



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Álgebra Lineal en la Teoría de Gráficas**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M Á T I C A**

**P R E S E N T A:**

**KARINA LÓPEZ MENDOZA**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. DIANA AVELLA ALAMINOS  
2014**

**Ciudad Universitaria, D. F.**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Apellido paterno: López  
Apellido materno: Mendoza  
Nombre(s): Karina  
Teléfono: 56 75 90 05  
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad: Ciencias  
Carrera: Matemáticas  
Número de cuenta: 404076124

### 2. Datos del tutor

Grado: Dra.  
Nombre(s): Diana  
Apellido paterno: Avella  
Apellido materno: Alaminos

### 3. Datos del sinodal 1

Grado: Dra.  
Nombre(s): Mucuy Kak del Carmen  
Apellido paterno: Guevara  
Apellido materno: Aguirre

### 4. Datos del Sinodal 2

Grado: Mat.  
Nombre(s): José Gabriel  
Apellido paterno: Ocampo  
Apellido materno: Márquez

### 5. Datos de Sinodal 3

Grado: Mat.  
Nombre(s): Laura  
Apellido paterno: Pastrana  
Apellido materno: Ramírez

### 6. Datos del sinodal 4

Grado: Dra.  
Nombre(s): Rita Esther  
Apellido paterno: Zuazua  
Apellido materno: Vega

### 7. Datos del trabajo escrito

Título: Álgebra Lineal en la Teoría de Gráficas  
Número de páginas: 106  
Año: 2014



# Agradecimientos

A mi núcleo familiar, sin su apoyo estas líneas no existirían.

A mis padres, que siempre han creído en mí.

A mi madre, por el amor y coraje que has tenido para sacarme adelante, por escucharme, darme la mano para sujetarme y no caer, no juzgar mis decisiones y sí apoyarme, por darme todo el espacio para crecer. Eres una gran ejemplo de mujer.

A mi padre, que ha cuidado de mí, por la paciencia, por la familia que me diste.

A mis hermanos, que siempre tienen los brazos abiertos para compartir mis momentos. A Erick, que me ha enseñado a exigirme, a Alberto, a ser paciente. Los amo.

A Alejandro G. R., por ser mi mejor amigo, hacerme reír y apoyarme.

A Jana, Andrea, María Rosa, Julián, Octavio, Pokemon y muchos más amigos. Gracias por compartir clase, hacer tareas, crear un vínculo, de todos ustedes he aprendido. Anhele compartir momentos agradables nuevamente.

A todos mis sinodales, mi admiración y respeto por sus comentarios y apoyo. En especial a la Dra. Diana Avella Alaminos, por aceptar dirigirme, por toda la paciencia, sin usted este trabajo sería inexistente. A todos mis profesores, gracias por transmitirme el gusto por la matemáticas, gracias por sus enseñanzas.

A mis abuelos Eligio y Aurora, lo logramos. A mis tíos y primos, me regalaron gratos recuerdos.

A Edgar Migueles Pérez. Gracias por hacer de mí una mejor versión, compartir momentos desde que nos conocimos. Las matemáticas nos unieron. Te amo.

Y a todos los que de alguna manera han contribuido en mi desarrollo como ser humano.

*"Por mi raza hablará el espíritu"*

# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>1. El lenguaje de las gráficas.</b>	<b>5</b>
1.1. Definiciones básicas. . . . .	5
1.2. Conexidad. . . . .	10
<b>2. Apuntes de Álgebra Lineal.</b>	<b>19</b>
2.1. Matrices. . . . .	19
2.1.1. Rango de una matriz. . . . .	21
2.2. Determinantes. . . . .	26
2.3. Valores y vectores propios. . . . .	37
2.3.1. Teorema de Cayley-Hamilton. . . . .	39
<b>3. El espectro de una gráfica</b>	<b>43</b>
3.1. La matriz de adyacencia y su polinomio característico. . . . .	43
3.2. El álgebra de adyacencia. . . . .	46

<b>4. Gráficas regulares</b>	<b>53</b>
4.1. Matriz de adyacencia de una gráfica regular. . . . .	53
4.2. Gráficas y matrices circulantes. . . . .	56
4.2.1. Gráficas completas. . . . .	63
4.2.2. Ciclos. . . . .	65
4.2.3. Gráficas cóctel. . . . .	67
4.3. Gráficas de líneas. . . . .	70
<b>5. Ciclos y cortes.</b>	<b>77</b>
5.1. El espacio de vértices y el espacio de aristas. . . . .	77
5.2. La matriz de incidencia. . . . .	80
5.3. El subespacio-ciclo y el subespacio-corte. . . . .	86
5.4. Matriz Laplaciana. . . . .	92
<b>6. Árboles generadores y estructuras asociadas</b>	<b>95</b>
6.1. Ciclos y cortes asociados a árboles generadores. . . . .	95
6.2. Matriz de incidencia y árboles generadores. . . . .	99
6.3. Cantidad de árboles generadores. . . . .	100

# Introducción.

La presente tesis de Licenciatura se compone de 6 capítulos, en los cuales buscaremos estudiar la relación que existe entre el Álgebra Lineal y la Teoría de Gráficas, codificando las gráficas y las gráficas dirigidas mediante las matrices de adyacencia e incidencia respectivamente. Usando herramientas y técnicas del Álgebra Lineal revisaremos resultados referentes a las gráficas, analizando sus propiedades en términos de propiedades algebraicas como por ejemplo los valores y vectores propios de las matrices o buscando el número de árboles generadores de una gráfica calculando determinantes.

Deseamos proporcionar al lector, un panorama general acerca de la conexión que existe entre estas dos áreas de la matemática, presentando las demostraciones de manera detallada, incluyendo ejemplos y motivando con ellos los resultados a tratar.

El Capítulo 1, El lenguaje de las gráficas, y el Capítulo 2, Apuntes de Álgebra Lineal, nos proporcionarán de definiciones básicas y resultados que serán empleados a lo largo de este trabajo. Las demostraciones de aquellos resultados de Álgebra Lineal que se enseñan en los cursos básicos de la carrera de matemáticas se omiten, pero se muestra la referencia para el lector que esté interesado en revisarlos pueda hacerlo.

La intención de estos primeros dos capítulos es que el trabajo sea en medida de lo posible autocontenido, pero para no alargar de manera innecesaria el texto y no perder de vista el objetivo final, se enuncian solamente los resultados que se utilizarán en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3, El espectro de una gráfica, estableceremos la relación entre una gráfica y un objeto algebraico, pues codificaremos la gráfica mediante una matriz

cuadrada llamada matriz de adyacencia. El desarrollo del polinomio característico nos brindará datos de la gráfica en cuestión.

Dentro del Capítulo 4, Gráficas regulares, seguiremos trabajando con la matriz de adyacencia pero de un tipo especial de gráficas, llamadas regulares. También dotaremos de la cualidad de ser matriz circulante a la matriz con la que hemos venido trabajando. Los valores propios de las matrices circulantes pueden obtenerse a partir de las raíces  $n - \text{ésimas}$  de la unidad y del primer renglón de su matriz de adyacencia; esto nos permitirá conocer el espectro de la gráfica. Estudiaremos además la relación entre los polinomios característicos de una gráfica y la gráfica de líneas derivada de ella.

En el Capítulo 5, Ciclos y cortes, introduciremos una nueva matriz que codifica los elementos que definen una gráfica orientada, los vértices y las aristas, además de tomar en cuenta la orientación, esta matriz se conocerá como la matriz de incidencia. De la relación entre las matrices de adyacencia e incidencia, construiremos la matriz Laplaciana.

Finalmente, en el Capítulo 6, Árboles generadores y estructuras asociadas, con toda la información que hemos estado manejando, podremos saber el número de árboles generadores de una gráfica mediante las matrices y las operaciones algebraicas que podemos hacer con ellas.

# Capítulo 1

## El lenguaje de las gráficas.

El estudio que hacemos aquí de conceptos elementales de la Teoría de Gráficas, es extremadamente útil para poder desarrollar los siguientes capítulos.

### 1.1. Definiciones básicas.

**Definición 1.1.** *Geométricamente una **gráfica** es un conjunto de puntos (vértices) en el espacio, que son conectados por medio de líneas (aristas). Para una gráfica  $G = (V, E)$ , denotamos al conjunto de vértices por  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y al conjunto de aristas por  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , los elementos de  $E$  son subconjuntos de  $V$  de dos elementos, así si los extremos de una arista  $e_k$  son los vértices  $v_i$  y  $v_j$  escribimos  $e_k = \{v_i, v_j\}$ . Por lo que  $G = (V, E) = (\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{e_1, e_2, \dots, e_m\})$ .*

**Observaciones 1.2.** *Nosotros trabajaremos con gráficas simples, es decir, no hay lazos ( $e_k = \{v_i, v_i\}$ ), ni aristas múltiples, esto es, no puede existir más de una arista de  $v_i$  a  $v_j$ .*

**Definición 1.3.** *El **orden** de una gráfica  $G$  es el número de vértices, el **tamaño** es el número de aristas. Las gráficas pueden ser finitas o infinitas de acuerdo a su orden. Por definición una gráfica siempre tiene vértices, aunque su conjunto de aristas puede ser vacío. Una gráfica de orden 1 es llamada trivial.*

**Observaciones 1.4.** *Todo nuestro estudio se hará en gráficas finitas.*

**Definición 1.5.** Si  $e_k = \{v_i, v_j\} \in E(G)$ , entonces  $v_i$  y  $v_j$  son vértices **adyacentes** en  $G$ . En este caso los vértices  $v_i$  y  $v_j$  son **incidentes** en la arista  $e_k = \{v_i, v_j\}$  y viceversa. Dos aristas  $e_i \neq e_j$  son **adyacentes**, si tienen un vértice en común.

**Definición 1.6.** Llamaremos **grado de un vértice**  $v$ , al número de vértices adyacentes a él y lo denotaremos por  $\delta(v)$ . Un vértice de grado 0 se llama **aislado**.

**Definición 1.7.** Si en una gráfica el grado de todos los vértices es el mismo,  $\delta(v) = k \forall v \in V$ , decimos que es una gráfica  **$k$ -regular** o **regular de grado  $k$** .

**Definición 1.8.** Si para cada par de vértices distintos de  $G$  está definida una arista, entonces  $G$  es **completa**. La gráfica completa de  $n$  vértices se denota por  $K_n$ .

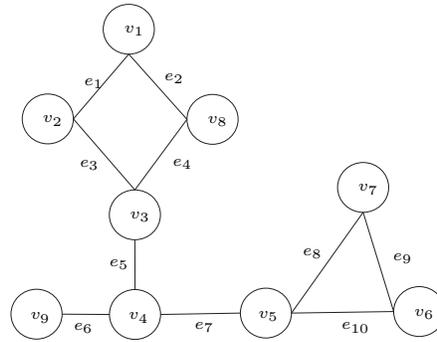


Figura 1.1: Gráfica  $\Upsilon$

**Ejemplo 1.9.** Para la gráfica de la figura 1.1, sus conjuntos de vértices y de aristas son los siguientes:

$V(\Upsilon) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ ,  $E(\Upsilon) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ .  
El orden es 9. El grado de sus vértices es:  $\delta(v_9) = 1$ ,  $\delta(v_1) = \delta(v_2) = \delta(v_6) = \delta(v_7) = \delta(v_8) = 2$  y  $\delta(v_3) = \delta(v_4) = \delta(v_5) = 3$ .

**Ejemplo 1.10.** La gráfica  $K_7$  que se muestra en la figura 1.2 es completa y 6 – regular, mientras que la gráfica de Petersen (fig.1.3) no es completa y es 3 – regular.

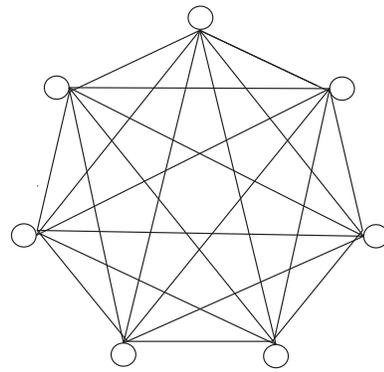


Figura 1.2: Gráfica  $K_7$

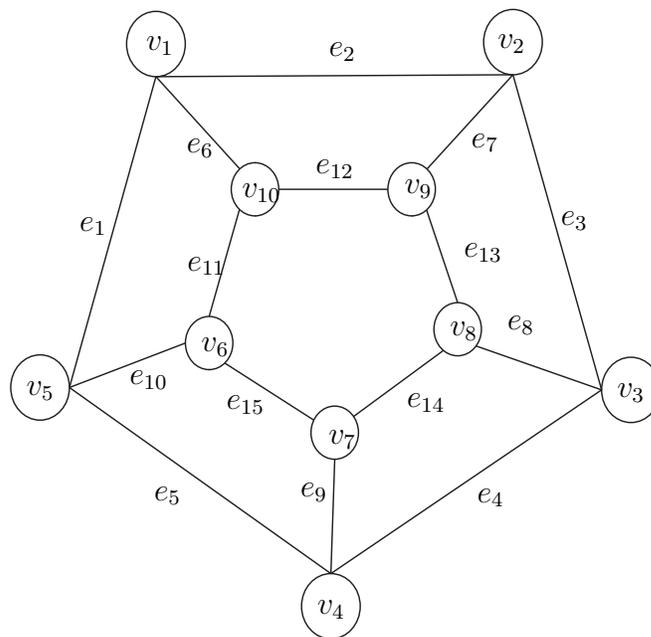


Figura 1.3: Gráfica de Petersen

En ocasiones se construyen nuevas gráficas a partir de otras. Un ejemplo importante, que nos será útil más adelante, es el de la gráfica de líneas:

**Definición 1.11.** La **gráfica de líneas**  $L(G)$  de una gráfica  $G = (V, E)$ , tiene a  $E$  como conjunto de vértices y dos vértices  $e_i, e_j \in E$  son adyacentes en  $L(G)$  si y sólo si dichas aristas son adyacentes en  $G$ .

**Ejemplo 1.12.** La gráfica de líneas que corresponde a la gráfica de Petersen, se muestra en la figura 1.4.

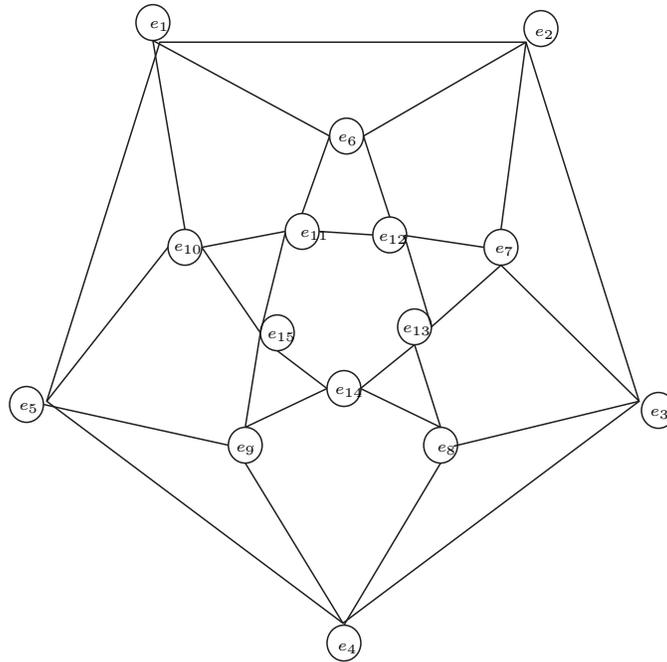


Figura 1.4: Gráfica de líneas de la gráfica de Petersen

Aunque en general trabajamos con gráficas, es posible orientar las aristas para dar lugar a gráficas orientadas o digráficas:

**Definición 1.13.** Al asignar una dirección a cada arista de la gráfica, en el diagrama de la gráfica, cada arista es representada por una flecha. Una gráfica de este tipo se conoce como **gráfica orientada**. Si  $e = (v_i, v_j)$  es una arista de la gráfica orientada, entonces el orden de  $v_i, v_j$  es importante. La arista direccionada  $(v_i, v_j)$  es incidente desde  $v_i$  (extremo inicial) hasta  $v_j$  (extremo final).

**Observaciones 1.14.** En este trabajo, sólo daremos una dirección a la arista.

**Ejemplo 1.15.** Para ilustrarlo, en las figuras 1.5 y 1.6 mostramos una orientación de la gráfica de orden 7 y de la gráfica de Petersen.

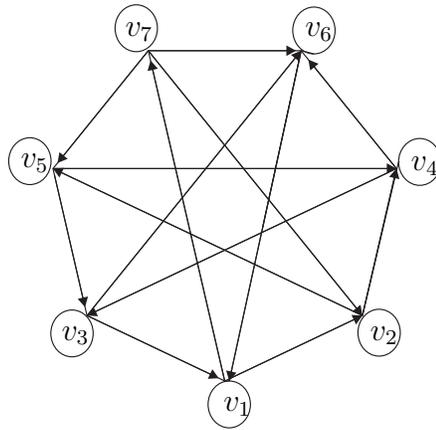


Figura 1.5: Gráfica de orden 7 orientada

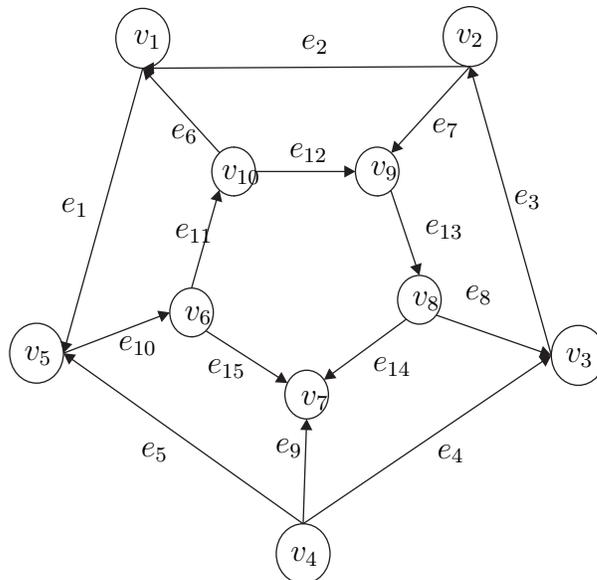


Figura 1.6: Gráfica de Petersen orientada

## 1.2. Conexidad.

**Definición 1.16.** Sean  $G$  una gráfica y  $v_0, v_l \in V(G)$ . Un  $v_0v_l$  **camino** en  $G$  es una secuencia alternada de vértices y aristas de  $G$ , comenzando con  $v_0$  y terminando con  $v_l$ ,  $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_l, v_l)$ , donde  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ ,  $0 < i \leq l$ ,  $e_i$  tiene como extremos al vértice inmediato anterior,  $v_{i-1}$ , y al que le sigue,  $v_i$ . Si existe un  $v_0v_l$  camino en  $G$  diremos que  $v_0$  y  $v_l$  están conectados en  $G$ .

**Observaciones 1.17.** Dado que no hay aristas múltiples, sólo es necesario indicar la lista de vértices en el camino.

**Observaciones 1.18.** La relación estar conectado es una relación de equivalencia.

**Observaciones 1.19.** En un camino se pueden repetir tanto vértices como aristas.

**Definición 1.20.** Un camino en el que cada vértice aparece sólo una vez, se llama **trayectoria**.

**Definición 1.21.** Sea  $C_l = (v_0, v_1, \dots, v_l)$  un camino. Si  $v_0 = v_l$  y los vértices  $v_i$ ,  $0 < i < l$ , son todos diferentes entre sí y de  $v_0$  entonces  $C_l$  es un **ciclo**, donde  $l$  es su número de aristas (o vértices),  $l \geq 3$ .

**Definición 1.22.** El número de aristas contenidas en un camino o ciclo, es su **longitud**, si alguna arista se repite, se cuenta nuevamente.

En la gráfica de Petersen (fig 1.3) mostramos un camino de  $v_1$  a  $v_3$  de longitud 5, siendo este  $(v_1, v_5, v_6, v_7, v_4, v_3)$ , un camino de longitud 3 de  $v_1$  a  $v_2$  es  $(v_1, v_2, v_1, v_2)$  y un  $C_6$  ciclo es  $(v_1, v_{10}, v_6, v_7, v_4, v_5, v_1)$ .

**Definición 1.23.** La **distancia** entre dos vértices, denotada por  $\partial(v_i, v_j)$ , es la menor longitud de todos los caminos que hay entre ellos, es decir,

$$\partial(v_i, v_j) = \min\{|P| : P \text{ es un } v_i v_j \text{ camino}\}.$$

**Definición 1.24.** El **diámetro** de una gráfica  $G$  es la máxima distancia entre cualesquiera dos de sus vértices, es decir,

$$\text{diámetro}(G) = \max\{\partial(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V(G)\}.$$

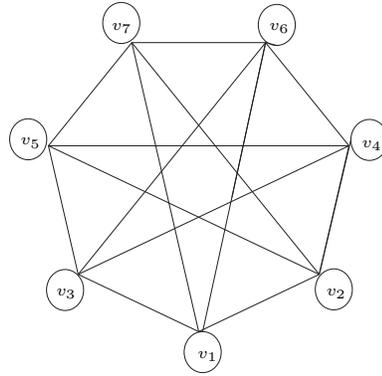


Figura 1.7: Gráfica de orden 7

**Ejemplo 1.25.** Las distancias entre los vértices de la gráfica de la figura 1.7, son las siguientes:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \partial(v_1, v_2) = 1 & & & & & & & \\
 \partial(v_1, v_3) = 1 & \partial(v_2, v_3) = 2 & & & & & & \\
 \partial(v_1, v_4) = 2 & \partial(v_2, v_4) = 1 & \partial(v_3, v_4) = 1 & \partial(v_4, v_5) = 1 & & & & \\
 \partial(v_1, v_5) = 2 & \partial(v_2, v_5) = 1 & \partial(v_3, v_5) = 1 & \partial(v_4, v_6) = 1 & \partial(v_5, v_6) = 2 & & & \\
 \partial(v_1, v_6) = 1 & \partial(v_2, v_6) = 2 & \partial(v_3, v_6) = 1 & \partial(v_4, v_7) = 2 & \partial(v_5, v_7) = 1 & \partial(v_6, v_7) = 1 & & \\
 \partial(v_1, v_7) = 1 & \partial(v_2, v_7) = 1 & \partial(v_3, v_7) = 2 & & & & & 
 \end{array}$$

El diámetro de dicha gráfica es 2. Haciendo un análisis similar en la gráfica de la figura 1.1, obtenemos que el diámetro es 5, que corresponde a la distancia entre los vértices  $v_1$  y  $v_6$  o bien entre los vértices  $v_1$  y  $v_7$ .

**Definición 1.26.** Una gráfica no vacía es **conexa** si todo par de vértices  $u$  y  $v$ , están conectados por un camino. Por definición, cada vértice está conectado consigo mismo.

Todas las gráficas que hemos utilizado hasta ahora para ejemplificar las definiciones, son conexas.

**Definición 1.27.** Decimos que  $G' = (V', E')$  es una **subgráfica** de  $G = (V, E)$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ . En este caso escribiremos  $G' \subseteq G$ .

**Observaciones 1.28.** La relación dada por  $\subseteq$  en el conjunto de subgráficas de una gráfica  $G$  es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

**Definición 1.29.** Las subgráficas conexas maximales de  $G$ , son llamadas **componentes conexas de  $G$**  o simplemente **componentes de  $G$** .

**Observaciones 1.30.** *Dado un vértice en la gráfica, si éste no está conectado con ningún otro, es por sí mismo una componente conexa maximal. Si es adyacente a algún vértice, consideramos la subgráfica conexa formada por los dos vértices y la arista. Si dichos vértices no son adyacentes a ningún otro, ésta es una componente conexa maximal. Continuando de esta forma, debido a que las gráficas que trabajamos tienen una cantidad finita de vértices y aristas, se justifica la existencia de una componente maximal conexa.*

**Ejemplo 1.31.** *La figura 1.9 nos muestra una subgráfica obtenida de la gráfica mostrada en la figura 1.8.*

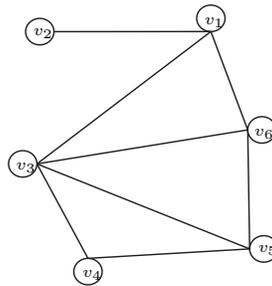


Figura 1.8: Gráfica  $G$ .

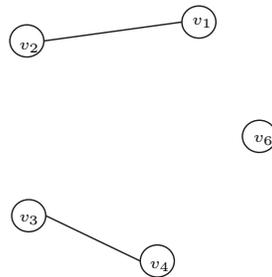


Figura 1.9: Subgráfica de  $G$ .

**Definición 1.32.** *Sea  $G' \subseteq G$ , si  $G'$  contiene todas las aristas de  $G$  que unen dos vértices en  $V'$ , entonces  $G'$  es una **subgráfica inducida** o **generada** por  $V'$  y se denotará por  $\langle V' \rangle$ . También podemos generar una gráfica al tomar un subconjunto  $E'$  de aristas y los vértices que son incidentes en ellas, dicha gráfica se denotará por  $\langle E' \rangle$ .*

**Ejemplo 1.33.** *En las figuras 1.10 y 1.11 ilustramos la definición anterior.*

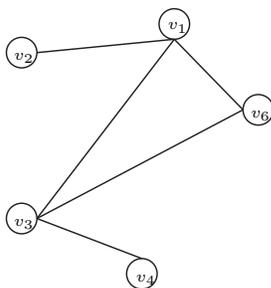


Figura 1.10: Subgráfica inducida por el conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$  de la gráfica  $G$ .

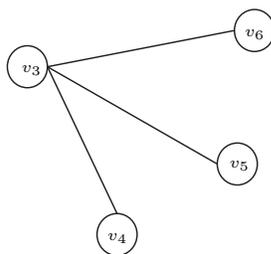


Figura 1.11: Subgráfica inducida por las aristas  $\{v_3, v_4\}$ ,  $\{v_3, v_5\}$ ,  $\{v_3, v_6\}$  de la gráfica  $G$ .

**Definición 1.34.** Sean  $G=(V,E)$  y  $G' \subseteq G$ . Si  $V' = V$ , entonces  $G'$  es llamada una **subgráfica generadora** de  $G$ .

**Ejemplo 1.35.** En la figura 1.12 se muestra una subgráfica generadora de la gráfica dada en la figura 1.8.

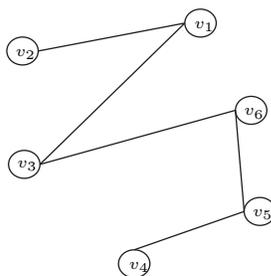


Figura 1.12: Subgráfica generadora de  $G$ .

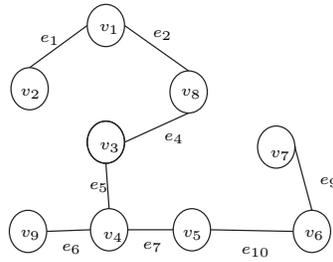


Figura 1.13: Árbol generador de la gráfica de la figura 1.1

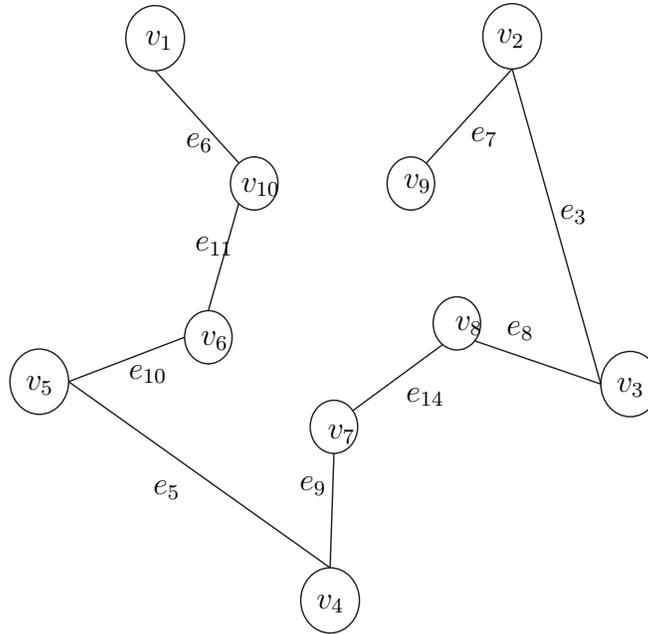


Figura 1.14: Árbol generador de la gráfica de Petersen, figura 1.3

**Definición 1.36.** Un **árbol** es una gráfica conexa que no contiene ciclos, al cual denotaremos generalmente por  $T$ . Un **bosque** es una gráfica cuyas componentes conexas son árboles.

**Ejemplo 1.37.** Las gráficas de las figuras 1.13 y 1.14, son ejemplos de árboles generadores.

**Definición 1.38.** Sean  $G$  una gráfica conexa y  $e$  una arista de  $G$ , entonces  $G \setminus e$  es una subgráfica de  $G$  que tiene el mismo conjunto de vértices de  $G$  y tiene todas las aristas de  $G$  excepto  $e$ . Una arista  $e$  en una gráfica conexa  $G$  es llamada una **arista de corte** o un **punte**, si al remover  $e$  de  $G$  la gráfica se vuelve disconexa. Más aún, si  $e$  es un puente de  $G$ , entonces  $G \setminus e$  tiene exactamente dos componentes.

Ejemplos de aristas de corte, los encontramos en la figura 1.1, siendo éstas  $e_5, e_6, e_7$ .

**Notación.** Si dos vértices  $v_i, v_j$  no son adyacentes en  $G$ , la gráfica obtenida al agregar la arista,  $e = \{v_i, v_j\}$ , se denotará por  $G+e$ .

**Lema 1.39.** *Sea  $G$  una gráfica conexa. Una arista  $e \in G$  es un puente de  $G$  si y sólo si  $e$  no pertenece a ningún ciclo de  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN:  $\Rightarrow$ ) Veamos que si  $e$  pertenece a algún ciclo, entonces  $e$  no es puente. Supongamos que  $e = \{u, v\}$  y que  $e$  pertenece a un ciclo, digamos  $C = (u, v, w_1, \dots, w_m, u)$ . La gráfica  $G \setminus e$  contiene al camino  $uv$ , a saber  $(u, w_m, \dots, w_1, v)$ , de modo que  $u$  está conectado con  $v$  en  $G \setminus e$ .

Sean  $u_1$  y  $v_1$  cualesquiera dos vértices de  $G \setminus e$ ; mostraremos que están conectados en  $G \setminus e$ .

Puesto que  $G$  es conexa hay un camino en  $G$  de  $u_1$  a  $v_1$ . Si  $e \notin P$ , entonces  $P$  es también camino en  $G \setminus e$  y  $u_1$  está conectado con  $v_1$  en  $G \setminus e$ .

Supongamos ahora que  $e \in P$ . Entonces el  $P$  camino puede ser expresado como  $(u_1, \dots, u, v, \dots, v_1)$  o  $(u_1, \dots, v, u, \dots, v_1)$ . En el primer caso,  $u_1$  está conectado con  $u$  y  $v$  está conectado con  $v_1$  en  $G \setminus e$ . Además  $u$  está conectado con  $v$  en  $G \setminus e$  y como estar conectado es una relación de equivalencia en  $V(G \setminus e)$ , tenemos que  $u_1$  está conectado con  $v_1$  en  $G \setminus e$ . El segundo caso es análogo.

Por lo tanto, si  $e$  pertenece al ciclo, entonces  $G \setminus e$  es conexa y  $e$  no es puente.

$\Leftarrow$ ) Veamos ahora que si  $e$  no es puente, entonces  $e$  pertenece a algún ciclo de  $G$ . Supongamos que  $e = \{u, v\}$  no es un puente. Entonces  $G \setminus e$  es conexa y de este modo hay una trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $G \setminus e$ . Así,  $P$  junto con  $e$  produce un ciclo en  $G$  que contiene a  $e$ .

□

**Lema 1.40.** *Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices, entonces:*

1. *Cualesquiera dos vértices de  $T$  son conectados por únicamente una trayectoria.*
2. *Para cualquier arista  $g$ , tal que,  $g \notin T$ , pero que conecte dos vértices de  $T$ , la gráfica  $T+g$  contiene exactamente un ciclo, el cual denotaremos por  $cyc(T, g)$ .*
3.  *$T$  tiene  $(n-1)$  aristas.*
4. *Un bosque de orden  $n$  con  $c$  componentes tiene  $n-c$  aristas.*

DEMOSTRACIÓN:

1.  $T$  es conexo, entonces existe al menos una trayectoria entre cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$ . Supongamos por reducción al absurdo que existe más de una trayectoria entre los vértices  $u$  y  $v$ . Sean  $P_1 = (u = u_1, u_2, \dots, u_m = v)$  y  $P_2 = (u = u'_1, u'_2, \dots, u'_r = v)$  dos de dichas trayectorias. Como  $P_1 \neq P_2$  como secuencia, ya que las trayectorias pueden tener el mismo conjunto de vértices, existe al menos un vértice que no pertenece a ambas trayectorias. Sea  $w$  el primer vértice que pertenece a ambas trayectorias pero su sucesor en  $P_1$  es distinto a su sucesor en  $P_2$ . Sea  $w'$  el siguiente vértice que pertenece a ambas trayectorias. Entonces la sección de  $P_1$  desde  $w$  hasta  $w'$  junto con la sección de  $P_2$  desde  $w$  hasta  $w'$  forman un ciclo en  $T$ , lo que contradice el que  $T$  sea un árbol. Por lo tanto existe un único camino de  $u$  a  $v$ .
2. Sea  $g = \{u, v\}$ . Por el inciso anterior tenemos que hay un único camino  $P$  de  $u$  hasta  $v$  dentro de  $T$ . La adición de  $g$  crea exactamente un ciclo  $P + g$ .
3. Por inducción sobre el número de vértices  $n$  en  $T$ .

Si  $n = 1$  o  $2$ , entonces en  $T$  no hay aristas o hay una arista respectivamente.

Asumimos que el enunciado es cierto para árboles con menos de  $n$  vértices.

Sean  $T$  un árbol con  $n$  vértices, con  $n > 2$ , y  $e$  una arista de  $T$ . Formemos  $T \setminus e$ , ésta es disconexa por el lema 1.39.

Tenemos dos componentes:  $T_1$  y  $T_2$  que a su vez son árboles. Supongamos que  $T_1$  tiene  $n_1$  vértices y  $q_1$  aristas,  $T_2$  tiene  $n_2$  vértices y  $q_2$  aristas,  $n_1 < n$  y  $n_2 < n$ . Entonces por la hipótesis de inducción,  $q_1 = n_1 - 1$ ,  $q_2 = n_2 - 1$ .

Regresando a  $T$ :  $n = n_1 + n_2$ ,  $q = q_1 + q_2 + 1$ . Sustituyendo:

$$q = q_1 + q_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1.$$

4. Sean  $T_1, \dots, T_c$  las componentes del bosque,  $n_i$  el orden de cada  $T_i$ . Por el inciso anterior tenemos  $|E(T_i)| = n_i - 1$  para toda  $i$ , así

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^c |E(T_i)| = \sum_{i=1}^c (n_i - 1) = \left( \sum n_i \right) - c = n - c.$$

□

**Ejemplo 1.41.** En la figura 1.14, si  $e = \{v_9, v_{10}\}$ , tenemos el siguiente ciclo:  $\text{cyc}(T, e) = (e_7, e_3, e_8, e_{14}, e_9, e_5, e_{10}, e_{11}, e, e_7)$ .

**Definición 1.42.** Sean  $G$  una gráfica conexa y  $\{V_1, V_2\}$  una partición del conjunto  $V(G)$ , es decir,  $V_1 \cup V_2 = V(G)$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y  $V_1, V_2 \neq \emptyset$ . Sea  $H$  el conjunto de todas las aristas que tienen un extremo en  $V_1$  y otro en  $V_2$ . Si  $H \neq \emptyset$  decimos que  $H$  es un **conjunto de corte**.

**Observaciones 1.43.**  $G \setminus H$  es desconexa. Además si  $u$  y  $v$  están conectados en  $G \setminus H$ , no pueden estar en elementos distintos de la partición. La razón es que si  $P$  es un  $uv$  camino en  $G \setminus H$ ,  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$ , consideremos  $w$  el primer vértice en  $P$  con  $w \in V_2$ ,  $z$  el vértice anterior. Entonces  $zw \in H$  pues  $z \in V_1$  y  $w \in V_2$ , lo cual es una contradicción, porque esa arista ya fue removida.

**Ejemplo 1.44.** Mostremos algunos conjuntos de corte en la gráfica de la figura 1.1:  $H_1 = \{e_5\}$ , donde  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_8\}$  y  $V_2 = \{v_9, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ,  $H_2 = \{e_6\}$ , con  $V_1 = \{v_9\}$  y  $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  su respectiva partición de vértices,  $H_3 = \{e_7\}$ , donde  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_9\}$  y  $V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}$ ,  $H_4 = \{e_1, e_4, e_6, e_7, e_9, e_{10}\}$ , con  $V_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_6\}$  y  $V_2 = \{v_1, v_5, v_7, v_8, v_9\}$ .

**Lema 1.45.** Sea  $T$  un árbol generador en una gráfica conexa  $G$ . Entonces para cada arista  $h$  de  $G$  que pertenezca a  $T$ , hay un único corte en  $G$  que contiene a  $h$  y a aristas que no están en  $T$ , a dicho corte lo denotaremos por  $\text{cut}(T, h)$ .

DEMOSTRACIÓN: Sean  $h \in T$  y  $u$  y  $v$  sus extremos. Dado que  $T \setminus h$  tiene dos componentes conexas y  $T$  es un árbol generador, consideramos la siguiente partición de los vértices de  $T$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_i | v_i \text{ está en la misma componente que } u \text{ en } T \setminus h\}, \\ V_2 &= \{v_i | v_i \text{ está en la misma componente que } v \text{ en } T \setminus h\}. \end{aligned}$$

Sea  $H$  el conjunto de corte formado por la colección de aristas con un extremo en  $V_1$  y otro en  $V_2$ . Por la definición del conjunto de corte  $H$ , éste consta únicamente de  $h \in T$  y aristas de  $G$  cuyos extremos, uno pertenece a  $V_1$  y otro a  $V_2$  y por lo tanto no están en  $T$ .

Además observemos que cualquier corte  $\tilde{H}$  de  $G$  formado por  $h$  y por aristas que no pertenecen a  $T$  induce esta misma partición de  $V(G)$  ya que al remover  $\tilde{H}$  de  $G$ , dado que  $h$  es la única arista del árbol generador  $T$  que se elimina, la gráfica obtenida tiene exactamente dos componentes conexas. El corte es entonces único ya que consiste de las aristas con un vértice en  $V_1$  y otro en  $V_2$ .

□

**Ejemplo 1.46.** *Considerando el árbol generador de la gráfica de Petersen, ver la figura 1.3, que se presenta en la figura 1.14 tenemos el siguiente conjunto de corte:  $cut(T, e_{14}) = (e_2, e_{12}, e_{14}, e_4)$ .*

# Capítulo 2

## Apuntes de Álgebra Lineal.

### 2.1. Matrices.

En esta sección estudiaremos las matrices y ciertas operaciones algebraicas definidas sobre ellas.

A menos que se diga lo contrario, todas las entradas de las matrices pertenecen al campo  $K$ , donde  $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ . Los elementos de  $K$  se llaman escalares. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix},$$

denotaremos por  $M_{p \times q}(K)$  el conjunto de todas las matrices de tamaño  $p \times q$  con elementos en  $K$ , en donde  $p$  es el número de renglones representados por  $A_1, A_2, \dots, A_p$  y  $q$  el número de columnas, escritas como  $A^1, A^2, \dots, A^q$ . En el caso en que  $p = q$ , se dice que una matriz  $A \in M_{p \times p}(K)$  es cuadrada.

En algunas ocasiones convendrá designar al elemento del  $i$  –ésimo renglón y la  $j$  –ésima columna de la matriz  $A$  por  $a_{ij}$  y otras como  $A_{ij}$ .

**Definición 2.1.** La **transpuesta de una matriz  $A$** , representada por  $A^T$ , es la matriz que se obtiene de  $A$ , cambiando el papel de las filas y las columnas, es decir,  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ . Si  $A$  es una matriz  $p \times q$ , entonces  $A^T$  es una matriz  $q \times p$ .

**Definición 2.2.** Una matriz cuadrada  $A$  es **simétrica** si  $A = A^T$ .

**Definición 2.3.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Si existe una matriz  $B$  del mismo tamaño tal que  $AB = BA = I$ , entonces se dice que  $A$  es **invertible** (o no singular) y  $B$  es llamada una **inversa** de  $A$ . En caso contrario,  $A$  es llamada **singular**.

**Observaciones 2.4.** Si  $A$  tiene inversa, ésta es única y se denota por  $A^{-1}$ .

**Definición 2.5.** Una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$  es llamada **matriz diagonal** si el elemento  $a_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$ , esto es, todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

**Definición 2.6.** Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es **diagonalizable** si existe una matriz invertible  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  es una matriz diagonal; se dice que la matriz  $P$  diagonaliza a  $A$ .

**Teorema 2.7.** Si  $A$  es una matriz simétrica real entonces,  $A$  es diagonalizable.

DEMOSTRACIÓN: Ver [11]

□

**Definición 2.8.** Sea  $A \in M_{p \times q}(\mathbb{C})$ . Definimos la **matriz conjugada transpuesta** de  $A$  como la matriz  $A^*$  de tamaño  $q \times p$  tal que  $(A^*_{ij}) = \overline{A_{ji}}$  para toda  $i, j$ . (La barra denota el conjugado complejo.)

**Definición 2.9.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre los números complejos. Un **producto interno**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $V$  es una regla que a cualquier pareja de elementos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $V$  le asocia un número complejo denotado por  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , y satisface las siguientes propiedades:

1.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .
2. Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}$  son elementos de  $V$ , entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle.$$

3. Si  $\alpha \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \text{ y } \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

**Teorema 2.10.** Sean  $V$  un espacio con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $A \in M_{n \times n}(K)$ , entonces  $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle A^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [07]

□

**Definición 2.11.** Sean  $V$  un espacio con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Decimos que  $\mathbf{x}$  es **ortogonal** a  $\mathbf{y}$  si  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  y lo denotamos por  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ . Dado  $U$  un subespacio de  $V$ , el **subespacio ortogonal** a  $U$  es  $\{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in U\}$  y se denota por  $U^\perp$ .

**Definición 2.12.** Si  $S$  es un conjunto de vectores de  $V$ , se dice que  $S$  es un **conjunto ortogonal** siempre que todos los pares de vectores distintos de  $S$  sean ortogonales. Un **conjunto ortonormal** es un conjunto ortogonal  $S$  con la propiedad además de que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$  para todo  $\mathbf{x}$  de  $S$ .

### 2.1.1. Rango de una matriz.

Sea  $A$  una matriz  $p \times q$  sobre un campo  $K$ , los renglones de  $A$  son vectores en  $K^q$ , y el subespacio de  $K^q$  generado por estos renglones es llamado el espacio renglón de  $A$  y se denotará como  $ren A$ . Similarmente, el espacio columna de  $A$  es el subespacio de  $K^p$  generado por sus columnas y se denotará por  $col A$ . Las dimensiones de espacio renglón y el espacio columna de  $A$  se llaman rango renglón y el rango columna de  $A$  respectivamente:

**Definición 2.13.** Sea  $A$  una matriz de tamaño  $p \times q$ . El **rango renglón** (rango columna) de una matriz es el número máximo de renglones (columnas) linealmente independientes.

**Teorema 2.14.** Sea  $A$  una matriz de tamaño  $p \times q$ , entonces el rango renglón y el rango columna de  $A$  son iguales.

DEMOSTRACIÓN: Ver [01]

□

**Definición 2.15.** El valor común del rango renglón y el rango columna de una matriz  $A$  se llama **rango** de  $A$  y se le denota por  $\text{rango}(A)$ .

El rango de una matriz se puede obtener reduciéndola mediante operaciones elementales a una matriz escalonada y contando el número de renglones no nulos en ésta.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Corolario 2.16.** *Si  $A$  es cualquier matriz, entonces  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^T)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [01]

□

**Definición 2.17.** *Sea  $A$  cualquier matriz  $p \times q$  con entradas en un campo  $K$ . Denotaremos por  $L_A$  a la **transformación lineal**  $L_A : K^q \rightarrow K^p$  definida por  $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  para cada vector columna  $\mathbf{x} \in K^q$ .*

Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre  $K$ ,  $\dim V = q$  y  $\dim W = p$ . De acuerdo a la definición 2.17 podemos ver a una matriz  $A$  como una transformación lineal de  $V$  en  $W$ ; de este modo, el espacio nulo de  $L_A$  es el conjunto de todos los vectores  $\mathbf{x} \in V$  tales que  $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = 0$ . Recordemos que para una transformación lineal de  $V$  a  $W$ , el núcleo es un subespacio de  $V$  y la imagen un subespacio de  $W$ . Si  $V$  es de dimensión finita, el rango de  $A$  es la dimensión de la imagen de  $L_A$  pues  $\text{Im } L_A$  corresponde a su espacio columna.

**Observaciones 2.18.**  $\text{rango } A = \dim(\text{Im } L_A)$ .

Existe una relación entre el rango de un producto y el rango de los factores, dada por:

**Teorema 2.19.** *Sean  $A$  una matriz  $p \times q$  y  $B$  una matriz  $q \times t$ . Entonces  $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A)$  y  $\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [13]

□

Para refinar un poco más la relación anterior, probaremos un teorema que es consecuencia de un importante resultado de Álgebra Lineal, llamado el Teorema de la dimensión. Antes recordaremos algunas cuestiones básicas referentes a espacios vectoriales.

**Teorema 2.20.** 1) Sea  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  un conjunto de generadores de un espacio vectorial  $V$  tal que es un subconjunto máximo de elementos linealmente independientes. Entonces  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$ .

2) Sea  $V$  un espacio vectorial y supóngase que tiene una base con  $n$  elementos. Entonces cualquier otra base de  $V$  es finita y tiene  $n$  elementos.

3) Sea  $V$  un espacio vectorial generado por una cantidad finita de vectores y sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V$ . Entonces existen vectores  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V$  tales que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es una base de  $V$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [12]

□

**Observaciones 2.21.** Por el teorema 2.20, si un espacio vectorial  $V$  tiene una base finita, se puede definir la dimensión del espacio vectorial como el número de elementos que hay en una base de  $V$  y se denota por  $\dim V$ .

**Teorema 2.22.** (De la dimensión.) Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un campo  $K$ , y sea  $T : V \rightarrow W$  cualquier transformación lineal. Si  $V$  tiene dimensión finita, entonces

$$\dim V = \dim(\text{Núc } T) + \dim(\text{Im } T).$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [08]

□

**Observaciones 2.23.** En la prueba se ve que si  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$  es base de  $\text{Núc } T$ , ver teorema 2.20 1), y se completa a  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l\}$  base de  $V$  entonces  $\{T\mathbf{w}_1, \dots, T\mathbf{w}_l\}$  es base de  $\text{Im } T$ . En esta parte utilizamos el teorema 2.20 3).

**Teorema 2.24.** Sean  $V, W, U$  espacios vectoriales sobre  $K$ ,  $V$  de dimensión finita, y sean  $S : V \rightarrow W$ ,  $T : W \rightarrow U$  transformaciones lineales, entonces

$$\dim(\text{Im } TS) = \dim(\text{Im } S) - \dim(\text{Núc } T \cap \text{Im } S).$$

DEMOSTRACIÓN: Observamos que  $\text{Núc } S \subseteq \text{Núc } TS$ .

Sean  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$  una base de  $\text{Núc } S$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l\}$  una base de  $\text{Núc } TS$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  una base de  $V$ . Ver el teorema 2.20.

Por el Teorema de la dimensión sabemos que  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l, S\mathbf{u}_1, \dots, S\mathbf{u}_k\}$  es una base de  $Im S$  y  $\{TS\mathbf{u}_1, \dots, TS\mathbf{u}_k\}$  es una base de  $Im TS$ .

Veamos que  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l\}$  es un base de  $(Núc T \cap Im S)$ .

Por construcción  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l\} \subseteq Im S$  y como cada  $\mathbf{w}_i \in Núc TS$  se tiene que  $\mathbf{0} = TS\mathbf{w}_i = T(S\mathbf{w}_i)$ , así  $S\mathbf{w}_i \in Núc TS$ ,  $\forall i = 1, \dots, l$  y  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l\} \subseteq Núc T \cap Im S$ . Además  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l\}$  es linealmente independiente pues es subconjunto de una base de  $Im S$ .

Veamos entonces que  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l\}$  genera a  $Núc T \cap Im S$ .

Sea  $v \in Núc T \cap Im S$ . Como  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l, S\mathbf{u}_1, \dots, S\mathbf{u}_k\}$  es base de  $Im S$ , entonces  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^l \lambda_i S\mathbf{w}_i + \sum_{j=1}^k \mu_j S\mathbf{u}_j$  con  $\lambda_i, \mu_j \in K$ ,  $\forall i, j$ .

Además  $\mathbf{v} \in Núc T$  por lo cual

$$\mathbf{0} = T\mathbf{v} = T\left(\sum \lambda_i S\mathbf{w}_i + \sum \mu_j S\mathbf{u}_j\right) = \sum \lambda_i TS\mathbf{w}_i + \sum \mu_j TS\mathbf{u}_j,$$

y como cada  $\mathbf{w}_i \in Núc (TS)$  tenemos

$$\mathbf{0} = \sum \mu_j TS\mathbf{u}_j.$$

Además  $\{TS\mathbf{u}_1, \dots, TS\mathbf{u}_k\}$  es linealmente independiente ya que es una base de  $Im TS$ , por lo cual se tiene  $\mu_j = 0 \forall j = 1, \dots, k$ .

Así  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^l \lambda_i S\mathbf{w}_i$ .

Concluimos entonces que  $\{S\mathbf{w}_1, \dots, S\mathbf{w}_l\}$  es una base de  $Núc T \cap Im S$ .

Finalmente

$$\dim (Im S) = l + k = \dim(Núc T \cap Im S) + \dim (Im TS)$$

por lo cual

$$\dim (Im TS) = \dim (Im S) - \dim(Núc T \cap Im S).$$

□

Ahora sí podemos relacionar de manera más precisa el rango de un producto con el rango de sus factores.

**Corolario 2.25.** Sean  $A, B$  matrices  $n \times n$  con entradas en un campo  $K$ . Entonces

$$\text{rango}(AB) = \text{rango}(B) - \dim(\text{Núc } L_A \cap \text{Im } L_B),$$

donde  $L_A$  y  $L_B$  son las correspondientes transformaciones lineales de  $K^n$  en  $K^n$  dadas por  $L_A \mathbf{x} = A\mathbf{x}$ ,  $L_B \mathbf{x} = B\mathbf{x}$  para  $\mathbf{x} \in K^n$ .

DEMOSTRACIÓN: Por la observación 2.18

$$\text{rango}(A) = \dim(\text{Im } L_A) \text{ y } \text{rango}(B) = \dim(\text{Im } L_B),$$

entonces usando el teorema 2.24 y nuevamente la observación 2.18,

$$\dim \text{Im}(L_A L_B) = \dim \text{Im } L_B - \dim(\text{Núc } L_A \cap \text{Im } L_B) = \text{rango } B - \dim(\text{Núc } L_A \cap \text{Im } L_B).$$

□

**Corolario 2.26.** Sea  $D$  una matriz  $n \times n$  con entradas en un campo  $K$ . Entonces

$$\text{rango } DD^T = \text{rango } D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sabemos por el corolario 2.25 que

$$\text{rango } DD^T = \text{rango } D^T - \dim(\text{Núc } L_D \cap \text{Im } L_{D^T}),$$

y además  $\text{rango } D^T = \text{rango } D$ , por el corolario 2.16. Basta ver entonces que  $\text{Núc } L_D \cap \text{Im } L_{D^T} = \{\mathbf{0}\}$ .

Sean  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  los renglones de  $D$ .

$$\mathbf{x} \in \text{Núc } L_D \text{ si sólo si } \mathbf{x} \perp \mathbf{d}_i \ \forall i \text{ si sólo si } \mathbf{x} \in \langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n \rangle^\perp.$$

Por otro lado sabemos que  $\mathbf{x} \in \text{Im } L_{D^T}$  si y sólo si  $\mathbf{x}$  está en el espacio de columnas de  $D^T$ , es decir, en el espacio de renglones de  $D$ , por lo cual

$$\mathbf{x} \in \text{Im } L_{D^T} \text{ si sólo si } \mathbf{x} \in \langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n \rangle.$$

Así

$$\text{Núc } L_D \cap \text{Im } L_{D^T} = \langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n \rangle^\perp \cap \langle \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n \rangle = \{\mathbf{0}\}.$$

□

## 2.2. Determinantes.

Existen diversas formas de definir el determinante de una matriz. Una de ellas es usando permutaciones.

**Definición 2.27.** Una **permutación** de un conjunto  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  es una función biyectiva  $\pi : I_n \rightarrow I_n$ . Denotaremos con  $\mathbf{S}_n$  al conjunto de todas las permutaciones de  $I_n$ . Notamos que el número de tales permutaciones es  $n!$ . Dadas  $\pi, \beta \in S_n$ ,  $\beta\pi$  denotará la composición  $\pi$  seguida de  $\beta$ .

**Ejemplo 2.28.** Sea  $\pi : I_7 \rightarrow I_7$  como sigue:  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ , y  $\beta : I_7 \rightarrow I_7$  es  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ , entonces  $\beta\pi : I_7 \rightarrow I_7$  tiene como resultado  $\beta\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Definición 2.29.** Sea  $\pi$  una permutación en  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Si  $i < j$ , pero  $\pi(i) > \pi(j)$ , entonces llamamos al par  $(\pi(i), \pi(j))$  una **inversión** de la permutación  $\pi$ .

**Definición 2.30.** Sea  $\pi$  una permutación. El **signo** de  $\pi$ , que denotaremos por  $\varepsilon(\pi)$ , es igual a  $(-1)^n$ , donde  $n$  es el número de inversiones en  $\pi$ . Si  $n$  es par,  $\varepsilon(\pi) = 1$ , decimos que  $\pi$  es una permutación par, y si  $n$  es impar,  $\varepsilon(\pi) = -1$ , decimos que  $\pi$  es una permutación impar.

**Definición 2.31.** Una **transposición** es una permutación que intercambia dos enteros  $i$  y  $j$ ,  $i \neq j$ , pero que deja fijos a todos los demás. A la transposición la denotaremos por  $(ij)$ .

Toda permutación se puede descomponer como producto de transposiciones y el signo de la permutación depende de la paridad del número de factores en tal descomposición:

**Lema 2.32.** Si dos enteros son transpuestos en una permutación, el signo de la permutación cambia; es decir, si  $\pi, \tau \in S_n$  y  $\tau$  es una transposición  $\varepsilon(\tau\pi) = -\varepsilon(\pi)$ , esto es, si la permutación original era par, entonces la permutación final es impar, y viceversa.

DEMOSTRACIÓN: Ver [19]

□



en donde  $S_n$  es el conjunto de todas las permutaciones de  $I_n$  y  $\varepsilon(\pi) = 1$  si  $\pi$  es par y  $\varepsilon(\pi) = -1$  si  $\pi$  es impar.

Cuando  $n$  crece, el número de términos en el determinante llega a ser astronómico. Por consiguiente, usaremos métodos indirectos para evaluar determinantes sin usar la definición.

Ahora escribiremos las propiedades básicas de los determinantes.

**Teorema 2.37.** *Sea  $A$  cualquier matriz cuadrada.*

1. *Si  $A$  tiene una fila o una columna de ceros, entonces  $\det(A)=0$ .*
2. *Si dos filas o columnas distintas son intercambiadas, el determinante de la matriz resultante es  $-\det(A)$ .*
3. *Si cualquier fila o columna de  $A$  es multiplicada por el escalar  $k$ , entonces el determinante de la matriz resultante es  $k \det(A)$ . Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces  $\det(kA)=k^n \det(A)$ .*
4. *Si dos filas o dos columnas son proporcionales, entonces  $\det(A)=0$ .*
5. *Si un múltiplo de una fila de  $A$  es sumado a una fila diferente (o un múltiplo de una columna de  $A$  es sumado a una columna diferente), el determinante de la matriz resultante es  $\det(A)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [16]

□

**Teorema 2.38.** *Si  $A$  es una matriz triangular, entonces  $\det(A)$  es el producto de las entradas en la diagonal principal.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [16]

□

El resultado anterior se puede generalizar del siguiente modo.

**Teorema 2.39.** *Considere las matrices en bloques  $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{pmatrix}$  donde  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas. Entonces  $\det\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$*

$$\text{y } \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ Y & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [16]

□

A continuación mencionaremos otras propiedades muy importantes del determinante de una matriz:

**Teorema 2.40.** *Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [01]

□

**Teorema 2.41.** *Si  $A$  es cualquier matriz cuadrada,  $\det(A^T) = \det(A)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [13]

□

**Teorema 2.42.** *Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [01]

□

**Definición 2.43.** *Sea  $A \in M_{p \times q}(K)$ ,  $n$  un entero tal que  $n \geq 1$  y  $n \leq p, q$ , podemos formar una matriz cuadrada  $n \times n$ , digamos  $A' \in M_{n \times n}(K)$  al tomar  $n$  renglones y  $n$  columnas de  $A$ . El determinante de la matriz  $A'$  es llamado **menor de orden  $n$** .*

**Definición 2.44.** Un **menor principal** es un menor con igual elección de índices de renglones y columnas. Se denotará por  $M_{(i_1 i_2 \dots i_n | i_1 i_2 \dots i_n)}$  al menor de orden  $n$  obtenido de elegir los renglones  $i_1 i_2 \dots i_n$  y las columnas  $i_1 i_2 \dots i_n$ .

**Ejemplo 2.45.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \end{pmatrix},$$

entonces

$$M_{(2356|2356)} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} & a_{26} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} & a_{56} \\ a_{62} & a_{63} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

**Definición 2.46.** Sea  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$  sobre  $K$ . El **menor  $ij$**  de una matriz cuadrada  $A$ , denotado por  $M_{ij}(A)$  o simplemente  $M_{ij}$ , es definido como el determinante de la matriz  $(n-1) \times (n-1)$  obtenida de  $A$  al quitar la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima.

**Ejemplo 2.47.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

**Definición 2.48.** El número  $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$  se denomina **cofactor  $ij$**  de  $A$  y  $(-1)^{i+j}$  es llamado el signo de la posición  $ij$ .

**Definición 2.49.** Si  $A$  es una matriz cuadrada, la **matriz de cofactores de  $A$**  es definida como la matriz  $(C_{ij}(A))$  cuya entrada  $ij$  es el cofactor  $ij$  de  $A$ . La matriz **adjunta de  $A$** , denotada por  $\text{adj}(A)$ , es la transpuesta de la matriz de cofactores; en símbolos,

$$\text{adj}(A) = [C_{ij}(A)]^T.$$

**Teorema 2.50.** Sean  $A$  y  $B$  cualesquiera matrices cuadradas de tamaño  $n$ , entonces

1.  $A (\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = \det(A)I_n$ .
2. Para cualquier escalar  $k$  se tiene,  $\text{adj}(kA) = k^{n-1}(\text{adj } A)$ .
3. Si  $A$  y  $B$  son invertibles, entonces  $\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [14]

□

**Observaciones 2.51.** Para cualquier matriz  $B$  simétrica, la  $\text{adj } B$  también lo es. Esto es porque al calcular el  $C_{ij}$  la matriz que se obtiene es la transpuesta de calcular  $C_{ji}$ .

En el capítulo 6 necesitaremos los siguientes resultados técnicos.

**Teorema 2.52.** Si  $J$  es una matriz cuyas entradas son todas iguales a 1, entonces  $\text{adj}(nI - J) = n^{n-2}J$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$nI - J = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Calculemos cada cofactor para obtener  $\text{adj}(nI - J)$ .

Caso 1.-  $C_{ij}$  con  $i = j$ . Al eliminar el renglón  $i$  y la columna  $j = i$  de  $nI - J$ , tenemos:

$$C_{ij} = (-1)^{i+i} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

restando el último renglón a los demás, se tiene

$$C_{ij} = (-1)^{2i} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

sumando a la última columna las restantes obtenemos

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)},$$

y debido a que es una matriz triangular inferior tenemos  $C_{ii} = n^{n-2}$ .

Caso 2.-  $C_{ij}$  con  $i \neq j$ .

Supongamos primero que  $i > j$ .

Al eliminar el renglón  $i$  y la columna  $j$  de  $nI - J$ , en el menor  $ij$  todas las entradas del renglón  $j$  y de la columna  $i - 1$  son  $-1$ . Restando el renglón  $j$  a los demás, en la columna  $i - 1$  aparecerá entonces un  $-1$  en la posición  $j, i - 1$  y cero en el resto de la columna. Desarrollando el menor a través de dicha columna tenemos

$$M_{ij} = (-1)^{j+(i-1)}(-1) \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} = (-1)^{j+i} n^{n-2}.$$

Así, el cofactor  $ij$  es

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} (-1)^{j+i} n^{n-2} = (-1)^{2(i+j)} n^{n-2} = n^{n-2}.$$

Análogamente se tiene el resultado si  $i < j$ . De este modo cada cofactor de la matriz  $nI - J$  es  $n^{n-2}$ . Por lo que concluimos que  $\text{adj}(nI - J) = n^{n-2} J$ .

□

**Lema 2.53.** *Sea  $F$  cualquier matriz  $n \times m$ . Consideremos la matriz  $F_0$  que se obtiene de  $F$  al quitar el renglón  $n$ .*

1. *Si tomamos el producto  $FF^T$  y retiramos el renglón  $n$  y la columna  $n$ , es lo mismo que tomar  $F_0F_0^T$ .*
2. *El cofactor  $nn$  de  $FF^T$  es  $C_{nn} = \det F_0F_0^T$ .*

DEMOSTRACIÓN:

1. Veamos cómo es  $(FF^T)_{ij}$  con  $i, j \neq n$ . Tenemos que

$$(FF^T)_{ij} = F_i \cdot (F^T)^j = F_i \cdot F_j = (F_0)_i \cdot (F_0)_j = (F_0)_i \cdot (F_0^T)^j = (F_0F_0^T)_{ij}.$$

2.  $C_{nn} = (-1)^{n+n}M_{nn}$ , por el inciso 1) la matriz que se obtiene de  $FF^T$  quitando el renglón  $n$  y la columna  $n$  es igual a  $F_0F_0^T$ . Así

$$C_{nn} = (-1)^{2n} \det F_0F_0^T = \det F_0F_0^T.$$

□

A continuación, veremos dos resultados sobre determinantes que nos son de gran utilidad en el presente trabajo y que usualmente no se mencionan en los cursos básicos de Álgebra Lineal, por lo que presentamos las demostraciones correspondientes.

**Observaciones 2.54.** *Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Tenemos que*

$$(xI - A)_{ij} = x\delta_{ij} - a_{ij}$$

y así

$$\det(xI - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)}).$$

Recordemos que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

**Lema 2.55.**

$$\det(xI - A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} S_k x^k$$

donde  $S_k$  es la suma de todos los menores principales de  $A$  de orden  $n - k$

---

DEMOSTRACIÓN: Queremos ver cuál es el coeficiente de  $x^k$  en el desarrollo del determinante dado en la observación 2.54. Para obtener un término  $x^k$  necesitamos desarrollar el producto de modo que elijamos a  $x$  en exactamente  $k$  de sus factores, digamos en los factores  $i_1, \dots, i_k$ , y elegir el término  $-a_{i\sigma(i)}$  en los demás, digamos en  $i_{k+1}, \dots, i_n$ . La permutación  $\sigma$  asociada fija entonces a  $i_1, \dots, i_k$ .

Así

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)}) = (x - a_{i_1 i_1})(x - a_{i_2 i_2}) \cdots (x - a_{i_k i_k}) \varepsilon(\sigma) \prod_{t=k+1}^n (x\delta_{i_t \sigma(i_t)} - a_{i_t \sigma(i_t)}).$$

Sean

$$f(x) = (x - a_{i_1 i_1})(x - a_{i_2 i_2}) \cdots (x - a_{i_k i_k})$$

y

$$g(x) = \varepsilon(\sigma) \prod_{t=k+1}^n (x\delta_{i_t \sigma(i_t)} - a_{i_t \sigma(i_t)})$$

al desarrollar de la forma antes descrita obtenemos el término  $x^k$  en  $f(x)$  y su coeficiente es el producto

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{t=k+1}^n (-a_{i_t \sigma(i_t)}) = \varepsilon(\sigma) \prod_{t=k+1}^n (-1)^{n-k} a_{i_t \sigma(i_t)}$$

en  $g(x)$ , que definiendo  $\tilde{\sigma} \in S_{n-k}$  como  $\sigma \upharpoonright_{i_{k+1}, \dots, i_n}$  se puede reescribir como

$$\varepsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{t=k+1}^n (-1)^{n-k} a_{i_t \tilde{\sigma}(i_t)}.$$

El término  $x^k$  que aparece al desarrollar de esta manera, con permutaciones que fijan  $i_1, \dots, i_k$ , tiene entonces coeficiente

$$\sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-k}} \varepsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{t=k+1}^n (-1)^{n-k} a_{i_t \tilde{\sigma}(i_t)} = (-1)^{n-k} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-k}} \varepsilon(\tilde{\sigma}) \prod_{t=k+1}^n a_{i_t \tilde{\sigma}(i_t)}$$

que corresponde a un menor de  $A$  de orden  $n - k$  multiplicado por  $(-1)^{n-k}$ .

Además en este menor no aparecen elementos del renglón  $i_t$  ni de la columna  $i_t$ , para  $t = \{1, \dots, k\}$ , de la matriz  $A$ , es decir, es un menor principal de orden  $n - k$ . Ver la definición 2.44.

Como esto ocurre para cada elección de  $k$  valores de  $\{1, \dots, n\}$ , en el desarrollo final aparecerá la suma de todos los menores principales de  $A$  de orden  $n - k$  multiplicados por  $(-1)^{n-k}$ .

□

Terminaremos esta sección con un resultado que será de utilidad en el capítulo 6.

**Lema 2.56.** *Sean  $A$  una matriz con  $n$  renglones y  $m$  columnas y  $\pi \in S_n$ .*

*Sea  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ . Si  $f$  no es inyectiva entonces,*

$$\sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tales que  $f(i) = f(j)$  y  $\tau$  la transposición  $\tau = (ij)$ . Tenemos

$$a_{\pi\tau(i)f(i)} = a_{\pi(j)f(i)} = a_{\pi(j)f(j)},$$

$$a_{\pi\tau(j)f(j)} = a_{\pi(i)f(j)} = a_{\pi(i)f(i)},$$

entonces

$$\begin{aligned} (a_{if(i)} a_{\pi\tau(i)f(i)}) (a_{jf(j)} a_{\pi\tau(j)f(j)}) &= (a_{if(i)} a_{\pi(j)f(i)}) (a_{jf(j)} a_{\pi(i)f(j)}) \\ &= (a_{if(i)} a_{\pi(i)f(i)}) (a_{jf(j)} a_{\pi(j)f(j)}) \end{aligned}$$

Además como  $\pi\tau(l) = \pi(l) \quad \forall l \neq i, j$

$$(a_{lf(l)} a_{\pi\tau(l)f(l)}) = (a_{lf(l)} a_{\pi(l)f(l)}) \quad \forall l \neq i, j$$

entonces

$$a_{1f(1)} a_{\pi\tau(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi\tau(n)f(n)} = a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)} \quad (2.1)$$

Como  $S_n$  es un grupo,  $\{\pi \mid \pi \in S_n\} = \{\pi\tau \mid \pi \in S_n\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)} &= \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi\tau) a_{1f(1)} a_{\pi\tau(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi\tau(n)f(n)} \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi\tau(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi\tau(n)f(n)} \\ &= - \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)}, \end{aligned}$$

esta última igualdad se tiene por (2.1).

Así, esta suma es igual a su inverso aditivo y por tanto es cero. □

**Teorema 2.57.** *(Teorema de Cauchy-Binet). Sea  $A$  cualquier matriz con  $n$  renglones y  $m$  columnas. Entonces*

$$\det(AA^T) = \sum_I (\det A_I)^2,$$

donde la suma es sobre todos los subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, m\}$  con  $n$ -elementos, es decir,  $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  con  $|I| = n$ , y donde  $A_I$  denota a la matriz obtenida de  $A$  eligiendo sólo las columnas de  $A$  cuyos índices pertenezcan a  $I$ .

---

DEMOSTRACIÓN: Denotaremos por  $M = AA^T$ . Expandiremos el determinante de  $M$  de acuerdo con la definición de determinante, es decir,

$$\det M = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) m_{1\pi(1)} m_{2\pi(2)} \cdots m_{n\pi(n)}. \quad (2.2)$$

Ahora sustituimos los valores de los elementos  $m_{ij}$  de la matriz  $M$ ,  $m_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk}$ , en (2.2).

$$\det M = \sum_{\pi} \varepsilon(\pi) \left( \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{\pi(1)k} \right) \cdots \left( \sum_{k=1}^m a_{nk} a_{\pi(n)k} \right).$$

Al realizar los productos debemos elegir un sumando de cada factor, así que tenemos términos del tipo

$$a_{1k_1} a_{\pi(1)k_1} a_{2k_2} a_{\pi(2)k_2} \cdots a_{nk_n} a_{\pi(n)k_n},$$

donde  $k_1, \dots, k_n \in \{1, \dots, m\}$  corresponden a cuál sumando fue el elegido de los factores  $1, \dots, n$  respectivamente. Podemos representar esta elección mediante una función  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ , donde  $f(i) = k_i$ . Así tenemos que

$$\det M = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) \sum_{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}} a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)}$$

e intercambiando las sumas

$$\det M = \sum_{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)}.$$

Por el lema 2.56, si  $f$  no es inyectiva el sumando correspondiente es cero, por lo que basta considerar funciones inyectivas, es decir,

$$\det(AA^T) = \det M = \sum_{\substack{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} \\ f \text{ inyectiva}}} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)}. \quad (2.3)$$

Sean  $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  con  $|I| = n$  y  $A_I$  la matriz correspondiente.

Aplicando (2.3) a la matriz  $A_I$  tenemos

$$\begin{aligned} (\det A_I)^2 &= \det(A_I) \det(A_I) = \det(A_I) \det(A_I^T) = \det(A_I A_I^T) = \\ &= \sum_{\substack{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow I \\ f \text{ inyectiva}}} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} (\det A_I)^2 &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} \sum_{\substack{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow I \\ f \text{ inyectiva}}} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)} = \\ &= \sum_{\substack{f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} \\ f \text{ inyectiva}}} \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1f(1)} a_{\pi(1)f(1)} \cdots a_{nf(n)} a_{\pi(n)f(n)} = \det AA^T. \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se debe a que toda  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  determina de manera única un subconjunto  $I$  de  $\{1, \dots, m\}$  con  $|I| = n$ , e  $I = \text{Im } f$ .  $\square$

## 2.3. Valores y vectores propios.

Para finalizar este capítulo recordaremos las definiciones y resultados básicos de los valores y vectores propios de una matriz.

**Definición 2.58.** *Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $K$ . Si  $v$  es una  $n$ -ada distinta de cero para la que se cumple*

$$Av = \lambda v,$$

donde  $\lambda$  es un escalar, entonces  $v$  se llama **vector propio** de  $A$ , y se dice que corresponde al **valor propio**  $\lambda$  de  $A$ .

La ventaja de trabajar con vectores propios es que la transformación lineal dada por la matriz tiene un comportamiento muy sencillo en éstos.

Los valores propios pueden calcularse resolviendo una ecuación construida a partir del determinante de una matriz:

**Definición 2.59.** *Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $K$ . La matriz*

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz característica* de  $A$ . El determinante de la matriz característica de  $A$ ,  $\det(\lambda I - A)$  se llama **polinomio característico** de  $A$ . Llamaremos *ecuación característica* de  $A$  a  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

**Teorema 2.60.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada de tamaño  $n$  sobre un campo  $K$ . Un escalar  $\lambda \in K$  es un valor propio de  $A$  si y sólo si  $\lambda$  es una raíz del polinomio característico de  $A$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [13]

□

Supongamos que en el polinomio  $\det(\lambda I - A) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$  algunos de los  $\lambda_i$  coinciden. Agrupando los factores repetidos podemos escribir el polinomio como

$$(x - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x - \lambda_m)^{\alpha_m}$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son distintos y los  $\alpha_i$  son enteros,  $\alpha_i \geq 1$ .

**Definición 2.61.** *Si  $\det(\lambda I - A) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x - \lambda_m)^{\alpha_m}$ , donde los  $\lambda_i$  son distintos, llamamos a  $\alpha_i$  la **multiplicidad algebraica** de  $\lambda_i$ . Observamos que si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  son los valores propios de  $A$ , entonces el número de veces que aparece  $\lambda_i$  es justo  $\alpha_i$ , también que  $\alpha_i \geq 1$ , y por último que  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$ . Así si cada valor propio es contado de acuerdo a su multiplicidad algebraica, entonces el total de valores propios es  $n$ .*

Ahora enunciaremos algunos resultados sobre valores propios, cuando la matriz es simétrica.

**Teorema 2.62.** *Los valores propios de una matriz simétrica  $A$  con elementos reales son números reales.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $A$  una matriz real y simétrica y  $\lambda$  un valor propio de  $A$ . Tenemos que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , para algún  $\mathbf{v} \neq 0$ . Como  $A$  es una matriz simétrica con elementos reales, concluimos que  $A^* = \overline{A^T} = A^T = A$ . Sea  $\langle, \rangle$  el producto interno usual de  $\mathbb{C}^n$ , usando la definición 2.9 y el teorema 2.10 tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda \|\mathbf{v}\|^2 &= \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^*\mathbf{v} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\lambda} \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

como  $\mathbf{v} \neq 0$  tenemos que  $\|\mathbf{v}\| \neq 0$ , así  $\lambda \|\mathbf{v}\|^2 = \overline{\lambda} \|\mathbf{v}\|^2$  implica que  $\overline{\lambda} = \lambda$  por lo que  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

□

**Definición 2.63.** Una matriz cuadrada  $A$  real simétrica es llamada **real semi-definida positiva** si y sólo si  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$  para todo vector no nulo  $\mathbf{x} \in K^n$ .

**Teorema 2.64.** Una matriz simétrica  $A$  es semidefinida positiva si y sólo si los valores propios de  $A$  son no negativos.

DEMOSTRACIÓN:  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $A$  es positiva definida y sea  $\lambda$  cualquier valor propio de  $A$ . Si  $\mathbf{x}$  es un vector propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ , entonces  $\mathbf{x} \neq 0$  y  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , de modo que

$$0 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2$$

donde  $\|\mathbf{x}\|$  es la norma euclidiana de  $\mathbf{x}$ . Como  $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$ , se deduce que  $\lambda \geq 0$ , que es lo que se quería probar.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que los valores propios de  $A$  son no negativos. Sea  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por vectores propios ortonormales de  $A$  asociados a los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , ver el teorema 2.7, entonces cualquier vector  $\mathbf{x}$  se expresa como combinación lineal de ellos, es decir,  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ , así que,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n A\mathbf{v}_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n, \\ &= \lambda_1 \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n)^T (\lambda_1 \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n \mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1^2 \lambda_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n \|\mathbf{v}_n\|^2, \\ &= \lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2 \geq 0 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

### 2.3.1. Teorema de Cayley-Hamilton.

Sea  $A$  una matriz cuadrada con coeficientes en  $K$ , podemos formar potencias de  $A$ :

$$A^0 = I, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A,$$

y en general  $A^{n+1} = A^n A$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

---

**Definición 2.65.** Sea  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  cualquier polinomio con coeficientes en un campo  $K$ . Sea  $A$  una matriz cuadrada con coeficientes también en  $K$ . Definimos el **polinomio  $f(A)$**  como  $a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$ , donde  $I$  es la matriz identidad. En el caso que  $f(A)$  sea la matriz cero, entonces  $A$  se llama un **cero o raíz del polinomio  $f(x)$** .

**Teorema 2.66.** (Teorema de Cayley-Hamilton.) Toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico.

DEMOSTRACIÓN: Ver [18]

□

Obsérvese que existen polinomios diferentes de cero  $f(t)$  tales que  $f(A) = 0$ ; por ejemplo el polinomio característico de  $A$ . Entre estos polinomios consideramos el siguiente.

**Definición 2.67.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. El **polinomio mínimo  $m(\lambda)$**  de  $A$  es el polinomio mónico (con coeficiente principal 1) de menor grado tal que  $m(A) = 0$ .

**Teorema 2.68.** El polinomio mínimo de una matriz  $A$  existe, es único y divide a cualquier otro polinomio que tenga a  $A$  como raíz, en particular divide al polinomio característico de  $A$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [18]

□

**Teorema 2.69.** *Los polinomios característico y mínimo de una matriz  $A$  tienen las mismas raíces.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [18]

□

**Corolario 2.70.** *Un escalar  $\lambda$  es un valor propio para una matriz  $A$  si y sólo si es una raíz del polinomio mínimo de  $A$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [18]

□

**Ejemplo 2.71.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . El polinomio característico de  $A$

es el  $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1)$ . Sabemos que  $m(\lambda) \mid p(\lambda)$  y además posee los mismos factores irreducibles, entonces  $m(\lambda)$  puede ser uno de los siguientes:  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ ;  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ ;  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$ . Por la definición 2.67,  $m(A) = 0$ . Calculando,  $(A - I)(A - 2I) \neq 0$  pero  $(A - I)(A - 2I)^2 = 0$ . Así  $m(\lambda)$  debe de ser  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$ .

**Teorema 2.72.**  *$A$  es diagonalizable si y sólo si el polinomio mínimo de  $A$  tiene la forma  $m(\lambda) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$  donde los  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son elementos distintos en  $K$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [11]

□



# Capítulo 3

## El espectro de una gráfica

En este capítulo veremos cómo codificar una gráfica mediante una matriz y estudiaremos algunos resultados que relacionan las características de la gráfica con las de dicha matriz.

### 3.1. La matriz de adyacencia y su polinomio característico.

Dada una gráfica  $G$  una pregunta natural es, ¿cómo podemos describir la relación que hay entre  $V(G)$  y  $E(G)$ ? Pues construyendo un arreglo que toma en cuenta las adyacencias, asignando valores, en donde los más sencillos son el 0 y el 1. Así, tenemos la siguiente definición:

**Definición 3.1.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ . La **matriz de adyacencia de  $G$** , es una matriz de  $n \times n$ ,  $A = A(G)$  cuyas entradas  $a_{ij}$  están dadas de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Ejemplo 3.2.** Consideremos la gráfica  $K_4$  con  $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y

$$E(K_4) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}.$$

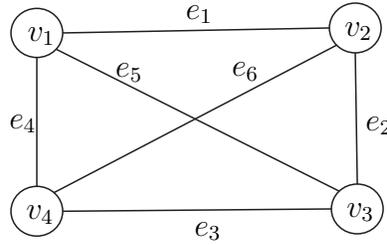


Figura 3.1: Grafica \$K\_4\$

Así pues, su matriz de adyacencia es:

$$A = A(K_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Observaciones 3.3.** Sea \$A\$ una matriz de adyacencia, entonces

1. \$A\$ es una matriz real ya que sus elementos son sólo 0 y 1, y simétrica debido a que si el vértice \$v\_i\$ es adyacente al vértice \$v\_j\$, en las posiciones \$A\_{ij}\$ y \$A\_{ji}\$ habrá un 1, si no son adyacentes en ambas posiciones habrá un 0.
2. En la diagonal principal los elementos siempre son ceros porque no se admiten lazos.
3. La traza de \$A\$ es cero porque en la diagonal principal de \$A\$ los elementos son cero.

**Definición 3.4.** Ya que \$A = A(G)\$, los valores propios de \$A\$ son llamados los valores propios de \$G\$, al polinomio característico \$\det(\lambda I - A)\$ le llamaremos **polinomio característico de \$G\$** y lo denotaremos por \$\chi(G; \lambda)\$. Ver la definición 2.61.

Así, el polinomio característico de \$G\$ es de la forma:

$$\chi(G; \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \dots + c_n$$

Para el ejemplo 3.2, el polinomio característico de \$A\$ es:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3).$$

Dado que toda matriz de adyacencia es simétrica, sus valores propios son reales, ver el teorema 2.62.

**Definición 3.5.** *El espectro de una gráfica  $G$  es el conjunto de los valores propios de  $A(G)$ , junto con sus multiplicidades. Estos son descritos mediante un arreglo, donde en el primer renglón aparecen los valores propios ordenados de mayor a menor, y en el segundo renglón, su multiplicidad correspondiente.*

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{pmatrix}$$

Para la gráfica  $K_4$  del ejemplo 3.2, el espectro es:

$$\text{Spec}(K_4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pues los valores propios son:  $\lambda_0 = 3$  y  $\lambda_1 = -1$  cuyas multiplicidades son  $m(\lambda_0) = 1$  y  $m(\lambda_1) = 3$ .

¿Es posible que los coeficientes del polinomio característico de una gráfica  $G$  puedan ser expresados en términos de ciertas características de  $G$ ?

Para dar una respuesta, es necesario tener el siguiente resultado.

**Proposición 3.6.** *Los coeficientes del polinomio característico de la gráfica  $G$  satisfacen:*

1.  $c_1 = 0$ ;
2.  $-c_2$  es el número de aristas de  $G$ ;
3.  $-c_3$  es el doble del número de triángulos en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que el polinomio característico de  $G$  es

$$\chi(G; \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \dots + c_n$$

y por el lema 2.55

$$\det(xI - A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} S_k x^k.$$

Dos polinomios son iguales si sus coeficientes correspondientes lo son, por lo que el coeficiente  $c_1 = -S_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = -\text{tr}A = 0$ , ya que en la diagonal principal de  $A$  los elementos son cero.

Para el coeficiente  $c_2 = S_{n-2}$ , es decir, la suma de todos los menores principales de orden 2 no nulos, que son de la forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Este menor es resultado de una pareja de vértices en  $G$  que son adyacentes y el valor de dicho determinante es  $-1$ . Obtendremos entonces un menor de esa forma, por cada pareja de vértices adyacentes en  $G$ , es decir, por cada arista. De este modo,  $c_2 = -|E(G)|$ .

Para el coeficiente  $c_3 = -S_{n-3}$  existen esencialmente tres posibilidades de menor principal con tres renglones y tres columnas:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

y de ellos, el único cuyo valor no es cero es el último que muestra adyacencia entre tres vértices cualesquiera de  $G$ , es decir, el que corresponde a un triángulo en  $G$  y su valor es 2, de donde se sigue el resultado.

□

Con esta proposición, podemos darnos cuenta de la estrecha relación entre un objeto algebraico y una gráfica.

**Ejemplo 3.7.** *Para la gráfica  $K_4$ , el coeficiente  $c_2$  es  $-6$  y  $6$  es el número de aristas, el coeficiente  $c_3$  es igual a  $-8$ , donde  $8$  es el doble del número de triángulos presentes en la gráfica. Dichos triángulos son  $(v_1, v_2, v_4)$ ,  $(v_1, v_3, v_4)$ ,  $(v_2, v_3, v_4)$ ,  $(v_1, v_2, v_3)$*

## 3.2. El álgebra de adyacencia.

**Definición 3.8.** *El **álgebra de adyacencia** de una gráfica  $G$ , es el álgebra de polinomios en la matriz  $A = A(G)$ , es decir, las combinaciones lineales de las potencias de la matriz  $A$ . Denotaremos el álgebra de adyacencia de  $G$  por  $\mathfrak{A}(G)$ .*

Para que podamos entender mejor la relación entre el álgebra de polinomios y la gráfica es necesario analizar las potencias de la matriz de adyacencia  $A$ , dicho análisis se hará con la gráfica  $K_4$  del ejemplo 3.2.

**Ejemplo 3.9.** *Por definición*

$$A^0 = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Observemos que el número de caminos de longitud cero, para cada vértice consigo mismo, es uno, pues únicamente tenemos al camino trivial.*

*La matriz  $A = A(K_4)^1$  por la manera en que fue definida, nos indica el número de caminos de longitud uno.*

$$A^1 = A(K_4)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Analicemos los caminos de longitud dos del vértice  $v_1$  consigo mismo.*

*Observemos que es válido utilizar una misma arista más de una vez, así que estos caminos son:  $(v_1, v_2, v_1)$ ,  $(v_1, v_3, v_1)$ ,  $(v_1, v_4, v_1)$ .*

*Continuemos con los caminos de longitud dos de  $v_1$  a  $v_2$ :  $(v_1, v_4, v_2)$ ,  $(v_1, v_3, v_2)$ . De  $v_1$  a  $v_3$ :  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $(v_1, v_4, v_3)$ . De  $v_1$  a  $v_4$ :  $(v_1, v_2, v_4)$ ,  $(v_1, v_3, v_4)$ .*

*Tenemos entonces 3 caminos de  $v_1$  a sí mismo y 2 caminos de  $v_1$  a cada uno de los otros vértices. El mismo razonamiento se sigue para analizar los caminos restantes de longitud dos de los vértices  $v_i$  a  $v_j$  con  $i \neq 1$ .*

*Por otro lado notamos que*

$$A^2 = A(K_4)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Obtengamos los caminos de longitud tres de  $v_i$  a  $v_j$ , con los respectivos casos,  $i = j$  y  $i \neq j$*

De  $v_1$  a  $v_1$ :

$(v_1, v_4, v_3, v_1), (v_1, v_3, v_4, v_1), (v_1, v_2, v_3, v_1), (v_1, v_3, v_2, v_1), (v_1, v_2, v_4, v_1), (v_1, v_4, v_2, v_1)$ .

De  $v_1$  a  $v_2$ :

$(v_1, v_4, v_1, v_2), (v_1, v_3, v_1, v_2), (v_1, v_2, v_1, v_2), (v_1, v_2, v_4, v_2)$   
 $(v_1, v_2, v_3, v_2), (v_1, v_3, v_4, v_2), (v_1, v_4, v_3, v_2)$ .

De  $v_1$  a  $v_3$ :

$(v_1, v_4, v_1, v_3), (v_1, v_2, v_1, v_3), (v_1, v_3, v_1, v_3), (v_1, v_2, v_4, v_3)$   
 $(v_1, v_4, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_4, v_3)$ .

De  $v_1$  a  $v_4$ :

$(v_1, v_3, v_1, v_4), (v_1, v_2, v_1, v_4), (v_1, v_4, v_1, v_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)$   
 $(v_1, v_3, v_2, v_4), (v_1, v_4, v_2, v_4), (v_1, v_4, v_3, v_4)$ .

De manera análoga, se analizan los caminos restantes de longitud tres y se observa que hay 6 caminos de  $v_i$  a  $v_i$  para toda  $i$  y 7 caminos de  $v_i$  a  $v_j$  para toda  $i \neq j$ .

Por otro lado

$$A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como podemos observar, el encontrar de manera explícita los diferentes caminos, es una tarea que se va complicando.

Sin embargo, notamos que las potencias de la matriz  $A$ , nos brindan información respecto al número de caminos entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$  de longitud  $l$ .

Por ejemplo, en el caso de la entrada  $(A^3)_{24}$ , que es 7, se obtiene de multiplicar, el segundo renglón de la matriz  $A^2$  con la cuarta columna de  $A$ , es decir,  $(2)(1)+(3)(1)+(2)(1)+(2)(0)=7$ , aquí, el primer sumando proviene del hecho de que a cada uno de los dos caminos que hay entre el vértice  $v_2$  y el vértice  $v_1$  de

longitud dos, podemos aumentarle el camino de longitud uno entre el vértice  $v_1$  y el vértice  $v_4$  para obtener algunos caminos de longitud 3 de  $v_2$  a  $v_4$ .

El mismo argumento se utiliza para los demás sumandos. Formalicemos lo observado en el ejemplo.

**Lema 3.10.** *El número de caminos de longitud  $l$  en  $G$ , desde  $v_i$  hasta  $v_j$ , es la entrada en la posición  $(i, j)$  de la matriz  $A^l$ . En consecuencia, el número de caminos cerrados de longitud  $l$  es igual a la  $\text{tr}A^l$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre  $l$ . Si  $l = 0$ , obtenemos la matriz identidad  $A^0 = I$ , el único camino de un vértice con él mismo de longitud cero, es el camino trivial. Así tenemos la base de inducción.

Supongamos que el lema es cierto para todas las potencias de  $A$  menores que  $l$ .

Por definición

$$(A^l)_{ij} = \sum_{h=1}^n (A^{l-1})_{ih} a_{hj}$$

y por la hipótesis de inducción  $(A^{l-1})_{ih}$  es el número de caminos desde  $v_i$  hasta  $v_h$  de longitud  $(l-1)$ . De este modo si  $a_{hj} \neq 0$ ,  $(A^{l-1})_{ih} a_{hj}$  es el número de caminos de longitud  $l$  desde  $v_i$  a  $v_j$  donde la arista  $\{v_h, v_j\}$  se toma como la final. Debido a que la suma es sobre todos los posibles vértices  $v_h$  adyacentes a  $v_j$  se tiene el resultado. Si  $a_{hj} = 0$ ,  $(A^{l-1})_{ih} a_{hj} = 0$  pues no hay camino desde  $v_i$  a  $v_j$  ya que no hay arista entre el vértice  $v_h$  y el vértice  $v_j$ . □

Ahora, continuamos con la dimensión del álgebra de adyacencia.

**Proposición 3.11.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con álgebra de adyacencia  $\mathfrak{A}(G)$  y diámetro  $d$ . Entonces la dimensión de  $\mathfrak{A}(G)$  es por lo menos  $d + 1$ .*

DEMOSTRACIÓN:

Sean  $x$  y  $y$  vértices de  $G$ , tales que  $\partial(x, y) = d$  y sea  $(x = w_0, w_1, \dots, w_d = y)$ , un camino que los une.

Para cada  $i = \{1, \dots, d\}$  existen caminos de longitud  $i$  de  $x$  a  $w_i$ , que necesariamente representan la distancia entre el vértice  $x$  y el vértice  $w_i$ , ya que si hubiera

caminos de  $x$  a  $w_i$  de longitud menor que  $i$ , habría caminos de  $x$  a  $y$  de longitud menor que  $d$ .

Sean  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  con  $i \neq j$ , sin pérdida de generalidad, supongamos que  $i < j$ .

Consideremos los vértices  $x$  y  $w_j$ . Sabemos que  $\partial(x, w_j) = j$ . Dado que no existen caminos de  $x$  a  $w_j$ , de longitud menor que  $j$ , en particular, no hay caminos de  $x$  a  $w_j$  de longitud  $i$ , es decir,  $(A^i)_{xw_j} = 0$  mientras que  $(A^j)_{xw_j} \neq 0$ . Entonces  $A^i \neq A^j$ .

Más aún,  $A^j$  tiene una entrada no cero en la posición  $xw_j$ , donde las correspondientes entradas de  $I, A, A^2, \dots, A^{j-1}$  son cero. Podemos concluir que  $A^j$  no es combinación lineal de  $\{I, A, A^2, \dots, A^{j-1}\}$  para toda  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Existe entonces un conjunto linealmente independiente con  $d + 1$  elementos,  $\{I, A, \dots, A^d\}$ .  $\square$

**Ejemplo 3.12.** Sea  $G$  la gráfica de la figura 3.2, su diámetro es igual a 4, que corresponde a la distancia entre los vértices  $v_1$  y  $v_5$ . Notamos que  $(A)_{15} = 0$ ,

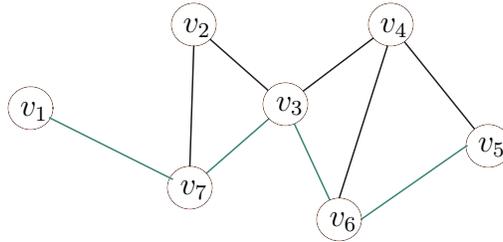


Figura 3.2: Gráfica  $G$

$(A^2)_{15} = 0$ ,  $(A^3)_{15} = 0$  y que  $(A^4)_{15} = 2$ , ya que entre estos dos vértices no hay caminos de longitud menor que 4. Los dos caminos que existen son  $(v_1, v_7, v_3, v_6, v_5)$  y  $(v_1, v_7, v_3, v_4, v_5)$ . Esto nos indica que  $A^4$  no es combinación lineal de  $\{I, A, A^2, A^3\}$ . Análogamente  $A^j$  no es combinación lineal de  $\{I, A, \dots, A^{j-1}\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . De esta forma, nuestro conjunto linealmente independiente es  $\{I, A, A^2, A^3, A^4\}$ .

**Corolario 3.13.** Una gráfica conexa con diámetro  $d$ , tiene por lo menos  $d + 1$  valores propios distintos.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $G$  una gráfica conexa con diámetro  $d$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $G$  sólo tiene  $r$  valores propios distintos con  $r < d + 1$ ,

digamos  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Usando el teorema 2.7,  $A = A(G)$  es diagonalizable, por el teorema 2.72, tenemos que el polinomio mínimo de  $A$  es

$$q(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_r).$$

Así  $q(x)$  es un polinomio mónico de grado  $r$  digamos

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{r-1}x^{r-1} + x^r.$$

Sabemos además que  $q(A) = 0$ , ver la definición 2.67, de donde  $0 = b_0I + b_1A + \dots + b_{r-1}A^{r-1} + A^r$  y así  $\{I, A, \dots, A^r\}$  es linealmente dependiente. Pero esto es una contradicción ya que como  $r \leq d$ ,  $\{I, A, A^2, \dots, A^r\}$  es linealmente independiente por la prueba de la proposición 3.11.

Concluimos entonces que  $G$  tiene al menos  $d + 1$  valores propios distintos.

□



# Capítulo 4

## Gráficas regulares

En este capítulo estudiaremos ciertas propiedades de las matrices de adyacencia y sus polinomios característicos en el uso de gráficas regulares. Se analizarán algunas gráficas regulares importantes.

### 4.1. Matriz de adyacencia de una gráfica regular.

Si consideramos un vector  $\mathbf{j}$  en donde cada entrada es 1 y denotamos por  $J$  a una matriz cuadrada con todas sus entradas iguales a 1 tenemos el siguiente lema.

**Lema 4.1.** *Sea  $G$  una gráfica con matriz de adyacencia  $A$ . Entonces son equivalentes*

1.  $G$  es regular.
2.  $AJ = JA$ .
3.  $\mathbf{j}$  es un vector propio de  $A$ .

**DEMOSTRACIÓN:** (1)  $\Leftrightarrow$  (2) Si  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica regular, tenemos que al efectuar el producto matricial  $AJ$ ,  $(AJ)_{il} = \delta(v_i)$ , es

decir, en el  $i$ -ésimo renglón de  $AJ$  las entradas son iguales al grado del vértice  $v_i$ , o bien, el número de vértices  $v_j$  que son adyacentes a él. En  $JA$ , las entradas de la  $l$ -ésima columna son iguales al grado del vértice  $v_l$ . Como la gráfica es regular,  $\delta(v_i) = \delta(v_l)$  entonces  $(AJ)_{il} = (JA)_{il}$  y por lo tanto  $AJ = JA$ . A la inversa, si  $AJ = JA$  tenemos que  $\delta(v_i) = (AJ)_{il} = (JA)_{il} = \delta(v_l)$  para cualesquiera  $i, l$  por lo tanto  $G$  es regular.

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) Las entradas de  $A\mathbf{j}$  son los grados de los vértices de  $G$ , así que  $G$  es regular si sólo si  $A\mathbf{j}$  es un múltiplo de  $\mathbf{j}$ , es decir, si y sólo si  $\mathbf{j}$  es un vector propio de  $A$ .

□

**Proposición 4.2.** *Sea  $G$  una gráfica regular de grado  $k$ , entonces:*

1.  $k$  es un valor propio de  $A = A(G)$ .
2. Para cualquier valor propio  $\lambda$ , se tiene que  $|\lambda| \leq k$ .
3. Si  $G$  es conexa, entonces la multiplicidad de  $k$  es 1.

DEMOSTRACIÓN: (1) Sabemos por el lema 4.1 que  $\mathbf{j}$  es un vector propio de  $A$ . Además en la prueba de este resultado se observó que las entradas de  $A\mathbf{j}$  son los grados de los vértices de  $G$ , en este caso  $k$ , por lo cual  $A\mathbf{j} = k\mathbf{j}$ , es decir,  $k$  es un valor propio de  $A$ .

(2) Sea  $\mathbf{x}$  un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda$ . Entonces  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  y sea  $x_j$  la entrada de  $\mathbf{x}$  tal que  $|x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$ . Sabemos que  $(A\mathbf{x})_j$  es la suma de las entradas  $x_i$  correspondientes a los vértices  $v_i$  que son adyacentes al vértice  $v_j$ , sea  $\sum' x_i$  tal suma, entonces

$$\sum' x_i = (A\mathbf{x})_j = (\lambda\mathbf{x})_j = \lambda x_j \quad (a)$$

Tomando valor absoluto y aplicando desigualdad del triángulo en (a), tenemos  $|\lambda||x_j| = |\lambda x_j| = |\sum' x_i| \leq \sum' |x_i| \leq \sum' |x_j| = k|x_j|$ , entonces

$$|\lambda| \leq k \quad (b)$$

(3) Consideremos ahora el valor propio  $\lambda = k$ . La igualdad en (b), se obtiene si y sólo si  $|\lambda| = k$  y  $|x_i| = |x_j|$  para todos los vértices  $v_i$  adyacentes al vértice

$v_j$ . Como  $G$  es regular de grado  $k$  entonces  $\sum |x_i| = \delta(v_j)|x_j| = k|x_j|$ . Sean  $v_l, v_t$  cualesquiera vértices de  $\Gamma$ , dado que  $G$  es conexa existe  $P$  un  $v_l v_t$  camino en  $G$ ,  $P = (v_l = v_{i_1}, \dots, v_{i_m} = v_t)$ . Como  $v_{i_s}$  y  $v_{i_{s+1}}$  son adyacentes para  $s = 1, \dots, m - 1$ , tenemos que  $|x_{i_s}| = |x_{i_{s+1}}| \forall s$ , entonces  $|x_l| = |x_t|$ . Como  $\lambda = k$ , (a) implica que todas las entradas de  $\mathbf{x}$  tienen el mismo signo y de este modo,  $\mathbf{x}$  es un múltiplo de  $\mathbf{j}$ . Por lo que el espacio generado por  $k$ , tiene dimensión 1.

□

**Proposición 4.3.** *Sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$ . La matriz  $J$  pertenece al álgebra de adyacencia  $\mathfrak{A}(A)$  si y sólo si  $G$  es una gráfica regular conexa.*

DEMOSTRACIÓN:  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $J$  pertenece a  $\mathfrak{A}(A)$ . Por como se definió  $\mathfrak{A}(A)$ ,  $J$  es un polinomio en  $A$ , es decir, se expresa como una combinación lineal de potencias de  $A$ .

Como  $J$  es un polinomio de  $A$ , se tiene que  $AJ = JA$  y por el lema 4.1 tenemos que  $G$  es regular. Supongamos que  $G$  es desconexa. Existen entonces dos vértices  $v_i, v_j$  para los cuales no hay un camino que los conecte, así por el lema 3.10,  $(A^l)_{ij} = 0 \forall l \geq 0$ .

Entonces todo polinomio en  $A$ , tiene una entrada cero. Lo que nos lleva a contradecir el hecho de que  $J \in \mathfrak{A}(G)$ . Concluimos pues que  $G$  debe ser conexa.

$\Leftarrow$ ) Sea  $G$  una gráfica conexa regular de grado  $k$ . Entonces por la proposición 4.2,  $k$  es un valor propio de  $G$ . Sabemos que  $m(A) = 0$ , donde  $m$  es el polinomio mínimo de  $A$ , ver la definición 2.67. Además, dado que  $k$  es un valor propio, por el corolario 2.70, tiene la forma  $m(\lambda) = (\lambda - k)q(\lambda)$ . Así  $m(A) = (A - kI)q(A) = 0$ , entonces  $Aq(A) = kq(A)$ , lo que significa que cada columna de  $q(A)$  es un vector propio de  $A$  asociado a  $k$  y por la proposición 4.2, un múltiplo del vector  $\mathbf{j} = (1, \dots, 1)$ , ya que  $A$  es simétrica y  $q(A)$  es un polinomio en  $A$ ,  $q(A)$  es un múltiplo de  $J$ . Así,  $J$  es un polinomio en  $A$ .

□

## 4.2. Gráficas y matrices circulantes.

Definamos lo que es una matriz circulante.

**Definición 4.4.** Una **matriz circulante**  $S$  de  $n \times n$ , es un tipo especial de matriz en el que cada vector fila se obtiene del vector fila anterior colocando su último elemento al inicio del renglón.

Es decir, si  $(s_{11} \ s_{12} \ \dots \ s_{1n})$  es la primera fila de  $S$ , la matriz circulante  $S$  se ve así:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & \dots & s_{ij} & \dots & s_{1n} \\ s_{1n} & s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & \dots & \dots & s_{1n-1} \\ s_{1n-1} & s_{1n} & s_{11} & s_{12} & \dots & \dots & \dots & s_{1n-2} \\ \vdots & & & & & & & \\ s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & \dots & \dots & s_{1n} & s_{11} \end{pmatrix}.$$

**Observaciones 4.5.** Para toda matriz circulante se tiene que:

1. Queda determinada por su primer renglón.
2. En la diagonal principal, aparece el coeficiente  $s_{11}$ .

Un elemento de la forma  $s_{2j}$  corresponde al elemento del primer renglón y la columna anterior, es decir,  $s_{2j} = s_{1 \ j-1}$ , un elemento de la forma  $s_{3j}$  corresponde al elemento del primer renglón que se encuentra dos columnas a la izquierda, es decir,  $s_{3j} = s_{1 \ j-2}$ . En general tenemos  $s_{ij} = s_{1 \ j-(i-1)} = s_{1 \ j-i+1}$  haciendo reducciones módulo  $n$  en los subíndices.

**Ejemplo 4.6.** Para que el arreglo de la matriz circulante sea más claro, analicemos el caso  $n = 5$ . Nuestro primer renglón, consta de los siguientes elementos,  $(s_{11} \ s_{12} \ s_{13} \ s_{14} \ s_{15})$ . La matriz circulante  $S = (s_{ij})$  asociada es entonces:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{15} & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{14} & s_{15} & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{11} \end{pmatrix}$$

En la diagonal principal  $i = j$ , entonces  $s_{ii} = s_{1 \ i-i+1} = s_{11}$ , el elemento  $s_{25} = s_{1 \ 5-2+1} = s_{14}$  mientras que  $s_{31} = s_{1 \ 1-3+1} = s_{1 \ (-2)+1} = s_{1 \ -1} = s_{14}$  si consideramos los subíndices módulo 5.

Ahora trabajaremos con una matriz circulante  $W$ , cuyo primer renglón es de la forma  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ .

**Ejemplo 4.7.** *Sea*

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calculamos su polinomio característico, tenemos que:

$$\det(\lambda I - W) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Resolviendo por menores: el menor 11 de  $W$  es  $M_{11} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ , el

menor 51 de  $W$  es  $M_{51} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$

Por ser  $M_{11}$  y  $M_{51}$  matrices triangulares, entonces  $M_{11} = \lambda^4$  y  $M_{51} = 1$ .

Los cofactores correspondientes son entonces:  $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (1)(\lambda^4) = \lambda^4$   
 $C_{51} = (-1)^{5+1}M_{51} = (1)(1) = 1$ .

Como hemos desarrollado a lo largo de la primer columna, el resto de los cofactores son iguales a cero, ya que están multiplicados por él.

Así,  $\det(\lambda I - W) = (\lambda)(\lambda^4) + (-1)(1) = \lambda^5 - 1$ ,  $\lambda$  es entonces valor propio de  $W$  si y sólo si  $\lambda^5 - 1 = 0$ , lo que significa  $\lambda^5 = 1$ , es decir, los valores propios son las raíces quintas de la unidad, las cuales expresamos como  $e^{\frac{2\pi ki}{5}} = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 4$ .

Si hacemos  $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ , las 5 raíces son  $1, w, \dots, w^4$ .

Generalicemos ahora a una matriz  $W$  de  $n \times n$ .

Al momento de calcular  $\det(\lambda I - W)$  y desarrollar por menores, lo que queda es:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - W) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda(-1)^{1+1}M_{11} + (-1)(-1)^{n+1}M_{n1} \\ &= \lambda M_{11} - (-1)^{n+1}M_{n1} \\ &= \lambda \lambda^{n-1} - (-1)^{n+1}M_{n1} \\ &= \lambda^n - (-1)^{n+1}M_{n1} \end{aligned}$$

teniendo los siguientes casos:

1) Si  $n$  es par  $M_{n1} = -1$ , por lo tanto,  $\det(\lambda I - W) = \lambda^n - 1$ .

2) Si  $n$  es impar  $M_{n1} = 1$ , por lo tanto,  $\det(\lambda I - W) = \lambda^n - 1$ .

En ambos casos los valores propios son las soluciones de  $\lambda^n = 1$ , es decir, raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

Podemos preguntarnos, ¿qué relación existe entre las matrices  $W$  y  $S$  la matriz circulante cuyo primer renglón es  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ?

**Proposición 4.8.** *Si  $S$  y  $W$  son matrices circulantes cuyo primer renglón es  $(s_1, \dots, s_n)$  y  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  respectivamente, se tiene que*

$$S = \sum_{j=1}^n s_j W^{j-1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos escribir a la matriz  $S$ , como una suma de matrices,

del siguiente modo.

$$\begin{aligned}
 & s_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \\
 & + s_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + s_n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & \dots & s_n \\ s_n & s_1 & s_2 & \dots & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \dots & s_{n-2} \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & s_{n-3} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & s_2 \\ s_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_1 \end{pmatrix} = S.
 \end{aligned}$$

Notemos que las matrices formadas por 0 y 1 son potencias de la matriz  $W$  y que por su construcción,  $W^n$  es la identidad, por lo que sólo requerimos hasta la potencia  $n - 1$ .

Así podemos escribir  $S = s_1W^0 + s_2W^1 + s_3W^2 + \dots + s_nW^{n-1}$ .

□

Como sabemos que los valores propios de  $W$  son las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, a partir de ellos, obtendremos los valores propios de  $S$ .

Sea  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , entonces los valores propios de  $W$  son  $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ ; para cada valor propio consideremos un vector propio asociado, digamos  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{C}^n$  respectivamente.

Entonces debe ocurrir que  $Wv_0 = v_0$ ;  $Wv_1 = wv_1$ ;  $Wv_2 = w^2v_2$ ;  $\dots$ ;  $Wv_{n-1} = w^{n-1}v_{n-1}$ . Por la proposición 4.8

$$S = s_1W^0 + s_2W + s_3W^2 + \dots + s_nW^{n-1} = s_1I + s_2W + s_3W^2 + \dots + s_nW^{n-1}$$

al multiplicar por el vector propio  $v_0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} Sv_0 &= (s_1I + s_2W + s_3W^2 + \dots + s_nW^{n-1})v_0 \\ &= s_1v_0 + s_2v_0 + s_3v_0 + \dots + s_nv_0 \\ &= (s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n)v_0. \end{aligned}$$

Podemos observar que el vector propio  $v_0$  de  $W$ , es también vector propio de  $S$ , en donde el valor propio  $\lambda_0$  que le corresponde es la suma :  $\lambda_0 = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ .

Para el vector propio  $v_1$ , realizamos el mismo proceso, obteniendo

$$\begin{aligned} Sv_1 &= (s_1I + s_2W + s_3W^2 + \dots + s_nW^{n-1})v_1 \\ &= s_1v_1 + s_2wv_1 + s_3w^2v_1 + \dots + s_nw^{n-1}v_1 \\ &= (s_1 + s_2w + s_3w^2 + \dots + s_nw^{n-1})v_1. \end{aligned}$$

Nuevamente, el vector propio  $v_1$  de  $W$ , es vector propio de  $S$  con valor propio  $\lambda_1 = s_1 + s_2w + s_3w^2 + \dots + s_nw^{n-1}$ .

En general, con el vector propio  $v_r$ , seguimos con el procedimiento.

$$\begin{aligned} Sv_r &= (s_1I + s_2W + s_3W^2 + \dots + s_nW^{n-1})v_r \\ &= s_1v_r + s_2w^rv_r + s_3w^{2r}v_r + \dots + s_nw^{(n-1)r}v_r \\ &= (s_1 + s_2w^r + s_3w^{2r} + \dots + s_nw^{(n-1)r})v_r \end{aligned}$$

Es decir,  $v_r$  también es vector propio de  $S$  con valor propio asociado

$$\lambda_r = s_1 + s_2w^r + s_3w^{2r} + \dots + s_nw^{(n-1)r}.$$

Enunciemos este resultado en la siguiente proposición.

**Proposición 4.9.** Sean  $S$  una matriz circulante cuyo primer renglón es  $(s_1, \dots, s_n)$  y  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ . Entonces los valores propios de  $S$  están dados por:

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^n s_j w^{(j-1)r}$$

con  $r = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Ejemplo 4.10.** Consideremos  $n = 3$ ,  $W_{3 \times 3}$ ,  $S_{3 \times 3}$  las matrices circulantes cuyo primer renglón es  $(0, 1, 0)$  y  $(s_1, s_2, s_3)$  respectivamente.

Los valores propios de  $W$  son  $1, w, w^2$ , a cada valor propio le corresponde un vector propio, digamos  $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3$  son los correspondientes.

Entonces debe ocurrir que  $v_0, v_1, v_2$  son vectores propios de  $S$  asociados a los valores propios  $s_1 + s_2 + s_3$ ,  $s_1 + s_2w + s_3w^2$  y  $s_1 + s_2w^2 + s_3w^4$  respectivamente.

Analicemos el caso específico en que

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $W$  son las raíces cúbicas de la unidad,  $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . De acuerdo con la proposición anterior, tenemos que los valores propios de  $S$  son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sum_{j=1}^3 s_j w^{(j-1)r} = 5w^0 + 0w^0 + 2w^0 = 7, \\ \lambda_1 &= \sum_{j=1}^3 s_j w^{(j-1)r} = 5w^0 + 0w + 2w^2 = 4 - i\sqrt{3}, \\ \lambda_2 &= \sum_{j=1}^3 s_j w^{(j-1)r} = 5w^0 + 0w^2 + 2w^4 = 4 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Continuemos con la siguiente definición.

**Definición 4.11.** Una **gráfica circulante** es una gráfica  $G$  cuyos vértices pueden ser ordenados de modo que la matriz de adyacencia  $A(G)$  sea una matriz circulante.

**Observaciones 4.12.** Puede que al ordenar de manera diferente los vértices de la gráfica, la matriz asociada ya no sea circulante.

**Ejemplo 4.13.** La matriz de adyacencia asociada a la gráfica de la figura 4.1, con los vértices ordenados como  $v_1, v_2, v_3, v_4$  es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

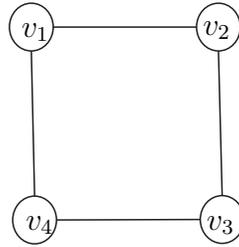


Figura 4.1: Una gráfica circulante

que es una matriz circulante. Por lo tanto la gráfica de la figura 4.1 es circulante. Sin embargo, si el orden de los vértices fuera  $v_1, v_4, v_2, v_3$ , la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que ya no es matriz circulante.

El primer renglón  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de una matriz de adyacencia de una gráfica circulante, donde el subíndice se refiere a la columna, cumple que  $a_1 = 0$ . Recordemos que la matriz de adyacencia es simétrica ( $A = A^T$ ), con ceros en la diagonal principal.

Sea  $A$  nuestra matriz de adyacencia de tamaño  $n \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_j & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{j-2} & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & a_{j-3} & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n-(j-2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

y dado que  $A$  es simétrica  $a_j = a_{n-(j-2)} = a_{n-j+2} \forall j = 2, \dots, n$ .

Como consecuencia directa de la proposición 4.9 se tiene:

**Proposición 4.14.** *Supongamos que  $(0, a_2, \dots, a_n)$  es el primer renglón de la matriz de adyacencia de una gráfica circulante  $G$ . Entonces los valores propios de  $G$  están dados por*

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^n a_j w^{(j-1)r}$$

con  $r = 0, 1, \dots, n-1$  y  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ .

**Observaciones 4.15.** *Es necesario remarcar que los  $n$  valores propios dados por la fórmula de la proposición 4.14, no son necesariamente distintos. Ver la definición 2.61.*

### 4.2.1. Gráficas completas.

Nuestro primer ejemplo de gráficas circulantes son las gráficas completas:

**Ejemplo 4.16.** *Sea  $G = K_3$  una gráfica completa cuya matriz de adyacencia es la matriz circulante*

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso  $w = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Así, los valores propios de  $K_3$  son:

$$\lambda_0 = a_2 w^{(2-1)0} + a_3 w^{(3-1)0} = a_2 + a_3 = 1 + 1 = 2,$$

$$\lambda_1 = a_2 w^{(2-1)1} + a_3 w^{(3-1)1} = a_2 w + a_3 w^2 = w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w) = -1,$$

$$\lambda_2 = a_2 w^{(2-1)2} + a_3 w^{(3-1)2} = a_2 w^2 + a_3 w^4 = \bar{w} + w = 2\operatorname{Re}(w) = -1.$$

El espectro de  $K_3$  es:

$$\operatorname{Spec} K_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Observaciones 4.17.** *Dado que  $(w^r)^n = 1$ , entonces*

$$0 = (w^r)^n - 1 = ((w^r) - 1)((w^r)^{n-1} + (w^r)^{n-2} + \dots + w^r + 1).$$

**Proposición 4.18.**

$$\text{Spec } K_n = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN:  $A(K_n)$  es una matriz circulante con primer renglón  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  donde  $a_1 = 0$  y  $a_i = 1 \forall i = 2, \dots, n$ .

Por la proposición 4.14 sus valores propios son

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^n a_j w^{(j-1)r}$$

con  $a_1 = 0$  y  $a_i = 1 \forall i = 2, \dots, n$ ,  $r = 0, \dots, n-1$ , es decir,

$$\lambda_r = w^r + w^{2r} + \dots + w^{(n-1)r}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Tenemos entonces  $\lambda_0 = 1 + 1 + \dots + 1 = n-1$ .

Para  $r \neq 0$  sabemos por la observación 4.17 que  $1 + w^r + w^{2r} + \dots + w^{(n-1)r} = 0$  y por lo tanto  $w^r + w^{2r} + \dots + w^{(n-1)r} = -1$ . Así,  $-1$  es un valor propio de multiplicidad  $n-1$ , y  $n-1$  es un valor propio de multiplicidad 1.

□

**Ejemplo 4.19.** Para  $K_4$ , cuyo primer renglón es  $(0, 1, 1, 1)$ , los valores propios son:

$$\lambda_0 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\lambda_1 = a_2 w + a_3 w^2 + a_4 w^3 = w + w^2 + \bar{w} = i - 1 - i = -1,$$

$$\lambda_2 = a_2 w^2 + a_3 w^4 + a_4 w^6 = w^2 + w^4 + w^2 = -1 + 1 - 1 = -1,$$

$$\lambda_3 = a_2 w^3 + a_3 w^6 + a_4 w^9 = \bar{w} + w^2 + w = -i - 1 + i = -1,$$

donde  $w = e^{\frac{2i\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ , entonces el espectro de  $K_4$  es:

$$\text{Spec } K_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

### 4.2.2. Ciclos.

Otro ejemplo de matrices circulantes, proviene de las gráficas cíclicas de orden  $n$  denotadas por  $C_n$ , cuyo primer renglón en su matriz de adyacencia es de la forma  $(0, 1, 0, \dots, 0, 1)$ , pues éste renglón se obtiene de las adyacencias al vértice etiquetado como  $v_1$ .

**Ejemplo 4.20.** *Estudiemos  $C_4$ , sabemos que los valores propios de  $W$  están dados por las raíces cuartas de la unidad generadas por  $w = i$ , por lo que los valores propios de  $A(C_4)$  son:*

$$\lambda_0 = a_2 + a_4 = 1 + 1 = 2,$$

$$\lambda_1 = a_2w + a_4w^3 = w + w^3 = i - i = 0,$$

$$\lambda_2 = a_2w^2 + a_4w^6 = w^2 + w^2 = -1 - 1 = -2,$$

$$\lambda_3 = a_2w^3 + a_4w^9 = w^3 + w = -i + i = 0.$$

En el espectro,

$$\text{Spec } C_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para generalizar, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 4.21.**

$$\text{Spec } C_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos \frac{2\pi}{n} & 2 \cos \frac{4\pi}{n} & \dots & 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} \quad (n \text{ impar}),$$

$$\text{Spec } C_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos \frac{2\pi}{n} & 2 \cos \frac{4\pi}{n} & \dots & 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} & -2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \text{ par}).$$

**DEMOSTRACIÓN:** La matriz circulante de la gráfica cíclica  $C_n$  tiene como primer renglón  $(0, 1, 0, \dots, 0, 1)$ .

Por la proposición 4.14 sus valores propios son

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^n a_j w^{(j-1)r}$$

con  $a_2 = a_n = 1$  y  $a_i = 0 \forall i = 3, \dots, n-1$ ,  $r = 0, \dots, n-1$ , entonces los valores propios son:

$$\lambda_r = w^r + w^{(n-1)r} = e^{\frac{2\pi r i}{n}} + e^{\frac{2\pi(n-1)r i}{n}} = e^{\frac{2\pi r i}{n}} + e^{\frac{-2\pi r i}{n}}.$$

Dado que éstos son conjugados

$$\lambda_r = 2Re e^{\frac{2\pi r i}{n}} = 2 \cos \frac{2\pi r}{n}.$$

Sabemos que  $\cos \frac{2\pi r}{n} = \cos \frac{-2\pi r}{n} = \cos \frac{2\pi n - 2\pi r}{n} = \cos \frac{2\pi(n-r)}{n}$ .

Así estos valores se repiten ya que  $\cos \frac{2\pi}{n} = \cos \frac{2\pi(n-1)}{n}$ ,  $\cos \frac{2\pi(2)}{n} = \cos \frac{2\pi(n-2)}{n}$  y así sucesivamente, por lo cual, si  $n$  es impar los valores propios son

$$2, 2 \cos \frac{2\pi}{n}, 2 \cos \frac{2\pi(2)}{n}, \dots, 2 \cos \frac{2\pi(\frac{n-1}{2})}{n}$$

o bien,

$$2, 2 \cos \frac{2\pi}{n}, 2 \cos \frac{4\pi}{n}, \dots, 2 \cos \frac{\pi(n-1)}{n}$$

con 2 valor propio de multiplicidad uno, y el resto con multiplicidad dos.

Si  $n$  es par los valores propios son

$$2, 2 \cos \frac{2\pi}{n}, 2 \cos \frac{2\pi(2)}{n}, \dots, 2 \cos \frac{2\pi(\frac{n-2}{2})}{n}, 2 \cos \frac{2\pi(\frac{n}{2})}{n}$$

es decir,

$$2, 2 \cos \frac{2\pi}{n}, 2 \cos \frac{4\pi}{n}, \dots, 2 \cos \frac{\pi(n-2)}{n}, 2 \cos \pi = -2$$

con 2 y  $-2$  valores propios de multiplicidad uno, y el resto con multiplicidad dos. □

**Ejemplo 4.22.**

$$Spec C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos \frac{2\pi}{5} & 2 \cos \frac{4\pi}{5} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Spec C_6 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos \frac{2\pi}{6} & 2 \cos \frac{4\pi}{6} & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 4.2.3. Gráficas cóctel.

Nuestro último ejemplo dentro de la familia de las gráficas circulantes, son las gráficas "fiesta cóctel",  $H_s$ , llamadas así porque modelan el hecho de que  $s$  parejas de esposos estén en una fiesta y cada persona hable con todos excepto con su pareja.

**Definición 4.23.** Dado  $s \in \mathbb{N}^+$ , definimos la gráfica  $H_s$  como aquella donde el conjunto de vértices está dado por  $V(H_s) = \{m_1, \dots, m_s, e_1, \dots, e_s\}$  y el conjunto de aristas por  $E(H_s) = \{\{m_i, m_j\} | i, j \in \{1, \dots, s\}, i \neq j\} \cup \{\{m_i, e_j\} | i, j \in \{1, \dots, s\}, i \neq j\} \cup \{\{e_i, e_j\} | i, j \in \{1, \dots, s\}, i \neq j\}$ .

Estudiemos un ejemplo para entender mejor.

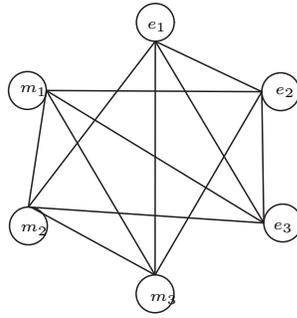


Figura 4.2: Gráfica de parejas

**Ejemplo 4.24.** Sea  $H_3$  la gráfica de la figura 4.2, donde  $\{m_1, e_1\}$ ,  $\{m_2, e_2\}$  y  $\{m_3, e_3\}$  son esposos respectivamente. El primer renglón de la matriz de adyacencia, ordenando los vértices como  $m_1, m_2, m_3, e_1, e_2, e_3$ , es  $(0, 1, 1, 0, 1, 1) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ .

Como hemos venido analizando, los valores propios de  $A(H_3)$ , están relacionados con los valores propios de  $W$ , que son las raíces sextas de la unidad dadas en términos de  $w = e^{\frac{2i\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ . Los valores propios de  $A(H_3)$  son:

$$\lambda_0 = a_2 + a_3 + a_5 + a_6 = 4,$$

$$\lambda_1 = w + w^2 + w^4 + w^5 = 1 - 1 = 0,$$

$$\lambda_2 = w^2 + w^4 + w^2 + w^4 = 2(w^2 + w^4) = -2,$$

$$\lambda_3 = w^3 + w^6 = w^3 + w^6 + w^3 + w^6 = 2(w^3 + w^6) = 0,$$

$$\lambda_4 = w^4 + w^2 + w^4 + w^2 = 2(w^4 + w^2) = -2,$$

$$\lambda_5 = w^5 + w^4 + w^2 + w = 2Rew + 2Rew^2 = 0,$$

Su espectro es:

$$\text{Spec } H_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ahora consideramos  $H_5$ , donde el primer renglón de la matriz de adyacencia es  $(0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ , y sabiendo que los valores propios de  $W$  están dados en términos de  $w = e^{\frac{i\pi}{5}} = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ , los valores propios de  $A(H_5)$  son:

$$\lambda_0 = a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 8,$$

$$\lambda_1 = a_2w + a_3w^2 + a_4w^3 + a_5w^4 + a_7w^6 + a_8w^7 + a_9w^8 + a_{10}w^9 = 2(Rew + Rew^2 + Rew^3 + Rew^4) = 0,$$

$$\lambda_2 = w^2 + w^4 + w^6 + w^8 + w^{12} + w^{14} + w^{16} + w^{18} = 4(Rew^2 + Rew^4) = -2,$$

$$\lambda_3 = w^3 + w^6 + w^9 + w^{12} + w^{18} + w^{21} + w^{24} + w^{27} = 2(Rew + Rew^2 + Rew^3 + Rew^4) = 0,$$

$$\lambda_4 = w^4 + w^8 + w^{12} + w^{16} + w^{24} + w^{28} + w^{32} + w^{36} = 4(Rew^2 + Rew^4) = -2,$$

$$\lambda_5 = w^5 + w^{10} + w^{15} + w^{20} + w^{30} + w^{35} + w^{40} + w^{45} = 0,$$

$$\lambda_6 = w^6 + w^{12} + w^{18} + w^{24} + w^{36} + w^{42} + w^{48} + w^{54} = 4(Rew^2 + Rew^4) = -2,$$

$$\lambda_7 = w^7 + w^{14} + w^{21} + w^{28} + w^{42} + w^{49} + w^{56} + w^{63} = 2(Rew + Rew^2 + Rew^3 + Rew^4) = 0,$$

$$\lambda_8 = w^8 + w^{16} + w^{24} + w^{32} + w^{48} + w^{56} + w^{64} + w^{72} = 4(Rew^2 + Rew^4) = -2,$$

$$\lambda_9 = w^9 + w^{18} + w^{27} + w^{36} + w^{54} + w^{63} + w^{72} + w^{81} = 2(Rew + Rew^2 + Rew^3 + Rew^4) = 0.$$

Su espectro es:

$$\text{Spec } H_5 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podemos decir de manera general, que su espectro es:

**Proposición 4.25.**

$$\text{Spec } H_s = \begin{pmatrix} 2s - 2 & 0 & -2 \\ 1 & s & s - 1 \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si tenemos  $s$  parejas de esposos, el total de personas es  $n = 2s$ . La matriz  $A(H_s)$  es una matriz circulante, cuyo primer renglón es:

$(a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_n)$ , con  $a_1 = a_{s+1} = 0$  y  $a_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, s+1\}$ , es decir,  $(0, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ .

Por la proposición 4.14, los valores propios son

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^n a_j w^{(j-1)r}$$

con  $r = 0, \dots, n-1$  y  $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , es decir,  $\lambda_r = w^r + w^{2r} + \dots + w^{(s-1)r} + w^{(s+1)r} + \dots + w^{(n-1)r}$ .

Por la observación 4.17 para  $r \neq 0$ ,

$$1 + w^r + w^{2r} + \dots + w^{(s-1)r} + w^{sr} + w^{(s+1)r} + \dots + w^{(n-1)r} = 0, \text{ entonces } w^r + w^{2r} + \dots + w^{(s-1)r} + w^{(s+1)r} + \dots + w^{(n-1)r} = -1 - w^{sr}.$$

Como  $n = 2s$ , entonces

$$-1 - w^{sr} = -1 - w^{\frac{n}{2}r} = -1 - e^{\frac{2\pi(\frac{n}{2})r}{n}i} = -1 - e^{\pi r i} = \begin{cases} -1 - 1, & \text{si } r = 2, 4, \dots, 2s - 2 \\ -1 + 1, & \text{si } r = 1, 3, \dots, 2s - 1 \end{cases}$$

Así  $-2$  aparece como valor propio en  $s - 1$  ocasiones y  $0$  en  $s$  ocasiones.

Para  $r = 0$  tenemos  $\lambda_0 = w^0 + w^{2(0)} + \dots + w^{(s-1)(0)} + w^{(s+1)(0)} + \dots + w^{(n-1)(0)} = n - 2 = 2s - 2$ .

□



$$A_L = A(L(K_4)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso,  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , donde  $e_1 = \{v_1, v_2\}$ ,  $e_2 = \{v_2, v_3\}$ ,  $e_3 = \{v_3, v_4\}$ ,  $e_4 = \{v_1, v_4\}$ ,  $e_5 = \{v_1, v_3\}$ ,  $e_6 = \{v_2, v_4\}$ ;  $V(L(G)) = \{e_j | j \in E(G)\}$  y la matriz  $X$  es:

$$X(K_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora cómo se relacionan las matrices  $A$ ,  $A_L$  y  $X$  para entender mejor cómo son los valores propios de la gráfica de líneas.

**Lema 4.28.** *Supongamos que  $G$  es una gráfica regular de grado  $k$  y  $X$  como en la definición 4.26. Sean  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$  y  $A_L$  la matriz de adyacencia de  $L(G)$ . Entonces*

1.  $X^T X = A_L + 2I_m$ .
2. Si  $G$  es una gráfica regular de grado  $k$ , entonces  $XX^T = A + kI_n$ .

DEMOSTRACIÓN: (1) Dado que  $X_{n \times m}$ ,  $X_{m \times n}^T$  y  $(X)_{ij} = (X^T)_{ji}$  por definición de matriz transpuesta, se tiene que

$$(X^T X)_{ij} = \sum_{l=1}^n (X^T)_{il} (X)_{lj} = \sum_{l=1}^n (X)_{li} (X)_{lj}$$

por definición de producto de matrices.

Al considerar la entrada  $(X^T X)_{ij}$ , los únicos sumandos que contribuyen a la suma son aquellos en que  $(X)_{li} = (X)_{lj} = 1$ , es decir, corresponden a vértices  $v_l$  en los que inciden las aristas  $e_i$  y  $e_j$ , así si  $i \neq j$ ,  $(X^T X)_{ij} = 1$  si  $e_i$  y  $e_j$  son

adyacentes y cero en caso contrario, por lo cual  $(X^T X)_{ij} = (A_L)_{ij}$ . Por otro lado, si  $i = j$ , como los únicos vértices en los que incide la arista  $e_i$  son sus extremos,  $(X^T X)_{ii} = 2 = (A_L)_{ii} + (2I_m)_{ii}$

(2) Sucede que

$$(X X^T)_{ij} = \sum_{l=1}^m (X)_{il} (X^T)_{lj} = \sum_{l=1}^m (X)_{il} (X)_{jl}$$

Para  $i = j$  el número que aparece en dicha entrada, corresponde al número de aristas que son incidentes en el vértice  $v_i$ , es decir, el grado de  $v_i$ . Para  $i \neq j$ , los únicos sumandos que contribuyen a la suma son aquellos en que  $(X)_{il} = (X)_{jl} = 1$ , es decir, aristas  $e_l$  que inciden en  $v_i$  y  $v_j$ , por lo cual, si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes  $(X X^T)_{ij} = 1$ , en caso contrario  $(X X^T)_{ij} = 0$ .

□

**Proposición 4.29.** *Si  $\lambda$  es un valor propio de la gráfica de líneas  $L(G)$ , entonces  $-2 \leq \lambda$ .*

DEMOSTRACIÓN: Como  $\lambda$  es un valor propio de  $A_L$  y esta matriz se relaciona con  $X^T X$ , entonces analicemos cómo es  $X^T X$ . Veamos que  $X^T X$  es una matriz semidefinida positiva, ver la definición 2.63.

Nuestra matriz  $X^T X$  es simétrica de tamaño  $m \times m$ , en donde  $m$  es el número

de aristas de  $G$ . Consideremos el vector  $\mathbf{z}$ , tomando  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ , tenemos que,

$$\mathbf{z}^T (X^T X) \mathbf{z} = \mathbf{z}^T X^T X \mathbf{z} = (X \mathbf{z})^T X \mathbf{z} = (X \mathbf{z}) \cdot (X \mathbf{z}) = \|X \mathbf{z}\|^2 \geq 0$$

entonces  $X^T X$  es semidefinida positiva.

Ahora del lema 4.26,  $A_L = X^T X - 2I_m$ . Supongamos que  $A_L$  tiene como valor propio a  $\mu$  con  $\mathbf{v}$  un vector propio asociado, se cumple que

$$\mu \mathbf{v} = A_L \mathbf{v} = (X^T X - 2I_m) \mathbf{v} = X^T X \mathbf{v} - 2I_m \mathbf{v}$$

Despejando,  $X^T X \mathbf{v} = \mu \mathbf{v} + 2\mathbf{v} = (\mu + 2)\mathbf{v}$ . Como  $X^T X$  es semidefinida positiva, entonces, por el teorema 2.64,  $\mu + 2 \geq 0$ , de aquí que  $\mu \geq -2$ , que es lo que queríamos probar.

□

El siguiente teorema nos da una descripción del polinomio característico de la gráfica de líneas en términos del polinomio característico de la gráfica.

**Teorema 4.30.** *Si  $G$  es una gráfica regular de grado  $k$  con  $n$  vértices y  $m = \frac{1}{2}nk$  aristas, entonces*

$$\chi(L(G); \lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} \chi(G; \lambda + 2 - k).$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a definir a las matrices  $U$  y  $V$  por bloques, como sigue:

$$U = \begin{pmatrix} \lambda I_n & -X \\ \mathbf{0} & I_m \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} I_n & X \\ X^T & \lambda I_m \end{pmatrix}.$$

Efectuando las multiplicaciones tenemos:

$$UV = \begin{pmatrix} \lambda I_n - XX^T & \mathbf{0} \\ X^T & \lambda I_m \end{pmatrix} \quad VU = \begin{pmatrix} \lambda I_n & \mathbf{0} \\ \lambda X^T & \lambda I_m - X^T X \end{pmatrix}.$$

Calculando ambos determinantes, ver el teorema 2.39,:

$$\det(UV) = \lambda^m \det(\lambda I_n - XX^T) \quad \det(VU) = \lambda^n \det(\lambda I_m - X^T X).$$

Sabemos que  $\det(UV) = \det U \det V$ , así pues,

$$\det(UV) = \det U \det V = \det V \det U = \det(VU)$$

por lo que

$$\lambda^m \det(\lambda I_n - XX^T) = \lambda^n \det(\lambda I_m - X^T X)$$

entonces

$$\lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - XX^T) = \det(\lambda I_m - X^T X) \quad \forall \lambda.$$

Usando el lema 4.28 1)

$$\begin{aligned} \chi(L(G); \lambda) &= \det(\lambda I_m - A_L) \\ &= \det(\lambda I_m + 2I_m - X^T X) \\ &= \det[(\lambda + 2)I_m - X^T X] \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2)I_n - XX^T) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2)I_n - A - kI_n) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det[(\lambda + 2 - k)I_n - A] \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \chi(G; \lambda + 2 - k). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 4.31.** Para la gráfica de la figura 4.3 tenemos,  $k = 3$ ,  $n = 4$ ,  $m = \frac{1}{2}nk = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$  y para su gráfica de líneas  $L(G)$  dada en la figura 4.4 tenemos  $\hat{k} = 2k - 2 = 2(3) - 2 = 4$ ,  $\hat{n} = 6$ ,  $m = \frac{1}{2}\hat{n}\hat{k} = \frac{1}{2}(6)(4) = 12$ . Sabemos que

$$\chi(G, x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x + 1)^3(x - 3),$$

y  $\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , utilizando el teorema 4.30, tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(L(G), \lambda) &= (\lambda + 2)^{m-n} \chi(G; \lambda + 2 - k) \\ &= (\lambda + 2)^{6-4} \chi(G; \lambda + 2 - 3) \\ &= (\lambda + 2)^2 \chi(G; \lambda - 1) \\ &= (\lambda + 2)^2 [(\lambda - 1) + 1]^3 [(\lambda - 1) - 3] \\ &= (\lambda + 2)^2 \lambda^3 (\lambda - 4) \end{aligned}$$

Nuestras raíces son

$$\lambda_0 = 4; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -2$$

con multiplicidad:

$$m(\lambda_0) = 1; \quad m(\lambda_1) = 3; \quad m(\lambda_2) = 2.$$

El espectro de  $L(G)$  es

$$\text{Spec } L(G) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & m(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 4.32.** Sea  $G$  una gráfica regular de grado  $k$  y sea

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_{s-1} \end{pmatrix}$$

su espectro. Entonces el espectro de la gráfica de líneas  $L(G)$  es:

$$\text{Spec } L(G) = \begin{pmatrix} 2k - 2 & k - 2 + \lambda_1 & \dots & k - 2 + \lambda_{s-1} & -2 \\ 1 & m_1 & \dots & m_{s-1} & m - n \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN: De la proposición 4.2 se tiene que

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_{s-1} \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\chi(G, x) = (x - k)^1 (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_{s-1})^{m_{s-1}}.$$

Por otro lado el teorema 4.30, señala que:

$$\begin{aligned}\chi(L(G), \lambda) &= (\lambda + 2)^{m-n} \chi(G, \lambda + 2 - k) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} [(\lambda + 2 - k) - k]^1 [(\lambda + 2 - k) - \lambda_1]^{m_1} \cdots [(\lambda + 2 - k) - \lambda_{s-1}]^{m_{s-1}} \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} [\lambda + 2 - 2k]^1 [\lambda + 2 - k - \lambda_1]^{m_1} \cdots [\lambda + 2 - k - \lambda_{s-1}]^{m_{s-1}}\end{aligned}$$

así nuestras raíces son:

$$\mu_1 = -2; \quad \mu_2 = 2k - 2; \quad \mu_3 = k + \lambda_1 - 2; \dots; \mu_{s-1} = k + \lambda_1 - 2$$

cuya multiplicidad respectiva es:

$$m(\mu_1) = m - n; \quad m(\mu_2) = 1; \quad m(\mu_3) = m_1; \dots; m(\mu_{s-1}) = m_{s-1}$$

Por lo tanto,

$$\text{Spec } L(G) = \begin{pmatrix} 2k - 2 & k - 2 + \lambda_1 & \dots & k - 2 + \lambda_{s-1} & -2 \\ 1 & m_1 & \dots & m_{s-1} & m - n \end{pmatrix}.$$

□

**Observaciones 4.33.** Si  $G$  es una gráfica regular de grado  $k$ , su correspondiente gráfica de líneas  $L(G)$  es regular de grado  $2k - 2$ . La razón es que al tomar el vértice  $u = e_k$  en la gráfica de líneas, en los vértices  $v_i$  y  $v_j$  que son los extremos de  $e_k$  en la gráfica  $G$ , inciden  $k - 1$  aristas en cada uno de ellos, es decir, el vértice  $u$  es adyacente a  $2(k - 1)$  vértices en la gráfica de líneas. Como  $G$  es completa, en  $L(G)$  el grado de los vértices es el mismo.

Otro ejemplo de gráficas de líneas, son las llamadas "gráficas triángulo",  $L(K_t)$ , denotadas por  $\Delta_t$ . Una gráfica triángulo se obtiene a partir de aplicar la gráfica de líneas a una gráfica completa. En  $\Delta_t$  sus vértices son adyacentes siempre que en  $G$  haya un triángulo que involucre al correspondiente par de aristas.

Para concluir este capítulo analizaremos cómo es el espectro en las gráficas triángulo. Por la proposición 4.18, sabemos que:

$$\text{Spec } K_t = \begin{pmatrix} t - 1 & -1 \\ 1 & t - 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el espectro de  $\Delta_t$  es:

$$\text{Spec } \Delta_t = \begin{pmatrix} 2k - 2 & k - 2 + \lambda_1 & -2 \\ 1 & m_1 & m - n \end{pmatrix}$$

donde para la gráfica  $K_t$ ,  $n = t$  es el número de vértices,  $k = t - 1$  es el grado de los vértices, el número de aristas de es  $m = \frac{1}{2}tk = \frac{1}{2}t(t - 1)$  y  $\lambda_1 = -1$ .

Así

$$Spec \Delta_t = \begin{pmatrix} 2(t-1) - 2 & (t-1) - 2 - 1 & -2 \\ 1 & t-1 & [\frac{1}{2}t(t-1)] - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-4 & t-4 & -2 \\ 1 & t-1 & \frac{t(t-3)}{2} \end{pmatrix}.$$

Algunos espectros concretos son:

$$Spec \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2(3) - 4 & 3 - 4 & -2 \\ 1 & 3 - 1 & \frac{3(3-3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Spec \Delta_5 = \begin{pmatrix} 2(5) - 4 & 5 - 4 & -2 \\ 1 & 5 - 1 & \frac{5(5-3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

# Capítulo 5

## Ciclos y cortes.

En este capítulo trabajaremos con gráficas orientadas y codificaremos subconjuntos de aristas que forman ciclos o cortes en la gráfica mediante vectores.

### 5.1. El espacio de vértices y el espacio de aristas.

En esta parte, trabajaremos con el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$  y con cualquier conjunto finito  $X$ .

El conjunto de todas las funciones de  $X$  en  $\mathbb{C}$  tiene la estructura de un espacio vectorial de dimensión finita del siguiente modo, si  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ , las operaciones del espacio vectorial se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C})$$

La dimensión de este espacio vectorial es igual al número de elementos de  $X$ .

**Definición 5.1.** *El **espacio de vértices**  $C_0 = C_0(G)$  de una gráfica orientada es el espacio vectorial de todas las funciones de  $V(G)$  a  $\mathbb{C}$ . El **espacio de aristas**  $C_1 = C_1(G)$  de una gráfica orientada es el espacio vectorial de todas las funciones de  $E(G)$  a  $\mathbb{C}$ .*

Si consideramos  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , se sigue que  $C_0(G)$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  y que  $C_1(G)$  es un espacio vectorial de dimensión  $m$ .

Cualquier función  $\eta : V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ , puede ser representada por un vector columna  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ , en donde  $y_i = \eta(v_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Podemos escoger una base para  $C_0$ , tomando el conjunto de funciones  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  definido como sigue:

$$w_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análogamente cualquier función  $\xi : E(G) \rightarrow \mathbb{C}$ , puede ser representada por un vector columna  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ , en donde  $x_i = \xi(e_i)$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

Podemos escoger una base para  $C_1$ , tomando el conjunto de funciones  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$  definido como sigue:

$$\epsilon_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

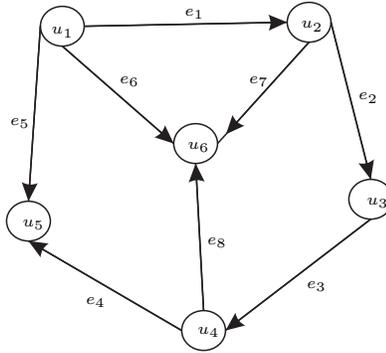
Las bases  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  y  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$  las llamaremos **bases estándar** para  $C_0$  y  $C_1$ .

Ahora, retomando la definición 1.13, si tomamos un conjunto  $Q$  de aristas que formen un ciclo en  $G$ , existen dos maneras posibles de orientar las aristas de  $Q$ , que inducen dos posibles ciclo-orientaciones, siendo éstas en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. Al elegir cualquiera de estas opciones, definimos una función  $\xi_Q$  de  $C_1(G)$  dada por:

$$\xi_Q(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in Q \text{ y su ciclo-orientación coincide con su orientación en } G \\ -1, & \text{si } e \in Q \text{ y su ciclo-orientación es contraria a la orientación en } G \\ 0, & \text{si } e \notin Q. \end{cases}$$

Así formamos el vector  $\mathbf{x}_Q = (\xi_Q(e_1), \dots, \xi_Q(e_m))$ .

**Ejemplo 5.2.** Sea  $G$



Nuestro conjunto  $Q = \{e_4, e_5, e_6, e_8\}$ .

Si elegimos la orientación en sentido de las manecillas del reloj, entonces  $\xi_Q : \{e_4, e_5, e_6, e_7\} \rightarrow \mathbb{C}$  queda de la siguiente manera:

$$x_4 = \xi_Q(e_4) = 1 \quad x_5 = \xi_Q(e_5) = -1 \quad x_6 = \xi_Q(e_6) = 1 \quad x_8 = \xi_Q(e_8) = -1$$

si es en sentido contrario,

$$x_4 = \xi_Q(e_4) = -1 \quad x_5 = \xi_Q(e_5) = 1 \quad x_6 = \xi_Q(e_6) = -1 \quad x_8 = \xi_Q(e_8) = 1$$

en ambos casos, para el resto de las aristas  $x_i = \xi_Q(e_i) = 0 \quad i = \{1, 2, 3, 7\}$

Así  $\mathbf{x}_Q = (0, 0, 0, 1, -1, 1, 0, -1)$  en el primer caso, o bien, en el segundo caso  $\mathbf{x}_Q = (0, 0, 0, -1, 1, -1, 0, 1)$ .

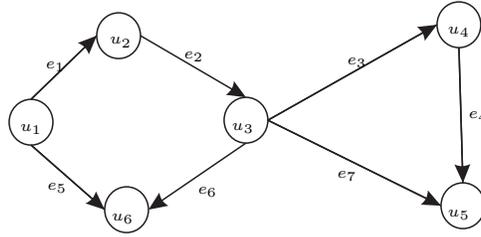
A un conjunto de corte  $H$  de  $G$ , ver la definición 1.42, también podemos darle dos posibles orientaciones, que se llaman orientaciones-corte de  $H$ , especificando cuál de los dos subconjuntos  $V_1$  o  $V_2$  asociados a  $H$ , contiene todos los extremos iniciales (+) y el otro los extremos finales (-). Recordemos que los conjuntos  $V_1$  y  $V_2$ , son una partición de los vértices de una gráfica orientada cualquiera  $G$ .

Con ello, podemos definir la función  $\xi_H$  en  $C_1(G)$  como sigue:

$$\xi_H(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in H \text{ y su orientación-corte coincide con su orientación en } G \\ -1, & \text{si } e \in H \text{ y su orientación corte es contraria a la orientación en } G \\ 0, & \text{si } e \notin H. \end{cases}$$

Así formamos el vector  $\mathbf{x}_H = (\xi_H(e_1), \dots, \xi_H(e_m))$ .

**Ejemplo 5.3.** Sea  $G$



Nuestra partición es:  $V_1 = \{u_1, u_3, u_5\}$  y  $V_2 = \{u_2, u_4, u_6\}$ . Así, el conjunto de aristas de corte es  $H = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ .

Si el conjunto  $V_1$  tiene los extremos finales y  $V_2$  los extremos iniciales, entonces la función  $\xi_H$  es:

$$\xi_H(e_1) = -1 \quad \xi_H(e_2) = 1 \quad \xi_H(e_3) = -1 \quad \xi_H(e_4) = 1 \quad \xi_H(e_5) = -1 \quad \xi_H(e_6) = -1 \quad \xi_H(e_7) = 0.$$

El vector es  $\mathbf{x}_H = (-1, 1, -1, 1, -1, -1, 0)$ .

Si ahora  $V_1$  tiene los extremos iniciales y  $V_2$  los extremos finales, el vector es  $\mathbf{x}_H = (1, -1, 1, -1, 1, 1, 0)$ .

## 5.2. La matriz de incidencia.

Dado que estamos trabajando con gráficas dirigidas, conviene describirlas mediante una matriz que codifique no sólo la gráfica sino la orientación dada.

**Definición 5.4.** La **matriz de incidencia**  $D$  de una gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $m$  aristas, con respecto a la orientación de dicha gráfica, es la matriz de tamaño  $n \times m$ , cuyas entradas  $d_{ij}$  son:

$$d_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{si } v_i \text{ es el extremo inicial de } e_j \\ -1, & \text{si } v_i \text{ es el extremo final de } e_j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los renglones de  $D$  corresponden a los vértices de  $G$  y sus columnas a las aristas de dicha gráfica; cada columna tiene solamente dos entradas no nulas  $1, -1$ , que representan el inicio y el final de cada arista respectivamente.

Recordemos que no trabajamos con multigráficas, ni con lazos.

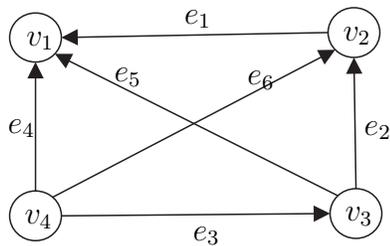
La matriz  $D$  es la representación, con respecto a las bases estándar, de un mapeo lineal de  $C_1(G)$  a  $C_0(G)$ . Este mapeo será llamado **mapeo de incidencia** y se denotará por  $\mathfrak{D}$ . Para cada  $\xi : E(G) \rightarrow \mathbb{C}$  la función  $\mathfrak{D}\xi : V(G) \rightarrow \mathbb{C}$  se define de modo que  $\mathbf{x}_{\mathfrak{D}\xi} = D\mathbf{x}_\xi$ , es decir,

$$\mathbf{x}_{\mathfrak{D}\xi} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{i1} & \dots & d_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(e_1) \\ \vdots \\ \xi(e_m) \end{pmatrix},$$

o bien

$$\mathfrak{D}\xi(v_i) = d_{i1}\xi(e_1) + \dots + d_{im}\xi(e_m) = \sum_{j=1}^m d_{ij}\xi(e_j) \quad (1 \leq i \leq n).$$

**Ejemplo 5.5.** Sea  $G$  la gráfica que se muestra a continuación



cuya matriz de incidencia es:

$$D(G) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos  $\xi : E(G) \rightarrow \mathbb{C}$ , como sigue:

$$\xi(e_1) = i \quad \xi(e_2) = -i \quad \xi(e_3) = 1$$

$$\xi(e_4) = -1 \quad \xi(e_5) = i + 1 \quad \xi(e_6) = -i - 1$$

representada por el vector  $\mathbf{x} = (i, -i, 1, -1, i + 1, -i - 1) = (\xi(e_1), \dots, \xi(e_6))$ .

$$\text{Como } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \\ -1 \\ i+1 \\ -i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ 3i+1 \\ 0 \\ -i-1 \end{pmatrix},$$

entonces  $\mathfrak{D}\xi : V(G) \rightarrow \mathbb{C}$  está definida por  $\mathfrak{D}\xi(v_1) = -2i$ ,  $\mathfrak{D}\xi(v_2) = 3i + 1$ ,  $\mathfrak{D}\xi(v_3) = 0$ ,  $\mathfrak{D}\xi(v_4) = -i - 1$ .

Notemos que en cada vértice  $v_i$ , las entradas  $d_{ij}$  que aportan a la suma, son aquellas que corresponden a las aristas que inciden en él.

Podemos preguntarnos qué ocurre con la matriz de incidencia de una gráfica que tiene varias componentes, es decir, la gráfica  $G$  está formada por varias subgráficas máximas con respecto a la propiedad de ser conexa. Pues lo que ocurre es que ordenando de manera adecuada los vértices de  $G$ , la matriz  $D$  estará formada por bloques, tantos como el número de componentes, al cual denotaremos por  $c$ .

**Ejemplo 5.6.** Consideremos la siguiente gráfica.

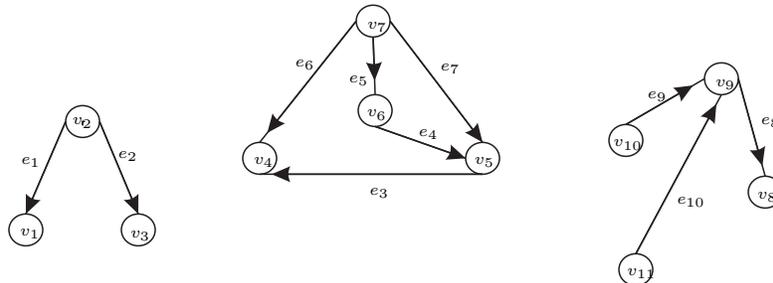


Figura 5.1: Gráfica de 3 componentes

Su matriz de incidencia es:

$$D = (\Gamma) \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

reescribiendo

$$D(\Gamma) = \begin{pmatrix} D^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D^{(3)} \end{pmatrix}$$

donde  $D_{3 \times 2}^{(1)}$ ,  $D_{4 \times 5}^{(2)}$  y  $D_{4 \times 3}^{(3)}$

De forma general, la matriz de incidencia de una gráfica con  $c$  componentes conexas es:

$$D(\Gamma) = \begin{pmatrix} D^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D^{(c)} \end{pmatrix}.$$

Con esta información, vayamos a la siguiente proposición.

**Proposición 5.7.** *La matriz de incidencia  $D$  de  $G$ , tiene rango  $n - c$ , donde  $n$  es el número de vértices y  $c$  el número de componentes.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $G^{(1)}, \dots, G^{(c)}$  las componentes conexas de  $G$  y  $D^{(1)}, \dots, D^{(c)}$  las correspondientes matrices de incidencia. Primero veamos que el rango de cada componente  $D^{(i)}$  es  $n_i - 1$ , donde  $n_i = |V(G^{(i)})|$ .

Ya habíamos mencionado que en una matriz de incidencia, cada columna tiene un 1 y un  $-1$  y cero en el resto, por lo que al tomar cada  $D^{(i)}$  y hacer operaciones elementales sobre sus renglones,  $d_1, \dots, d_{n_i}$ , observamos que  $d_1 + d_2 + \dots + d_{n_i} = (0, 0, \dots, 0)$ , así cada renglón es combinación lineal de los restantes y el conjunto  $\{d_1, \dots, d_{n_i}\}$

es linealmente dependiente de donde  $\dim\langle d_1, \dots, d_{n_i} \rangle < n_i$ . Veamos que  $\{d_2, \dots, d_{n_i}\}$  es linealmente independiente.

Para ello analicemos primero los escalares de una combinación lineal de  $d_1, \dots, d_{n_i}$  igualada al vector cero.

Supongamos que  $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_{n_i} d_{n_i} = \mathbf{0}$  para  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_i} \in \mathbb{C}$ .

Afirmamos que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n_i}$ .

La razón es la siguiente: sean  $v_l$  y  $v_k$  dos vértices adyacentes, conectados por la arista  $e_j$  cuyo vértice inicial es  $v_k$  y el final  $v_l$ .

En la columna  $j$  de  $D^{(i)}$  todas las entradas son cero salvo la  $l$  que es  $-1$  y la  $k$  que es  $1$ , por lo cual

$$(\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_{n_i} d_{n_i})_j = \lambda_k - \lambda_l.$$

Pero  $(\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_{n_i} d_{n_i})_j = 0$ , por lo cual  $0 = \lambda_k - \lambda_l$ . Así  $\lambda_k = \lambda_l$ .

De modo más general, si  $v_l, v_k$  son dos vértices cualesquiera de  $D^{(i)}$ , como  $D^{(i)}$  es conexa, existe un camino  $(v_l = v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_t} = v_k)$ . Los  $\lambda$ 's asociados a vértices adyacentes son iguales, de modo que

$$\lambda_l = \lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \dots = \lambda_{i_t} = \lambda_k.$$

Así,  $\lambda_l = \lambda_k \forall l, k$ .

Ahora, veamos que  $\{d_2, \dots, d_{n_i}\}$  es linealmente independiente.

Si  $\lambda_2 d_2 + \dots + \lambda_{n_i} d_{n_i} = \mathbf{0}$ , entonces  $0d_1 + \lambda_2 d_2 + \dots + \lambda_{n_i} d_{n_i} = \mathbf{0}$ , por lo visto anteriormente,  $0 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n_i}$ .

Por lo tanto,  $\{d_2, \dots, d_{n_i}\}$  es linealmente independiente y el rango de  $D^{(i)}$  es  $n_i - 1$ .

Como tenemos  $c$  componentes, entonces el rango de la matriz  $D$  es

$$(n_1 - 1) + \dots + (n_c - 1) = n - c. \text{ Así que el rango de } D \text{ es } n - c.$$

□

Vayamos a nuestra siguiente definición.

**Definición 5.8.** *El **rango** de  $G$  y el **corango** de  $G$  son, respectivamente*

$$r(G) = n - c \quad s(G) = m - n + c.$$

**Observaciones 5.9.** *Retomando el lema 1.40, si  $G$  es un árbol entonces,*

$$r(G) = n - c = n - 1 \quad s(G) = m - n + c = n - 1 - n + 1 = 0.$$

*Si  $G$  es un bosque entonces,*

$$r(G) = n - c \quad s(G) = n - c - n + c = 0.$$

Para terminar esta sección, daremos un resultado que se utilizará en el capítulo 6.

**Proposición 5.10.** *Cualquier submatriz cuadrada de una matriz de incidencia  $D$  de una gráfica  $G$ , tiene determinante igual a 0, +1, o -1.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción.

Base de inducción.

Cuando la matriz es de  $1 \times 1$  el resultado se cumple, ya que su única entrada es 0, 1, o -1.

Hipótesis de inducción.

Sabemos que para toda matriz de incidencia, cualquier submatriz de tamaño  $k \times k$ , tiene determinante 0, 1, o -1.

Queremos demostrar que cualquier submatriz  $S$  de tamaño  $(k + 1) \times (k + 1)$  de una matriz de incidencia, tiene determinante 0, 1, o -1.

\*Caso 1. Si  $S$  tiene una columna de ceros. En este caso, por las propiedades de determinante,  $|S| = 0$ .

En caso contrario, se tienen las siguientes opciones.

\*Caso 2. Todas las columnas de  $S$  tienen exactamente dos entradas no nulas. Por las características de la matriz de incidencia, estas entradas son 1 y  $-1$  necesariamente. Sumando los elementos de cada renglón, la suma es cero. Así los renglones de  $S$  forman un conjunto linealmente dependiente. Y nuevamente por las propiedades de determinante,  $|S| = 0$ .

\*Caso 3.  $S$  tiene una columna con exactamente un elemento distinto de cero, digamos en la entrada  $ij$ . Entonces podemos encontrar el determinante de  $S$  mediante cofactores, en donde  $|S'|$  es el cofactor  $ij$  de  $S$  y  $|S| = \pm|S'|$ , de acuerdo al valor 1 o  $-1$ , de la entrada no nula  $S_{ij}$ .

Pero  $S'$  es una submatriz de tamaño  $k \times k$  de una matriz de incidencia, y por la H.I.  $|S'| \in \{0, 1, -1\}$ .

Por lo tanto,  $|S| \in \{0, 1, -1\}$ .

□

### 5.3. El subespacio-ciclo y el subespacio-corte.

Veamos ahora cómo se relacionan los ciclos y los cortes de una gráfica con su matriz de incidencia.

**Teorema 5.11.** *El núcleo del mapeo de incidencia  $\mathfrak{D}$  de  $G$ , es un espacio vectorial cuya dimensión es igual al corango de  $G$ . Si  $Q$  es un ciclo en  $G$ , entonces  $\xi_Q$  pertenece al núcleo de  $\mathfrak{D}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ya que la matriz  $D$  tiene rango  $n - c$  y la  $\dim C_1(G) = m$ , se sigue que el núcleo de  $\mathfrak{D}$  tiene dimensión  $m - (n - c) = m - n + c = s(G)$ .

Dado que  $Q$  es un ciclo en  $G$  al efectuar el producto punto del vector  $\mathbf{x}_Q = (\xi_Q(e_1), \dots, \xi_Q(e_m))$  con la matriz  $D$ , tenemos los siguientes casos:

a) Si el vértice  $v_i$  no incide en alguna de las aristas que forman el ciclo, entonces el producto interno del renglón correspondiente a dicho vértice y el vector  $\mathbf{x}_Q$  es cero. Esto es porque las correspondientes entradas de  $v_i$  con las aristas del ciclo considerado, son cero.

b) Si el vértice  $v_i$  incide en alguna de las aristas que forman el ciclo, entonces en él inciden dos aristas digamos  $e_l$  y  $e_k$  (por ser ciclo). Si  $e_l$  y  $e_k$  tienen a  $v_i$  como vértice inicial (o final),  $d_{il} = d_{ik} = 1$  ( $d_{il} = d_{ik} = -1$ ). Por otro lado  $(\mathbf{x}_Q)_l$  y  $(\mathbf{x}_Q)_k$  tienen signos distintos por lo que  $(D\mathbf{x}_Q)_i = 0$ . Si una de las dos aristas llega a  $v_i$  y la otra sale de  $v_i$ ,  $d_{il}$  y  $d_{ik}$  tienen signos distintos, mientras que  $(\mathbf{x}_Q)_l = (\mathbf{x}_Q)_k$  y nuevamente  $(D\mathbf{x}_Q)_i = 0$ . De esta manera  $D\mathbf{x}_Q = \mathbf{0}$ , y  $\xi_Q$  pertenece al núcleo de  $\mathcal{D}$ .

□

**Ejemplo 5.12.** Consideremos el ciclo formado por las aristas  $Q = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , de la Figura 5.1 y su vector  $\mathbf{x}_Q = (0, 0, 1, 1, 1, -1, 0, 0, 0, 0)^T$ , entonces

$$D\mathbf{x}_Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para continuar, daremos la siguiente definición.

**Definición 5.13.** El *subespacio-ciclo* de  $G$  es el núcleo del mapeo de incidencia de  $G$ . El *subespacio-corte* de  $G$  es el complemento ortogonal del subespacio-ciclo en  $C_1(G)$ , con respecto al producto interno usual.

Ahora analicemos cómo es el subespacio-corte de una gráfica.

**Lema 5.14.** Dado  $H$  un corte en  $G$ , el vector columna  $\mathbf{x}_H$  que se obtiene de la función  $\xi_H$  se puede escribir en términos de los renglones de  $D$  como:

$$\mathbf{x}_H^T = \pm \frac{1}{2} \left[ \sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i \right]$$

de donde  $(\mathbf{x}_H^T)_j = \begin{cases} +1, & \text{si la orientación del corte coincide con la de } G \\ -1, & \text{si no coincide con la orientación} \\ 0, & \text{si e no está en } H. \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN: Caso 1. Supongamos que  $e_q = \{v_j, v_k\} \notin H$ . Entonces los vértices de  $e_q$  están ambos en  $V_1$  o ambos en  $V_2$ .

Supongamos que  $v_j, v_k \in V_1$ , entonces:

$$\left(\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i\right)_q = +1 - 1 = 0 \quad y \quad \left(\sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right)_q = 0$$

así,

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = \frac{1}{2}(0 - 0)_q = \frac{1}{2}(0)_q = 0.$$

Análogamente si  $v_j, v_k \in V_2$ .

Por otro lado, dado que  $e_q \notin H$  tenemos que  $(\mathbf{x}_H^T)_q = 0$ .

Caso 2. Supongamos que  $e_q \in H$  y que la orientación del corte va de  $V_1$  a  $V_2$ .

$$\left(\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i\right)_q = \begin{cases} +1, & \text{si } v_j \in V_1, v_k \in V_2 \\ -1, & \text{si } v_j \in V_2, v_k \in V_1 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right)_q = \begin{cases} -1, & \text{si } v_j \in V_1, v_k \in V_2 \\ +1, & \text{si } v_j \in V_2, v_k \in V_1 \end{cases}$$

entonces

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = \begin{cases} \frac{1}{2}[+1 - (-1)] = \frac{1}{2}[2] = 1, & \text{si } v_j \in V_1, v_k \in V_2 \\ \frac{1}{2}[-1 - (+1)] = \frac{1}{2}[-2] = -1, & \text{si } v_j \in V_2, v_k \in V_1 \end{cases}$$

Así,

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = \begin{cases} +1, & \text{si } v_j \in V_1, v_k \in V_2 \\ -1, & \text{si } v_j \in V_2, v_k \in V_1 \end{cases}$$

Por otro lado

$$(\mathbf{x}_H^T)_q = \begin{cases} +1, & \text{si } v_j \in V_1, v_k \in V_2 \\ -1, & \text{si } v_j \in V_2, v_k \in V_1 \end{cases}$$

por lo que si  $v_j \in V_1, v_k \in V_2$ , entonces:

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = 1 = (\mathbf{x}_H^T)_q,$$

y si  $v_j \in V_2, v_k \in V_1$ , entonces:

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = -1 = (\mathbf{x}_H^T)_q.$$

Así,

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = (\mathbf{x}_H^T)_q \quad \forall e_q \in H.$$

Análogamente, si la orientación del corte va de  $V_2$  a  $V_1$ ,

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = -(\mathbf{x}_H^T)_q \quad \forall e_q \in H.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = (\mathbf{x}_H^T)_q$$

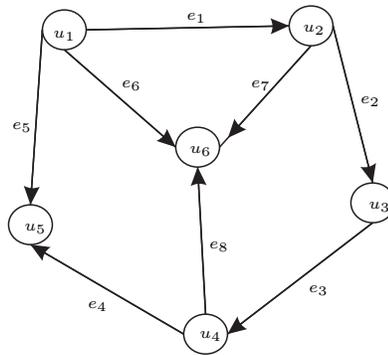
si la orientación del corte va de  $V_1$  a  $V_2$  y

$$\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i\right]\right)_q = -(\mathbf{x}_H^T)_q$$

si la orientación del corte va de  $V_2$  a  $V_1$ .

□

**Ejemplo 5.15.** Sea  $G$



La matriz de incidencia es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donde la partición de vértices es  $V_1 = \{u_1, u_3, u_4\}$  con los vértices iniciales,  $V_2 = \{u_2, u_5, u_6\}$  con los vértices finales, y el conjunto de corte  $H = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_8\}$ . Por lo que  $\mathbf{x}_H^T = (1, -1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$

$$\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i = (1, -1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$$

$$\sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i = (-1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, -1)$$

$$\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i = (2, -2, 0, 2, 2, 2, 0, 2) = 2(1, -1, 0, 1, 1, 1, 0, 1) = 2\mathbf{x}_H^T.$$

En caso de tomar la orientación contraria, tenemos que:

$$\sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i = -2\mathbf{x}_H^T.$$

**Proposición 5.16.** *El subespacio-corte de  $G$  es un espacio vectorial cuya dimensión es igual al rango de  $G$ . Si  $H$  es un corte en  $G$ , entonces  $\xi_H$  pertenece al subespacio-corte.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea  $\mathbf{z}$  un vector que corresponde a un elemento del núcleo de  $\mathfrak{D}$ . Entonces  $\mathbf{Dz} = \mathbf{0}$ , por lo que  $\mathbf{d}_i \mathbf{z} = 0$  para cada  $v_i \in V$ . Como  $\mathbf{x}_H$  se escribe en términos de los renglones  $\mathbf{d}_i$ , tenemos que

$$\mathbf{x}_H^T \mathbf{z} = \pm \frac{1}{2} \left[ \sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i \right] \mathbf{z} = \pm \frac{1}{2} \left[ \sum_{v_i \in V_1} \mathbf{d}_i \mathbf{z} - \sum_{v_i \in V_2} \mathbf{d}_i \mathbf{z} \right] = 0.$$

Esto significa que el vector  $\mathbf{x}_H$  es ortogonal a todo  $\mathbf{z}$  correspondiente a un elemento en el núcleo del mapeo de incidencia, es decir, en el subespacio-ciclo. El elemento correspondiente a  $\mathbf{x}_H$  pertenece entonces al complemento ortogonal del subespacio-ciclo que es por definición, el subespacio-corte. Por lo tanto  $\xi_H$ , pertenece al subespacio de corte.

Puesto que la dimensión del subespacio-ciclo es el corango de  $G$ ,  $s(G) = m - n + c$ , su complemento ortogonal, el subespacio-corte, tiene dimensión el rango de  $G$ ,  $r(G) = n - c$ .

□

Daremos una caracterización del subespacio-corte de  $G$ .

**Lema 5.17.** *Sean  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  los renglones de la matriz de incidencia, cada  $\mathbf{d}_i$  representa a un elemento que está en el subespacio-corte  $\forall i$ .*

DEMOSTRACIÓN:  $\mathbf{x}$  representa a un elemento en el subespacio-ciclo si y sólo si  $D\mathbf{x} = \mathbf{0}$  lo que ocurre si y sólo si  $\mathbf{x} \perp \mathbf{d}_i \forall i$ .

Así cada  $\mathbf{d}_i$  es ortogonal a todo vector que representa a un elemento en el subespacio-ciclo, es decir, cada  $\mathbf{d}_i$  representa a un elemento que está en el complemento ortogonal del subespacio-ciclo y entonces por definición, cada  $\mathbf{d}_i$  representa a un elemento que está en el subespacio-corte. □

Con los resultados anteriores podemos caracterizar el subespacio-corte:

**Teorema 5.18.** *Sean  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  los renglones de la matriz de incidencia y  $\xi_1, \dots, \xi_n$  los elementos de  $C_1(G)$  representados por  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$  respectivamente. Entonces el subespacio-corte es  $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 5.17 cada  $\xi_i$  está en el subespacio-corte, de donde  $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$  está contenido en el subespacio-corte. Para la otra contención basta mostrar una base del subespacio-corte formada por algunos de los elementos  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Construyamos entonces dicha base del subespacio-corte.

Dado un vértice  $v_i$ , denotamos por  $H_{v_i}$  al corte formado por todas las aristas que inciden en él. Notemos que el renglón correspondiente de la matriz de incidencia, digamos  $\mathbf{d}_i$ , codifica a este corte, es decir,  $\mathbf{d}_i = \mathbf{x}_{H_{v_i}}$ .

Si en la matriz  $D$  suprimimos un renglón de cada bloque  $D^{(i)}$ , por la proposición 5.7, obtenemos al final  $n - c$  renglones linealmente independientes, cada uno de ellos de la forma  $\mathbf{x}_{H_{v_i}}$ ; por la proposición 5.16 éstos representan a elementos del subespacio-corte. Como el subespacio-corte tiene dimensión  $n - c$ , los elementos representados por los  $\mathbf{d}_i = \mathbf{x}_{H_{v_i}}$  antes descritos, forman una base para el subespacio-corte. □

Observemos que  $D^T$  determina una función  $L_{D^T}$  que corresponde a un mapeo de  $C_0(G)$  en  $C_1(G)$ . Sabemos además que  $Im L_{D^T}$  es el subespacio generado por las columnas de  $D^T$ , es decir, los renglones de  $D$ ,  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ . Así tenemos:

**Corolario 5.19.** *El subespacio-corte es la imagen de la transformación lineal dada por  $D^T$ .*

## 5.4. Matriz Laplaciana.

Ya hemos trabajado con la matriz de adyacencia ( $A$ ) y la matriz de incidencia ( $D$ ) de una gráfica  $G$ . Ahora definamos una nueva matriz y veamos la conexión entre ellas.

**Definición 5.20.** *La **matriz Laplaciana**  $Q$  se define como el producto*

$$Q = DD^T.$$

**Proposición 5.21.** *Sea  $D$  la matriz de incidencia (respecto a alguna orientación) de la gráfica  $G$ , y sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$ . Entonces  $Q = DD^T = \Delta - A$ , donde  $\Delta$  es la matriz diagonal cuya  $i$ -ésima entrada en la diagonal es el grado del vértice  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Consecuentemente el producto  $Q = DD^T$  es independiente de la orientación dada a  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero cómo es  $(DD^T)_{ij}$ .

$$(DD^T)_{ij} = \sum_{k=1}^m D_{ik}(D^T)_{kj} = \sum_{k=1}^m D_{ik}D_{jk}$$

Analicemos el caso cuando  $i = j$ .

$$(DD^T)_{ii} = \sum_{k=1}^m D_{ik}D_{ik} = \sum_{k=1}^m D_{ik}^2 = \sum 1 = \delta(v_i)$$

donde la última suma se hace sobre toda  $k \in \{1, \dots, m\}$ , tal que  $e_k$  incidente en  $v_i$ , ya que en caso contrario  $D_{ik} = 0$ .

Por otro lado

$$(\Delta - A)_{ii} = \Delta_{ii} - A_{ii} = \delta(v_i) - 0 = \delta(v_i)$$

Cuando  $i \neq j$ .

$$(DD^T)_{ij} = \sum_{k=1}^m D_{ik}D_{jk} = \sum D_{ik}D_{jk}$$

y en esta suma los únicos sumandos distintos de cero son los que corresponden a  $k \in \{1, \dots, m\}$ , con  $e_k$  incidente en  $v_i$  y  $v_j$ .

El único sumando posible distinto de cero es entonces  $D_{ik}D_{jk}$ , si  $e_k$  tiene como extremos a los vértices  $v_i$  y  $v_j$ , y en este caso  $D_{ik}D_{jk} = -1$ . Así  $(DD^T)_{ij} = -1$ . Si  $v_i$  y  $v_j$  no son adyacentes, entonces  $D_{ik}D_{jk} = 0$ .

Así, si  $i \neq j$

$$(DD^T)_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0, & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j. \end{cases}$$

Por otro lado, si  $i = j$

$$(\Delta - A)_{ij} = \Delta_{ij} - A_{ij} = 0 - A_{ij} = -A_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0, & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j. \end{cases}$$

□

**Observaciones 5.22.** *La matriz  $Q$  es simétrica ya que  $\Delta$  y  $A$  lo son, así*

$$Q^T = (\Delta - A)^T = \Delta^T - A^T = \Delta - A = Q$$

*también lo es.*

**Observaciones 5.23.** *El determinante de la matriz  $Q$  es cero ya que al sumar todos los renglones de  $Q$  obtenemos al vector cero, debido a que en cada columna de  $Q$  aparece el grado del vértice, que es positivo, y tantos  $-1$  como vértices sean adyacentes al vértice correspondiente, que sumados dan el grado del vértice.*

Los siguientes resultados, que ocuparemos en el siguiente capítulo, nos proporcionan la relación que existe entre las matrices  $Q$ , la matriz adjunta de  $Q$  y la matriz  $J$ , donde  $J$  es una matriz cuadrada con todas sus entradas iguales a 1.

**Lema 5.24.** Sean las matrices  $J$  y  $Q$ , entonces

1.  $nJ = J^2$
2.  $JQ = QJ = 0$

DEMOSTRACIÓN: (1)  $(nJ)_{ij} = n = \sum_{k=1}^n 1_{ik}1_{kj} = (J^2)_{ij}$ .

(2)  $JQ = J(\Delta - A) = J\Delta - JA$ . Queremos ver que  $J\Delta = JA$ .

Tenemos pues que

$$(J\Delta)_{ij} = \delta(v_j) = (JA)_{ij}.$$

De manera análoga  $QJ = 0$ .

**Lema 5.25.** La adjunta de  $Q$  es un múltiplo de  $J$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $G$  es conexa, entonces el rango de  $D$  es  $n - 1$ , ver la proposición 5.7; por el teorema 2.24 tenemos que el rango de  $Q$  también es  $n - 1$ . Utilizando el inciso 1 del teorema 2.50 y la observación 5.23 tenemos,  $Q \operatorname{adj} Q = (\det Q)I = \mathbf{0}$ .

Veamos ahora que el vector  $\mathbf{u} = (1, 1, \dots, 1)^T$  pertenece al núcleo de  $Q = DD^T$ . Sabemos que  $D$  tiene en cada columna como únicas entradas no nulas un  $+1$  y un  $-1$ , por lo que cada renglón de  $D^T$  tiene un  $+1$  y un  $-1$ . Entonces  $D^T \mathbf{u}^T = \sum_{k=1}^n d_{ik} u_{k1} = \mathbf{0}$ , así que al multiplicar ahora por  $D$  tenemos el vector  $\mathbf{0}$ . Esto nos indica que cualquier vector que sea múltiplo de  $\mathbf{u}$ , estará en el núcleo de  $Q$ . Dado que  $Q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  y sabiendo que el rango de  $Q$  es  $n - 1$ , se tiene que  $\dim(\operatorname{núc} Q) = n - \operatorname{rango} Q = 1$ . Es decir, el núcleo de  $Q$  es unidimensional generado por  $\mathbf{u}$ .

Ya que  $Q \operatorname{adj} Q = (\det Q)I = \mathbf{0}$ , tenemos que cada columna de  $\operatorname{adj} Q$  pertenece al núcleo de  $Q$ , es decir, es múltiplo de  $\mathbf{u}$  y utilizando que  $\operatorname{adj} Q$  es simétrica, ver la observación 2.51, tenemos que todas sus entradas son iguales, por lo que  $\operatorname{adj} Q$  es un múltiplo de la matriz  $J$ .

□

# Capítulo 6

## Árboles generadores y estructuras asociadas

En este último capítulo, construiremos bases del subespacio-corte y del subespacio-ciclo usando árboles generadores, daremos una descripción de los árboles generadores en términos de la matriz de incidencia y contaremos la cantidad de árboles generadores que hay en una gráfica. Aplicaremos varios de los conceptos aprendidos en el capítulo anterior. Trabajaremos con gráficas conexas, porque el subespacio-ciclo y el subespacio-corte de una gráfica disconexa, son las sumas directas de los correspondientes espacios de las componentes.

### 6.1. Ciclos y cortes asociados a árboles generadores.

Aquí, usaremos el símbolo  $T$  para denotar, tanto un árbol generador en sí mismo, como a su conjunto de aristas.

En el capítulo 1 definimos  $cyc(T, g)$  y  $cut(T, h)$ , ver los lemas 1.40 y 1.45. A tales construcciones, las orientaremos de manera que las aristas  $g$  y  $h$  coincidan con la orientación que tienen en  $G$ .

Observemos la relación que existe entre ambos:

**Proposición 6.1.** *Sea  $T$  un árbol generador de  $G$ . Tomemos dos aristas de  $G$ , digamos  $a$  y  $b$ , que cumplan con la siguiente condición  $a \in T$ ,  $b \notin T$ . Entonces  $b \in \text{cut}(T, a)$  si y sólo si  $a \in \text{cyc}(T, b)$ .*

DEMOSTRACIÓN:

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $a \in \text{cyc}(T, b)$  y  $b \notin \text{cut}(T, a)$ .

Sabemos que para  $a \in T$ , existe un único corte, al cual denotaremos por  $H = \text{cut}(T, a)$ , cuyos elementos son precisamente  $a$  y aristas que no pertenecen a  $T$ . Al efectuar el corte, se forma una partición de los vértices. Sean  $v_i$  y  $v_j$  los vértices adyacentes por  $a$ . Observemos que  $v_i$  y  $v_j$  pertenecen a elementos distintos de la partición.

Al remover las aristas de  $H$  la única arista de  $T$  que se elimina es  $a$ , así existe un camino de  $v_i$  a  $v_j$ , pues  $a \in \text{cyc}(T, b)$  y se quedan todas las aristas del  $\text{cyc}(T, b)$ , incluida  $b$  ya que por hipótesis  $b \notin H$ , salvo  $a$ . Esto es una contradicción ya que nuestra partición de los vértices es ajena.

Por lo tanto,  $b \in \text{cut}(T, a)$ .

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $b \in \text{cut}(T, a)$  y  $a \notin \text{cyc}(T, b)$ .

Por hipótesis  $b \in \text{cut}(T, a) = H$ . Al remover  $H$ , la única arista de  $T$  que se quita es  $a$ , así que todas las aristas de  $T$  en  $\text{cyc}(T, b)$  permanecen, por lo cual los extremos de  $a$   $v_i$  y  $v_j$  siguen conectados, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $a \in \text{cyc}(T, b)$ .

□

Utilizando los ciclos y cortes antes descritos, mostraremos ahora bases del subespacio-ciclo y el subespacio-corte:

**Teorema 6.2.** *Sea  $T$  un árbol generador de una gráfica conexa  $G$ , entonces:*

(1) *Los elementos  $\xi_{(T,g)} := \xi_{\text{cyc}(T,g)}$  con  $g \in E(G)$ ,  $g \notin T$  forman una base para el subespacio-ciclo de  $G$ .*

(2) *Los elementos  $\xi_{(T,h)} := \xi_{\text{cut}(T,h)}$  con  $h \in E(G)$ ,  $h \in T$  forman una base para el subespacio-corte de  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sean  $n = |V(G)|$ ,  $m = |E(G)|$ , ya que  $T$  es árbol generador de  $G$ , tiene  $n - 1$  aristas, ver el lema 1.40. Escojamos los índices de las aristas como sigue:  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  las aristas del árbol y  $e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$  el resto de las aristas que pertenecen a  $G$  y no están en  $T$ .

Para cada  $e_i$  ( $i \geq n$ ) existe un único ciclo  $cyc(T, e_i)$  que se denotará por  $Q_i$ . Veamos entonces que los vectores correspondientes a dichos  $Q_i$  forman un conjunto linealmente independiente.

Consideremos el conjunto  $\{\mathbf{x}_{Q_n}, \mathbf{x}_{Q_{n+1}}, \dots, \mathbf{x}_{Q_m}\}$ . Sean  $\lambda_n, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_n \mathbf{x}_{Q_n} + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{Q_{n+1}} + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_{Q_m} = \mathbf{0}$ , entonces  $(\lambda_n \mathbf{x}_{Q_n} + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{Q_{n+1}} + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_{Q_m})_j = 0$  con  $j = 1, \dots, m$ .

Por las características de estos ciclos tenemos que, para  $i \geq n$ ,

$$(\mathbf{x}_{Q_j})_i = \xi_{Q_j}(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

ya que  $e_i$  es la única arista en  $Q_i$  que no está en  $T$ .

En particular para la entrada  $i$ , con  $i \geq n$  tenemos

$$(\lambda_n \mathbf{x}_{Q_n} + \lambda_{n+1} \mathbf{x}_{Q_{n+1}} + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_{Q_m})_i = (\mathbf{0})_i,$$

es decir,

$$\lambda_n (\mathbf{x}_{Q_n})_i + \dots + \lambda_m (\mathbf{x}_{Q_m})_i = 0$$

$$\lambda_n(0) + \dots + \lambda_i(1) + \dots + \lambda_m(0) = 0, \text{ entonces } \lambda_i = 0.$$

Así  $\lambda_i = 0 \quad \forall i = n, \dots, m$ , por lo tanto  $\{\mathbf{x}_{Q_n}, \mathbf{x}_{Q_{n+1}}, \dots, \mathbf{x}_{Q_m}\}$  es un conjunto linealmente independiente.

Tenemos entonces que los  $m - (n - 1)$  vectores  $\mathbf{x}_{Q_n}, \mathbf{x}_{Q_{n+1}}, \dots, \mathbf{x}_{Q_m}$  forman un conjunto linealmente independiente, por lo cual  $\xi_{(T, e_n)}, \dots, \xi_{(T, e_m)}$  forman un conjunto linealmente independiente en el subespacio-ciclo con  $m - (n - 1)$  elementos. Así forman una base.

(2) Sean  $n = |V(G)|$ ,  $m = |E(G)|$ , ya que  $T$  es árbol generador de  $G$ , tiene  $n - 1$  aristas, ver el lema 1.40. Escojamos los índices de las aristas como sigue:  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  las aristas del árbol y  $e_n, e_{n+1}, \dots, e_m$  el resto de las aristas que pertenecen a  $G$  y no están en  $T$ .

Para cada  $e_i$  ( $i < n$ ) existe un único corte  $cut(T, e_i)$  que se denotará por  $H_i$ . Veamos entonces que los vectores correspondientes a dichos  $H_i$  forman un conjunto linealmente independiente.

Consideremos el conjunto  $\{\mathbf{x}_{H_1}, \mathbf{x}_{H_2}, \dots, \mathbf{x}_{H_{n-1}}\}$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$  tales que  $\lambda_1 \mathbf{x}_{H_1} + \lambda_2 \mathbf{x}_{H_2} + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{x}_{H_{n-1}} = \mathbf{0}$ , entonces  $(\lambda_1 \mathbf{x}_{H_1} + \lambda_2 \mathbf{x}_{H_2} + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{x}_{H_{n-1}})_j = 0$  con  $j = 1, \dots, m$ .

Por las características de estos cortes tenemos que, para  $i < n$ ,

$$(\mathbf{x}_{H_j})_i = \xi_{H_j}(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

ya que  $e_i$  es la única arista en  $H_i$  que pertenece al árbol  $T$ .

En particular para la entrada  $i$ , con  $i < n$  tenemos

$$(\lambda_1 \mathbf{x}_{H_1} + \lambda_2 \mathbf{x}_{H_2} + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{x}_{H_{n-1}})_i = (\mathbf{0})_i,$$

es decir,

$$\lambda_1 (\mathbf{x}_{H_1})_i + \dots + \lambda_{n-1} (\mathbf{x}_{H_{n-1}})_i = 0$$

$$\lambda_1(0) + \dots + \lambda_i(1) + \dots + \lambda_{n-1}(0) = 0, \text{ entonces } \lambda_i = 0.$$

Así  $\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n - 1$ , por lo tanto  $\{\mathbf{x}_{H_1}, \mathbf{x}_{H_2}, \dots, \mathbf{x}_{H_{n-1}}\}$  es un conjunto linealmente independiente.

Tenemos entonces que los  $n - 1$  vectores  $\mathbf{x}_{H_1}, \mathbf{x}_{H_2}, \dots, \mathbf{x}_{H_{n-1}}$  forman un conjunto linealmente independiente, por lo cual  $\xi_{(T, e_1)}, \dots, \xi_{(T, e_{n-1})}$  forman un conjunto linealmente independiente en el subespacio-corte con  $n - 1$  elementos. Así forman una base.

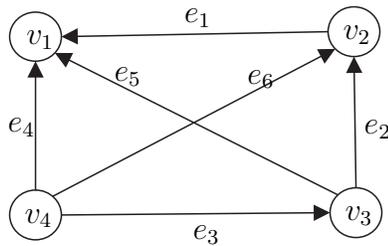
□

## 6.2. Matriz de incidencia y árboles generadores.

Veamos ahora cómo se relacionan ciertas submatrices de la matriz de incidencia con los árboles generadores de una gráfica.

De la matriz de incidencia  $D$ , ver la definición 5.4, elijamos cualquier subconjunto  $U$  de columnas tal que  $|U| = n - 1$ . Como sabemos, las columnas representan las aristas de  $G$ . También, de manera arbitraria, tomemos  $n - 1$  renglones de  $D$  y formemos la matriz  $D_U$ .

**Ejemplo 6.3.** De la siguiente gráfica,



la matriz de incidencia es  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Si elegimos el siguiente conjunto de aristas  $U = \{e_1, e_2, e_4\}$  y los renglones 1, 2, 3,

podemos formar la matriz  $D_U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  cuyo determinante es

$|D_U| = 1$  y por lo tanto  $D_U$  es invertible.

Observemos que en este caso  $\langle U \rangle$  es un árbol generador.

**Proposición 6.4.** La matriz  $D_U$  es invertible si y sólo si la subgráfica  $\langle U \rangle$  es un árbol generador de  $G$ .

DEMOSTRACIÓN:  $\Rightarrow$ ) Supongamos que la matriz asociada a  $U$ ,  $D_U$ , es una matriz invertible, es decir,  $|D_U| \neq 0$ , lo que implica que su rango es  $n - 1$ , ya que  $D_U$  es de tamaño  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

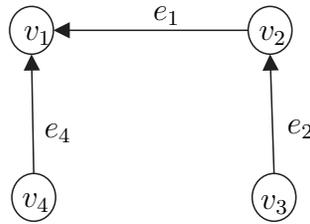


Figura 6.1: Árbol generador  $U$

Del capítulo anterior, sabemos que la dimensión del subespacio-ciclo, es igual al corango de la matriz. Así  $s(D_U) = (n - 1) - (n - 1) = 0$ .

Por lo tanto, la dimensión del subespacio-ciclo es cero. Eso quiere decir que  $\langle U \rangle$  no tiene ciclos y consta de  $n - 1$  aristas, por lo que  $\langle U \rangle$  es un árbol generador por definición.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\langle U \rangle$  es un árbol generador de  $G$ . Al considerar la matriz  $D_U$ , ésta se forma con  $n - 1$  renglones de la matriz de incidencia de  $\langle U \rangle$ . Por la proposición 5.7, la matriz de incidencia de  $\langle U \rangle$  tiene rango  $n - 1$  ya que  $\langle U \rangle$  es una gráfica conexa que tiene a los  $n$  vértices de  $G$ . Más aún, cualesquiera  $n - 1$  renglones de la matriz de incidencia de  $\langle U \rangle$  forman un conjunto linealmente independiente. Así los renglones de  $D_U$  son un conjunto linealmente independiente y por lo tanto  $D_U$  es invertible.

□

### 6.3. Cantidad de árboles generadores.

Buscamos ahora describir el número de árboles generadores de una gráfica:

**Notación.** El número de árboles generadores de una gráfica  $G$ , se denotará por  $\kappa(G)$ .

**Teorema 6.5.** *El número de árboles generadores de  $G$  es*

$$\kappa(G) = \det(D_0 D_0^T) = \sum_U (\det D_{0_U})^2 = \sum_U \det(D_{0_U}) \det(D_{0_U}^T),$$

donde la suma es sobre todos los subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, m\}$  con  $n-1$  elementos, es decir,  $U \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  con  $|U| = n - 1$ , y donde  $D_{0_U}$  denota a la matriz obtenida de  $D_0$  eligiendo sólo las columnas de  $D_0$  cuyos índices pertenezcan a  $U$ .

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.57 tenemos que

$$\det(D_0 D_0^T) = \sum_U = (\det D_{0_U})^2 = \sum_U \det(D_{0_U}) \det(D_{0_U}^T),$$

donde la última igualdad se da por el teorema 2.41, cada  $D_{0_U}$  corresponde a una subgráfica con  $n - 1$  aristas. Sin embargo,  $(\det D_{0_U})^2 = 1$  si y sólo si  $D_{0_U}$  define un árbol generador y 0 de otro modo, ver la proposición 5.10 y la proposición 6.4. Por lo que  $\det(D_0 D_0^T)$  cuenta el número total de árboles generadores. □

**Teorema 6.6.** *Cada cofactor de  $Q$  es igual al número de árboles generadores de  $G$ , esto es,*

$$\text{adj } Q = \kappa(G)J.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el lema 5.25 es suficiente mostrar que un cofactor de  $Q$  es igual a  $\kappa(G)$ . Sabemos por el lema 2.53 que el cofactor  $nn$  de  $DD^T$  es igual a  $\det D_0 D_0^T$ , donde  $D_0$  es la matriz que se obtiene de  $D$  al quitar el renglón  $n$ . Ahora, por el teorema 6.5 tenemos que éste es el número de árboles generadores, así el cofactor  $C_{nn}$  de  $Q$  es igual a  $\kappa(G)$ .

**Proposición 6.7.** *El número de árboles generadores de una gráfica  $G$  con  $n$  vértices está dado por la fórmula*

$$\kappa(G) = n^{-2} \det(J + Q).$$

DEMOSTRACIÓN: Ocupando el lema 5.24, en la siguiente ecuación tenemos:

$$(nI - J)(J + Q) = nJ + nQ - J^2 - JQ = nQ.$$

Tomando la matriz adjunta en ambos lados y utilizando el inciso 3 del teorema 2.50, resulta:

$$\text{adj}(J + Q) \text{adj}(nI - J) = \text{adj}(nQ),$$

usando el inciso 2 del teorema 2.50 y el teorema 2.52

$$\text{adj}(J + Q) n^{n-2} J = n^{n-1} \text{adj} Q,$$

usando el teorema 6.6 y simplificando

$$\text{adj}(J + Q) J = n \kappa(G) J,$$

al multiplicar ambos lados por  $(J + Q)$

$$(J + Q)adj(J + Q)J = (J + Q)n\kappa(G)J,$$

usando el inciso 1 del teorema 2.50

$$det(J + Q)J = \kappa(G)nJ^2 + \kappa(G)nQJ.$$

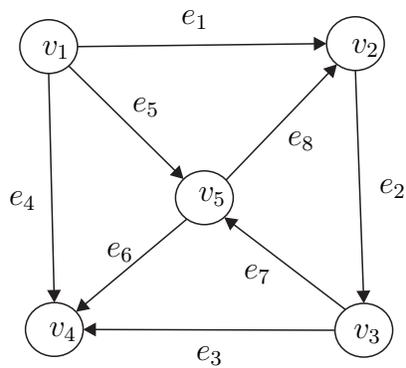
Por el lema 5.24 se tiene que

$$det(J + Q)J = \kappa(G)n^2J.$$

Así concluimos que  $det(J+Q) = n^2\kappa(G)$ .

Para terminar, ejemplificamos la fórmula dada en la proposición anterior:

**Ejemplo 6.8.** Para la gráfica siguiente, tenemos que la matriz de adyacencia es:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz de incidencia es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz Laplaciana es:

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

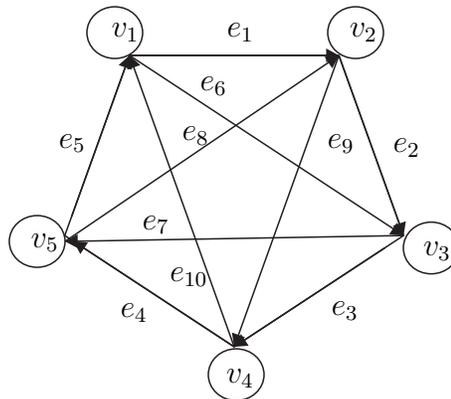
la matriz  $J + Q$  es:

$$J + Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

por lo que calculando  $\det(J + Q)$  tenemos  $\det(J + Q) = 1125$ ,

así  $\kappa(G) = n^{-2} \det(J + Q) = \frac{1125}{25} = 45$  árboles generadores.

**Ejemplo 6.9.** Finalmente, para la gráfica de la figura que a continuación se muestra, también de 5 vértices, las matrices que la codifican son:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$J + Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

por lo que calculando  $\det(J + Q)$  tenemos  $\det(J + Q) = 3125$ ,

así  $\kappa(G) = n^{-2} \det(J + Q) = \frac{3125}{25} = 125$  árboles generadores.

# Bibliografía

- [01] H. Anton: *Introducción al álgebra lineal*, segunda edición. Limusa-Wiley, México, 1971.
- [02] N. Biggs: *Algebraic Graph Theory*, segunda edición. Cambridge University Press, 1993.
- [03] B. Bollobás: *Graph Theory, An Introductory Course*. Springer Verlag, 1979.
- [04] H. Cárdenas, E. Lluís, F. Raggi, F. Tomás: *Álgebra superior*, segunda edición. Trillas, México, 2002.
- [05] G. Chartrand: *Introductory Graph Theory*. Dover, 1985.
- [06] R. Diestel: *Graph Theory*, segunda edición. Springer, 1997.
- [07] J. N. Franklin: *Matrix Theory*. Dover, E.U., 1968.
- [08] S. H. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence: *Linear algebra*, cuarta edición. Prentice Hall, Nueva Jersey, 2003.
- [09] A. Gibbons: *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [10] C.D. Godsil: *Algebraic combinatorics*. Chapman and Hall, E.U., 1993.
- [11] K. Hoffman, R. Kunze: *Linear algebra*, segunda edición. Prentice/Hall Internacional, España, 1973.
- [12] S. Lange: *lgebra Lineal*. Fondo educativo interamericano, Mxico, 1986.
- [13] S. Lipschutz: *Álgebra lineal*. Schaum-McGraw-Hill, México, 1982.
- [14] M. Marcus y H. Mick: *Elementos de álgebra lineal*. Limusa-Wiley, México, 1971.

- [15] J. Matoušek y J. Nešetřil: *Invitation to discrete mathematics*, segunda edición. University Press, Oxford, 2008.
- [16] W. K. Nicholson: *Linear algebra with applications*, tercer edición. PWS Publishing Company, Boston, 1990.
- [17] G. U. Peña: *Introducción a la teoría de matrices oscilatorias*. Tesis de Licenciatura dirigida por Dr. Christof Geiss Hahn. México, 2010.
- [18] E. Ll. Puebla: *Linear algebra*, primer edición. Sistemas Técnicos de Edición, S.A. de C.V., México, 1997.
- [19] H. Schneider y G. P. Barker: *Matrices and linear algebra*, segunda edición. Dover, Nueva York, 1972.
- [20] D. Serre: *Matrices Theory and Applications*. Springer, E.U., 2001.