A.4 Observación. Si $T = I^{<\delta}$, entonces

1. Si $\alpha < \delta$, $Lev_\alpha(T) = {}^\alpha I$, y además
2. $ht(T) = \delta$.

Demostración.

1. Sea $s \in Lev_\alpha(T)$. Entonces existe $\Theta : \hat{s} \to \alpha$ isomorfismo de orden. Consecuentemente podemos ver a $s = \cup_{\beta<\alpha}\Theta^{-1}(\beta) : \alpha \to I$. Por lo tanto $s \in^\alpha I$.

   Sea $s \in^\alpha I$. Entonces el tipo de orden del conjunto $\hat{s}$ es exactamente α, por lo tanto $s \in Lev_\alpha(T)$.

2. Supongamos que hay $s \in Lev_\delta(T)$ tal que $ht(s,T) = \delta$ y $\Theta : \delta \to \hat{s}$ un isomorfismo de orden que constata esto. Si $y \in \hat{s}$, entonces $\Theta^{-1}(y) < \delta$. $s = \cup_{t\in\hat{s}}\Theta^{-1}(t) : \delta \to I$, es decir, $s \in^\delta I$, lo cual no puede suceder. Por lo tanto $Lev_\delta(T) = \emptyset$. □

A.5 Definición.

1. Sea T un árbol. Un subconjunto $C \subseteq T$ es una *cadena* si es un conjunto totalmente ordenado con el orden inducido.
2. Un subconjunto $A \subseteq T$ es una *anticadena* si

$$\forall x, y \in A\ (x \neq y \to x \not\leq y \wedge y \not\leq x).$$

Observe que esta noción de anticadena difiere con la noción de anticadena en órdenes parciales (3).

A.6 Observación. Si T es un árbol, entonces para cada $\alpha \in ht(T)$ el conjunto $Lev_\alpha(T)$ es una anticadena.

Demostración. Sean $x, y \in Lev_\alpha(T)$ tales que $x \neq y$. Como x e y están en el mismo nivel existen isomorfismos de orden $f_x : \hat{x} \to \alpha$ y $f_y : \alpha \to \hat{y}$, entonces existe un isomorfismo de orden, a saber, la composición $f : \hat{x} \to \hat{y}$. Si $x < y$ o $y < x$, f no sería biyectiva. Por lo tanto $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. □

A.7 Definición.

1. Sea $\kappa \geqslant \aleph_0$. Un *$\kappa$-árbol de Suslin* es un árbol T tal que $|T| = \kappa$ y toda anticadena y toda cadena en T tienen cardinalidad menor que κ.

2. Sea κ un cardinal regular. Un *κ-árbol* es un árbol T tal que $ht(T) = \kappa$ y además
$$\forall \alpha < \kappa\ (|Lev_\alpha(T)| < \kappa).$$

Cuando $\kappa = \aleph_1$ es costumbre decir árbol de Suslin en lugar de $\aleph_1$-árbol de Suslin.

A.8 Lema. Sea κ un cardinal regular. Si T es un κ-árbol de Suslin, entonces T es un κ-árbol.

Demostración. Si $Lev_\kappa(T) \neq \emptyset$, sea $x \in Lev_\kappa(T)$. Entonces $\hat{x}$ es una cadena de tamaño κ. Así $Lev_\kappa(T) = \emptyset$ y $ht(T) \leqslant \kappa$. Sea $\alpha < \kappa$; como $Lev_\alpha(T)$ es una anticadena (Observación A.6), entonces $|Lev_\alpha(T)| < \kappa$. Como $|T| = \kappa$ y $T = \cup\{Lev_\alpha(T) : \alpha < \kappa\}$ (Observación 3), por la regularidad de κ se tiene que $ht(T) = \kappa$. □

A.9 Lema (König)**.** Si T es un $\aleph_0$-árbol, entonces T tiene una cadena infinita.

Demostración. Construiremos dicha cadena infinita definiendo sus elementos recursivamente. En efecto: Sea $x_0 \in Lev_0(T)$ tal que $|\{y \in T : y \geqslant x_0\}| = \aleph_0$, tal x_0 existe pues $Lev_0(T)$ es finito y todo elemento de T es mayor o igual que algún elemento de ese mismo nivel. Sea $n \in \omega$. Supongamos que hemos construido $\{x_k : k < n\}$, donde cada $x_k \in Lev_k(T)$, para cada $i \in \{0, ..., k-1\}$ se cumple que $x_{k+1} > x_k$ y el conjunto $\{y \in T : y \geqslant x_k\}$ es infinito. Como $ht(t) = \aleph_0$, entonces existe $x_n \in Lev_n(T)$ tal que $x_{n-1} < x_n$ y el conjunto $\{y \in T : y \geqslant x_n\}$ es infinito. Por lo tanto el conjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ es una cadena infinita. □

A.10 Corolario. No existen $\aleph_0$-árboles de Suslin.

Dado que el Lema A.9 no hace referencia a anticadenas, éste implica algo más que la no existencia de $\aleph_0$-árboles de Suslin.

A.11 Definición. Sea κ un cardinal regular. Un *κ-árbol de Aronszajn* es un κ-árbol tal que toda cadena tiene cardinalidad menor que κ. Si $\kappa = \aleph_1$ en lugar de decir $\aleph_1$-árbol de Aronszajn diremos *árbol de Aronszajn*.

Por el lema A.8, todo κ-árbol de Suslin es un κ-árbol de Aronszajn.

Por otro lado, la existencia de un $\aleph_1$-árbol de Suslin es independiente de ZFC, en cambio para los árboles de Aronszajn la situación es diferente.

A.12 Teorema. Los árboles de Aronszajn existen en ZFC.

Demostración. Sea $T = \{s \in^{<\omega_1} \omega : s \text{ } es \text{ } inyectiva\}$. Sean $s \in T$ y $t \in^{<\omega_1} \omega$ tales que $t < s$, es decir, $t \subseteq s$, por tanto t es inyectiva y $t \in T$. Por lo tanto T es un sub-árbol de ${}^{<\omega_1}\omega$.

Veamos que $ht(T) = \omega_1$. Sea $\alpha < \omega_1$. Dado que hay una función inyectiva $s : \alpha \to \omega$ y $ht(T) \leqslant ht({}^{<\omega_1}\omega)$, por la Observación A.4, $ht({}^{<\omega_1}\omega) = \omega_1$. Por lo tanto $ht(T) = \omega_1$.

Supongamos que en T hay una cadena C no numerable. Por ser C una cadena, entonces $\cup C$ es una función inyectiva $\cup C : \omega_1 \to \omega$. Por lo tanto T no tiene cadenas no numerables.

Parecería que el camino fue sencillo y estamos por terminar, pero no; pues resulta que T no es un ω_1-árbol. Pues para cada $\alpha < \omega_1$ infinito, Lev_α es no numerable.

Para construir el árbol de Aronszajn prometido, consideremos la siguiente relación de equivalencia:

Sea $\alpha < \omega_1$. Si $s, t \in^\alpha \omega$,

$$s \sim t \leftrightarrow |\{\xi < \alpha : s(\xi) \neq t(\xi)\}| < \aleph_0.$$

Encontraremos una función s_α tal que

1. $s_\alpha \in^\alpha \omega$ y s_α es inyectiva,

2. $\forall \alpha < \beta(s_\alpha \sim s_\beta\restriction_\alpha)$, y

3. $\omega \setminus ran(s_\alpha)$ es infinito.

Primero, s_0 es la función vacía. Sea s_α tal que cumple (1), (2) y (3), por (3) hay $n \in \omega \setminus ran(s_\alpha)$, así definimos $s_{\alpha+1} = s_\alpha \cup \{\langle \alpha, n\rangle\}$. Sea γ un ordinal límite. Supongamos que para toda $\alpha < \gamma$ existe una función s_α que cumple (1), (2) y (3). Sea $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ una sucesión estrictamente creciente de ordinales que converge a γ, es decir, $\forall n, m \in \omega(n < m \to \alpha_n < \alpha_m)$ y $sup\{\alpha_n : n \in \omega\} = \gamma$. Sea $t_0 = s_{\alpha_0}$ e inductivamente definamos $t_n : \alpha_n \to \omega$ tal que es inyectiva, $t_n \sim s_{\alpha_n}$ y $t_{n+1}\restriction_{\alpha_n} = t_n$. Si $t = \cup_{n\in\omega} t_n$, entonces $t : \gamma \to \omega$ es una función inyectiva y $t\restriction\eta = s_\eta$, para cada $\eta < \gamma$, entonces cumple (1) para $\alpha = \gamma$ y (2) se cumple para $\alpha < \beta = \gamma$; para (3) definimos $\forall n \in \omega(s_\gamma(\alpha_n) = t(\alpha_{2n})) \wedge \forall \xi \notin \{\alpha_n : n \in \omega\}(s_\gamma(\xi) = t(\xi))$, entonces $\{t(\alpha_{2n+1}) : n \in \omega\} \subseteq \omega \setminus ran(s_\gamma)$.

Si $T^* = \cup_{\alpha<\omega_1}\{t \in Lev_\alpha(T) : t \sim s_\alpha\}$, entonces por (2), T^* es un subárbol de T; por (1) también cumple que para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que $s_\alpha \in T^*$, por lo tanto $Lev_\alpha(T^*) \neq \emptyset$.

Sea $\alpha < \omega_1$. Veamos que $Lev_\alpha(T^*) = \{t \in^\alpha \omega : t \sim s_\alpha\}$ es a lo más numerable: Sea $\{t_i : i \in I\}$ una enumeración de $Lev_\alpha(T^*)$. Para cada $i \in I$, definimos $A_i = \{\eta < \alpha : t_i(\eta) \neq s_\alpha(\eta)\}$. Si I no es numerable, como para cada $i \in I$, $t_i \sim s_\alpha$, entonces existe $J \subseteq I$ no numerable tal que para cualesquiera $k, l \in J$ se cumple que $A_k = A_l$, pero $t_k \sim t_l$, es decir, hay una cantidad no numerable de funciones con dominio a lo más numerable que difieren en una cantidad finita de elementos, lo cual contradice que $|[\alpha]^{<\aleph_0}| \leqslant \aleph_0$. Por lo tanto I es a lo más numerable y $|Lev_\alpha(T^*)| \leqslant \aleph_0$.

Por lo tanto T^* es un árbol de Aronszajn. □

Enseguida introducimos un tipo importante de árbol de Aronszajn, un poco más adelante veremos que el axioma de Martin implica que todo árbol de Aronszajn es de esta clase.

A.13 Definición. Un árbol de Aronszajn T es *especial* si existe una función $f : T \to \mathbb{Q}$ tal que para cualesquiera $s, t \in T$ si $s < t$, entonces $f(s) < f(t)$.

A.14 Lema. Sea T un árbol de Aronszajn. Si A es una familia no numerable de subconjuntos finitos ajenos por pares de T, entonces existen $a, b \in A$ tales que si $s \in a$ y $s' \in b$, entonces s y s' son incompatibles.

Demostración. Supongamos que no existen tales conjuntos en A. Podemos suponer que para algún $n \in \omega$, todo elemento de a tiene cardinalidad n. Por lo tanto cada elemento $a \in A$ podemos enumerarlo de la siguiente forma $a = \{a(0), ..., a(n-1)\}$.

Si $n = 1$, entonces $\bigcup A$ es una cadena no numerable en T. Si $n > 1$, sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro uniforme en A (una prueba de la existencia de estos ultrafiltros se puede encontrar en el Teorema 7.6 de [5]), es decir, todos sus elementos tiene el mismo cardinal. Para cada $k < n$ y $s \in T$, sea

$$B(s,k) = \{a \in A : s \textit{ es comparable con } a(k)\}.$$

Como cualesquiera $a, b \in A$ tienen elementos comparables, podemos reescribir a $A = \bigcup_{s\in a}\{B(s,k) : k < n\}$, pues si $s \in A$, entonces existe $k < n$

de tal modo que $s = a(k)$ y por lo tanto, s es comparable con $a(k)$, es decir, $s \in B(s,k)$. Como $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, entonces para cada $a \in A$ existen $s_a \in a$ y $k_a < n$ tales que $B(s_a, k_a) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto hay $k* < n$ tal que $E = \{a \in A : k_a = k*\}$ es no numerable.

Para cada $d, e \in E$, sea

$$S(d,e) = \{t \in T : t \textit{ es comparable con } s_d \textit{ y } s_e\}.$$

El conjunto $\{a(k*) : a \in B(s_d, k*) \cap B(s_e, k*)\} \subseteq S(d,e)$. Como $B(s_d, k*) \cap B(s_e, k*) \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es uniforme, $\{a(k*) : a \in B(s_d, k*) \cap B(s_e, k*)\}$ es no numerable, lo que implica que $S(d,e)$ tampoco es numerable.

Ahora observemos que

$$S(d,e) \subseteq \{s_d, s_e\} \cup \hat{s}_d \cup \hat{s}_d \cup \{t \in T : \{s_d, s_e\} \subseteq \hat{t}\}.$$

Como los primeros tres uniendos son a lo más numerables, entonces hay al menos una $t \in T$ Tal que $\{s_e, s_d\} \subseteq \hat{t}$. Así s_d y s_e son comparables.

Por lo tanto $\{s_e : e \in E\}$ es una cadena no numerable en T. $\square$

A.15 Lema. Sea $\langle T, \leqslant_T \rangle$ un árbol de Aronszajn y $\mathbb{P} = \{p : A \to \omega : A \in [T]^{<\aleph_0} \wedge (\forall s,t \in A(s < t \to p(s) \neq p(t)))\}$, donde para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ definimos el orden $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$. Entonces $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c..

Demostración. Sea $D \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. El conjunto $\{dom(p) : p \in D\}$ es no numerable. Supongamos que $\{dom(p) : p \in D\}$ es numerable, entonces existe $E \subseteq D$ tal que para cualesquiera $p, q \in E$ se cumple que $dom(p) = dom(q)$, pero $|dom(p)|^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0$, hecho que contradice que E sea no numerable. Por el Lema 1.5, hay $C \subseteq D$ no numerable tal que $\{dom(p) : p \in C\}$ forma un Δ-sistema. Así hay $u \in [T]^{<\aleph_0}$ fijo tal que para cada $p, q \in C$ distintos, se tiene que $dom(p) \cap dom(q) = u$. Como u es finito y $ran(p) \subseteq \omega$, hay un conjunto $B \subseteq C$ no numerable tal que para cada $p, q \in B(p\restriction_u = q\restriction_u)$. Los elementos de B pueden no ser compatibles por pares; para solucionar esto, tomemos $A = \{dom(p) \setminus u : p \in B\}$. Por el Lema A.14, hay $p, q \in B$ tales que si $s \in dom(p) \setminus u$ y $s' \in dom(q) \setminus u$, entonces s, s' son incomparables. Entonces $p \cup q \in \mathbb{P}$ y, p, q son compatibles. Por tanto D no es una anticadena. $\square$

A.16 Teorema (MA($\aleph_1$)). Todo árbol de Aronszajn es especial.

Demostración. Sea $\mathbb{P}$ como en A.15, para cada $t \in T$ definimos

$$D_t = \{p \in \mathbb{P} : t \in dom(p)\}.$$

Sea $t \in T$ y $p \in \mathbb{P} \setminus D_t$. Veamos que D_t es denso. Tomemos $n \in \omega \setminus ran(p)$, entonces $p \cup \{\langle t, n\rangle\}$ es una extensión de p en D_t.

Si $\mathcal{D} = \{D_t : t \in T\}$. Entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es un filtro, la unión resulta ser una función $g = \cup\mathcal{G} : T \to \omega$. Demostremos que, para cada $n \in \omega$, $g^{-1}\{n\}$ es una anticadena en T. Supongamos que no. Entonces existen $s, t \in T$ tales que $s < t$, y existen $n \in \omega$ y $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $\langle s, n\rangle \in p$ y $\langle t, n\rangle \in q$. Como $\mathcal{G}$ es filtro, existe $r \in \mathcal{G}$ tal que $r \leqslant p, q$, y $r(t) = r(s) = n$. Como $s < t$, entonces $r \notin P$. Por lo tanto s y t son incomparables.

Ahora definimos f con dominio T donde:

$$f(t) = \sum_{\{n:\exists s(s \leqslant t \wedge g(s)=n\}} 2^{-n}.$$

Dado que para toda $n \in \omega$ se tiene que $g^{-1}(n)$ es una anticadena en T, f está bien definida, $f : T \to \mathbb{Q}$. Sean $s, t \in T$ tales que $s < t$. Como $\{n : \exists u(u \leqslant s \wedge g(u) = n\}$ es un segmento inicial de $\{n : \exists u(u \leqslant t \wedge g(u) = n\}$, $f(s) < f(t)$.

Por lo tanto T es especial. □

Volviendo a los árboles de Suslin, Jensen demostró que si V=L entonces para todo cardinal $\kappa \geqslant \aleph_1$ que no es débilmente compacto existe un κ-árbol de Suslin; también demostró que la existencia de un $\aleph_1$-árbol de Suslin es consistente con GHC (recordemos que V=L implica GHC).

Ahora vamos a introducir un tipo especial de árboles que nos ayudarán a mejorar un árbol de Suslin. En la naturaleza siempre es bueno podar los árboles, los de Suslin no son la excepción; no solamente los podaremos, también vamos a asegurar que tengan un sólo tronco.

A.17 Definición. T es un κ-árbol *bien-podado* si es un κ-árbol tal que $|Lev_0| = 1$ y

$$\forall x \in T \ \forall \alpha < \kappa \ (ht(x, T) < \alpha \to \exists y \in Lev_\alpha(T)(x < y)) \quad (*)$$

A.18 Lema. Sea κ un cardinal regular. Si T es un κ-árbol, entonces T tiene un κ-sub-árbol bien podado.

Demostración. Sea $T' = \{x \in T : |\{y \in T : y > x\}| = \kappa\}$. Para verificar que T' es, efectivamente, un sub-árbol de T, sean $x \in T'$ y $z \in T$ tales que $z < x$, entonces $|\{y \in T : y > z\}| = \kappa$.

Veamos que T' cumple (*). Sean $x \in T'$ y $\alpha < \kappa$ tales que $ht(x, T) < \alpha$. Sea $Y = \{y \in Lev_\alpha(T) : x < y\}$. Por como definimos a T' y, por ser un κ-árbol, para cada $\beta < \kappa$ se tiene que $|Lev_\beta(T)| < \kappa$. Entonces el conjunto $\{z \in T : z > x \wedge ht(z, T) > \alpha\}$ tiene cardinalidad κ, y cada elemento de este conjunto es mayor que algún elemento de Y. Como $|Y| < \kappa$, entonces hay $y \in Y$ tal que $|\{z \in T : z > y\}| = \kappa$, e $y \in T'$. De manera similar, $Lev_0(T') \neq \emptyset$, por lo tanto $T' \neq \emptyset$.

Para cada elemento $x \in Lev_0(T)$, el conjunto $\{y \in T' : y \geqslant x\}$ resulta ser un κ-sub-árbol bien podado de T. $\square$

A.19 Teorema. MA($\aleph_1$) implica que no existen $\aleph_1$-árboles de Suslin.

Demostración. Sea $\langle T, \leqslant\rangle$ un $\aleph_1$-árbol sin anticadenas numerables. Sea $\mathbb{P} = \langle T, \geqslant\rangle$ el orden inverso de T. Como T no tiene anticadenas no numerables, entonces $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.. Por el Lema A.18, podemos asumir que T es bien podado. Para cada $\alpha < \omega_1$, el conjunto $D_\alpha = \{x \in T : ht(x, T) > \alpha\}$ resulta ser denso en $\mathbb{P}$. Si $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, entonces existe un filtro $\mathcal{G}$ que es $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$. Como para todo $\alpha < \omega_1$ el filtro intersecta a cada D_α, entonces $\mathcal{G}$ es una cadena no numerarable. $\square$

Finalizamos con el siguiente resultado debido a Kurepa (para ver una prueba del teorema consultar [7, Capítulo 12]).

A.20 Teorema. Hay un árbol de Suslin (bien podado) si y sólo si hay una línea de Suslin.

Apéndice B

Algunos hechos de Topología General

En este apartado exponemos algunos resultados de Topología General utilizados en el trabajo.

Primeramente exponemos (en la primera sección) el teorema de K. Morita que establece que todo espacio regular Lindelöf es paracompacto. También exponemos un recíproco a este resultado que establece que todo espacio paracompacto con la c.c.c. es un espacio Lindelöf.

En la segunda sección de este apéndice exponemos la demostración del Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery que permite concluir por otro camino (Teorema 1.8) que el producto de espacios separables siempre tiene la c.c.c.

B.1. Espacios paracompactos con la c.c.c

Recuerde que un espacio topológico X es Lindelöf si de toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ se puede extraer una subcubierta numerable $\mathcal{V}$. Recuerde también que una colección $\mathcal{V}$ de subconjuntos abiertos de un espacio topológico X es un refinamiento abierto localmente finito de la cubierta abierta $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$, y además, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta W de x tal que $|\{V \in \mathcal{V} : W \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Un espacio regular X es paracompacto si de toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ se puede extraer un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ localmente finito.

Como hemos mencionado, la condición de cadena contable permite demostrar un recíproco al siguiente resultado clásico en la teoría de espacios paracompactos.

B.1 Teorema (K. Morita)**.** Todo espacio Lindelöf regular es paracompacto.

Remitimos al lector a [2] para ver una prueba del Teorema de K. Morita.

Es importante señalar que en general el recíproco a este resultado de K. Morita no es cierto: para converserse de ello considere al espacio discreto $D(\mathfrak{c})$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$, resulta que $D(\mathfrak{c})$ es un espacio paracompacto que no es Lindelöf.

B.2 Proposición. Si X es un espacio paracompacto con la c.c.c., entonces X es Lindelöf.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Dado que X es paracompacto, podemos elegir un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Bastará demostrar que $\mathcal{V}$ es a lo más numerable.

Sea $\mathfrak{C}$ la familia de todas las subcolecciones ajenas $\mathcal{G}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que:

$$\forall\, G \in \mathcal{G} : |\{V \in \mathcal{V} : V \cap G \neq \emptyset\}| < \aleph_0$$

Observe que $\mathfrak{C} \neq \emptyset$. En efecto: sean $x_1, x_2 \in X$ distintos (evidentemente podemos suponer que $|X| \geqslant 2$). Dado que X es T_2, existen abiertos no vacíos, y ajenos, U y V tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Sean W_i vecindades abiertas de x_i (para $i = 1, 2$) tales que: $|\{V \in \mathcal{V} : V \cap W_i \neq \emptyset| < \aleph_0$. Entonces $\mathcal{G} = \{W_1 \cap U, W_2 \cap V\} \in \mathfrak{C}$. Consideremos ahora al conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{C}, \subseteq)$. No es difícil mostrar que toda cadena en $(\mathfrak{C}, \subseteq)$ tiene una cota superior en $(\mathfrak{C}, \subseteq)$. Por el lema de Zorn, podemos elegir un elemento maximal $\mathcal{F}$ en $(\mathfrak{C}, \subseteq)$. Dado que X tiene la c.c.c., la cardinalidad de $\mathcal{F}$ no puede exceder a $\aleph_0$. Sea $\mathcal{F} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\}$ una enumeración para $\mathcal{F}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{V}_n = \{W \in \mathcal{V} : W \cap H_n \neq \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$. En efecto, sea $W \in \mathcal{V}$ cualquiera. Si $W \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, entonces $W \subseteq X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Dado que $W \neq \emptyset$, podemos elegir $x_0 \in W$. Sea V un abierto que contiene a x_0 y tal que $|\{A \in \mathcal{V} : A \cap V \neq \emptyset\}| < \aleph_0$. Entonces la familia $\mathcal{F} \cup \{V \cap W\}$ es un elemento de $(\mathfrak{C}, \subseteq)$ que contiene propiamente a $\mathcal{F}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$. De donde, $\mathcal{V}$ es a lo más numerable. $\square$

Tenemos el siguiente resultado como un corolario. Para su demostración es suficiente recordar que todo espacio separable tiene la c.c.c.

B.3 Corolario. Todo espacio paracompacto separable es Lindelöf.

B.2. Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery

Sea κ un número cardinal arbitrario. Consideremos el producto topológico $D(2)^\kappa$ de κ copias del espacio discreto de cardinalidad dos. Dado que el producto topológico de un número finito de espacios discretos es un espacio discreto, cuando κ es un número cardinal finito, el peso, la densidad y la celularidad de $D(2)^\kappa$ son iguales al cardinal del espacio $D(2)^\kappa$.

El cuestionamiento natural a lo anterior es qué sucede en el caso en que κ es un número cardinal infinito. Con el propósito de esclarecer esto, recordemos que un elemento típico de la base $\mathcal{B}$ canónica para $D(2)^\kappa$ es un conjunto de la forma

$$W(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; U_1, \ldots, U_n) = \{f : \kappa \to \{0, 1\} : f(\alpha_j) \in U_j; \text{ para } j = 1, \ldots n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \kappa$ y $U_j \subseteq D(2)$ es un abierto propio no vacío, para cada $j = 1, \ldots, n$. Observe que $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ es una base para $D(2)$ y, por ende, basta con hacer variar U_j en $\mathcal{B}$. Con esto en mente, no es difícil demostrar que $|\mathcal{B}| \leqslant \kappa$. Así, $w(D(2)^\kappa) \leqslant \kappa$.

Antes de enunciar la siguiente proposición, es importante introducir algunas funciones cardinales topológicas. Dados un espacio topológico X no vacío y $x \in X$ definimos los siguientes cardinales:

- El *peso* de X:
$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base para } X\} + \aleph_0.$$
- El *carácter* de x en X:
$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x) \text{ es una base local de } x \text{ en } X\} + \aleph_0.$$
- El *carácter* de X:
$$sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$
- El *pseudocarácter* de x en X:
$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}] \text{ es una familia de abiertos con } \bigcap \mathcal{B} = \{x\}\}.$$

- El *pseudocarácter* de X:

$$sup\{\psi(x,X) : x \in X\}.$$

Es fácil notar que dado un espacio topoógico X, los cardinales definidos cumplen la siguiente desigualdad:

$$\psi(X) \leqslant \chi(X) \leqslant w(X).$$

B.4 Proposición. Si $\kappa \geqslant \aleph_0$,

$$w(D(2)^\kappa) = \chi(D(2)^\kappa) = \psi(D(2)^\kappa) = \kappa$$

Demostración. Bastará demostrar que $\psi(\mathbf{0}, \mathbf{D}(\mathbf{2})^\kappa) \geqslant \kappa$, donde $\mathbf{0} : \kappa \to \{0,1\}$ es la función constante 0. Sea $\mathcal{A}$ una familia de abiertos básicos que contiene a $\mathbf{0}$ en $D(2)^\kappa$ tal que $|\mathcal{A}| < \kappa$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que los elementos de $\mathcal{A}$ son vecindades canónicas de $\mathbf{0}$ en $D(2)^\kappa$. Ahora, para cada $W = W(\mathbf{0}; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; U_1, \ldots, U_n)$ (esta notación indica que $\mathbf{0} \in W$) en $\mathcal{A}$, sea $K(W) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Sea $K = \bigcup_{W \in \mathcal{A}} K(W)$. Entonces $K \subseteq \kappa$ y $|K| < \kappa$. De donde, $\kappa \setminus K \neq \emptyset$. Sea $\chi_{\kappa \setminus K} : \kappa \to \{0,1\}$ la función característica de $\kappa \setminus K$. Entonces $\chi_{\kappa \setminus K} \in \bigcap \mathcal{A}$ y $\chi_{\kappa \setminus K} \neq \mathbf{0}$. Entonces $\bigcap \mathcal{A} \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\psi(\mathbf{0}, D(2)^\kappa) \geqslant \kappa$, lo que implica que $\psi(D(2)^\kappa) \geqslant \kappa$. □

B.5 Lema. Sea $\kappa \geqslant \aleph_0$. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de cardinalidad 2^κ, entonces existe una topología Hausdorff en $\mathcal{A}$ cuyo peso es menor o igual a κ

Demostración. Sea $D(2)^\kappa$ el producto topológico de κ copias del espacio discreto de cardinalidad 2. Por lo anterior, existe $\mathcal{B}$ base de $D(2)^\kappa$ cuya cardinalidad es exactamente κ. Dado que $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$, existe $f : \mathcal{A} \to D(2)^\kappa$ función biyectiva. La familia

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}\}$$

es base de una topología Hausdorff para $\mathcal{A}$ cuyo peso es menor o igual a κ

□

B.6 Proposición. Si $\tau \geqslant \aleph_0$, $D(\tau)$ es el espacio discreto de cardinalidad τ y T es un conjunto de cardinalidad 2^τ, entonces $d(D(\tau)^T) \leqslant \tau$

Demostración. Por el lema anterior, podemos considerar en T una topología Hausdorff $\mathcal{T}$ cuyo peso es menor o igual a τ. Así, podemos fijar una base $\mathcal{B}$ para T cuya cardinalidad no excede a τ. Sea

$$\mathcal{F} = \{\{U_1, \ldots, U_n\} \in [\mathcal{B}]^{<\aleph_0} : U_i \cap U_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j\}.$$

Considere ahora al conjunto

$$\mathcal{D} = \{f \in D(\tau)^T : \exists\{U_1, \ldots, U_n\} \in \mathcal{F} \text{ tal que } f|_{U_i} \wedge f|_{T\setminus\cup_{i=1}^n U_i} \text{son constantes}\}$$

Claramente, $\mathcal{D} \subseteq D(\tau)^T$ y $|\mathcal{D}| \leqslant \tau$. Aún más, el conjunto $\mathcal{D}$ es un subconjunto denso de $D(\tau)^T$. Efectivamente, sea

$$W = W(t_1, \ldots, t_n; \{y_1\}, \ldots, \{y_n\})$$

un abierto canónico del producto topológico $D(\tau)^T$ (donde $y_i \in D(\tau)$ y $t_i \in T$, para cada $i = 1, \ldots, n$). Podemos suponer que $t_i \neq t_j$, para $i \neq j$. Por la elección de la base $\mathcal{B}$, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ tales que $t_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ (si $i \neq j$). Consideremos ahora la función $g : T \to D(\tau)$ dada por lo siguiente:

$$g(t) = \begin{cases} y_i & \text{si } t \in U_i \text{ para } i = 1, \ldots, n \\ y_1 & \text{si } t \in T \setminus \cup_{i=1}^n U_i \end{cases}$$

Entonces, $g \in \mathcal{D} \cap W$. De lo cual, $\mathcal{D}$ es denso en $D(\tau)^T$. Por lo tanto, $d(D(\tau)^T) \leqslant |\mathcal{D}| \leqslant \tau$ □

B.7 Teorema (Hewitt-Marczewski-Pondiczery)**.** Sea $\tau \geqslant \aleph_0$, y sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. Si $d(X_\alpha) \leqslant \tau$ para cada $\alpha \in I$ y $|I| \leqslant 2^\tau$, entonces $d(\Pi_{\alpha\in I} X_\alpha) \leqslant \tau$

Demostración. Sea, para cada $\alpha \in I$, $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ un subespacio denso tal que $|D_\alpha| \leqslant \tau$. Claramente $\prod_{\alpha\in I} D_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un subespacio denso; de lo cual, $d(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha) \leqslant d(\prod_{\alpha\in I} D_\alpha)$. Así, basta demostrar que $d(\prod_{\alpha\in I} D_\alpha) \leqslant \tau$.

Ahora, dado que para cada $\alpha \in I$ la cardinalidad de cada D_α no excede a τ, existen funciones sobreyectivas

$$f_\alpha : D(\tau) \to D_\alpha$$

Claramente, cada función f_α es una función continua. De donde, la función producto

$$\prod_{\alpha\in I} f_\alpha : D(\tau)^I \to \prod_{\alpha\in I} D_\alpha$$

es continua y sobreyectiva.

Debido a que la densidad no se incrementa bajo imagenes continuas, bastará demostrar que $d(D(\tau)^I) \leqslant \tau$. Pero nótese que si $|I| = \gamma$, entonces $D(\tau)^I$

es homeomorfo al producto $D(\tau)^\gamma$; además, note que este último espacio es imagen continua del producto $D(\tau)^{2^\tau}$ (la función $\pi : D(\tau)^{2^\tau} \to D(\tau)^\gamma$ dada por $\pi(f)(\beta) = f(\beta)$ ($f \in D(\tau)^{2^\tau}$ y $\beta < \gamma$), es una función continua y sobreyectiva.) Así, por el lema anterior, $d(D(\tau)^I) \leqslant d(D(\tau)^{2^\tau}) \leqslant \tau$. □

B.8 Corolario. Si $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos tales que $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$, para cada $\alpha \in A$, entonces $c(\prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}) \leqslant \kappa$.

Demostración. Sea $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Supongamos que existe una familia celular $\mathfrak{W}$ en X cuya cardinalidad excede a κ. Entonces podemos elegir una familia

$$\mathfrak{V} = \{V_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$$

de abiertos no vacíos ajenos dos a dos en X. Claramente, podemos suponer que los elementos de la familia $\mathfrak{V}$ son abiertos básicos canónicos de X.

Si $\lambda < \kappa^+$ y $V_\lambda = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha^\lambda$, donde cada $U_i^\lambda \subseteq X_i$, entonces el *soporte de* V_λ es el conjunto $K(V_\lambda) = \{\alpha \in A : U_i^\lambda \neq X_i\}$. Sea $B = \cup_{\lambda<\kappa^+} K(V_\lambda)$. Claramente, $|B| \leqslant 2^\kappa$. Entonces si $Y = \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$, por el Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, $d(Y) \leqslant \kappa$. Pero si $V_\lambda^* = \pi_B(V_\lambda)$ es la proyección de V_λ en Y, es decir, $\pi_B : \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\} \to \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ definida por $\pi_B(x) = x\restriction_B$, entonces la familia

$$\mathcal{W} = \{V_\lambda^* : \lambda < \kappa^+\}$$

es una familia celular en Y cuya cardinalidad excede a κ. Pero esto es una contradicción, ya que la celularidad de un espacio está siempre dominada por la densidad del mismo. Por lo tanto, $c(X) \leqslant \kappa$. □

B.9 Corolario. El producto de espacios separables tiene la c.c.c. En particular, los productos del tipo $\mathbb{R}^X$ y $D(2)^\kappa$ tienen la c.c.c.

Bibliografía

[1] J. Bagaria, *La teoría de conjuntos*, Mirando hacia el futuro. La gaceta de la RSME, Vol. 15. (2012), Num.2, 1–20.

[2] F. Casarrubias, *Algunas caracterizaciones de la paracompacidad*, Topología y sus aplicaciones 2, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. 2013.

[3] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[4] F. Hernández, D. Meza Alcántara, *Árboles y algunas de sus aplicaciones*, Topología y sus aplicaciones 2, capítulo 2, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. 2013.

[5] T. Jech, *Set Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.

[6] W. Just, *Discovering Modern Set Theory I-II*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 8, American Mathematical Society, 1996.

[7] K. Kunen, *Set theory, an introduction to independence proofs*, North-Holland, 1983.

[8] Inder K. Rana, *An introduction to measure and integration*, Second edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 45, American Mathematical Society Providence, Rhode Island. 2002.