



Universidad Nacional Autónoma De México  
Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la  
Especialización en Estadística Aplicada

***“DOS TEMAS EN SISTEMAS LINEALES: LA CONJETURA  
ERDÖS-FABER-LOVÁZS Y TRANSVERSALES***

Tesis  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta  
**ADRIÁN VÁZQUEZ ÁVILA**

TUTOR:  
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS  
COMITÉ TUTORIAL  
DRA. AMANDA MONTEJANO CANTORAL  
UNIDAD MULTIDISCIPLINARIA DE DOCENCIA E INVESTIGACIÓN.

DR. RAFAEL VILLARROEL FLORES  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA  
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

México, D.F.

Octubre de 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Este trabajo está dedicado a mi madre,  
quien me apoyó incondicionalmente durante toda mi formación académica.*

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi asesora de doctorado, a la Dra. Gabriela Araujo, por darme la oportunidad de ser su alumno, y por la gran paciencia que mostró hacia a mi durante todo el doctorado; de la misma manera en que me apoyó en todas las salidas a congresos. Por todo es eso y más, le estoy muy agradecido.

También quiero agradecer, a todos los sinodales que participaron en mi examen de candidatura; a la Dra. Deborah Oliveros, a la Dra. Amanda Montejano y al Dr. Rafael Villarroel, por la dedicación que tuvieron en la revisión de mi protocolo de candidatura, y por sus comentarios en la presentación del mismo.

De igual forma, quiero agradecer a todos mis sinodales de tesis; a la Dra. Gabriela Araujo, a la Dra. Amanda Montejano, a la Dra. Mika Olsen, al Dr. David Romero y al Dr. Jesús Jerónimo, por la dedicación presentada en la revisión de este trabajo, por sus comentarios y correcciones. También quiero agradecer a la Dra. Deborah Oliveros, que aunque no formó parte de mi sinodales, me ayudó en la redacción de la introducción de la tesis, e hizo algunos comentarios a ésta. De igual manera quiero agradecer a Christian Rubio, quien es mi hermano académico y colega, por hacer grandes contribuciones a esta tesis, pues el capítulo 2 de esta tesis fue un trabajo conjunto con él y mi asesora de doctorado.

Quiero agradecer a la UNAM, por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado; a CONACTY, pues sin su apoyo no hubiese concluido mis estudios; y de manera muy especial, quiero agradecer al Centro de Innovación Matemática (CINNMA), por todo el apoyo que me brindó durante toda mi estancia de doctorado.

No quisiera finalizar este apartado, sin agradecer de manera muy especial a tres personas que influyeron mucho en mi formación académica; al Dr. David Romero, por haber sido mi asesor de maestría y haberme iniciado en el estudio de la Conjetura Erdős–Faber–

Lovász, que es uno de los temas en el que trabajé en mi doctorado. Al Dr. Luis Montejano, por transmitir ese entusiasmo por las matemáticas, por esa humildad que le caracteriza, y porque siempre tuvo tiempo de hablar de matemáticas conmigo. Finalmente y no menos importante, a mi asesora de doctorado, a la Dra. Gabriela Araujo, porque encontré en ella la motivación que requería para consolidar mis proyectos de investigación, aún cuando las cosas precian que pintaban mal, siempre tuvo confianza en mi. Sólo me resta decir que, fue un placer haber realizado mis estudios de doctorado con ella.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Definiciones generales</b>	<b>5</b>
1.1. Sistemas lineales . . . . .	5
1.2. Gráficas . . . . .	7
1.3. Diseños . . . . .	9
1.3.1. Diseños cíclicos . . . . .	10
1.3.2. Planos proyectivos . . . . .	12
1.3.3. Diseños resolubles . . . . .	14
1.4. Espacios proyectivos . . . . .	15
1.5. Sistemas de segmentos . . . . .	18
<b>2. Conjetura Erdős–Faber–Lovász</b>	<b>21</b>
2.1. El problema original . . . . .	22
2.2. La conjetura en términos de sistemas lineales . . . . .	22
2.3. Equivalencias y resultados recientes . . . . .	24
2.3.1. Cúmulos . . . . .	24
2.3.2. Número de intersección de una gráfica . . . . .	25
2.3.3. Resultados sobre sistemas lineales regulares–uniformes . . . . .	26

---

2.3.4.	$b$ -coloración en gráficas tensas bipartitas . . . . .	28
2.3.5.	Otras familias que satisfacen la Conjetura E-F-L . . . . .	29
2.4.	Cuasicúmulos y descomposiciones de gráficas completas . . . . .	30
2.4.1.	Cuasigrupos conmutativos . . . . .	32
2.5.	Diseños resolubles, espacios proyectivos y la Conjetura E-F-L . . . . .	34
2.5.1.	Diseños resolubles y la Conjetura E-F-L . . . . .	34
2.5.2.	Espacios Proyectivos . . . . .	37
<b>3.</b>	<b>Transversales y 2-acoplamientos en sistemas lineales</b>	<b>39</b>
3.1.	Introducción . . . . .	40
3.2.	Transversales y 2-acoplamientos en gráficas . . . . .	41
3.3.	Transversales y 2-acoplamientos en planos proyectivos . . . . .	42
3.4.	Número de transversal cuando el número de 2-acoplamiento es 2, 3 y 4 . . . . .	43
3.4.1.	Caso $\Delta(P, \mathcal{L}) = 3$ . . . . .	48
3.4.2.	Caso $\Delta(P, \mathcal{L}) = 4$ . . . . .	51
3.4.3.	Sistemas de segmentos . . . . .	56
3.5.	Una familia de sistemas lineales con $\tau = \nu_2$ . . . . .	57
3.5.1.	Sistemas lineales $\mathcal{C}_{n,n+1}$ . . . . .	59
3.6.	Transversales y 2-acoplamientos en espacios proyectivos . . . . .	62
3.7.	Caso general . . . . .	64

# Índice de figuras

1.1.	Ejemplo de un $(7, 3)$ -diseño que también es un $(7, 3)$ -diseño cíclico. . . . .	10
1.2.	A la izquierda está el plano proyectivo de orden 2 y a la derecha el plano proyectivo de orden 3. . . . .	13
1.3.	Ejemplo de un $(9, 3)$ -diseño resoluble. . . . .	14
1.4.	Ejemplo del plano proyectivo $PG(2, 2)$ . . . . .	17
1.5.	El inciso (a) representa el sistema lineal $W$ , y el inciso $B$ es una representación plana del sistema lineal $W$ . . . . .	18
2.1.	Descomposición de $K_7$ en triángulos. . . . .	31
2.2.	Una descomposición de $K_6$ . . . . .	33
2.3.	Ejemplos de descomposiciones obtenidos de un $(9, 3)$ -diseño resoluble donde se le suprime el vértice 8, los vértices 1 y 8, y los vértices 6, 7 y 8, respectivamente. . . . .	36
3.1.	La gráfica $H$ representa un 2-acoplamiento de $G$ . . . . .	41
3.2.	Plano proyectivo de orden 3, $\Pi_3$ . . . . .	47
3.3.	Sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ . . . . .	49
3.4.	Dos representaciones del sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ . . . . .	50
3.5.	Sistema lineal $\mathcal{C}$ . . . . .	52
3.6.	Sistema lineal resultante al considerar $l_{p,q} \ni x_1$ y $l_{p_i}, l_{q_i}$ , para $i = 1, 2$ . . . . .	54
3.7.	Sistema lineal resultante isomorfo a $\mathcal{C}$ . . . . .	55
3.8.	Sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ . . . . .	59





# Introducción

## *Conjetura de Erdős–Faber–Lovász*

Actualmente, resulta imposible hablar de combinatoria, matemáticas discretas y teoría de gráficas sin mencionar a Paul Erdős quien es, sin duda alguna, uno de los matemáticos que más contribuciones tiene en estas áreas de las matemáticas; esta afirmación puede constatararse a partir de la larga lista de publicaciones de este notable matemático. Además de la gran cantidad de resultados que deja plasmados a lo largo de cientos de artículos, Erdős deja también muchos problemas abiertos, que hoy en día siguen sin ser resueltos.

Una parte de este trabajo de tesis aborda uno de los problemas que propuso Paul Erdős, junto con sus colegas Vance Faber y László Lovász alrededor de 1972, según narra Faber en [29]. Este problema apareció en 1974 en [10] y establece lo siguiente:

“ Si  $|A_k| = n$ ,  $1 \leq k \leq n$ , y  $|A_i \cap A_j| \leq 1$ , para  $1 \leq i < j \leq n$ , entonces uno puede colorear los elementos de la unión  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  con  $n$  colores de tal forma que todo conjunto tenga elementos de todos los colores.”

A este problema se le llamó en un principio “el problema de los  $n$  conjuntos” (ver [10]), y hoy en día se le conoce como la Conjetura Erdős–Faber–Lovász (E–F–L); y aunque en un principio parece muy inocente es, desde mi punto de vista, uno de los problemas más maravillosos y complejos que hay en el área de matemáticas discretas en la actualidad, concretamente en teoría de gráficas. El problema se plantea de manera inmediata en términos de gráficas de la siguiente manera: si  $G^1, \dots, G^n$  son  $n$  copias de la gráfica completa de  $n$  vértices con la propiedad de que cualesquiera dos de estas copias comparten a lo más un vértice, entonces la gráfica  $G = \bigcup_{i=1}^n G^i$  tiene número cromático igual a  $n$ . En esta tesis y en esta introducción llamamos  $n$ -gráfica E–F–L a la gráfica  $G$ .

Hay trabajos que acotan superiormente el número de colores requeridos para colorear

a las  $n$ -gráficas E-F-L, por ejemplo Chang y Lawler probaron en [19] que son suficientes  $\lceil \frac{3n}{2} - 2 \rceil$  colores para colorear la gráfica  $G$ . También hay trabajos que verifican la Conjetura E-F-L para casos pequeños, concretamente, Hindman probó en [37] que toda  $n$ -gráfica E-F-L con  $n \leq 10$  satisface la Conjetura E-F-L; esta cota fue mejorada por Romero, Alonso-Pecina y Sánchez-Arroyo para  $n \leq 12$  en [54]. Por otro lado, Kahn probó en [43] que toda  $n$ -gráfica E-F-L tiene número cromático a lo más  $n + o(n)$ , probando que la Conjetura E-F-L es cierta asintóticamente. La versión fraccional de la conjetura fue probada por Kahn y Seymour en [44]. Existen además trabajos que muestran familias de  $n$ -gráficas E-F-L que satisfacen la Conjetura E-F-L, y otros que estudian diferentes equivalencias de la conjetura (ver [7, 6, 11, 21, 42, 50, 52, 55, 57], y [32, 37, 47, 56], respectivamente), sin embargo, es claro que, hasta este momento, la prueba de la conjetura queda todavía muy lejana.

En el Capítulo 2 damos un panorama de este problema, dando equivalencias y resultados, sin entrar en mucho detalle, de lo que se ha hecho de 2007 a 2013. El resultado principal de este capítulo, establece una nueva familia infinita de  $n$ -gráficas E-F-L que satisfacen la Conjetura E-F-L (ver teorema 2.4.3). Es importante mencionar que este trabajo culminó con un artículo de investigación dado en [6], y que fue un trabajo conjunto con mi asesora de doctorado, Gabriela Araujo, y mi hermano académico, Christian Rubio.

El Capítulo 2 se desglosa de la siguiente manera: en la Sección 2.1 se expone la Conjetura E-F-L tal cual fue establecida (como se vio previamente), y de cómo surge (según Faber). En la Sección 2.2 se establece la conjetura en términos de sistemas lineales, que es la forma en que es más conocida. En la Sección 2.3 damos una breve exposición de los resultados más recientes que hay de la Conjetura E-F-L de 2007 a 2013. En la Sección 2.4 damos una equivalencia a la conjetura en términos de ciertas descomposiciones de la gráfica completa, y presentamos nuestro resultado principal, dado una nueva familia infinita de  $n$ -gráficas E-F-L que satisfacen la Conjetura E-F-L. Este resultado es una generalización de un trabajo previo, también dentro de este doctorado, dado en [7], que a su vez fue inspirado por [55]. Finalmente, en la Sección 2.5 se presentan resultados ya establecidos con respecto a diseños resolubles y espacios proyectivos que satisfacen la Conjetura E-F-L, pero vistos en términos de descomposiciones de gráficas completas.

## Transversales y 2–acoplamientos en sistemas lineales

Dada una familia finita  $\mathcal{F}$  de conjuntos, una transversal es una selección mínima de puntos en los conjuntos de tal manera que cada uno de los elementos de la familia interseque al menos uno de estos puntos. La cardinalidad de este conjunto mínimo de puntos se le conoce como *el número de transversal*, denotado por  $\tau$ , y es un parámetro muy estudiado en muchos contextos; en teoría de gráficas se le conoce como *el número de cubierta* (ver [14, 23, 35]), y busca el mínimo número de vértices en una gráfica, de tal manera que toda arista de la gráfica contenga alguno de estos vértices. En geometría discreta, este parámetro, conocido también como *número de perforación* (ver [1, 2, 3, 26, 51]), es muy estudiado, en este contexto  $\mathcal{F}$  puede ser un conjunto de convexos que satisfacen ciertas propiedades.

Supongamos que en la familia  $\mathcal{F}$  podemos seleccionar un conjunto de conjuntos con la propiedad de que de tres en tres no tengan un punto en común; dicho subconjunto se le conoce como *2–acoplamiento* (*2–packing* en inglés), y al máximo número de elementos en un 2–acoplamiento se le conoce como el *número de 2–acoplamiento* (*2–packing number* en inglés), denotado por  $\nu_2$ .

En esta tesis estudiamos la relación entre  $\tau$  y  $\nu_2$  para ciertas familias de conjuntos, a saber, las gráficas simples, los planos proyectivos, los espacios proyectivos y los sistemas de segmentos; además estudiamos  $\tau$  y  $\nu_2$ , con  $\nu_2 \in \{2, 3, 4\}$ , para familias de conjuntos donde dos conjuntos comparten a lo más un elemento (estos sistemas son llamados *sistemas lineales*, y se definirán con más precisión en el Capítulo 1).

En los lemas 3.4.1 y 3.4.2 de la Sección 3.4 del Capítulo 3 se prueba, para sistemas lineales, la siguiente relación natural para estos dos parámetros:

$$\left\lceil \frac{\nu_2}{2} \right\rceil \leq \tau \leq \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2},$$

esto es, para sistemas lineales, el número de transversal está acotado superiormente por una función cuadrática con respecto al número de 2–acoplamiento. Sin embargo, probaremos que para ciertas familias de sistemas lineales el número de transversal está acotado superiormente por una función lineal con respecto al número de 2–acoplamiento.

El Capítulo 3 está desglosado de la siguiente manera: en la Sección 3.1 se dan las definiciones básicas para entender el problema. En las Secciones 3.2, 3.3 y 3.6 se estudia la relación entre el número de transversal y el número de 2–acoplamiento para el caso en

que los sistemas lineales sean gráficas, planos proyectivos y espacios proyectivos, respectivamente, concluyendo que la relación que hay entre estos parámetros es que el número de transversal está acotado superiormente por el número de 2-acoplamiento. En la Sección 3.4 se presenta el resultado principal de este capítulo, se prueba, en algún sentido, que si el número de 2-acoplamiento de un sistema lineal es a lo más cuatro, entonces también el número de transversal está acotado superiormente por el número de 2-acoplamiento. En la Sección 3.5 se da una familia de sistemas lineales cuyo número de transversal es igual al su número de 2-acoplamiento (uno de los problemas principales que resuelve esta tesis en este tema). Finalmente, en la Sección 3.7 se establece que en general, en sistemas lineales, no es cierto que el número de transversal está acotado superiormente por el número de 2-acoplamiento.

Es importante mencionar que este trabajo culminó con un artículo de investigación dado en [5], y que fue un trabajo conjunto con Gabriela Araujo, Amanda Montejano y Luis Montejano.

## Definiciones generales

En este primer capítulo, introducimos la terminología y definiciones generales que usarán a lo largo de esta tesis.

En la Sección 1.1 damos los conceptos básicos generales de la estructura combinatoria en la que vamos a trabajar, a saber, los sistemas lineales. En el resto de las secciones, Sección 1.2, Sección 1.3, Sección 1.4 y Sección 1.5, damos los conceptos y resultados necesarios de las subfamilias de sistemas lineales que vamos a trabajar en esta tesis. Estas subfamilias son las gráficas simples, los diseños, los espacios proyectivos y los sistemas de segmentos.

### 1.1

#### Sistemas lineales

Un *sistema de conjuntos* es una pareja  $(X, \mathcal{F})$  donde  $\mathcal{F}$  es una familia finita de subconjuntos de un conjunto finito no vacío  $X$ . A un sistema de conjuntos también se le conoce como *hipergráfica*, donde a los elementos de  $X$  y de  $\mathcal{F}$  se les llaman *vértices* e *hiperaristas*, respectivamente.

Gran parte de este trabajo se centra en una subfamilia de los sistemas de conjuntos, a saber, los *sistemas lineales*. Un sistema lineal es un sistema de conjuntos  $(X, \mathcal{F})$  tal que todo par de elementos  $E$  y  $F$  de  $\mathcal{F}$  cumplen  $|E \cap F| \leq 1$ . Además vamos a pedir que todo subconjunto de  $\mathcal{F}$  contenga al menos dos elementos de  $X$ , y que todo elemento de

$X$  esté contenido en al menos un subconjunto de  $\mathcal{F}$ .

De aquí en adelante denotaremos a los sistemas lineales como  $(P, \mathcal{L})$ , y llamamos *puntos* y *líneas* a los elementos de  $P$  y  $\mathcal{L}$ , respectivamente. Usaremos las palabras *incidente* para decir que un punto está contenido en una línea, o bien que la línea contiene al punto, y *adyacente* si dos puntos están contenidos en una misma línea.

Algunos ejemplos de sistemas lineales que veremos a lo largo de esta tesis, y que se definirán más adelante con más precisión, son: las gráficas, los diseños, los planos proyectivos, los espacios proyectivos y los sistemas de segmentos de línea recta.

El *dual* de un sistema lineal  $(P, \mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_m\})$ , es el sistema lineal  $(P^*, \mathcal{L}^*)$  cuyos puntos  $P^* = \{l_1, \dots, l_m\}$  son las líneas de  $\mathcal{L}$ , y las líneas  $\mathcal{L}^* = \{L_1^*, \dots, L_{|P|}^*\}$  son de la forma  $L_i^* = \{l_j : p_i \in l_j \in \mathcal{L}\}$ . Note que el dual de un sistema lineal también es un sistema lineal.

Decimos que dos sistemas lineales  $(P', \mathcal{L}')$  y  $(P, \mathcal{L})$  son *isomorfos*, denotado por  $(P', \mathcal{L}') \simeq (P, \mathcal{L})$ , si existe una biyección  $f : P' \rightarrow P$  tal que  $p, q \in P'$  son adyacentes si y sólo si  $f(p), f(q) \in P$  son adyacentes.

Un *subsistema*  $(P', \mathcal{L}')$  de un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  satisface  $P' \subseteq P$  y para todo  $l' \in \mathcal{L}'$  existe un único  $l \in \mathcal{L}$ , tal que  $l' \subseteq l$ . El *subsistema inducido* por un conjunto de líneas  $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$  es el subsistema  $(P', \mathcal{L}')$ , donde  $P' = \bigcup_{l \in \mathcal{L}'} l$ .

Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal y  $p$  un punto de  $P$ . Denotamos por  $\mathcal{L}_p$  al conjunto de líneas que son incidentes a  $p$ , esto es  $\mathcal{L}_p = \{l \in \mathcal{L} : p \in l\}$ . El *grado* de  $p$  es el número de líneas incidentes a  $p$ , esto es,  $\deg(p) := |\mathcal{L}_p|$ . El *grado máximo* de  $(P, \mathcal{L})$ , denotado por  $\Delta(P, \mathcal{L})$ , es el máximo de los grados de todos los puntos de  $(P, \mathcal{L})$ . Al conjunto de puntos de grado al menos  $k$  lo denotamos por  $X_k$ , esto es  $X_k = \{p \in P : \deg(p) \geq k\}$ . A los puntos de grado 2 y de grado 3 los llamamos *puntos dobles* y *puntos triples*, respectivamente. Un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  es *r-regular* si todo punto de  $P$  tiene grado  $r$ , y  $(P, \mathcal{L})$  es *k-uniforme* si toda línea de  $\mathcal{L}$  es incidente a exactamente  $k$  puntos.

Las definiciones anteriores son válidas para cualquier sistema de conjuntos.

# 1.2

## Gráficas

En esta sección, introducimos algunas definiciones elementales de gráficas que usaremos a lo largo de esta tesis. También presentamos algunos resultados, sin demostración, que utilizaremos en algunas secciones de este trabajo. Es importante decir que dichos resultados son bien conocidos y aparecen en cualquier libro de texto de teoría de gráficas (ver [8, 15, 20]).

Un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  es una *gráfica simple* cuando  $(P, \mathcal{L})$  es 2-uniforme. Usualmente se denotan a las gráficas simples como  $G = (V, E)$ , y se llaman *vértices* y *aristas* a los elementos de  $V$  y  $E$ , respectivamente. En ocasiones expresaremos al conjunto de vértices de una gráfica  $G$  como  $V(G)$ , y al conjunto de aristas como  $E(G)$ . Recordemos que una gráfica simple no tiene lazos ni aristas múltiples, en esta tesis llamamos gráficas a las gráficas simples.

Una gráfica  $H$  es una *subgráfica* de una gráfica  $G$ , si  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Por otra parte, si  $W \subseteq V(G)$ , entonces la *subgráfica inducida* por  $W$ , denotada por  $G[W]$ , satisface que  $V(G[W]) = W$  y  $E(G[W]) = \{\{u, v\} \in E(G) : u, v \in W\}$ .

Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de una gráfica  $G$ . Un *camino* entre  $u$  y  $v$ , o bien un *uv-camino*, es una sucesión alternada de vértices y aristas  $u_1 e_1 u_2 e_2 \dots e_{k-1} u_k$ , con  $e_i = u_i, u_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, k-1$ , tal que  $u_1 = u$  y  $u_k = v$ . Un *paseo* entre  $u$  y  $v$ , o bien un *uv-paseo*, es un *uv-camino* sin aristas repetidas, y una *trayectoria* entre  $u$  y  $v$ , o bien una *uv-trayectoria*, es un camino entre  $u$  y  $v$  sin vértices repetidos (y por ende, sin aristas repetidas). Es bien sabido que si existe un camino entre dos vértices, entonces existe una trayectoria entre ellos. La *distancia* entre dos vértices  $u$  y  $v$  de una gráfica  $G$ , denotada por  $d(u, v)$ , es el número de aristas de un *uv-trayectoria*, si es que la trayectoria existe, o es infinito, si no existe la tal *uv-trayectoria*. Una gráfica  $G$  se dice que es *conexa*, si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  existe una *uv-trayectoria*. Note que la función distancia en una gráfica conexa  $G$  define una métrica en ella, esto es,  $(G, d)$  es un espacio métrico.

Un *ciclo de longitud  $n$*  ( $n \geq 3$ ), denotado por  $C_n$ , es una sucesión de vértices y aristas no repetidas  $u_1 e_1 u_2 e_2 \dots e_{n-1} u_n$  tal que  $u_1 = u_n$ . El *cuello* de una gráfica  $G$ , denotado por



$g(G)$ , es la longitud del ciclo (como subgráfica) más pequeño en  $G$ .

Decimos que dos vértices  $u$  y  $v$  de una gráfica  $G$  están relacionados, denotado por  $u \sim v$ , si existe una  $uv$ -trayectoria. La relación  $\sim$  define una *relación de equivalencia* entre los elementos de  $V(G)$ . Llamamos *componentes conexas* a las gráficas inducidas por las *clases de equivalencia* inducida por la relación  $\sim$ . Note que si  $G$  es conexa, entonces  $u \sim v$ , para todo  $u, v \in V(G)$ . Por lo tanto, toda componente conexa es una subgráfica (inducida) conexa de  $G$ .

Una gráfica  $G$  se dice que es *completa*, si todo par de vértices de  $G$  son adyacentes. Es bien sabido que si  $G$  y  $H$  son completas, con  $|V(G)| = |V(H)|$ , entonces  $G \simeq H$ , esto es, esencialmente hay una única gráfica completa con  $|V(G)|$  vértices, y ésta la denotamos como  $K_n$ , donde  $n = |V(G)|$ . Note que cualquier subgráfica inducida de  $K_n$  sigue siendo una gráfica completa, esto es, si  $W \subseteq V(K_n)$ , entonces  $G[W] \simeq K_{|W|}$ . Un *clan* en una gráfica  $G$  es un subconjunto maximal  $U \subseteq V(G)$  tal que  $G[U]$  es completa. El *número de clan* de una gráfica  $G$ , denotado por  $\omega(G)$ , es la cardinalidad más grande entre todos los posibles clanes de  $G$ , esto es,  $\omega(G) = \max\{|V| : V \text{ es un clan de } G\}$ .

Un conjunto  $A \subseteq V(G)$  de una gráfica  $G$  es *independiente*, si todo par de vértices de  $A$  no son adyacentes. El *número de independencia*, denotado por  $\alpha(G)$ , es la cardinalidad más grande entre todos los conjuntos independientes de  $G$ . Un conjunto  $B \subseteq V(G)$ , de una gráfica  $G$ , es una *cubierta*, si toda arista de  $G$  es incidente a un elemento de  $B$ . El *número de cubierta*, denotado en esta tesis por  $\tau(G)$  (usualmente es denotado por  $\beta(G)$ ), es la cardinalidad más pequeña entre todas las posibles cubiertas de  $G$ .

Una  $k$ -arista coloración de una gráfica  $G$  es una función suprayectiva  $g : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tal que, si  $e$  y  $f$  son aristas incidentes a un mismo vértice, entonces  $g(e) \neq g(f)$ . El *índice cromático* de una gráfica  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , es el mínimo  $k$  para el cual  $G$  tiene una  $k$ -arista coloración.

Una *representación plana* de una gráfica  $G$  mapea cada vértice  $u \in V(G)$  a un punto  $p(u)$  en el plano, y cada arista  $e \in E(G)$  a una curva simple  $c(e)$  en el plano, de tal forma que cada vértice  $u \in V(G)$  y arista  $e \in E(G)$  se cumple  $p(u) \in l(e)$  si y solo si  $u \in e$ , y para cada par de distintas aristas  $e, f \in E(G)$  se cumple  $l(e) \cap l(f) = \{p(u) : u \in e \cap f\}$ . Una gráfica  $G$  es *planar* si existe una representación plana de  $G$ , y  $G$  es *plana* si ya está representada en el plano.

Una gráfica  $G$  es *bipartita*, si existe una partición de  $V(G)$  en dos conjuntos disjuntos  $A$  y  $B$ , de tal forma que toda arista  $e \in E(G)$  cumple  $e \cap A \neq \emptyset$  y  $e \cap B \neq \emptyset$ . Si todo vértice de  $A$  es adyacente a todo vértice de  $B$ , entonces la gráfica bipartita se llama *bipartita*

completa, y se denota como  $K_{n,m}$ , donde  $n = |A|$  y  $m = |B|$ .

A continuación presentamos algunos resultados que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Para más detalles puede consultar [8, 20].

**Teorema 1.2.1.** *Si  $G$  es una gráfica, entonces  $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$ .*

**Teorema 1.2.2.** *Si  $G$  es una gráfica, entonces  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .*

**Teorema 1.2.3.** *Si el cuello de una gráfica conexa plana  $G$  es al menos 3, entonces*

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)(|V(G)| - 2)}{g(G) - 2}.$$

## 1.3

### Diseños

En esta sección introducimos algunos conceptos de teoría de diseños de bloques que usaremos a lo largo de esta tesis. También presentamos algunos resultados, sin demostración, que utilizaremos más adelante en este trabajo. Es importante decir que estos resultados son bien conocidos y aparecen en la mayoría de los textos dedicados a esta área (ver [4, 58]).

Sean  $v$ ,  $b$ ,  $r$  y  $\kappa$  enteros positivos con  $v > 1$ . Un *diseño*  $D$  con parámetros  $v$ ,  $b$ ,  $r$  y  $\kappa$  es un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$   $\kappa$ -uniforme y  $r$ -regular, con la propiedad de que para todo par de puntos existe una línea incidente a ellos.

En esta tesis denotamos a los diseños como  $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ , y llamamos *puntos* y *bloques* a los elementos de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente.

De la definición de diseño se sigue inmediatamente que (ver [58]):

$$k > 1, \quad r(\kappa - 1) = v - 1, \quad vr = b\kappa, \quad (1.1)$$

pues si  $x$  es cualquier punto del diseño, y éste es incidente a  $r$  bloques, entonces  $x$  hace pareja con  $r(\kappa - 1)$  puntos obtenidos de los  $r$  bloques incidentes a  $x$ . Por otra parte, el

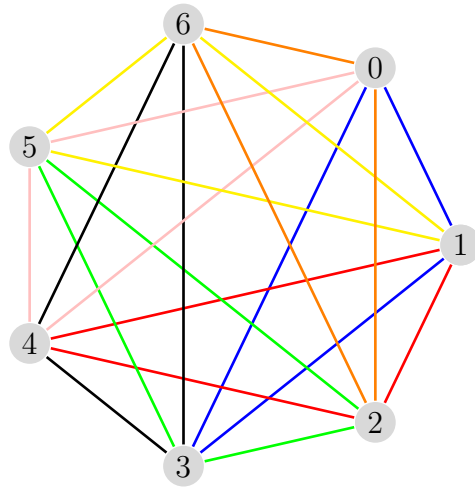


Figura 1.1: Ejemplo de un  $(7, 3)$ -diseño que también es un  $(7, 3)$ -diseño cíclico.

punto  $x$  hace pareja con  $v - 1$  de los puntos restantes, por lo que  $r(\kappa - 1) = v - 1$ . Para verificar que  $vr = b\kappa$ , note que como todo bloque tiene  $k$  puntos, entonces los puntos del diseño aparecen  $b\kappa$  veces en los bloques, pero como cada punto es incidente a  $r$  bloques, entonces  $vr = b\kappa$ .

Una vez que  $v$  y  $\kappa$  son conocidos, el resto de los parámetros,  $r$  y  $b$ , están únicamente determinados, por lo que diremos que  $D$  es un  $(v, \kappa)$ -diseño. En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de un  $(7, 3)$ -diseño.

En [58] demuestran que una condición necesaria para la existencia de  $(v, \kappa)$ -diseños es que  $v \equiv 1, \kappa \pmod{\kappa(\kappa - 1)}$ . Por otra parte, en [33] prueban que si  $\kappa = 3, 4$ , entonces la condición necesaria también es suficiente, esto es, si  $v \equiv 1, \kappa \pmod{\kappa(\kappa - 1)}$ , con  $\kappa = 3, 4$ , entonces la existencia de  $(v, \kappa)$ -diseños está garantizada.

### 1.3.1

#### Diseños cíclicos

En esta subsección, introducimos el concepto de diseños cíclicos, y presentamos algunos resultados, sin demostración, que usaremos más adelante en este trabajo. Para más información de estos diseños puede consultar [4, 58].

Decimos que un  $(v, \kappa)$ -diseño  $(\mathbb{Z}_v, \mathcal{B})$  es *cíclico*, si  $\sigma : i \rightarrow i + 1$  es un automorfismo, esto es, si  $\{b_1, \dots, b_\kappa\}$  es un bloque de  $\mathcal{B}$ , entonces  $\{b_1 + 1, \dots, b_\kappa + 1\}$  también lo es.

La Figura 1.1 muestra un  $(7, 3)$ -diseño cíclico, cuyos bloques son:

$$\mathcal{B} = \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 6, 0\}, \{5, 0, 1\}, \{6, 1, 2\}\}.$$

Para un  $(v, \kappa)$ -diseño, sea  $B = \{b_1, \dots, b_\kappa\}$  un bloque. La *órbita bloque* que contiene a  $B$ , denotado por  $Orb(B)$ , es el conjunto de bloques

$$Orb(B) = \{\{b_1 + j, \dots, b_\kappa + j\} : j \in \mathbb{Z}_v\}.$$

Al bloque  $B$  se le llama *bloque base*.

Esta definición está motivada por la acción del grupo  $\mathbb{Z}_v$  sobre  $\mathcal{B}$ ,  $\Phi : \mathbb{Z}_v \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , dada por  $\Phi(j, \{b_1, \dots, b_\kappa\}) = \{b_1 + j, \dots, b_\kappa + j\}$ . Recuerde que una acción de un grupo  $(\mathcal{G}, *)$  sobre un conjunto  $X$  es un mapeo  $\Phi : \mathcal{G} \times X \rightarrow X$  tal que:

- (i)  $\Phi(e, x) = x$ , para todo  $x \in X$ ,
- (ii)  $\Phi(g * h, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$ , para todo  $g, h \in \mathcal{G}$ , y  $x \in X$ .

Si  $x$  es un elemento de  $X$ , la *órbita* de  $x$ , denotado por  $Orb(x)$ , es el conjunto

$$Orb(x) = \{\Phi(g, x) : g \in \mathcal{G}\},$$

y el *estabilizador* de  $x$  como el conjunto

$$Stab(x) = \{g \in \mathcal{G} : \Phi(g, x) = x\}.$$

Es bien sabido que  $Stab(x)$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}$ , y que  $|Orb(x)| = [\mathcal{G} : Stab(x)]$ , para todo  $x \in X$ , donde  $[\mathcal{G} : Stab(x)]$  es el *índice* de  $\mathcal{G}$  sobre  $Stab(x)$ .

Si un grupo  $\mathcal{G}$  actúa sobre un conjunto  $X$ , entonces las órbitas de los elementos de  $X$  constituyen una partición de  $X$ , pues la siguiente relación en  $X$  es una relación de equivalencia: dos elementos  $x, y \in X$  están relacionados, si existe  $g \in \mathcal{G}$  tal que  $\Phi(g, y) = x$ .

Si la órbita de un bloque (*órbita bloque*) en un  $(v, \kappa)$ -diseño cíclico tiene  $v$  bloques distintos, decimos que esta órbita es *completa*, de lo contrario decimos que la órbita es *corta*. En [22] se pueden encontrar los siguientes resultados:

1. En un  $(v, \kappa)$ -diseño  $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$  con  $v \equiv 1 \pmod{\kappa(\kappa - 1)}$ , todas sus órbitas son completas, esto es  $|Stab(B)| = 1$ , para todo  $B \in \mathcal{B}$ . Además, hay  $l$  órbitas si  $v = l\kappa(\kappa - 1) + 1$ , es decir, hay  $\frac{v-1}{\kappa(\kappa-1)}$  órbitas completas.
2. En un  $(v, \kappa)$ -diseño  $(\mathcal{V}, \mathcal{B})$  con  $v \equiv \kappa \pmod{\kappa(\kappa - 1)}$ , todas sus órbitas son completas, excepto una, esto es, existe un único  $B' \in \mathcal{B}$  tal que  $|Stab(B')| > 1$ . Si  $v = l\kappa(\kappa-1) + \kappa$  hay  $l$  órbitas completas y una corta, es decir, hay  $\frac{v-\kappa}{\kappa(\kappa-1)}$  órbitas completas y una corta.
3. La órbita corta contiene al bloque  $\{0, \frac{v}{\kappa}, \frac{2v}{\kappa}, \dots, \frac{(\kappa-1)v}{\kappa}\}$

### Ejemplo 1.

- (i) El  $(7, 3)$ -diseño tiene una órbita bloque completa, cuyo bloque base es  $\{0, 1, 3\}$ .
- (ii) El  $(13, 3)$ -diseño tiene dos órbitas bloque completas, cuyos bloques base son  $\{0, 1, 4\}$  y  $\{0, 2, 7\}$ .
- (iii) El  $(15, 3)$ -diseño tiene dos órbitas bloque completas, dados por los bloques base  $\{0, 1, 4\}$ ,  $\{0, 2, 8\}$ , y una órbita corta, dada por el bloque base  $\{0, 5, 10\}$ .

## 1.3.2

### Planos proyectivos

En esta subsección, definimos los planos proyectivos finitos, y damos algunos resultados, sin demostración, que son bien conocidos de estas geometrías. Estos resultados aparecen en la mayoría de los textos de Geometría Finita (ver [9, 17, 24, 39, 49]).

Un *plano proyectivo finito* (o simplemente *plano proyectivo*) es un diseño  $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  que satisface los siguientes axiomas:

- (i) todo par de puntos de  $\mathcal{V}$  son incidentes a un mismo bloque,
- (i) todo par de bloques de  $\mathcal{B}$  son incidentes a un mismo punto (se intersectan),

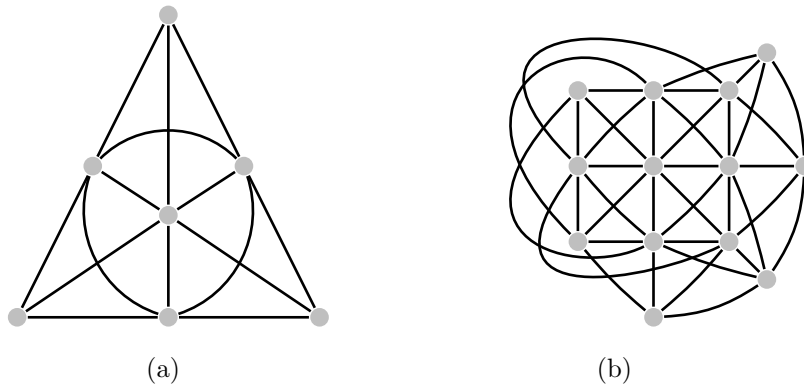


Figura 1.2: A la izquierda está el plano proyectivo de orden 2 y a la derecha el plano proyectivo de orden 3.

(iii) existen cuatro puntos en posición general, esto es, no tres de éstos son incidentes a un mismo bloque.

Es importante decir que existe una dualidad entre los puntos y los bloques de un plano proyectivo, esto es, si pensamos al conjunto de bloques como el conjunto de puntos y el conjunto de puntos como el conjunto de bloques, entonces el diseño resultante es también un plano proyectivo. En otras palabras, si  $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  es un plano proyectivo, entonces el diseño dual  $D^* = (\mathcal{V}^*, \mathcal{B}^*)$  es también un plano proyectivo (ver [24, 49]).

Una consecuencia inmediata de los axiomas anteriores es que si  $D$  es un plano proyectivo, entonces existe  $n \in \mathbb{N}$ , llamado *orden del plano proyectivo*, tal que todo punto (línea, respectivamente) es incidente a  $n + 1$  líneas (puntos, respectivamente), además todo plano proyectivo de orden  $n$  tiene  $n^2 + n + 1$  puntos (líneas, respectivamente). Para la demostración de estas propiedades puede consultar [9]. En resumen, un plano proyectivo de orden  $n$  es un  $(n^2 + n + 1, n + 1)$ -diseño. En esta tesis denotamos a los planos proyectivos de orden  $n$  como  $\Pi_n$ . El inciso (a) de la Figura 1.2 se muestra a  $\Pi_2$ , el plano proyectivo más pequeño (conocido como el plano de Fano, nombre debido al matemático Gino Fano), y en el inciso (b) de la Figura 1.2 se muestra a  $\Pi_3$ .

Es bien sabido que si  $n$  es potencia de primo, entonces existe plano proyectivo de orden  $n$  (ver [39]). Sin embargo, la pregunta sobre la existencia de planos proyectivos de orden diferente a una potencia de primo permanece abierta, existen algunos resultados parciales al respecto, sin embargo en esta tesis no abordaremos este tema (para más información puede consultar [18, 25]).

Un *arco* en un plano proyectivo  $\Pi_n = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  es un conjunto máximo  $A \subseteq \mathcal{V}$  de puntos

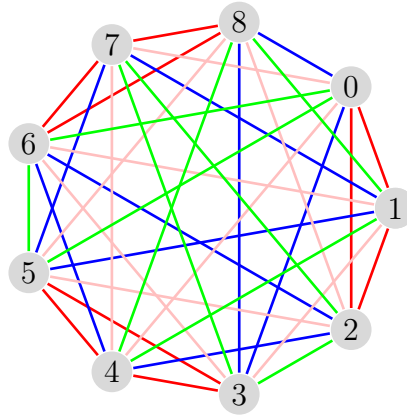


Figura 1.3: Ejemplo de un  $(9, 3)$ -diseño resoluble.

en posición general (no tres colineales). En [16] demuestran lo siguiente:

**Teorema 1.3.1.** [16] *Si  $\Pi_q$  es un plano proyectivo de orden  $q$ , y  $A$  es un arco de  $\Pi_q$ . Entonces*

- $|A| = q + 2$  si  $n$  es par.
- $|A| = q + 1$  si  $n$  es impar.

Un arco  $A$  en un plano proyectivo  $\Pi_q$  es un *óvalo* si  $|A| = q + 1$ , y es un *hiperóvalo* si  $|A| = q + 2$ .

### 1.3.3

#### Diseños resolubles

En esta subsección, continuamos con los diseños, enfocándonos en una familia muy importante de éstos, a saber, los diseños resolubles. Presentaremos algunas definiciones que se usarán a lo largo de esta tesis.

Una *clase resoluble*  $\mathcal{S}$  de un  $(v, \kappa)$ -diseño es un conjunto de bloques que particiona los puntos del diseño, en el sentido de que todo punto es incidente a uno y solo a uno de los

bloques de  $\mathcal{S}$ . Una *resolución*  $\mathcal{P}$  de un  $(v, \kappa)$ -diseño es un conjunto de clases resolubles que particiona a los bloques del diseño, en el sentido de que cada bloque está en una y solo en una de las clases resolubles.

Si un  $(v, \kappa)$ -diseño tiene una clase resoluble  $\mathcal{S}$ , entonces  $\kappa$  divide a  $v$ , por lo que existe  $t$  tal que

$$v = \kappa t \tag{1.2}$$

y  $\mathcal{S}$  contiene exactamente  $t$  bloques disjuntos distintos. Además por la ecuación de (1.1) se tiene que

$$b = \frac{v}{\kappa} r = tr \tag{1.3}$$

Si un  $(v, \kappa)$ -diseño tiene una resolución  $\mathcal{P}$  —en este caso lo decimos que el diseño es un *diseño resoluble*— entonces  $\mathcal{P}$  es un conjunto de  $r$  clases resolubles disjuntas. En la Figura 1.3 se muestra un  $(9, 3)$ -diseño resoluble, con el siguiente conjunto de bloques:

$$\begin{array}{lll} \{0, 1, 2\} & \{3, 4, 5\} & \{6, 7, 8\} \\ \{0, 3, 6\} & \{1, 4, 8\} & \{2, 5, 7\} \\ \{0, 4, 7\} & \{1, 5, 6\} & \{2, 3, 8\} \\ \{0, 5, 8\} & \{1, 3, 7\} & \{2, 4, 6\} \end{array}$$

donde cada renglón corresponde a una clase resoluble.

En [58] prueban que una condición necesaria para que un  $(v, \kappa)$ -diseño sea resoluble es que  $v \equiv \kappa \pmod{\kappa(\kappa - 1)}$ . En [53] prueban que la condición necesaria también es suficiente cuando  $\kappa = 3$ , y en [34] prueban lo mismo pero para cuando  $\kappa = 4$ .

## 1.4

### Espacios proyectivos

En esta sección, estudiamos los espacios proyectivos, o geometrías proyectivas, y presentamos algunos resultados sin demostración. Para más detalles puede consultar [38, 39].



Sea  $V = V(n+1, q)$  un espacio vectorial  $(n+1)$ -dimensional sobre el campo finito  $GF(q)$  de  $q$  elementos y con origen  $O$ . Consideremos la relación de equivalencia sobre los elementos de  $V \setminus \{O\}$  cuyas clases de equivalencia son subespacios 1-dimensional de  $V$  sin el origen, esto es, para  $x, y \in V \setminus \{O\}$ , decimos que  $x$  está relacionado con  $y$ , donde  $x = (x_0, \dots, x_n)$  e  $y = (y_0, \dots, y_n)$  para alguna base, si para algún  $t \in GF(q) \setminus \{0\}$  se tiene  $y_i = tx_i$ , para todo  $i$ . El conjunto de clases de equivalencia  $n$ -dimensional sobre  $GF(q)$  se denota por  $PG(n, q)$ . En otras palabras, el espacio proyectivo  $PG(n, q)$  es la geometría cuyos puntos, líneas, planos,  $\dots$ , hiperplanos son los subespacios (bajo la relación de equivalencia anterior) de  $V(n+1, q)$  de dimensión  $1, 2, 3, \dots, n$ , respectivamente. Note que la dimensión de un subespacio de  $PG(n, q)$  es uno menor a la dimensión de un subespacio de  $V(n+1, q)$ .

En la Figura 1.4 se muestra el espacio proyectivo de dimensión 2 (o plano proyectivo), denotado por  $PG(2, 2)$ . Este plano proyectivo se construye de la siguiente manera: consideremos el espacio vectorial  $V(3, 2) = \mathbb{Z}_2^3$ . Entonces los puntos y las líneas del plano proyectivo  $PG(2, 2)$  están dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \{\lambda(1, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 0, 0)\}, \\
 p_2 &= \{\lambda(1, 0, 1) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 0, 1)\}, \\
 p_3 &= \{\lambda(1, 1, 0) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 1, 0)\}, \\
 p_4 &= \{\lambda(1, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 1, 1)\}, \\
 p_5 &= \{\lambda(0, 0, 1) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(0, 0, 1)\}, \\
 p_6 &= \{\lambda(0, 1, 0) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(0, 1, 0)\}, \\
 p_7 &= \{\lambda(0, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(0, 1, 1)\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \{\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 0, 1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}, \\
 l_2 &= \{\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}, \\
 l_3 &= \{\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}, \\
 l_4 &= \{\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 1, 1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}, \\
 l_5 &= \{\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\
 l_6 &= \{\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}, \\
 l_7 &= \{\lambda_1(0, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_2 \setminus \{0\}\} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\},
 \end{aligned}$$

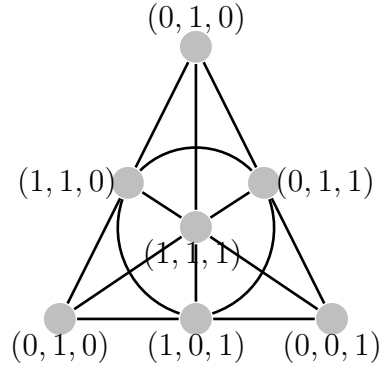


Figura 1.4: Ejemplo del plano proyectivo  $PG(2, 2)$ .

No es difícil verificar que  $PG(2, 2)$  es isomorfo a  $\Pi_2$ , al plano de Fano. En general, como se comentó previamente, cuando  $n = 2$ , el espacio proyectivo  $PG(2, q)$  es un plano proyectivo de orden  $q$ : la propiedad de que todo par de líneas en  $PG(2, q)$  tienen un punto en común, es debido a que todo par de planos que pasan por el origen en  $V(3, q)$  se intersectan en una única línea (que pasa por el origen), y esta línea (sin el origen) define un punto en  $PG(2, q)$ . Y que todo par de puntos en  $PG(2, q)$  hay una línea que los contiene, es debido a que todo par de líneas en  $V(3, q)$  que pasan por el origen existe un único plano que los contiene, esto es, si  $P = \{\alpha x : \alpha \in GF(q) \setminus \{0\}\}$  y  $Q = \{\beta y : \beta \in GF(q) \setminus \{0\}\}$ , con  $x \neq y \in V(3, q)$ , son dos puntos diferentes en  $PG(2, q)$ , entonces la línea  $PQ = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in GF(q) \setminus \{0\}\}$  contiene a estos dos puntos. Sólo faltaría verificar la existencia de cuatro puntos en  $PG(2, q)$  en posición general, por ejemplo, no existe ningún plano en  $V(3, q)$ , que pase por el origen, que contenga a todos los puntos  $P_1 = \{\alpha E_1 : \alpha \in GF(q) \setminus \{0\}\}$ ,  $P_2 = \{\alpha E_2 : \alpha \in GF(q) \setminus \{0\}\}$ ,  $P_3 = \{\alpha E_3 : \alpha \in GF(q) \setminus \{0\}\}$  y  $P_4 = \{\alpha(E_1 + E_2) : \alpha \in GF(q) \setminus \{0\}\}$ , donde  $E_i$  es el  $i$ -ésimo vector canónico de  $V(3, q)$ .

A continuación, presentamos algunos resultados, sin demostración, que nos ayudaran a verificar que todo espacio proyectivo es un diseño. Para más detalles puede consultar [38].

**Proposición 1.4.1.** [38] *El número de  $i$ -subespacios de  $PG(n, q)$  está dado por*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ i+1 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\dots(q^{n+1}-q^i)}{(q^{i+1}-1)(q^{i+1}-q)\dots(q^{i+1}-q^i)}.$$

**Proposición 1.4.2.** [38] *El número de  $i$ -subespacios a través un  $j$ -subespacio ( $j \leq i$ ) dado*

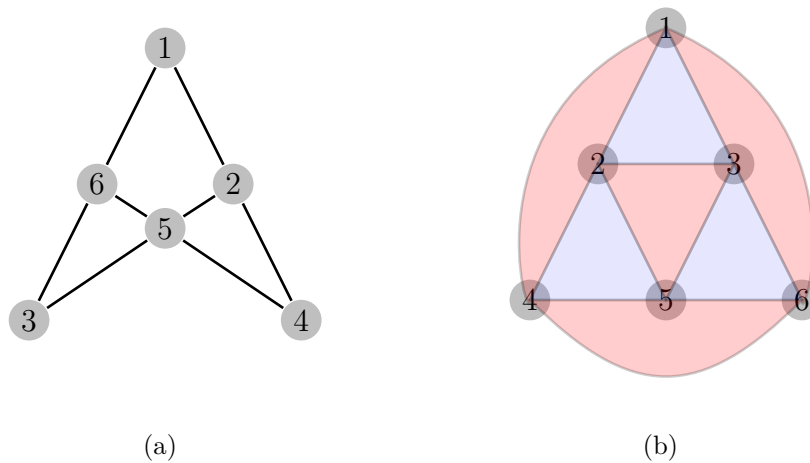


Figura 1.5: El inciso (a) representa el sistema lineal  $W$ , y el inciso  $B$  es una representación plana del sistema lineal  $W$ .

en  $PG(n, q)$  está dado por  $\begin{bmatrix} n-j \\ i-j \end{bmatrix}_q$ .

El espacio proyectivo  $PG(n, q)$  es un  $(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, q+1)$ -diseño, donde los bloques son las líneas, pues el número de puntos en una línea es  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = q+1$ , el número de líneas que pasan a través de un punto es  $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^n-1}{q-1}$ , y todo par de puntos determinan una línea, pues estos puntos representan vectores (junto con el origen) que generan un plano en  $V(n+1, q)$ .

## 1.5

### Sistemas de segmentos

En esta sección, presentamos los sistemas lineales que se puede representar en el plano, y daremos algunos resultados de estos sistemas lineales.

Una *representación en segmentos de línea recta* sobre el plano de un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  mapea cada punto  $x \in P$  a un punto  $p(x)$  en el plano, y cada línea  $F \in \mathcal{L}$  a un segmento de línea recta  $l(F)$  en el plano, de tal forma que cada punto  $x \in P$  y línea  $F \in \mathcal{L}$  satisfacen  $p(x) \in l(F)$  si y solo si  $x \in F$ , y para cada par de líneas distintas  $F, H \in \mathcal{F}$  se tiene  $l(F) \cap l(H) = \{p(x) : x \in F \cap H\}$ . Un *sistema de segmentos de línea recta*  $(P, \mathcal{L})$ ,

en corto *sistema de segmentos*, es un sistema lineal tal que existe una representación de segmentos de línea recta de  $(P, \mathcal{L})$  en el plano.

La *gráfica de incidencia* de un sistema de conjuntos  $(X, \mathcal{F})$ , denotado por  $B(X, \mathcal{F})$ , es una gráfica bipartita con conjunto de vértices  $V = X \cup \mathcal{F}$ , donde dos vértices  $x \in X$  y  $F \in \mathcal{F}$  son adyacentes si y solo si  $x \in F$ .

De acuerdo a [45] cualquier sistema de segmentos es *Zykov-planar*. Un sistema de conjuntos  $(X, \mathcal{F})$  es Zykov-planar si existe una gráfica planar  $G$  (no necesariamente simple) tal que  $V(G) = X$  y  $G$  puede dibujarse en el plano con las caras bicoloradas (digamos rojo y azul) de tal forma que existe una biyección entre las caras rojas de  $G$  y los subconjuntos de  $\mathcal{F}$ , de manera que un punto es incidente a una cara roja si y solo si este punto es incidente al subconjunto correspondiente (ver [60]).

En el inciso (a) de la Figura 1.5 se muestra una representación del sistema lineal  $W = (P_W, \mathcal{L}_W)$ , donde  $P_W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $\mathcal{L}_W = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Por otra parte, en el inciso (b) se muestra una representación Zykov-plana del sistema lineal  $W$ . Note que este sistema lineal es un sistema de segmentos.

En [59] se prueba que la definición de planaridad dada por Zykov es equivalente a lo siguiente:

**Teorema 1.5.1.** [59] *Un sistema de conjuntos  $(X, \mathcal{F})$  es Zykov-planar si y solo si la gráfica de incidencia  $B(X, \mathcal{F})$  de  $(X, \mathcal{F})$  es planar.*



## Conjetura Erdős–Faber–Lovász

En este capítulo, estudiamos uno de los problemas que, desde mi punto de vista, resultan más interesantes en matemáticas discretas, a saber: el problema de los  $n$  conjuntos (descrito previamente en la introducción de esta tesis). A este problema se le conoce actualmente como la Conjetura Erdős–Faber–Lovász.

En la Sección 2.1, se establece el problema de los  $n$  conjuntos tal cual lo plantean Erdős, Faber y Lovász, y se enuncian dos párrafos en donde Erdős y Faber ([27] y [29] respectivamente) narran como surgió este problema, ahora conjetura. En la Sección 2.2, se establece el problema en términos de sistemas lineales. En la Sección 2.3, se da un panorama general de los resultados más recientes sobre este problema (concretamente de 2007 a 2013). En la Sección 2.4, se establece el problema en términos de descomposiciones de gráficas completas, que es la forma en que abordamos el problema a lo largo de esta tesis y se presenta el resultado principal de este capítulo (teorema 2.4.3) el cual generaliza un resultado previo dado en [7], también obtenido dentro del marco de este doctorado; cabe resaltar que como el teorema 2.4.3 es una generalización del mismo nos limitamos a describir el resultado general. Finalmente, en la Sección 2.5, se mencionan resultados ya establecidos con respecto a diseños resolubles y espacios proyectivos pero vistos en términos de descomposiciones de gráficas completas.

## 2.1

### El problema original

En 1975 Paul Erdős escribió en [27] lo siguiente: “Faber, Lovász and I conjectured that if  $|A_k| = n$ ,  $1 \leq k \leq n$ , and  $|A_i \cap A_j| \leq 1$ , for  $i < j \leq n$ , then one can colour the elements of the union  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  by  $n$  colours so that every set has elements of all the colours. It is very surprising that no progress has been made with this problem and I offer 50 pounds for a proof or disproof.” Este problema fue llamado en un principio el problema de los  $n$  conjuntos [10], y actualmente es conocido como la Conjetura Erdős–Faber–Lovász (E–F–L).

Por otra parte, Vance Faber narra en [29] el origen de este problema: “In 1972, Paul Erdős, László Lovász and I got together at a tea party in my apartment in Boulder, Colorado. This was a continuation of the discussions we had had a few weeks before in Columbus, Ohio, at a conference on hypergraphs. We talked about various conjectures for linear hypergraphs analogous to Vizing’s theorem for graphs (see [10]). Finding tight bounds in general seemed difficult so we created an elementary conjecture that we thought would be easy to prove. We called this problem the  $n$  sets problem....”

## 2.2

### La conjetura en términos de sistemas lineales

En esta sección, establecemos la Conjetura E–F–L en términos de sistemas lineales. Para ello, necesitamos de algunas definiciones.

Una  $k$ -coloración en un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$ , es una asignación de colores a los puntos de  $P$  con  $k$  colores diferentes, de tal forma que puntos adyacentes, tienen colores distintos. En otras palabras, una  $k$ -coloración, es una función suprayectiva  $\psi : P \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tal que, si  $p$  y  $q$  son puntos adyacentes, entonces  $\psi(p) \neq \psi(q)$ . El número cromático de  $(P, \mathcal{L})$ , denotado por  $\chi(P, \mathcal{L})$ , es el mínimo  $k$  para el cual  $(P, \mathcal{L})$  tiene una  $k$ -coloración.

Así, la Conjetura E–F–L puede establecerse como sigue:

**Conjetura 2.2.1.** *Si  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema lineal con  $n$  líneas y cada línea es incidente a  $n$  puntos, entonces  $\chi(P, \mathcal{L}) = n$ .*

Ahora en adelante, cuando hagamos mención a la Conjetura E–F–L nos referiremos a la conjetura 2.2.1.

Como dijimos en la introducción de la tesis, esta conjetura tiene una formulación inmediata en términos de gráficas completas:

**Conjetura 2.2.2.** *Si  $G^1, \dots, G^n$  son  $n$  copias de la gráfica completa de  $n$  vértices, con la propiedad de que cualesquiera dos de estas copias se intersectan en a lo más un vértice, entonces la gráfica  $G = \bigcup_{i=1}^n G^i$  tiene número cromático igual a  $n$ .*

**Nota 2.2.1.** *En [40] Horák y Tuza probaron que si no hay restricción en la intersección de las gráficas completas, entonces el número cromático es a lo más  $n^{\frac{3}{2}}$ .*

Supongamos que  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema lineal que satisface las hipótesis de la conjetura 2.2.1. Sea  $X_2$  el conjunto de puntos de grado al menos 2 de  $(P, \mathcal{L})$ . Si podemos colorear los puntos de  $X_2$  con  $n$  colores, de tal forma que puntos adyacentes tengan colores distintos, entonces esta coloración puede extenderse a una  $n$ -coloración de  $(P, \mathcal{L})$ : pues si en una línea hay puntos de grado uno, estos puntos pueden colorearse con colores no utilizados en la coloración de los puntos de dicha línea (pues toda línea tiene a lo más  $n - 1$  puntos). Una consecuencia inmediata de esta observación, es que la conjetura 2.2.1 es equivalente a lo siguiente:

**Conjetura 2.2.3.** *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $n$  líneas. Si todo punto es incidente a al menos dos líneas, entonces  $\chi(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*



## 2.3

### Equivalencias y resultados recientes

Existen varios trabajos relacionados con algunas equivalencias a la Conjetura E–F–L, y también muchos avances, pero es claro que este problema, está en estos momentos, lejos de ser demostrado. En esta sección veremos algunas equivalencias y resultados recientes de la conjetura, de manera precisa de 2007 a 2013 (para un panorama de la conjetura antes de 2007 puede consultar [56]). Es importante decir que estos resultados, se expondrán de forma breve.

#### 2.3.1

##### Cúmulos

En [55] Romero y Sánchez–Arroyo, dieron una equivalencia (conjetura 2.3.1) a la Conjetura E–F–L. El resultado principal de [55] (teorema 2.3.2), fue exponer una familia infinita de sistemas lineales que satisfacen dicha equivalencia. En esta subsección, exponemos su resultado de forma breve.

Un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  es *intersectante* si todo par de líneas se intersecan, esto es  $l \cap l' \neq \emptyset$ , para todo  $l, l' \in \mathcal{L}$ . Un *n-cúmulo* es un sistema lineal intersectante y *n-uniforme* (ver [55]).

En [55] se prueba que la conjetura 2.2.1 es equivalente a lo siguiente:

**Conjetura 2.3.1.** [55] *Si  $(P, \mathcal{L})$  es un  $n$ -cúmulo, entonces  $\chi(P, \mathcal{L}) = n$ .*

##### Resultado principal

Sea  $W$  un conjunto finito no vacío de enteros positivos. Decimos que  $W$  es *compacto* si  $|W| = 1$ , o bien existe un orden  $a_1, \dots, a_{|W|}$  de  $W$  tal que  $a_{i+1} = a_i + 1$ , para  $i = 1, \dots, |W| - 1$  (ver [55]).

Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $n$  líneas. Decimos que  $(P, \mathcal{L})$  es *línea-conforme* si existe una biyección  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ , llamado *etiquetamiento conforme*, tal que para cada punto  $p \in P$ , el conjunto  $F(p) = \{\varphi(L) : p \in L \in \mathcal{L}\}$  puede ser particionado en dos conjuntos compactos (ver [55]).

**Observación 2.3.1.** *Un sistema lineal cuyos puntos tienen grado a lo más dos, es trivialmente línea-conforme.*

**Teorema 2.3.2.** [55] *Si  $(P, \mathcal{L})$  es un  $n$ -cúmulo línea-conforme, entonces  $\chi(P, \mathcal{L}) = n$ .*

## 2.3.2

### Número de intersección de una gráfica

En [47] Klein y Margraf, dieron una equivalencia (conjetura 2.3.3) a la Conjetura E–F–L, en términos del *número de intersección lineal*, parámetro que ellos definieron en [46]. El resultado principal de [47] (teorema 2.3.4) fue demostrar que toda gráfica simple o su complemento, satisface la equivalencia. En esta subsección, exponemos su resultado de forma breve.

Un *espacio lineal parcial* es un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con la propiedad de que toda línea contiene al menos dos puntos. La *gráfica de líneas* o *gráfica de intersección* de un espacio lineal parcial  $(P, \mathcal{L})$  (en general de un sistema lineal), denotada como  $L(P, \mathcal{L})$ , es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de líneas  $\mathcal{L}$ , y donde dos vértices son adyacentes si y sólo si las líneas correspondientes se intersectan, esto es,  $L(P, \mathcal{L}) = (V, E)$ , donde  $V = \mathcal{L}$  y  $E = \{\{l, l'\} : l \cap l' \neq \emptyset \text{ con } l, l' \in \mathcal{L}\}$ .

Para toda gráfica simple  $G$ , se denota por  $\nu(G)$  como el mínimo  $\nu \in \mathbb{N}$  para el cual existe un espacio lineal parcial  $(P, \mathcal{L})$  con  $|P| = \nu$ , y tal que  $L(P, \mathcal{L}) \cong G$ . El número  $\nu(G)$  es llamado *número de intersección lineal* (ver [46]).

Note que para cualquier gráfica simple  $G = (V, E)$ , existe un sistema lineal  $(P_G, \mathcal{L}_G)$  (no necesariamente espacio lineal parcial) tal que  $L(P_G, \mathcal{L}_G) \simeq G$ : tómesese  $P_G = E$  y  $\mathcal{L}_G = \{\mathcal{L}_v : v \in V\}$ , donde  $\mathcal{L}_v$  es el conjunto de aristas incidentes a  $v$ . El sistema lineal

$(P_G, \mathcal{L}_G)$ , es casi un espacio lineal parcial, pues cualquier vértice  $v \in V$  de grado cero o uno, induce una línea  $\mathcal{L}_v$  que no tiene puntos, o bien un solo punto. Por lo tanto  $(P_G, \mathcal{L}_G)$ , no es en principio, un espacio lineal parcial. Si añadimos dos nuevos puntos (un nuevo punto) a toda línea de  $(P_G, \mathcal{L}_G)$  que conste de cero puntos (un punto), entonces el sistema lineal parcial  $(\tilde{P}_G, \tilde{\mathcal{L}}_G)$  obtenido de  $(P_G, \mathcal{L}_G)$  al añadirle los nuevos puntos, satisface  $L(\tilde{P}_G, \tilde{\mathcal{L}}_G) \simeq G$  (donde  $G$  es una gráfica simple). Así, toda gráfica simple es la gráfica de intersección de un cierto espacio lineal parcial (ver [46]).

En [47] se prueba que la Conjetura E–F–L es equivalente a lo siguiente:

**Conjetura 2.3.3.** *Si  $G$  es una gráfica simple, entonces  $\chi(G) \leq \nu(G)$ .*

### Resultado principal

El complemento de una gráfica simple  $G = (V, E)$  es la gráfica  $G^c = (V, \bar{E})$ , donde  $\bar{E} = \{\{u, v\} : \{u, v\} \notin E\}$ .

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica simple y  $G^c$  su complemento. Entonces  $|V| \leq \chi(G) + \chi(G^c)$ . Más aún  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu(G) + \nu(G^c)$ .*

## 2.3.3

### Resultados sobre sistemas lineales regulares–uniformes

En esta subsección, se exponen dos resultados parciales sobre sistemas lineales regulares–uniformes que satisfacen la Conjetura E–F–L. En [29] Faber, considera sistemas lineales regulares y uniformes, y en [50] Mitchem y Schmidt, consideran sistemas lineales uniformes. En esta subsección, exponemos sus resultados de forma breve, pero antes de esto, introduciremos la *versión dual* del la Conjetura E–F–L, pues uno de estos resultados está en términos de esta versión.

#### Versión dual

Una  $k$ –línea–coloración de un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$ , es una asignación de colores a las líneas de  $\mathcal{L}$  con  $k$  colores diferentes, de tal forma que dos líneas incidentes a un mismo

punto tienen colores distintos. En otras palabras, una  $k$ -línea-coloración es una función suprayectiva  $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , tal que si  $l$  y  $l'$  son líneas incidentes a un mismo punto, entonces  $\psi(l) \neq \psi(l')$ . El *índice cromático* de  $(P, \mathcal{L})$ , denotado por  $\chi'(P, \mathcal{L})$ , es el mínimo  $k$  para el cual  $(P, \mathcal{L})$  tiene una  $k$ -línea-coloración.

**Observación 2.3.2.** *Una  $k$ -coloración en un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  corresponde a una  $k$ -línea-coloración del sistema lineal dual de  $(P, \mathcal{L})$ , y viceversa.*

Una consecuencia inmediata de la observación 2.3.2, es que la conjetura 2.2.3 es equivalente a lo siguiente:

**Conjetura 2.3.5.** *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal donde todo punto incide en al menos dos líneas. Entonces  $\chi'(P, \mathcal{L}) \leq |P|$  (ver [56]).*

Es importante decir que esta equivalencia es conocida como la versión dual de la Conjetura E-F-L.

Un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  es un  $(n, k, r)$  sistema lineal, si  $(P, \mathcal{L})$  es  $k$ -uniforme y  $r$ -regular con  $|P| = n$  (ver [29]).

**Observación 2.3.3.** *Un  $(n, k)$ -diseño es un  $(n, k, r)$  sistema lineal con  $r(k-1) = n-1$ .*

En [29] Faber prueba los siguientes dos resultados:

**Teorema 2.3.6.** [29] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un  $(n, k, r)$  sistema lineal. Entonces:*

1. *Si  $r \leq k+1$ , entonces  $\chi'(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*
2. *Existe una constante universal  $C$  tal que, para todo  $k \geq C$ , si  $n \geq Ck^2$ , entonces  $\chi'(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*

**Teorema 2.3.7.** [29] *Si  $(P, \mathcal{L})$  es un  $(n, k)$ -diseño con  $r = 2k$ , entonces  $\chi'(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*

Una consecuencia del teorema 2.3.6, es que “en caso de existir” sistemas lineales uniformes y regulares que sean contraejemplo a la Conjetura E-F-L, serían solamente un número finito.

Por otra parte, en [50] Mitchem y Schmidt prueban lo siguiente:

**Teorema 2.3.8.** [50] Sean  $n$  y  $k$  dos enteros tales que  $3 \leq k \leq n \leq k(k-1)(k-2) + 1$ . Si  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema lineal  $k$ -uniforme con  $|P| = n$ , y donde todo punto incide en al menos dos líneas, entonces  $\chi'(P, \mathcal{L}) \leq |P|$ .

## 2.3.4

### $b$ -coloración en gráficas tensas bipartitas

En [48] Hsiung y Chang relacionan las  $b$ -coloraciones de gráficas tensas bipartitas con la Conjetura E-F-L. En esta subsección, exponemos su resultado de forma breve.

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica simple. Para una  $k$ -coloración  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de  $G$ , un  $b$ -vértice de color  $i$  es un vértice  $v \in V$  tal que  $c(v) = i$ , y  $x$  es adyacente a al menos un vértice de color  $j$ , para  $i \neq j$ , es decir, el vértice  $v$  tiene vecinos de todos los colores. Una  $k$ - $b$ -coloración de  $G$ , es una  $k$ -coloración de  $G$  en la cual toda clase cromática tiene al menos un  $b$ -vértice, esto es, para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ , existe  $v_i \in V$   $b$ -vértice. El  $b$ -número cromático de  $G$ , denotado por  $\chi_b(G)$ , es el máximo  $k$  para el cual  $G$  admite una  $k$ - $b$ -coloración (ver [41]).

El  $m$ -grado de una gráfica simple  $G$  (ver [41]) se define como

$$m(G) = \max\{m : |\{x \in V : \deg(x) \geq m - 1\}| \geq m\}.$$

Un vértice  $v \in V$  es *denso*, si  $\deg(v) \geq m(G) - 1$ . Una gráfica  $G$  es *tensa*, si hay exactamente  $m(G)$  vértices densos, y cada uno de estos vértices densos tiene grado  $m(G)$  (ver [36]).

En [41] Irving y Manlove probaron la siguiente relación:

$$\chi(G) \leq \chi_b(G) \leq m(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

para toda gráfica simple  $G$ .

Para una gráfica tensa  $G$ , sea  $D_G$  el conjunto de todos los vértices densos, y  $D'_G$  el complemento de  $D_G$ . Sea  $\mathcal{B}_m$  la familia de las gráficas tensas bipartitas  $G$  con  $m(G) = m$  tales que  $D_G$  y  $D'_G$  son conjuntos independientes con  $|N_x \cap N'_x| \leq 1$ , para cualesquiera dos

vértices  $x \in D_G$  y  $x' \in D'_G$ , donde  $N_x = \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$  (ver [48]), es el conjunto de los vecinos de  $x$ , esto es, el conjunto de vértices adyacentes a  $y$ .

### Resultado principal

En [48] Hsiung y Chang probaron lo siguiente:

**Teorema 2.3.9.** *Si la Conjetura E–F–L es cierta, entonces  $\chi_b(G) = m$  ó  $m - 1$ , para toda gráfica  $G \in \mathcal{B}_m$ .*

Proponiendo así la siguiente conjetura, que es una versión débil a la Conjetura E–F–L:

**Conjetura 2.3.10.** *Si  $G \in \mathcal{B}_m$ , entonces  $\chi(G) = m$  ó  $m - 1$ .*

## 2.3.5

### Otras familias que satisfacen la Conjetura E–F–L

En esta última subsección, se exponen de forma breve, trabajos que generalizan algunos resultados presentados antes de 2007. Estos nuevos trabajos, están dados por Paul y Germina en [52], y por Romero, Alonso–Pecina y Sánchez–Arroyo en [54].

Un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  es *denso* si  $\deg(p) > \sqrt{|\mathcal{L}|}$ , para todo  $p \in P$  (ver [57]).

En [57] Sánchez–Arroyo probó el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.11.** [57] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal  $n$ -uniforme donde todo los puntos tienen grado al menos dos. Si  $(P, \mathcal{L})$  es denso, entonces  $\chi(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*

En [52] Paul y Germina prueban que el teorema 2.3.11 es una implicación de su resultado principal:

**Teorema 2.3.12.** [52] *Si  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $|P| = n$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) \leq \sqrt{n + \sqrt{n + 1}}$ , entonces  $\chi'(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*

Finalmente, en [37] Hindman probó lo siguiente:

**Teorema 2.3.13.** [37] *La Conjetura E-F-L es cierta para  $n \leq 10$ .*

En [54] Romero, Alonso-Pecina y Sánchez-Arroyo mejoraron el resultado de Hindman.

**Teorema 2.3.14.** [54] *La Conjetura E-F-L es cierta para  $n \leq 12$ .*

## 2.4

### Cuasicúmulos y descomposiciones de gráficas completas

En esta sección, presentamos el resultado principal de este capítulo (dado en [6]). Este resultado, se obtuvo en trabajo conjunto con mi asesora de tesis, Gabriela Araujo Pardo, y con mi hermano académico, Christian Rubio Montiel. Es importante señalar que este resultado, generaliza uno previo dado en [7], que fue un trabajo conjunto con mi asesora de tesis.

Un  $n$ -cuasicúmulo, es un sistema lineal intersectante y  $n$ -uniforme, donde todo punto es incidente a al menos dos líneas (ver [7]). En otras palabras, un  $n$ -cuasicúmulo se obtiene de un  $n$ -cúmulo (ver 2.3.1) al suprimir los puntos de grado uno.

Utilizando el mismo argumento que se hizo en la conjetura 2.2.3 (ver Sección 2.2), la conjetura 2.3.1 (ver Sección 2.3) es equivalente a los siguiente:

**Conjetura 2.4.1.** [7] *Si  $(P, \mathcal{L})$  es un  $n$ -cuasicúmulo, entonces  $\chi(P, \mathcal{L}) \leq n$ .*

Una *descomposición* de una gráfica  $G$ , es una pareja  $(G, \mathcal{D})$ , donde  $\mathcal{D}$  es un conjunto de subgráficas de  $G$  que particiona a  $E(G)$ , en el sentido de que toda arista de  $G$  está en un y solo un elemento de  $\mathcal{D}$ . Si los elementos de  $\mathcal{D}$  son subgráficas inducidas, entonces denotamos a la descomposición como  $[G, \mathcal{D}]$ . En la Figura 2.1 se muestra una descomposición de  $K_7$

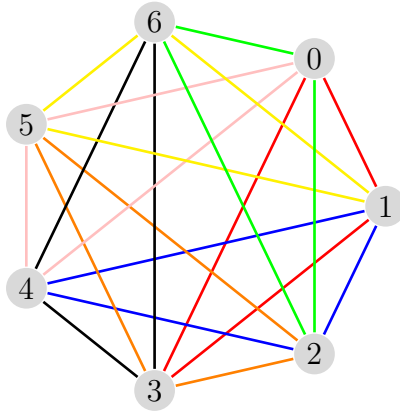


Figura 2.1: Descomposición de  $K_7$  en triángulos.

en los siguientes triángulos:  $\{0, 1, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{3, 4, 6\}$ ,  $\{4, 5, 0\}$ ,  $\{5, 6, 1\}$ ,  $\{6, 0, 2\}$ .

Una  $k$ - $\mathcal{D}$ -coloración de una descomposición  $(G, \mathcal{D})$ , es una asignación de  $k$ -colores a las aristas de  $G$ , de tal forma que todas las aristas de cada elemento de  $\mathcal{D}$  tienen un mismo color, y que si  $H_1$  y  $H_2$  son elementos de  $\mathcal{D}$  con  $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$ , entonces las aristas de  $H_1$  y las aristas de  $H_2$  tienen colores distintos. El *índice cromático* de una descomposición  $(G, \mathcal{D})$ , denotado por  $\chi'((G, \mathcal{D}))$ , es el mínimo entero  $k$  para el cual  $(G, \mathcal{D})$  tiene una  $k$ - $\mathcal{D}$ -coloración (ver [7, 6]).

**Proposición 2.4.1.** [7] *Existe una biyección entre las descomposiciones  $[K_n, \mathcal{D}]$  y los  $n$ -cuasicúmulos.*

*Demostración.* Sea  $(P, \mathcal{L})$  un  $n$ -cuasicúmulo. La descomposición  $[G, \mathcal{D}]$  correspondiente a  $(P, \mathcal{L})$  se obtiene haciendo  $V(G) = \mathcal{L}$  y  $\mathcal{D} = \{G_p : p \in P\}$ , donde  $G_p$  es la gráfica completa inducida por los vértices correspondientes a las líneas incidentes a  $p$ . Como todo par de líneas en  $(P, \mathcal{L})$  se intersecan, entonces todo par de vértices de  $G$  son adyacentes. Además como  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema lineal, entonces toda arista de  $G$  está en una única subgráfica de  $\mathcal{D}$ . Resultando así una descomposición de  $G \simeq K_n$  en subgráficas completas.

Por otra parte, sea  $[K_n, \mathcal{D}]$  una descomposición de  $K_n$  en subgráficas completas. El  $n$ -cuasicúmulo  $(P, \mathcal{L})$  correspondiente a  $[K_n, \mathcal{D}]$  se obtiene haciendo  $P = \mathcal{D}$ , donde dos puntos  $p, q \in P$  son adyacentes si y sólo si la intersección de los conjuntos de vértices de las subgráficas completas correspondientes a  $p$  y  $q$  es no vacía. En otras palabras,  $\mathcal{L} = \{l_x : x \in V(K_n)\}$ , donde  $l_x = \{G \in \mathcal{D} : x \in V(G)\}$ . El sistema  $(P, \mathcal{L})$  es lineal porque toda arista de  $K_n$  pertenece a una única subgráfica de  $\mathcal{D}$ . Además, como todo par



de vértices en  $K_n$  son adyacentes, entonces todo par de líneas de  $(P, \mathcal{L})$  se intersectan. Resultando así  $(P, \mathcal{L})$  un  $n$ -cuasicúmulo.  $\square$

De la proposición 2.4.1, se sigue fácilmente que una  $k$ -coloración de un  $n$ -cuasicúmulo  $(P, \mathcal{L})$  es una  $k$ - $\mathcal{D}$ -coloración de la descomposición  $[K_n, \mathcal{D}]$  correspondiente a  $(P, \mathcal{L})$ , y viceversa. Así la conjetura 2.4.1, es equivalente a lo siguiente:

**Conjetura 2.4.2.** [7] *Toda descomposición  $[K_n, \mathcal{D}]$  satisface  $\chi'([K_n, \mathcal{D}]) \leq n$ .*

Como un ejemplo de esta interpretación, considere los  $n$ -cuasicúmulos donde todo punto es un punto doble. Entonces todas las subgráficas de la descomposición correspondiente a  $(K_n, \mathcal{D})$  tienen orden dos, esto es,  $\mathcal{D} = E(K_n)$ . Así, una  $k$ - $\mathcal{D}$ -coloración de  $[K_n, \mathcal{D}]$  es una  $k$ -arista-coloración de  $K_n$ , que por el teorema 1.2.2 se tiene que  $\chi'([K_n, \mathcal{D}]) \leq n$ . Por lo tanto, estos  $n$ -cuasicúmulos satisfacen la Conjetura E-F-L.

El resultado principal de este capítulo, tiene que ver con coloraciones de aristas inducidas por cuasigrupos conmutativos, dando una nueva clase infinita de descomposiciones que satisfacen la conjetura 2.4.2.

## 2.4.1

### Cuasigrupos conmutativos

Un *cuasigrupo*  $(\mathcal{Q}, *)$ , es un conjunto  $\mathcal{Q}$  junto con una operación binaria  $*$ , de tal forma que las ecuaciones  $a*x = b$  y  $y*a = b$  tienen una única solución para todo par de elementos  $a, b \in \mathcal{Q}$ . Un cuasigrupo es *conmutativo*, si se cumple que  $a*b = b*a$  para todo  $a, b \in \mathcal{Q}$ . Un cuasigrupo es *idempotente* si  $a*a = a$ , para todo  $a \in \mathcal{Q}$ .

Sea  $W = \{w_1, \dots, w_l\}$  un subconjunto de un cuasigrupo conmutativo  $\mathcal{Q}$ . Decimos que  $W$  tiene una  $g$ -asignación si  $w_{l-i+1} * w_i = w_{l-i} * w_{i+1} = g$ , para todo  $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1\}$  y algún  $g \in \mathcal{Q}$ . Una descomposición  $[K_n, \mathcal{D}]$  la llamamos  $\mathcal{Q}$ -asignable si existe una biyección  $\varphi : V(K_n) \rightarrow \mathcal{Q}$ , llamado *etiquetamiento  $\mathcal{Q}$ -asignable*, tal que para todo  $G \in \mathcal{D}$  existe  $g \in \mathcal{Q}$  de tal forma que el conjunto de vértices de  $V(G)$  tiene una  $g$ -asignación (ver [6]).

Sea  $[K_n, \mathcal{D}]$  una descomposición  $\mathcal{Q}$ -asignable y  $G$  un elemento de  $\mathcal{D}$  con una  $g$ -

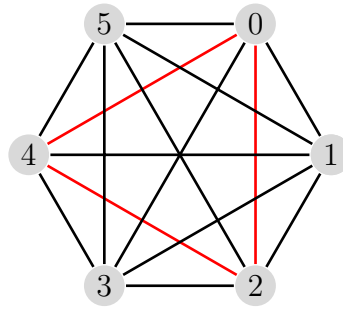


Figura 2.2: Una descomposición de  $K_6$ .

asignación, donde  $V(G) = \{w_1, \dots, w_l\}$  tiene cardinalidad impar. Entonces  $w_{\frac{l+1}{2}}$  lo llamamos *vértice central* de  $G$ , y éste cumple  $w_{l-i} * w_{i+1} = w_{\frac{l+1}{2}}^2 = g$ , para  $i = \lceil \frac{l}{2} \rceil - 1$  (ver [6]).

Es importante señalar que si  $V(G)$  tiene una  $g$ -asignación y  $|V(G)|$  es impar, entonces o bien  $V(G)$ , tiene un único vértice central o  $V(G)$ , puede ser representado por cualquier elemento de  $V(G)$  como vértice central, dependiendo de la  $\mathcal{Q}$ -asignación a la descomposición.

**Ejemplo 2.** Consideremos la descomposición  $\mathbb{Z}_6$ -asignable de  $K_6$  de la Figura 2.2, y sea  $G$  tal que  $V(G) = \{0, 2, 4\}$ , entonces cualquier vértice de  $G$  es un vértice central y  $V(G)$  tiene tres asignaciones diferentes.

Decimos que una descomposición  $\mathcal{Q}$ -asignable  $[K_n, \mathcal{D}]$ , tiene *vértices centrales distintos*, si hay una elección de vértices centrales (correspondientes a los elementos de  $\mathcal{D}$  de orden impar) de tal forma que cualquier par de vértices centrales son diferentes.

### Resultado principal

El resultado principal de [6], que es el resultado principal de este capítulo, viene dado por el siguiente teorema:

**Teorema 2.4.3.** [6] Si  $[K_n, \mathcal{D}]$  es una descomposición  $\mathcal{Q}$ -asignable con vértices centrales distintos, entonces  $\chi'(K_n, \mathcal{D}) \leq n$ .

*Demostración.* Sea  $[K_n, \mathcal{D}]$  una descomposición  $\mathcal{Q}$ -asignable con vértices centrales distin-

tos,  $G$  un elemento de  $\mathcal{D}$ , y  $\{c_{g_1}, \dots, c_{g_n}\}$  un conjunto de  $n$  colores diferentes.

Como  $V(G) = \{w_1, \dots, w_l\}$  tiene una  $g$ -asignación, para algún  $g \in \mathcal{Q}$ , y por hipótesis  $w_{l-i+1} * w_i = w_{l-i} * w_{i+1} = g$ , para  $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - 1\}$ , entonces asignamos el color  $c_g$  a todas las aristas de  $G$ .

Note que el conjunto de aristas  $\{w_l w_1, \dots, w_{l-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1} w_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}\}$ , es un acoplamiento perfecto cuando  $l$  es par, y es un acoplamiento perfecto para  $G - w_{\frac{l+1}{2}}$  cuando  $l$  es impar. Note además que todas las aristas de  $K_n$  tienen un color asignado, pues  $\mathcal{D}$  induce una partición.

Para finalizar con la demostración, hay que probar que todo par de elementos  $G, H \in \mathcal{D}$ , con  $V(G) \cap V(H) \neq \emptyset$ , tienen colores distintos.

Sean  $G, H \in \mathcal{D}$  tales que  $V(G) \cap V(H) = \{h\}$ , para algún  $h \in \mathcal{Q}$ , y supongamos que se les asigno el mismo color  $c_g$ . Entonces existen elementos  $h_G \in V(G)$  y  $h_H \in V(H)$  tales que  $h_G * h = h_H * h = g$ . Tenemos una contradicción pues  $h_G \neq h_H$  incluso si  $h$  es un vértice central de  $G$  o  $H$ , y por hipótesis  $G$  y  $H$  vértices centrales distintos.  $\square$

## 2.5

### Diseños resolubles, espacios proyectivos y la Conjetura E–F–L

En esta sección, se presentan resultados ya establecidos con respecto a diseños resolubles y espacios proyectivos que satisfacen la Conjetura E–F–L, pero vistos en términos de descomposiciones de gráficas completas.

#### 2.5.1

#### Diseños resolubles y la Conjetura E–F–L

Recordemos que un  $(v, \kappa)$ -diseño, es un sistema lineal  $\kappa$ -uniforme y  $r$ -regular (donde  $r = \frac{v-1}{\kappa-1}$ ), con la propiedad de que todo par de puntos, existe una línea que los contiene (ver Sección 1.3.3).

Un  $(v, \kappa)$ -diseño puede pensarse como una descomposición de la gráfica completa  $K_v$ , es decir, un diseño es un caso particular de una descomposición de una gráfica completa. La correspondencia está dada como sigue: sea  $\mathcal{V} = \{x_1, \dots, x_v\}$  el conjunto de puntos de un  $(v, \kappa)$ -diseño  $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ . Identificamos los puntos de  $D$  con el conjunto de vértices de una gráfica  $G$  de orden  $v$ . El conjunto de puntos de cada bloque de  $D$  induce en  $G$  una subgráfica isomorfa a  $K_\kappa$  y  $G$  es una gráfica completa de orden  $v$ .

Por cada bloque  $b_i \in \mathcal{B}$ , sea  $B_i = (V(B_i), E(B_i))$  la subgráfica de  $G$  inducida por el conjunto de  $\kappa$  puntos (vértices) de  $b_i$ . Como en todo vértice inciden  $r = \frac{v-1}{\kappa-1}$  bloques, y todo par de vértices hay una arista contenida en una única subgráfica. Entonces  $\{E(B_1), \dots, E(B_b)\}$  es una partición de las aristas de  $E(G)$ .

De esta manera, cuando decimos que una gráfica  $H$  isomorfa a  $G$  es una *representación del diseño*  $D$ , se entenderá que  $V(H)$  está identificado con los puntos de  $D$ , y que hay una familia de subgráficas completas (bloques)  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$  de  $H$ , de tal forma que cada bloque  $b_i$  de  $D$ ,  $B_i$  es la subgráfica inducida por el conjunto de puntos de  $b_i$ .

Denotamos por  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$  a las descomposiciones que representan a los  $(v, \kappa)$ -diseños  $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ .

En [21] Colbourn y Colbourn probaron que toda descomposición  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$  satisface  $\chi'([K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]) \leq \frac{\kappa v}{\kappa-1}$ . En ese mismo trabajo también demuestran que si  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$  es una descomposición que representa a un  $(v, k)$ -diseño cíclico  $D = (\mathbb{Z}_n, \mathcal{B})$ , entonces  $\chi'([K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]) \leq v$ , es decir, los  $(v, k)$ -diseños cíclicos satisfacen la conjetura 2.4.2 (ver Sección 2.4).

Note que si  $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$  es un diseño resoluble, y asignamos un color diferente a cada clase resoluble, entonces esta coloración nos da una  $r$ - $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ -coloración de  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$ , y como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.5.1.** *Si  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$  es una descomposición que representa un diseño resoluble, entonces  $\chi'([K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]) = r$  (ver [6]).*

A continuación, damos una construcción recursiva para obtener fácilmente descomposiciones a partir de descomposiciones que representan diseños cíclicos que satisfacen la conjetura 2.4.2.

Dada una descomposición  $[K_n, \mathcal{D}]$  y un vértice  $p \in V(K_n)$ , la descomposición obtenida por  $[K_n, \mathcal{D}]$  al borrar el vértice  $p$ , es la descomposición  $[K_{n-1}, \mathcal{D}_1]$  donde  $\mathcal{D}_1 = \{G - p : G \in \mathcal{D}\}$ . En general, la descomposición  $[K_{n-a}, \mathcal{D}_a]$  es una descomposición obtenida de  $[K_n, \mathcal{D}]$

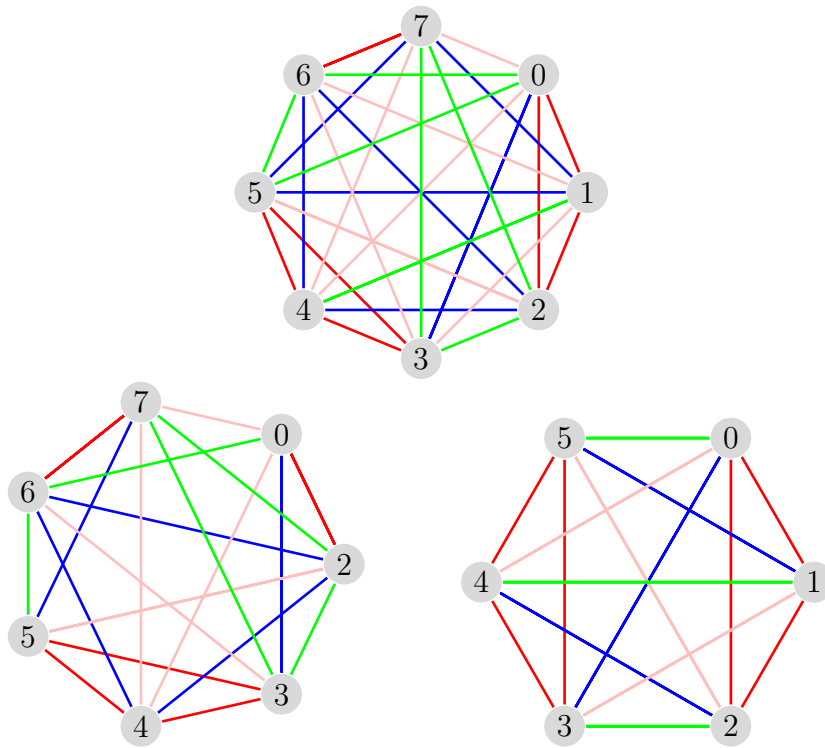


Figura 2.3: Ejemplos de descomposiciones obtenidos de un  $(9, 3)$ -diseño resoluble donde se le suprime el vértice 8, los vértices 1 y 8, y los vértices 6, 7 y 8, respectivamente.

al borrar un conjunto de vértices  $A$ , con  $|A| = a$  (ver [6]).

Así pues obtenemos lo siguiente:

**Corolario 2.5.1.** [6] *Sea  $[K_v, \mathcal{D}_B]$  una descomposición que representa un diseño resoluble, entonces para cualquier conjunto de vértices  $A \subseteq V(K_v)$ , con  $|A| = a \leq v - r$ , satisface  $\chi'([K_{v-a}, \mathcal{D}_{B_a}]) \leq v - a$ .*

En la Figura 2.3, se muestran algunas descomposiciones que se obtienen de un  $(9, 3)$ -diseño (ver Figura 1.3) al suprimirse algunos vértices. Note que todas las descomposiciones tienen una buena coloración, pues estas coloraciones están inducidas por la coloración del diseño resoluble.

## 2.5.2

### Espacios Projectivos

Una *fibra* (en inglés *spread*)  $\mathcal{S}$ , de un espacio proyectivo  $PG(n, q)$ , es un conjunto de líneas que particiona los puntos del espacio proyectivo, en el sentido de que todo punto es incidente a una y solo a una de las líneas de  $\mathcal{S}$ . Un *empaquetamiento* (en inglés *packing*)  $\mathcal{P}$ , de un espacio proyectivo  $PG(n, q)$ , es un conjunto de fibras que particiona las líneas del espacio proyectivo, en el sentido de que cada línea está en una y solo en una de las fibras.

Como el lector puede darse cuenta, las definiciones de clase resoluble (ver Subsección 1.3.3) y la de fibra, al igual que la de resolución (ver Subsección 1.3.3) con la de empaquetamiento, son las mismas, nada más que vistas en diferentes contextos.

En [12] Beutelspacher prueba el siguiente resultado:

**Teorema 2.5.2.** [12] *Existe un packing  $\mathcal{P}$  en  $PG(n, q)$ , para  $n = 2^k - 1$ .*

Puesto que  $PG(n, q)$  es un  $(v, k)$ -diseño (ver Sección 1.4), y como todo  $(v, k)$ -diseño puede pensarse como una descomposición  $[K_v, \mathcal{D}^{\mathcal{B}}]$  (ver Subsección 2.5.1), entonces el teorema 2.5.2 establece, en estos términos, lo siguiente:

**Teorema 2.5.3.** [6] *Existe una descomposición que representa un diseño resoluble  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$  para  $v = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ , donde  $q$  es potencia de primo y  $n = 2^k - 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).*

**Corolario 2.5.2.** [6] *Sea  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$  una descomposición que representa un diseño resoluble como en el teorema 2.5.3, entonces para cualquier conjunto de vértices  $A \subseteq V(K_v)$  con  $|A| = a \leq q^n$  se tiene que  $\chi'([K_{v-a}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}_a}]) \leq \frac{q^n-1}{q-1}$ .*

Es importante resaltar que en [13] Beutelspacher, Jungnickel y Vanstone, probaron que todo espacio proyectivo satisface la conjetura 2.4.2 (ver Sección 2.4), es decir, prueban lo siguiente:

**Teorema 2.5.4.** [13] *Si  $[K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]$ , con  $v = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ , es la descomposición que representa al espacio proyectivo  $PG(v, q)$ , entonces  $\chi'([K_v, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}]) \leq v$ .*

# Capítulo 3

## Transversales y 2–acoplamientos en sistemas lineales

En este capítulo estudiamos la relación entre dos parámetros definidos en un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$ , el *número de transversal*,  $\tau(P, \mathcal{L})$ , y el *número de 2–acoplamiento*,  $\nu_2(P, \mathcal{L})$ . Como veremos más adelante, el estudiar estos dos parámetros para ciertos sistemas lineales nos lleva a conjeturar que la relación entre estos está dada por  $\tau \leq \nu_2$ .

En la Sección 3.1 se dan las definiciones básicas para el entendimiento del problema de este capítulo, a saber, la relación entre el número de transversal y el número de 2–acoplamiento en sistemas lineales. En las Secciones 3.2, 3.3 y 3.6, se estudia la relación de los parámetros antes mencionados para el caso en que los sistemas lineales sean gráficas, planos proyectivos y espacios proyectivos, respectivamente, concluyendo que la relación que hay entre estos parámetros es que el número de transversal está acotado superiormente por el número de 2–acoplamiento. En la Sección 3.4, se presenta el resultado principal de este capítulo, se prueba, en algún sentido, que si el número de 2–acoplamiento de un sistema lineal es a lo más cuatro, entonces también el número de transversal está acotado superiormente por el número de 2–acoplamiento. En la Sección 3.5, se da una familia de sistemas lineales cuyo número de transversal es igual al su número de 2–acoplamiento, que fue uno de los problemas que me plantearon en este tema. Finalmente, en la Sección 3.7 se argumenta el por qué la relación entre los parámetros no tiene el mismo comportamiento como en los casos anteriores.



# 3.1

## Introducción

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un sistema de conjuntos. Un subconjunto  $T \subseteq X$  es una *transversal* de  $(X, \mathcal{F})$ , si interseca a todos los elementos de  $\mathcal{F}$ , esto es,  $T \cap F \neq \emptyset$ , para todo  $F \in \mathcal{F}$ . El *número de transversal* de  $(X, \mathcal{F})$ , denotado por  $\tau(X, \mathcal{F})$ , es la cardinalidad más pequeña entre todas las posibles transversales de  $(X, \mathcal{F})$ .

En la literatura, el número de transversal ha sido estudiado en diferentes contextos y con nombres diferentes. Por ejemplo, en teoría de gráficas al número de transversal se le conoce con el nombre de *número de cubierta* (ver [14, 23, 35]), y en Geometría Discreta con el nombre de *número de perforación* (*piercing number* en inglés) (ver [1, 2, 3, 26, 51]).

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un sistema de conjuntos. Un subconjunto  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  es un *2-acoplamiento* de  $(X, \mathcal{F})$ , si la intersección de cualesquiera tres elementos de  $\mathcal{F}'$  es vacía, esto es, para todo  $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}'$  satisface  $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$ . El *número de 2-acoplamiento* de  $(X, \mathcal{F})$ , denotado por  $\nu_2(P, \mathcal{L})$ , es la cardinalidad más grande entre todos los 2-acoplamientos de  $(X, \mathcal{F})$ .

El problema central de este capítulo, es dar una relación entre el número de transversal y el número de 2-acoplamiento en algunos sistemas lineales concretos. En los lemas 3.4.1 y 3.4.2 se prueba que una relación natural entre estos dos parámetros, para el caso de los sistemas lineales, está dado por:

$$\left\lceil \frac{\nu_2}{2} \right\rceil \leq \tau \leq \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2}.$$

La motivación principal para trabajar en este tema, es saber si se puede acotar el número de transversal de un sistema lineal,  $\tau$ , en términos de una función lineal de  $\nu_2$ . En la siguiente, sección probamos que toda gráfica  $G$  satisface  $\tau(G) \leq \nu_2(G) - 1$ .

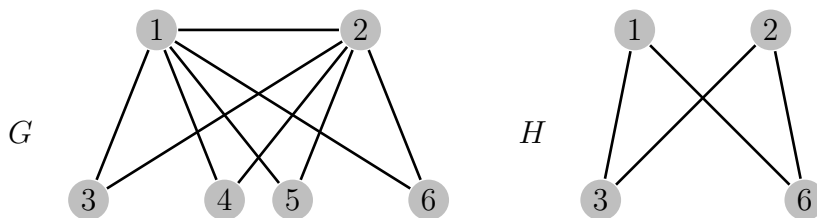


Figura 3.1: La gráfica  $H$  representa un 2-acoplamiento de  $G$ .

## 3.2

### Transversales y 2-acoplamientos en gráficas

En esta sección, estudiamos la relación entre  $\tau$  y  $\nu_2$  para el caso de sistemas lineales 2-uniformes, es decir, para el caso de las gráficas. Concretamente, el resultado principal de esta sección establece que toda gráfica simple  $G$  satisface la relación  $\tau(G) \leq \nu_2(G) - 1$ .

Recordemos que la definición de transversal y la de cubierta para el caso de las gráficas es la misma, por lo tanto, en esta sección, manejamos el nombre de cubierta que es clásico para el caso de gráficas.

Note que un 2-acoplamiento, en una gráfica  $G$ , lo podemos pensar como una subgráfica  $H$  con grado máximo a lo más 2.

**Ejemplo 3.** Sea  $G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, \dots, 6\}$  y  $E = \{\{1, 3\}, \dots, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \dots, \{2, 6\}, \{1, 2\}\}$  (ver Figura 3.1). Entonces la subgráfica  $H = (V', E')$ , donde  $V' = \{1, 2, 3, 6\}$  y  $E' = \{\{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}\}$ , representa un 2-acoplamiento (máximo) de  $G$ .

Sea  $H$  una subgráfica de una gráfica  $G$ . Denotemos por  $deg_H(x)$  como el número de aristas en  $H$  incidentes a  $x$ .

**Teorema 3.2.1.** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica con  $|E| > \nu_2(G)$ , entonces

$$\tau(G) \leq \nu_2(G) - 1$$

*Demostración.* Sea  $H$  un 2-acoplamiento máximo de  $G$ . Definamos  $T = \{x \in V(H) : \deg_H(x) = 2\}$ . Note que  $T$  es una transversal de  $G$ , pues toda arista que no está en  $H$  es incidente a algún vértice de  $H$  de grado 2. Es fácil ver que  $|T| \leq |E(H)|$ , donde  $E(H)$  es el conjunto de aristas de  $H$ . Entonces  $\tau(G) \leq |T| \leq |E(H)| = \nu_2(G)$ . Note que si en  $H$  hay una trayectoria, entonces  $|T| < |E(H)|$ , por lo que  $\tau(G) < \nu_2(G)$ , y así  $\tau(G) \leq \nu_2(G) - 1$ , como el lema establece. Por lo tanto, supongamos que en todo 2-acoplamiento máximo  $H$  no hay trayectorias, esto es,  $H$  es una unión disjunta de ciclos. Afirmamos que existe un vértice  $v \in V(H)$  tal que  $T \setminus \{v\}$  es una transversal de  $G$ , y así tendríamos que  $\tau(G) \leq \nu_2(G) - 1$ , como el teorema establece. Para demostrar esta afirmación, supongamos que no existe tal  $v \in V(H)$  tal que  $T \setminus \{v\}$  es una transversal, y por tanto  $\deg(v) \geq 3$ , para todo  $v \in V(H)$ , de lo contrario, si  $\deg(v) = 2$ , las aristas incidentes a  $v$  intersectan a  $T \setminus \{v\}$ , y así  $T \setminus \{v\}$  es una transversal, lo que nos llevaría a una contradicción. Podemos suponer que  $V(H) = V(G)$ , pues si  $x \in V(G) \setminus V(H)$ , entonces una de las aristas incidentes a  $x$ , digamos  $e$ , es incidente a un vértice de  $v$  de  $H$  (porque  $H$  es un 2-acoplamiento). Así, si  $e'$  es una de las dos aristas incidentes a  $v$  en  $H$ , entonces  $H' = (H \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$  es un 2-acoplamiento máximo en  $G$  que contiene una trayectoria, lo que nos lleva a una contradicción, pues en todo 2-acoplamiento máximo no hay trayectorias, por lo tanto  $V(H) = V(G)$ . Finalmente, por el teorema 1.2.1 (ver Sección 1.1) tenemos que  $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = |V(H)| = \nu_2(G)$ , y como  $\alpha(G) \geq 1$ , para toda gráfica, entonces  $\tau(G) \leq |V(G)| - 1 = \nu_2(G) - 1$ , como afirma el teorema.  $\square$

## 3.3

### Transversales y 2-acoplamientos en planos proyectivos

En esta sección, probaremos que todo plano proyectivo  $\Pi_q$ ,  $q$  potencia de primo, satisface  $\tau(\Pi_q) \leq \nu_2(\Pi_q)$ , con igualdad si  $q$  es impar.

En lo que resta de la tesis, cuando digamos que el plano proyectivo es de orden  $q$ , entenderemos que  $q$  es potencia de primo.

**Lema 3.3.1.** *Si  $\Pi_q = (P, \mathcal{L})$  es un plano proyectivo de orden  $q$ , entonces  $\tau(\Pi_q) = q + 1$ .*

*Demostración.* Por definición de plano proyectivo, toda línea es una transversal, por lo tanto  $\tau(\Pi_q) \leq q + 1$ . Para demostrar que  $\tau(\Pi_q) \geq q + 1$ , procedamos por contradicción, esto es, supongamos que existe una transversal mínima  $T$  de  $\Pi_q$  de cardinalidad  $q$ . Como todo punto de  $\Pi_q$  le inciden  $q + 1$  líneas, entonces

$$|\mathcal{L}| = \{l \in \mathcal{L} : l \ni x, x \in T\} \leq q(q + 1) = q^2 + q < |\mathcal{L}|,$$

que es una contradicción, pues  $|\mathcal{L}| = q^2 + q + 1$ . Por lo tanto  $\tau(\Pi_q) \geq q + 1$ .  $\square$

Con respecto al número de 2-acoplamiento tenemos lo siguiente:

**Lema 3.3.2.** *Si  $\Pi_q = (P, \mathcal{L})$  es un plano proyectivo de orden  $q$ , entonces  $\nu_2(\Pi_q) \leq q + 2$ .*

*Demostración.* Como en todo plano proyectivo hay dualidad (ver Subsección 1.3.2), el 2-acoplamiento coincide con la cardinalidad de un óvalo o de un hiperóvalo (ver el teorema 1.3.1 de la Subsección 1.3.2) de un plano proyectivo del mismo orden, dependiendo de la paridad de  $q$ . Por el teorema 1.3.1 se tiene que es  $q + 1$ , cuando  $q$  es impar, y es  $q + 2$ , cuando  $q$  es par.  $\square$

**Teorema 3.3.1.** [5] *Todo plano proyectivo  $\Pi_q$  de orden  $q$  satisface  $\tau(\Pi_q) \leq \nu_2(\Pi_q)$ , con igualdad si  $q$  es impar.*

## 3.4

### Número de transversal cuando el número de 2-acoplamiento es 2, 3 y 4

Es esta sección, presentamos el resultado principal de este capítulo (dado en [5]). Este resultado, se obtuvo en trabajo conjunto con Gabriela Araujo Pardo, Amanda Montejano Cantoral y Luis Montejano Peimbert.

Comenzamos esta sección con la siguiente observación:

**Observación 3.4.1.** *Un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  satisface  $\Delta(P, \mathcal{L}) \leq 2$  si y sólo si  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = |\mathcal{L}|$ .*

Para un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con  $\Delta(P, \mathcal{L}) > 2$ , decir que  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = n$  significa, por una parte, la existencia de al menos un conjunto de  $n$  líneas que no inducen puntos triples (no hay tres líneas incidentes a un mismo punto), y otra, la propiedad de que cualquier conjunto de  $n + 1$  líneas inducen al menos un punto triple.

### Relación natural entre $\tau$ y $\nu_2$ en sistemas lineales

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un sistema de conjuntos. Una  $k$ -coloración débil de  $(X, \mathcal{F})$  es una asignación de colores a  $X$ , de un conjunto de  $k$  colores, de tal forma que todo elemento de  $\mathcal{F}$  no es monocromático, es decir, existe una función suprayectiva  $g : X \rightarrow \{1, \dots, k\}$  de tal forma que, para todo  $f \in \mathcal{F}$  existen  $x, y \in f$  tal que  $g(x) \neq g(y)$ . El número cromático débil de  $(X, \mathcal{F})$ , denotado por  $\chi_d(X, \mathcal{F})$ , es el mínimo  $k$  para el cual existe una  $k$ -coloración débil de  $(X, \mathcal{F})$ .

Sea  $(X, \mathcal{F})$  un sistema de conjuntos  $k$ -uniforme (ver Sección 1.1). Un clan de  $(X, \mathcal{F})$  es un subconjunto  $Y$  de  $X$ , con  $|Y| \geq k$ , tal que todo subconjunto de  $Y$  de  $k$  elementos es un elemento de  $\mathcal{F}$ . El número de clan de  $(X, \mathcal{F})$ , denotado por  $\omega(X, \mathcal{F})$ , es la cardinalidad más grande entre todos los clanes de  $(X, \mathcal{F})$ . Note que si  $Y$  es un clan máximo de un sistema de conjuntos 3-uniforme  $(X, \mathcal{F})$ , y por cada dos elementos de  $Y$  se colorean con un color diferente, entonces:

$$\left\lceil \frac{\omega(X, \mathcal{F})}{2} \right\rceil \leq \chi_d(X, \mathcal{F}). \quad (3.1)$$

Si  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema lineal, denotamos por  $(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$  al sistema de conjuntos 3-uniforme inducido por  $(P, \mathcal{L})$  como sigue:  $X_{(P, \mathcal{L})} = \mathcal{L}$  y  $\{l_1, l_2, l_3\} \in \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}$  si y sólo si  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$ , donde  $l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{L}$ . El lema 3.4.1, relaciona un sistema lineal con su sistema de conjuntos 3-uniforme, probando que su número de 2-acoplamiento del primero es igual al número de clan del segundo. De igual forma se prueba que el número de transversal del primero y el número cromático débil del segundo son iguales, lo que nos permitirá relacionar, utilizando la desigualdad (3.1), el número de transversal con el número de 2-acoplamiento para sistemas lineales:

$$\left\lceil \frac{\nu_2(X, \mathcal{F})}{2} \right\rceil \leq \tau(X, \mathcal{F}) \quad (3.2)$$

**Lema 3.4.1.** *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal, entonces  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = \omega(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ , y  $\tau(P, \mathcal{L}) = \chi_d(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ .*

*Demostración.* Primero demostremos que  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = \omega(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ . Sea  $R$  un 2-acoplamiento máximo de  $(P, \mathcal{L})$  (esto es que  $|R| = \nu_2(P, \mathcal{L})$ ). Como  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$ , para todo  $l_1, l_2, l_3 \in R$ , entonces  $\{l_1, l_2, l_3\} \in \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}$ . Así, el conjunto  $R$  induce un clan en  $(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ , por lo que  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = |R| \leq \omega(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ . Por otra parte, si  $Y$  es un clan máximo de  $(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$  (esto es que  $|Y| = \omega(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ ), entonces para todo  $l_1, l_2, l_3 \in Y$  se cumple que  $\{l_1, l_2, l_3\} \in \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}$ , es decir,  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$ . Así, el conjunto  $Y$  induce un 2-acoplamiento en  $(P, \mathcal{L})$ , por lo que  $\omega(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}) = |Y| \leq \nu_2(P, \mathcal{L})$ .

Ahora, demostremos que  $\tau(P, \mathcal{L}) = \chi_d(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ . Sea  $T = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq P$  una transversal mínima de  $(P, \mathcal{L})$  (esto es que  $m = \tau(P, \mathcal{L})$ ). Definamos  $\psi : \mathcal{L} \rightarrow T$  dado por  $\psi(l) = \min_{1 \leq i \leq m} \{i : x_i \in l\}$ , entonces  $\psi$  es una  $m$ -coloración débil de  $(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ , pues si  $e \in \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}$ , digamos  $e = \{l_1, l_2, l_3\}$ , y  $\psi(l_1) = \psi(l_2) = \psi(l_3)$ , entonces  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 \neq \emptyset$ , que es una contradicción al hecho de que  $e \in \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}$ , por lo tanto  $\psi(l_j) \neq \psi(l_k)$ , para  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ , por lo que  $\tau(P, \mathcal{L}) \geq \chi_d(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ . Por otra parte, sean  $\psi : X_{(P, \mathcal{L})} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  una  $m$ -coloración débil mínima de  $(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ , y  $Y_i = \psi^{-1}(i)$ , con  $i = 1, \dots, m$ . Entonces para todo  $e \in \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})}$  se cumple  $e \not\subseteq Y_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ , por lo que  $\bigcap_{l \in Y_i} l \neq \emptyset$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Por lo tanto, el conjunto  $T = \{\bigcap_{l \in Y_i} l : i = 1, \dots, m\}$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$ , y así  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \chi_d(X_{(P, \mathcal{L})}, \mathcal{F}_{(P, \mathcal{L})})$ .

Finalmente, por la desigualdad (3.1), se concluye que  $\left\lceil \frac{\nu_2(X, \mathcal{F})}{2} \right\rceil \leq \tau(X, \mathcal{F}) \quad \square$

**Lema 3.4.2.** [5] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal, entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2}$ .*

*Demostración.* Los puntos dobles inducidos por un 2-acoplamiento máximo es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$ , y este 2-acoplamiento induce a lo más  $\frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2}$  puntos dobles.  $\square$

A continuación, probaremos que todo sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con  $|\mathcal{L}| > 2$  y  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 2$  satisface  $\tau(P, \mathcal{L}) = 1$ , esto es, cualquier conjunto de tres líneas de  $\mathcal{L}$  tienen un punto en común, implicando que todas ellas se intersectan. A esta propiedad se le conoce como la

propiedad 2–Helly.

**Proposición 3.4.1.** [5] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $|\mathcal{L}| > 2$ . Si  $(P, \mathcal{L})$  satisface  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 2$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) = 1$ .*

*Demostración.* Como  $\tau(P, \mathcal{L}) \geq 1$  para todo sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$ , entonces basta probar que  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 1$ . Sean  $l$  y  $l'$  dos líneas cualesquiera de  $(P, \mathcal{L})$ . Entonces como  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 2$  se cumple que  $l \cap l' \cap l'' \neq \emptyset$ , para toda  $l'' \in \mathcal{L} \setminus \{l, l'\}$ . Entonces  $T = \{l \cap l'\}$  es una transversal de  $l \cap l'$ , y así  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 1$ .  $\square$

Es importante decir que la inversa de la proposición 3.4.1 también es cierta, esto es, todo sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con  $\tau(P, \mathcal{L}) = 1$  satisface  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 2$ .

A continuación presentamos un resultado relacionado a la proposición 3.4.1 para sistemas lineales cuyo número de 2–acoplamiento es 3.

**Proposición 3.4.2.** [5] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $|\mathcal{L}| > 3$ . Si  $(P, \mathcal{L})$  satisface  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 3$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) = 2$ .*

*Demostración.* Por la observación 3.4.1,  $\Delta(P, \mathcal{L}) \geq 3$ , el conjunto de puntos de grado al menos 3,  $X_3$ , es no vacío. Podemos asumir que  $|X_3| = 1$ , de lo contrario, si  $|X_3| \geq 2$ , podemos encontrar fácilmente un conjunto de cuatro líneas que no inducen puntos triples (dos puntos distintos en  $X_3$  y dos líneas incidentes a cada uno de estos puntos), lo que nos llevaría a una contradicción a la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 3$ . Sea  $p \in P$  el único punto con  $\deg(p) \geq 3$ . Asumimos que hay otro punto  $q \in P$ ,  $q \neq p$ , tal que  $\deg(q) = 2$ , de lo contrario  $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p| \leq 1$  y la proposición es cierta. Consideremos  $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q)$ . Note que  $\mathcal{L}'' = \emptyset$ , de lo contrario podemos encontrar cuatro líneas (dos en  $\mathcal{L}_p$ , una en  $\mathcal{L}_q$ , y una más en  $\mathcal{L}''$ ) que no inducen puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 3$ . Así, el conjunto  $\{p, q\}$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$  y  $\tau(P, \mathcal{L}) = 2$ .  $\square$

Note que la inversa de la proposición 3.4.2 no es cierta. Por ejemplo, la gráfica bipartita completa  $K_{2,3}$  cumple  $\tau(K_{2,3}) = 2$  y  $\nu_2(K_{2,3}) = 4$ .

A partir de las proposiciones, 3.4.1 y 3.4.2 resulta atractivo afirmar que todo sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$ , con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $|\mathcal{L}| > 4$ , satisface  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Sin embargo, existe al menos un ejemplo donde esto no sucede.

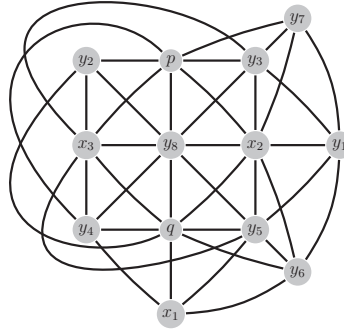


Figura 3.2: Plano proyectivo de orden 3,  $\Pi_3$ .

**Ejemplo 4.** El plano proyectivo  $\Pi_3 = (P, \mathcal{L})$  de orden 3 (Figura 3.2) satisface  $\nu_2(\Pi_3) = \tau(\Pi_3) = 4$  (ver Sección 3.3).

El resultado principal de esta sección (teorema 3.4.1), establece en algún sentido, que a menos que el sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  sea  $\Pi_3$ , es cierto que  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  con  $|\mathcal{L}| > 4$  satisface  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ .

**Teorema 3.4.1.** [5] Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $|\mathcal{L}| > 4$ . Si  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 4$ . Más aún, si  $\tau(P, \mathcal{L}) = \nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ , entonces  $(P, \mathcal{L})$  es un subsistema de  $\Pi_3$ .

Para demostrar el teorema 3.4.1, se analizarán diferentes casos relacionados con el grado máximo de  $(P, \mathcal{L})$ . Por la observación 3.4.1, un sistema lineal que satisface la hipótesis del teorema 3.4.1 es tal que  $\Delta(P, \mathcal{L}) > 2$ . En el lema 3.4.3 probamos que todo sistema lineal con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) \geq 5$  satisface  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Los casos restantes,  $\Delta(P, \mathcal{L}) = 3$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) = 4$ , son los casos para los cuales existen sistemas lineales que cumplen  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = \tau(P, \mathcal{L}) = 4$ . Estos casos se presentan en las secciones 3.4.1 y 3.4.2, respectivamente. En cada sección se describirán todos los sistemas lineales  $(P, \mathcal{L})$  que cumplen dicha igualdad.

**Lema 3.4.3.** [5] Todo sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) \geq 5$ , son tales que  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ .

*Demostración.* Consideremos un punto  $p \in X_5$  (conjunto de puntos de grado al menos 5), y definamos  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p$ . Sea  $(P', \mathcal{L}')$  el subsistema inducido por  $\mathcal{L}'$ . Note que  $|\mathcal{L}'| \geq 2$ , de lo



contrario  $\nu_2(P, \mathcal{L}) \leq 3$ , contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Si  $\mathcal{L}' = \{l_1, l_2\}$ , entonces  $\{p, l_1 \cap l_2\}$  es una transversal si  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ , si no (cuando  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ ) el sistema satisface  $\tau(P, \mathcal{L}) = 3$ . Por otra parte, si  $|\mathcal{L}'| \geq 3$  afirmamos que  $\nu_2(P', \mathcal{L}') = 2$ , de donde se sigue de la proposición 3.4.1 que  $\tau(P', \mathcal{L}') = 1$ , y así  $\tau(P, \mathcal{L}) = 2$ . Para verificar la afirmación, supongamos lo contrario, esto es, existe un conjunto de tres líneas  $\{l_1, l_2, l_3\} \subseteq \mathcal{L}'$  que no induce puntos triples. Este conjunto de líneas induce a lo más tres puntos dobles. Por el principio de las casillas hay al menos dos líneas  $l, l' \in \mathcal{L}_p$  que no inciden en ningún punto doble. Entonces el conjunto  $\{l, l', l_1, l_2, l_3\}$  no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ .  $\square$

Note que a menos que exista un punto  $p \in X_5$  y  $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p| = 2$ , con  $l, l' \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p$  disjuntos, un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) \geq 5$  satisface  $\tau(P, \mathcal{L}) = 2$ .

### 3.4.1

#### Caso $\Delta(P, \mathcal{L}) = 3$

Comenzamos esta subsección introduciendo terminología que nos ayudará a simplificar la descripción de los sistemas lineales que satisfacen  $\nu_2 = \tau = 4$ .

Dado un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  y un punto  $p \in P$ , el sistema lineal obtenido de  $(P, \mathcal{L})$  al *borrar el punto*  $p$  es el sistema lineal  $(P', \mathcal{L}')$  inducido por  $\mathcal{L}' = \{l \setminus \{p\} : l \in \mathcal{L}\}$ . Dado un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  y un línea  $l \in \mathcal{L}$ , el sistema lineal obtenido de  $(P, \mathcal{L})$  al *borrar la línea*  $l$  es el sistema lineal  $(P', \mathcal{L}')$  inducido por  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{l\}$  (ver [5]).

Consideremos el plano proyectivo  $\Pi_3$  (Figura 3.2). Sea  $k$  cualquier punto de  $\Pi_3$ , y  $l$  cualquier línea de  $\Pi_3$  no incidente a  $k$ . Se define a  $\mathcal{C}_{3,4}$  (ver [5]) como el sistema lineal obtenido de  $\Pi_3$  al:

- i) borrar el punto  $k$  junto con sus cuatro líneas incidentes,
- ii) borrar la línea  $l$  junto con sus cuatro puntos incidentes.

El sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4} = (P_{\mathcal{C}_{3,4}}, \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{3,4}})$  (ver Figura 3.3) antes definido es un sistema lineal

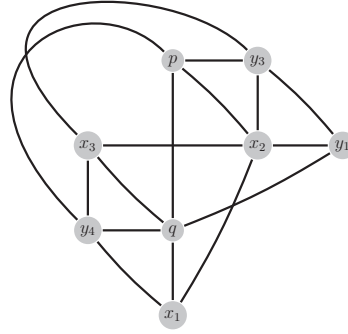


Figura 3.3: Sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4}$ .

3-regular y 3-uniforme con 8 puntos y 8 líneas; y descrito como:

$$\begin{aligned}
 P_{\mathcal{C}_{3,4}} &= \{p, q, x_1, x_2, x_3, y_1, y_3, y_4\}, \\
 \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{3,4}} &= \{\{p, y_1, y_3\}, \{x_2, x_3, y_1\}, \{q, y_1, y_4\}, \{x_1, x_3, y_4\}, \\
 &\quad \{p, q, x_1\}, \{x_1, x_2, y_3\}, \{q, x_3, y_3\}, \{p, x_2, y_4\}\},
 \end{aligned}$$

En la proposición 3.4.3 y en el lema 3.4.4 se demuestra que el sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4}$  con  $\nu_2(\mathcal{C}_{3,4}) = 4$  y  $\Delta(\mathcal{C}_{3,4}) = 3$  es el único sistema lineal que satisface  $\tau(\mathcal{C}_{3,4}) = 4$ , y como consecuencia cualquier otro sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$  con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) = 3$  es tal que  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Sin embargo, la prueba de la proposición 3.4.3 es una consecuencia inmediata de los lemas 3.5.2 y 3.5.3 que para mantener un orden en el trabajo pensamos que es mejor probar en la siguiente sección.

**Proposición 3.4.3.** [5] *El sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4}$  satisface  $\nu_2(\mathcal{C}_{3,4}) = \tau(\mathcal{C}_{3,4}) = 4$ .*

*Demostración.* Caso particular de los lemas 3.5.2 y 3.5.3. □

**Lema 3.4.4.** [5] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $\Delta(P, \mathcal{L}) = 3$ . Si  $(P, \mathcal{L}) \neq \mathcal{C}_{3,4}$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ .*

*Demostración.* Sean  $p$  y  $q$  dos puntos de  $P$  tales que  $\deg(p) = 3$  y  $\deg(q) = \max\{\deg(x) : x \in P \setminus \{p\}\}$ . Asumimos que  $\deg(q) = 3$ , de lo contrario el resultado se tiene, pues el conjunto de líneas  $\mathcal{L} \setminus \{l\}$ , con  $l \in \mathcal{L}_p$ , no induce puntos triples, y como  $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p| \leq 2$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Sea  $(P'', \mathcal{L}'')$  el sistema lineal inducido por  $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q)$ .

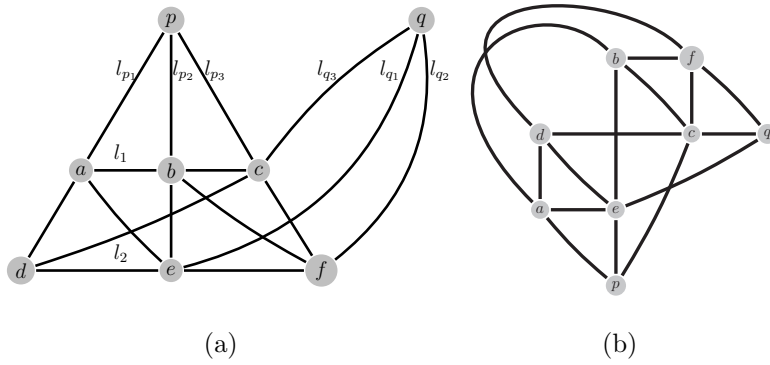


Figura 3.4: Dos representaciones del sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4}$ .

Supongamos primero que  $|\mathcal{L}''| \geq 3$ . Afirmamos que  $\nu_2(P'', \mathcal{L}'') = 2$ , de donde se sigue de la proposición 3.4.1 que  $\tau(P'', \mathcal{L}'') = 1$ , y así  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Para verificar la afirmación supongamos lo contrario, esto es, existe un conjunto de tres líneas  $\{l_1, l_2, l_3\}$  de  $\mathcal{L}''$  que no induce puntos triples. Este conjunto de tres líneas induce a lo más tres puntos dobles. Como  $\Delta(P, \mathcal{L}) = 3$ , entonces por el principio de las casillas hay al menos dos líneas en  $\mathcal{L}_p$  o dos líneas en  $\mathcal{L}_q$ , digamos  $l_4$  y  $l_5$ , que no contienen ningún punto de  $X$ . Por lo tanto, el conjunto  $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$  no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Supongamos ahora que  $|\mathcal{L}''| \leq 2$ . Asumimos que  $\mathcal{L}'' = \{l_1, l_2\}$ , con  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , de lo contrario el conjunto  $\{p, q, l_1 \cap l_2\}$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$ , y el resultado se tiene. Afirmamos que toda línea  $l \in (\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q) \setminus (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q)$  satisface  $l \cap l_1 \neq \emptyset$  y  $l \cap l_2 \neq \emptyset$ . Para verificar la afirmación supongamos lo contrario, esto es, existe una línea  $l \in (\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q) \setminus (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q)$  tal que  $l \cap l_2 = \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad asumimos que  $l \in \mathcal{L}_p$ . Por el principio de las casillas, hay al menos dos líneas  $l_{q_1}, l_{q_2} \in \mathcal{L}_q$  tales que  $l_1 \cap l \cap l_{q_1} = \emptyset$  y  $l_1 \cap l \cap l_{q_2} = \emptyset$ . Por lo tanto, el conjunto de cinco líneas  $\{l_1, l_2, l, l_{q_1}, l_{q_2}\}$  no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ .

Supongamos que  $\mathcal{L}_p = \{l_{p_1}, l_{p_2}, l_{p_3}\}$  y  $\mathcal{L}_q = \{l_{q_1}, l_{q_2}, l_{q_3}\}$ .

**Caso 1:**  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \neq \emptyset$ . Sean  $\{a\} = l_{p_1} \cap l_1$ ,  $\{b\} = l_{p_2} \cap l_1$ ,  $\{c\} = l_{p_1} \cap l_2$ ,  $\{d\} = l_{p_2} \cap l_2$ , donde  $l_{p_1}, l_{p_2} \in \mathcal{L}_p \setminus (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q)$ , entonces  $\{a, d, q\}$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$ , y el lema es cierto.

**Caso 2:**  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$ . Sean  $\{a\} = l_{p_1} \cap l_1$ ,  $\{b\} = l_{p_2} \cap l_1$ ,  $\{c\} = l_{p_3} \cap l_1$ ,  $\{d\} = l_{p_1} \cap l_2$ ,  $\{e\} = l_{p_2} \cap l_2$  y  $\{f\} = l_{p_3} \cap l_2$ . Como  $l_{q_i} \cap l_j \neq \emptyset$ , para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2$ , entonces dado  $l_{q_i} \in \mathcal{L}_q$  existen  $l_{p_{s_i}}, l_{p_{r_i}} \in \mathcal{L}_p$ ,  $l_{p_{s_i}} \neq l_{p_{r_i}}$  tales que  $l_{q_i} \cap l_{p_{r_i}} \cap l_1 \neq \emptyset$  y  $l_{q_i} \cap l_{p_{s_i}} \cap l_2 \neq \emptyset$  (pues  $l_{q_i}$  induce puntos triples en los siguientes 2-acoplamientos:  $\{l_1, l_2, l_{p_{r_i}}, l_{p_{s_i}}\}$ ,  $\{l_1, l_2, l_{p_{s_i}}, l_{p_{k_i}}\}$  y  $\{l_1, l_2, l_{p_{r_i}}, l_{p_{k_i}}\}$ , donde  $\mathcal{L}_p = \{l_{p_{k_i}}, l_{p_{r_i}}, l_{p_{s_i}}\}$ ). Sea  $A_i = \{l_{p_{r_i}}, l_{p_{s_i}}\}$  el conjunto de tales

líneas de  $l_{q_i}$ . Por linealidad de  $(P, \mathcal{L})$  tenemos que  $|A_i \cap A_j| = 1$ , para  $1 \leq i < j \leq 3$ , y  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ , donde  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son las líneas correspondientes de  $l_{q_1}, l_{q_2}$  y  $l_{q_3}$ , respectivamente. Por lo tanto  $l_{q_1} \ni a, e, l_{q_2} \ni b, f$  y  $l_{q_3} \ni d, c$  o bien  $l_{q_1} \ni a, f, l_{q_2} \ni b, d$  y  $l_{q_3} \ni c, e$ . Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $l_{q_1} \ni a, e, l_{q_2} \ni b, f$  y  $l_{q_3} \ni d, c$  (pues los sistemas lineales resultantes son isomorfos). Note que existen tres sistemas lineales no isomorfos, pues  $l_{q_1} \cap l_{p_3} \neq \emptyset$  ó  $l_{q_2} \cap l_{p_1} \neq \emptyset$  ó  $l_{q_3} \cap l_{p_2} \neq \emptyset$ , de lo contrario, si  $l_{q_1} \cap l_{p_3} = \emptyset$  y  $l_{q_2} \cap l_{p_1} = \emptyset$  y  $l_{q_3} \cap l_{p_2} = \emptyset$ , entonces el sistema lineal resultante  $(P, \mathcal{L})$  (Figura 3.4 (a)) es isomorfo al sistema  $\mathcal{C}_{3,4}$  (Figura 3.4 (b)), contradiciendo la hipótesis  $(P, \mathcal{L}) \not\cong \mathcal{C}_{3,4}$ . Por lo tanto, el conjunto de puntos  $\{b, d, l_{q_1} \cap l_{p_3}\}$  ó  $\{a, f, l_{q_3} \cap l_{p_2}\}$  ó  $\{c, e, l_{q_2} \cap l_{p_1}\}$ , es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$ , y así  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ .  $\square$

### 3.4.2

#### Caso $\Delta(P, \mathcal{L}) = 4$

Procediendo de la misma forma que en la subsección previa, comenzamos introduciendo terminología para describir los sistemas lineales para los cuales se cumple  $\nu_2 = \tau = 4$ .

Dado un sistema lineal  $(P, \mathcal{L})$ , un *triángulo*  $\mathcal{T}$  de  $(P, \mathcal{L})$  es el sistema lineal inducido por tres puntos en posición general (no colineales) y las tres líneas inducidas por estos puntos.

Consideremos el plano proyectivo  $\Pi_3$  y un triángulo  $\mathcal{T}$  de  $\Pi_3$ . Definimos  $\mathcal{C} = (P_{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_{\mathcal{C}})$  como el sistema lineal obtenido de  $\Pi_3$  al borrar el triángulo  $\mathcal{T}$ .

El sistema lineal  $\mathcal{C}$  (ver Figura 3.5) tiene diez puntos y diez líneas; y está descrito como:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{C}} &= \{p, q, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{C}} &= \{\{p, y_1, y_2, y_3\}, \{q, y_1, y_4, y_5\}, \{x_1, x_2, y_3, y_5\}, \{x_1, x_3, y_2, y_4\}, \{p, x_2, y_4\}, \\ &\quad \{p, x_3, y_5\}, \{p, q, x_1\}, \{q, x_2, y_2\}, \{q, x_3, y_3\}, \{x_2, x_3, y_1\}\} \end{aligned}$$

A continuación, presentamos como una observación, algunas propiedades de  $\mathcal{C}$ , que son propiedades heredadas de  $\Pi_3$ .

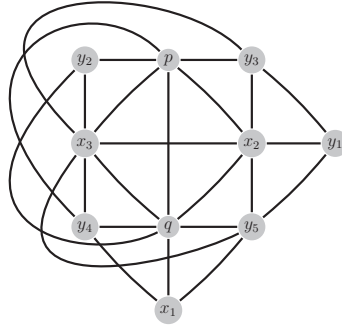


Figura 3.5: Sistema lineal  $\mathcal{C}$ .

**Observación 3.4.2.**

- (a)  $3 \leq \deg(x) \leq 4$ , para todo  $x \in P_{\mathcal{C}}$ ,
- (b)  $3 \leq |l| \leq 4$ , para todo  $l \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ ,
- (c)  $\deg(x) = 4$  si y sólo si  $x$  es adyacente a todo  $y \in P_{\mathcal{C}} \setminus \{x\}$ ,
- (d)  $|l| = 4$  si y sólo si  $l \cap l' \neq \emptyset$ , para todo  $l' \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}} \setminus \{l\}$ ,
- (e) no hay tres puntos de grado cuatro incidentes a una misma línea,
- (f) para todo  $l \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}$  existe una única línea  $l' \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}} \setminus \{l\}$  tal que  $l \cap l' = \emptyset$ .

Definimos  $\mathcal{C}_{4,4}$  como la familia de sistemas lineales  $(P, \mathcal{L})$  con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  tales que

- i)  $\mathcal{C}$  es subsistema (ver Sección 1.1) de  $(P, \mathcal{L})$ ,
- ii)  $(P, \mathcal{L})$  es subsistema de  $\Pi_3$ ,

esto es

$$\mathcal{C}_{4,4} = \{(P, \mathcal{L}) : \mathcal{C} \subseteq (P, \mathcal{L}) \subseteq \Pi_3 \text{ con } \nu_2(P, \mathcal{L}) = 4\}$$

En la proposición 3.4.4 se demuestra que si  $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) = 4$ . Más aún, en el lema 3.4.5 se demuestra que si  $(P, \mathcal{L}) \notin \mathcal{C}_{4,4}$ , con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = \Delta(P, \mathcal{L}) = 4$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ .

**Proposición 3.4.4.** [5] Si  $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) = 4$ .

*Demostración.* Como cualquier línea de tamaño cuatro de  $(P, \mathcal{L})$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$  (pues toda línea de tamaño cuatro es una transversal de  $\Pi_3$ ), entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 4$ . Para probar que  $\tau(P, \mathcal{L}) \geq 4$  consideramos dos casos:

**Caso (i):**  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C = \emptyset$ . Supongamos que existe una transversal mínima  $T = \{a, b, c\} \subseteq P$  de  $(P, \mathcal{L})$  de cardinalidad tres. Si  $P \setminus P_C = \emptyset$ , entonces  $\deg(x) \geq 3$ ,  $x \in T$ , de lo contrario (si  $P \setminus P_C \neq \emptyset$ ) puede existir puntos de  $T$  de grado dos, pues cada punto de  $P \setminus P_C$  es un vértice del triángulo  $\mathcal{T}$  borrado de  $\Pi_3$ . Por la observación 3.4.2, no es difícil verificar que en ambos casos se tiene que  $|\mathcal{L}| = |\{l \in \mathcal{L} : l \cap T \neq \emptyset\}| \leq 9$ , que es una contradicción, pues  $|\mathcal{L}| = 10$ . Por lo tanto  $\tau(P, \mathcal{L}) \geq 4$ .

**Caso (ii):**  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C \neq \emptyset$ . Sean  $X_4 = \{p \in P : \deg(p) = 4\}$  y  $X_4^C = \{p \in P_C : \deg(p) = 4\}$ . Afirmamos que  $|X_4| \geq 6$ , donde se sigue que hay un punto  $x \in P \setminus T$  de grado cuatro, y así  $\tau(P, \mathcal{L}) \geq \deg(x) = 4$ , como el lema establece. Para verificar la afirmación note que toda línea de  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$ , es una línea del triángulo  $\mathcal{T}$  borrado de  $\Pi_3$ . Así, tal línea induce al menos dos puntos (diferentes de los vértices del triángulo) de grado cuatro, y como  $|X_4^C| = 4$ , entonces  $|X_4| \geq 6$ .

□

**Lema 3.4.5.** [5] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = \Delta(P, \mathcal{L}) = 4$ . Si  $(P, \mathcal{L}) \notin \mathcal{C}_{4,4}$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ .*

*Demostración.* Recordemos que  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  implica que cualquier conjunto de cinco líneas induce un punto triple. Sean  $p$  y  $q$  dos puntos de  $P$  tales que  $\deg(p) = 4$  y  $\deg(q) = \max\{\deg(x) : x \in P \setminus \{p\}\}$ . Asumimos que  $\deg(q) \geq 3$ , de lo contrario el lema es cierto, pues como el conjunto de líneas  $\mathcal{L} \setminus \{l, l'\}$ , con  $l, l' \in \mathcal{L}_p$ , es un 2-acoplamiento, entonces  $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_p| \leq 2$ , y así  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Sea  $(P'', \mathcal{L}'')$  el sistema lineal inducido por  $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q)$ . Supongamos que  $|\mathcal{L}''| = 2$ , pues si  $|\mathcal{L}''| = 1$ , entonces  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 3$ . Asumimos que  $\mathcal{L}'' = \{l_1, l_2\}$ , con  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , de lo contrario el lema es cierto, pues el conjunto  $\{p, q, l_1 \cap l_2\}$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$ . Procediendo de la misma forma que en la demostración del Lemma 3.4.4, se puede probar que toda línea  $l \in (\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q) \setminus (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q)$  satisface  $l \cap l_1 \neq \emptyset$  y  $l \cap l_2 \neq \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad asumimos que existe una línea  $l_q \in \mathcal{L}_q \setminus (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q)$  tal que  $l_q \cap l_1 \cap l_{p_1} \neq \emptyset$  y  $l_q \cap l_2 \cap l_{p_2} \neq \emptyset$ , donde  $l_{p_1}, l_{p_2} \in \mathcal{L}_p \setminus (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q)$ . Entonces el conjunto de cinco líneas  $\{l_1, l_2, l_{p_3}, l_{p_4}, l_q\}$ , donde  $l_{p_3}, l_{p_4} \in \mathcal{L}_p \setminus \{l_{p_1}, l_{p_2}\}$ , no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ .

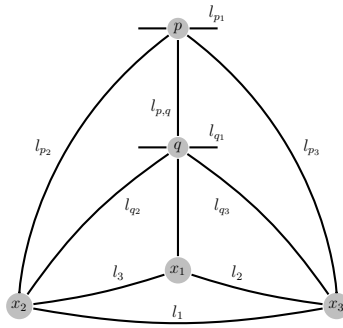


Figura 3.6: Sistema lineal resultante al considerar  $l_{p,q} \ni x_1$  y  $l_{p_i}, l_{q_i}$ , para  $i = 1, 2$ .

Supongamos entonces que  $|\mathcal{L}''| \geq 3$ . Asumimos que  $\nu_2(P'', \mathcal{L}'') \geq 3$ , de lo contrario, si  $\nu_2(P'', \mathcal{L}'') = 2$ , por la proposición 3.4.1 se sigue que  $\tau(P'', \mathcal{L}'') = 1$ , y por tanto,  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ . Sea  $\{l_1, l_2, l_3\}$  un conjunto de tres líneas de  $\mathcal{L}''$  que no induce puntos triples. Este conjunto de tres líneas induce a lo más tres puntos dobles  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Asumimos que tres líneas de  $\mathcal{L}_p$  y tres líneas de  $\mathcal{L}_q$  son cada una incidente a un punto de  $X$ , de lo contrario existen dos líneas de  $l_p, l'_p \in \mathcal{L}_p$  o dos líneas de  $l_q, l'_q \in \mathcal{L}_q$  que no son incidentes a los puntos de  $X$  (pues  $\deg(q) \geq 3$ ), y por tanto el conjunto de cinco líneas  $\{l_1, l_2, l_3, l_p, l'_p\}$  ó  $\{l_1, l_2, l_3, l_q, l'_q\}$  no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Afirmamos que  $X \cap (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q) \neq \emptyset$ , esto es, existe la línea incidente a los puntos  $p$  y  $q$ , y esta misma línea es incidente a un punto de  $X$ . Para verificar la afirmación, supongamos lo contrario, esto es,  $X \cap (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q) = \emptyset$ . Sea  $\mathcal{L}_p = \{l_{p1}, l_{p2}, l_{p3}, l_{p4}\}$  y  $\mathcal{L}_q = \{l_{q1}, l_{q2}, l_{q3}, l_{q4}\}$ , con  $(\mathcal{L}_p \setminus \{l_{p4}\}) \cap (\mathcal{L}_q \setminus \{l_{q4}\}) = \emptyset$ . Como tres líneas de  $\mathcal{L}_p$  y tres líneas de  $\mathcal{L}_q$  son incidentes a un punto de  $X$ , entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $l_{p_i}, l_{q_i} \ni x_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , y  $\{x_1\} = l_2 \cap l_3$ ,  $\{x_2\} = l_3 \cap l_1$  y  $\{x_3\} = l_1 \cap l_2$ . Entonces el conjunto  $\{l_1, l_{p1}, l_{p2}, l_{q1}, l_{q3}\}$  no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Por lo tanto  $X \cap (\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q) \neq \emptyset$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $l_{p,q} \ni x_1$  y que  $l_{p_i}, l_{q_i} \ni x_i$ , para  $i = 2, 3$  (ver Figura 3.6). Consideremos las líneas  $l_{p1}$  y  $l_{q1}$  y los siguientes 2-acoplamientos:

$$\mathcal{L}_1 = \{l_1, l_2, l_{q2}, l_{pq}\}, \mathcal{L}_2 = \{l_1, l_3, l_{q3}, l_{pq}\}, \mathcal{L}_3 = \{l_1, l_2, l_{p2}, l_{pq}\}, \mathcal{L}_4 = \{l_1, l_3, l_{p3}, l_{pq}\}.$$

La línea  $l_{p1}$  induce puntos triples sobre los 2-acoplamientos  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , por lo que debe de existir las intersecciones  $\{y_2\} = l_2 \cap l_{q2}$  y  $\{y_3\} = l_3 \cap l_{q3}$ , con  $y_2, y_3 \in l_{p1}$ , de lo contrario existe un conjunto de cinco líneas  $\mathcal{L}_1 \cup \{l_{p1}\}$  ó  $\mathcal{L}_2 \cup \{l_{p1}\}$  que no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Análogamente, la línea  $l_{q1}$  induce puntos

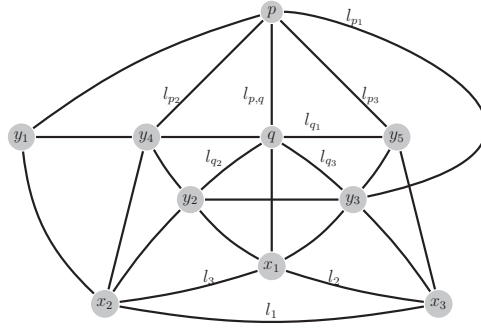


Figura 3.7: Sistema lineal resultante isomorfo a  $\mathcal{C}$ .

triples sobre los 2-acoplamientos  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_4$ , por lo que debe de existir las intersecciones  $\{y_4\} = l_2 \cap l_{p_2}$  y  $\{y_5\} = l_3 \cap l_{p_3}$ , con  $y_4, y_5 \in l_{p_2}$ . Finalmente, como el siguiente conjunto de cinco líneas  $\{l_1, l_2, l_3, l_{p_1}, l_{q_1}\}$  induce un punto triple, entonces debe de existir la intersección  $\{y_1\} = l_1 \cap l_{p_1} \cap l_{q_1}$ .

No es difícil checar que el sistema lineal resultante  $(P, \mathcal{L})$  (ver Figura 3.7) es isomorfo al sistema lineal  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto, existe al menos una línea  $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$ . Afirmamos que cada línea  $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$  es una línea de  $\Pi_3$ , y así  $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$ , contradiciendo la hipótesis  $(P, \mathcal{L}) \notin \mathcal{C}_{4,4}$ . Antes de esto, note que  $|\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C| \leq 3$  (y por tanto  $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{L}_{\Pi_3}| = 13$ ), pues toda línea de  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$  induce un punto triple sobre el 2-acoplamiento  $\{l_2, l_3, l_{p_2}, l_{p_3}\}$ , y por tanto cada línea de  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$  es incidente a un punto de  $\{x_1, y_4, y_5\}$ . Para verificar la afirmación consideremos el sistema lineal  $\mathcal{C}$  representado por la Figura 3.7. Sea  $l$  una línea fija de  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$ . Probaremos que existe una línea  $l' \in \mathcal{L}_{\Pi_3}$  tal que  $l' = l$ . Primero probemos que  $l' \subseteq l$ . Sin pérdida de generalidad asumamos que  $l \ni y_4$  (el mismo argumento es utilizado si  $l \ni x_1$  ó si  $l \ni y_5$ ). La línea  $l$  induce puntos triples sobre los siguientes 2-acoplamientos:

$$\mathcal{L}'_1 = \{l_1, l_{p_3}, l_{q_1}, l_{q_2}\}, \mathcal{L}'_2 = \{l_1, l_3, l_{q_1}, l_{p,q}\}, \mathcal{L}'_3 = \{l_3, l_{p_1}, l_{q_1}, l_{p,q}\},$$

por lo que debe de existir las intersecciones  $\{y_7\} = l_{p_3} \cap l_{q_2}$  y  $\{y_8\} = l_1 \cap l_{p,q}$ , por lo tanto  $y_3, y_7, y_8 \in l$  (pues  $\{y_3\} \in l \cap l_3 \cap l_{p_1}$ ), de lo contrario existe un conjunto de cinco líneas  $\mathcal{L}'_1 \cup \{l\}$  or  $\mathcal{L}'_2 \cup \{l\}$  ó  $\mathcal{L}'_3 \cup \{l\}$  que no induce puntos triples, contradiciendo la hipótesis  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Así  $l' \subseteq l$ , donde  $l' = \{y_3, y_4, y_7, y_8\} \in \mathcal{L}_{\Pi_3}$  (ver Figura 3.5). Para probar que  $l \subseteq l'$  es suficiente verificar que cualquier línea  $\tilde{l} \neq l$  de  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_C$  satisface  $\tilde{l} \cap l \subseteq l'$ , pues no hay puntos de grado uno en  $l$ . Sea  $\tilde{l}$  tal línea. Sin pérdida de generalidad asumamos que  $y_5 \in \tilde{l}$  (el mismo argumento es usado para el caso  $x_1 \in \tilde{l}$ ). Como la línea  $\tilde{l}$  induce puntos triples sobre el 2-acoplamiento  $\{l_1, l_3, l_{p_1}, l_{p,q}\}$ , entonces debe de existir la intersección  $\tilde{l} \cap l_1 \cap l_{p,q}$ .



Como  $y_8 = l \cap l_1 \cap l_{p,q}$ , entonces  $y_8 = \tilde{l} \cap l' \cap l$ , y por tanto  $\tilde{l} \cap l \in l'$ .  $\square$

### 3.4.3

#### Sistemas de segmentos

Para el caso en que el sistema lineal sea un sistema de segmentos, se puede concluir, a partir del teorema 3.4.1 lo siguiente:

**Corolario 3.4.1.** [5] *Sea  $(P, \mathcal{L})$  un sistema de segmentos en el plano con  $|\mathcal{L}| > \nu_2(P, \mathcal{L})$ . Si  $\nu_2(P, \mathcal{L}) \in \{2, 3, 4\}$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ .*

*Demostración.* Por las proposiciones 3.4.1 y 3.4.2, faltaría demostrar el caso en que  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$ . Para probar esto sea  $(P, \mathcal{L})$  cualquier sistema lineal con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $|\mathcal{L}| > 4$ . Supongamos primero que  $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ , veamos que  $(P, \mathcal{L})$  no es Zykov-planar, y como consecuencia  $(P, \mathcal{L})$  no puede representarse como segmentos de línea recta sobre el plano, y como  $\mathcal{C}_{3,4}$  es un subsistema de  $\mathcal{C}_{4,4}$ , entonces ningún elemento de  $\mathcal{C}_{4,4}$  puede ser Zykov-planar.

Si  $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$  fuera un sistema de segmentos, entonces  $(P, \mathcal{L})$  es Zykov-planar, por lo que la gráfica de incidencia  $B(P, \mathcal{L})$  de  $(P, \mathcal{L})$  es una gráfica planar. Como  $|V(B(P, \mathcal{L}))| = 14$ ,  $|E(B(P, \mathcal{L}))| = 21$  y  $g(B(P, \mathcal{L})) = 4$ , se sigue del teorema 1.2.3 (ver Sección 1.2) que  $B(P, \mathcal{L})$  no puede ser planar, obteniendo una contradicción. Por lo tanto, no existe una representación en segmentos de línea recta sobre el plano de  $(P, \mathcal{L})$ .

Por otra parte, si  $(P, \mathcal{L}) \not\simeq \mathcal{C}_{3,4}$  ó  $(P, \mathcal{L}) \notin \mathcal{C}_{4,4}$ , con  $\nu_2(P, \mathcal{L}) = 4$  y  $|\mathcal{L}| > 4$ , entonces por los lemas 3.4.3, 3.4.4 y 3.4.5 tenemos que  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ , y en particular, si  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema de segmentos, entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq 3$ , como el teorema afirma.  $\square$

Creemos que el corolario 3.4.1 es cierto en general, es decir, conjeturamos que:

**Conjetura 3.4.2.** *Si  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema de segmentos con  $|\mathcal{L}| > \nu_2(P, \mathcal{L})$ , entonces*

$$\tau(P, \mathcal{L}) \leq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1,$$

*para todo  $\nu_2(P, \mathcal{L}) \geq 2$ .*

## 3.5

### Una familia de sistemas lineales con $\tau = \nu_2$

Uno de los problemas que me plantearon con respecto a este tema, fue en exhibir una familia de sistemas lineales, diferentes a los planos proyectivos de orden potencia de primo impar, cuyo número de transversal fuese igual al número de 2-acoplamiento, pues como vimos en la sección anterior no es trivial encontrar ejemplos de sistemas lineales que cumplan dicha igualdad en los parámetros. Afortunadamente pude construir dicha familia (teorema 3.5.1). Estos sistemas lineales generalizan la estructura que tiene el sistema lineal  $C_{3,4}$  que se definió en la Subsección 3.4.1.

**Lema 3.5.1.** Sean  $(P, \mathcal{L})$  un sistema lineal con  $|\mathcal{L}| > \nu_2(P, \mathcal{L})$ , y  $p, q \in P$  dos puntos tales que  $\deg(p) = \Delta(P, \mathcal{L})$  y  $\deg(q) = \max\{\deg(x) : x \in P \setminus \{p\}\}$ . Si  $|\mathcal{L}| \leq \deg(p) + \deg(q) + \nu_2(P, \mathcal{L}) - 3$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ .

*Demostración.* Sean  $p, q \in P$  dos puntos como en el enunciado del lema, entonces  $|\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \setminus \{\mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q\}| \leq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 2$ . Asumimos que  $|\mathcal{L}''| = \nu_2(P, \mathcal{L}) - 2$  (y por tanto  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \neq \emptyset$ ), de lo contrario el conjunto  $\{p, q\} \cup \{a_l : l \in \mathcal{L}''\}$ , donde  $a_l$  es cualquier punto de  $l$ , es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$  de cardinalidad a lo más  $\nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ , y el lema es cierto. Supongamos que  $\mathcal{L}'' = \{L_1, \dots, L_{\nu_2-2}\}$ . Asumimos que las líneas de  $\mathcal{L}''$  son disjuntas a pares, esto es,  $l \cap l' = \emptyset$ , para todo  $l, l' \in \mathcal{L}''$ , de lo contrario el conjunto  $\mathcal{L}''$  induce al menos un punto doble o triple, digamos  $x \in P$ , por lo que el conjunto  $\{p, q, x\} \cup \{a_l : l \in \mathcal{L}''\}$ , donde  $a_l$  es cualquier punto de  $l$ , es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$  de cardinalidad a lo más  $\nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ , y el lema es cierto.

**Caso 1:** Supongamos que  $\Delta(P, \mathcal{L}) \leq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 2$ : afirmamos que todo par de líneas  $l_p$  y  $l_q$ , con  $l_p \in \mathcal{L}_p \setminus \{l_{p,q}\}$  y  $l_q \in \mathcal{L}_q \setminus \{l_{p,q}\}$ , se intersectan, donde  $l_{p,q}$  es la línea que contiene a los puntos  $p$  y  $q$  (pues  $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \neq \emptyset$ ). Para verificar la afirmación sean  $l_p$  y  $l_q$  dos líneas cualesquiera de  $\mathcal{L}_p \setminus \{l_{p,q}\}$  y  $\mathcal{L}_q \setminus \{l_{p,q}\}$ , respectivamente. Entonces la línea  $l_p$  induce puntos triples sobre el 2-acoplamiento  $\mathcal{L}'' \cup \{l_q, l_{p,q}\}$ , o bien la línea  $l_q$  induce puntos triples sobre el 2-acoplamiento  $\mathcal{L}'' \cup \{l_p, l_{p,q}\}$ , por lo que debe de existir una línea  $L_{p,q} \in \mathcal{L}''$  tal que  $l_q \cap l_p \cap L_{p,q} \neq \emptyset$ , y así  $l_p \cap l_q \neq \emptyset$ , como la afirmación establece.

Supongamos que  $\mathcal{L}_p = \{l_{p_1}, \dots, l_{p_{\Delta-1}}, l_{p,q}\}$  y  $\mathcal{L}_q = \{l_{q_1}, \dots, l_{q_{\Delta-1}}, l_{p,q}\}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $l_p \cap l_{q_i} \cap L_i \neq \emptyset$ , para todo  $i = 1, \dots, \Delta - 1$ , con  $l_p \in \mathcal{L}_p$  fijo. Entonces el conjunto  $\{l_p \cap L_i : i = 1, \dots, \Delta - 1\} \cup \{x_\Delta, \dots, x_{\nu_2-2}\} \cup \{p\}$ , con  $x_i$  cualquier punto de  $L_i$ , para  $i = \Delta, \dots, \nu_2 - 2$ , es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$  de cardinalidad  $\nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ , y el lema es cierto.

**Caso 2:** Supongamos que  $\Delta \geq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ : afirmamos que si  $l_q \in \mathcal{L}_q \setminus \{l_{p,q}\}$ , entonces  $l_q \cap L \neq \emptyset$ , para toda línea  $L \in \mathcal{L}''$ . Para verificar la afirmación supongamos lo contrario, esto es, existe  $l_q \in \mathcal{L}_q \setminus \{l_{p,q}\}$  y  $L \in \mathcal{L}''$  tal que  $l_p \cap L = \emptyset$ . Por el principio de las casillas existe  $l_p \in \mathcal{L}_p \setminus \{l_{p,q}\}$  tal que  $l_p \cap l_q \cap \tilde{L} = \emptyset$ , para toda línea  $\tilde{L} \in \mathcal{L}'' \setminus \{L\}$ , pues  $\deg(p) = \Delta \geq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ . Entonces el conjunto de líneas  $\mathcal{L}'' \cup \{l_p, l_q, l_{p,q}\}$  es un 2-acoplamiento de cardinalidad  $\nu_2(P, \mathcal{L}) + 1$ , contradicción a la definición de  $\nu_2(P, \mathcal{L})$ . Note que si  $\Delta = \deg(p) = \deg(q)$ , entonces también se cumple que si  $l_p \in \mathcal{L}_p \setminus \{l_{p,q}\}$ , entonces  $l_p \cap L \neq \emptyset$ , para toda línea  $L \in \mathcal{L}''$  (por el argumento anterior).

Supongamos primero que  $\Delta(P, \mathcal{L}) = \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ . Si  $a_{i,j} = L_i \cap l_{p_j}$ , para  $i, j = 1, \dots, \Delta - 1$ , entonces el conjunto  $\{q, a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{\Delta-1, \Delta-1}\}$  es una transversal de  $(P, \mathcal{L})$  de cardinalidad  $\nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ , y el lema es cierto. Por otra parte, si  $\Delta(P, \mathcal{L}) \geq \nu_2(P, \mathcal{L})$ , entonces por el principio de las casillas existe  $l_p \in \mathcal{L}_p \setminus \{l_{p,q}\}$  tal que  $l_p \cap l_q \cap L = \emptyset$ , para algún  $l_q \in \mathcal{L}_q \setminus \{l_{p,q}\}$  y toda  $L \in \mathcal{L}''$ . Entonces el conjunto de líneas  $\{L_1, \dots, L_{\nu_2-2}, l_p, l_q, l_{p,q}\}$  es un 2-acoplamiento de cardinalidad  $\nu_2(P, \mathcal{L}) + 1$ , contradiciendo la definición de  $\nu_2(P, \mathcal{L})$ .  $\square$

Sea  $(\mathcal{G}, +)$  un grupo abeliano aditivo finito con elemento neutro  $e$ . Diremos que  $\mathcal{G}$  es de *suma neutra* si  $\sum_{g \in \mathcal{G}} g = e$ . Además diremos que es *libre de idempotencia* si  $2g = g + g \neq e$ , para todo  $g \in \mathcal{G} \setminus \{e\}$ . Es bien sabido que si  $(\mathcal{G}, +)$  es un grupo abeliano de orden par, con identidad  $e$ , entonces existe  $g \in \mathcal{G}$  tal que  $2g = e$ . Por ejemplo, el grupo aditivo  $(\mathbb{Z}_n, +)$ , con  $n \geq 3$  impar, es un grupo de suma neutra y libre de idempotencia.

La idea ahora es construir una familia de sistemas lineales  $(P, \mathcal{L})$  con dos vértices de grado máximo y con  $|\mathcal{L}| = 2\Delta(P, \mathcal{L}) + \nu_2(P, \mathcal{L}) - 2$  que satisfaga  $\tau(P, \mathcal{L}) = \nu_2(P, \mathcal{L})$ , pues si le pedimos que tenga menos líneas, entonces por el lema 3.5.1 se tendría  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \nu_2(P, \mathcal{L}) - 1$ .

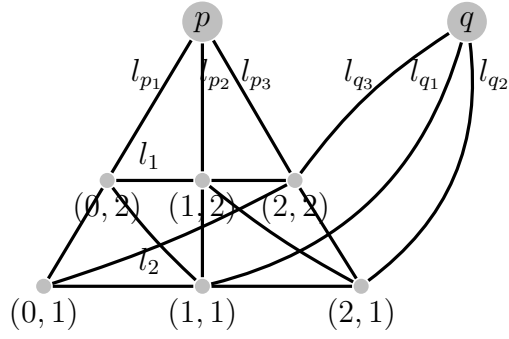


Figura 3.8: Sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4}$

### 3.5.1

#### Sistemas lineales $\mathcal{C}_{n,n+1}$

Sean  $n = 2k + 1$ , donde  $k$  es un número natural, y  $(\mathcal{G}, +)$  un grupo aditivo abeliano de orden  $n$ , de suma neutra, libre de idempotencia y con elemento neutro  $e$ . Definamos  $\mathcal{L} = \{L_g : g \in \mathcal{G} \setminus \{e\}\}$ , donde  $L_g = \{(h, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\} : h \in \mathcal{G}\}$ , para todo  $g \in \mathcal{G} \setminus \{e\}$ ,  $\mathcal{L}_p = \{l_{pg} : g \in \mathcal{G}\}$ , donde  $l_{pg} = \{(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\} : h \in \mathcal{G} \setminus \{e\}\} \cup \{p\}$ , para todo  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{L}_q = \{l_{qg} : g \in \mathcal{G}\}$ , donde  $l_{qg} = \{(h, f_g(h)) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\} : h \in \mathcal{G}, f_g(h) = h + g \text{ con } f_g(h) \neq e\} \cup \{q\}$ , para todo  $g \in \mathcal{G}$  y  $q \neq p$ .

Tenemos que  $\mathcal{L}$  es un conjunto de  $n - 1$  líneas disjuntas a pares,  $\mathcal{L}_p$  es un conjunto de  $n$  líneas incidentes a  $p$ ,  $\mathcal{L}_q$  es un conjunto de  $n$  líneas incidentes a  $q$ . Note que dado  $l_{pa} \in \mathcal{L}_p$ , existe una única línea  $l_{qb} \in \mathcal{L}_q$  tal que  $l_{pa} \cap l_{qb} = \emptyset$  de lo contrario existiría  $l_{pa} \in \mathcal{L}_p$  tal que  $l_{pa} \cap l_{qb} \neq \emptyset$ , para toda línea  $l_{qb} \in \mathcal{L}_q$ , lo cual implicaría que  $a + b \in \mathcal{G} \setminus \{e\}$ , para todo  $b \in \mathcal{G}$ , y esto es una contradicción.

Denotemos como  $\mathcal{C}_{n,n+1}$  al sistema lineal  $(P_n, \mathcal{L}_n)$ , donde

$$P_n = (\mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\}) \cup \{p, q\} \text{ y } \mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q.$$

Note que  $\mathcal{C}_{n,n+1}$  es un sistema lineal  $n$ -uniforme con  $n(n - 1) + 2$  puntos y  $3n - 1$  líneas. Además tiene 2 puntos de grado  $n$  (los puntos  $p$  y  $q$ ) y  $n(n - 1)$  puntos de grado 3.

**Ejemplo 5.** Consideremos el grupo abeliano aditivo  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3$ . El sistema lineal  $\mathcal{C}_{3,4} = (\mathcal{P}_3, \mathcal{L}_3)$  tiene como conjunto de puntos a  $P_3 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\} \cup$

$\{p\} \cup \{q\}$  y como conjunto de líneas a  $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_q$ , donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}, \{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\}\}, \\ \mathcal{L}_p &= \{\{(0, 1), (0, 1), p\}, \{(1, 1), (1, 2), p\}, \{(2, 1), (2, 2), p\}\}, \\ \mathcal{L}_q &= \{\{(1, l), (2, 2), q\}, \{(0, 1), (1, 2), q\}, \{(0, 2), (2, 1), q\}\}.\end{aligned}$$

y es representado en la Figura 3.8. No es difícil de probar que este sistema lineal es isomorfo al sistema lineal que definimos en la subsección 3.4.4.

**Lema 3.5.2.** *El sistema lineal  $\mathcal{C}_{n,n+1} = (P_n, \mathcal{L}_n)$  satisface  $\tau(\mathcal{C}_{n,n+1}) = n + 1$*

*Demostración.* Como el conjunto  $\{x_g : x_g \text{ es cualquier punto de } L_g \in \mathcal{L}\} \cup \{p, q\}$  es una transversal de  $\mathcal{C}_{n,n+1}$ , entonces  $\tau(\mathcal{C}_{n,n+1}) \leq n + 1$ . Para demostrar que  $\tau(P_n, \mathcal{L}_n) \geq n + 1$  supongamos lo contrario, que  $\tau(P_n, \mathcal{L}_n) = n$ . Note que si  $T$  es una transversal de cardinalidad  $n$ , entonces  $T \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\}$ , esto es,  $p, q \notin T$ , de lo contrario, si  $p \in T$ , entonces por el principio de las casillas existe una línea  $l_{qa} \in \mathcal{L}_q$  tal que  $T \cap l_{qa} = \emptyset$ , pues  $\deg(q) = n$ , contradiciendo la definición de transversal, a menos que  $q \in T$ , lo que implicaría, por el principio de las casillas, que existe  $L \in \mathcal{L}$  tal que  $L \cap T = \emptyset$ , pues  $|L| = n - 1$ , contradiciendo la definición de transversal. Por lo tanto  $T \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\}$ . Como  $p, q \notin T$ , entonces

$$T = \{(g_0, f_{h_0}(g_0)), \dots, (g_{n-1}, f_{h_{n-1}}(g_{n-1}))\},$$

donde  $\{g_0, \dots, g_{n-1}\} = \{h_0, \dots, h_{n-1}\} = \mathcal{G}$ .

Afirmamos que existe  $(g_j, f_{h_j}(g_j)) \in T$  tal que  $f_{h_j}(g_j) = e$ , contradiciendo que  $T \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G} \setminus \{e\}$ , y por tanto  $\tau(P_n, \mathcal{L}_n) = n + 1$ . Para verificar la afirmación note que

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{h_i}(g_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (g_i + h_i) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i + \sum_{i=0}^{n-1} h_i = e,$$

pues por hipótesis  $\sum_{g \in \mathcal{G}} g = e$ . Como también  $\sum_{g \in \mathcal{G} \setminus \{e\}} g = e$ , entonces debe de existir un  $f_{h_j}(g_j) = e$ , verificando así la afirmación.  $\square$

**Lema 3.5.3.** *El sistema lineal  $\mathcal{C}_{n,n+1} = (P_n, \mathcal{L}_n)$  satisface  $\nu_2(\mathcal{C}_{n,n+1}) = n + 1$ .*

*Demostración.* Como el conjunto  $\mathcal{L} \cup \{l_{p_g}, l_{p_h}\}$ , para cualesquiera dos líneas  $l_{p_g}, l_{p_h} \in \mathcal{L}_p$ , es un 2-acoplamiento, entonces  $\nu_2(\mathcal{C}_{n,n+1}) \geq n + 1$ . Para demostrar que  $\nu_2(\mathcal{C}_{n,n+1}) \leq n + 1$  supongamos lo contrario, que  $\nu_2(\mathcal{C}_{n,n+1}) = n + 2$ . Sea  $R$  un 2-acoplamiento máximo.

**Caso 1:** Supongamos que  $R = \mathcal{L} \cup \{l_{p_a}, l_{p_b}, l_{q_c}\}$ , donde  $l_{p_a}, l_{p_b} \in \mathcal{L}_p$  y  $l_{q_c} \in \mathcal{L}_q$ , cualesquiera: como hay una única línea  $l_p \in \mathcal{L}_p$  que interseca a  $l_{q_c}$ , entonces podemos suponer que  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \neq \emptyset$ , y por construcción de  $\mathcal{C}_{n,n+1}$ , existe  $L \in \mathcal{L}$  tal que  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \cap L \neq \emptyset$ , induciendo así un punto triple en  $R$ , por lo que  $R$  no puede ser un 2-acoplamiento.

**Caso 2:** Supongamos que  $R = \{l_{p_a}, l_{p_b}, l_{q_c}, l_{q_d}\} \cup \mathcal{L} \setminus \{L_k\}$ , para algún  $k \in \mathcal{G} \setminus \{e\}$ , donde  $l_{p_a}, l_{p_b} \in \mathcal{L}_p$  y  $l_{q_c}, l_{q_d} \in \mathcal{L}_q$ : sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \neq \emptyset$ ,  $l_{p_b} \cap l_{q_d} \neq \emptyset$ ,  $l_{p_a} \cap l_{q_d} = \emptyset$  y  $l_{p_b} \cap l_{q_c} = \emptyset$ , de lo contrario  $R$  no podría ser un 2-acoplamiento. Afirmamos que existe  $L \in \mathcal{L} \setminus \{L_k\}$  tal que  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \cap L \neq \emptyset$  o bien  $l_{p_b} \cap l_{q_d} \cap L \neq \emptyset$ , y esto implicaría que  $R$  induce puntos triples, que es una contradicción, y así  $\nu_2(\mathcal{C}_{n,n+1}) = n + 1$ . Para verificar la afirmación supongamos lo contrario, esto es, para todo  $L \in \mathcal{L} \setminus \{L_k\}$  se cumple  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \cap L = \emptyset$  y  $l_{p_b} \cap l_{q_d} \cap L = \emptyset$ , esto quiere decir que  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \cap L_k \neq \emptyset$  y  $l_{p_b} \cap l_{q_d} \cap L_k \neq \emptyset$ . Por construcción de  $\mathcal{C}_{n,n+1}$  tenemos que

$$l_{p_i} = \{(i, x) : x \in \mathcal{G} \setminus \{e\}\}, \text{ para todo } i \in \mathcal{G}$$

$$l_{q_j} = \{(x, x + j) : x \in \mathcal{G} \setminus \{e\} \text{ y } x + j \neq e\}, \text{ para todo } j \in \mathcal{G}$$

Tenemos que  $L_k = \{(x, k) : x \in \mathcal{G}\}$ . Si  $l_{p_a} \cap l_{q_c} \cap L_k \neq \emptyset$  y  $l_{p_b} \cap l_{q_d} \cap L_k \neq \emptyset$ , entonces  $a + c = b + d = k$ . Por otra parte, como  $l_{p_a} \cap l_{q_d} = \emptyset$  y  $l_{p_b} \cap l_{q_c} = \emptyset$ , entonces  $a + d = b + c = e$ . Juntando  $a + c = b + d = k$  con  $a + d = b + c = e$  tenemos que  $2k = e$ , que es una contradicción, pues en  $\mathcal{G}$  es libre de idempotencia.  $\square$

Juntando los resultados anteriores se prueba lo siguiente:

**Teorema 3.5.1.** *Para  $n = 2k + 1$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , el sistema lineal  $\mathcal{C}_{n,n+1}$  satisface  $\tau(\mathcal{C}_{n,n+1}) = \nu_2(\mathcal{C}_{n,n+1}) = n + 1$ .*

En el caso en que  $n$  sea una potencia de un primo impar, el sistema lineal  $\mathcal{C}_{n,n+1}$  puede construirse de la siguiente manera: considere el plano proyectivo  $PG(2, n)$ , y  $\{p_1, \dots, p_{q+1}\}$  una línea de  $PG(2, n)$ . Entonces  $\mathcal{C}_{n,n+1}$  es el sistema lineal obtenido de  $PG(2, n)$  al:

- i) borrar los puntos  $p_3, \dots, p_q$ , junto con las líneas incidentes correspondientes a estos puntos,

- ii) borrar cualquier línea incidente a  $p_{q+1}$  diferente de  $\{p_1, \dots, p_{q+1}\}$ , junto con sus  $q+1$  puntos.

## 3.6

### Transversales y 2–acoplamientos en espacios proyectivos

En esta sección, analizamos la relación entre el número de transversal y el número de 2–acoplamiento en el espacio proyectivo  $PG(d, q)$ , cuando  $d \geq 3$ . Note que el caso  $d = 2$ , se analizó en la Sección 3.3 (pues los espacios proyectivos  $PG(2, q)$  son planos proyectivos  $\Pi_q$ ), el cual se concluyó que  $\tau(PG(2, q)) \leq \nu_2(PG(2, q))$ . Ahora completamos la demostración para  $q \geq 3$ , probando que  $\tau(PG(d, q)) < \nu_2(PG(d, q))$ .

Decimos que dos líneas son *oblicuas* (en inglés *skew*), si no se intersectan, es decir, si no tienen un punto en común. Y dos líneas son *paralelas*, si satisfacen el axioma de paralelismo: para cualquier par  $(p, l)$ , donde  $l$  es una línea y  $p$  es un punto, existe una única línea  $l'$  que contiene a  $p$  y no interseca a  $l$ . Las líneas  $l$  y  $l'$  se llaman *paralelas*.

Es importante notar que dos líneas paralelas son líneas oblicuas, pero no necesariamente dos líneas oblicuas son líneas paralelas. Por ejemplo, si  $\Pi$  y  $\Pi'$  son dos planos en  $\mathbb{R}^3$  que no se intersectan, y  $l$  es una línea en  $\Pi$  y  $p$  es un punto en  $\Pi'$ , entonces hay una infinidad de líneas oblicuas en  $\Pi'$  que pasan por  $p$  que son oblicuas a  $l$ , y nada más una de ellas es paralela a  $l$  (por el axioma de paralelismo).

Recordemos que una fibra  $\mathcal{S}$  de un espacio proyectivo  $PG(d, q)$  es un conjunto de líneas (oblicuas) que particiona los puntos de  $PG(d, q)$ , en el sentido de que todo punto es incidente a una y solo a una de las líneas de  $\mathcal{S}$ ; y un empaquetamiento  $\mathcal{P}$  de un espacio proyectivo  $PG(d, q)$  es un conjunto de fibras que particiona a las líneas de  $PG(d, q)$ , en el sentido de que cada línea está en una y solo en una de las fibras.

Consideremos el espacio proyectivo  $PG(d, q)$  y un hiperplano  $H$  fijo de  $PG(d, q)$ . Se llama *espacio afín*, y lo denotamos por  $AG(d, q)$ , a la geometría que se obtiene al borrar el hiperplano  $H$  del espacio proyectivo  $PG(d, q)$ .

Consideremos el espacio afín  $AG(d, q)$  al borrar un hiperplano  $H$  al espacio proyectivo  $PG(d, q)$ . No es difícil ver que  $AG(d, q)$  tiene un empaquetamiento, pues si  $p$  es un punto en  $H$ , entonces el conjunto de líneas incidentes a  $p$ , que no están en  $H$ , inducen una fibra en  $AG(d, q)$ , más aún, las líneas de esta fibra forma un conjunto de líneas paralelas. Así, por cada punto en  $H$  tenemos una fibra en  $AG(d, q)$ , obteniendo de forma natural un empaquetamiento en  $AG(d, q)$ .

Es importante mencionar que para ciertos valores de  $d$  y  $q$  existe un empaquetamiento de  $PG(d, q)$  cuyas fibras no contienen dos líneas paralelas (ver [30]). A estos empaquetamientos se les llaman *empaquetamientos oblicuos* (en inglés *skew packing*).

En esta tesis llamamos *fibra oblicua* a una fibra donde todo par de líneas en él son oblicuas pero no son paralelas.

A continuación demostraremos que  $\tau(PG(d, q)) < \nu_2(PG(d, q))$ , para todo  $d \geq 3$ .

**Lema 3.6.1.** *Todo espacio proyectivo  $PG(d, q)$  de dimensión  $d \geq 2$  y orden  $q$  satisface  $\tau(PG(d, q)) \leq \frac{q^d - 1}{q - 1}$*

*Demostración.* Todo hiperplano de  $PG(d, q)$  es una transversal, y todo hiperplano tiene  $\binom{d}{1}_q = \frac{q^d - 1}{q - 1}$  puntos.  $\square$

**Lema 3.6.2.** *Todo espacio proyectivo  $PG(d, q)$  de dimensión  $d \geq 3$  y orden  $q$  satisface  $2q^{n-1} \leq \nu_2(PG(d, q))$*

*Demostración.* Fijemos un hiperplano  $H$  de  $PG(d, q)$  y consideremos el espacio afín  $AG(d, q)$  al quitar  $H$  de  $PG(d, q)$ . En [31] Fuji–Hara y Vanstone probaron que existe un empaquetamiento en  $AG(d, q)$  cuyas fibras  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_a$ , donde  $a = 1 + q + \dots + q^{d-1}$ , satisfacen:

- (i) Las fibras  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{q^{d-1}}$  son fibras oblicuas.
- (ii) En cada fibra  $\mathcal{S}_{q^{d-1}+1}, \dots, \mathcal{S}_{q^{d-1}+\dots+q+1}$  hay a lo más  $q$  líneas paralelas.

Como todo par de líneas (en el espacio proyectivo) en una fibra oblicua (en el afín) no inciden en un mismo punto en  $H$  (pues las líneas no son paralelas), entonces el conjunto de líneas de dos fibras oblicuas forman un 2–acoplamiento en  $PG(d, q)$ . Por lo tanto  $2|S_1| \leq \nu_2(PG(d, q))$ , y como  $|S_1| = q^{n-1}$ , entonces el resultado se sigue inmediatamente.  $\square$

En resumen, demostramos lo siguiente:



**Teorema 3.6.1.** *Todo espacio proyectivo  $PG(d, q)$  de dimensión  $d \geq 3$  y orden  $q$  satisface  $\tau(PG(d, q)) < \nu_2(PG(d, q))$ .*

## 3.7

### Caso general

Con lo que hemos visto hasta ahora, es muy tentador afirmar que si  $(P, \mathcal{L})$  es un sistema lineal con  $|\mathcal{L}| > \nu_2(P, \mathcal{L})$ , entonces  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \nu_2(P, \mathcal{L})$ . Desafortunadamente, esto no es cierto. Eustis y Verstraëte [28] probaron, usando métodos probabilísticos, que para una infinidad de  $k$ 's, existen sistemas lineales  $k$ -uniformes  $(P, \mathcal{L})$  con  $n = |P|$  suficientemente grande cuyo número de transversal es  $\tau(P, \mathcal{L}) = n - o(n)$ . Estos sistemas lineales tienen el número de 2-acoplamiento acotado superiormente por  $\frac{2n}{k}$ , y por tanto  $\nu_2(P, \mathcal{L}) < \tau(P, \mathcal{L})$  (para  $n$  suficientemente grande). Más aún, si  $k$  es muy grande, entonces no existe  $\lambda > 1$  tal que  $\tau(P, \mathcal{L}) \leq \lambda \nu_2(P, \mathcal{L})$  (pues el cociente  $\frac{2n}{k}$  se hace muy pequeño).

# Referencias

- [1] N. Alon, G. Kalai, J. Matoušek, and R. Meshulam, *Transversal numbers for hypergraphs arising in geometry*, Adv. in Appl. Math. **29** (2002), no. 1, 79–101.
- [2] N. Alon and D. J. Kleitman, *Piercing convex sets*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 2, 252–256.
- [3] ———, *Piercing convex sets and the Hadwiger-Debrunner  $(p, q)$ -problem*, Adv. Math. **96** (1992), no. 1, 103–112.
- [4] I. Anderson, *Combinatorial designs: construction methods*, Ellis Horwood Ltd, Chichester, New York, 1990.
- [5] G. Araujo-Pardo, A. Montejano, L. Montejano, and A. Vázquez-Ávila, *On transversal and 2-packing numbers in straight line systems on  $\mathbb{R}^2$* , Submitted.
- [6] G. Araujo-Pardo, C. Rubio-Moniel, and A. Vázquez-Ávila, *On the Erdős-Faber-Lovász conjecture: resolvable designs and commutative quasigroups*, Submitted.
- [7] G. Araujo-Pardo and A. Vázquez-Ávila, *A note on Erdős-Faber-Lovász conjecture and edge coloring of complete graphs*, Ars Combin., In press.
- [8] R. Balakrishnan and K. Ranganathan, *A textbook of graph theory*, second ed., Universitext, Springer, New York, 2012.
- [9] L. M. Batten, *Combinatorics of finite geometries*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [10] C. Berge (ed.), *Hypergraph Seminar*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 411, Springer-Verlag, Berlin, 1974, Dedicated to Professor Arnold Ross.

- [11] C. Berge and A. J. W. Hilton, *On two conjectures about edge-colouring hypergraphs*, Proc. of the Twent. South. Conf. on Comb., Graph Th., and Computing (Boca Raton, FL, 1989), vol. 70, 1990, pp. 99–104.
- [12] A. Beutelspacher, *On parallelisms in finite projective spaces*, Geometriae Dedicata **3** (1974), 35–40.
- [13] A. Beutelspacher, D. Jungnickel, and S. A. Vanstone, *On the chromatic index of a finite projective space*, Geom. Dedicata **32** (1989), no. 3, 313–318.
- [14] J. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory*, Graduate texts in mathematics, Springer, New York, London, 2007.
- [15] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [16] R. C. Bose, *Mathematical theory of the symmetrical factorial design*, Sankhyā **8** (1947), 107–166.
- [17] F. Buekenhout (ed.), *Handbook of incidence geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1995, Buildings and foundations.
- [18] R. Casse, *Projective geometry: an introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [19] W. I. Chang and E. L. Lawler, *Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász*, Combinatorica **8** (1988), no. 3, 293–295.
- [20] G. Chartrand and P. Zhang, *Chromatic graph theory*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.
- [21] C. J. Colbourn and M. J. Colbourn, *The chromatic index of cyclic Steiner 2-designs*, Internat. J. Math. Math. Sci. **5** (1982), no. 4, 823–825.
- [22] M. J. Colbourn and R. A. Mathon, *On cyclic Steiner 2-designs*, Ann. Discrete Math. **7** (1980), 215–253, Topics on Steiner systems.
- [23] Reinhard D., *Graph theory, 4th edition*, Graduate texts in mathematics, vol. 173, Springer, 2012.
- [24] P. Dembowski, *Finite geometries, reprint*, Springer, 1997.

- 
- [25] P. M. Dhananjay, *Finite projective planes*, Unpublished manuscript.
- [26] J. Eckhoff, *A survey of the Hadwiger-Debrunner  $(p, q)$ -problem*, Discrete and computational geometry, Algorithms Combin., vol. 25, Springer, Berlin, 2003, pp. 347–377.
- [27] P. Erdős, *Problems and results in graph theory and combinatorial analysis*, Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975) (Winnipeg, Man.), Utilitas Math., 1976, pp. 169–192. *Congressus Numerantium*, No. XV.
- [28] A. Eustis and J. Verstraëte, *On the independence number of steiner systems.*, Combinatorics, Probability & Computing **22** (2013), no. 2, 241–252.
- [29] V. Faber, *The Erdős-Faber-Lovász conjecture—the uniform regular case*, J. Comb. **1** (2010), no. 2, 113–120.
- [30] R. Fuji-Hara and S. A. Vanstone, *Recursive constructions for skew resolutions in affine geometries*, Aequationes Math. **23** (1981), no. 2-3, 242–251.
- [31] ———, *The existence of orthogonal resolutions of lines in  $AG(n, q)$* , J. Combin. Theory Ser. A **45** (1987), no. 1, 139–147.
- [32] L. Haddad and C. Tardif, *A clone-theoretic formulation of the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Discuss. Math. Graph Theory **24** (2004), no. 3, 545–549.
- [33] H. Hanani, *The existence and construction of balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Statist. **32** (1961), 361–386.
- [34] H. Hanani, D. K. Ray-Chaudhuri, and R. M. Wilson, *On resolvable designs*, Discrete Math. **3** (1972), 343–357.
- [35] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [36] F. Havet, C. Linhares Sales, and L. Sampaio,  *$b$ -coloring of tight graphs*, Discrete Appl. Math. **160** (2012), no. 18, 2709–2715.
- [37] N. Hindman, *On a conjecture of Erdős, Faber, and Lovász about  $n$ -colorings*, Canad. J. Math. **33** (1981), no. 3, 563–570.
- [38] J. W. P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1979, Oxford Mathematical Monographs.

- [39] ———, *Projective geometries over finite fields*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
- [40] P. Horák and Z. Tuza, *A coloring problem related to the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **50** (1990), no. 2, 321–322.
- [41] R. W. Irving and D. F. Manlove, *The b-chromatic number of a graph*, Discrete Appl. Math. **91** (1999), no. 1-3, 127–141.
- [42] B. Jackson, G. Sethuraman, and C. Whitehead, *A note on the Erdős-Farber-Lovász conjecture*, Discrete Math. **307** (2007), no. 7-8, 911–915.
- [43] J. Kahn, *Coloring nearly-disjoint hypergraphs with  $n + o(n)$  colors*, J. Combin. Theory Ser. A **59** (1992), no. 1, 31–39.
- [44] J. Kahn and P. D. Seymour, *A fractional version of the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Combinatorica **12** (1992), no. 2, 155–160.
- [45] M. Kaufmann, M. J. Van Kreveld, and B. Speckmann, *Subdivision drawings of hypergraphs.*, Graph Drawing (Ioannis G. Tollis and Maurizio Patrignani, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 5417, Springer, 2008, pp. 396–407.
- [46] H. Klein and M. Margraf, *On the linear intersection number for graphs*, Unpublished manuscript.
- [47] ———, *A remark on the conjecture of Erdős, Faber and Lovász*, J. Geom. **88** (2008), no. 1-2, 116–119.
- [48] W. Lin and G. J. Chang, *b-coloring of tight bipartite graphs and the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Discrete Appl. Math. **161** (2013), no. 7-8, 1060–1066.
- [49] J. Matoušek and J. Nešetřil, *Invitation to discrete mathematics*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [50] J. Mitchem and R. L. Schmidt, *On the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Ars Combin. **97** (2010), 497–505.
- [51] L. Montejano and P. Soberón, *Piercing numbers for balanced and unbalanced families*, Discrete Comput. Geom. **45** (2011), no. 2, 358–364.

- 
- [52] V. Paul and K. A. Germina, *On edge coloring of hypergraphs and Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Discrete Math. Algorithms Appl. **4** (2012), no. 1.
- [53] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *Solution of Kirkman's schoolgirl problem*, Combinatorics (Proc. Symp. Pure Math., Vol. XIX, Univ. Calif., Los Ang., Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Prov., R.I., 1971, pp. 187–203.
- [54] D. Romero, F. Alonso-Pecina, and A. Sánchez-Arroyo, *The Erdős-Faber-Lovász conjecture is true for  $n \leq 12$* , Discrete Math. Algorithms Appl., In press.
- [55] D. Romero and A. Sánchez-Arroyo, *Adding evidence to the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Ars Combin. **85** (2007), 71–84.
- [56] ———, *Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture*, Combinatorics, complexity, and chance, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., vol. 34, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007, pp. 272–284.
- [57] A. Sánchez-Arroyo, *The Erdős-Faber-Lovász conjecture for dense hypergraphs*, Discrete Math. **308** (2008), no. 5-6, 991–992.
- [58] D. R. Stinson, *Combinatorial designs*, Springer-Verlag, New York, 2004, Constructions and analysis, With a foreword by Charles J. Colbourn.
- [59] T. R. S. Walsh, *Hypermaps versus bipartite maps*, J. Combinatorial Theory Ser. B **18** (1975), 155–163.
- [60] A. A. Zykov, *Hypergraphs*, Uspehi Mat. Nauk **29** (1974), no. 6 (180), 89–154.