UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ENRIQUECER LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL EN EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

CARLOS ADOLFO SOTO FRANCO

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ANA MEDA GUARDIOLA. F. CIENCIAS

DR. CARLOS TORRES ALCARAZ. F. CIENCIAS

DRA. ALEJANDRA GARCÍA FRANCO. F. QUÍMICA

MÉXICO, D. F., NOVIEMBRE DE 2014

Agradecimientos:

Si infancia es destino, todas las personas nos debemos al ambiente y a las personas que, de una u otra forma, contribuyeron a formarnos en cada etapa de la vida.
Sólo puedo mencionar aquí a un grupo reducido de personas. Con ello estoy dejando de mencionar a personas que también han sido muy importantes en mi proceso de vida, y para que haya podido llegar hasta aquí.

A mis padres, hermanos, hermanas, y a mis hijas: Mónica, Carla y Aline.

A mi compañera de vida, Carmen y también a Marcus que se incorpora.

A mis tutores, Dra. Ana Meda, Dr. Carlos Torres, Dra. Alejandra García.

A mis amigos de vida, Javier, Severino, Estela, Daniel, Salvador y Leonor.

A mis amigas universitarias MADEMS, Matilde, Martha, Patricia, Tania y Sandra.

A los maestros me iniciaron en el amor al conocimiento, César y Enrique.

A todos mis estudiantes de la U.N.A.M. y del I.P.N.

A mis compañeras y compañeros docentes en ambas instituciones.

Agradezco especialmente a mis maestros, Dra. Ana Meda y Dr. Carlos Torres, por su apoyo y amistad. Su participación resultó fundamental en esta tesis y también en mi formación como docente en MADEMS.

Índice:

Resumen

En esta Tesis se presenta una “***Propuesta didáctica para enriquecer la enseñanza-aprendizaje de la función exponencial en el bachillerato”*****,** en ella sugiero algunas estrategias y actividades que han mostrado su utilidad, para docentes y estudiantes que están inmersos en el proceso de enseñar-aprender y valorar los problemas y conceptos asociados a la función logarítmica y la exponencial, mismas que tradicionalmente se han considerado difíciles de manejar en el bachillerato. El trabajo conjetura que una de las causas de la dificultad de comprender el crecimiento exponencial y sus consecuencias, es que demanda que el estudiante sea capaz de adoptar una forma de pensamiento diferente, pero complementario, al modelo lineal que ya tienen bien aprendido y que emplean regularmente al intentar resolver todo tipo de problemas en matemáticas.

Parte de la propuesta didáctica incluye que, al iniciar las sesiones, se reactiven los conocimientos previos necesarios, con el objetivo explícito de identificar y eliminar aquellos errores técnicos y de concepto que impiden que los estudiantes lleguen a comprender y aplicar los modelos logarítmico y exponencial. La metodología sugiere emplear el diálogo y la resolución de problemas potencialmente interesantes para los estudiantes, que lo realicen en equipos pequeños y que reflexionen individual y grupalmente y que en este proceso se autoevalúen continuamente.

Abstract

The goal of this work is to **enrich the processes of teaching the exponential and logarithmic function at High School level, and to suggest some teaching-learning strategies that have shown to be helpful to grasp these concepts**. The concept of logarithmic and exponential function has shown to be difficult to understand for both, high school and college students. This may have many causes; one of them is that the exponential growth demands that the student to be able adopt a new type of thinking: different but complementary to the linear model, which the students are taught to employ regularly.

The teaching strategy starts by reactivating the student's previous knowledge at each step, removing and eliminating some misconceptions, in order to arrive to the comprehension of the exponential and logarithmic model, by the methodology of discussing and solving problems potentially interesting for them.

When discussing the problems in small discussion groups, and without so much explanation by the instructor, the students learn to put in practice their previous knowledge and make suggestions to solve the problem. Finally, the work ends with the group reflection about the process which allowed to solve the problems, including errors and details. The main role of the instructor in this strategy is to support and motivate the student´s work and to give them appropriate challenges for each team, in every step (PDZ). The put in practice of the proposal has shown that the didactic sequence provides alternatives to enrich and improve the process of teaching and learning the concept of exponential and logarithmic function, as well as examples that they found attractive to study (earthquakes, noise levels, etc).

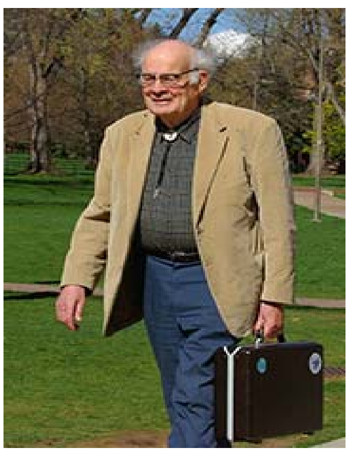
Introducción

La motivación principal para escribir esta tesis surge de dos fuentes principales:

La experiencia personal del fracaso educativo al enseñar el tema de la función exponencial y logarítmica, en los cursos normales de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH).

La lectura de las conferencias que se generan a partir de la afirmación del Doctor Al Bartlett:

"…***uno de mayores problemas de la humanidad es que no se comprende la función exponencial***": Albert Bartlett. http://www.albartlett.org/ (Visitado el 21 de julio de 2014).



Que me iniciaron en la reflexión acerca de la posibilidad educativa de adquirir ciudadanía plena mediante el aprendizaje de las matemáticas, y se inició también la gestión de este trabajo.

http://www.albartlett.org/presentations/arithmetic_population_energy_transcript_spanish.html

http://www.meneame.net/story/ing-video-mas-importante-jamas-veras#youtube

Capítulo 1

El problema educativo, causas posibles y consecuencias

1.1 Los estudiantes, los docentes y los cursos de matemáticas

Para el estudiante promedio del bachillerato aprender matemáticas resulta una tarea compleja, porque involucra muchos factores. Por un lado necesitará adquirir destrezas procedimentales en el manejo del álgebra y de las operaciones mentales que son necesarias para resolver los problemas que se le planteen durante los cursos del bachillerato. Por otro lado, necesitará haber desarrollado el hábito de la reflexión para ser capaz de comprender los principios y conceptos básicos relacionados con las asignaturas de matemáticas a este nivel. Sin contar que como adolescente pasa por una etapa difícil, con ajustes y cambios de todo tipo que sufre, pero raras veces comprende (Bruning, 2005).

En nuestro país, las matemáticas se han enseñado en este nivel a partir de temarios, que en muchos casos son un reflejo de los textos que se han considerado "clásicos" en las asignaturas y que además tradicionalmente se imparten solo con el método de exposición directa (Zorrilla, 2007), ya sea porque el docente no conoce otras alternativas, porque los grupos son muy numerosos o bien porque se sigue el camino del menor esfuerzo para el docente y para el estudiante.

El resultado neto es que los estudiantes reciben en el mejor de los casos un rompecabezas, sin garantía de que esté completo, y que ellos tienen que armar por su propia iniciativa para lograr la comprensión de los principios, conceptos y métodos que ya se han señalado. (Bruning, 2005).

También es parte de esta problemática el que la gran mayoría de los docentes de EMS tiene que aceptar una pesada carga académica para poder tener un salario que cubra sus necesidades económicas mínimas.

El resultado más comúnmente observado en los exámenes diagnósticos, que se realizan cuando los estudiantes ingresan a las facultades (DG-CCH Informe sobre la gestión directiva 2010-2011), es que aún los estudiantes que obtienen buenos resultados académicos en el bachillerato no comprenden los conceptos, procedimientos, métodos y principios que se explicitan o subyacen en su formación matemática La consecuencia inmediata es que la gran mayoría de ellos no son capaces de aplicar como adultos en sus ocupaciones diarias, ni siquiera en las escolares, los conceptos y procedimientos matemáticos que “aprendieron” en su paso por la escuela secundaria y en el bachillerato.(Zorrilla, 2010; Zorrilla, 2007).

En el ángulo afectivo de este grave problema social; la mala experiencia sufrida en las aulas seguramente ha mermado tanto la autoestima como la confianza en sí mismos de un buen número de ellos, ya que se han convencido de que las habilidades matemáticas son innatas, que “lo normal es no tener éxito con ellas” o no entenderlas cuando el docente “las explica”. Desde luego sus padres y la sociedad autorizan este punto de vista porque ellos también lo consideran así (Gómez Chacón, 2005).

Es decir que la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato ha dejado convencidos, a un buen número de estudiantes, que las matemáticas tienen muy poco o nada que ver con el mundo laboral o con sus problemas personales cotidianos. Desafortunadamente estos puntos de vista negativos hacia la enseñanza de las matemáticas están tan arraigados en la sociedad, que provocan que la atención efectiva que dedican los estudiantes a esta materia sea “la mínima necesaria para pasarla” y el círculo vicioso se cierra.

Se plantea así la necesidad de proponer alternativas que busquen enriquecer las estrategias de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de manera que se contemplen los aspectos señalados, y contribuyan a enriquecer las estrategias educativas y los métodos de enseñanza a disposición del docente, para contribuir a disminuir los problemas sociales, emotivos y educativos ya planteados.

La metodología de la presente propuesta considera básicamente que la educación matemática es una construcción social, a cargo del estudiante, sus compañeros de clase y el docente, quien los acompaña al enfrentar errores, problemas y ejercicios propios del tema que se estudia. Buscando siempre analizar mediante un diálogo con ellos, los procesos mentales que surgen al estar construyendo su conocimiento matemático. De esta forma se busca que el estudiante vaya aprendiendo, poco a poco, cómo aprende mejor: proponiendo soluciones, formulando conjeturas, descubriendo patrones, regularidades, en lugar de sólo practicar con ejercicios repetitivos y memorizar procedimientos y fórmulas que no se entienden (Bruning, 2005).

Considero necesario insistir en la apremiante necesidad que tenemos, como sociedad, de formar a los estudiantes con el quehacer, pensamiento y conocimiento matemático, aunque aparentemente no lo usemos en el resto de nuestra vida profesional.

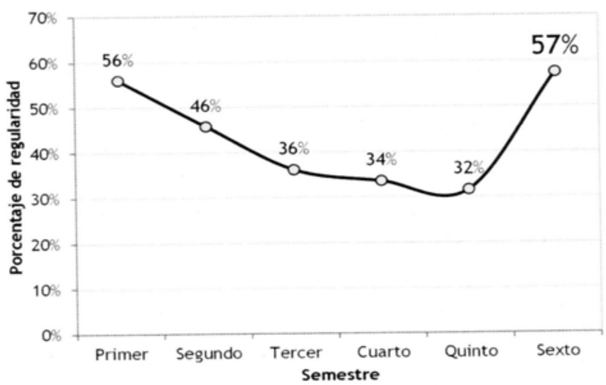
> "Si del mismo modo que se puede cortar la electricidad, se cortara la matemática en nuestras sociedades, todo o casi todo se detendría" CHEVALLARD, 2000.

1.2 Cuantificación del problema

A partir de 2006, cada generación ingresan alrededor de 18 000 estudiantes al sistema CCH de la UNAM. Cada uno de los cinco planteles recibe un 20% de ellos y a los tres años egresa un 60%, en las generaciones más recientes.

La siguiente gráfica muestra cómo fue cambiando la regularidad académica (% de estudiantes que no adeudan asignaturas) de la generación2009 del CCH de acuerdo con el Informe de la DGCCH 2006-2012.

La gráfica 1.1 muestra la distribución de la regularidad académica en cada corte semestral correspondiente a la generación 2009.



Gráfica 1.1 Gráfica del modelo de regularidad académica de los alumnos de la generación 2009.
Fuente: Secretaría de Informática, CCH.

Se observa que para el cuarto y el quinto semestres sólo un tercio de los estudiantes de esta generación (2009) se mantuvo sin adeudar asignaturas y este dato ha permanecido en niveles muy similares para las generaciones anteriores y las posteriores a la que se reporta.

Para ayudar a situar el problema que se plantea, en el CCH al menos tres de las asignaturas de alta reprobación en matemáticas abordan el estudio, comprensión y aplicación de las funciones exponenciales y logarítmicas, a saber: Matemáticas IV y Cálculo Diferencial e Integral I y II.

Véase la tabla 1.1 que se presenta a continuación.

Acreditación de las asignaturas del segundo año de estudios en el Colegio

Asignatura	Generación 2009, tercero y cuarto semestres, ciclo escolar 2010							
	Alumnos	Acreditación		Reprobados		NP		Promedio
Matemáticas III	17,156	11,448	67%	3,068	18%	2,640	15%	7.28
Física I	17,155	13,151	77%	2,019	12%	1,985	12%	7.53
Biología I	17,153	13,660	80%	1,847	11%	1,646	10%	7.64
Historia de México I	17,154	13,537	79%	1,623	9%	1,994	12%	7.94
Taller de Lect., Red. e Iniciación. a la Inv. Doc. III	17,153	13,679	80%	1,575	9%	1,899	11%	8.04
Francés III	2,284	1,740	76%	195	9%	349	15%	8.02
Inglés III	14,870	12,459	84%	887	6%	1,524	10%	8.21
Matemáticas IV	17,255	11,285	65%	2,272	13%	3,698	21%	7.52
Física II	17,255	12,739	74%	1,735	10%	2,781	16%	7.79
Biología II	17,254	13,259	77%	1,595	9%	2,400	14%	7.92
Historia de México II	17,254	12,791	74%	1,463	8%	3,000	17%	8.11
Taller de Lect., Red. e Iniciación. a la Inv. Doc. IV	17,254	12,972	75%	1,308	8%	2,974	17%	8.23
Francés IV	2,295	1,715	75%	128	6%	452	20%	8.28
Inglés IV	14,960	12,046	81%	750	5%	2,164	14%	8.46
Total segundo año	**206,452**	**156,481**	**76%**	**20,465**	**10%**	**29,506**	**14%**	**7.85**

Tabla 32. Fuente: Secretaría de Informática, con base en los historiales académicos proporcionados por la DGAE, en septiembre de 2011.

Como se observa en esta tabla, Matemáticas III y Matemáticas IV son las dos asignaturas que cuentan con los menores porcentajes de aprobación en el Colegio de Ciencias y Humanidades (67 % y 65%) y los más bajos promedios (7.28 y 7.52 respectivamente). Estos datos se han mantenido en los mismos niveles para las generaciones subsecuentes.

Este problema académico en el CCH, es grave porque algunas de las asignaturas de matemáticas contemplan en sus programas de estudio, el concepto, manejo y comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: Matemáticas IV, Cálculo Diferencial I y II, Probabilidad y estadística I y II y todas ellas también tienen porcentajes de aprobación desfavorables.

En Matemáticas IV se aborda por primera vez el estudio de las funciones exponencial y logarítmica, por lo que el docente tiene la oportunidad de lograr que sus estudiantes se interesen en el estudio y aplicación de las mismas. En otras palabras: si se alcanzan los objetivos programáticos de aprendizaje en este tema (mediante un *aprendizaje significativo*) el beneficio se extenderá a las asignaturas de matemáticas que los estudiantes cursarán en el quinto y sexto semestres,

1.3 Relevancia social de este problema

De acuerdo con los datos que se han mostrado arriba, podemos ubicar a la asignatura de Matemáticas IV, como una asignatura que objetivamente presenta algunos los mayores problemas de reprobación y deserción en todos los planteles del CCH, y así se le percibe por la comunidad: estudiantes, docentes y autoridades.

El concepto central de la asignatura de Matemáticas IV es el concepto de función, y se considera indispensable para que los estudiantes puedan aprender a modelar situaciones en las que una variable depende de otra u otras, con la oportunidad de aprender también a decidir la forma específica en que se da esta dependencia para poder aplicarlas a situaciones cercanas a ellos (*situadas*).

La señal de alarma la disparan los más altos índices de reprobación y deserción, pero la falta de dominio, o competencia, del concepto de función incapacita a los alumnos para comprender y modelar un gran conjunto de fenómenos sociales, biológicos, económicos, físicos, químicos y muchos otros, que incluyen aspectos tan importantes como su salud, impidiéndoles analizar críticamente la información que se les presente en su trabajo, en sus estudios posteriores o en los medios de comunicación.

Quienes estudian la adolescencia (Arnett, 2008), la analizan como una construcción socio-cultural, consideran que los estudiantes que no egresan con su generación probablemente pierden autoestima y además, se desconectan de las posibilidades de ayuda y aprendizaje que les ofrecen de sus mejores amigos, que de hecho constituyen sus redes de apoyo o factores de protección en el ámbito escolar.

Por todo lo anterior, considero que la propuesta de enriquecer los métodos de enseñanza y aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica, se justifica socialmente, ya que de seguir la tendencia actual los estudiantes estarán perdiendo parte de sus posibilidades de ejercer su ciudadanía y de lograr mejores niveles de vida.

1.4 Posibles causas que lo generan

El problema que nos ocupa es un problema complejo que tiene múltiples aristas: sociales, económicas, psicológicas, biológicas, además de las relacionadas con la dificultad de la disciplina y su didáctica. Por ello, considero que el esfuerzo del docente debe centrarse en aquellos aspectos que son susceptibles de modificarse, lo más objetivamente posible, para enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje en la escuela.

Una gran variedad de fenómenos, de todo tipo, pueden estudiarse y modelarse mediante las funciones exponenciales y logarítmicas. Desde el punto de vista académico, los estudiantes que fracasan en este tema se pierden de la posibilidad futura de comprender una gran cantidad de fenómenos cuyo comportamiento es básicamente exponencial, incluyendo algunos que resultan peligrosos para la salud física y económica de las personas. Probablemente la mayor dificultad a superar en este tema sea que los estudiantes lo perciben como ajeno a su realidad[1].

Otra variable a tomar en cuenta en este problema es la que se relaciona con las formas de evaluación empleadas por los docentes en estos temas, que por lo regular se limitan a un examen tradicional sobre ejercicios o problemas de aplicación (que en la mayoría de los casos, "por falta de tiempo", no se han discutido en clase).

Los síntomas inmediatos que se manifiestan cuando no se atiende a este problema son: los estudiantes fallan en las asignaturas del siguiente semestre (cálculo o estadística). Generalmente por su desconocimiento, que se manifiesta con miedo o falta de confianza respecto del manejo de las funciones exponenciales y logarítmicas.

En suma, de mantenerse esta situación, los estudiantes se privarán de la posibilidad de comprender una serie de fenómenos (económicos, sociales y naturales) que se modelan mediante exponenciales o logaritmos y que por su naturaleza son potencialmente peligrosos y a los que seguramente enfrentarán en su vida profesional y personal (por ejemplo: préstamos con interés compuesto en la tarjeta de crédito).

---

[1] Sugiero, al respecto, consultar la conferencia del Doctor Albert Bartlett de la Universidad de Colorado acerca del crecimiento poblacional y el uso de la energía: https://www.youtube.com/watch?v=F-QA2rkpBSY
(consulta más reciente 28 agosto 2014)

Además, desde el punto de vista social y psicológico, aquellos estudiantes que no lograr egresar en tres años se desconectan de su generación, muy probablemente pierden confianza en sí mismos, y la posibilidad de contar con su mejor red de apoyo social y académica. Por otro lado esos estudiantes viven una especie de duelo y se alejan de la posibilidad de acceder a la educación superior y con ello la posibilidad de estructurar su vida con la formación universitaria y cultural.

1.5 Análisis del problema

Entre los factores académicos, sociales y psicológicos que intervienen en este problema podemos mencionar el interés y esfuerzo continuo que se requiere de parte del estudiante, para poder comprender y asimilar los conceptos sobre las funciones que se abordan en la asignatura de Matemáticas IV.

Los estudiantes necesitan también contar con una buena *resiliencia* (Arnett, 2008), para no dejarse vencer por los tropiezos, errores y fracasos que se les presenten, y con la fuerza de voluntad necesaria para hacer las tareas y ejercicios que les permitan adquirir la técnica y sentirse razonablemente seguros y desarrollar así sentimientos positivos hacia este tema.

Por todo ello la motivación intrínseca y extrínseca es muy importante. Una buena parte de los estudiantes suele abordar las asignaturas de matemáticas con miedo, o displicencia y falta de compromiso, y desde luego sus experiencias previas con la materia no les ayudan.

Es muy probable que aquellos estudiantes que exhiben poca *resiliencia* fracasen escolarmente. Esta situación puede darse porque algunos de ellos no han aprendido a *autorregularse,* y cuando experimentar "la libertad de no entrar a clase", que enfrentan por primera vez, no asumen las consecuencias del fracaso escolar.

Una buena parte de los adolescentes que asisten al CCH no se han dado cuenta de que pueden construir redes sociales de apoyo para ayudarse mutuamente y superar sus deficiencias y dificultades escolares. La baja autoestima es otro factor que suele operar y formar un círculo vicioso con el fracaso escolar.

Cabe mencionar una buena parte de ellos carece de buenos hábitos alimenticios, buena salud y hábitos de estudio. Si, por ejemplo, un estudiante deja de asistir a una clase, casi nunca se preocupa por enterarse de lo que se trabajó en ella o por estudiar para reponer la clase y probablemente se preocupe más por intentar justificar su falta ante el docente.

Para los estudiantes la asignatura de matemáticas IV es de las que más obstáculos les presenta, porque es un “cierre de ciclo” y requiere de los conocimientos previos que se supone que ha construido a lo largo de la secundaria y los tres primeros semestres del bachillerato, además de la toma de decisiones, la continuidad en el esfuerzo y la perseverancia que son necesarias para poder extinguir los errores y preconceptos que sí adquirieron en sus aprendizajes, o sin instrucción, y que se sabe son persistentes.

Los estudiantes, no son una tabla rasa, llegan al aula con multitud de problemas: personales, familiares, y algunos con adicciones al alcohol o a las drogas. Por otro lado, una dificultad más es que la mayoría de ellos persigue lo que podríamos llamar un “utilitarismo educativo”: ¿para qué me va a servir eso que estamos estudiando?

Ante tal cantidad de problemas, parece razonable que la intervención del docente se concentre en aquellos factores en los que sea más probable reflejar cambios favorables para la cultura, la formación, los aprendizajes y la salud de sus estudiantes.

1.6 Una explicación plausible

Actualmente la asignatura de Matemáticas IV tiene demasiados contenidos y muchos de ellos no se perciben como *significativos* por parte de los estudiantes (por ejemplo: no se estudian las aplicaciones importantes, y posiblemente motivadoras, por falta de tiempo o tal vez porque el docente considera que esto no contribuirá a su valoración y aceptación por parte de los estudiantes). Podemos concluir que aprender y enseñar la función exponencial es un problema complejo, con muchas aristas, pero que puede enriquecerse el enfoque tradicional con el que se le ha abordado hasta ahora en el bachillerato.

Considero al aplicar las funciones exponenciales y logarítmicas a la resolución de problemas de interés para los estudiantes, es posible enriquecer sus aprendizajes, y lograr que éstos sean significativos (más duraderos) y además que los estudiantes puedan explicarse fenómenos naturales, sociales, económicos y ecológicos que se les presentarán en su vida diaria y profesional.

1.7 La propuesta, su metodología y sus objetivos

Abordar el estudio de las funciones exponencial y logarítmica a partir de problemas potencialmente interesantes para los estudiantes, con base en el aprendizaje constructivo, colaborativo y argumentativo.

Considerar la posibilidad de reducir el número excesivo de objetivos de aprendizaje que contempla el programa (para hacer más factible la posibilidad de alcanzarlos).

Tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, preparar y realizar actividades para reponerlos sobre la marcha, al mismo tiempo lograr erradicar las ideas previas de los estudiantes de manera explícita.

Sugerirles que el proceso de identificar, reconocer y valorar sus errores constituye también una posible experiencia de aprendizaje.

Concientizarlos de la posibilidad tangible de mejorar sus aprendizajes mediante la reflexión, la escucha, la argumentación y al autoevaluarse continuamente.

Al participar activamente en las actividades que se proponen en la propuesta didáctica, el estudiante podrá:

- Reconocer, construir, utilizar e interpretar modelos exponenciales.

- Aplicar las propiedades de crecimiento y decrecimiento características de estas funciones para representar situaciones y resolver problemas potencialmente interesantes, es decir, cercanos a su vida cotidiana o escolar, lo que le permitirá comprender mejor y eventualmente transformar su realidad.

- Interpretar correctamente la información relativa a las funciones exponenciales que se le presenta mediante tablas, gráficas, diagramas y textos.

1.8 La estrategia sugerida para abordar el problema

La preparación adquirida en MADEMS me ha permitido analizar el problema y proponer abordarlo con base en una *intervención didáctica* cuya puesta en práctica incluye:

1) Iniciar el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas basado en los conocimientos previos de los estudiantes y motivarlos para abordar la resolución de problemas que les resulten de interés (porque los perciben como cercanos a su entorno o a la problemática de la carrera que piensan seguir).
2) Proponer a los estudiantes una forma de trabajo en clase que permita a los estudiantes la construcción de los conceptos mediante el trabajo en equipos, y la elaboración grupal de conclusiones, siempre con el acompañamiento y las asesorías del docente.
3) La realización de tareas en casa para lograr la asimilación de los aspectos técnicos mediante la resolución de ejercicios, además de la elaboración e interpretación de gráficas mediante programas como Graph o GeoGebra.
4) Una forma de evaluación continua, con autoevaluación que incluye la elaboración de un portafolio personal que sirve a la vez de evidencia y refuerzo para el aprendizaje.
5) La intervención del docente incluye: convencer a los estudiantes de que resulta beneficioso para sus aprendizajes el hábito de detectar, reconocer y analizar sus errores. Motivarlos y asesorarlos mediante los andamiajes necesarios (ZDP), sobre todo cuando el docente note que las dificultades encontradas los desanimen; adecuar los retos particulares en los diálogos que se presenten (ZDP); invitarlos continuamente a justificar sus propuestas; mostrarles que una de las llaves para lograr mejores aprendizajes y aprender a aprender consiste en propiciar la propia reflexión.

Considero que esta propuesta tiene posibilidades de adecuarse y mejorarse mediante la colaboración con los profesores mi área, porque su objetivo principal es enriquecer las opciones y enfoques que hasta ahora se han dado a este problema tan complejo.

La propuesta puede ser percibida como una aportación a los principios educativos del colegio: aprender a ser, aprender a hacer y aprender a aprender.

Capítulo 2

Las funciones Logaritmo y Exponencial

En este capítulo se explican las razones que me llevaron a elegir el tema de las funciones logaritmo y exponencial para la presente propuesta didáctica. El programa de la asignatura Matemáticas IV comprende el estudio de varios tipos de funciones y como se ha visto en el capítulo anterior presenta graves problemas de reprobación y deserción.

2.1 Son necesarias para la comprensión de una multitud de fenómenos naturales y sociales algunos de ellos potencialmente peligrosos para los estudiantes y su entorno

Una buena parte de los modelos matemáticos que se aplican a situaciones que no son lineales, resultan ser exponenciales o logarítmicos. De hecho, cuando un fenómeno o población crece, o decrece, proporcionalmente a su valor actual, el fenómeno podrá modelarse mediante una función exponencial.

Es posible expresar la frase anterior en términos de lenguaje matemático, mediante una ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \pm ky \ ,$$

Así que $\boldsymbol{y}$ debe ser una función de $\boldsymbol{t}$ cuya derivada es proporcional a dicha función $\boldsymbol{y}$, y esa es justamente una de las propiedades que distinguen o definen a la función exponencial (ejemplo: $D_x e^{kx} = k\, e^{kx}$; donde k es una constante).

Las aplicaciones de la función exponencial en una amplia variedad de fenómenos naturales, económicos, y sociales seguramente se deben a esta notable característica.

2.2 Las dificultades para aprenderlas y enseñarlas

Entre las dificultades que profesores y estudiantes encuentran en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función exponencial mencionaré las siguientes:

2.2.1 *Se trata de modelar situaciones que no responden al modelo lineal*.

Este obstáculo epistemológico obliga a los estudiantes a reconstruir sus estructuras cognitivas para poder comprender y aplicar las funciones exponenciales y logarítmicas, porque hasta ahora sólo han aplicado la proporcionalidad directa o en el mejor de los casos algunas funciones lineales.

El obstáculo es realmente difícil de superar porque no se trata de extinguir o combatir el modelo lineal, sino de que ambos modelos convivan en las estructuras mentales del estudiante, para que pueda decidir qué modelo emplear e cada fenómeno o situación que se le presente.

Tomemos por ejemplo el problema de adaptar una receta de un pastel para 8 personas, pero requiere adaptar la receta para 20 personas, con poca dificultad lo hacen, pero si se les pide determinar el nuevo tiempo de cocción, entonces probablemente aplicarán también la proporcionalidad en este aspecto del proceso y el error que se cometa será muy instructivo pero costoso.

2.2.2 *Comprender el significado de la función* $\boldsymbol{f(x)= e^x}$*, para* ***x real****, históricamente ha resultado ser, para los estudiantes*[2]*, un proceso cognitivo complicado*.

Hasta ahora los estudiantes han trabajado con expresiones que contienen exponentes, pero esas expresiones son de la forma $\mathbf{x^n}$, donde n es un entero o bien un número racional. Ahora la dificultad se incrementa. Por un lado la variable toma el lugar del exponente, que ya no es forzosamente un entero (y por ejemplo, un estudiante promedio no acaba de entender de dónde proviene el número ***e***). Este tipo de dificultad sugiere iniciar primero con otras funciones. La propuesta contempla hacerlo con: $\mathbf{2^x}$,

[2] Y para la humanidad entera, según el Doctor Albert Bartlett de la Universidad de Colorado.

$\mathbf{3^x}$ y $\mathbf{10^x}$ para pasar luego a funciones del tipo $\mathbf{(1.01)^x}$ para facilitar la comprensión del concepto cuando se trate de $\boldsymbol{e}^{\mathbf{x}}$.

Probablemente una de las razones epistemológicas por las cuales el concepto de función exponencial resulta difícil, sea la *preconcepción* casi generalizada de que en al realizar la operación de multiplicar el producto que se obtiene es *siempre* mayor de lo que se tenía. Ejemplo, $(0.99)^2$ se interpreta correctamente como $(0.99)\times(0.99)$, pero casi todos los estudiantes consideran erróneamente que el resultado debe ser mayor que 0.99.

Finalmente, de acuerdo con Ana Sierpinska, aparecerá una dificultad epistemológica ineludible que consiste en que los estudiantes acepten como conveniente o comprendan que $a^0 = 1$ (para toda $a \neq 0$). Al respecto, en esta propuesta, se sugiere abordar el tema mediante una serie de ejercicios que involucren realizar gráficas de las funciones exponenciales con un programa como GeoGebra, y además practicar con las leyes de los exponentes, para concluir que resulta conveniente aceptar la propuesta: $a^0 = 1$, porque no lleva a contradicción alguna y ayuda a la comprensión de la función exponencial y los fenómenos asociados.

2.2.3. *La posibilidad de mejorar la comprensión del concepto de función exponencial mediante el uso de la iteración o aproximaciones sucesivas para resolver las ecuaciones exponenciales tales como* $2^x = 35$.

Esta técnica se introduce en la propuesta antes de inducir el procedimiento técnico de resolver con logaritmos este tipo de ecuaciones. De lo contrario, al no hacer sentir la necesidad de los logaritmos, éstos les parecen artificiales y probablemente no serán aprendidos significativamente.

Ejemplo: Como parte de la propuesta, se plantea el problema de hallar el valor futuro de un bien que se deprecia a razón de $\frac{1}{6}$ de su valor presente:

$$V(t) = V_o(1-\tfrac{1}{6})^t$$

Cuando se ha entendido esta parte, se les sugiere la pregunta, ¿cuál será el valor de t para que el artículo que se deprecia valga la mitad de su valor original?

Entonces, después de un proceso de aclaración, que se induce mediante la resolución de problemas propuestos en las actividades, descubren que *se hace necesario* resolver la ecuación: $1 = 2\,(\frac{5}{6})^t$

La mayoría de los estudiantes intentan primero resolverla como si no se tratara de una ecuación "normal" (es decir que intentan "despejar la t"), más adelante proponen obtener "una especie de raíz", hasta que finalmente algunos de ellos se proponen resolver, mediante la calculadora, la ecuación:

$$(\frac{5}{6})^t = \frac{1}{2}$$

Es decir, que surge en ellos la idea de hallar por ensayo-error un valor del exponente ***t*** de manera que la expresión exponencial se aproxime lo más posible al valor 0.5.

La siguiente secuencia muestra los resultados que obtienen los estudiantes, cuando buscan aproximarse al resultado mediante el uso de la calculadora:

$$(\frac{5}{6})^3 = 0.578703703$$

$$(\frac{5}{6})^{3.5} = 0.\ 52828178$$

...

$$(\frac{5}{6})^{3.8} = 0.5001626$$

La primera vez que puse en práctica la propuesta didáctica consideré que la resolución reiterada de este tipo de problemas, *hallar un valor futuro mediante aproximaciones sucesivas,* puede ayudar a mejorar la comprensión de la función exponencial y puede también ayudar a valorar y validar la solución que se obtiene. Lo cual ocurrió efectivamente, pero también encontré que cuando se les propone el uso de logaritmos para resolver este tipo de ecuaciones, los estudiantes aparentemente lo aceptan y lo adoptan, pero la mayoría de ellos (tal vez por la dificultad conceptual o la aversión a la palabra "logaritmo") no abandonan el método de resolución por aproximaciones sucesivas a pesar de la ventaja que representa el hacerlo por logaritmos.

2.2.4 El tema de la función exponencial se ubica al final del programa de matemáticas IV en el CCH.

Para el docente esta particularidad hace que, en la práctica no se disponga de tiempo suficiente para desarrollar estos conceptos. Si los estudiantes y docentes disponen de un material como el que se propone en este documento, probablemente será menos complicado para ambos cubrirlo y llegar a los objetivos de aprendizaje que propone el programa.

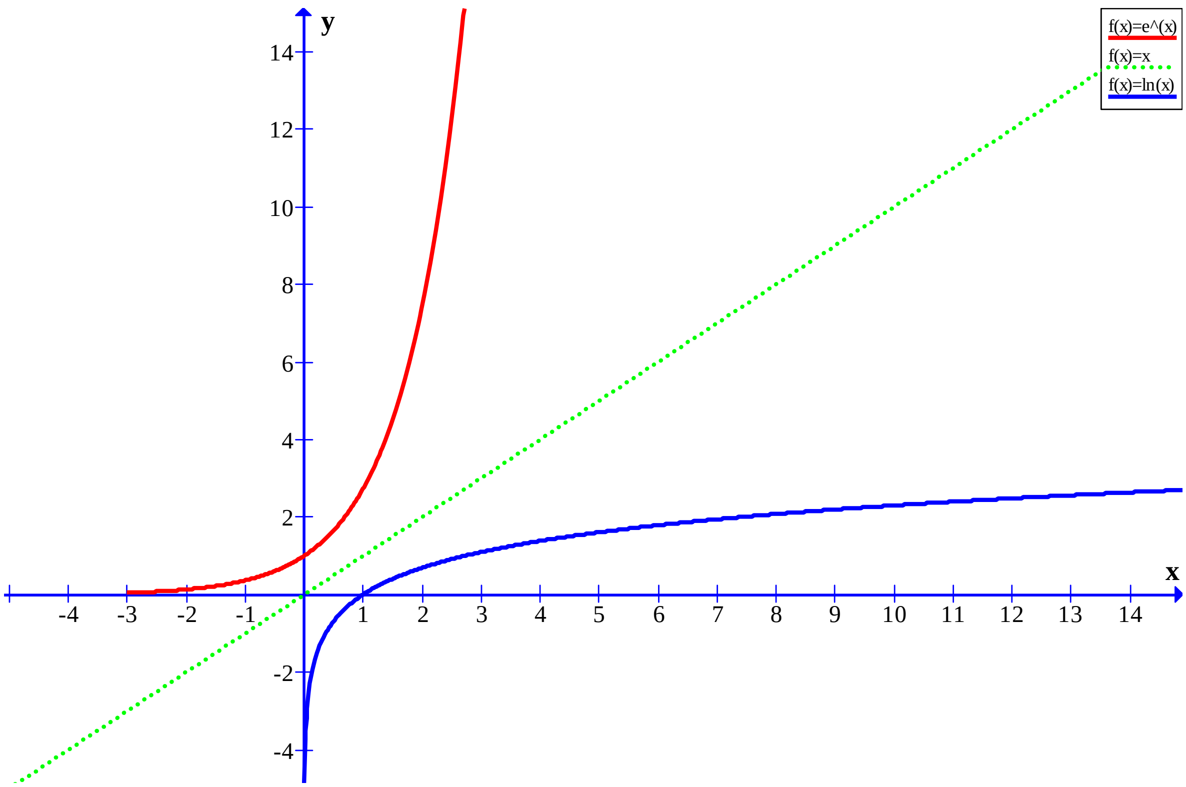
También suele ocurrir que este tema del programa de plano no se aborde. Por esta razón la propuesta se ha diseñado pensando en que el egresado de bachillerato pueda comprender el tema y aplicar los conceptos en la resolución de problemas por sí mismo, sin importar la carrera que haya seleccionado.

Por otro lado, también es posible que la propuesta convenza a los docentes de iniciar el programa con este tema, ya sea por su variedad de aplicaciones, o bien porque los conocimientos previos necesarios, indispensables, para iniciar su estudio son solo las leyes de los exponentes. Con esto se quiere decir que no es necesario que los estudiantes sepan o comprendan las funciones polinomiales, las racionales o las trigonométricas, que son los conceptos que actualmente se abordan en los primeros temas de la asignatura de matemáticas IV en el CCH. De hecho inicié mis cursos de Matemáticas IV del semestre 2014_2 con el tema de funciones exponenciales y al finalizar el curso, un buen número de estudiantes pudieron, voluntariamente, sin estudio previo, ni aviso, resolver problemas sobre modelos exponenciales que corresponden a un examen[3] que fue aplicado en los estados unidos a un grupo de profesores en ejercicio.

[3] Ver las conclusiones hacia el final del Capítulo 5.

2.3 Las funciones exponencial y logarítmica son idóneas para comprender e ilustrar el concepto de función inversa

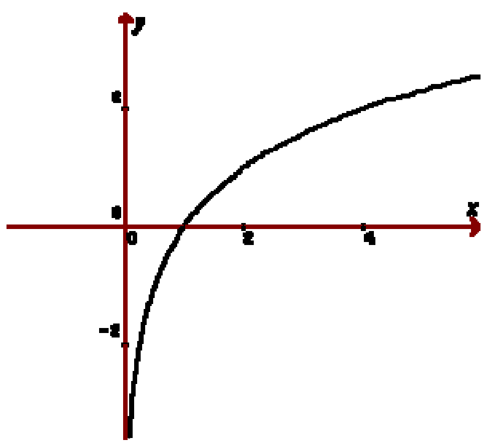
Partir de la interpretación de las gráficas de ambas funciones y la idéntica f(x) = x

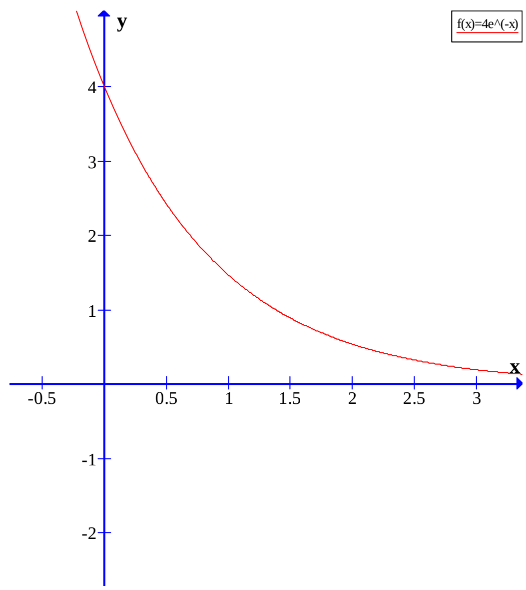


En la propuesta didáctica se utiliza este conocimiento repetidamente bajo la forma del siguiente lema: ***el logaritmo es un exponente.***

2.4 La lectura interpretativa de gráficas de las funciones exponencial, logarítmica y la logística, ayuda a desarrollar las habilidades relacionadas con la lectura de información gráfica

Se considera actualmente que una de las habilidades clave para todas las personas que egresan de la EMS, es poder *interpretar* correctamente la información que se presenta mediante una gráfica, ya sea para justificar una decisión o una conclusión, por esta razón se hace énfasis en la lectura de gráficas de funciones por parte de los estudiantes para que estos conceptos se refuercen y se complementen con la interpretación analítica de las expresiones, modelos y problemas estudiados.





¿Cuál es el Dominio?: ¿Recorrido?:

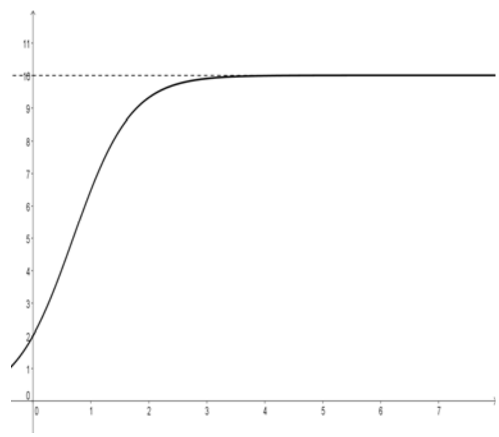
¿Creciente o decreciente?: ¿Siempre?:

¿Cuál es la expresión que corresponde a cada gráfica? f(x)=

¿Por qué? Explicar:

2.5 Son elementos fundamentales para comprender la función logística que modela situaciones ecológicas o de negocios

Gráfica de una función logística:



L(x) $= \frac{10}{1+4e^{-2x}}$

- Si Dominio: R+
- Recorrido: [2, 10)
- Punto: (0, 2)
- Siempre creciente
- Continua

Al respecto, como complemento a la propuesta se pueden abordar temas como:

- Los negocios de tipo *pirámide*. Para evitar que el estudiante o su familia caigan en el fraude de las cadenas o *Pirámides* que les prometen obtener una riqueza ilimitada.
- Comprender que el crecimiento inicial de un tipo de franquicia no necesariamente garantiza la tendencia de su crecimiento futuro.
- Comprender las situaciones o fenómenos sociales o biológicos que tienen posibilidades de crecimientos o ganancias limitadas, o bien límites de crecimiento naturales.

2.6 Las aplicaciones más comunes de la función logarítmica y exponencial pueden contribuir a una valoración positiva de los estudiantes hacia la ciencia, la cultura y las matemáticas

Cada vez que se hace necesario comparar magnitudes que, en una escala lineal, distan mucho de ser comparables, por ejemplo si es necesario diseñar una escala para registrar desde la masa de un organismo unicelular hasta la de una ballena azul, se puede justificar la introducción de una escala logarítmica.

La escala de Richter (diseñada por el científico norteamericano C.F. Richter en el año de 1935) es una forma de convertir las lecturas sismográficas en números que proporcionan una referencia sencilla para medir la magnitud **M** de un terremoto. Todos los terremotos se comparan con un **Terremoto de nivel cero** cuya lectura sismo gráfica mide 0.001 de milímetro a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un terremoto cuya lectura sismo gráfica mide x milímetros tiene una **magnitud M(x)** dada por:

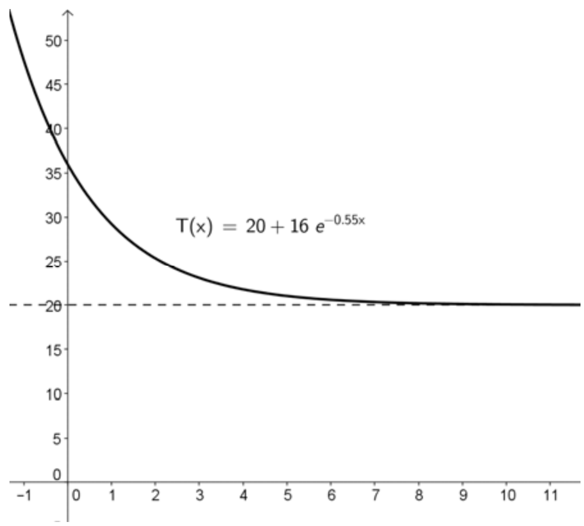
$$M(x) = \log\left(\frac{x}{xo}\right)$$

Donde "$x_0=10^{-3}$" es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia del epicentro.

Richter estudió una buena cantidad de los terremotos ocurridos entre 1900 y 1950. Esto correspondía a una razón de intensidades desde 1 hasta 800, 000, 000, así que, Richter propuso utilizar su escala logarítmica, que le proporcionaba números mucho más manejables para su trabajo. Cada unidad de incremento en la magnitud de un terremoto en la escala de Richter, indica una intensidad 10 veces mayor. Así, por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es 10 veces mayor que un terremoto de magnitud 5 y uno de magnitud 8, es 10 x 10 x 10 = 1000 veces mayor (en intensidad) que uno de magnitud 5. En general, puede probarse que la intensidad relativa de dos terremotos se puede determinar elevando 10 a una potencia igual a la diferencia de sus lecturas en la escala de Richter.

Otra de las aplicaciones muy comunes y necesarias de la función logarítmica aparece en la medición de la intensidad del sonido (en dBs), ya que el *ruido* es una de las contaminaciones más peligrosas, porque nos pasa inadvertida y es irreparable, y los estudiantes y la población en general, estamos todos los días expuestos a ella. En la propuesta que se presenta, se propone a los estudiantes un breve trabajo de investigación acerca de la contaminación por ruido y sus efectos.

Otra posibilidad de proyecto de investigación es aprovechar que en su curso de física, en el cuarto semestre, estudian la ley de enfriamiento de los cuerpos de Newton. Un buen porcentaje de los estudiantes del CCH quieren estudiar para abogados o médicos y se sorprenden al descubrir que este conocimiento les puede servir, entre otras muchas cosas, para determinar la hora del fallecimiento de una persona.



2.7 La formulación de la propuesta, su origen y evolución

La primera versión de la propuesta didáctica que presento formaba parte de los trabajos realizados en la asignatura Práctica Docente II, cursada en el tercer semestre de MADEMS. Los estudiantes con los que debía practicar estaban inscritos en un grupo llamado de "recursamiento" de la asignatura de matemáticas III del CCH, que me fue asignado oficialmente para practicar por tres semanas.

Realicé una planeación para las nueve sesiones (equivalentes a tres semanas, o 15 horas de clase) en las que tendría lugar la práctica docente. En la primera sesión, de dos horas de clase, incluía la realización de un diagnóstico, que constaba en resolver dos problemas[4] Después de la presentación propuse a los estudiantes que resolvieran el diagnóstico en forma individual en un lapso de media hora, así lo hicieron y me lo entregaron. A continuación les propuse volvieran a resolverlo, pero ahora en parejas. Acordamos que esta vez lo hicieran en 20 minutos y finalmente les propuse que abordaran los mismos problemas en grupos de cuatro personas con la consigna de exponer sus procedimientos, discutirlos y convencer a los compañeros de equipo, de la solución propuesta que debían presentar en el momento de cierre de la clase.

Como se puede entrever, esta primera sesión ya contenía mucho de mi experiencia previa, varias horas de trabajo, reflexión, y una novedad. Su puesta en práctica produjo, como se verá, resultados satisfactorios.

Los diagnósticos que hasta entonces había realizado como profesor de matemáticas del CCH, consistían básicamente en una serie de ejercicios, que buscaban detectar el nivel de conocimientos algebraicos previos (*aislados*) de tipo algorítmico y procedimental, que se consideraban necesarios para iniciar el desarrollo del tema.

Los resultados de este tipo de diagnósticos casi siempre resultaron catastróficos, probablemente creía yo, que los estudiantes al enterarse de que esos ejercicios evaluativos no contaban para su calificación, los enfrentaban con desgano o displicencia, además de no haber superado los desarrollos algebraicos no simples.

Durante el curso de una de las asignaturas dedicadas al apoyo del desarrollo de la Tesis

[4] Para resolver dichos problemas se requiere comprender y aplicar los conceptos y algún modelo de tipo exponencial.

MADEMS, los planteamientos, sugerencias y discusiones con mis colegas y la maestra, me convencieron de que valdría la pena proponer un diagnóstico que posibilitara la observación de la resolución de problemas por parte de los estudiantes, y que en ese proceso se mostrarían las actitudes, habilidades y conocimientos previos de los estudiantes y además los aspectos técnicos relacionados con el manejo del procedimiento algebraico de lo que se plantearan resolver.

Así fue como puse en práctica un diagnóstico que contenía dos problemas para resolver, uno sobre calcular un interés compuesto y otro sobre el crecimiento de bacterias. Lo primero que me sorprendió fue observar que los estudiantes abordaron el diagnóstico con interés, porque al parecer lo tomaron como un reto, y esto nunca lo observé cuando mis estudiantes abordaban los diagnósticos "tradicionales" que solo contenían ejercicios aislados.

La segunda novedad favorable fue que a los estudiantes les pareció bien la propuesta de resolver el mismo examen en parejas y luego en grupos de cuatro personas en la misma sesión. Se aplicaron a resolverlo con un interés aun mayor que en la ocasión en que lo habían abordado individualmente. Las discusiones que se dieron en los equipos mostraban ya su interés por el tema, estaban trabajando en asuntos de matemáticas, querían resolver los problemas y además mostraron sus habilidades de argumentación en el equipo y en el grupo.

En la actividad de cierre de la sesión se llegó a una conclusión que yo esperaba: *los equipos que no pudieron resolver los problemas se dieron cuenta de que los habían abordado desde el punto de vista del concepto de la proporcionalidad directa*. De este modo se concluyó grupalmente que existía la necesidad de abordar, aprender y aplicar otra forma de comprender el mundo: *la del crecimiento exponencial*.

En las siguientes sesiones les propuse actividades que consistían en resolver una variedad de problemas de crecimiento (o decrecimiento) exponencial, en las que trabajaron y discutieron en parejas; con actividades de cierre y recapitulación que fueron grupales. Al trabajar y participar en forma activa en los problemas propuestos, la mayoría de ellos lograron valorar, comprender y reconocer cuando se presenta el crecimiento exponencial y que ese conocimiento es tan útil como el que se refiere al modelo lineal o al directamente proporcional, y que también es necesario saber cuándo es aplicable cada uno de ellos.

Sin embargo, la principal falla de las actividades planeadas fue que la mayoría de los estudiantes no comprendieron las ventajas que les reportaba conocer y aplicar los logaritmos para resolver los problemas inversos de los exponenciales. Por ejemplo, si en el país se tiene una población de 5000 jaguares que se mantiene decreciendo en forma constante a razón del 8% anual, ¿en cuántos años se tendrán sólo 3000 jaguares?

En otras palabras, la introducción del concepto y el pensamiento asociado con la función logarítmica probablemente no fueron los apropiados en esta primera versión de la planeación de la propuesta didáctica, porque la mayoría de los estudiantes no emplearon dicho concepto, aun cuando realicé los andamiajes necesarios para inducirlos a ello, además de que veían las ventajas de tiempo y esfuerzo que a otros estudiantes les reportaba el hacerlo. No esperaba que la mayoría de ellos prefirieran hacer los cálculos, una y otra vez, hasta que se aproximaban al valor buscado, de la misma forma en que lo realizaban al principio de la secuencia. Al parecer, no les molesta que ese proceso les tome mucho tiempo; probablemente porque de alguna forma se quedaron "anclados" en esa primera aproximación que tuvieron con el concepto de crecimiento exponencial.

Así que mi principal preocupación para la segunda puesta en práctica era: *¿cómo hacer para que la mayoría de ellos aplicara y comprendiera la función logarítmica*?

En el cuarto semestre de MADEMS cursé una asignatura diseñada para avanzar en el desarrollo de la tesis. En una de las sesiones surgió el tema de la *contaminación por ruido*: todos estamos expuestos a ella y no hemos tomado conciencia de los riesgos que representa para la salud auditiva y mental; el ruido se mide en decibelios y ahí aparecen los logaritmos.

De esta forma decidimos que la primera sesión de mi Práctica Docente III estaría dedicada a invitar a que los estudiantes realizaran una investigación acerca de la contaminación por ruido, con la idea de que los estudiantes se interesaran en el tema y de que surgieran en clase las preguntas: ¿qué son los decibelios? y ¿qué son los logaritmos? Y en efecto, así sucedió.

Sin embargo, faltaban todavía algunas piezas en la secuencia que a la postre resultarían ser importantes. Durante el cuarto semestre de MADEMS cursé también la asignatura de Práctica Docente III. La maestra responsable del curso nos dio la oportunidad de investigar sobre una técnica de dinámica de grupos llamada MIPPS y WORS[5], con el objetivo de aportar acerca de los posibles usos y momentos de la clase o del grupo en los que es oportuno usar técnicas grupales para mejorar su funcionamiento. Una de las características del juego original es que cada equipo tiene información diferente, pero que es necesario complementar con la de los otros equipos. De esta manera el grupo se ve forzado a cooperar, negociar y comunicarse.

Aparte de hacer lo que la maestra nos sugería en esta tarea, me propuse convertir esta técnica en otra análoga, para usarla de manera que los estudiantes trabajaran con logaritmos mediante un juego, que podrían tomar como un reto en el que se les da una cierta información y luego ellos pueden deducir, a partir de la información dada, los datos que les faltan para resolver el problema principal.

Así nació la segunda actividad de mi propuesta didáctica: "Hallar el logaritmo decimal de 165 con cuatro cifras decimales, a partir de los datos que se proporcionan en la hoja de la actividad. Sin usar calculadora, celular ni Internet."[6]

Durante la evaluación final de la propuesta didáctica, todos los equipos formados para la ocasión declararon espontáneamente (i.e. sin pregunta específica), que participar en esta actividad había sido una de sus mejores experiencias no sólo en matemáticas sino en toda su vida escolar, porque se sintieron capaces de cooperar, compartir, escuchar, debatir, pero sobre todo porque les agradó poder resolver un problema, que al principio de la clase no tenían ni idea de cómo abordarlo. Dos de los equipos comunicaron al grupo que su auto confianza, y la confianza en el docente, había mejorado muchísimo después de haber vivido esta experiencia de aprendizaje.

---

[5] www.dgplades.salud.gob.mx/descargas/dhg/**MIPPS_WORS**.pdf consultada el 20 de noviembre de 2013.

[6] Los datos que se incluyen son algunos logaritmos de cuatro cifras y la propiedad log(axb) = log(a) + log(b) como un dato más.

De este modo me fue posible planear y replantear la segunda puesta en práctica de la secuencia didáctica. Pero faltaba algo,… la forma en que iba a realizar la evaluación.

En la asignatura correspondiente a Práctica Docente III, nos inscribimos cuatro maestrantes, dos de la disciplina de física y dos de matemáticas. En una de las sesiones de clase, uno de mis compañeros de física expuso su proyecto de tesis, que incluía un método de evaluación que consistía en asignar, a cada estudiante, un sobre manila cerrado para que lo personalizaran, poniendo una caricatura, la foto de su artista favorito o cualquier otra cosa que fuera significativa para ellos en una de las caras externas del sobre. En la otra debían poner lo que para ellos fuera resultando más relevante de cada clase y en general de la propuesta pedagógica que él estaba llevando a cabo con ellos.

Me pareció que podría adaptar y adoptar casi sin cambios esta técnica de portafolio, y evaluar así en forma continua los progresos de la clase. Le pedí permiso para usar su idea en mi práctica docente y le agradó la idea de que un compañero usara parte de su propuesta. Al revisar la literatura sobre evaluación, encontré una forma de evaluación, que usa el *sobre o portafolio*, y que me parece ser la más coherente con la propuesta didáctica que presento es la "*evaluación auténtica*". Que considera a la evaluación como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, e incluye además a la evaluación de la propuesta educativa del docente. Así fue como pude elaborar la versión actual de la propuesta didáctica que ahora pongo a su consideración.

Capítulo 3

Marco Teórico

"La educación será mucho más plena cuando sea un acto de conocimiento, un acto político, un compromiso ético y una experiencia estética".

PAULO FREIRE. Citado por Azerêdo (2003). p.73

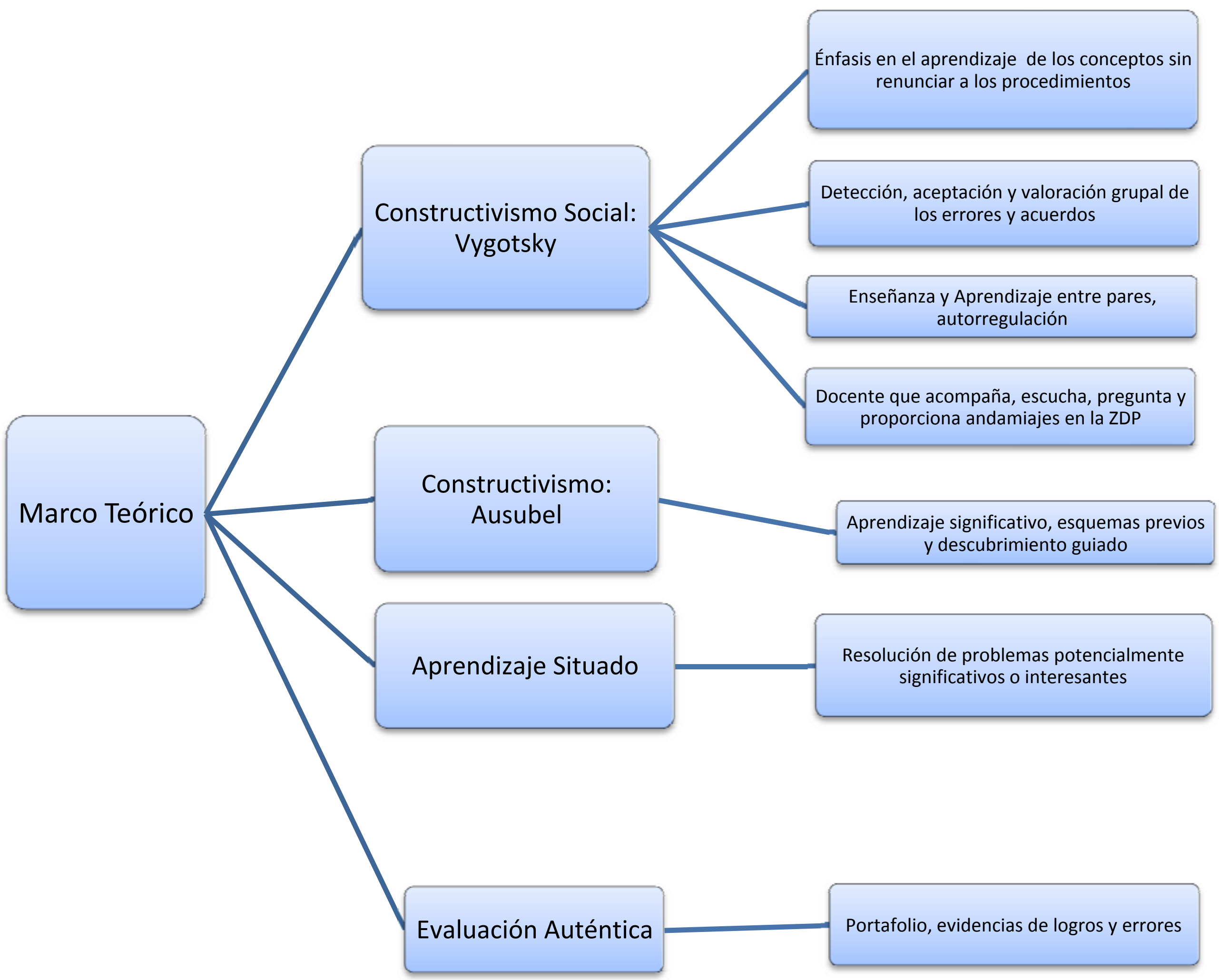


Figura 3.1. Esquema del marco teórico que se propone en esta tesis

3.1 Introducción

En este capítulo presento una semblanza breve del marco teórico en el que se basa el presente trabajo, y comprende básicamente (sin afán reduccionista): las teorías constructivistas del conocimiento, en particular el constructivismo social de Vygotsky, los aportes de Ausubel, la enseñanza-aprendizaje situados y la resolución de problemas, la visión incluyente de Juan Ignacio Pozo, y un enfoque evaluativo denominado Evaluación Auténtica. En este marco teórico tienen cabida también el docente mediador y el utilizar los errores de los estudiantes a favor de sus aprendizajes.

Al estudiar las teorías aquí consideradas, encontré que pueden complementarse e integrarse, pero que el hacerlo genera '*consecuencias*' para las acciones y propuestas que se dan cotidianamente en el aula. Se acepta cotidianamente que al adoptar cualquier teoría se asume, en forma implícita o explícita, una forma específica de entender el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.2 El Constructivismo

> "Básicamente puede decirse que el constructivismo se fundamenta en la idea según la cual el individuo (tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos) no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día con día como resultado de la interacción de esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. Entonces, ¿con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Principalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea".
>
> CARRETERO, 2011, p.22.

Mucho antes de que surgiera el constructivismo, existieron dos corrientes epistemológicas antagónicas: por una parte el *innatismo* afirmaba que el ser humano ya tenía en sí mismo todos los conocimientos y que sólo faltaba activarlos para que afloraran (asociado al diálogo de la caverna de Platón); por la otra parte, el empirismo afirmaba que el conocimiento estaba afuera, en la naturaleza y que era necesario llevarlo hacia la mente como una especie de copia (la propuesta inicial de esta corriente se asocia con Aristóteles). Según Díaz Barriga (2010) el constructivismo se distingue de las tesis empiristas e *innatistas* en cuanto considera que el conocimiento se construye activamente por los sujetos cognoscentes.

A pesar de que muchos psicólogos y educadores utilizan el término *constructivismo,* a menudo quieren decir cuestiones muy diferentes (Driscoll, 2005; McCaslin y Hickey, 2001 y Philips, 1997). No existe una teoría constructivista del aprendizaje única. Al buscar los elementos comunes a los planteamientos constructivistas encontramos dos ideas centrales (Woolfolk, 2010 p.311):

- Los aprendices son individuos activos en la construcción de su propio conocimiento.

- Las interacciones sociales son importantes en este proceso de construcción del conocimiento (Bruning, Norby y Ronning, 2004)

De acuerdo con César Coll (1999, p.34), “la utilidad del constructivismo reside en que permite formular determinadas preguntas nucleares para la educación, contestándolas desde un marco explicativo, articulado, coherente y que nos ofrece criterios para abundar en las respuestas que requieren informaciones más específicas”.

Para Delval (2000, p.8) el constructivismo es una posición epistemológica y psicológica. No se trata de una concepción educativa. Por ello, afirma, no tiene sentido hablar de una educación constructivista, ni las explicaciones constructivistas sobre la formación del conocimiento pueden traducirse directamente al terreno de la práctica educativa. Así se concluye que el paradigma constructivista puede ser considerado como una teoría, concepción epistemológica o una explicación acerca cómo se construye el conocimiento.

Entre los fundadores de lo que hoy se conoce como constructivismo se encuentran Jean Piaget (constructivismo psicogenético), Lev Vygotsky (constructivismo social), Jerome Bruner y en la filosofía de John Dewey, entre muchos otros. Díaz Barriga (2010) afirma que algunos autores, (Piaget) se centran en el estudio del funcionamiento y el contenido de la mente, para otros (Vygotsky) la construcción del conocimiento es primordialmente social.

3.2.1 El constructivismo social de Vygotsky

> “No solo hemos nacido para aprender, hemos nacido para aprender dentro de una cultura”.
>
> POZO, 2008.

Según Vygotsky (1978) todas las funciones psicológicas superiores se generan en la cultura, así nuestro aprendizaje responde a un diseño cultural, además del genético, y cada sociedad genera sus propias formas de aprendizaje, su cultura del aprendizaje.

De acuerdo con Ferreiro (2011 p.69-70) la concepción de este autor sobre el desarrollo humano es integral. Este enfoque se caracteriza entre otros aspectos por enfatizar:

- Lo individual desde la perspectiva de lo social.
- El vínculo entre los procesos psicológicos y los socioculturales.
- El conocimiento (la cultura) como la interiorización de lo sociocultural.
- La actividad y la comunicación como medios que hacen posible la interiorización.
- La existencia del vínculo entre lo cognitivo y lo afectivo.
- La mediación como elemento fundamental para la interiorización mediante la actividad y la comunicación.

Según Ferreiro (2011 p.71) Vygotsky y sus colaboradores llegan a plantear que la *educación* y el *desarrollo* son dos caras de la misma moneda, son dos procesos que coexisten en una relación muy compleja y dinámica que se da desde el primer día de vida, y postulan que la educación dirige al desarrollo. Para Vygotsky existen dos tipos de desarrollo:

- El desarrollo alcanzado, es decir lo que el sujeto es capaz de saber y hacer solo, y que muestra su nivel actual.
- El desarrollo potencial, lo que no es capaz de hacer por sí mismo, sin embargo, es posible que lo haga con ayuda de otro, lo que muestra su nivel potencial.

A la distancia que existe entre el nivel de desarrollo real y el nivel de desarrollo potencial, Vygotsky la llamó: *Zona de Desarrollo Próximo* (ZDP) (Vygotsky, 1978). Este nuevo concepto, es uno de los más trascendentes en los aspectos teóricos, metodológicos y prácticos sobre el aprendizaje. J. Bruner propone un sistema de ayuda al aprendizaje, conocido desde entonces como *andamiaje*, para trabajar en la ZDP.

> "Aprendemos con la ayuda de los demás, aprendemos en el ámbito de la interacción social y esta interacción social como posibilidad de aprendizaje es la zona de desarrollo próximo".
>
> FRAWLEY, 1997

Las interacciones de los estudiantes más instruidos y sus pares, en la ZDP, fomentan el desarrollo cognoscitivo y sirven de soporte teórico para proponer el *aprendizaje colaborativo*. Vygotsky llega a la conclusión de que el aprendizaje efectivo solo puede darse en un contexto social. Incluso el conocimiento matemático forma parte de una estructura social (Stewart, 2006), tanto al interior como al exterior de la clase, y el acceso a esa estructura es mediante la comunicación.

Las principales ideas de la teoría del aprendizaje social de Vygotsky (Meece, 2008) son:

- Las interacciones sociales son fundamentales; el conocimiento se construye en una cultura.
- La autorregulación se desarrolla mediante la internalización (desarrollando una representación interna) de las acciones y de las operaciones mentales que ocurren en las interacciones sociales.
- El desarrollo humano ocurre a través de la transmisión cultural de herramientas (lenguaje y símbolos). *El lenguaje es la herramienta más importante*; su desarrollo va desde el discurso social y el discurso privado, hasta el discurso cubierto (interno).

Según Rogoff (1993) los procesos de *participación guiada* están basados en la *intersubjetividad*: los estudiantes comparten centros de interés y objetivos con los compañeros más hábiles y con los pares que les ayudan y estimulan a superarse. El concepto de *intersubjetividad* incluye a los intercambios cognitivos, sociales y emocionales. La atención que nos estimula a seguir adelante se puede presentar en la forma de un *andamiaje*. De este modo, p*articipación guiada* quiere decir que, tanto el que guía (implícita o explícitamente) como el niño y sus colaboradores o compañeros, participan en dos procesos de colaboración: a) la construcción de puentes desde el nivel de comprensión y destreza que el niño muestra en cierto momento, para alcanzar unos nuevos; b) la organización y estructuración de la participación del infante en ciertas actividades, que debe incluir cambios en la responsabilidad a lo largo de su desarrollo.

> "Los conocimientos se construyen con base en las interacciones sociales y en la experiencia. Los conocimientos reflejan el mundo externo, filtrado e influido por la cultura, el lenguaje, las creencias, las interacciones con los demás, la enseñanza directa y el modelamiento. El descubrimiento guiado, la enseñanza, los modelos, y el entrenamiento, así como los conocimientos previos, las creencias y el pensamiento del individuo afectan el aprendizaje."

WOOLFOLK, 2010 p. 313

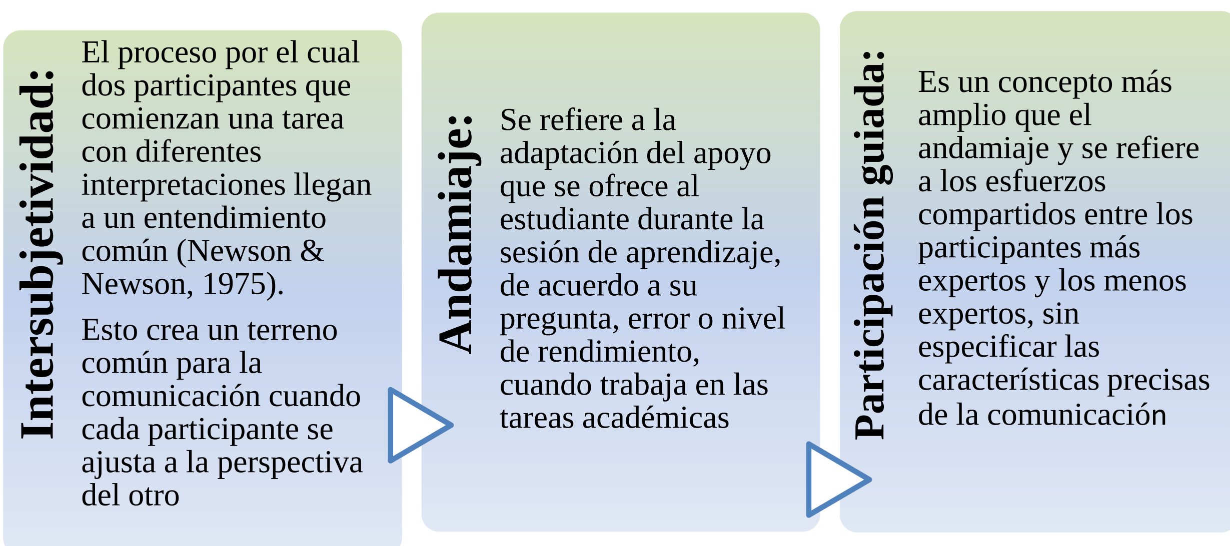


Figura 1*: Intersubjetividad, andamiaje y participación guiada.*

Para que un docente pueda proporcionar un andamiaje eficaz será necesario que:

- indague la comprensión que los estudiantes tienen de los conceptos previos necesarios, explore sobre sus ideas erróneas o falsas o las emociones que les impiden avanzar en el aprendizaje que persiguen.

- fomente el diálogo entre los estudiantes y con el docente para que puedan desarrollar las habilidades sociales de escucha y comprensión y colaboración.
- proporcione múltiples oportunidades para que aprendan y se motiven mediante preguntas y a través del intercambio y la colaboración entre pares.
- promueva que los estudiantes elaboren en forma explícita sus propuestas de solución y no solo den las respuestas para que aprendan y se habitúen a proporcionar la justificación de sus opiniones.

3.2.2 El aprendizaje significativo y los esquemas previos de Ausubel

El concepto de aprendizaje en Ausubel enfatiza que en el aula los conceptos, principios e ideas se pueden presentar y se pueden entender, pero difícilmente se descubren. Afirma que si el material memorizado no se vincula con el conocimiento anterior, será olvidado y postula que se fomenta el aprendizaje significativo cuando los docentes presentan el nuevo material de manera organizada, secuenciada y semi-terminada.

Señala que las personas aprenden mejor cuando organizan el material o la nueva información por jerarquías o en sistemas de codificación que son los esquemas u organizadores.

Según Ausubel antes de presentar un material nuevo, se debe establecer un marco de referencia para la lección y orientar al estudiante hacia la tarea por aprender. Ausubel (1977) sugiere:

1. Revisar las actividades y aprendizajes de la clase anterior.
2. Aclarar el objetivo de la sesión.
3. Asegurarse de que los estudiantes comprenden el trabajo que tienen que realizar.
4. Hacia el final, hacer una actividad de cierre o de recapitulación.

Entre las aportaciones teóricas de Ausubel se encuentran los llamados organizadores avanzados o anticipados, que son actividades y técnicas de enseñanza que activan esquemas previos, establecen una estructura de trabajo y preparan a los estudiantes para trabajar con las principales ideas que contiene el material antes de que se les presente.

Los buenos organizadores anticipados cumplen con tres propósitos:

- Dirigen la atención de los estudiantes hacia los puntos importantes.
- Indican las relaciones entre los conceptos básicos y los términos y las ideas que se utilizarán.
- Reactivan los esquemas que el estudiante ya tiene.

“En una sesión de clase efectiva de matemáticas se logra algo más que comunicar la información a los estudiantes: Se incrementa o crea el interés y motivación por el tema; se promueven la concentración y la atención, se identifican y señalan los aspectos más importantes del tema; permite al estudiante establecer procedimientos cognitivos efectivos para llevar la información a la memoria permanente y luego poder recuperar esa información cuando sea necesario”.

NIRA HATIVA (1983).

3.3 La Enseñanza y el Aprendizaje Situados

"Si concebimos la escuela como un lugar que facilita la construcción del conocimiento y que inicia en los procesos de pensamiento y en la autonomía del individuo, tenemos que *abrir la escuela hacia el exterior*, al menos en tres sentidos…

- Convertir los problemas cotidianos en objeto de conocimiento.
- Mostrar como el conocimiento contribuye a resolver estos problemas, …
- Ofrecer cultura, conocimiento en lugar de intercambio, ser un centro social para toda la comunidad."

DELVAL. Ciudadanía y escuela. El aprendizaje de la participación.[7]

"Una premisa central del constructivismo es que los procesos cognoscitivos, incluyendo el pensamiento y el aprendizaje, están situados, es decir localizados en contextos físicos y sociales (Anderson. Reder y Simon, 1996; Cobb y Bowers, 1999; Greeno *et al*, 1998). La *cognición situada (o aprendizaje situado)* implica las relaciones entre una persona y una situación, los procesos cognoscitivos no residen solo en la mente (Greeno, 1989)."

SCHUNK, 2012: 233

La teoría del Aprendizaje Situado (Jean Lave, 1999), quien probablemente fue influenciado por las teorías del desarrollo social de Vygotsky y por el instrumentalismo de John Dewey, se basa en tres principios:

1. El aprendizaje escolar, por su propia naturaleza casi siempre es descontextualizado y generalmente resulta irrelevante para el estudiante.
2. El aprendizaje más relevante y efectivo se da cuando se presenta en los contextos auténticos, es decir, donde de las situaciones o las aplicaciones involucran o necesitan de esos conocimientos.
3. Aprender es una actividad interactiva que requiere de interacción social, colaboración y asesoría.

---

[7] www.ub.edu/histodidactica/images/documentos/pdf/**delval**.pdf Consulta más reciente 01/09/2014

Durkheim insistía en que la misión principal de la escuela era la de preparar a las generaciones jóvenes para su vida social y Dewey (1938) defendía el postulado de una formación en sintonía con las necesidades vitales de los estudiantes. Desde la perspectiva humanística y de acuerdo con Carl Rogers es necesario que el aprendizaje sea significativo en el sentido de que los conceptos que se interioricen se encuentren vinculados en alguna medida con lo que les es familiar e interesante a los aprendices.

Por contraste, se dice que George Bernard Shaw afirmaba con ironía que a la temprana edad de ocho años *se vio forzado a interrumpir su educación* para asistir a la escuela. Y resalta así una de las críticas que con más frecuencia se le hacen a la escuela, su divorcio creciente de la realidad y los asuntos prácticos.

Por su parte Frida Díaz Barriga (2006) se plantea: ¿A qué se debe la separación preocupante y paradójica a la vez entre la realidad académica y la realidad cotidiana?, ¿Resulta inevitablemente de la institucionalización escolar?, ¿Es una herencia de la tradición escolástica que consagra la enseñanza centrada en el lenguaje, la imitación y la memoria repetitiva? Después de afirmar que la respuesta a la primera pregunta no es sencilla ni única, propone una diversidad de soluciones a esta compleja problemática a partir de que el conocimiento siempre es situado ya que se genera por determinadas situaciones sociales, culturales, personales, motivacionales y otras. Por eso resulta mayormente aplicable a situaciones que son análogas a las originales y menormente transferible a situaciones distintas a ellas.

> "En general, las tendencias en la enseñanza e investigación de resolución de problemas se han desplazado de la enseñanza e investigación de la heurística hacia la investigación de problemas situados, en donde los estudiantes pueden mejorar su rendimiento porque el problema tiene algún significado para ellos"
>
> KILPATRICK, 1995, p. 57.

Conviene aclarar que si un problema resulta significativo para un estudiante, no necesariamente será porque se refiere a su realidad cotidiana. Si, por ejemplo, un problema de ajedrez logra motivar o interesar a una persona, para ella será un reto significativo.

"La formulación y solución de problemas situados permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático".

PERKINS, 1994.

Es importante señalar que no basta con que los estudiantes participen de la construcción de sus conocimientos para que éstos sean significativos, considero que para ello es necesario además que esos conocimientos resulten de interés para los aprendices y si los problemas que resuelven en la clase están, de alguna manera, cercanos a su contexto de vida y se constituyen en un reto a superar, entonces se tendrá una mayor probabilidad de que ese conocimiento sea duradero y probablemente sea transferible a los problemas que enfrentan en otras asignaturas como Física y Química.

La propuesta didáctica, motivo de esta tesis, incluye una variedad de problemas potencialmente interesantes para los estudiantes, es decir, cercanos a la experiencia escolar y al interés de los alumnos. Con ello se pretende lograr que se involucren y participen en resolverlos, y que al mismo tiempo los conceptos matemáticos no se queden anclados en el contexto en el que los estudiantes los aprendieron. En otras palabras, se pretende que sean capaces, mediante la reflexión y la metacognición, de descontextualizar el concepto aprendido para que puedan transferirlo y aplicarlo en otras situaciones.

Para lograr estas metas los estudiantes tienen que aprender a discutir sus ideas, negociar, conjeturar sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar esas ideas, conjeturas o estrategias.

3.4 Los Modelos de enseñanza

El conocer y emplear varios modelos de enseñanza puede llevar a que el docente descubra cuál de ellos se adapta mejor a su personalidad, a su credo pedagógico y al tema que va a plantear a sus estudiantes.

3.4.1 El modelo de discusión

> "El modelo de discusión es una estrategia de instrucción diseñada para promover el pensamiento crítico y desarrollar habilidades sociales. Como es menos estructurado, este modelo ofrece a docentes y estudiantes más libertad y espacio para seguir sus ideas y opiniones que casi todos los demás modelos."

EGGEN, 2011 p. 164

En la perspectiva del constructivismo social, el aprendizaje tiene lugar en dos planos: el plano social, a través de la interacción con otras personas y el plano interno, el psicológico. Así es que la discusión de lo que se está aprendiendo tiene un papel muy importante para poder afirmar y validar ese conocimiento. Por ello, el modelo de discusión utilizado en clase cuando los estudiantes abordan la tarea de resolver problemas, constituye uno de los pilares de la presente propuesta.

3.4.2 El Modelo Inductivo

El modelo inductivo es una estrategia diseñada para ayudar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento crítico y el pensamiento de nivel superior mientras que se enseñan y aprenden temas con contenidos específicos. El docente presenta la información que ilustra los temas a los estudiantes, para luego guiarlos en la búsqueda de patrones. El modelo se basa en la idea de que los estudiantes construyan su propia comprensión del mundo en lugar que se les presente de una forma previamente organizada. El modelo requiere que el docente esté capacitado para hacer preguntas que reten y guíen el pensamiento del estudiante. Su eficacia depende del docente como líder activo en la tarea de ayudar a los alumnos a procesar la información. El modelo es efectivo para promover los altos niveles de compromiso por parte del alumno y aumentar la motivación en una atmósfera de seguridad y apoyo para el aprendizaje. EGGEN, 2011.

3.4.3 El Modelo de Adquisición de Conceptos

> *Puede usarse como una estrategia de recapitulación para reafirmar los conceptos más importantes del tema y su relación.*
>
> EGGEN, 2011.

Es una estrategia de enseñanza inductiva, diseñada para ayudar a los alumnos de todas las edades a reforzar su comprensión de los conceptos y para que practiquen el proponer y rechazar hipótesis. Desarrollado a partir de la investigación sobre aprendizaje de conceptos, el modelo usa ejemplos positivos y negativos para ilustrar conceptos muy simples o muy complejos.

3.4.4 La utilización del error a favor del aprendizaje

Popper, en Rico (1992) propone la siguiente pregunta que resulta fundamental *¿cómo podemos detectar y eliminar el error?* Señalando que no hay fuentes últimas del conocimiento, nos lleva a admitir que el error es parte de la adquisición del conocimiento y en ello coincide con Bacon: "la adquisición del conocimiento está impregnada de nuestros prejuicios".

Para que los estudiantes exploren y propongan estrategias diversas, tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas. Es necesario un enfoque que considere los errores de los estudiantes como un elemento didáctico más. (De la Torre, 1993).

En ocasiones, resulta necesario regresar a un nivel que ya se creía superado para revisar las ideas y los procedimientos, para recuperar esos aprendizajes y poder seguir adelante. Esto se observa cuando los estudiantes se encuentran en un contexto nuevo o cuando intentan resolver problemas que no son sencillos para ellos.

3.5 Podemos aprender en forma constructivista pero también en forma asociativa

De acuerdo con Juan Ignacio Pozo (2008, p. 142) asociar y construir son dos formas complementarias de aprender. Afirma que la tendencia reduccionista, que él ve como un residuo del positivismo lógico y su inútil búsqueda de una ciencia basada en unas leyes universales, aqueja a la psicología y a otras ciencias en su afán de reducir todo saber a unos principios únicos y generales. El conductismo, fiel exponente de esta creencia, intentó reducir todo el aprendizaje humano a asociaciones… desde las emociones hasta la personalidad, el pensamiento, el lenguaje, la religión o el funcionamiento económico. Para Skinner (1953), todos los órdenes de la vida social, toda cultura, se aprenden por procesos asociativos de condicionamiento.

Pozo (2008, p.143) observa una tendencia reduccionista similar en los teóricos constructivistas, aunque tal vez no tan extrema ni explícita. Dice: "Se pretende reducir todo el aprendizaje humano a construcción (Pozo, 1996). Para Piaget (1970), el aprendizaje asociativo no desempeña función alguna en el cambio de las estructuras cognitivas, que se debe a los procesos constructivos de asimilación y acomodación. No es que se niegue la existencia de otras formas de aprendizaje inferior. *Sólo* niega su relevancia teórica".

Pozo (2008, p.143) nos lleva a concluir que: "…es cierto que todo conocimiento es representación, y, por tanto, construcción, pero también que estas representaciones pueden adquirirse por procesos de aprendizaje asociativo, es decir, intentando establecer una copia lo más exacta posible del material de aprendizaje". Finalmente Pozo (2008) distingue dos tipos de construcción: estática (asociativa) y dinámica (constructiva), y afirma que al parecer ambas formas de aprender son complementarias, porque donde las técnicas de aprendizaje asociativo se muestran eficaces, el aprendizaje constructivo no ofrece soluciones claras, y viceversa (op. cit., p. 145).

“Los ejercicios y la práctica se han aplicado durante largo tiempo, en toda la historia de la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en la aritmética. Hubo un tiempo en que eran el método fundamental de enseñanza. Hoy siguen formando parte del currículo de matemáticas, aunque suelen ir acompañados de experiencias o de explicaciones concretas de los principios fundamentales.

> Casi todo el mundo admite que es necesaria la práctica de una forma u otra. Tanto los pedagogos como la gente de la calle opinan que esto se debe a que ‘l*a perfección se alcanza con la práctica*’...”,

RESNICK Y FORD (1990).

¿Cómo lograr que los estudiantes dominen las técnicas algebraicas necesarias para el tema?

En una clase tradicional de bachillerato los estudiantes aprenden a través de los ejemplos que proporciona el profesor, o el texto, y practican imitando en lo posible esos ejemplos hasta que pueden ejecutar los ejercicios del nivel requerido en forma más o menos automática. De acuerdo con el marco teórico que se adopta en esta tesis, el aprendizaje efectivo casi nunca ocurre si solamente se trata de hacer que los estudiantes ejecuten ejercicios de repetición (sin estructura a la que puedan vincular sus intereses y los significados adquiridos).

Daré un ejemplo al respecto: en los grupos en los que apliqué la propuesta didáctica, pude observar que cuando los estudiantes resuelven los problemas en los que se pide calcular el tiempo para que una cierta población alcance un valor determinado, se muestran un tanto inseguros hasta que pueden dominar la técnica asociada, lo que les permite resolver algebraicamente el problema. La mayoría aprende en esta etapa por asociación, repitiendo los pasos y recibiendo recompensas o auto-recompensas, hasta que casi todos pueden asimilar el algoritmo. Después de ejecutarlo varias veces se sienten más seguros, pueden usarlo confiadamente y aplicarlo en ejercicios semejantes, siempre que haya pasado poco tiempo de que lo aprendieron. Sin embargo, también hay estudiantes para los que, tal vez, es experiencia resultó ser significativa y pudieron integrarla a su cuerpo de conocimientos permanentes, y por ello son capaces aplicar la técnica aprendida para resolver problemas similares después de dos o tres meses de no hacerlo.[8]

Al respecto de la relevancia del aprendizaje asociativo, Pozo (2008 p.127) aporta lo siguiente.

"¿Cuáles serían los procesos mediante los que adquirimos conocimiento a partir de sensaciones primordiales? Aprendemos mediante las leyes de la asociación, que según Aristóteles eran la contigüidad (lo que sucede junto tiende a producir una huella común en la tablilla), la similitud (lo semejante tiende a asociarse) y el contraste (lo diferente también se asocia)."

De acuerdo también con Pozo (2008 p. 141)

"Los modelos de aprendizaje asociativo se basan en un enfoque elementista, analítico, que descompone cualquier ambiente en un conjunto asociados entre sí con distinta probabilidad, de modo que aprender es detectar con la mayor precisión … de modo que los conocimientos o las conductas así generadas se corresponden con el ambiente, en el sentido de que son un reflejo de él."

Si un docente decide utilizar los ejercicios de práctica para ayudar a fortalecer en sus estudiantes el dominio de los aspectos técnicos, del álgebra, todavía tendrá que tomar algunas decisiones muy importantes como determinar, por ejemplo, las cantidades adecuadas de los problemas o ejercicios de práctica y el orden en que los propondrá a sus estudiantes considerando que debe mantenerlos motivados e interesados en los aprendizajes que realmente quiere que logren.

En la *propuesta didáctica* se ha contemplado la importancia que tiene el dominio de los aspectos operativos y se han propuesto series de ejercicios para ser realizados como tareas. En este sentido, será muy importante revisar y evaluar los posibles errores cometidos en ellos como parte central de la estrategia seguida con los estudiantes, porque de lo contrario, al no contar con las habilidades operativas necesarias, disminuirá su autoconfianza y esto podría jugar en contra del logro de los objetivos propuestos.

[8] Ver la evidencia respectiva hacia el final del Capítulo 4 de esta Tesis.

De acuerdo con Pozo (2008, p. 69) las actividades de aprendizaje deben entenderse en el contexto de las demandas sociales que las generan. El soporte teórico principal de esta propuesta es la teoría constructivista social del conocimiento y del aprendizaje de Vygotsky; en particular la utilización de su propuesta acerca de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) para poder proporcionar un andamiaje oportuno a los estudiantes, mientras resuelven problemas potencialmente interesantes, o situados, discutiéndolos con sus pares ejercitando sus habilidades de comunicación y de organización de lo aprendido.

3.6 La evaluación auténtica

> "La evaluación está íntimamente ligada al proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que al cambiar la definición del proceso, la evaluación también debe cambiar"
>
> GÓMEZ, MATUS y SEVILLA, 2003

> "Cuando las puntuaciones en los exámenes tradicionales se convierten en el estándar, el mensaje que reciben los estudiantes es que lo único que importa son las respuestas correctas y que el razonamiento que subyace en las respuestas es irrelevante"
>
> WIGGINS, 1999 citado por Woolfolk, 2010 p. 504

La *Evaluación Auténtica* se sustenta teóricamente en los principios constructivistas del aprendizaje y la enseñanza, responde al cambio de paradigma que se propone, centrado en un estudiante con fobias, prejuicios y sentimientos, no siempre a favor del aprendizaje de las matemáticas, lo ubica en su propio contexto y busca enfrentarlo a situaciones de aprendizaje significativas y complejas, a nivel individual y grupal.

Al cambiar el enfoque de la educación centrada en el profesor por una centrada en el estudiante, se hace necesario reconsiderar el papel de la evaluación en los aprendizajes y con qué medios llevarla a cabo.

La denominada *Evaluación Auténtica* considera que la evaluación es una parte integral y natural del proceso de aprendizaje (Condemarín y Medina, 2000). En su perspectiva, la integración permanente de aprendizaje y evaluación por parte del estudiante y de sus pares, constituye un requisito indispensable del proceso de construcción y comunicación de los significados y representaciones. Con esta perspectiva, los procedimientos y técnicas que utiliza para evaluar los aprendizajes de los estudiantes le otorgan una relevancia especial a las actividades cotidianas y significativas que ocurren dentro del salón de clases.

Actualmente se considera que la evaluación de los estudiantes, los métodos y los materiales empleados son un factor determinante en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas:

> "La evaluación debe poner atención en la matemática que es importante, debe ser justa para los estudiantes, los profesores y la institución; debe fomentar el aprendizaje del estudiante, haciéndole ver qué es lo que ya sabe y qué debe aprender o qué puede hacer"
>
> CLARKE, 1997: (2-3) Citado por (Flores, 2009)

Uno de los problemas que enfrenta la educación en el bachillerato es que algunos docentes no consideran la función educativa de la evaluación y en su forma de evaluar refleja que sólo la consideran como el proceso de acreditación de un curso (Flores, 2009). Una de las evidencias es que en la mayoría de las escuelas se suspende el proceso de enseñanza y aprendizaje para efectuar los exámenes (parciales, finales y extraordinarios). Tal vez algunos profesores todavía no valoran suficientemente la ventaja educativa de evaluar, además de calificar.

Para la propuesta didáctica que presento, la evaluación de los estudiantes es un proceso sistemático que permite valorar y ubicar los distintos niveles de desarrollo, adquisición y manejo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes van logrando en sus procesos de aprendizaje. Dicha evaluación incluye la validez de la propuesta, y puede realizarse a través de diferentes instrumentos entre los que se cuentan: cuestionarios con preguntas abiertas, conversaciones, exámenes individuales, bitácoras o diarios y portafolios (Garrison y Eringhaus, 2008; Gómez, 2007).

Para el marco de esta tesis pueden considerarse tres tipos de evaluación que ocurren en diferentes momentos del proceso educativo y que conviene tener presentes: *diagnóstica, formativa y sumativa*.

La *evaluación diagnóstica* es indispensable para propuestas como la que presento, porque es indispensable:

- Conocer y tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes y porque ofrece al docente la oportunidad de realizar las adecuaciones pertinentes, antes de iniciar el tema, a la secuencia planeada.

- Para poder despertar y reforzar los aprendizajes previos específicos necesarios para que los estudiantes puedan obtener los mejores resultados posibles.

En el caso de que los estudiantes muestren fallas o deficiencias en los conocimientos previos necesarios, será indispensable desarrollarlos o despertarlos sobre la marcha, en clase y mediante tareas extra clase (previo diálogo y convencimiento, para que no se tomen como castigo). Tal vez, por esta razón algunos docentes no aplican la evaluación diagnóstica, ya que consideran que los obligará a diseñar estrategias para nivelar al grupo y no hay tiempo para ello.

Así que la *evaluación diagnóstica* busca identificar aquellos rasgos o perfiles más débiles para integrarlos a la metodología de trabajo de la secuencia y esto ofrece la posibilidad de llevar al grupo en forma paralela sin hacer diferencias con aquellos estudiantes que al inicio están en una situación considerada como deficiente (y el objetivo de ello es buscar contribuir a fomentar de la motivación, seguridad y autoestima de los estudiantes)

La *evaluación formativa*, queda a cargo de la evaluación auténtica y actualmente se considera como un proceso necesario de retroalimentación que se inserta en un proceso de mejora continua y tiene lugar en cada clase.

Esta evaluación utiliza la observación y registro continuos de las actividades que los estudiantes desarrollan normalmente en la clase o como preparación para la misma, algunas de ellas son:

- Haber realizado los ejercicios y actividades que se encargaron para el trabajo fuera de clase, presentando y registrando una lista de dudas y errores detectados.
- Participar en la recapitulación de la sesión anterior, realizando observaciones y comunicando oportunamente sus dudas o errores.
- Escuchar y aprender a contrastar varios puntos de vista y a defender su posición con argumentos razonables.
- Participar colaborativamente en el proceso de resolver los problemas

propuestos durante el tiempo de clase.

- Mostrar interés por el aprendizaje de los procesos y no sólo por el logro de resultados.
- Participar activamente en su equipo y en las sesiones plenarias realizando observaciones y comunicando oportunamente sus dudas o errores.
- Mejorar en la comprensión de los conceptos y habilidades matemáticas involucradas en el tema de la clase.
- Colectar y mostrar evidencias en el portafolio o carpeta designado.
- Escribir, en cada clase, una o dos frases o ecuaciones importantes en la portada del portafolio que servirán como "acordeón" en futuros ejercicios de evaluación individual.
- Escribir en una hoja los procesos o resultados más relevantes obtenidos en cada clase.
- Evaluar su participación, la de su equipo y la de su compañero o compañera estudiante en cada clase.

La *evaluación sumativa* se realiza al finalizar la secuencia de aprendizaje o instrucción. Su propósito consiste en permitir que el docente y los estudiantes conozcan el nivel de rendimiento alcanzado; es un resumen de los logros y suele servir para asignar una calificación al finalizar el curso (Woolfolk, 2010: 548)

La *evaluación auténtica* tiene entre sus propósitos contribuir en forma regular en el proceso de aprendizaje; porque facilita comprenderlo, retroalimentarlo y mejorarlo en sus distintos momentos y dimensiones. En consecuencia, ofrece al docente la oportunidad de reflexionar sobre sus propias prácticas educativas y busca también mejorar la calidad de los aprendizajes construidos por los estudiantes.

La calificación que se otorga es un reflejo del esfuerzo académico de cada alumno. Para ello, toma en cuenta los registros obtenidos en la evaluación auténtica y considera adicionalmente la puntuación obtenida por los estudiantes en un examen individual al finalizar el estudio del tema en conjunto con una autoevaluación realizada en público.

Antes de iniciar con las actividades de la propuesta didáctica, se hace necesario comunicar a los estudiantes los parámetros de evaluación que serán empleados con la intención de que estudiante comprenda la necesidad del proceso evaluativo y lo adopte convencido de que le ayudará a aprender. También se considera el objetivo de lograr que el estudiante sea consciente de que su calificación será el reflejo de su interés, esfuerzo académico y colaborativo.

Si se considera que el proceso de aprendizaje y su vivencia es lo más importante, entonces la calificación como parámetro de evaluación se utiliza para cumplir más bien con un propósito de naturaleza administrativa y por lo tanto es relativa. Se sugiere proponerlo así a los estudiantes que participen en la propuesta didáctica objeto de esta tesis.

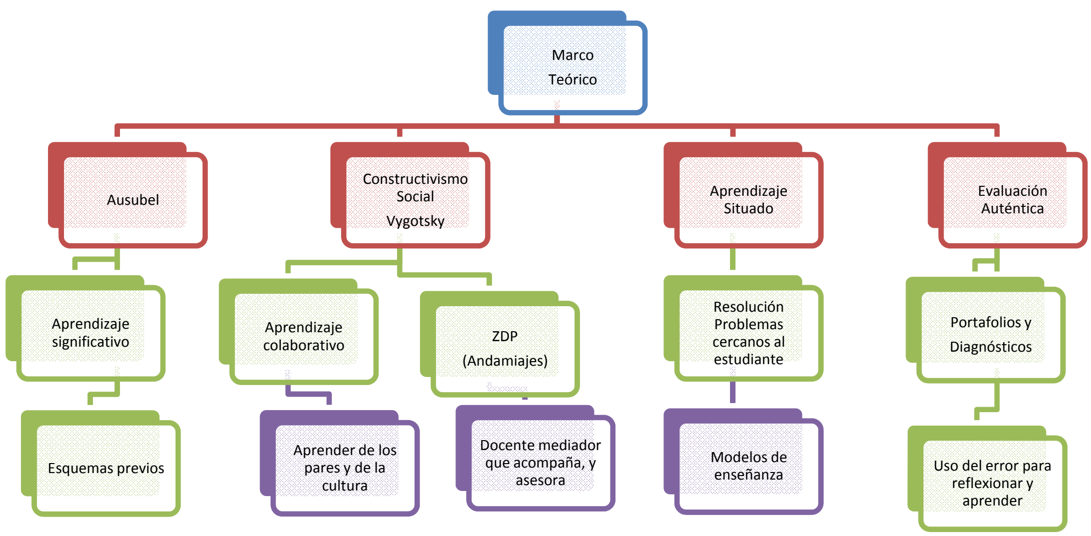


Figura que resume y estructura el Marco Teórico de la propuesta didáctica.

Capítulo 4

Metodología empleada en la Propuesta Didáctica y evidencias obtenidas durante las intervenciones

Este capítulo presento algunas de las estrategias metodológicas empleadas durante las actividades de aprendizaje y muestras de las evidencias obtenidas durante las tres diferentes intervenciones (prácticas docentes) efectuadas con la Propuesta Didáctica en el CCH-Sur de la UNAM.

A continuación haré un breve relato acerca de las tres diferentes intervenciones que tuvieron lugar con grupos del CCH Sur, en diferentes tiempos y circunstancias, y de las características de las evidencias recogidas en cada ocasión.

La primera intervención ocurrió en el semestre 2013_1 y formaba parte de la asignatura Práctica Docente II cursada en MADEMS. Ese primer grupo me fue asignado oficialmente por dos semanas para la práctica docente y estaba formado por estudiantes de V semestre, que estaban cursando por segunda vez la asignatura de Matemáticas III, pero el tema de la función exponencial no les resultaba ajeno porque ya lo habían llevado en Matemáticas IV.

De esta primera experiencia no presento evidencias, pero puedo afirmar que no me sentí satisfecho con los resultados de la propuesta, principalmente porque:

- No se logró la motivación que esperaba en los estudiantes.
- Los estudiantes no se convencieron de las ventajas de usar los logaritmos, por ejemplo al resolver problemas de crecimiento de poblaciones a futuro.
- Me parece que los estudiantes mostraron cierta displicencia al resolver el diagnóstico y los problemas propuestos en las actividades, probablemente porque sabían que yo no era "su profesor" o bien porque, como ya se mencionó, para ellos representa demasiado esfuerzo el tomar dos horas más de clase en su horario habitual.

La segunda intervención ocurrió durante el semestre 2013_2 y formó parte de la

Práctica Docente III de MADEMS, tuvo lugar con un grupo de estudiantes de V semestre del CCH Sur, que estaban cursando por segunda vez la asignatura de Matemáticas IV, pero esta vez fui asignado, oficialmente, como su profesor para este curso.

De esta segunda experiencia presento más adelante algunas evidencias que provienen de los equipos de estudiantes que tuvieron mayor constancia y mejores aprendizajes durante el curso.

La tercera intervención tuvo lugar durante el semestre 2014_2, con cuatro grupos de estudiantes que cursaban por primera vez la asignatura de Matemáticas IV en el CCH Sur. En esta ocasión inicié el curso con la Propuesta Didáctica que presento, a pesar de que el tema de la Función Exponencial es el último del programa de esta asignatura. Este hecho me permitió hacer hacia el final del curso una evaluación de lo que los estudiantes recordaban del tema que se aborda en la propuesta.

La mayoría de las evidencias que presento de esta tercera intervención corresponden a los estudiantes y equipos que obtuvieron resultados y aprendizajes de buenos a excelentes de acuerdo con el método de evaluación empleado.

Estrategias metodológicas

Se sugiere que el docente comente y acuerde con los estudiantes el sistema de evaluación a emplear, los temas y los aprendizajes esperados que se contemplan en el programa oficial de Matemáticas IV para esta Unidad, haciendo un comentario breve sobre la importancia que tiene el conocer el programa de la asignatura en cada tema y la forma en que se llevará a cabo la evaluación.

Etapa I. Logaritmos[9]

Tarea 1: Para preparar la Sesión 1 (P. A4)

El docente solicita a los estudiantes que, antes de la acudir a la primera sesión de la secuencia, realicen una investigación individual acerca de ruido.

Sesión 1.El problema del ruido ambiental (p. A5)

Actividad 1.1 Exposición de los equipos y discusión grupal (p. A5)

Al inicio de la clase, el docente pide a los estudiantes que compartan los resultados de su investigación con otro estudiante y que luego resuelvan juntos el cuestionario de la *Tarea 1* y que preparen un breve resumen para que puedan exponer sus resultados ante el grupo completo y contar con una evidencia de su participación en esta actividad.

Actividad 1.2. Problemas y preguntas acerca del ruido (p. A5)

Antes de iniciar con la actividad, el docente invita al grupo a revisar el vocabulario empleado en la bibliografía o sitios que consultaron, probablemente las palabras que sea necesario revisar serán: sonido, ruido, decibel, logaritmo, oído medio y otras.

Comentarios y observaciones de los estudiantes y el docente, respecto a los datos que mencionan los alumnos. Por ejemplo, que el ruido es causa de estrés y este puede causar desórdenes digestivos importantes.

El docente solicita que algunos equipos expongan sus conclusiones voluntariamente

[9] La numeración de las sesiones y actividades en este capítulo, se refiere a la empleada en la propuesta didáctica (Apéndice A).

ante el grupo. Al terminar las exposiciones, les propone que resuelvan en equipos las preguntas de esta actividad (p. A5).

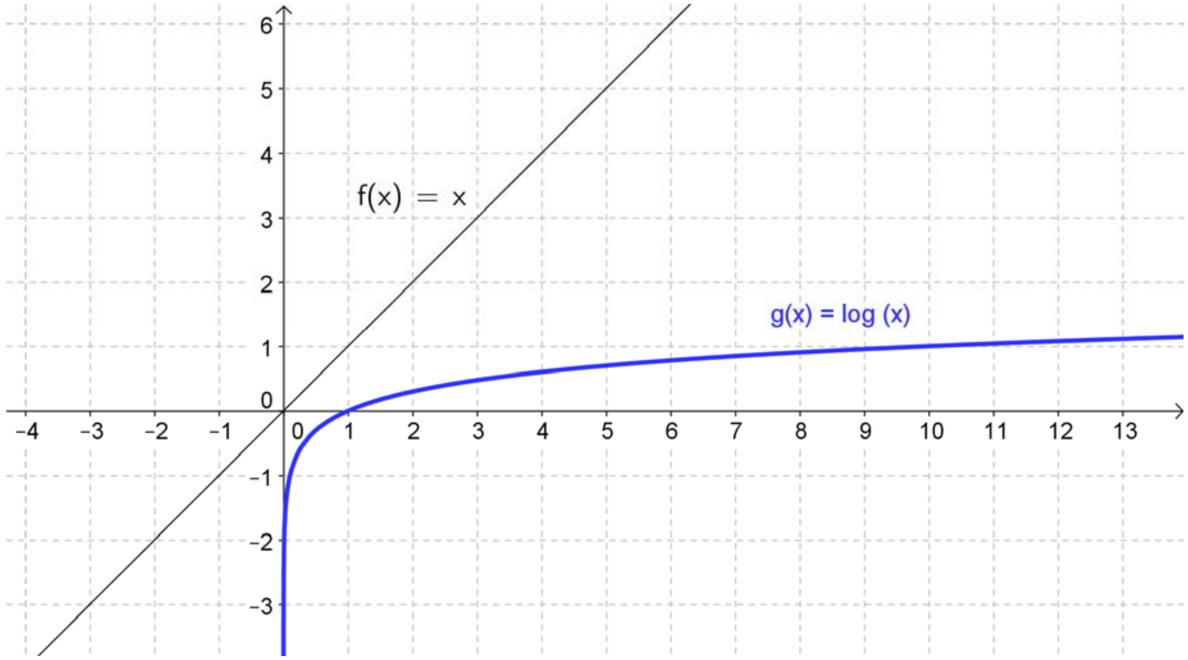
Actividad 1.3 Problemas y preguntas acerca del ruido y su medición

El grupo y el docente harán comentarios y observaciones, que se consideren importantes respecto a los datos que mencionan los alumnos en su investigación. Por ejemplo: “*el ruido es causal de estrés y este puede causar a su vez desórdenes digestivos importantes*”.

El docente propone que el grupo ponga atención especial a las respuestas que han dado los estudiantes a las preguntas que corresponden a esta actividad (p. A5).

Después de propiciar el diálogo y la toma de acuerdos, invitará a los estudiantes a discutir la gráfica de una o varias funciones logaritmo creadas con GeoGebra y proyectadas en el salón de clase.

Observa la información gráfica siguiente:

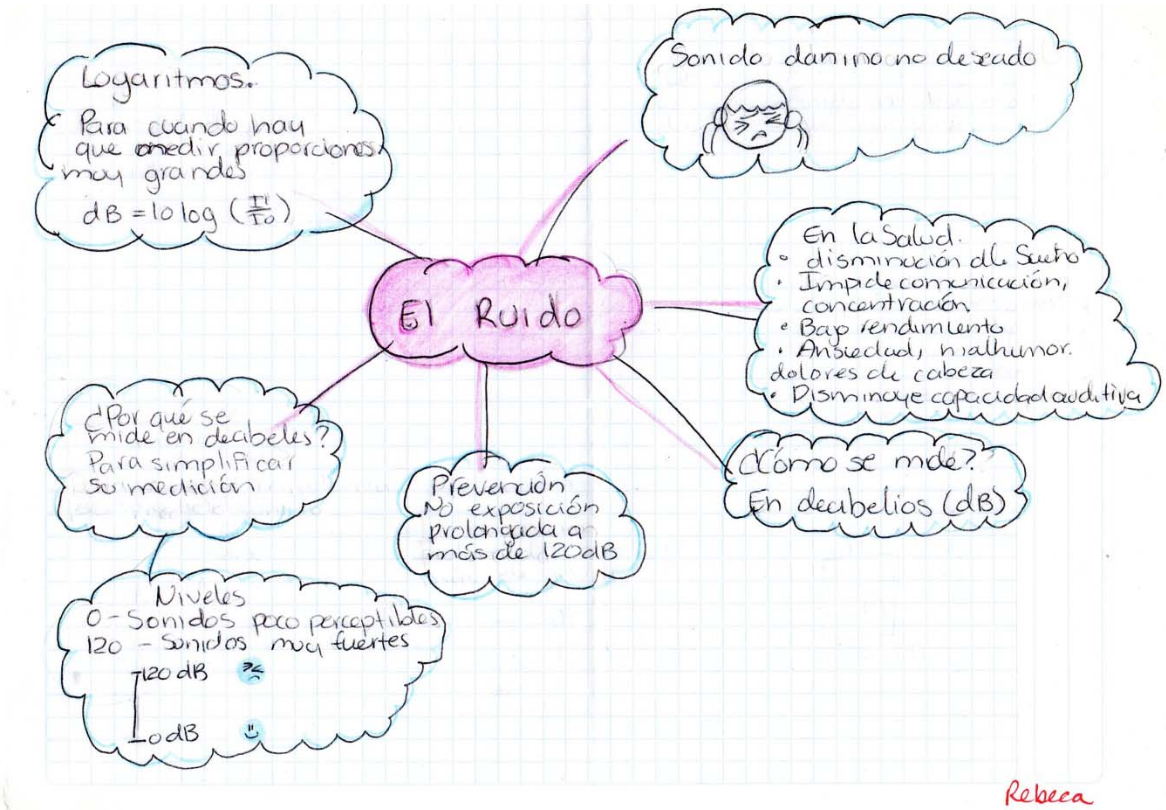


- ¿Qué puedes decir acerca del comportamiento de la función g(x)?
- ¿Cuál es su Recorrido o imagen?
- ¿Cuál es su Dominio?
- ¿Qué es lo característico de esta función para ti?

Si comparas el crecimiento de esta función g(x), con el de f(x)= x, ¿cuál crece más rápido?

- ¿Qué valor tiene la función g(x) = log(x) para x = 10^3?
- ¿Y cuál es el valor de la función para x =10^6?
- Y el valor de la función f(x) = x para esos valores: x= 10^3 y x= 10^6, ¿cuál sería?
- ¿Qué opinan acerca de la forma de crecimiento de la función logaritmo?
- ¿Qué ventaja puede reportar este tipo de comportamiento al modelar un fenómeno?
- ¿Si en Biología tuvieras que hacer un reporte acerca del *peso* de una gran diversidad de organismos vivos (desde un protozoario, hasta una ballena), qué tipo de escala usarías?
-

Actividad 1.4 Cierre y Tarea 2.



Evidencia: **Mapa conceptual que presentó un equipo al exponer acerca del ruido en enero 2014.**

Como cierre, el docente invita y motiva al grupo a culminar la sesión con la resolución de un problema; les propone que resuelvan, en parejas, un problema acerca del ruido en el que usarán los logaritmos:

¿Cuántos decibeles de ganancia representa duplicar la potencia de un amplificador casero?

El docente asesora a los equipos que se lo soliciten, siempre dentro de la ZDP y procurando que ellos mismos lleguen a lo que necesitan activar o saber.

Antes de finalizar la Sesión 1, el docente proporciona a cada estudiante una copia de dos materiales que resumen las propiedades de los exponentes y otra que corresponde a los logaritmos (*Documento 1* y *Documento 2*: SDP: pp.6-8); además de una copia impresa de la *Tarea 2.*

Tarea 2: Escala de Richter y lectura del resumen de exponenciales (p. A8) y de logaritmos (pp. A9-A10).

El docente dialoga con los estudiantes acerca de la importancia de reforzar el trabajo de la clase realizando tareas en casa y explica que los objetivos de la *Tarea 2* son:

- *a)* Activar sus conocimientos previos acerca de las propiedades de los *exponentes* y los *logaritmos*, y
- b) Afirmar lo aprendido en clase al resolver el problema de comparar las intensidades de dos terremotos cuyas magnitudes se expresan en la escala de Richter.

Sesión 2: Las propiedades de los logaritmos (pp. A9-A10)

Actividad 2.1 Revisión grupal de dudas de la Sesión 1 y de la Tarea 2

Después de revisar y resolver las dudas de los estudiantes, el docente continúa esta actividad con el siguiente diálogo:

Ejemplo: ¿Quién de ustedes puede ayudarme a resolver la siguiente ecuación?

$3^{(x+1)} = 21$

Rodrigo, un estudiante responde lo siguiente:

Se despeja la x.

¿Y cómo lo haces?

Fácil, me dice, pasa al pizarrón y escribe:

$x+1 = \frac{21}{3}$;
$x+1 = 7$;
$x = 7 - 1 = 6$

Le pregunto al grupo:

¿Es correcto este procedimiento?

¿Qué opinan del resultado?

¿Se puede comprobar?

Daniela: No es correcto, porque 3^7 no es igual a 21.

¿Los demás que opinan?

Se discute y se llega a un acuerdo. Agradezco la participación de Rodrigo, de Daniela y de todos.

¿Hay alguna propiedad de los logaritmos que podamos usar para resolver este problema?

Después de algunos intentos, un estudiante aporta lo siguiente:

Sí, la propiedad número 7 del resumen.

¿Qué dice esa propiedad? ¿Cómo la aplicamos?

$\log_b(a^x) = x \log_b(a)$; *entonces:* $\log(3^{x+1}) = (x+1)\log(3)$

¿Qué opinan los demás? ¿Se entiende la propuesta?

¿Será cierto que: $3^{x+1} = 21$ es equivalente a ***log(***3^{x+1}) = log(21)?

¿Por qué? ¿Cómo pueden justificar este paso? …

Porque si son iguales sus logaritmos deben ser iguales.

Muy bien, entonces tenemos que: ***log(***3^{x+1}) = log(21); ¿Cómo continuamos? …

(x+1)log (3) = log (21)

Bueno, creo que ahora ya no es difícil para ustedes resolver esta ecuación.

Actividad 2.2. Hallar el logaritmo decimal de 165 sin ayudas (p. A12)

Esta actividad es una de las más importantes de la propuesta, y algunos equipos de estudiantes la han considerado como muy valiosa tanto en lo afectivo como en lo formativo, en las entrevistas, comentarios y evaluaciones de las diferentes ocasiones en las que se ha puesto en práctica.

A continuación se muestra una evidencia del trabajo de un equipo de tres estudiantes que repetían la asignatura de Matemáticas IV en 2013, con los que practiqué en 2013, sobre cómo resolvieron el problema de hallar el logaritmo decimal de 165, con cuatro cifras decimales, sin calculadora, tablas ni celular.

Es conveniente aclarar que el valor obtenido con una calculadora científica para el log(165) es: 2.217484…, de modo que si algún equipo lo obtiene así, el docente puede invitarlos a que lo encuentren a partir de los datos de la actividad.

Durante el desarrollo de la actividad, el docente sugiere al grupo y a los estudiantes en los distintos equipos que "*lean con atención y trabajen con el documento hasta que vayan aclarando los conceptos y puedan resolver el problema que se se plantea al inicio*".

A continuación se presenta la evidencia del trabajo antes descrito y la explicación del proceso que los estudiantes escribieron en el reverso de la hoja proporcionada.

1. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 10? Respuesta: $\log_{10}(10) = 1$ porque $10^1 = 10$

2. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 2? Respuesta: $\log_{10}(2) = 0.3010$ porque $10^{0.3010} = 2$

3. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 5? Respuesta: $\log_{10}(5) = 0.6990$
0.6990
(tendrán que calcularlo a partir de los otros datos).
$\log_{10}(5) = 0.6990$ porque $10^{0.6990} = 5$

4. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 22? Respuesta: $\log_{10}(22) = 1.3424$
$\log_{10}(22) = 1.3424$ porque $10^{1.3424} = 22$

5. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 21? Respuesta: $\log_{10}(21) = 1.3222$
$\log_{10}(21) = 1.3222$ porque $10^{1.3222} = 21$

6. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 7? Respuesta: $\log_{10}(7) = 0.8450$
$\log_{10}(7) = 0.8450$; porque $10^{0.8450} = 7$

7. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 3? Respuesta: $\log_{10}(3) = 0.4773$
(tendrás que calcularlo a partir de los otros datos).
$\log_{10}(3) = 0.4772$; porque $10^{0.4772} = 3$

8. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 1000? Respuesta: $\log_{10}(1000) = \mathbf{3}$ **;(**porque $10^{\mathbf{3}} =$ 1000)

9. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 11? Respuesta: $\log_{10}(11) = 1.0414$
(calcularlo a partir de los otros datos). $\log_{10}(11) = 1.0414$; porque: $10^{1.0414} = 11$

10. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 100? Respuesta: $\log_{10}(100) = \mathbf{2}$ porque $10^{\mathbf{2}} = 100$

11. Todos los logaritmos tienen una base (que se escribe como subíndice después de log); si la base no está especificada, debemos asumir que la base es 10.
Ejemplos: $\log_2 8 = 3$ (el logaritmo en base dos de ocho es tres, porque $2^3 = 8$).
Así, el logaritmo decimal de catorce se escribe indistintamente: $\log 14 = \log_{10}(14)$

12. ¿Cuál es una propiedad muy importante de los logaritmos?
Respuesta: $\log_a(w \cdot z) = \log_a(w) + \log_a(z)$
"El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos separados".

13. ¿Puede darnos un ejemplo de "esa propiedad tan importante" de los logaritmos?
Respuesta: $\log_{10}(33) = \log_{10}[(11\times 3)] = \log_{10}(11) + \log_{10}(3)$
Equipo: Alejandra, Pedro; Diego; ______; ______

1. Obtener $\log_{10} 165 = ?$

2. Dividimos $165 \div 15 = 11$ (15 | 165, 15, 0) para obtener los multiplos de 165

3. Tomando en cuenta la propiedad que dice que "el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos separados"

- A partir del logaritmo de 22 $\log_{10} 22 = 1.3424$ y del logaritmo de 2 $\log_{10} 2 = 0.3010$, restamos estos logaritmos y obtuvimos el de 11

$$\begin{array}{r} 1.3424 \\ -\,0.3010 \\ \hline 1.0414 \end{array} \qquad \log_{10} 11 = 1.0414 \text{ porque } 10^{1.0414} = 11$$

4. A partir de los logaritmos de 7 y 21 obtuvimos el logaritmo de 3. $\log_{10} 21 = 1.322$ $\log_{10} 7 = 0.8450$

$$\begin{array}{r} 1.3222 \\ -\,0.8450 \\ \hline 0.4772 \end{array} \qquad \log_{10} 3 = 0.4772 \text{ porque } 10^{0.4772} = 3$$

- Obtuvimos el logaritmo de 5 a partir de los logaritmos de 10 y 2

$$\begin{array}{r} 1.0000 \\ -\,0.3010 \\ \hline 0.6990 \end{array} \qquad \log_{10} 5 = 0.6990 \text{ porque } 10^{0.7090} = 5$$

- Para obtener el logaritmo de 15, sumamos los logaritmos de 3 y de 5

$\log_{10} 15 = 1.1762$

- Para obtener el logaritmo de 165, sumamos los logaritmos de 11 y de 15

$\log_{10} 165 = 2.2176$

Evidencia: Trabajo efectuado sobre la Actividad 2.2, en clase, por estudiantes en 2013_2.

Actividad 2.3. Evaluación y cierre.

El docente se dirige a los estudiantes: *Por favor usen su calculadora para responder a las preguntas que les haré a continuación*.

1. ¿log(10) = ___ ?
2. ¿log(100) = ___ ?
3. ¿log(1 000) = ___ ?
4. ¿log(10 000) = ___ ?

¿Quién de ustedes me puede decir cuál es el patrón que estamos observando?

> *A- Me parece que el logaritmo del número coincide con el número de ceros que tiene el número que está en el paréntesis.*

Parece ser una buena conjetura, ¿qué opinan los demás?

Bien, sigamos con la exploración de la conjetura:

5. ¿log(1) = ___ ?

Le pregunto al grupo: ¿Se mantiene su conjetura? ___; ¿seguimos? …

6. ¿log(0.1) = ___ ?
7. ¿log(0.01) = ___ ?
8. ¿log(0.001) = ___ ?

¿Y ahora qué pasa con su conjetura?, ¿se sostiene?

> *Mhh, ahora ya no parece tan fácil mantenerla, tal vez habría que adaptarla, ¿no profe?*

Bien, Karina, por favor ayúdame con esto, ¿qué formas conoces de representar un décimo?

$0.1 \quad = \frac{1}{?}$;

Muy bien, completemos lo siguiente: $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{?}$

$0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

Perfecto.

¿El grupo está de acuerdo?, ¿quién de ustedes tiene duda al respecto?

En forma similar: $0.01 = \frac{1}{?} = \frac{1}{10^?} = 10^{-?}$

¿En qué asignatura usan esta propiedad frecuentemente?

> *En Física, al resolver problemas de la Ley de Coulomb.*

Claro, y desde la primaria aprendimos que un centímetro es la centésima parte de un metro, así que sólo estamos recuperando algo que hemos usado muchas veces.

¿Pueden decirme si esta propiedad aparece en alguno de los dos Documentos que estudiaron como parte de la Tarea 2? _____

¿En qué lugar se localiza? _______________

Regresemos entonces, busquemos reelaborar nuestra conjetura: sabemos ya, que por ejemplo: log (100) = 2 y que log (0.01) = -2; ¿cómo pueden mejorar la conjetura?

> *Profesor, creo que el logaritmo está más bien relacionado con el exponente.*

Muy bien, podrías explicarlo más.

> *Pues, primero noté que* $\log(100) = \log(10^2) = 2$ *y luego comprendí que* $\log(0.01) = \log(10^{-2}) = -2$

> *Así que creo que "el logaritmo tiene que ver con el exponente".*

¿Qué opinan los demás de esta nueva conjetura? ¿Podemos adoptarla como nuestro lema para esta unidad y buscar siempre que sea posible comprobarla?

> *"el logaritmo es el exponente"*

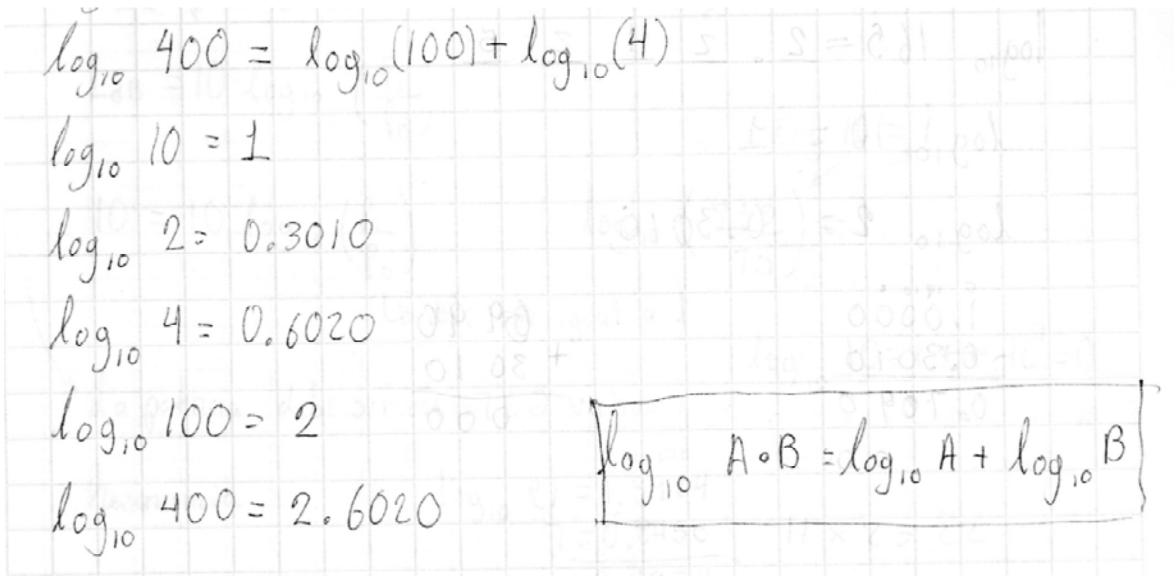
Un último ejemplo: log(2) = _______ ; ¿quiere eso decir que ______ = 2 ?

Por favor compruébenlo.

Muy bien, me parece que hemos aprendido algo muy importante en esta clase.

Como actividad de cierre, les propongo que calculen el logaritmo decimal de 400, con *cuatro cifras, sin ayuda de la calculadora.*

Evidencia:

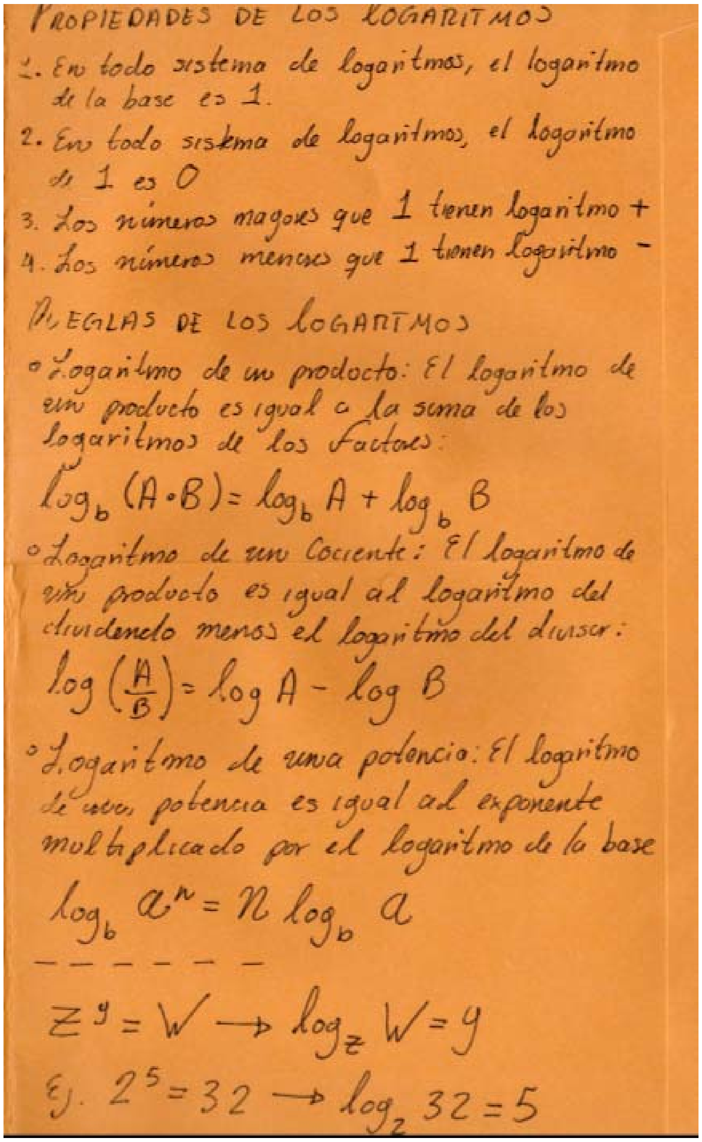


Evidencia: Una estudiante determina el logaritmo decimal de 400 por medio de las propiedades de los logaritmos que se han estudiado en esta sesión.

Si queda tiempo, el docente puede cerrar esta actividad con otro reto:

Tomen en cuenta los datos que ya conocen, ¿de cuántas maneras distintas pueden calcular el logaritmo decimal de 64 sin emplear su calculadora?

Una de las actividades que los estudiantes van realizando con el portafolio de evaluación es resumir, en la contraportada, lo que les parece más importante. A continuación se presenta una evidencia de ello:



PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1.
2. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de 1 es 0
3. Los números mayores que 1 tienen logaritmo +
4. Los números menores que 1 tienen logaritmo −

REGLAS DE LOS LOGARTMOS

- Logaritmo de un producto: El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$$

- Logaritmo de un cociente: El logaritmo de un producto es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log \left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$$

- Logaritmo de una potencia: El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

$$z^y = W \rightarrow \log_z W = y$$

Ej. $2^5 = 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$

Evidencia: La propuesta didáctica incluye que los estudiantes usen el portafolio como memoria. En este caso, las propiedades de los logaritmos fueron lo que el estudiante juzgó ser más importantes, y así fueron anotadas en la carpeta que también sirve como portafolio de evidencias de evaluación.

Tarea 3. Resolución.

Esta evidencia corresponde a la intervención 2014_2

1. $PH = -\log(3.16 \times 10^{-8} M)$

$PH = 7.5003 = 8$

Es básica

Esta sana ya que la sangre oscila entre 7.36 y 7.44

2. $PH = -\log(H^+)$

$4 = -\log(10^{-4})$

3. $PH = -\log(H^+)$

$9.45 = -\log(10^{-9.45})$

$10^{-9.45} = 3.5481 \times 10^{-10}$

Etapa II. Exponenciales

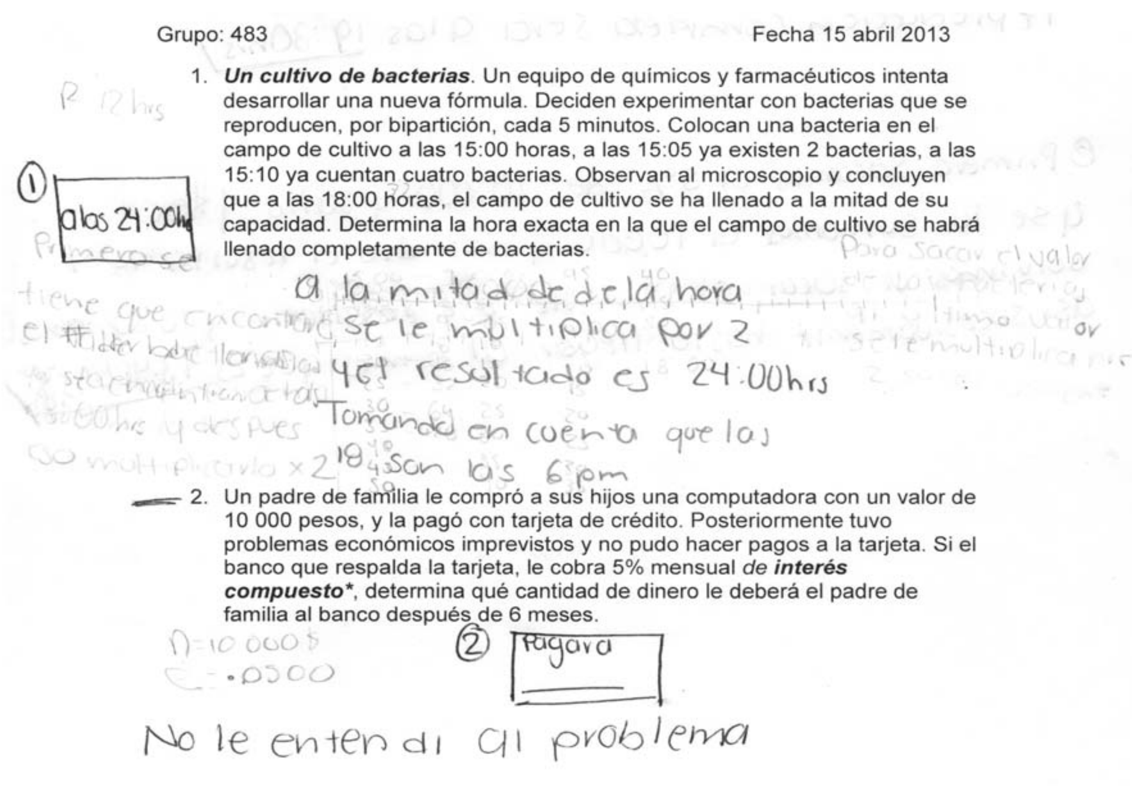
Sesión 3: Diagnóstico con problemas sobre exponenciales

Actividad 3.1 Resolver el examen diagnóstico individualmente (p. A18)

El examen diagnóstico de la propuesta puede consultarse en la página __ del Apéndice.

Lo primero que se puede notar es que este tipo de examen diagnóstico es poco común, ya que se basa en el planteamiento de dos problemas relacionados con el crecimiento exponencial. En lugar de plantear una sucesión de preguntas acerca de los aspectos técnicos que se consideran los conocimientos previos necesarios para abordar el tema.

En la primera actividad de esta sesión, los estudiantes abordan la resolución del diagnóstico en forma individual y se ha observado que una buena parte de ellos, en el primer problema se dedica a calcular el número total de bacterias (que resulta ser irrelevante) y casi todos fallan al resolver el problema de la deuda generada bajo el interés compuesto.



Grupo: 483 Fecha 15 abril 2013

1. ***Un cultivo de bacterias***. Un equipo de químicos y farmacéuticos intenta desarrollar una nueva fórmula. Deciden experimentar con bacterias que se reproducen, por bipartición, cada 5 minutos. Colocan una bacteria en el campo de cultivo a las 15:00 horas, a las 15:05 ya existen 2 bacterias, a las 15:10 ya cuentan cuatro bacterias. Observan al microscopio y concluyen que a las 18:00 horas, el campo de cultivo se ha llenado a la mitad de su capacidad. Determina la hora exacta en la que el campo de cultivo se habrá llenado completamente de bacterias.

P 12 hrs

① a los 24:00h

a la mitad de de la hora se le multiplica por 2 y el resultado es 24:00hrs Tomando en cuenta que las 18 son las 6 pm

2. Un padre de familia le compró a sus hijos una computadora con un valor de 10 000 pesos, y la pagó con tarjeta de crédito. Posteriormente tuvo problemas económicos imprevistos y no pudo hacer pagos a la tarjeta. Si el banco que respalda la tarjeta, le cobra 5% mensual *de **interés compuesto****, determina qué cantidad de dinero le deberá el padre de familia al banco después de 6 meses.

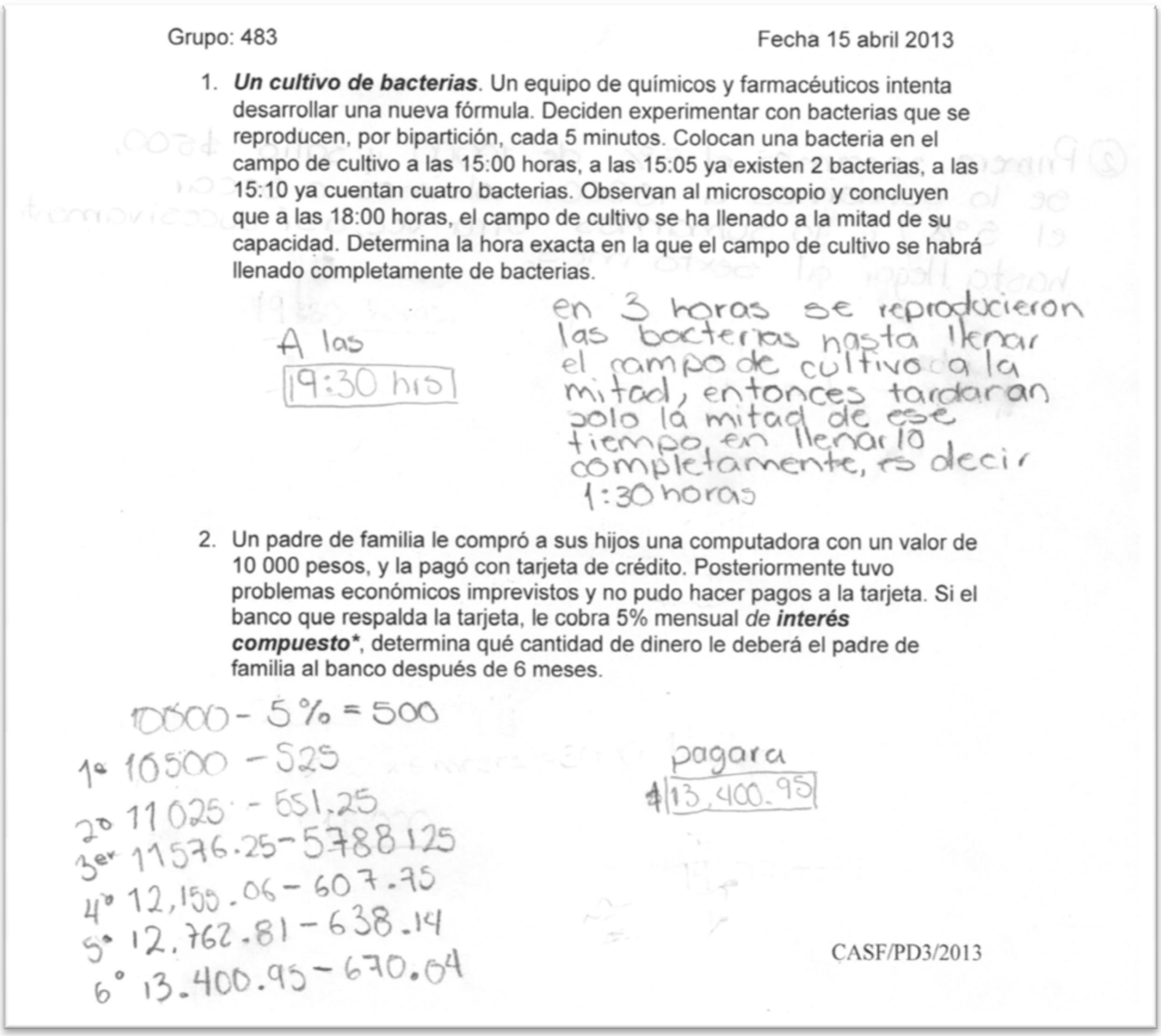
N=10 000$
C=.0500

② Pagara

No le entendi al problema

Actividad 3.2 Resolver el examen diagnóstico en parejas

A continuación los estudiantes abordan la resolución de los problemas del diagnóstico pero ahora formados *en parejas*. Se pudo observar en las diferentes *intervenciones*[10], que si bien la mayoría de los estudiantes pueden resolver exitosamente el primer problema, en parejas, muy pocos equipos logran comprender y resolver el problema que se refiere al monto de la deuda que se genera cuando se trata del interés compuesto.



Grupo: 483 Fecha 15 abril 2013

1. ***Un cultivo de bacterias***. Un equipo de químicos y farmacéuticos intenta desarrollar una nueva fórmula. Deciden experimentar con bacterias que se reproducen, por bipartición, cada 5 minutos. Colocan una bacteria en el campo de cultivo a las 15:00 horas, a las 15:05 ya existen 2 bacterias, a las 15:10 ya cuentan cuatro bacterias. Observan al microscopio y concluyen que a las 18:00 horas, el campo de cultivo se ha llenado a la mitad de su capacidad. Determina la hora exacta en la que el campo de cultivo se habrá llenado completamente de bacterias.

A las $\boxed{19:30 \text{ hrs}}$

en 3 horas se reprodujeron las bacterias hasta llenar el campo de cultivo a la mitad, entonces tardaran solo la mitad de ese tiempo en llenarlo completamente, es decir 1:30 horas

2. Un padre de familia le compró a sus hijos una computadora con un valor de 10 000 pesos, y la pagó con tarjeta de crédito. Posteriormente tuvo problemas económicos imprevistos y no pudo hacer pagos a la tarjeta. Si el banco que respalda la tarjeta, le cobra 5% mensual *de **interés compuesto****, determina qué cantidad de dinero le deberá el padre de familia al banco después de 6 meses.

10000 - 5% = 500
1° 10500 - 525
2° 11025 - 551.25
3er 11576.25 - 578.8125
4° 12,155.06 - 607.75
5° 12,762.81 - 638.14
6° 13.400.95 - 670.04

pagara
$\boxed{\$13,400.95}$

CASF/PD3/2013

Actividad 3.3 Resolver el examen diagnóstico con el grupo

[10] Comúnmente se le llama *intervención* a la puesta en práctica de la propuesta didáctica.

En la tercera actividad de esta sesión, el docente acompaña al grupo en la resolución colectiva del diagnóstico y empieza por comentar con los estudiantes acerca de las diferencias entre el modelo del *crecimiento lineal* y el modelo de *crecimiento exponencial* y las consecuencias que tiene el no comprender este último modelo o bien confundir ambos.

Una de las mayores dificultades de enseñanza y aprendizaje del tema estriba en que, en este caso, el docente no se propone descalificar ni mucho menos extinguir el modelo lineal, porque es muy útil en una gran cantidad de fenómenos, sino que su tarea es lograr que los estudiantes comprendan que ambos modelos son necesarios para modelar y comprender una gran cantidad de fenómenos que se nos presentan en la ciencia y en la vida real. Por otro lado, el estudiante debe construir este conocimiento de tal manera que sepa cuándo aplicar uno u otro modelo.

El docente se propone explícitamente, mediante el diálogo con el grupo, dejar muy claras las características del fenómeno del interés compuesto, en el que los intereses no cobrados se convierten en capital que genera nuevos intereses. Este fenómeno es nuevo para los estudiantes, pero en las intervenciones se ha notado que se sienten motivados a comprenderlo, tal vez porque alguno de sus familiares ha sufrido el problema de ver crecer exponencialmente una deuda adquirida por haber usado la tarjeta de crédito o pedido un préstamo personal, y así lo declaran en las evaluaciones que se han elaborado al respecto.

Una vez generada la necesidad de resolver el problema del diagnóstico, el docente aprovecha para desarrollar con el grupo la fórmula de interés compuesto, mediante el método de enseñanza inductivo y empleando el diálogo con la mayoría del grupo de estudiantes.

El docente utiliza los datos del problema para mediante el diálogo deducir el modelo matemático del interés compuesto.

Deducción, con el grupo, de la fórmula del modelo de Interés Compuesto

El docente informa le pide al grupo su atención y participación para que todos puedan comprender y desarrollar el modelo del *interés compuesto*.

Una representación algebraica para comprender el modelo de interés compuesto podría ser:

$$P_t = P_{t-1} + P_{t-1}\,(i) = P_{t-1}\,(1 + i) \qquad (1)$$

¿Qué creen que significa la i? El interés a que se ha prestado el dinero. *Muy bien*.

¿Qué significado tienen P_t y P_{t-1}? La P_t es lo que se debe hoy *¿y la P_{t-1}?*

Sí, P_{t-1} representa lo que se debía en el periodo pasado. El periodo puede ser anual, semestral, mensual, o diario, según se acuerde entre las partes.

En las tarjetas de crédito, ¿cómo es?

Mensual, de acuerdo.

¿Quién me dice cómo podemos interpretar coloquialmente la expresión (1)?

"Lo que me debes ahora es igual a lo que me debías en el periodo anterior, más los nuevos intereses que ha causado la cantidad que me debías en este periodo".

Entonces esta sencilla relación expresa lo que es el *interés compuesto*, *¿es así?, ¿todos lo entendemos? Tiene sus ventajas expresarlo en símbolos.*

Bien, seguimos.

Abordemos ahora el problema del examen diagnóstico que acaban de resolver.

D2. Un padre de familia compró a sus hijos una computadora con un valor de 10 000 pesos, y la pagó con tarjeta de crédito. Posteriormente tuvo problemas económicos imprevistos y no pudo hacer pagos a la tarjeta. Si el banco que respalda la tarjeta, le cobra 5% mensual *de **Interés Compuesto***[11]. Determina qué cantidad de dinero le deberá el padre de familia al banco después de 6 meses.

Primer período:
*El saldo **después de un período**, de acuerdo a la representación algebraica del modelo, sería:*

$P_1 = P_0\,(1 + i)$ o con los datos del problema: $P_1 = 10000(1+0.05)=10500$

Pongan mucho cuidado al escribir el porcentaje que representa al interés, es común el error de escribir 0.5 en lugar de 0.05 para anotar el 5 por ciento.

[11] En el Interés Compuesto, los intereses no pagados generan nuevos intereses (se pagan intereses sobre los intereses).

*Analicemos ahora el **segundo periodo**:*

¿Cuál sería el saldo, después de dos meses, de acuerdo con la representación algebraica que hemos adoptado?

$P_2 = P_1 (1 + i)$

*Pero P_1 ya se tiene, entonces se puede **sustituir**:*

$P_2 = P_1 (1 + i) = P_0 (1 + i)(1 + i)$ con los datos sería: P_2=10500(1.05)= 11025

$P_2 = P_0 (1 + i)^2$ $P_2 = 10000(1.05)^2 = 11025$

Quiero que si hay alguno de ustedes que no lo haya entendido, lo diga para aclararlo.

Bien, aclarada la duda podemos continuar.

¿Alguno de ustedes ya me puede decir hacia qué expresión o modelo vamos?

Es decir, ¿cuál será la forma de calcular rápidamente la deuda que se genera a los seis meses?

*Bien, analicemos ahora el **tercer periodo**:*

¿Cuál sería el saldo, después de tres meses, de acuerdo con la representación algebraica que hemos adoptado?

$P_3 = P_2 (1 + i)$

Pero P_2 ya se tiene, entonces se puede sustituir:

$P_3 = P_2 (1 + i) = P_0 (1 + i)^2(1 + i)$ con los datos sería: P_3=11025(1.05)= 11576.25

$P_3 = P_0 (1 + i)^3$ $P_3 = 10000(1.05)^3 = 11576.25$

¿Dudas?

¿Alguno de ustedes ya me puede decir hacia qué expresión o modelo vamos?

¿Cuál será la forma de calcular rápidamente la deuda que se genera a los seis meses?

$P_6 = P_0 (1 + i)^6$ $P_6 = 10000(1.05)^6 = 13400.95$

Lo lograron. Me da gusto, han observado que el exponente de (1 + i) es igual al número de períodos, así que después de 6 períodos, le corresponderá el exponente 6 para poder *calcular el total de la deuda. De la misma forma, el exponente 3 corresponde al total de la deuda contraída después de 3 períodos, por lo que podemos concluir que:*

El saldo después de n períodos es: $\boldsymbol{P_n = P_0(1+i)^n}$

en donde,

$\boldsymbol{P_0}$ *es el capital o saldo inicial.*

$\boldsymbol{i}$ *es la tasa de interés expresada en decimales.*
$\boldsymbol{n}$ *es el número de períodos.*
$\boldsymbol{P_n}$ *es capital p saldo después de n períodos.*

Escriban una nota breve acerca de lo que aprendieron en esta sesión, lo que piensan ahora de las fórmulas matemáticas (si cambió o no cambió su valoración de ellas), y guárdenla en su portafolio como evidencia.

No olviden trabajar en la ***Tarea 4****, antes de la próxima clase. Es muy importante trabajar en los ejercicios porque ayudan a afirmar los conocimientos adquiridos.*

También deben agregar el trabajo que realicen en la tarea 4, como parte de la evidencia en su portafolio de evaluación.

También hagan un breve relato acerca de:

- *Cómo se sintieron durante los diferentes momentos de la clase.*
- *Cómo fue su participación al resolver el examen diagnóstico en parejas.*
- *Cómo fueron comprendiendo la expresión matemática del modelo para el interés compuesto.*

Agreguen este relato y con las anotaciones pertinentes a su portafolio.

Sesión 4: Funciones exponenciales

Actividad 4.1 Resolución de dudas y recapitulación

Calcular el monto los intereses obtenidos de $200 al 5% de interes anual durante 10 años.

$D=C(1+i)^n$

$D=200(1+10)^{10}$ 0.05

$D=518.748492$

¿Qué interes producirán $300 invertidos 4 años al 7% de interes compuesto anual,

$D=C(1+i)^n$

$D=400(1+7) \longrightarrow 300(1+0.07)^4$

$D=524.318404$

Un auto cuesta $300 000 y se quiere vender 8 años despues, se ha de valuado de su precio original 7% anual ¿cuánto cuesta el día que lo quiere vender?

$D=C(1-i)^n$

$D=300\,000(1-7)^{8.}$

$D=279\,000$ 0.07

NO

Una lavadora cuesta 2500 y se devalua al 3% anual ¿cuanto costara en 8 años?

$D=C(1-i)^n$

$D=2500(1-3)^8$ 0.03

$D=1959.3583$

Evidencia:

Esta evidencia corresponde a un estudiante del periodo 2014_2

El docente analiza las dudas que presentan los estudiantes y las resuelve con la ayuda del equipo o del grupo mediante el diálogo, en busca de la comprensión de los problemas o conceptos, en muchas ocasiones plateándoles preguntas que los lleven a reflexionar acerca de lo que no han estado considerando, o con un problema similar pero más sencillo. Finalmente buscará que el grupo establezca las conclusiones y aprendizajes que se desprendieron de las dudas y los errores de la tarea 4.

El papel del docente es muy importante en este tipo de actividades de la secuencia, se sugiere que se esfuerce por asesorar a los estudiantes, sin llegar a resolverles el problema, contestando a sus dudas con entusiasmo, tratando de motivarlos para que ellos encuentren la solución y que sientan que es un logro del equipo y no del docente. En otras palabras el docente asesora a los diferentes equipos de diferente manera, pero siempre en la ZDP, buscando que justifiquen los pasos que dan hacia la solución y que después de resolverlo reflexionen acerca de cómo lograron hacerlo, cuál era el obstáculo o errores que les impedían llegar a acuerdos o a la solución o soluciones.

Los siguientes son ejemplos de preguntas que el docente puede ocupar al asesorar a los equipos:

¿Cuál es el concepto principal que buscamos aprender?

¿Cuál es el lema que hemos adoptado?, ¿cómo se relaciona con el concepto aprendido con el problema que nos ocupa?

¿Crees que falta un dato?, ¿qué pasa si tú lo propones?

Actividad 4.2 Resolución de problemas (pp. A21-A22)

A continuación se presenta la evidencia del trabajo de los estudiantes 2014_2 que corresponde a la actividad 4.2.

Una compañía que vende café al consumidor tenía instaladas, al final del año 2008, sesenta franquicias en la ciudad. Su objetivo es crecer al 7% anual en forma sostenida. *¿Cuántas franquicias* deberán tener en el año 2015 si realizan su propósito?

C = 60 franquicias → 2008
7% anual
↓
7 años

$D = C(1+i)^{n}$

$D = 60(1+0.07)^{7}$

$D = 96.3468$

R = 96 franquicias

A causa de la inflación, 4% anual, el poder de compra del salario decrece. Si en este año se pueden comprar 700 despensas con una cierta cantidad de dinero. *¿Cuántas despensas* se podrán comprar con ese dinero dentro de 10 años, si se continúa con esa inflación?

4% anual
700 despensas = $
10 años

R = 465 despensas

$V = C(1-d)^{n}$

$V = 700(1-0.04)^{10}$

$V = 465.3828$

Se ha determinado que una sustancia ajena al organismo, se elimina por *excreción* a razón de 5.5% cada hora.

A) *¿Qué porcentaje de la sustancia* quedará en el organismo después de 6 horas?

B) *¿Qué porcentaje de la sustancia* quedará en el organismo después de 24 horas?

a) 5.5% x hora
6 horas
100 ml de sustancia

$V = C(1-d)^{n}$

$V = 100(1-0.055)^{6}$

V = 71.2181 % de sustancia

b)
24 horas
100 mil de sustancia

$V = C(1-d)^{n}$

$V = 100(1-0.055)^{24}$

V = 25.7254 % de sustancia

CASF/Tesis/2014

Actividad 4.2 Reflexión individual y colectiva y Tarea 5 (pp. A23-A24)

Problemas de interés capitalizable

1) María deposita $50,000 en una institución financiera que ofrece una tasa del 8% capitalizable cada mes. Determina el valor acumulado de la inversión al finalizar el mes 10 del depósito.

$50000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{10}$

C: $50,000

i: 0.08 (8%)

t: 10

$D = C(1+i)^t$

$D = 50,000(1+0.08)^{10}$

$\boxed{D: \$\,107,946.2499}$

2) Determina el capital acumulado de una inversión de $120,000 al término de 24 meses si se le aplica una tasa de interés del 3% trimestral.

C: $120,000

i: 0.03 (3%)

n: 8

a: 24

$V_F = V_p\left(1+\frac{i}{n}\right)^{(n)(a)}$

$V_F = 120,000\left(1+\frac{0.03}{8}\right)^{(8)(24)}$

$\boxed{V_F: \$\,246,200.2202}$

$120000\left(1+0.03\right)^{8}$

3) El "Banco Tlalpan" aplica una tasa de interés del 6% a inversión semestral. Pola deposita $120,000 pesos a un plazo de 2 años. Al término de un año, el banco decide cambiar la tasa al 6.5% ¿Qué capital recibirá después de los dos años?

$120000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{2}\left(1+\frac{0.065}{2}\right)^{2}$

C: $120,000

i_1: 6%

i_2: 6.5%

a: 24 (2 años: 24 meses)

n: 4

$V_F = V_p\left(1+\frac{i}{n}\right)^{(n)(a)}$

$V_{F_1} = 120,000\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{(2)(12)}$

$V_{F_1} = \$\,243,935.2928$

$V_{F_2} = \$\,243,935.2928\left(1+\frac{0.065}{2}\right)^{(2)(12)}$

$\boxed{V_{F_2}: \$\,525,576.6796}$

Interés compuesto MATEMÁTICAS

1.- ¿Cuánto se deberá pagar a un banco por un xbox de $7,000 a 4 meses con un interés compuesto del 13 %?

Inicio	1 mes	2 mes	3 mes	4 mes
$7,000	$7,000(1+0.13)¹=	$7,000(1+0.13)²=	$7,000(1+0.13)³=	$7,000(1+0.13)⁴=
	$7,910	$8,938.3	$10,100.279	$11,413.31527

2.- ¿Cuánto se deberá pargar a un banco por una televisión de $15,000 a 4 meses con un interés compuesto del 15 %?

Inicio	1 mes	2 mes	3 mes
$15,000	$15,000(1+0.15)¹=	$15,000(1+0.15)²=	$15,000(1+0.15)³=
	$17,250	$19,837.5	$22,813.125

4 mes
$15,000(1+0.15)^4=$
$26,235.09375

Devaluación

1.- ¿Cuánto valdrá mi coche si costó $135,000 en 10 años si cada año se devalúa un 9 %?

$135,000 (1 - 0.09)^{10}=$
$52,571.17595

2.- ¿Cuánto valdrá un iphone de $10,600 en 4 años si se devalúa un 15 % cada año?

$ ~~16,600~~ $(1 - 0.15)^4=$ $5,533.26625
$10,600

Sesión 5: Problemas con funciones exponenciales

Actividad 5.1

Problemas:

1) María deposita \$50,000 en una institución financiera que ofrece una tasa del 8% capitalizable cada mes. Determina el valor acumulado de la inversión al finalizar el mes 10 del depósito.

$$50000\left(1+\frac{.08}{12}\right)^{10} = \$53\,435.1320^{00}$$

2) Determina el capital acumulado de una inversión de \$120,000 al término de 24 meses si se le aplica una tasa de interés del 3% trimestral.

$$120000(1+0.03)^{8} = \$\,15201.2409^{0}$$

sugiero tachar, en lugar de borrar para que el error se vea y se pueda corregir

Examen: El "*Banco Tlalpan*" aplica una tasa de interés del 6 % a inversión semestral. Pola deposita 120 000 pesos a un plazo de 2 años. Al término de un año, el banco decide cambiar la tasa al 6.5%, ¿Qué capital recibirá después de los dos años?

$$120\,000\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2} = \$127\,308^{00}$$

$$127308\left(1+\frac{.065}{2}\right) = \$135\,717.4891^{00}$$

CASF/2014 Página 3

Etapa 3. Combinación de exponenciales y logaritmos

Sesión 6: Problemas con exponenciales y logaritmos

Actividad 6.1. Evidencia.

- $\log_3 24 = ?$

a) $\log_3 24 = x \rightarrow 3^x = 24$

$\log_{10}(3^x) = \log_{10} 24$

$x \log 3 = \log 24$

$$x = \frac{\log 24}{\log 3} = \frac{1.3802}{0.4772} = \boxed{2.8922}$$

$3^{2.8922} = 23.9844 \approx 24$

$\log_{10} 24 = \log_{10} 6 + \log_{10} 4$

$\log_{10} 24 = 0.7782 + 0.6020 = \boxed{1.3802}$

$\log_{10} 6 = \log_{10} 3 + \log_{10} 2$

$\log_{10} 6 = 0.4772 + 0.3010 = \boxed{0.7782}$

b) $\ln 3^x = \ln 24$

$x \ln 3 = \ln 24$

$$x = \frac{\ln 24}{\ln 3} = \frac{3.1780}{1.0986} = \boxed{2.8927}$$

$3^{2.8927} = 23.9976 \approx 24$

Actividad 6.2. Evidencia.

1. Supongamos que desea aumentar en forma *continua* la *producción de energía eléctrica al 4% anual por el tiempo que sea necesario.* a) ¿cuántos años se necesitarán para duplicar la producción de electricidad? 17.67 años b) ¿y para triplicarla?______. Muestren aquí sus procedimientos.

$2 = (1+i)^n$ $\quad \log(2) = \log(1.04)^n$ $\quad n = 17.67$

$2 = (1+0.04)^n$ $\quad \log(2) = n\log(1.04)$

$2 = (1.04)^n$ $\quad n = \frac{\log(2)}{\log(1.04)}$

2. Mi auto costó inicialmente 150 000 pesos. Si la expresión que determina su depreciación comercial *continua* es $A_0\, e^{-0.14t}$ (t está en años) y A_0 es el valor inicial.

$A(t) = A_0 e^{-0.14(t)}$ $\quad A(5) = 150\,000\,(0.49)$

$A(5) = 150\,000\, e^{-0.14(5)}$ $\quad \underline{A(5) = 74\,487.79}$

$A(5) = 150\,000\, e^{-0.7}$

a) ¿Cuál será su valor en 5 años?

b) ¿Dentro de cuánto tiempo tendrá un valor de 60 000 pesos? (quiero venderlo en ese año)

$60\,000 = 150\,000\, e^{-0.14(t)}$ $\quad \ln(0.4) = -0.14(t)$ $\quad \underline{t = 6.5449}$

$0.4 = e^{-0.14(t)}$ $\quad \frac{\ln(0.4)}{-0.14} = t$

$\ln(0.4) = \ln(e^{-0.14(t)})$

$\ln(0.4) = -0.14(t)\ln e$

3. Si la población de un país crece al 2.5% anual en *forma continua*, ¿en cuántos años se duplicará?

$2 = 1\,(1+0.025)^n$ $\quad \frac{\log(2)}{\log(1.025)} = n$

$\log(2) = \log(1.025)^n$ $\quad 28.071 = n$

$\log(2) = n\log(1.025)$

4. La población de una localidad en Oaxaca era de 3 000 habitantes en 1998 y en 2004 era de 4 500. Si el crecimiento se dio con una *tasa relativa constante*, determina dicha tasa.

Nota: Recordar $P(t) = P_0\, e^{kt}$

¿Qué datos conoces? ¿Qué te piden determinar?

P = Habitantes en 2004 que son 4500

t = tiempo, son 7 años

P_0 = Habitante en 1998, que son 3000

5. La población de palomas se considera actualmente un problema para las ciudades. Si en una localidad hay 5 000 palomas y su población crece exponencialmente en forma *continua* a una *tasa relativa constante* de 5%. ¿En cuántos años la población será de 8 000 palomas?

$\frac{8000}{5000} = \frac{\cancel{5000}}{\cancel{5000}}(1+0.5)^n$

$1.6 = (1.05)^n$

$\log(1.6) = \log(1.05)^n$

$\log(1.6) = n\log(1.05)$

$n = \frac{\log(1.6)}{\log(1.05)} = 9.6331$

Actividad 6.3. Completar tabla con diferentes bases (trabajo individual)

Evidencia:

CASF/2013

Escribe los espacios lo que corresponda. Y determina el valor que corresponde a x. y, z, w (con 4 cifras decimales).

1. Base: *e*

Exponente	0	1	x= 1.0986	y= 1.3862	z= 1.6094	w= 2.3025
Expresión	e^0= 1	e^1 = 2.7182	e^x= 3	e^y= 4	$e^{1.6094}$ = 5	$e^{2.3025}$ = 10
Resultado	1	e	3	4	5	10

2. Base: **10**

Exponente	0	1	x= 0.3010	y=0.6989	z=1.3010	w=1.6989
Expresión	10^0= 1	10^1 = 10	10^x=2	$10^{0.6989}$ = 5	$10^{1.3010}$ = 20	$10^{1.6989}$ = 50
Resultado	1	10	2	5	20	50

3. Base: 1.07

Exponente	0	1	x= 10.2447	y=23.7876	z=44.2771	w= 57.8199
Expresión	$(1.07)^0$=1	1.07^1 = 1.07	$(1.07)^x$= 2	$1.07^{23.7876}$ = 5	$1.07^{44.2771}$ = 20	$1.07^{57.8199}$ = 50
Resultado	1	1.07	2	5	20	50

4. Base: **2**

Exponente	0	1	x= 1.5849	y= 2.3219	z=4.3219	w= 5.6438
Expresión	$(2)^0$=1	2^1 = 2	2^x= 3	$2^{2.3219}$ = 5	___	___
Resultado	1	2	3	5	20	50

5. Base: *5*

Exponente	0	1	x= 0.4306	y=1.4306	z=1.8613	w= 2.4306
Expresión	$(5)^0$= 1	5^1 = 5	5^x=2	$5^{1.4306}$ = 10	$5^{1.8613}$ = 20	$5^{2.4306}$ = 50
Resultado	1	5	2	10	20	50

A) Descubrimos que: utilizar los logaritmos es muy importante

B) Concluimos que: no se pueden utilizar diferentes tipos de logaritmos en una ecuacion

C) Lo más importante de esta actividad es:

Utilizar formulas y metodos

Sesión 7: Ley enfriamiento de los cuerpos de Newton. (LECN)

Tarea 7. Evidencia:

Ley de enfriamiento de Newton

Tarea: Problema

t (minutos)	T(°C)
0	70
5	60
⋮	
30	?

Papa

Temperatura Ambiente 25°C

Temperatura ambiente

$T_a = 25°C$

$T_o = 70°C$

$$T = T_a + (T_o - T_a)e^{-Kt}$$

$$T = 25°C + (70°C - 25°C)e^{-Kt}$$

$$T(t) = 45\,e^{Kt} + 25$$

$$T(5) = 60 \rightarrow 45e^{K\cdot 5} + 25 = 60 \rightarrow e^{5K} = \frac{60-25}{45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

$$\ln e^{5K} = 5K = \ln\left(\frac{7}{9}\right) \rightarrow K = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{7}{9}\right) = -0.0502$$

$$\boxed{K = -0.0502}$$

$$\boxed{T(t) = 45e^{-0.0502(t)} + 25}$$

t	T (°C)
0	70
5	60
10	52.23
15	46.19
20	41.48
25	37.82
30	34.98
35	32.76
40	31.04
45	29.70
50	28.65
55	27.84
60	27.21
65	26.72
70	26.33
75	26.04
80	25.81
85	25.63
90	25.49
95	25.38
100	25.29
105	25.23
110	25.17

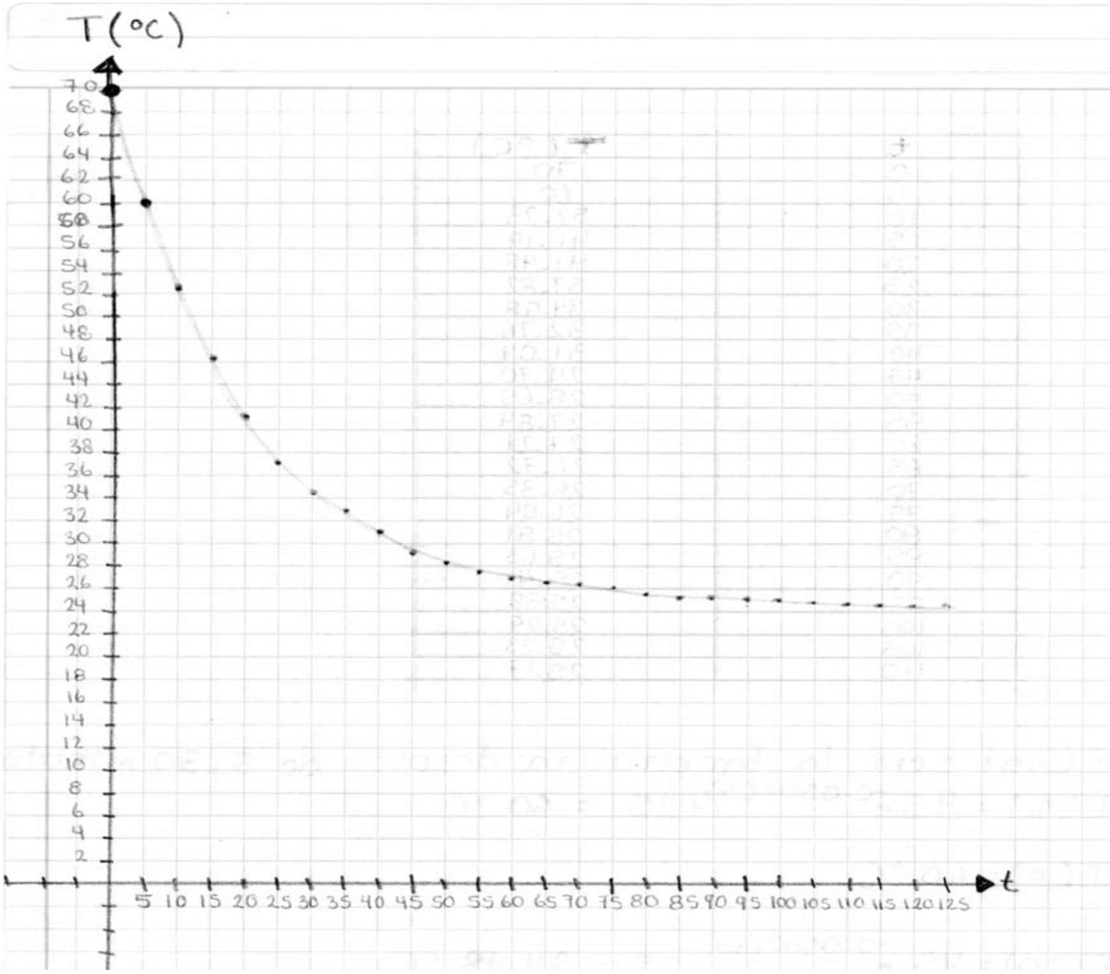
¿Cual será la temperatura despues de 5, 30 minuto

$T(5) = 45e^{-0.0502(5)} + 25 = 60\ °C$

$T(5) = 60\ °C$

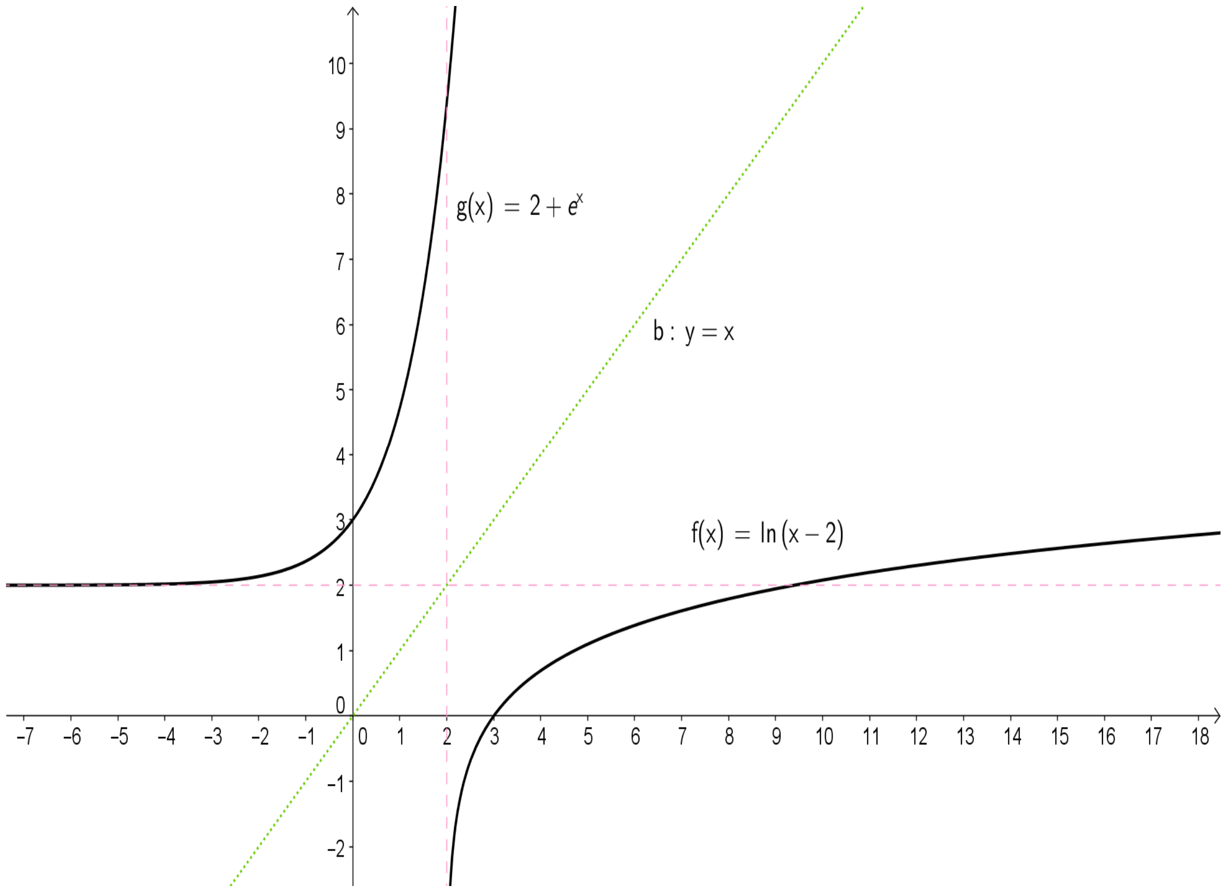
$T(30) = 45e^{-0.0502(30)} + 25 = 34.98\ °C$

$T(30) = 34.98\ °C$



La mayoría de los estudiantes no resolvieron esta tarea. Pero tres o cuatro personas por cada grupo la resolvieron correctamente y la pudieron explicar al resto de los estudiantes de su grupo.

Sesión 8: Función Inversa



Esta gráfica presenta un ejemplo de dos funciones que son inversas y que los estudiantes deducen en clase y que luego trabajan con GeoGebra para reforzar el concepto.

Ejemplo tipo: Sea $\mathbf{f(x)} = e^{ax}$ donde $\boldsymbol{a} \neq 0$ y se te pide hallar la expresión de *la función inversa de f(x).*

¿Cómo procedemos? ¿Por dónde empezarían?

Escribimos $w = e^{ax}$

De acuerdo, entonces, ¿sabemos que la inversa de una función exponencial es una función de tipo?

Tiene que ser una logarítmica.

Muy bien. Así, que en la expresión w= e^{ax} *se toma logaritmo natural; ¿cómo queda la expresión anterior?*

$\ln(w) = \ln(e^{ax})$

¿Y ahora, cómo van a continuar con el proceso?

Para el siguiente paso les sugiero aplicar una propiedad de los logaritmos que ya nos ha resultado muy útil. ¿Cuál será esa propiedad?

$\ln(a^n) = n \ln(a)$

Muy bien. Entonces, ¿cómo queda la expresión que nos interesa después de aplicar esta propiedad?

$\ln(w) = ax\,[\ln(e)]$

Pero, ¿recuerdan cuál es el valor de ln(e)?

Así es: ln(e)=1 ¿Por qué?

Y llegamos a que $\ln(w) = ax$.

Correcto, ahora, ¿qué nos falta?

Despejar x

Y queda:

$$x = \frac{\ln(w)}{a}$$

*Recuerden que a ≠0. Es decir, que la función inversa de **f(x)=** e^{ax} ¿es?*

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)}{a}$$

¿Cómo pueden verificarlo?

Probando si se cumple que $f(f^{-1}(x)) = x$, para un valor particular de x.

Muy bien, y además pueden usar la calculadora para hacerlo.

¿Qué valor proponen para el parámetro a?

$a = -2$

*¿Puede **a** tomar el valor cero?*

No!

¿Por qué? ¿Qué pasaría?

La función inversa tiene a la a en el denominador y la división por cero no está definida.

Muy bien, y para la x, ¿qué valor proponen para comprobar?

$x=3$

Bueno. Aceptemos las dos propuestas, entonces: a= -2; x=3

Ahora, por favor calculen f(3) si f(x)= e^{-2x}

Y luego calcularán: $f^{-1}(x) = \frac{ln(x)}{-2}$

En este último caso, ¿cuál es el valor de x que ocuparán?

El valor que se haya obtenido al calcular f(3).

Muy bien, procedan por favor.

Cuando la mayoría termina, un voluntario escribe sus resultados en el pizarrón.

$f(3)= e^{(-2(3))} = 2.47875 \times 10^{-3}$
$f^{-1}(2.47875 \times 10^{-3}) = \frac{\ln(2.47875 \text{ x } 10-3)}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$

¿Se comprendió todo el procedimiento?¿Tienen dudas o algo que no está muy claro?, ¿y la comprobación, ¿todos la realizaron?, ¿Qué concluimos?

Redacten el procedimiento y lo que aprendieron y después guárdenlo en su portafolio de evidencias.

Ahora requiero nuevamente de toda su atención: ¿Cómo pueden ***probar*** *que ambas funciones son inversas?*

Si nos resulta que $f(f^{-1}(x))= x$*, para toda* x

¿Y para probar eso, necesitarán de su calculadora?

Creo que sí.[12]

Por favor procedan a evaluar $f(f^{-1}(x))$ *y luego hagan lo propio con* $f^{-1}(f(x))$

¿En ambos casos el resultado será?

x

Muy bien. Háganlo ahora, por favor.

¿Les ha quedado claro el procedimiento para obtener la inversa y el concepto de función inversa de una exponencial o logarítmica?

Reflexiona sobre lo que aprendiste y trata de relacionarlo con lo que ya sabías de las funciones inversas.

No olvides escribir un relato breve y guardarlo en tu portafolio de evidencias.

[12] Nota: Si aparece esta duda, se sugiere organizar un debate que culmine en que en el procedimiento de prueba no será necesario usar datos, sólo un poco de álgebra y las propiedades de los exponenciales y los logaritmos.

Sesión 9: Examen y evaluación individual

Evidencias:

Nombre: Wada Reyes Oscar Daniel Fecha: 31 *ene/14* ***Grupo:*** ***4*** 26

1. Si la economía de un país crece al 3.5 % anual por muchos años. ¿En cuántos años se triplicará?

Escribe tu procedimiento: $9=3(1+0.035)^x$ $3=(1.035)^x$ $\log 3 = x \log(1.035)$ $x = \log 3 / \log(1.035)$
R: 31.9350 años

2. La población de jaguares se considera actualmente en riesgo de extinción. En México hay 7 000 jaguares salvajes y su población *decrece exponencialmente* a una *tasa anual relativa constante* de 5%. ¿En cuántos años más la población será de 2 000 jaguares?

Escribe tu procedimiento:

Procedimiento atrás R: 24.4235 años

Información para ayudar a evaluar al profesor, la estrategia y los materiales empleados en el tema de exponenciales y logaritmos (las tres últimas semanas).

Por favor, responde sinceramente, gracias.

A) Completo acuerdo **B)** De acuerdo **C)** No estoy segur@ **D)** Desacuerdo **E)** Total Desacuerdo

1- El material con el que trabajaste va de lo sencillo a lo complejo: A

2- Los problemas que resolviste te resultaron interesantes: A Alguno en particular: el de la tasa de interés y los bancos

3- El profesor mostró interés en ayudarte a aprender: A

4- El nivel de dificultad de los problemas fue el adecuado para tu aprendizaje: A

5- Durante estas tres semanas te sentiste motivad@ para asistir a la clase: A

6- Lo que aprendiste en estas tres semanas te será de utilidad en el futuro: A

7- En general, esta experiencia de aprendizaje fue positiva para ti: A

Anota qué fue lo que más te gustó: los problemas de interés compuesto y capitalizable.

¿Y lo que menos te gustó?: Todo me gustó.

Por favor sugiere algo que creas que puede mejorar esta experiencia de enseñanza aprendizaje:

Nada, me gusto la estructura de la clase.

Si deseas hacer algún comentario o aclaración adicional, ocupa el reverso de la hoja. Gracias. CASF/14

Gracias por enseñarnos de matemáticas y de la autoestima.

Grupo 426-A Fecha: 25-04-14 Mat. IV. AUTOEVALUACIÓN CASF/2014

Por favor contesta con reflexión y sinceridad.

1. Los contenidos (o temas) que *menos* comprendí en este curso: racionales funciones-trigonometricas.
2. Los contendidos que *mejor* aprendí en este curso fueron: racionales; logaritmos Asintotas V. y H. Polinomios,
3. Escribe los temas del curso de *mayor a menor dificultad* (para ti) funciones trigonometricas, logaritmos inversas, funciones racionales, radicales, polinomios,
4. Lo que *menos me gustó* de este curso fue: en realidad nada.
5. Lo que *más me gustó*: todo, siento que aprendi demasiado gracias al Profesor, su forma de explicar, que nos hacia llegar temprano.
6. Mis *errores en Mat IV* son principalmente: por algunos signos de vez encuando.
7. Mis *mejores logros* en Mat IV son principalmente: aprender mucho gracias al profesor.
8. Mi *peor* experiencia en este curso fue: cuando llegaba tarde, me sentía mal.
9. Mi *mejor* experiencia: casi toda fue un curso hermoso. aprendí demasiado.
10. Me hubiera gustado que: tuvieramos una salida en grupo.
11. Mi ***autoevaluación*** para este curso es: nueve # 9
12. Los argumentos que ofrezco para sustentar esta opinión son: siento que si me esforze mucho, aparte entendia muy bien y me ayudaba hacer muchos ejercicios.

gracias por habernos soportado y enseñarnos muchos. :)

Nombre y firma: Ingrid Alexa Vizguerra Palma.

Nombre: José Piñón Alejandra Berenice Fecha: *6/mayol/13* **Grupo: *483***

Autoevaluación. TODAS LAS RESPUESTAS SON OBLIGATORIAS

¿Qué fue lo que más te gustó de ti en este curso?

Lo que más me gustó de mi durante el curso fue la responsabilidad que fui desarrollando, al igual que el compromiso por la clase, y principalmente que conseguí dejar de lado el miedo que me causaban las matemáticas y las cosas en general.

¿Qué fue lo que menos te gustó de ti en este curso?

Lo que menos me gustó fue que algunas veces no era suficiente lo que hacía, por ejemplo, que me faltaba repasar más, etc.

¿Qué fue lo que aprendiste mejor?

De matemáticas, el tema que me quedó más presente fue el primero, el que más me agradó fue el último.

¿Qué fue lo que aprendiste menos o que no aprendiste?

De matemáticas, el segundo tema fue el que me causó problemas al principio, pero en general todos los temas me quedaron claros

Escribe la calificación que mereces y el por qué:

De calificación me pondría un 9 porque he logrado un progreso muy grande en cuanto a compromiso, además de que me siento mucho más segura ahora.

Capítulo 5

Conclusiones

Las conclusiones a manera de conjeturas y algunas alternativas para la continuación de este trabajo.

5.1 Algunas conjeturas que podrían servir de conclusiones

La propuesta didáctica sugerida en este trabajo genera, en algunos de los estudiantes que la experimentan:

- Actitudes positivas, hacia el tema y hacia las matemáticas en general, como puede observarse en las evaluaciones acerca de la estrategia y la metodología empleada, llevadas a cabo al final de la secuencia.
- La mayoría de los estudiantes declaran haber mejorado en su Autoestima, Autorregulación y en la escucha y respeto hacia los demás. Ya que tienen que justificar o argumentar sus propuestas durante el trabajo en clase y poder negociar los significados, métodos o aprendizajes que proponen.
- Cuentan con más herramientas para ejercer ciudadanía al comprender que los fenómenos que pueden modelarse mediante exponenciales son muy frecuentes y por ello es necesario poner cuidado, si no quieren sufrir sorpresas desagradables.
- Aprendizajes más duraderos, significativos y transferibles que con la enseñanza habitual que empleaba antes de MADEMS. Los resultados de una prueba efectuada a los estudiantes hacia el final del semestre 2014_2, así lo indican. Los estudiantes aprendieron con la propuesta didáctica en enero de 2014, y en abril pudieron resolver problemas no triviales, sin aviso de examen y que también se aplicaron a profesores de matemáticas en ejercicio en los Estados Unidos, todo lo cual se reporta en Strom A.D. (2006). Al final de este capítulo proporciono algunos de los exámenes resueltos por mis estudiantes del CCH, como evidencia.

Se cumplió con el propósito de enriquecer las formas de aprender y de enseñar este importante tema. En la bibliografía consultada no he podido encontrar otro enfoque parecido o similar.

Es muy difícil reportar todos los sentimientos, afectos y demás aspectos humanos que se dieron durante las intervenciones en las que puse en práctica y traté de mejorar la presente propuesta didáctica, pero creo que los recordaré por mucho tiempo.

Todo lo anterior no significa de ninguna manera que todos los estudiantes hayan logrado el manejo del tema, ni que se pretenda que sólo con esta secuencia, metodología o estrategia puedan lograrse resultados significativos o mejores a los tradicionales.

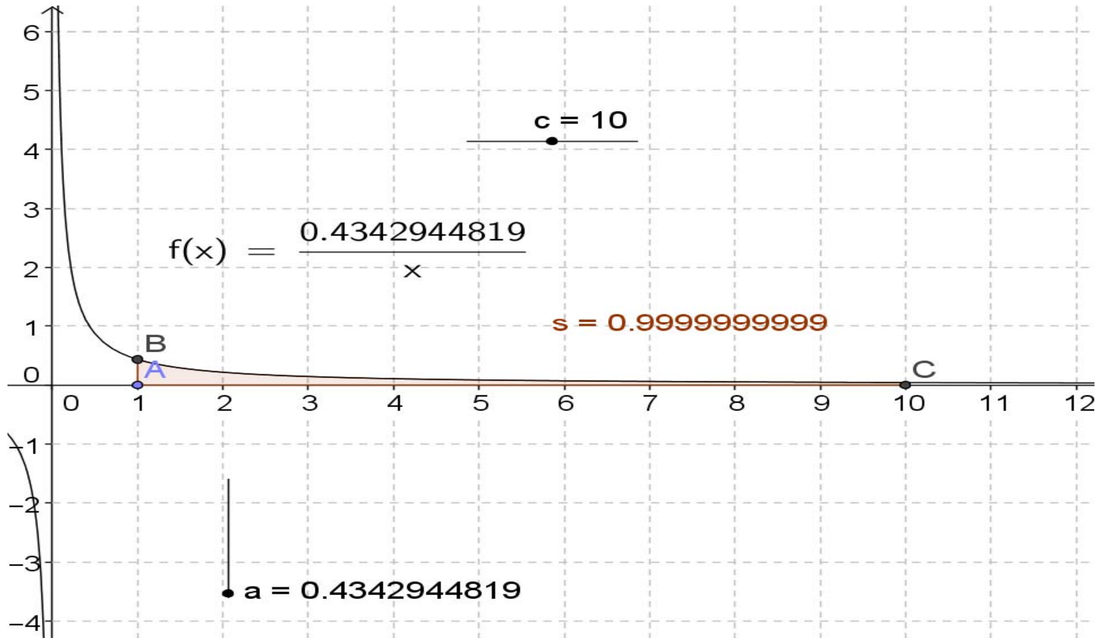
Un logro de la propuesta fue que la evaluación continua se transformó, de ser un punto de conflicto, en oportunidades o experiencias de aprendizaje valiosas tanto para el estudiante como para el docente.

Por último debo reportar los aprendizajes que logré al participar en estas intervenciones. Entre otras cosas aprendí a escuchar, a ser más flexible, un poco más paciente, a "*entrar en la conversación*[13]" y en particular, a considerar en cada clase como primordiales, los conocimientos y los esquemas previos de los estudiantes, y a permanecer con cada equipo en la ZDP. Aprendí y practiqué el hábito de considerar y reflexionar sobre los errores usuales que cometen los aprendices y con ellos sobre la dificultad pedagógica de los contenidos, antes de planificar una propuesta didáctica o un tema específico de una asignatura.

[13] Frase que nos obsequió la Doctora Alejandra García Franco al terminar su curso en MADEMS.

5.2 Alternativas al enfoque empleado en la SDP.

Empezar por la definición de logaritmo[14] y usar GeoGebra para calcular el área bajo la curva sin mencionar los límites, ni la integral definida.



En la gráfica, construida con GeoGebra por el autor, se muestra la función necesaria para que sirva de base para calcular el logaritmo decimal de cualquier número positivo.

Este enfoque podría usarse con provecho en la asignatura de cálculo diferencial e integral para reactivar los conocimientos previos relativos al logaritmo y luego a la exponencial.

También he considerado que sería posible abordar este tema a partir de la construcción de tablas de valores que provengan de funciones polinomiales, racionales y exponenciales para valores enteros de la variable y luego construir las gráficas. A continuación examinar los valores de la función construyendo las diferencias, diferencias divididas o los cocientes de dichos valores con el objetivo de intentar reconstruir el modelo que represente simbólicamente a la función.

[14] Véase por ejemplo, Thomas(1965), Cálculo con Geometría Analítica.

5.3 Evidencia de los resultados de aprendizaje de algunos estudiantes que participaron en la propuesta didáctica

Funciones Exponenciales. Nombre: Quetzalli Ortiz A. Grupo: 426 A CASF/2014

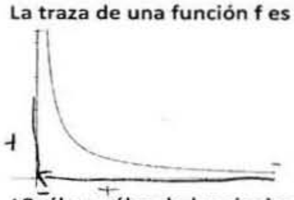
1. *El modelo que describe el número de bacterias en un cultivo, después de t días, ha sido actualizado de $P(t) = 7\,(2^t)$ a $Q(t) = 7\,(3^t)$*

Escoge la opción que concuerda con tu conclusión acerca de este cambio de modelo y justifica tu elección en el espacio proporcionado.

a) El número final de bacterias será tres veces el del valor inicial en lugar de dos veces esa cantidad.
b) El número inicial de bacterias es 3 en lugar de 2.
c) El número de bacterias se triplica cada día, en lugar de duplicarse diario.
d) La razón de crecimiento de las bacterias en el cultivo es de 30% diario, en lugar de 20% diario.
e) No hay datos suficientes para llegar a conclusiones válidas.

La verdad no se, pero para mi esta más lógica

2. **La traza de una función f es la que se muestra en la figura siguiente:**



¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones describen el comportamiento de f?

I. **Conforme x se aproxima a 0, el valor de f se incrementa.**
II. **Conforme el valor de x se incrementa, el valor de f se aproxima a cero.**
III. **Conforme el valor de x se aproxima a 0, el valor de f se aproxima a 0.**

Opciones:

a) Solo **I** b) Solo **II** c) Solo **III** d) **I y II** e) **II y III**

Subraya una opción y justifícala: Porque cuando x es mayor, f disminuye y cuando x es menor f aumenta

3. **Supongamos que una substancia radiactiva está decayendo exponencialmente de modo que hay 20 gramos de ella a las 12:00 del día y 10 gramos a la 1 P.M.**

a) ¿Cuántos gramos de sustancia habrá a las 2 p. m.? 5 gr.
b) ¿Cuántos gramos habrá a las 12:30 horas de ese día? 14.1421 gr.

Por favor: en la parte posterior de la hoja explica cómo lo obtuviste y escribe el procedimiento o justifica por qué no puede calcularse.

$P = P_0\, e^{kt}$
$10 = 20e^{k(1)}$
$\frac{10}{20} = e^{k1}$
$\ln\frac{10}{20} = k1$
$\ln\frac{10}{20} = k$
$k = -0.6931471806$

$P_1 = 20e^{(k)(2)}$
$P_1 = 5$
$P = 20e^{(k)(0.5)}$
$P = 14.1421$

Funciones Exponenciales. Nombre: Alvarado Mendoza Fco Javier **Grupo:** 402-A **CASF/2014**

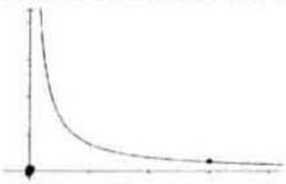
1. ***El modelo que describe el número de bacterias en un cultivo, después de t días, ha sido actualizado de $P(t) = 7\ (2^t)$ a $Q(t) = 7\ (3^t)$***

Escoge la opción que concuerda con tu conclusión acerca de este cambio de modelo y justifica tu elección en el espacio proporcionado.

a) El número final de bacterias será tres veces el del valor inicial en lugar de dos veces esa cantidad.
b) El número inicial de bacterias es 3 en lugar de 2.
c) El número de bacterias se triplica cada día, en lugar de duplicarse diario.
d) La razón de crecimiento de las bacterias en el cultivo es de 30% diario, en lugar de 20% diario.
e) No hay datos suficientes para llegar a conclusiones válidas.

pues es por que el crecimiento es exponencial.

2. **La traza de una función f es la que se muestra en la figura siguiente:**



¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones describen el comportamiento de f?

I. **Conforme x se aproxima a 0, el valor de f se incrementa.**
II. **Conforme el valor de x se incrementa, el valor de f se aproxima a cero.**
III. **Conforme el valor de x se aproxima a 0, el valor de f se aproxima a 0.**

Opciones:

a) Solo **I** b) Solo **II** c) Solo **III** d) **I y II** e) **II y III**

Subraya una opción y justifícala: La I y la II son correctas, pero la III si la graficamos nos daría una recta.

3. **Supongamos que una substancia radiactiva está decayendo exponencialmente de modo que hay 20 gramos de ella a las 12:00 del día y 10 gramos a la 1 P.M.**
a) ¿Cuántos gramos de sustancia habrá a las 2 p. m.? 5.0313 gramos
b) ¿Cuántos gramos habrá a las 12:30 horas de ese día? 14.1649 gramos

Por favor: en la parte posterior de la hoja explica cómo lo obtuviste y escribe el procedimiento o justifica por qué no puede calcularse.

$T(t) = 20 + [10-20]\,e^{-k60}$

$T(t) = 20 - 10 \cdot e^{-k60}$

$f(x) = 20 - 10\,e^{-k60}$

$T(t) = T_a + [T_0 - T_a]\,e^{-kT}$ $P = P_0\,e^{kt}$

$$P = P_0 e^{kt}$$

$$10 = 20e^{k60}$$

$$\frac{10}{20} = e^{k60}$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = k60$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{60} = k$$

$$k = -0.01155$$

$$x_1 = 20e^{-0.0115(120)} = 5.0315$$

$$x_2 = 20e^{-0.0115(30)} = 14.1644$$

Bibliografía consultada

Arnett, J.J. (2008). *Adolescencia y adultez emergente. Un enfoque cultural*. Tercera Edición. México. Pearson Educación.

Ausubel D. (1977). *The facilitation of meaningful verbal learning in the classroom*. Educational Psychologist, 12, 162-178.

Ausubel, D.; J. D. Novak and H. Hanesian (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. 2a Edición. México. Trillas.

Azerêdo, T. (2003). *Comprender y Enseñar.* Sao Paulo. Grao.

Barberà, E. (1999). *Enfoques evaluativos en matemáticas: evaluación por portafolios*. En J. I. Pozo y C. Monereo (eds.). *El aprendizaje estratégico*. Madrid: Santillana.

Bruning, R. y Col. (2005). *Psicología cognitiva y de la Instrucción*, 4ª. Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN 84-205-4346-2. Cap. 14 Planteamientos cognitivos para las matemáticas.

Carretero, M. (2011). *Constructivismo y educación*. Buenos Aires, Ed. Paidós.

Chevallard, I. (2000). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires. Argentina. Editorial AIQUÉ.

Coll, C., Gotzens, C y colaboradores. (1999) *Psicología del instrucción: le enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria.* Barcelona, Horsori Editorial.

Condemarín, M. y Medina A. (2000). *Evaluación Auténtica de los Aprendizajes. Un medio para mejorar las competencias en lenguaje y comunicación*. Santiago de Chile, Ed. Andrés Bello.

Delval, J. (2000). *Aprender en la vida y en la escuela.* Madrid: Ediciones Morata.

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2006) *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida*. México: Mc Graw-Hill.

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2010) Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: Mc Graw-Hill.

Delval, J. *Ciudadanía y escuela. El aprendizaje de la participación*.

Recuperado de: http://www.ub.edu/histodidactica/images/documentos/pdf/delval.pdf

consultado el 6 de abril de 2014.

Delval, J. (enero - junio, 2013) *La escuela para el siglo XXI*. *Sinéctica.*

Recuperado de: http://www.sinectica.iteso.mx/?seccion=articulo&lang=es&id=562_la_escuela_para_el_siglo_xxi

(consultado el 6 de abril de 2014).

Eggen D., Kauchack P. (2009). *Estrategias Docentes*. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades del pensamiento. Tercera Edición. México. FCE.

Ferreiro, R. (2009). *El ABC del aprendizaje cooperativo: trabajo en equipo para aprender y enseñar*. 2ª Ed. México: Trillas.

Flores, H. (2009). *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula*. Educación Matemática, vol. 21, volumen 2, agosto 2009. P. 117-142. Santillana. México.

Gómez Chacón, Inés. (2005): *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid, Narcea.

Hativa, Nira (1983). *What Makes Mathematics Lessons Easy to Follow, Understand and Remember?* The Two Year College Mathematics Journal. Vol. 14. No. 5 (Nov. 1983) pp. 398-406. Mathematical Asociation of America. Stable URL: http://www.jstor.org/stable/3026762 Accesado: 19/mayo/2014

Kilpatrick, J., Gómez, P., Rico, L. (1995): *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Kilpatrick, J., Gómez, P., Rico, L., (1995): *La Resolución de Problemas y el Aprendizaje*

Situado. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Pimienta, J. (2007). *Metodología constructivista*. Segunda edición. México. PEARSON EDUCACIÓN.

Pozo, J.I. (2008). *Aprendices y Maestros*. La Psicología cognitiva del aprendizaje. Madrid. Alianza Editorial.

Resnick y Ford (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona. Paidós.

Rico, L. (1992). *Investigaciones sobre errores de aprendizaje en educación matemática*. Universidad de Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Rogoff, B.(1993). *Aprendices del pensamiento. Desarrollo cognitivo en el contexto social.* España: Paidós.

Santrock, J. (2006) *Psicología de la Educación.* México: Mc Graw-Hill

Sierpinska, A. (2005): *Understanding in Mathematics*. Falmer Press. London.

Vygotsky, L. S. (1978): *Mind and society*. *The development of higher psychological processes*. Cambridge, Más., Harvard Universito Pres [ed. cast. : *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, trad. de S. Furió, Barcelona, Crítica, 1979]

Vygotsky, L. S. (1977): *Pensamiento y lenguaje*., trad. de M. M. Rotger, Buenos Aires, La pléyade.

Wiggins, Grant (1990). *The case for authentic assessment*. *Practical Assessment, Research & Evaluation.* Recuperado: 7 de abril, 2014 de http://PAREonline.net/getvn.asp?v=2&n=2

Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa*. 11ª Edición. México. Pearson.

Zorrilla, J.F. (2007). *Desarrollo de habilidades verbales y matemáticas I.* Primera Edición. México. AGO Editorial.

Zorrilla, J.F. (2010). *El bachillerato Mexicano: un sistema académicamente precario. Causas y Consecuencias..* Primera Reimpresión. México. UNAM.

Bibliografía (Matemáticas)

Demana, et al. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Séptima Edición. México. Pearson. Addisson Wesley.

Larson, R. (2012*). Precálculo. Octava Edición.* México. Cengage Learning Editores S.A. de C.V.

Stewart, J.et al. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Quinta Edición. México. Cengage Learning Editores S.A. de C.V.

Strom, A.D. (2006). T*he role of covariational reasoning in learning and understanding exponential functions*. Arizona State University. PME-NA 2006 Proceedings.

Recuperado de: http://www.pmena.org/pastconferences/2006/cd/TEACHER%20EDUCATION%20-INSERVICE/TEACHER%20EDUCATION%20-INSERVICE-0006.pdf . Consulta más reciente 22 sep 2014.

Swokowski, E. (2011) *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Décimo tercera Edición. México. Cengage Learning Editores S.A. de C.V.

Apéndice A

Propuesta Didáctica (PD)

Materiales de la Propuesta Didáctica para enriquecer el aprendizaje de la función exponencial

Conocimientos previos:

Para desarrollar adecuadamente esta Unidad, el estudiante debe contar con las siguientes habilidades y conocimientos previos[1].

- Realizar correctamente las operaciones básicas de la aritmética y del álgebra.
- Comprender y manejar el *concepto de Variable* y el *de Función*, incluyendo *Recorrido* y *Dominio*.
- Comprender y manejar *la notación de función*: f(x)
- Comprender y manejar las propiedades de los exponentes.

Aprendizajes esperados:

Las actividades de la Secuencia Didáctica Propuesta (SDP) deben propiciar que los estudiantes sean capaces de:

- Analizar problemas sencillos, potencialmente interesantes, que los conduzcan al planteamiento de modelos de crecimiento exponenciales, para que los resuelvan primero por tanteo y posteriormente por procedimientos algebraicos.
- Argumentar, escuchar, llegar a acuerdos y adoptar el hábito de escribir sus propuestas y conclusiones, confrontarlas con las de sus compañeras y compañeros de clase y también con las del docente, para favorecer su formación como personas y ciudadanos a través de la clase de matemáticas.

[1] En el caso de que los estudiantes no tengan los conocimientos previos, el docente los repondrá, o reactivará, sobre la marcha, por medio de la asesoría a los grupos en clase.

- Reflexionar sobre los errores y aciertos que tienen lugar en sus procesos de aprendizaje, para enriquecer las formas en las que aprenden y favorecer su reflexión y autorregulación.

Recursos materiales empleados:

- Salón de clase, mobiliario, pizarrón, plumines de colores, borrador, calculadora, impresos: actividades de trabajo en clase, documentos y tareas; computadora; Internet; GeoGebra; Cañón electrónico.

Evaluación:

Al término de cada sesión, el docente solicitará a cada estudiante, que escriba reportes breves acerca de sus emociones, errores, logros y reflexiones durante la clase, resaltando los aprendizajes logrados y cómo fueron logrados. Al término de cada una de las nueve sesiones, el estudiante deberá conservar las evidencias de su participación en su portafolio personal o bitácora. Si lo desea, el estudiante podrá autoevaluarse pero se sugiere que lo haga delante del grupo. Al finalizar la secuencia, y durante la misma el estudiante, el estudiante podrá hacer sugerencias y evaluar las actividades propuestas y al docente.

Etapa 1: Logaritmos

Tarea 1. (preparación para la SESIÓN 1 de la secuencia didáctica).

Investiga en la biblioteca, o en Internet, y luego responde a las preguntas.

Hace pocos años en el estadio Azteca de la ciudad de México vendían unas trompetas hechas de plástico, que producían un gran ruido. Luego, en el mundial de 2010 en Sudáfrica la FIFA autorizó la venta masiva de las "*vuvuzelas*" a pesar de que pueden producir niveles de 127 dB. El estadio de los Halcones Marinos de Seattle, campeones de la NFL en los Estados Unidos, tiene como "orgullo" poseer uno de los mayores registros de ruido: 137.5 dB (noviembre 2013).

¿Qué significado tiene para ti esta información?
¿Cómo se comparan los niveles de ruido mencionados con el de una aeronave?
¿Qué tan grande es el primer nivel mencionado comparado con el otro en términos de potencia?
¿Qué comentarios puedes ofrecer acerca del diseño de este estadio o de la decisión de la FIFA?
¿Cómo afecta al público y a los jugadores que juegan 8 partidos por año ahí?
¿Qué molestias, enfermedades o disfunciones puede causar el ruido en las personas?

Investiga en tu libro de Física o en alguna publicación confiable acerca del ruido, sus causas y consecuencias, cómo se mide, cómo se expresa esa medición y luego responde las siguientes preguntas:

¿Qué son los decibeles?
¿Por qué se usan logaritmos para medir el ruido?
También se usan logaritmos para medir el nivel de pH y en la escala de Richter para medir los terremotos. ¿Por qué será?
¿Qué ventaja tiene el usar logaritmos?

Prepara un resumen escrito a mano con todas tus respuestas. Servirá de evidencia y para discutir y acordar con tus compañeras y compañeros durante la siguiente clase.

SESIÓN 1 El problema del ruido ambiental en la ciudad de México y sus consecuencias para nuestra salud.

En la clase anterior a esta primera sesión de la propuesta didáctica se te solicitó trabajar en casa sobre la Tarea 1 (ver página anterior).

Actividad 1. 1. Utiliza el resumen de tu tarea previa y trabaja en pareja con otro estudiante.

Anota las principales conclusiones y aprendizajes que surgieron a partir de la investigación realizada en la tarea previa.

Por favor guarda estas evidencias en tu portafolio o sobre de evaluación y llévalas a la clase en todas las sesiones de este tema.

Actividad 1.2. Exposición de los equipos y discusión grupal.

Exposición y participación voluntaria de los equipos formados por los estudiantes respecto a la investigación previa sobre el tema del ruido.

Actividad 1.3. Problemas y preguntas acerca del ruido

Revisión del vocabulario empleado en la bibliografía o sitios que consultaron, probablemente: sonido, ruido, decibel, logaritmo…

Problemas y preguntas que se espera que surjan o que el docente induce:

¿Qué problemas de salud nos puede causar el ruido?
Si se lastima el oído medio, ¿qué le ocurre a la persona?
¿Usar continuamente los audífonos es un riesgo para la salud del usuario? ¿Por qué?
¿Cuáles son las zonas de la ciudad que padecen más el problema del ruido?
¿El ejercicio de ciertas profesiones puede causar sordera? Da ejemplos.
¿Qué son los *decibeles*? ¿Habías escuchado de ellos? ¿Los entendiste?
¿Por qué se usan los *logaritmos* para medir el ruido?

¿Por qué se usan los *logaritmos* también en el caso del *pH* y de los *terremotos*?

Actividad 1.4 Cierre

Resolver un problema acerca del ruido y los logaritmos. Ejemplo:

1. ¿Cuántos decibeles de ganancia representa duplicar la potencia de un amplificador casero?

Conclusiones obtenidas: ____

¿Qué aprendiste en esta sesión?

¿Qué es lo más importante, para ti, de lo que se discutió en la sesión?

Redacta un párrafo en el que comentes cómo te sentiste durante el desarrollo de la sesión.
Con respecto a tu investigación, ¿encontraste algo que te sorprendiera?
A partir de tu investigación y de lo que aportaron tus compañeros: Menciona una medida *profiláctica auditiva* que hayas decidido aplicar en tu persona de aquí en adelante.

Anota tus respuestas a los cinco puntos anteriores en una hoja y guárdala en tu sobre o portafolio de evaluación. Recuerda que debes colectar las evidencias de tu participación.

El docente hace una recapitulación breve resaltando aquellas aportaciones y conclusiones, de los equipos o del grupo, con el objetivo de *reestructurarlas* y hacer que sean fáciles de recordar por los alumnos, haciendo especial énfasis en que los logaritmos, por sus características, facilitan la comprensión de los fenómenos que tienen un dominio muy amplio. Por ejemplo: si se va a comparar desde el peso de una amiba hasta el de una ballena azul, sería conveniente diseñar una escala logarítmica.

Tarea 2 Terremotos, escala de Richter y revisión del resumen de logaritmos.

En este punto es necesario activar tus conocimientos previos, por favor revisa, estudia y completa el resumen sobre exponenciales y el resumen sobre logaritmos que estarás recibiendo al final de esta clase y hazlo antes de asistir a la Sesión 2.

Anota todos aquellos aspectos que no comprendas para que sea posible discutirlos y aclararlos grupalmente. Guarda tu resumen y tus anotaciones como evidencia.

Problema: Compara la potencia del temblor de la Ciudad de México en 1985 (8.25 grados en la escala de Richter) con el de la Ciudad de México ocurrido en la semana santa de 2014 (7.2 grados).

¿Qué conocimientos necesitas para poder hacer la comparación?

¿Cuántas veces más fuerte fue el de 1985 que el de 2014?

Antes de finalizar la Sesión 1, el docente proporciona a cada estudiante una copia de dos materiales: de apoyo que contienen un resumen sobre las propiedades de los exponentes y otro sobre las propiedades de los logaritmos para que los estudiantes trabajen con ellos y los completen. (ver Documento 1 y Documento 2 a continuación).

Documento 1. Exponentes: (resumen para activar tus conocimientos previos)

Gran parte de esta información ya la conoces y la has aplicado con frecuencia en Matemáticas y en Física así que se espera que te resulte útil. Comprueba y completa los ejemplos y también escribe tus comentarios pero trata de conservarla en buen estado porque la seguirás utilizando.

Si alguna definición o propiedad te parece complicada pregunta a tus compañeros o al docente. Poco a poco comprenderás mejor las propiedades de los exponentes y podrás aplicarlas al resolver problemas.

Definición 1. Para cualquier **a** ε **R (a ≠ 0)**

$\mathbf{a}^{0} \equiv 1$ Ejemplos: $10^0 = 1$; $e^0 = 1$; $\pi^0 = 1$; $4^0 = 1$; $(5.37)^0 =$ __

Comprueba todos los ejemplos en tu calculadora.

Definición 2. Para cualquier **a** ε **R (a ≠ 0)** y cualquier entero **n**:

$\mathbf{a}^{-n} = \frac{1}{\mathbf{a}^{n}}$ o bien: $\frac{1}{\mathbf{a}^{-n}} = \mathbf{a}^{n}$

Propiedades importantes:

Para cualquier **a** ε ***R (a ≠ 0)*** *y cualquier* ***n*** y ***m*** ε Z (Z: es el conjunto de los números enteros).

$\mathbf{a}^{n}\,\mathbf{a}^{m} = \mathbf{a}^{n+m}$
Ejemplos: $x^2x^3 = x^5$; $(10)(10^3) = 10^4$; $(10^{-2})(10^5) = 10^3$;escribe en tu cuaderno otros ejemplos.

$(\mathbf{a}^{n})^{m} = \mathbf{a}^{nm}$
Ejemplos: $(x^2)^3 = x^6$; $(10^3)^3 = 10^9$; $(10^{-2})^5 = 10^{-10}$; escribe en tu cuaderno otros ejemplos.

$\frac{\mathbf{a}^{n}}{\mathbf{a}^{m}} = a^{n-m}$

Ejemplo: $\frac{\mathbf{x}^{5}}{\mathbf{x}^{3}} \equiv \mathbf{x}^{5-3} = x^2$; escribe en tu cuaderno otros ejemplos similares.

Escribe más ejemplos numéricos de la propiedad que te resulte más difícil de comprender. Verifica con tus compañeros y compañeras que estén correctamente escritos y resueltos.

Asegúrate de comprender y aplicar correctamente estas propiedades y definiciones.

Anota en la parte frontal de tu sobre-portafolio de evaluación las propiedades que todavía no domines.

Documento 2 Logaritmos (resumen)

Durante el desarrollo de este tema, esta información te será muy útil. Responde las preguntas y escribe tus comentarios pero trata de conservarla en buen estado por te resultará de utilidad. Si al principio te parece complicada, no te preocupes. Poco a poco comprenderás mejor el concepto de logaritmo y podrás resolver ecuaciones y problemas interesantes aplicando el concepto y sus propiedades.

Definición: Si ***b*** es un número real, mayor que cero y ***b*** es diferente del número 1, el **logaritmo en base *b*** de un número ***a*** *es el exponente* al que es necesario elevar la base ***b*** para obtener ***a***, y se representa como $\log_b(a)$

En símbolos: Si ***b* ε *R*; *b* > *0*** y ***b* ≠ *1*** entonces:

$\log_b(a) = c \leftrightarrow b^c = a$

Nota: El símbolo ↔ se lee: ***"si y sólo si"*** y significa equivalencia.

Ejemplos: $log_5(125) = 3 \leftrightarrow 5^3 = 125$; $log_2(128) = 7 \leftrightarrow 2^7 = 128$; $\log_{10}(1000) = 3$

Si $\sqrt{10} = 3.16227766$, entonces log (3.16227766) = $\frac{1}{2}$ ¿Por qué? (____) = ________________

Ejemplo: si $\sqrt[3]{2} = 1.25992105$, entonces, $log_2(1.25992105) = \frac{1}{3}$; equivale a: ______= _________

Supongamos el problema inverso (hallar el logaritmo decimal del número 2)

log (2) = ______

Aquí el estudiante debería preguntarse: ¿A qué exponente es necesario elevar la base (10) para obtener el número 2? y la respuesta es: 0.3010 … Porque _________= __ (Compruébalo con tu calculadora).

Propiedades de los logaritmos

(Recuerda que ***b*** ε ***R*** (*b* es un número Real)***; b >0*** (b es positivo) y ***que b ≠ 1*** (*b* es diferente de 1)

$\boldsymbol{\log_b(b) = 1}$ Porque: ______ = __

Ejemplos: ***log*** (10) = 1; ***ln***(e) = 1; $\boldsymbol{\log_2(2) = 1}$

Nota: el número e = 2.71828…

Compruébalo y escribe más ejemplos similares en tu cuaderno.

$\boldsymbol{\log_b(1) = 0}$ ej. $\boldsymbol{\log_3(1)} = 0$; $\boldsymbol{\log_5(1)} = 0$; Porque: ____ = __ ; ____ = __ ; ____ = __

Compruébalo y escribe más ejemplos en tu cuaderno.

$\log_b(b^x) = x$ Porque: ___ = __

Ejemplo: ***$\log_7(7^{4.1})$=*** 4.1; $\log(10^{3.4})=3.4$; $\ln(e^2) = 2$; $\log(100) = \log(10^2) =$ __

Compruébalo y escribe más ejemplos en tu cuaderno.

$b^{\log_b(a)} = a$

Esta propiedad nos indica que logaritmo y exponencial son funciones inversas.

Ejemplos. $5^{\log_5(125)} = 125$; $3^{\log_3(9)} = 9$; $e^{\ln(3)} = 3$; $\ln(e^{4x}) = 4x$

Compruébalo y escribe otros 4 ejemplos similares en tu cuaderno después de comprobarlos.

$\log_b(a\times c) = \text{logb}_a(a) + \log_b(c)$

"*El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores del producto*".

Escribe algunos ejemplos en tu cuaderno.

$\log_b(a\div c) = \log_b(a) - \log_b(c)$; c debe ser diferente de cero: **$c \neq 0$;** ¿Por qué?______________

"*El logaritmo de un cociente es igual a restar del logaritmo del dividendo, el logaritmo del divisor*".

Escribe algunos ejemplos en tu cuaderno.

$\log_b(a^x)= x \log_b(a)$

"*El logaritmo de una potencia es igual a multiplicar el exponente por el logaritmo de la base*"

Ejemplo: $\log(\sqrt{2}) = \log(2^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log(2) = 0.1505\ldots$

Compruébalo cada paso con tu calculadora (cuidado con los paréntesis) y luego escribe más ejemplos similares en tu cuaderno.

Cambio de base: $\log_b(a)=\frac{\log(a)}{\log(b)}$

O bien: $\log_b(a)=\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$

Ejemplo: $\log_3(30) = \frac{\ln(30)}{\ln(3)} = 3.0959\ldots$ o bien: $\log_3(30) = \frac{\log(30)}{\log(3)} = 3.0959\ldots$

¿Qué significa este resultado? ___________ ¿Puedes comprobarlo? ___________

SESIÓN 2. Práctica con las propiedades de los logaritmos.

Actividad 2.1 Revisión grupal de las dudas que surgieron acerca de la de la Sesión 1 y de la Tarea 2.

Al inicio de esta sesión se revisan los errores y las dudas que se hayan presentado a los estudiantes al trabajar en la tarea 2. Se revisan, una a una, las propiedades de los logaritmos y los exponentes hasta asegurar que los estudiantes las comprenden y puedan usar los dos resúmenes que se les proporcionaron al resolver problemas.

El docente atiende las dudas puntuales de los estudiantes y las resuelve mediante un diálogo con el grupo. En particular hace énfasis en la conveniencia de la definición $a^0 = 1$ si $a \neq 0$. Ilustrando con varios ejemplos su conveniencia para que haya congruencia con las propiedades de los exponentes, en particular con la de la división.[2]

La siguiente (Actividad 2.2) se entrega a impresa a los estudiantes en el momento de la clase, para ser resuelta mediante el *trabajo en parejas*, sin más ayuda que la información contenida en la hoja. El objetivo de la actividad es que los estudiantes valoren lo que pueden lograr académicamente trabajando en parejas, y que comprendan y apliquen la propiedad del *logaritmo de un producto* para resolver este problema o reto.

Actividad 2.2. Hallar el logaritmo decimal de 165

[2] En el capítulo 4, se presenta una forma de trabajar con los estudiantes, en la que a la vez que se resuelven las dudas, tienen la oportunidad de avanzar en sus conceptos y valorarlos al resolver problemas mediante el diálogo.

Problema a resolver: Formen parejas. Su tarea es calcular el logaritmo decimal de **165** con cuatro cifras decimales (sin calculadora, celular, Internet, a partir de los datos que se proporcionan en esta hoja). log(165)= _ . ____

1. Todos los logaritmos tienen una base (que se escribe como subíndice después de log); si la base no está especificada, debemos suponer que la base es 10. Ejemplos: Así, el logaritmo decimal de catorce se escribe indistintamente: $\log 14 = \log_{10}(14)$; $\log_2 8 = 3$ (el logaritmo en base dos de ocho es tres, porque $2^3 = 8$).

2. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 10? Respuesta: $\log_{10}(10) = 1$ porque $10^1 = 10$

3. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 2? Respuesta: $\log_{10}(2) = 0.3010$ porque 10 = ___

4. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 5? Respuesta: $\log_{10}(5) = 0.$ _ _ _ _ (Les sugiero que lo calculen a partir de los otros datos de la hoja). $\log_{10}(5) = 0.$______ porque ____________

5. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 22? Respuesta: $\log_{10}(22) = 1.3424$;

$\log_{10}(22) = 1.3424$ porque ____________

6. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 21? Respuesta: $\log_{10}(21) = 1.3222$

$\log_{10}(21) = 1.3222$ porque ____________

7. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 7? Respuesta: $\log_{10}(7) = 0.8450$

$\log_{10}(7) = 0.8450$; porque ____________

8. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 3? Respuesta: $\log_{10}(3) = 0.$ _ _ _ _ (Calcularlo a partir de los otros datos). $\log_{10}(3)$ = ________; porque ____________

9. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 1000? Respuesta: $\log_{10}(1000) = \mathbf{3}$ **;** (porque $10^{\mathbf{3}} = 1000$)

10. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 11? Respuesta: $\log_{10}(11) = 1.$ _ _ _ _ (Calcularlo a partir de los otros datos). $\log_{10}(11) = 1.$________ porque: __________= __

11. ¿Cuál es el logaritmo decimal de 100? Respuesta: $\log_{10}(100) = \mathbf{2}$ porque $10^{\mathbf{2}} = 100$

12. Una propiedad muy importante que tienen los logaritmos es: $\log_b(w\,z) = \log_b(w) + \log_b(z)$ "El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos tomados por separado".

13. ¿Puede darnos un ejemplo de "esa propiedad tan importante" que tienen los logaritmos?

Respuesta: $\log_b(33) = \log_b[(3\times 11)] = \log_b(3) + \log_b(11)$

Actividad 2.3. Recuperación y reflexión sobre la experiencia de hallar el logaritmo de 165.

Responde individualmente, por escrito, a las siguientes preguntas y guarda tu documento como evidencia en tu portafolio:

- ¿Cómo pudiste superar el reto de hallar el log (165) sin tablas, calculadora ni Internet?
- ¿Cuál fue el obstáculo o dificultad principal que enfrentaste?
- ¿Cómo te pareció la experiencia de trabajar en pareja con este problema?
- ¿Cambió esta experiencia lo que tú pensabas acerca de los logaritmos? Explica

Escribe un breve relato que describa el proceso de resolución, qué tipo dificultades tuvieron que superar y cómo fue que lograron resolver el problema y algún comentario que quieras expresar respecto a tus pensamientos y sentimientos durante el desarrollo de esta actividad.

¿Para qué te sirve la reflexión sobre el proceso que acabas de experimentar?

____

Conclusiones grupales y comentarios que surgieron a raíz de la participación de los equipos en este reto/juego.

¿Qué conocimiento usaste principalmente para resolver el reto?

Antes de que se popularizaran las calculadoras electrónicas (1975), los logaritmos se usaban para poder efectuar los cálculos que involucraban cifras muy grandes (al construir la torre latinoamericana por ejemplo).

¿Por qué será que, ahora que con tu calculadora puedes realizar casi todas las operaciones complicadas, sigue siendo útil aprender y saber logaritmos?

____

¿Qué es el logaritmo de un número?

____

¿Qué concluyes o qué aprendiste en las dos sesiones dedicadas a los logaritmos?

Conceptual: ____

Procedimental o algorítmico: ____

Actitudinal: ____

Tarea 3: Resuelve los siguientes problemas.

Para reforzar las técnicas aprendidas hasta ahora, realiza la lectura del *Documento* 3 (a continuación) y luego resuelve los siguientes problemas en casa.

1. Un laboratorio determinó que una muestra de sangre humana contenía una concentración de iones de Hidrógeno [H+] = 3.16 x10-8 M. Determina qué valor de pH corresponde a este dato y clasifica la muestra de sangre como ácida o básica. Si solo se considera el valor del pH, ¿dirías que la persona está sana? ¿Por qué?

2. Si el sumo de una fruta tiene un valor de pH = 4, ¿qué concentración de iones de Hidrógeno tiene?

3. Un jabón para lavar tiene un pH de 9.45, ¿qué concentración de iones de Hidrógeno tiene?; ¿recomendarías usar guantes al usar este jabón?; ¿en qué dato apoyas tu recomendación?

4. ¿Cómo se compara el mayor sismo del que se tiene registro, ocurrido en Valdivia, Chile, el 22 de mayo de 1960 cuya magnitud fue de 9.5 en la escala de Richter, con el ocurrido en la ciudad de México, el 19 de septiembre de 1985, con magnitud de 8.3 en la escala de Richter?

5. Compara el temblor de la Ciudad de México en 1985 (8.3 grados en la escala de Richter) con el de la Ciudad de México durante la semana santa de 2014 (7.2 grados)? ¿Cuántas veces más fuerte fue el de 1985 que el de 2014?

- Registra los procedimientos con los que resolviste esta tarea y guarda tus anotaciones en tu portafolio de evidencias con la fecha de hoy y tráelas contigo a todas las sesiones de este tema. Adicionalmente busca una liga que lleve a algún video en el que se discuta cómo o por qué se usan las escalas logarítmicas para medir y estudiar algunos fenómenos naturales o sociales.

- Escribe una nota breve que describa cómo te has sentido durante las sesiones de trabajo en clase y otra sobre la utilidad o no de las tareas (tienes que justificar tus afirmaciones) y luego guárdala en tu portafolio de evidencias.

Documento 3. Lectura sobre el pH y sobre la escala de Richter para registrar los sismos.

CASF/CCH SUR ene/2014

Aplicaciones de los logaritmos:

el pH

Tomado principalmente de
http://es.wikipedia.org/wiki/PH

(consultada el 17 de enero de 2014)

El **pH** es una medida de acidez o alcalinidad de una disolución. El pH indica la concentración de iones hidronio [H_3O^+] presentes en determinadas sustancias.

La sigla significa '**potencial hidrógeno**', '**potencial de hidrógeno**' o '**potencial de hidrogeniones**' (***p**ondus **h**ydrogenii* o ***p**otentia **h**ydrogenii*; del latín *pondus*, n. = peso; *potentia*, f. = potencia; *hydrogenium*, n. = hidrógeno). Este término fue acuñado por el químico danés S. P. L. Sørensen (1868-1939), quien lo definió como el opuesto del logaritmo en base 10 (o el logaritmo del inverso) de la actividad de los ioneshidrógeno. Esto es:

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}\left[\mathrm{a}_{H^+}\right]$$

El pH en fase acuosa en la vida cotidiana:

Sustancia	pH aproximado
	0
Drenaje minero ácido (DMA)	<1,0
Ácido de una batería	<1,0
Ácido gástrico	2,0
Jugo de limón	2,4 - 2,6
Bebida de cola[1]	2,5
Vinagre	2,5 - 2,9
Jugo de naranja o de manzana	3,5
Cerveza	4,5
Café	5,0
Té	5,5
Lluvia ácida	< 5,6
Leche	6,5
Agua	7,0
Saliva	6,5 – 7,4
Sangre	7,38 – 7,42
Agua de mar	8,0
Jabón	9,0 a 10,0
	11,5
Lejía	13
	14,0

Desde entonces, el término "pH" se ha utilizado universalmente por lo práctico que resulta para evitar el manejo de cifras largas y complejas. En disoluciones diluidas, en lugar de utilizar la actividad del ion hidrógeno, se le puede aproximar empleando la concentración molar del ion hidrógeno.

Por ejemplo, una concentración de [H_3O^+] = 1×10^{-7} M (0,0000001)

es simplemente un pH de 7, ya que pH = $-\log[10^{-7}] = 7$

En disolución acuosa, la **escala de pH** varía, típicamente, de 0 a 14.

Son ácidas las disoluciones con pH menores que 7 (el valor del exponente de la concentración es mayor, porque hay más iones en la disolución) y alcalinas las de pH superiores a 7. Si el disolvente es agua, el pH = 7 indica neutralidad de la disolución.

En productos de aseo y limpieza se suele usar la expresión "pH neutro". En este caso la neutralidad hace referencia a un nivel de pH 5,5. Debido a las características de la piel humana, cuyo pH es 5,5, se indica neutralidad de pH en este tipo de productos que están destinados a entrar en contacto con la piel para destacar su no agresividad. Si se aplicaran productos de pH 7 a la piel se produciría una variación del pH cutáneo con posibles consecuencias negativas.

Dato: Dependiendo del pH del suelo, la hortensia (*Hydrangea*) puede poseer flores rosas o azules. En suelos ácidos (pH<7) las flores son azules; en suelos básicos (pH>7) son rosas.

La Escala de Richter para el registro de los sismos.

La escala de Richter (1935) es una escala logarítmica que permite dar sentido a los registros de los sismógrafos al convertirlos a cifras que proporcionan una referencia sencilla en una sola magnitud M. Para medir los sismos se considera una medida de referencia, también llamada sismo de nivel 0, cuya lectura en el sismógrafo mide x_0 = 0.001 mm a una distancia de 100 km del epicentro. Si un determinado sismo mide x mm a 100 km del epicentro, entonces tiene una magnitud M(x) dada por la expresión:

$M(x) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$ donde $x_0 = 0.001$

Problema 1: ¿Cómo se compara un sismo de magnitud 5.4 con una de magnitud 6.6? Es decir, ¿cuántas veces es mayor el de magnitud 6.6 que uno de magnitud 5.4 en la escala de Richter?

¿Cómo resolviste el problema? Has una nota breve y agrégala a tu portafolio de evidencias.

¿Qué conocimiento tuviste qué ocupar para resolverlo? Escríbelos.

Después de realizar esta lectura, estarás en condiciones de resolver la Tarea 3.

SESIÓN 3. Diagnóstico con problemas sobre exponenciales.

Actividad 3.1Diagnóstico. Trabajo Individual. *(20 minutos)*

El objetivo de este material es ayudar a reconocer y activar tus conocimientos previos para el tema de funciones exponenciales.

Por favor escribe en el espacio proporcionado (o en la parte posterior de la hoja) tus intentos o propuestas de solución a los dos problemas, o bien las dificultades que encuentras al intentar resolverlos.

Nombre: ________________________________ Grupo: ___ Fecha _________

D1. Un cultivo de bacterias. Un equipo de químicos y farmacéuticos intenta desarrollar una nueva fórmula. Deciden experimentar con bacterias que se reproducen, por bipartición, cada 5 minutos. Colocan una bacteria en el campo de cultivo a las 15:00 horas, a las 15:05 ya existen 2 bacterias, a las 15:10 ya cuentan cuatro bacterias. Observan al microscopio y concluyen que a las 18:00 horas, el campo de cultivo se ha llenado a la mitad de su capacidad. Determina la hora exacta en la que el campo de cultivo se habrá llenado completamente de bacterias.

D2. Un padre de familia compró a sus hijos una computadora con un valor de 10 000 pesos, y la pagó con tarjeta de crédito. Posteriormente tuvo problemas económicos imprevistos y no pudo hacer pagos a la tarjeta. Si el banco que respalda la tarjeta, le cobra 5% mensual *de* ***Interés Compuesto***[3]. Determina qué cantidad de dinero le deberá el padre de familia al banco después de 6 meses.

[3] En el Interés Compuesto, los intereses no pagados generan nuevos intereses (se pagan intereses sobre los intereses).

Actividad 3.2 Resolver el examen diagnóstico en parejas.

El docente pide al grupo de estudiantes que resuelvan de nuevo el diagnóstico, esta vez en parejas. Y al terminar les pedirá que comparen cómo se sintieron al resolver el diagnóstico en pareja y cómo se sintieron al hacerlo individualmente y lo expresen ante el grupo.

Actividad 3.3.Resolver el examen diagnóstico grupalmente.

Al finalizar la actividad 3.2 el docente se refiere nuevamente al grupo y les dice:

Necesito parejas o voluntarios que expongan sus procedimientos y resultados para cada uno de los dos problemas y si coinciden con alguna de las ya expuestas por favor lo manifiesten.

Se discuten los procedimientos empleados, se aclaran dudas y se toman acuerdos grupales y se comentan los errores como una parte útil en el aprendizaje porque revela lo que tenemos que aprender a hacer mejor.

Actividad 3.4 Discusión y deducción colectiva de la fórmula del Interés Compuesto.

El docente propone al grupo resolver el problema sobre el interés compuesto con la participación de todos con el objetivo de inducir la obtención de dicho modelo matemático[4].

Antes de terminar la sesión, el docente motiva a los estudiantes para que resuelvan la siguiente tarea en casa antes de asistir a la siguiente sesión.

[4] En el Capítulo 4 de esta tesis, se presenta un ejemplo de la metodología empleada en las intervenciones en que se usó la SDP.

Tarea 4: Revisar y analizar el modelo de interés compuesto que se obtuvo en clase, y usarlo para resolver los siguientes ejercicios:

1. ¿Qué capital se obtendrá al final del plazo si se invierten 100 000 pesos por dos años con un interés compuesto nominal de 8%?

2. Calcular cuál será el monto correspondiente a un capital de $ 250, 000 colocado al 7.5% anual compuesto durante 1.5 años.

3. Se colocó un cierto capital al 6.4% anual compuesto durante un periodo de 2 años y se obtuvo un monto de $ 280 262. Calcular el capital inicial.

4. Una persona adquiere una deuda de $ 25, 000 a Interés Compuesto con capitalización anual. Después de 1 año y 120 días, se encuentra con que debe $ 61 035. Calcular la tasa de interés que se está aplicando al préstamo.

5. ¿A qué tasa de interés compuesto anual se duplicará un cierto capital en un plazo de 8 años?

Toma nota de tus dudas, procedimientos y posibles errores, participa en la siguiente clase apoyándote en estas notas. Una vez que hayas resuelto los problemas, guarda este documento en tu portafolio de evidencias.

SESIÓN 4. Funciones exponenciales.

Actividad 4.1. Resolución de dudas y recapitulación.

El docente analizará las dudas y las resolverá con la ayuda del grupo. Finalmente buscará que el grupo establezca las conclusiones y aprendizajes que se desprendieron de las dudas y los errores de la tarea 4.

Actividad 4.2. Resolución de problemas con los estudiantes en parejas.

1. Una compañía que vende café al consumidor tenía instaladas, en 2005, doscientas franquicias en la ciudad. Su plan era crecer al 8% anual en forma sostenida. *¿Cuántas franquicias* tendrían en el año 2012 en caso de cumplirse su plan?

2. A causa de la inflación, 5% anual, el poder de compra del salario ha decrecido. Una cierta cantidad de dinero alcanza para comprar 700 despensas este año. *¿Cuántas despensas* se podrán comprar con ese dinero dentro de 10 años, si se continúa con esa inflación?

3. Una sustancia ajena al organismo, se elimina por *excreción* a razón de 3.5% cada hora. A) *¿Qué porcentaje de la sustancia* quedará en el organismo después de 6 horas?

B) *¿Qué porcentaje de la sustancia* quedará en el organismo después de 24 horas?

4. En una granja, las aves han contraído una enfermedad contagiosa. Si los contagios crecen 7% cada semana, ¿en cuánto tiempo se habrá duplicado la cantidad de aves enfermas?

5. En el CCH hay 400 personas que se han enterado de un rumor. El rumor se propaga a razón de 10% cada día. ¿Cuántos días serán necesarios para el que el rumor sea conocido por 3 000 personas?

6. Ana pide un préstamo de 20 000 pesos al banco, con un interés compuesto de 10% anual. ¿Cuánto terminará pagando Ana si el contrato especifica que el interés será:

Capitalizable cada seis meses?

Capitalizable cada mes?

¿Qué modificación debes hacer en la fórmula de interés compuesto para calcular la cantidad de dinero que pagaría Ana en cada caso?

¿Qué tipo de interés es mejor para el banco?;

¿Cuál contrato es mejor para Ana?; ¿por qué?

Actividad 4.3. Reflexión individual y colectiva.

Escribe brevemente acerca de los problemas, errores, sentimientos y dificultades que se te presentaron al desarrollar la actividad 4.2 y cómo los enfrentaste.

Guarda esa nota en tu portafolio de evidencias y luego participa de los comentarios del grupo al respecto.

Al terminar recoge la Tarea 5 y resuélvela en casa.

Tarea 5: Analiza y completa las siguientes tablas.

Las siguientes tablas que contienen diferentes bases, exponentes y expresiones exponenciales. Analízalas y escribe en los espacios lo que corresponda (*nota*: considera que el valor de la base debe ser el mismo en todo el renglón).

Sugerencia: Determina la base en cada ejercicio.

$base^{exp}$	____	2	4	5	____	10
Base:____	____	____	____	____	____	____
Exponente	0	1	2	____	3	____

$base^{exp}$	____	1.07	____	____	2	10
Base: 1.07	____	____	____	____	____	____
Exponente	0	1	2	5	____	________

$base^{exp}$	____	3.16	5	10	20	100
Base: ____	____	____	____	____	____	____
Exponente	0	____	____	1	____	________

$base^{exp}$	____	1	2	e	3	4
Base: ___	____	____	____	____	____	____
Exponente	0	____	____	1	____	________

Completa la siguiente tabla con una base que no haya sido empleada en esta tarea:

$base^{exp}$	____	4	6		7	20
Base: __	____	____	____	____	____	____
Exponente	0	____	____	____	____	________

Anota lo que aprendiste al realizar esta tarea:________________________________

____

Escribe una nota breve en la que relates tus dificultades iniciales y tus procedimientos y luego guarda la nota y esta tarea en tu portafolio de evidencias.

SESIÓN 5. Resolver problemas que involucran funciones exponenciales.

Actividad 5.1. Resolución de dudas y recapitulación.

El docente pregunta por las dudas y dificultades que surgieron en la tarea y en la sesión anterior, y las comenta y las resuelve con la ayuda del grupo.

Actividad 5.2 Resolución de problemas con los estudiantes formados en parejas.

La expresión para evaluar el interés compuesto ***P***, que gana un capital inicial $\boldsymbol{P_0}$, con un interés anual ***i***, capitalizable en ***n*** periodos es: **P= $\mathbf{P_0}$** $(\mathbf{1}+\frac{i}{n})^{n}$

Ejercicio 1: Si invierto 10 000 pesos con un interés compuesto de 10% anual, sin hacer retiros, capitalizable como se indica, al final de año tendré:

a) Capitalizable cada dos meses, $______________

b) Capitalizable cada mes, $ _____________________

c) Capitalizable cada día (360 periodos), $ ________________

d) Capitalizable a cada segundo, $ _______________

¿Te sorprenden los resultados? ___ *;¿qué esperabas?* _____________________

Usa tu calculadora para evaluar la expresión $\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{n}\right)^{n}$ para los siguientes valores de ***n***

para n= 10 000 b) para n =100 000 c) para n = 1 000 000

_____________ ______________ ___________________

Notarás que tus resultados se aproximan al valor del número ***e*** **=** 2.71828 … . El número ***e*** es la base de los logaritmos naturales, es decir que: ln(***e***)= 1. Compruébalo. Este número aparece también en algunos procesos relacionados con muchos fenómenos naturales y matemáticos.

La expresión para el interés compuesto en *forma continua* es: C = P e^{rt}

Nota: en este tipo de modelos *el producto rt no debe tener dimensiones*.

Ejercicio 2. Una empresa invierte 3, 440, 000 pesos a una tasa de interés compuesto anual del 4.5 %. Determina el capital que tendrá, después de invertirlo 1.5 años, si los intereses son capitalizables:

Semanalmente:

Mensualmente:

Bimestralmente:

Actividad 5.3. Reflexión individual y colectiva.

Escribe en una hoja con la fecha de hoy, y tu nombre:

a) Las conclusiones a las que llegaste:

b) Algo que te haya sorprendido, o gustado de esta actividad:

c) Lo que consideras más importante de este ejercicio y quisieras recordar en el futuro.

d) Escribe una nota breve acerca de los errores, sentimientos y dificultades que se presentaron al desarrollar en la Actividad 5.2 y cómo los enfrentaste.

e) Guarda esa hoja en tu portafolio de evidencias y luego participa de los comentarios del grupo al respecto de esta sesión.

f) Escribe las conclusiones que obtuviste después de la reflexión colectiva.

Tarea 6. Resuelve ejercicios sobre interés compuesto capitalizable en diferentes plazos.

Al resolver el examen diagnóstico sobre exponenciales (Actividad 3.1) aprendiste que para calcular el capital, $\boldsymbol{P_n}$, que se obtiene partiendo de un capital inicial, $\boldsymbol{P_0}$, mediante un interés compuesto, ***i***, en una cantidad de periodos ***n*** es:

$$\mathbf{P_n} = \mathbf{P_0}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}$$

Y más tarde aprendiste que si el interés anual, ***i***, se capitaliza en ***n*** periodos *durante un año*, el modelo a aplicar es:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_0}\,(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}})^{\boldsymbol{n}}$$

Los dos modelos anteriores son *casos particulares* de:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P_0}(\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{n}})^{\boldsymbol{nt}}$$

En esta relación, ***i*** es la tasa de interés anual, ***n*** es el número de veces al año en que se aplica el interés compuesto, $\boldsymbol{P_0}$ es el capital inicial y ***t*** *es el número de años* en que se paga o aplica el interés compuesto.

Para asegurar que tus nuevos conocimientos y destrezas permanezcan es necesario practicarlos, por ello es necesario que resuelvas en casa los siguientes ejercicios:

1. Calcula el Capital que se obtiene al colocar a interés compuesto:

a. $20 000 al 4% anual al cabo de 6 años al capitalizar semestralmente.

b. $75 000 al 3% anual al cabo de 10 años con capitalización trimestral.

c. $50 000 al 6% anual en 5 años y 8 meses con capitalización cuatrimestral.

2. Calcula el *Capital inicia*l que colocado a interés compuesto dio un monto de:

a. $40 045 al 5 % anual en 5.5 años con capitalización mensual.

b. $100 000 al 6.5 % anual en 7 años con capitalización bimestral.

c. $20 000 al 4% anual en 5 años con capitalización cuatrimestral.

3. Calcula el *número de períodos* al que fue colocado un Capital de:

a. $6 500 al 5% anual que se transformó en $10.000, al capitalizar bimestralmente.

b. $10.000, al 6% anual se transformó en $15.000,- al capitalizar trimestralmente.

Escribe una nota breve en la que relates tus dificultades y tus procedimientos. Luego, guarda la nota junto con tu resolución a esta tarea en tu portafolio de evidencias.

Etapa III: Combinación de exponenciales y logaritmos al resolver problemas

SESIÓN 6. Resolución de problemas con exponenciales y logaritmos

Actividad 6.1. Resolución de dudas acerca de la Tarea 6.

El docente pregunta por las dudas y dificultades que surgieron en la tarea y en la sesión anterior, comenta sobre los errores más comunes trata de usarlos a favor del aprendizaje de los estudiantes y resuelve las dudas con la participación del grupo.

Actividad 6.2 Resolución de problemas con exponenciales y logaritmos.

Por favor formen parejas y resuelvan los siguientes problemas:

1. Vicente Fox Quezada logró ser presidente de los Estados Unidos Mexicanos en el año 2000. Recuerdo que en su campaña política hacia la presidencia prometió que durante su sexenio la economía mexicana *crecería al 7% anual en forma continua* (esto como seguramente sabes o sospechas, no sucedió).

Calcula el incremento en el valor de la economía, durante 6 años, si se mantiene una tasa de crecimiento del 7%.

A ese tasa de crecimiento, a) ¿cuánto tiempo sería necesario para duplicar la producción? ______

¿Les parece posible duplicar el tamaño de la economía del país en ese plazo? _____

¿Por qué? ____

Tus argumentos son: ____

____

2. Mi auto costó inicialmente 150 000 pesos. Si la expresión que determina su depreciación comercial es $A_0\, e^{-0.14t}$ (t está en años) y A_0 es el valor inicial.

¿Cuál será su valor en 5 años?

¿Dentro de cuánto tiempo tendrá un valor de 60 000 pesos? (quiero venderlo en ese año)

3. Si la población de un país crece al 2.5% anual en forma continua, ¿en cuántos años se duplicará?

4. La población de una localidad en Oaxaca era de 3 000 habitantes en 1998 y en 2004 era de 4 500. Si el crecimiento se dio con una *tasa relativa constante*, determina dicha tasa.

Nota: Recuerda que en este caso, el modelo que se utiliza es $P(t) = P_0\, e^{kt}$ ¿Qué datos conoces? ¿Qué te piden determinar?

5. La población de palomas se considera actualmente un problema para las ciudades. Si en una localidad hay 5 000 palomas y su población crece exponencialmente a una *tasa relativa constante* de 5%.

¿En cuántos años la población será de 8 000 palomas?

Anota tus observaciones, aprendizajes y dificultades que superaste.

Actividad 6.3. Completar tabla con diferentes bases (trabajo individual).

Escribe en los espacios vacíos de la cada tabla lo que corresponda.

Determina los valores de: x. y, z, w (con 4 cifras decimales).

Base: ***e***

Exponente	0	1	x= __	y=__	z=____	w=_____
Expresión	e^0= __	____= e	e^x= 3	e^y= 4	____=5	____=10

Base: **10**

Exponente	0	1	x= __	y=__	z=____	w=_____
Expresión	10^0= _	____=10	10^x= 2	____= 5	____=20	____=50

Base: **1.07**

Exponente	0	1	x= __	y=__	z=____	w=_____
Expresión	$(1.07)^0$=__	____=__	$(1.07)^x$=2	____= 5	____=20	____=50

Base: **2**

Exponente	0	1	x= __	y=__	z=____	w=_____
Expresión	$(2)^0$=__	____= 2	2^x= 3	____= 5	__ =20	__= 50

Base: ***5***

Exponente	0	1	x= __	y=__	z=____	w=_____
Expresión	$(5)^0$=__	____= 5	5^x=2	____=10	____=20	____=50

El ejercicio que más te interesó fue:______________________. Porque__________________

¿Qué descubriste o aprendiste al realizar esta actividad? Anótalo:____________________

Otro estudiante concluyó: ____

Y lo más interesante, para ti, en esta actividad fue__________________________________

Actividad 6.4. Recapitulación sobre los diferentes modelos de crecimiento o decaimiento exponencial.

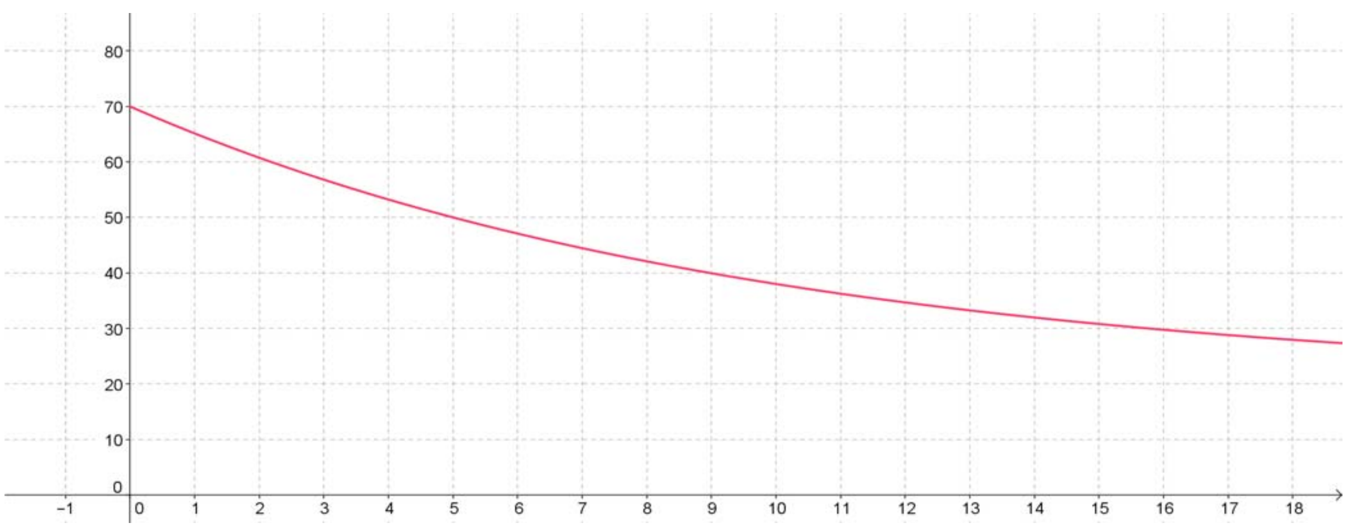
Mediante la participación con el grupo, el docente aclara: en qué casos se usa la forma de crecimiento exponencial en forma discreta y cuando se usa en la forma continua. Y propone ejemplos para que los estudiantes determinen cuál es el modelo adecuado en cada caso.

Tarea 7. Investigación sobre el modelo exponencial de la ley de Newton sobre el enfriamiento de los cuerpos

Usa la información que obtengas de tu investigación sobre la ley del enfriamiento de los cuerpos de Newton para resolver el siguiente problema:

El profesor de física nos contó lo siguiente: sacó una papa de una olla, midió la temperatura de la papa y registró en su bitácora: $T_0 = 70^0$ C; después de cinco minutos volvió a medir la temperatura de la papa y registró el valor: $T(5) = 50^0$ C; durante todo el proceso verificó que la temperatura ambiente se mantuvo constante y anotó: $T_a = 20^0$ C.

- Escribe la función exponencial T(t), que sirve para modelar este fenómeno.
- Utiliza los datos para determinar el valor de la constante
- Utiliza *GeoGebra*[5] para obtener la gráfica de esta función.
- Estima a partir de la gráfica, cuál será la temperatura de la papa para un tiempo t = 10 minutos.



[5] GeoGebra es un software gratuito con versiones en varias plataformas: Windows, Linux, Mac y algunas tabletas. Para realizar este tipo de ejercicios se recomienda un entrenamiento previo de los estudiantes con el software y contar con una PC y un cañón electrónico o bien citar al grupo en un laboratorio de cómputo con cierta frecuencia.

SESIÓN 7. Ley enfriamiento de los cuerpos de Newton. (LECN)

Discusión del modelo para la Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton:

$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{kt}$

Nota: si se trata de enfriamiento: $k<0$.

Actividad 7.1 Resolución la tarea y de problemas de enfriamiento de los cuerpos.

El docente guía al grupo para determinar el valor de específico de ***k***, de acuerdo con los datos del problema y analizar gráfica de GGB de la ecuación que modela el problema y su solución.

Actividad 7.2 Transferir el conocimiento obtenido con la LECN a la devaluación de un automóvil.

En las primeras actividades resolviste problemas relacionados con la depreciación de un automóvil, mediante el modelo $A(t) = A_0\, e^{-kt}$

Te propongo ahora que resuelvas el siguiente problema:

Una camioneta costó inicialmente 325 000 pesos. Se estima que su valor final, después de muchos años no será menor de 20 000 pesos. Si año de comprada su valor en el mercado es de 260 000 pesos, ¿cuál será su valor a los cinco años de haber sido comprada?

¿Qué modelo matemático usarás para resolver este problema?

¿Cuál de los dos modelos te parece mejor para representar la devaluación de un auto?

¿Por qué?

Finalmente, el docente invita a los estudiantes a *reflexionar* sobre la ventaja que reporta el usar un modelo como el LECN en otro tipo de problema *completamente distinto* como el de la devaluación de un automóvil, y también sobre la naturaleza de misma de las matemáticas.

Actividad 7.3 Decaimiento y concepto de vida media

Los compuestos orgánicos contienen tanto carbono 12 (^{12}C) como carbono 14 (^{14}C).

El carbono 14 es un isótopo radiactivo del carbono y su proporción se mantiene aproximadamente constante en los tejidos de los seres vivos. Cuando un organismo muere, deja de reponer el carbono 14 que empieza disminuir su presencia en el organismo de acuerdo con la expresión:

$$C(t) = C_0\, e^{-kt}$$

Donde k = 0.000121 (para el ^{14}C y C_0 es la cantidad de ^{14}C presente en el organismo al momento de morir.

Problema**:** Si un fósil ha perdido la mitad de su ^{14}C, calcula la edad del fósil.

Nota: Ese tiempo se conoce como la *vida media* del ^{14}C. La *vida media* es constante para cada elemento químico radiactivo y es el tiempo necesario para que decaiga la mitad de la sustancia.

Comentarios: ¿Recuerdas algún problema que hayas resuelto que sea similar a este? __ ¿Cuál? ____

Enunicia el problema y especifica en qué se parecen: _________________________

____

Ejercicio: Decaimiento exponencial de sustancias radiactivas y de vida media.

La *vida media* es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los átomos de cualquier sustancia radiactiva.

1. La vida media del Co 60 es de 5.3 años ¿Qué cantidad de una muestra de 10 g de Cobalto queda después de 21.2 años?

2. Después de 6 años, los 16 g de una muestra de un elemento radiactivo quedan reducidos a 2 g. Por lo tanto, su vida media es de: ____ años.

3. Si la vida media de un isótopo radiactivo que se usa para medir la actividad de la glándula tiroides es de una semana ¿Qué fracción de material quedará sin decaer después de tres semanas?

Tarea 8. Problemas y ejercicios para reforzar lo aprendido hasta la sesión 7.
Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log(x+3) + \log(x-2) - 1 = 0$ b) $\log(x+4) - \log(x+1) = \log(x)$

¿Qué propiedad de los logaritmos es necesario emplear en cada caso?

Comprueba tus respuestas en la ecuación original.

Utiliza ***GeoGebra*** para comparar las dos funciones siguientes mediante su gráfica.

$$f(x) = (0.8)^{x}$$
$$g(x) = e^{-02231x}$$

¿Qué ocurrió? ____
¿Te sorprende el resultado que obtuviste? _____
¿Por qué? ____
¿Cómo puedes comprobar que las dos funciones son equivalentes sin hacer uso de las gráficas? ____
Escribe tu procedimiento: ____

Ejercicio: Se tiene una función decreciente $h(x) = (0.75)^{x}$, encuentra su equivalente pero de la forma: $r(x) = e^{-kx}$

SESIÓN 8. Funciones que son inversas

Actividad 8.1 La función inversa de una función lineal o de una función racional.

En la Unidad 2 de este curso (Matemáticas IV) aprendiste a obtener la función inversa de una función lineal y también la de una función racional.

Ejercicios (para reactivar tus conocimientos previos). Determina la función inversa de la que se te da y comprueba tu resultado.

1. f(x) = 2x -3
2. g(x) = $\frac{x+2}{x-2}$; x≠ 2
3. h(x) = $\frac{2x-3}{x-1}$ $\frac{2x-1}{x-1}$; x≠ 1

Prepara una nota breve, en la que expliques el procedimiento seguiste para hallar cada una de las funciones inversas que se te piden y guárdala en tu portafolio de evidencias.

Actividad 8.2 La función inversa de una función exponencial o de una logarítmica.

¿Cuál es la función inversa de f(x)= e^x ? ¿Por qué?

¿Cuál es la función inversa de g(x)= log(x) ? ¿Por qué?

¿Cuál es la función inversa de h(x)= $\log_b(x)$? ¿Por qué?

Reto: Hallar la función inversa de ***f(x) = e*** $^{-3x}$

Actividad 8.3. Procedimiento para encontrar la función inversa de una exponencial.

Para poder encontrar la inversa de una función logarítmica o exponencial es importante contar con los siguientes conocimientos previos:

Dominar las propiedades de los logaritmos y de los exponentes.
Conocer el procedimiento para encontrar otras funciones inversas más simples, como la de una función racional o lineal.[6]

Redacta brevemente tus aprendizajes, sentimientos y las dificultades que superaste; luego guarda la nota en tu portafolio de evidencias con la fecha de hoy.

[6] En el Capítulo 4 de esta tesis, se presenta un diálogo con el grupo que puede ilustrar la metodología para tratar el tema.

Tarea 9: Ejercicios sobre funciones inversas y resolver ecuaciones con exponenciales o logaritmos

Ejercicios para reforzar lo aprendido en la sesión:

Determina la función inversa de:

a) $g(x)= \ln (3x+4)$ b) $f(x)= \log (4x-3)$ c) $h(x)= 2^{(x-1)}$ d) $r(x)=10^{(2x-5)}$

Determina el valor de x que satisface cada ecuación:

$3^x = 7^{x+2}$ b) $\log(3x+1)= 0.5$; c) $5^x = 4^{x+3}$ d) $\log(2x+1)= 0.7$

Problema: Los médicos utilizan yodo radiactivo en el tratamiento de la glándula tiroides. Se sabe que el yodo radiactivo se desintegra de tal forma que la cantidad de yodo que queda en el organismo después de t días administrados está dada por el modelo:

$M=M_0\, e^{-0.087t}$

Donde M es la cantidad de yodo en gramos. ¿Cuánto yodo queda el organismo después de un mes si la cantidad inicial M_0 = 10 g?

SESIÓN 9. Examen y evaluación individual

Actividad 9.1 Examen Individual

Nombre: ____ Fecha: ***Grupo:*** ______

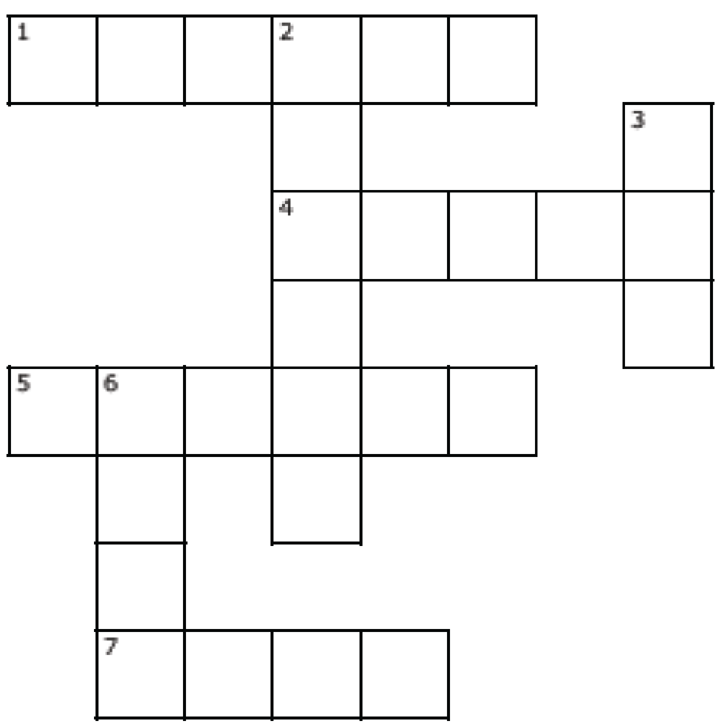
Instrucción: Escribe en el reverso de la hoja tu(s) procedimiento(s):

1. Si la economía de un país crece al 3% anual por muchos años. ¿En cuántos años se duplicará?

2. La población de jaguares se considera actualmente en riesgo de extinción. En México hay 7 000 jaguares salvajes y su población *decrece exponencialmente* a una *tasa anual relativa constante* de 5%. ¿En cuántos años más la población será de 2 000 jaguares?

Resuelve el siguiente crucigrama:

Exponentes y logaritmos



1. dos a la menos dos es equivalente a un:

4. en el logaritmo de un producto, los logaritmos de cada factor se:

5. dos a la menos tres es igual a un:

7. dos a la tres:

2. en el logaritmo de una división, el logaritmo del dividendo y el del divisor se:

3. si la base no es cero, cualquier base a la cero es:

6. el logaritmo de uno:

Actividad 9.2 Evaluación del docente, la estrategia y los materiales empleados en el tema de exponenciales y logaritmos.

Responde sinceramente, gracias por tu participación.

A) Completo acuerdo **B)** De acuerdo **C)** No estoy segur@
D) Desacuerdo **E)** Total Desacuerdo

Los materiales con los que trabajaste iban de lo sencillo a lo complejo: _____

Los problemas de los materiales te resultaron interesantes: _____

El profesor mostró interés en ayudarte a aprender: _____

Las sugerencias y ayudas del profesor en la clase fueron las que necesitabas: ____

El tiempo asignado para resolver las actividades fue el adecuado para ti: ____

El nivel de dificultad de los problemas propició tus aprendizajes: ____

Durante este tema te sentiste motivad@ para asistir a la clase: _____

Ahora percibes claramente que puedes utilizar a tu favor los errores en el aprendizaje: ____

Lo que aprendiste en estas tres semanas te será de utilidad en el futuro: _____

En general, esta experiencia de aprendizaje fue positiva para ti: _____

Anota qué fue lo que más te gustó:____

¿Y lo que menos te gustó?:____

Por favor, sugiere algo que creas que puede mejorar esta experiencia de enseñanza aprendizaje:

____

____

Gracias por tu participación, espero que haya cambiado favorablemente tu percepción de las matemáticas después de esta experiencia.

Si deseas hacer algún comentario o aclaración adicional por favor ocupa este espacio, y si es necesario, el reverso de la hoja.