Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# Introducción a la geometría algebraica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

LILIA MONTSERRAT VITE ESCOBEDO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

2014

# Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer profundamente a mi asesor el Dr. Javier Elizondo Huerta, por haberme brindado su ayuda incondicional y libertad para poder realizar este escrito, así como su apoyo en este último año, que ha sido crucial para poder lograr dos de mis objetivos. Así mismo me gustaría agradecer a mis sinodales el Dr. Felipe Zaldivar, Dr. Ernesto Rosales, Dra. Adriana Ortiz y el M. en C. Francisco Barrios por tomarse un tiempo para leer este trabajo, agradezco mucho sus comentarios y consejos.

Me gustaría agradecer a todos los profesores con los que he tenido la fortuna de tomar clase, que de diversas formas enriquecieron mi camino por la Facultad de Ciencias, especialmente al Dr. Oscar Palmas y la M. en C. Ana Irene del Refugio Ramírez Galarza por los detalles y palabras de consuelo que me dieron en los momentos más difíciles que tuve durante la carrera.

A mis amigas de la prepa, con especial cariño a Samantha Frías y Brenda Rodriguez, que sin importar el tiempo siguen presentes, llenando mis días de momentos alegres. A muchas personas que he conocido a lo largo del tiempo, en especial a Fernando Galicia por su grata compañía, comprensión y por todas las aventuras que he vivido a su lado, a Enrique Ferman por formar parte de mi único gran equipo y sus palabras de apoyo y por supuesto a Zuleyca Torres quien no sólo fue mi entrañable compañera de batalla, si no también la mejor amiga que se puede pedir, que siempre está conmigo en los buenos, malos y peores momentos.

Por otro lado me gustaría agradecer a mi familia por estar siempre presente , a mi abuelito Enrique Chiu y a mis tías Lilia, Estela, Martha, Sofía, Sonia y sobre todo con mucho cariño a mi tía Monica por siempre tener un espacio en su hogar para mi. A mi padre Johnny Vite quien me apoyo hasta el final de todo esté camino.

Y por último a mis estrellas más valiosas, al M. en C. Rubén Antonio Molina a quien la vida entera no me será suficiente para agradecerle todo el cariño, confianza y apoyo que me brindo, nunca olvidare los detalles y palabras que siempre tuvo para mi, sí a alguien debo dedicarle este logro es a él, por ser mi ejemplo a seguir y un gran guía que siempre llevaré presente en el corazón. Y a mi madre Silvia Escobedo por hacerme tal y como soy, le debo mi carácter y mis deseos de seguir adelante, gracias a ella siempre tengo una meta fija y el camino claro. Espero que donde quiera que estén sepan que todo lo que hago es siempre pensando en ellos.

# Introducción

La geometría algebraica se ha desarrollado en oleadas, cada una con su propio idioma y punto de vista. Al final del siglo XIX se vio el enfoque teórico de Riemann, el enfoque más geométrico de Brill y Noether, y el enfoque puramente algebraico de Kronecker, Dedekind, y Weber. La escuela italiana siguió con Castelnuovo, Enriques y Serveri , que culminó con la clasificación de superficies algebraicas. Luego vino la escuela americana del siglo XX de Chow, Weil y Zariski, cosa que dio fundamentos algebraicos firmes a la intuición italiana. Acto seguido Serre y Grotendieck iniciaron la escuela francesa, cosa que ha cambiado los fundamentos de la geometría algebraica en términos de esquemas y cohomología, y que tiene un impresionante historial de resolver viejos problemas con nuevas técnicas. Cada una de estas escuelas ha introducido nuevos conceptos y métodos.

Para hablar de los fundamentos de la geometría algebraica clásica, podríamos mencionar entre muchos otros a Hilbert y sus sucesores: Noether, Krull, van der Waerden; que desarrollaron en parte la teoría de ideales de polinomios, cuyos resultados más importantes han sido recopilados por Gröbner en su obra "Moderne Algebraische Geometrie", de 1949. Después de la aparición en 1946 del libro de Weil, "Foundations of Algebraic Geometry", la teoría de valuaciones y de campos jugó un papel importante y fueron los fundamentos comúnmente aceptados en su tiempo. Weil introduce nuevos objetos de estudio: las variedades algebraicas abstractas, entendidas como conjuntos algebraicos sobre campos arbitrarios, así como el lenguaje de los puntos genéricos. Pero es con Zariski y su escuela (P. Samuel, Cohen, etc.) que los métodos del álgebra conmutativa son aplicados a la geometría algebraica, en particular, se introduce el álgebra local, como puede verse en el libro de P. Samuel, Méthodes d'Algébre Abstraite en Géométrie Algébrique, de 1955.

Varias construcciones, como lo son la variedad de Jacobi, entre otras, estimularon el desarrollo de la noción de variedad algebraica, comenzando por las variedades algebraicas abstractas, de Weil, hasta la noción de espacio algebraico de Artin y Moishezon.

La definición clásica de variedad algebraica fue empleada para referirse a subconjuntos cerrados (en la topología de Zariski) de un espacio afín o proyectivo sobre un campo $\mathbb{K}$ . Pero la idea de tratar de manera análoga a las variedades algebraicas como se hace con variedades diferenciales se debe también a Weil que define una variedad algebraica abstracta como un sistema de variedades algebraicas afines $\{V_\alpha\}$ en cada una de las cuales son elegidos subconjuntos abiertos $W_{\alpha\beta} \subset V_\alpha$ isomorfos con las elecciones de los abiertos $W_{\beta\alpha}$ de cualquier otra variedad afín $V_\beta$ del sistema. Es entonces que Weil tiene éxito en extender, a sus variedades, todos los conceptos fundamentales de la geometría algebraica.

Por otro lado, en 1950 Jean Leray introduce en su artículo "L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue" la noción de gavilla sobre un espacio topológico, y es el seminario de 1950/51 de H. Cartan en donde se desarrolla la teoría de gavillas, misma que permite definir las variedades diferenciales o analíticas desde un nuevo punto de vista, considerándose como espacios topológicos anillados.

En 1955, Serre descubre que una definición similar es aplicable a la geometría algebraica. Un espacio anillado, localmente isomorfo a una variedad afín con una gavilla de gérmenes de funciones regulares en ella, será para Serre una variedad algebraica (un espacio algebraico, usando su terminología). La estructura adicional de espacio anillado en una variedad algebraica, permite no solamente la simplificación de varias construcciones, sino también la introducción en su estudio de los métodos del álgebra homológica, en conexión con los métodos de la teoría de gavillas.

El propósito de este trabajo es dar una introducción a la geometría algebraica. En el primer capítulo se pretende hablar sobre conjuntos algebraicos dotados de una topología muy especial (la topología de Zariski), además de dar una relación entre la geometría y el álgebra, por lo que se probará el teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz). Todo esto en el caso afín para después, en el capítulo dos hacer una comparación con el caso proyectivo. En el capítulo tres se dará una pequeña introducción a la teoría de gavillas, que constará de la definición de gavilla sobre un espacio topológico, germen, morfismos entre gavillas, la gavilla asociada a una pregavilla, la gavilla imagen y núcleo de un morfismo. Por último en el capítulo cuatro se definirá un espacio anillado con una gavilla estructural asociada, con lo que podremos dar una buena definición de variedad algebraica y variedad algebraica proyectiva, para brindar una definición de gavillas de módulos sobre variedades algebraicas afines y proyectivas, lo que nos permitirá definir una gavilla cuasi-coherente. Para concluir daremos una definición de módulos desplazados y calcularemos el espacio de las secciones globales sobre el espacio proyectivo de la gavilla $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

# Índice general

# Capítulo 1
# Conjuntos algebraicos afines

Dado un campo $\mathbb{K}$ definamos al espacio afín como el conjunto de $n$-adas de $\mathbb{K}$ denotado por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ y si no hay riesgo de confusión lo denotaremos simplemente como $\mathbb{A}^n$. Un elemento $P$ en el espacio afín se llamara punto, si $P = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathbb{K}$ entonces se dice que los elementos $a_i$ son las coordenadas del punto $P$.

Ahora consideremos $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n$ variables sobre $\mathbb{K}$, desde el punto de vista algebraico $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es una $\mathbb{K}$-álgebra finitamente generada por el conjunto $\{x_1, \ldots x_n\} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Sin embargo, cada polinomio $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ puede ser considerado como una función de la forma:

$$g: \quad \mathbb{A}^n \quad \to \quad \mathbb{K}$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto g((a_1, \ldots, a_n))$$

Lo que nos permite hablar de los ceros de un elemento de el anillo de polinomios o más general, los ceros de un subconjunto de este anillo, por lo que definimos para $T \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$V(T) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n | f((a_1, \ldots, a_n)) = 0 \quad \forall f \in T\}$$

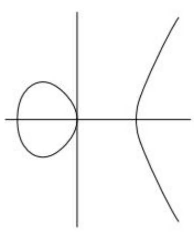
Una propiedad útil de este conjunto es que es decreciente en el sentido de que si $W \subset U$ entonces $V(U) \subset V(W)$, esto es claro, ya que si un punto se anula en todos los elementos de U, en particular se anula en los elementos de W.

Dado que $\mathbb{K}$ es un campo, eso implica que es un anillo noetheriano y por el teorema de la base de Hilbert [AM] su anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un anillo noetheriano, así dado $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, es finitamente generado, por lo que $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ con $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, además dado $f \in I$, f es combinación lineal de sus generadores, es decir, $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_s f_s$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

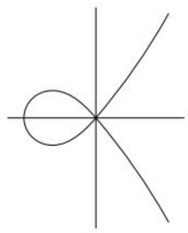
Dado $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ tal que $f_i((a_1, \ldots, a_n)) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$ tenemos entonces que $f((a_1, \ldots, a_n)) = \alpha_1 f_1((a_1, \ldots, a_n)) + \cdots + \alpha_s f_s((a_1, \ldots, a_n)) = 0$ lo cual nos prueba que $V(\{f_1, \ldots, f_s\}) \subset V(I)$ pero además tenemos que $\{f_1, \ldots, f_s\} \subset I$ y por la propiedad anterior eso implica que $V(I) \subset V(\{f_1, \ldots f_s\})$ por lo tanto tenemos que $V(I) = V(\{f_1, \ldots, f_s\})$. Para simplificar notación, escribiremos a $V(\{f_1, \ldots, f_s\})$ como $V(f_1, \ldots, f_s)$.

**Definición 1.1** *(Conjunto algebraico afín) Sea $X$ subconjunto de $\mathbb{A}^n$, decimos que $X$ es un conjunto algebraico, si existe $T$ subconjunto de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $X = V(T)$*

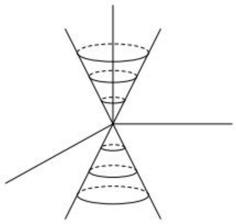
**Ejemplo 1.1** *Estos son algunos ejemplos de conjuntos algebraicos.*



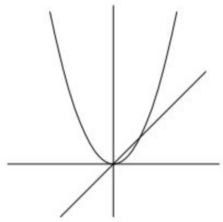
a. $V(Y^2 - X(X^2 - 1)) \subset \mathbb{A}^2$



b. $V(Y^2 - X^2(X + 1)) \subset \mathbb{A}^2$



c. $V(Z^2 - (X^2 + Y^2)) \subset \mathbb{A}^3$



d. $V(Y^2 - XY - X^2Y + X^3)) \subset \mathbb{A}^2$

**Proposición 1.2** *Los conjuntos algebraicos cumplen las siguientes propiedades:*

1. *El conjunto vacío y $\mathbb{A}^n$ son conjuntos algebraicos.*
2. *Dados $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ conjuntos algebraicos, entonces $X \cup Y$ es un conjunto algebraico.*
3. *Dada $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos algebraicos, entonces $\cap_{i\in I} X_i$ es un conjunto algebraico.*

***Demostraciòn***
1)
El polinomio constante 1 es un elemento de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ que cumple que $1((a_1, \ldots, a_n)) = 1$ para toda $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, por lo tanto $V(1) = \emptyset$ lo cual prueba que el conjunto vacío es un conjunto algebraico. El polinomio constante 0 es un elemento de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ que cumple que $0((a_1, \ldots, a_n)) = 0$ para toda $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, por lo tanto $V(0) = \mathbb{A}^n$ por lo que $\mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico.
2)
Probaremos que dados $R$ y $S$ subconjuntos de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se tiene que $V(T) \cup V(S) = V(TS)$ con $TS = \{ts | t \in T \quad y \quad s \in S\}$. Sea $x \in V(T) \cup V(S)$, eso implica que $x \in V(T)$ o $x \in V(S)$, sin perdida de la generalidad suponemos que $x \in V(T)$, que por definición nos dice que $f(x) = 0$ para todo $f \in T$, así, para todo $g \in S$ se tiene que $(fg)(x) = f(x)g(x) = 0g(x) = 0$ lo que implica que $x \in V(TS)$, así $V(T) \cup V(S) \subset V(TS)$. Sea $x \in V(TS)$ y suponemos que $x \notin V(T)$, por lo que existe $f \in T$ tal que $f(x) \neq 0$ pero como $x \in V(TS)$ se tiene que para todo $g \in S \quad (fg)(x) = f(x)g(x) = 0$ lo que implica que $g(x) = O$ para todo $g \in S$ por lo que $x \in V(S) \subset V(T) \cup V(S)$ lo que nos da la otra contención.
3)
Probaremos que dada una familia de ideales $\{T_i\}_{i\in I}$ se tiene que $\cap_{i\in I} V(T_i) = V(\cup_{i\in I} T_i)$
Sea $x \in \cap_{i\in I} V(T_i)$, esto pasa si y sólo si para toda $i \in I$ y para todo $f_i \in T_i$ se tienen que $f_i(x) = 0$, esto ocurre si y sólo si $f_i(x) = 0$ para todo $f_i \in \cup_{i\in I} T_i$ que por definición pasa si y sólo si $x \in V(\cup_{i\in I} T_i)$ lo que prueba la igualdad.

☽

Esto nos permite definir una topología en $\mathbb{A}^n$, tomando como conjuntos abiertos a los complementos de los conjuntos algebraicos, que son una topología por la proposición anterior. Esta topología es muy importante para la geometría algebraica y se le conoce como la topología de Zariski. Dado $X$ un subconjunto de $\mathbb{A}^n$, podemos considerar la topología inducida por esta topología (llamada también la topología de Zariski), cuyos conjuntos cerrados son aquellos de la forma $X \cap V(I)$.

**Ejemplo 1.2** *Dado $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado, consideremos la topología de Zariski de la recta afín $\mathbb{A}^1$. Dado que $\mathbb{K}[x]$ es un dominio de ideales principales, los conjuntos algebraicos son generados por un solo polinomio $f$, que al estar en un campo algebraicamente cerrado se escribe de manera única como $f(x) = c(x - a_1)\dots(x - a_n)$ con $c, a_1, \dots a_n \in \mathbb{K}$, por lo que $V(f) = \{a_1, \dots a_n\}$ que es un conjunto finito.*

**Ejemplo 1.3** *Si consideramos $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $V(f)$ la hipersuperficie definida por $f$. El conjunto $D(f) = \mathbb{A}^n \diagdown V(f)$ es un abierto de la topología de Zariski, el cual llamaremos abierto estándar. El conjunto de todos los abiertos estándar forman una base para la topología de Zariski.*

## 1.1. El ideal asociado a un conjunto algebraico afín

En la primera parte asociamos a un subconjunto de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un subconjunto de $\mathbb{A}^n$, en esta sección asociaremos un ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ a un subconjunto de $\mathbb{A}^n$, dado por la siguiente definición:

**Definición 1.3** *Sea $V$ un subconjunto de $\mathbb{A}^n$, el conjunto*

$$I(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] | \forall x \in V \quad f(x) = 0\}$$

*que es llamado el ideal asociado al conjunto $V$.*

Para ver que es un ideal, consideremos el morfismo de anillos

$$r : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathcal{F}(V, \mathbb{K})$$

Donde $\mathcal{F}(V, \mathbb{K})$ es el conjunto de funciones $\mathbb{K}$-valuadas, y el morfismo está dado de manera natural como a cada polinomio (visto como función de $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{K}$) lo manda a su restricción al conjunto V. De esta forma el $\ker(r) = \{g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] | \quad g|_V = 0\} = I(V)$ que como sabemos es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
De este morfismo podemos definir $\Gamma(V) := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ que es un anillo, al cual llamaremos el anillo de funciones regulares en V, que es una $\mathbb{K}$-álgebra de tipo finito.
Con un argumento similar al hecho para los conjuntos algebraicos se puede probar que si $I \subset J$ entonces $I(J) \subset I(I)$.

**Proposición 1.4** *Los ideales de conjuntos algebraicos cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $X$ es un conjunto algebraico, entonces $V(I(X))=X$.*
2. *La función $V \mapsto I(V)$ (con $V$ un conjunto algebraico) es inyectiva y si $V \subset W$ son conjuntos algebraicos y $V \neq W$, entonces existe un polinomio que se anula en $V$ pero no en $W$.*
3. *$J \subset I(V(J))$ para cualquier ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*

***Demostraciòn***
1)
Que $V \subset V(I(V))$ es claro. Para ver la otra contención, tenemos que si $V = V(I)$ entonces $I \subset I(V(I))$ lo que implica que $V(I(V)) \subset V(I) = V$.
2)
Para la primera parte, tenemos que si $I(V) = I(W)$ entonces $V = V(I(V)) = V(I(W)) = W$ lo que nos dice que la función es inyectiva.Para la segunda, como $V \neq W$, eso implica que existe $(a_1, \ldots a_n) \in W \setminus V$, esto implica que existe $f \in I(V)$ tal que $f((a_1, \ldots a_n)) \neq 0$, lo que implica que $f \notin I(W)$.
3)Si $f \in I$ entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in V$, que nos dice que $f \in I(V) = I(V(I))$.

☽

Del último inciso de la proposición anterior podemos ver que la igualdad no siempre se da, por ejemplo, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $I = (x^2 + y^2 + 1)$, tenemos que $V(I) = \emptyset$ pero $I(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ que contiene propiamente a $I$.

## 1.2. Conjuntos irreducibles

Un conjunto algebraico puede ser la unión de dos conjuntos algebraicos más pequeños, por ejemplo, si consideramos en $\mathbb{A}^2$ el conjunto algebraico dado por $xy = 0$, podemos ver que $V(xy) = \{(0,t)|t \in \mathbb{K}\} \cup \{(t,0)|t \in \mathbb{K}\} = V(x) \cup V(y)$, pero $V(x)$ y $V(y)$ son subconjuntos propios de $V(xy)$ ya que por ejemplo $(1,0) \in V(xy)$ pero $(1,0) \notin V(x)$ . Esta situación motiva la siguiente definición:

**Definición 1.5** *Decimos que $X \subset \mathbb{A}^n$ un subconjunto no vacío es irreducible si, dados $F$ y $G$ conjuntos cerrados en $X$ tales que $X = F \cup G$, entonces $X = F$ ó $X = G$.*
*Si $X$ no es irreducible, decimos que $X$ es reducible. Un subconjunto $Y \subset X$ es irreducible, si es irreducible con la topología inducida.*

**Proposición 1.6** *Si $X \subset \mathbb{A}^n$ , $X \neq \emptyset$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$X$ es irreducible.*
2. *Si $U$ y $V$ son conjuntos abiertos de $X$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.*
3. *Cualquier subconjunto abierto no vacio de $X$ es denso en $X$.*

***Demostración***
1) $\Rightarrow$ 2)
Suponemos que $X$ es irreducible y sean $U, V$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$. Sea $F = X \setminus U$ y $G = X \setminus V$, son conjuntos cerrados en $X$, ademas $F \cup G = (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V) = X \setminus \emptyset = X$ , como X es irreducible tenemos que $F = X \setminus U = X$ ó $G = X \setminus V = X$ por lo que $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.
2) $\Rightarrow$ 1)
Es una prueba similar a la anterior.
3) $\Leftrightarrow$ 1)
Es directo de la definición.

☽

El siguiente teorema, compara una característica geométrica de los conjuntos algebraicos (la irreductibilidad) con una propiedad algebraica (con el ideal asociado a un conjunto algebraico).

**Teorema 1.7** *Sea $V$ un conjunto algebraico equipado con la topología de Zariski, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$V$ es irreducible.*

2. *$I(V)$ es un ideal primo.*

3. *$\Gamma(V)$ es un dominio entero.*

***Demostración***
1) $\Rightarrow$ 2)
Suponemos que V es irreducible y sean $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tales que $fg \in I(V)$, lo que implica que $\{fg\} \subset I(V)$ por lo que $V(I(V)) \subset V(\{fg\}) = V(fg) = V(f) \cup V(g)$, así
$V = (V \cap V(f)) \cup (V \cap V(g))$ , como $(V \cap V(f))$ y $(V \cap V(g))$ son cerrados en $V$ que es irreducible, entonces $V = V \cap V(f)$ ó $V = V \cap V(g)$, sin pérdida de la generalidad suponemos que $V = V \cap V(f)$, es decir, $V \subset V(f)$ lo que implica que $f \in I(V)$, por lo que $I(V)$ es un ideal primo.
2) $\Rightarrow$ 1)
Supongamos que $I(V)$ es un ideal primo y que existen cerrados $F$ y $G$ tales que $V = F \cup G$ con $V \neq F$ y $V \neq G$, dado que $F$ y $G$ son subconjuntos de V, tenemos que $I(V) \subset I(F)$ e $I(V) \subset I(G)$ con $I(V) \neq I(F)$ y $I(V) \neq I(G)$, por lo que existen $f \in I(F) \setminus I(V)$ y $g \in I(G) \setminus I(V)$ tales que $(fg)(x) = 0 \quad \forall x \in V$ lo que implica que $fg \in I(V)$ lo cual es una contradicción ya que $I(V)$ es primo.
2) $\Longleftrightarrow$ 3)
Es claro ya que $\Gamma(V) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ que es un dominio entero si y sólo si $I(V)$ es un ideal primo.

$\mathbb{D}$

**Ejemplo 1.4** $\mathbb{A}^1$ *es irreducible ya que como ya vimos, todos sus subconjuntos algebraicos propios son conjuntos finitos, por lo que* $\mathbb{A}^1$ *no pude verse como la unión finita de estos conjuntos.*

**Definición 1.8** *Diremos que V es una variedad algebraica afín, si V es un conjunto algebraico irreducible. Un subconjunto abierto de una variedad algebraica afín es una variedad cuasi-afín.*

La siguiente definición será muy útil para dar una característica muy importante de los conjuntos algebraicos.

**Definición 1.9** *Sea $X$ un espacio topológico, decimos que $X$ es noetheriano si satisface la condición de cadena descendente para subconjuntos cerrados, es decir, para cualquier sucesión descendente de conjuntos cerrados $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ existe un entero $r$, tal que $Y_r = Y_s$ para toda $s \geq r$*

De los espacios topológicos noetherianos, se pueden resaltar las siguientes propiedades importantes:

- Todo espacio topológico noetheriano es cuasi-compacto, es decir, toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

- Cualquier subconjunto de un espacio topológico noetheriano es noetheriano (con la topología inducida).

- Un espacio topológico $X$ es noetheriano, si y sólo si, todo subconjunto abierto es cuasi-compacto.

**Proposición 1.10** *Sea $X$ un espacio topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$X$ es noetheriano.*

2. *Toda familia no vacía de subconjuntos cerrados tiene elemento minimal.*

3. *$X$ satisface la condición de cadena ascendente para conjuntos abiertos.*

4. *Toda familia no vacía de subconjuntos abiertos tiene elemento maximal.*

**Ejemplo 1.5** *$\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano, ya que si consideramos una cadena descendente $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$, entonces $I(Y_1) \subset I(Y_2) \subset \ldots$ es una cadena ascendiente de ideales de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ que como vimos es un anillo noetheriano, por lo que existe un entero $r$ tal que $I(Y_r) = I(Y_s) \quad \forall s \geq r$, lo que implica que $Y_r = V(I(Y_r)) = V(I(Y_s)) = Y_s$ para toda $s \geq r$. Por lo tanto $\mathbb{A}^n$ con la topología de Zariski es un espacio topológico noetheriano.*

**Proposición 1.11** *En un espacio topológico noetheriano $X$, cualquier subconjunto cerrado puede ser expresado como la unión finita de elementos irreducibles, es decir, dado $Y \subset X$ cerrado entonces $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ con $Y_i$ irreducible para toda $i \in \{1, \ldots, r\}$. Si además se cumple que $Y_i \nsubseteq Y_j$ para $i \neq j$, entonces los conjuntos $Y_i$ están univocamente determinados y son llamados las componentes irreducibles de $Y$.*

***Demostraciòn***
Primero probaremos la existencia de esta representación. Sea $\mathfrak{G}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X que no pueden ser expresados como la unión finita de conjuntos cerrados irreducibles.Si $\mathfrak{G}$ no es vacío, dado que $X$ es un espacio topológico noetheriano, $\mathfrak{G}$ tiene un elemento minimal, sea $Y$ ese elemento, como Y no puede ser irreducible, por construcción, entonces $Y$ es reducible, lo que implica que existen $W$ y $Z$ subconjuntos propios de Y cerrados, tales que $Y = W \cup Z$ , por la minimalidad de $Y$, tenemos que $W = W_1 \cup \ldots W_r$ y $Z = Z_1 \cup \ldots Z_s$ ,con $W_j$ y $Z_i$ conjuntos cerrados e irreducibles para toda $i, j$, pero $Y = W \cup Z = W_1 \cup \ldots W_r \cup Z_1 \cup Z_1 \ldots Z_s$ lo cual es una contradicción, por lo tanto el conjunto $\mathfrak{G}$ es vacío.
Para la unicidad, supongamos que $Y = Y_1 \cup \ldots Y_r = Z_1 \cup \ldots \cup Z_s$ con la propiedad de que $Y_i \nsubseteq Y_j$ para $i \neq j$ y $Z_m \nsubseteq Z_n$ para $m \neq n$, como $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ tenemos que $Y_1 \subset Y = Z_1 \cup \ldots \cup Z_s$, lo que implica que , $Y_1 = \cup_{i=1}^{s}(Y_1 \cap Z_i)$ pero $Y_1$ es irreducible, por lo que existe $k \in \{1, \ldots s\}$ (el cual podemos suponer que es 1) tal que $Y_1 = Y_1 \cap Z_1$ lo cual implica que $Y_1 \subset Z_1$ . De manera análoga tenemos que $Z_1 \subset Y_k$ para alguna $k \in \{1, \ldots r\}$ así $Y_1 \subset Z_1 \subset Y_k$ pero $Y_i \nsubseteq Y_j$ para $i \neq j$ lo que implica que $Y_1 = Z_1$, ahora sea $W = Y \diagdown Y_1$ entonces, $W = Y_2 \cup \ldots Y_r = Z_2 \cup \ldots Z_s$ con las mismas condiciones, procediendo por inducción tenemos que $r = s$ y que $Y_i = Z_i$ para toda $i \in \{1, \ldots r\}$. Lo cual prueba la unicidad.

$\mathfrak{D}$

**Corolario 1.12** *Cualquier subconjunto algebraico afín se puede expresar de manera única como unión de variedades algebraicas afines, no contenidas una en la otra.*

**Definición 1.13** *Si $X$ es un espacio topologico, se define la dimensión de $X$ (denotado por $dimX$), al supremo de todos los enteros $n$, tales que, existe una cadena $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n$ de conjuntos irreducibles "distintos" de $X$.*

## 1.3. El teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensantz)

En este capítulo hablaremos de el "Nullstellensantz" que se traduce del Alemán como "el teorema de los ceros". Es uno de los teoremas fundamentales de la geometría algebraica, pues da una correspondencia entre los conjuntos algebraicos afines y los ideales, en particular nos dice cómo calcular $I(V(I))$ en términos de $I$.

En toda esta sección supondremos que $\mathbb{K}$ es un campo algebraicamente cerrado.

Dado que $\langle f^n \rangle \subset \langle f \rangle$ para cualquier natural distinto de cero, lo que implica que $V(f) \subset V(f^n)$; pero es claro que si un punto se anula en $f$, entonces se anula en cualquier potencia (mayor que cero) de $f$ , lo que nos da la siguiente igualdad:

$$V(f^n) = V(f) \quad para \quad toda \quad n \geq 1$$

Esta propiedad, es la que motiva la siguiente definición.

**Definición 1.14** *Dado $A$ un anillo conmutativo, $I \subset A$ un ideal de $A$, definimos el radical de $I$ como:*

$$\sqrt{I} = \{x \in A | x^n \in I \quad para \quad algún \quad natural \quad n > 0\}$$

*Decimos que $I$ es un ideal radical si $I = \sqrt{I}$.*

**Proposición 1.15** *Si $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal, entonces:*

$$\sqrt{I} \subset I(V(I))$$

***Demostración***
Para cada $f \in \sqrt{I}$ tenemos que existe un natural n tal que, $f^n \in I$, lo que implica que $\{f^n\} \subset I$ así $V(I) \subset V(f^n) = V(f)$ lo que implica que $f$ se anula en $V(I)$, que prueba que $f \in I(V(I))$.

☽

Los siguientes lemas son necesarios para la prueba que se dará de el teorema de los ceros de Hilbert, pero se omitirá su demostración las cuales se pueden consultar en [ZF] (capítulo 1, página 20)

**Lema 1.16** *(Zariski) Si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ son campos, con $\mathbb{L}$ de tipo finito sobre $\mathbb{K}$, entonces la extensión $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ es algebraica, y por tanto finita.*

**Lema 1.17** *(Rabinowitsch) Si $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_f$ es la localización respecto al conjunto multiplicativo $S = \{f^n | n \geq 0\}$ entonces la función*

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n][t]/\langle ft - 1 \rangle \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_f$$

$$a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0 \mapsto a_n/f^n + \ldots + a_1/f + a_0$$

*Es un isomorfismo.*

**Teorema 1.18** *Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado, entonces:*

1. *Todo ideal máximo $\mathfrak{M}$ del anillo de polinomios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma:*

$$\mathfrak{M} = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$$

2. *(Nullstellensantz débil) Para todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se tiene que $V(I) \neq \emptyset$*

3. *(Nullstellensantz) Para todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se tiene que $I(V(I)) = \sqrt{I}$*

***Demostración***
1)
Primero probaremos que todos los ideales de la forma $\langle x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n \rangle$ con $a_i \in \mathbb{K}$ son máximos. Salvo traslación, podemos suponer que $a_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots n\}$. Consideramos el morfismo del anillo de polinomios al campo dado por $f \mapsto f(0, \ldots 0)$, que es claramente suprayectivo y manda a cada polinomio a su término constante, por lo que su núcleo lo forman los polinomios sin término constante, es decir, los polinomios divisibles por algún $x_i$, lo que implica que el núcleo de este morfismo es el generado por $\langle x_1, \ldots x_n \rangle$, usando el primer teorema de isomorfismo, tenemos que :

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1, \ldots x_n \rangle \simeq \mathbb{K}$$

Por lo que $\langle x_1, \ldots x_n \rangle$ es máximo. Ahora sea $\mathfrak{M}$ ideal máximo y consideramos la siguiente composición de morfismos:

$$\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{M} =: A$$

Donde $A$ es un campo, ya que $\mathfrak{M}$ es máximo, además es una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generada (por las clases residuales $x_i - \mathfrak{M}$), la sucesión nos dice que podemos ver a $A$ como una extensión de $\mathbb{K}$, que por el lema de Zariski, implica que es algebraico sobre $\mathbb{K}$ y como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado se tiene que $\mathbb{K} \simeq_\phi A$. Así para toda $X_i - \mathfrak{M} \in A$ se tiene un único $a_i \in \mathbb{K}$ tal que $\phi(a_i) = x_i + \mathfrak{M}$ es decir, $x_i - a_i \in \mathfrak{M}$, lo que implica que $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \subset \mathfrak{M}$ pero ya vimos $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ es máximo, lo que prueba la igualdad.
2)
Sea $I$ un ideal propio, entonces existe $\mathfrak{M}_I$ ideal máximo que contiene a $I$, que por el inciso anterior, es de la forma $\mathfrak{M} = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$, por lo que $V(\mathfrak{M}_I) \subset V(I)$, pero es claro que $V(\mathfrak{M}_I) = V(\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle) = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \subset V(I)$ que prueba que $V(I) \neq \emptyset$.
3)
Por la proposición **(1.15)**, tenemos que $\sqrt{I} \subset I(V(I))$, así que sólo nos falta la otra contención, sea $f \in I(V(I))$, dado que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano, podemos suponer que $I = \langle h_1, \ldots h_r \rangle$ y consideremos el anillo $A_f := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_f$ (la localización de el anillo de polinomios en $f$). Queremos probar que $IA_f$ es el generado por la imagen de 1 en el anillo $A_f$, es decir, probaremos que $1 \in IA_f$. Por el lema de Rabinowitsch tenemos que $A_f \simeq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n][t]/\langle ft - 1 \rangle = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, t]/\langle ft - 1 \rangle$, por lo tanto $IA_f \simeq I\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, t]\langle ft - 1 \rangle = \langle I, ft - 1 \rangle / \langle ft - 1 \rangle$, y así basta con probar que $1 \in I_f := \langle I, ft - 1 \rangle = \langle h_1, \ldots h_r, ft - 1 \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, t]$, por la parte dos de este teorema, es suficiente con probar que $V(I_f) = \emptyset$ en $\mathbb{A}^{n+1}$. Sea $A = (a_1, \ldots a_n, b) \in V(I_f)$ esto pasa si y sólo si los generadores del $I$ se anulan en el punto $P = (a_1, \ldots a_n)$ (ya que los $h_i$ no tienen a la variable $t$), lo que implica que $P \in V(I)$ y como $f \in I(V(I))$, entonces $f$ se anula en P, pero como $ft - 1$ se anula en el punto $(P, b)$ tenemos que $(ft - 1)(P, b) = f(P)b - 1 = 0$ lo que implica que $f(P)b = 1$ pero esto nos dice en particular que $f(P) \neq 0$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $V(I_f) = \emptyset$ así $I_f = \langle 1 \rangle$ que implica que $1 \in IA_f$ por lo que existen $g_i \in A_f$ tales que:

$$1 = \Sigma_{i=1}^{r}(g_i h_i)/f^m \quad (considerando \quad un \quad denominador \quad común)$$

$$lo \quad que \quad implica \quad que \quad f^m = \Sigma_{i=1}^{r} g_i h_i$$

Que prueba que $f \in \sqrt{I}$.

☽

**Corolario 1.19** *Hay una correspondencia uno a uno entre los conjuntos algebraicos afines en* $\mathbb{A}^n$ *y los ideales radicales de* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

$$\{Conjuntos \quad algebraicos \quad afines \quad en \quad \mathbb{A}^n\} \rightleftarrows \{Ideales \quad radicales \quad de \quad \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

**Proposición 1.20** *Sea* $\mathbb{K}$ *un campo algebraicamente cerrado, si* $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *es irreducible, entonces* $V(f)$ *es una variedad irreducible.*

***Demostración***
Como $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un dominio de factorización única y $f$ es irreducible tenemos que $\langle f \rangle$ es un ideal primo y por tanto es un ideal radical, es decir, $\langle f \rangle = \sqrt{\langle f \rangle}$. Por Nullstellensantz, tenemos que $I(V(\langle f \rangle)) = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$ lo cual implica que $I(V(\langle f \rangle))$ es un ideal primo y así $V(f)$ es irreducible.

☽

Esta última proposición es muy útil, ya que si consideramos $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ podemos descomponer a $f$ como producto de irreducibles, es decir, $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ lo que nos ayuda a descomponer a $V(f)$ en componentes irreducibles, ya que:

$$V(f) = V(f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}) = V(f_1^{\alpha_1}) \cup \ldots \cup V(f_r^{\alpha_r}) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$$

.

**Corolario 1.21** *Si* $f_1, \ldots f_r$ *son polinomios irreducibles y distintos sobre un campo* $\mathbb{K}$ *algebraicamente cerrado, entonces:*

$$\sqrt{f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}} = \langle f_1 \cdots f_r \rangle$$

## 1.4. Una introducción a los morfismos entre variedades afines.

Ya que definimos lo que es una variedad algebraica afín, buscamos una manera de poder compararlas, para ello necesitamos definir morfismos entre ellas, para ésto comenzamos definiendo las funciones regulares en una variedad afín, análogas a las funciones holomorfas en una superficie de Riemann.

**Definición 1.22** *Sea* $V \subset \mathbb{A}^n$ *y* $W \subset \mathbb{A}^m$ *conjuntos algebraicos afines, y sea* $\phi : V \to W$ *una función,* $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$. *Decimos que* $\phi$ *es un morfismo regular si* $\phi_i \in \Gamma(V)$ *( el anillo de coordenadas de* $V$*) para toda* $i \in \{1, \ldots, m\}$. *Denotamos al conjunto de morfismos regulares de* $V$ *en* $W$ *como* $Reg(V, W)$.

Hay que notar que un morfismo regular es continuo (con la topología de Zariski), pero no cualquier función continua es un morfismo regular.

**Ejemplo 1.6** *(La k-ésima proyección) Dado un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{A}^n$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$ definimos*

$$\pi_k : V \to \mathbb{K}$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

*Es un morfismo regular.*

**Definición 1.23** *Sean $V$ y $W$ variedades algebraicas;*

- *Un isomorfismo de variedades afines es un morfismo regular $\phi : V \to W$, tal que existe $\psi : W \to V$ un morfismo regular con la propiedad de que $\phi \circ \psi = Id_W$ y $\psi \circ \phi = Id_V$. Decimos que dos variedades afines son isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas.*
- *Un automorfismo de variedades afines, es un ismorfismo $\phi : V \to V$.*

Dado un morfismo regular $\phi$, podemos definir un homomorfismo de anillos de la siguiente forma:

$$\phi^* : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$$
$$f \mapsto f \circ \phi$$

Este morfismo tiene la propiedad de que $\phi^*(C) = C$ para cualquier constante $C \in \mathbb{K}$, que nos dice que este homomorfismo es un homomorfismo de álgebras.

Toda esta teoría nos sirve para definir un funtor contravariante ($\Gamma$) de la categoría de conjuntos algebraicos afines con morfismos regulares a la categoría de $\mathbb{K}$-álgebras, que le asocia a cada conjunto algebraico $V$ un $\mathbb{K}$-álgebra $\Gamma(V)$ y a cada morfismo regular $\phi$ , un morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\phi^*$. Este funtor cumple muchas propiedades interesantes (algunas de estas propiedades ser pueden ver en [P] capítulo 1, página 20), entre ellas, una que es muy útil para poder saber si dos variedades algebraicas afines son isomorfas o no.

**Proposición 1.24** *El morfismo*

$$\gamma : Reg(V, W) \to Hom_{\mathbb{K}-álgebra}(\Gamma(W), \Gamma(V))$$
$$\phi \mapsto \phi^*$$

*Es biyectivo.*

**Corolario 1.25** *Dada $\phi : V \to W$ un morfismo regular, entonces: $\phi$ es isomorfismo si y sólo si $\phi^*$ es isomorfismo. Así dos variedades algebraicas afines son isomorfas si y sólo si, sus anillos de coordenadas son isomorfos como $\mathbb{K}$-álgebras.*

Por último, en este capítulo, definiremos unos abiertos especiales, que son fundamentales para una de las construcciones más importantes de este trabajo de la cual hablaremos en el capítulo cuatro.

**Definición 1.26** *Sea $V$ un subconjunto algebraico afín y consideremos un elemento $f$ de $\Gamma(V)$. El conjunto*

$$D(f) = \{x \in V | f(x) \neq 0\}$$

*es un conjunto abierto de $V$.*

**Proposición 1.27** *Todo subconjunto abierto no vacio de $V$ es la unión finita de conjuntos abiertos de la forma $D(f)$.*

***Demostración:***
Sea $U \subset V$ un conjunto abierto no vacio de $V$, entonces $V \setminus U = V(I)$, con $I$ un ideal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots x_n]$, además $I = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle$ con $F_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots x_n]$ de grado >0, sea $f_i$ la imagen en $\Gamma(V)$ de $F_i$, entonces $U = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$.

☽

Capítulo 2

# Conjuntos algebraicos proyectivos

Históricamente, el espacio proyectivo se introdujo en el siglo XVII por G. Desargues, pero se desarrolló sobre todo en el siglo XIX por Monge, Poncelet, Klein y otros. En la geometría algebraica, es el escenario que da los resultados más satisfactorios, sin embargo, el espacio afín sigue siendo importante ya que es el modelo local del espacio proyectivo.

Dado $E$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión $n+1$ podemos dar una relación de equivalencia $\backsim$ en $E \setminus \{\vec{0}\}$ dada por:

$$\vec{x} \backsim \vec{y} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad tal \quad que \quad \vec{y} = \lambda \vec{x}$$

Como esta relación es una relación de colinealidad, se puede ver que las clases de equivalencia están dadas por los subespacios de $E$ de dimensión 1, sin el vector $\vec{0}$.

**Definición 2.1** *El espacio proyectivo asociado a E (denotado por $\mathbb{P}(E)$) es el cociente $E \setminus \{\vec{0}\}/ \backsim$. Cuando $E = \mathbb{K}^{n+1}$ escribimos $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ y es llamado el espacio proyectivo n-dimensional estándar.*

A menos que se especifique lo contrario, solo consideremos al espacio proyectivo estándar y para simplificar notación lo denotaremos como $\mathbb{P}^n$.

Un punto $p \in \mathbb{P}^n$, es una clase de equivalencia, si elegimos un representante, entonces podemos escribir $p = (x_0, \ldots, x_n)$, los elementos $x_i \in \mathbb{K}$ las llamamos, las coordenadas homogéneas de $p$, la razón de este nombre es que dado otro representante $(y_0, \ldots, y_n)$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $(y_0, \ldots, y_n) = (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$.

## 2.1. Homografías

Si $E$ es un espacio vectorial, entonces el grupo general lineal $GL(E)$ actúa en $E$. Si consideramos $u \in GL(E)$, como $u$ es inyectiva, preserva colinealidad, por lo que induce una biyección $\bar{u}$ en $\mathbb{P}(E)$.

**Definición 2.2** *Una biyección de $\mathbb{P}(E)$ inducida por un elemento u de $GL(E)$ es llamada una homografía*

De la definición podemos ver que el grupo $\mathbb{K}^*$ actúa trivialmente en $\mathbb{P}(E)$, pero además es claro que son las únicas que actúan trivialmente sobre $\mathbb{P}(E)$. Así el grupo general lineal proyectivo de $E$ o grupo de homografías en $\mathbb{P}(E)$ es el cociente $PGL(E) = GL(E)/\mathbb{K}^*$.

## 2.2. Relación entre el espacio afín y el espacio proyectivo

Dado un subespacio vectorial $F$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ de dimensión $m+1$, con $m \leq n$. Sea $\iota$ la inclusión natural y $\pi$ la proyeccion canónica al cociente.

$$\begin{tikzcd} F \setminus \{\vec{0}\} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "\pi\circ\iota"'] & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

**Definición 2.3** *Sea F un subespacio de* $\mathbb{K}^{n+1}$ *de dimensión m+1, definimos:* $\overline{F} := \pi(\iota(F \setminus \{\vec{0}\}))$ *que es el subespacio proyectivo de dimensión m.*

Cuando $m = 0$, $\overline{F}$ es un punto, cuando $m = 1$ se llamará recta, si $m = 2$ diremos que es un plano, y cuando $m = n - 1$ diremos que es un hiperplano.

Sea $H_i$ el hiperplano dado por la ecuación $x_i = 0$ con $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $\overline{H}_i$ el hiperplano proyectivo asociado, definimos $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \overline{H}_i$, entonces:

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$$

$$(x_0, \dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$$

son funciones que están bien definidas ya que si $x \in U_i$ con $x = (x_0, \dots, x_n)$ entonces $x_i \neq 0$, además si consideramos otro representante $x = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$ se tiene que $\phi_i((\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)) = (\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i}, \dots \frac{\lambda x_{i-1}}{\lambda x_i}, \frac{\lambda x_{i+1}}{\lambda x_i}, \dots, \frac{\lambda x_n}{\lambda x_i}) = (\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) = \phi_i((x_0, \dots, x_n))$.

Además es una biyección, cuya inversa está dada por:

$$\psi_i : \mathbb{A}^n \to U_i$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

De esta forma podemos ver $\mathbb{P}^n$ como la unión disjunta de un espacio afín de dimensión $n$ y un hiperplano proyectivo. Los puntos en el hiperplano se llaman puntos al infinito, aunque claro, esta noción de infinito depende de la elección del hiperplano.

## 2.3. Algebras graduadas

**Definición 2.4** *Una* $\mathbb{K}-$*álgebra R, se dice que es graduada, si se puede escribir como suma directa:*

$$R = \oplus_{n \geqslant 0} R_n$$

*, donde los subespacios* $R_n$ *de R satisfacen que* $R_p R_q \subset R_{p+q}$*. Los elementos de* $R_p$ *se llaman elementos homogéneos de grado p.*

Se puede ver que $R_0$ es una subálgebra de $R$ y que $R^+ = \oplus_{n>0} R_n$ es un ideal de $R$ que cumple que $R/R^+ \simeq R_o$.

**Ejemplo 2.1** *Sea* $R = \mathbb{K}[x_0, \dots x_n]$ *y definimos*

$$R_d = \mathbb{K}_d[x_0, \dots x_n] = \{los \quad polinomios \quad homogéneos \quad de \quad grado \quad d\} \cup \{0\}$$

*por lo que podemos ver a R como:*

$$\mathbb{K}[x_0, \dots x_n] = \oplus_{d \geqslant 0} \mathbb{K}_d[x_0, \dots x_n]$$

*Así podemos ver al anillo de polinomios como un anillo graduado.*

**Definición 2.5** *Dado $I$ un ideal de $R$ un anillo graduado, decimos que $I$ es un ideal homogéneo, si $I$ es generado por elementos homogéneos.*

**Proposición 2.6** *Sea $R = \oplus_{n\geqslant 0} R_n$ un anillo graduado e $I$ un ideal de $R$. Los siguientes son equivalentes:*

1. *$I$ es ideal homogéneo.*
2. *Si $f \in I$ y $f = \Sigma_{i=0}^{r} f_i$, con $f_i \in R_i$, entonces $f_i \in I$ para toda $i$.*

***Demostración***
1) $\Rightarrow$ 2)
Suponemos que $I$ es generado por elementos homogéneos $G_i$ de grado $\alpha_i$. Sea $f \in I$, f se descompone como suma de elementos homogéneos (porque $R$ es un anillo graduado) es decir $f = \Sigma_{i=0}^{r} f_i$ con $f_i \in R_i$, por inducción sobre r mostraremos que $f_i \in I$. Si $r = 0$ entonces $f_0 = f \in I$, ahora suponemos que es válido para todos los menores iguales que $r-1$ y probaremos que $f_r \in I$. Por hipótesis tenemos que $f = \Sigma_{i=0}^{s} U_i G_i$. Identificando los términos de mayor grado tenemos que:

$$f_r = \Sigma U_{i,r-\alpha_i} G_i$$

Lo que implica que $f_r \in I$.
2) $\Rightarrow$ 1)
Es claro ya que los elementos $f_i$ que generan a $I$ son elementos homogéneos.

☽

**Corolario 2.7** *Sea $R$ un $\mathbb{K}-$álgebra graduada, dado $I$ un ideal homogéneo de $R$, si $S = R/I$ y $p$ la proyección canónica, entonces $S$ tiene una graduación natural dada por:*

$$S_i = p(R_i)$$

**Definición 2.8** *Sea $R$ un $\mathbb{K}-$álgebra graduada y $M$ un $R-$módulo. Se dice que $M$ es graduado, si se puede escribir como suma directa*

$$M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

*, donde los $\mathbb{K}-$subespacios $M_n$ de $M$ satisfacen que $R_p M_q \subset M_{p+q}$ para toda $p \in \mathbb{N}$ y toda $q \in \mathbb{Z}$. Un homomorfismo $\phi : M \to N$ entre dos anillos graduados, se dice que es homogéneo de grado $d$, si para toda $n$, se tiene que $\phi(M_n) \subset N_{d+n}$.*

## 2.4. Conjuntos algebraicos proyectivos

Ahora repetiremos algunas definiciones del capítulo uno, notando las similitudes con el caso afín y haciendo hincapié en las diferencias.

En este capítulo supondremos que $\mathbb{K}$ es un campo infinito.

La primera diferencia con el caso afín, es que los polinomios $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ no definen una función del espacio proyectivo en el campo, ya que evaluar un polinomio en un punto $x \in \mathbb{P}^n$ depende del representante. Por ejemplo, si consideramos un polinomio homogéneo $F$ de grado $d$ tenemos que:

$$F((\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)) = \lambda^d F((x_0, \ldots, x_n))$$

**Definición 2.9** *Sea $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ y $\overline{x} \in \mathbb{P}^n$, decimos que $\overline{x}$ es un cero de $F$ si $F(x) = 0$ para cualquier representante de la clase de $\overline{x}$. Y lo denotamos por $F(\overline{x}) = 0$.*

**Proposición 2.10** *Sea $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ y $\overline{x} \in \mathbb{P}^n$. Si $F = F_0 + \ldots + F_r$ con $F_i$ un polinomio homogéneo de grado $i$, entonces $F(\overline{x}) = 0$ si y sólo si $F_i(\overline{x}) = 0$ para toda $i$.*

***Demostración***

$\Rightarrow$

Suponemos que $F(\overline{x}) = 0$, esto implica que $F(\lambda x) = F_0(x) + \lambda F_1(x) + \ldots + \lambda^r F_r(x) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}^*$, pero como $\mathbb{K}$ es infinito podemos considerar el polinomio $f(t) = F_0(x) + F_1(x)t + \ldots + F_r(x)t^r \in \mathbb{K}[t]$ que por lo anterior es el polinomio cero, lo cual implica que $F_i(x) = 0$ para toda $i \in \{0. \ldots, r\}$.

$\Leftarrow$

Es claro.

☽

Lo que esta proposición nos afirma, es que para ver que un punto se anula en un polinomio, basta ver que se anula en cada una de sus componentes homogéneas. lo que nos permite dar la siguiente definición.

**Definición 2.11** *Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Definimos:*

$$V_p(S) = \{\overline{x} \in \mathbb{P}^n | para \quad todo \quad F \in S \quad homogéneo, F(\overline{x}) = 0\}$$

*Decimos que $V_p(S)$ es el conjunto algebraico proyectivo definido por $S$.*

Al igual que en el caso afín, dado un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, se tiene que $V_p(I) = V_p(S)$ con $S$ un conjunto generador de $I$. Dado que $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es noetheriano y por la proposición anterior, podemos suponer que $S$ es un conjunto finito y que $I$ es un ideal homogéneo.

**Proposición 2.12** *Los conjuntos algebraicos proyectivos cumplen las siguientes propiedades:*

1. *El conjunto vacío y $\mathbb{P}^n$ son conjuntos algebraicos proyectivos.*
2. *Dados $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ conjuntos algebraicos proyectivos, entonces $X \cup Y$ es un conjunto algebraico proyectivo.*
3. *Dada $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos algebraicos proyectivos , entonces $\cap_{i \in I} X_i$ es un conjunto algebraico proyectivo.*
4. *Si $I_1 \subset I_2$ son ideales homogéneos entonces, $V_p(I_2) \subset V_p(I_1)$*

***Demostración:***

La demostración es similar al caso afín.

☽

Con esta proposición al igual que en el caso afín, podemos definir la topología de Zariski en el espacio proyectivo, tomando como cerrados a los conjuntos algebraicos proyectivos.

**Definición 2.13** *(Ideal irrelevante) Sea $R^+ = \langle x_0, \ldots x_n \rangle$ es un ideal homogéneo que consiste de los polinomios con término constante 0, es llamado el ideal irrelevante.*

Una característica de este ideal es que $V_p(R^+) = \emptyset$ y marcará una diferencia notable al momento de dar una versión del teorema de los ceros de Hilbert en el caso proyectivo.

## 2.5. El ideal asociado a un conjunto algebraico proyectivo y conjuntos irreducibles

Para esta sección es necesario considerar a $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ como una $\mathbb{K}-$álgebra graduada (como se expuso en la sección **2.3**)

**Definición 2.14** *Sea $V$ un subconjunto de $\mathbb{P}^n$. Definimos un ideal asociado a $V$ dado por:*

$$I_h(V) = \{F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \quad homog\acute{e}neo \quad | \forall \overline{x} \in V, F(\overline{x}) = 0\}$$

**Proposición 2.15** *Dado $V \subset \mathbb{P}^n$, $I_h(V)$ es un ideal homogéneo.*

***Demostración:***
Es un corolario de la proposición (**2.10**).

☽

También se tienen los siguientes resultados análogos al caso afín.

**Proposición 2.16** *Los ideales de conjuntos algebraicos cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $V$ es un conjunto algebraico, entonces $V_p(I_h(V)) = V$.*
2. *$I \subset I_h(V(I))$ para cualquier ideal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.*

***Demostración:***
La demostración es idéntica a el caso afín.

☽

De igual manera un subconjunto de $\mathbb{P}^n$ es irreducible, si es irreducible como espacio topológico con la topología de Zariski y todos los resultados de ese capítulo se traducen al caso proyectivo de manera natural.

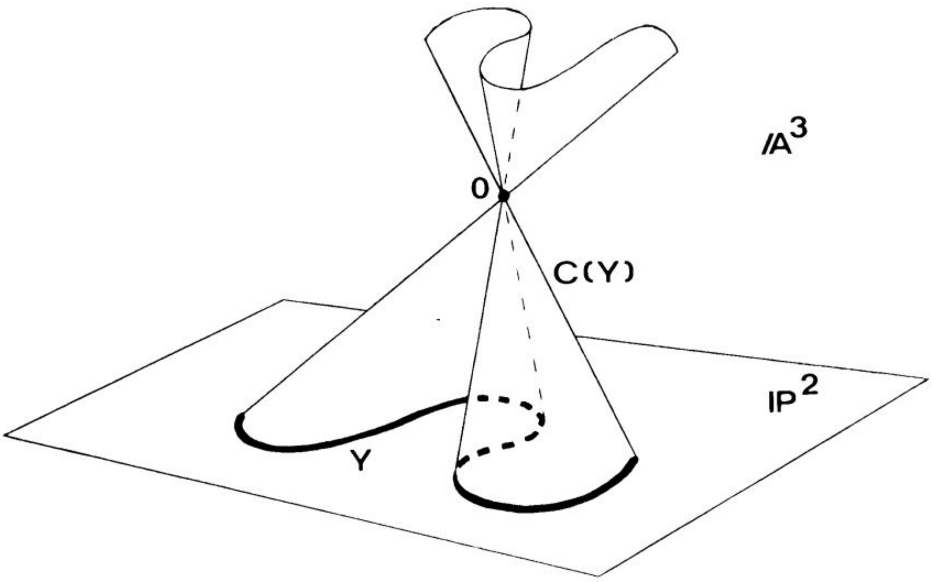
**Definición 2.17** *Una variedad algebraica proyectiva es un conjunto algebraico proyectivo irreducible. Un abierto de una variedad proyectiva es una variedad cuasi-proyectiva.*

**Definición 2.18** *(el cono de un conjunto algebraico proyectivo) Sea $Y \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto algebraico proyectivo, asociamos a $Y$ el conjunto $C(Y)$, dado por la imagen inversa de $Y$ bajo $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{P}^n$ (la proyección canónica) unión el 0, es decir:*

$$C(Y) = \pi^{-1}(Y) \cup \{0\}$$

Si $I \subsetneq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo y $Y = V_p(I)$, entonces $C(Y) = V(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Si $I = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ entonces $C(Y) = V(R^+) = \{0\}$.

Este tipo de argumentos se usa en algunas ocasiones para reducir un problema en el proyectivo a un caso similar en el caso afín. Por ejemplo, si suponemos que $\mathbb{K}$ es un campo algebraicamente cerrado, se tiene una versión del teorema de los ceros de Hilbert para conjuntos algebraicos proyectivos.




**Teorema 2.19** *(Nullstellensatz proyectivo) Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado. Sea $I$ un ideal homogéneo de $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ y $V = V_p(I)$, entonces:*

1. $V_p(I) = \emptyset \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad (R^+)^N \subset I \Leftrightarrow R^+ \subset \sqrt{I}$

2. *Si $V_p(I) \neq \emptyset$, entonces $I_h(V_p(I)) = \sqrt{I}$.*

***Demostración***
1)

$$V(I) = \emptyset \Leftrightarrow C(V) \subset \{0\}$$

$$\Leftrightarrow C(V) = \emptyset \quad ó \quad C(V) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{I} = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \quad ó \quad \sqrt{I} = R^+ \quad (por \quad el \quad Nullstellensatz \quad afín)$$

$$\Leftrightarrow R^+ \subset \sqrt{I}$$

2)
Si $V_p(I) \neq \emptyset$ entonces:

$$f \in I_h(V(I)) \Leftrightarrow f \in I(C(V))(por \quad la \quad proposición \quad \mathbf{2.10})$$

$$\Leftrightarrow f^m \in I \quad para \quad alguna \quad n \in \mathbb{N}(por \quad el \quad Nullstellensatz \quad afín)$$

$$\Leftrightarrow f \in \sqrt{I}.$$

☽

**Corolario 2.20** *Si $\mathbb{K}$ es un campo algebraicamente cerrado, y $V \subset \mathbb{P}^n$ es un conjunto algebraico no vacío, entonces:*

$$I_h(V) = I(C(V))$$

Se puede comprobar que si $I$ es un ideal homogéneo, entonces también lo es su radical $\sqrt{I}$. Por lo tanto, obtenemos una biyección entre los conjuntos algebraicos no vacíos en $\mathbb{P}^n$ y los ideales homogéneos propios de $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ que no contienen al ideal irrelevante $R^+$.

Los ideales primos todavía corresponden a conjuntos algebraicos proyectivos irreducibles, pero los puntos ya no se corresponden con los ideales máximos. Por lo que tenemos:

$$\begin{array}{c}\{Conos \quad afines \quad no \quad vacios \quad en \quad \mathbb{A}^{n+1}\} \\ \updownarrow \\ \{Conjuntos \quad algebraicos \quad proyectivos \quad en \quad \mathbb{P}^{n}\} \\ \updownarrow \\ \{Ideales \quad radicales \quad homogéneos \quad \neq R^{+} \quad en \quad \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]\}\end{array}$$

Al igual que en el caso afín, le podemos asociar a cada conjunto algebraico proyectivo un $\mathbb{K}-$álgebra graduada, dada por:

**Definición 2.21** *Sea $V \subset \mathbb{P}^n$, un conjunto algebraico proyectivo, y sea $I_h(V)$ su ideal homogéneo asociado, entonces el cociente:*

$$\Gamma_h(V) = \mathbb{K}[x_0,\ldots x_n]/I_h(V)$$

*es una $\mathbb{K}-$álgebra graduada.*

Pero como ya vimos no define funciones sobre $V$.

Por último, daremos el análogo a los abiertos especiales, definidos en el capítulo uno.

**Definición 2.22** *Sea $V$ un subconjunto algebraico proyectivo y consideremos un elemento $f$ homogéneo de $\Gamma_h(V)$ de grado $>0$. El conjunto*

$$D^+(f) = \{x \in V | f(x) \neq 0\}$$

*Es un conjunto abierto de $V$.*

**Proposición 2.23** *Todo subconjunto no vacío de $V$ es la unión finita de conjuntos abiertos de la forma $D^+(f)$.*

***Demostración:***
Sea $U \subset V$ un conjunto abierto no vacío de $V$, entonces $V \setminus U = V_p(I)$, con $I$ un ideal homogéneo de $\mathbb{K}[x_0,\ldots x_n]$, además $I = \langle F_1,\ldots,F_r\rangle$ con $F_i \in \mathbb{K}[x_0,\ldots x_n]$ de grado $>0$, sea $f_i$ la imagen en $\Gamma_h(V)$ de $F_i$, entonces $U = D^+(f_1) \cup \ldots \cup D^+(f_r)$.

☽

La proposición anterior, nos dice que estos conjuntos no sólo son abiertos, si no que además, si consideramos el conjunto $\mathcal{D} = \{D^+(f)\}_{f\in\Gamma_h(V)^+}$ es una base para la topología de $V$.

En conclusión, las principales diferencias entre geometría afín y proyectiva son los siguientes:

1. Tenemos que usar polinomios homogéneos y reemplazar los anillos por anillos graduados e ideales por ideales homogéneos.

2. Los polinomios (y más generalmente todos los elementos de los anillos graduados involucrados) ya no funcionan.

3. El ideal irrelevante $R^+$ juega un papel muy especial.

Capítulo 3

# Gavillas sobre espacios topológicos

## 3.1. Introducción

En este capítulo daremos una pequeña introducción a la teoría de gavillas la cual es una de las herramientas esenciales de la geometría algebraica. Su importancia se debe a que nos da las relaciones entre las propiedades locales y globales de un espacio.

**Definición 3.1** *Sea $X$ un espacio topológico. Una pregavilla $\mathcal{F}$ de grupos abelianos en $X$ consiste de:*

1. *Para cualquier abierto $U$ de $X$, $\mathcal{F}(U)$ es un grupo abeliano*
2. *Dados $U$, $V$ conjuntos abiertos de $X$ con $V$ subconjunto de $U$, existen morfismos de grupos abelianos $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ con las siguientes condiciones:*
   - $\mathcal{F}\ (\emptyset) = \{0\}$
   - $\rho_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ *para todo abierto $U$ de $X$.*
   - *Si $W \subset V \subset U$ abiertos entonces $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$.*

Si los grupos $\mathcal{F}(U)$ son anillos, módulos , etc. Sus morfismos son homomorfismos de anillos, módulos etc., entonces tenemos una pregavilla de anillos, módulos etc. Frecuentemente escribiremos $f|_V = \rho_{V,U}(f)$ si $f \in \mathcal{F}(U)$ y $V \subset U$.

**Definición 3.2** *Dado un espacio topológico $X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una gavilla en $X$ si:*

1. *$\mathcal{F}$ es una pregavilla en $X$.*
2. *Dado un abierto $U$ de $X$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $U$, se cumplen las siguientes propiedades, a las cuales llamaremos axiomas:*
   - ***AX1*** *Si $f \in \mathcal{F}(U)$ cumple que $f|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ para todo $i$, entonces $f = 0_{\mathcal{F}(U)}$*
   - ***AX2*** *Para cada familia de $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para todos los índices i,j entonces existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para toda i.*

Usualmente dada una pregavilla sobre $X$ y un abierto $U$ de $X$, a los elementos de $\mathcal{F}$(U) se les llama las secciones de la pregavilla $\mathcal{F}$ sobre el abierto U y se usa la notación $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$. Cuando $U$ es igual a $X$ llamaremos a las secciones correspondientes secciones globales.

*Observación:* el axioma **AX1** de la definición anterior implica que la sección $f$ de **AX2** es única, ya que si consideramos $g \in \mathcal{F}(U)$ que cumpla las mismas condiciones que $f$, entonces para todo i se tiene que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ por lo que $f|_{U_i} - g|_{U_i} = (f - g)|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ lo que implica que $f - g = 0$ en $\mathcal{F}(U)$.

**Ejemplo 3.1** *Sean $\mathbb{K}$ un campo y $X$ un espacio topológico, definimos la gavilla de funciones $\mathbb{K}$-valuadas como: para cada abierto $U \subset X$ definimos $\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{K} | f$ es continua $\}$ con la estructura de grupo abeliano dada por la suma puntual y los morfismos dados por las restricciones usuales de funciones.*

- *Que $\mathcal{F}$ es pregavilla es claro, ya que las restricciones cumplen naturalmente esas propiedades.*
- *Por lo que nos resta probar que $\mathcal{F}$ es gavilla. Sea $U$ un abierto de $X$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $U$*

    1. ***AX1*** *Si consideramos una sección $f$ distinta de la sección 0, es decir, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$ . Por lo que existe $U_x$ un elemento de la cubierta, tal que $x \in U_x$ por lo que $f|_{U_x} \not\equiv 0$, por lo que se cumple el axioma* ***AX1****.*
    2. ***AX2*** *Sea una familia de $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos los índices i,j entonces definimos $f : U \to \mathbb{K}$ de manera natural, es decir a cada $x \in U$ $f(x) = f_{i_x}(x)$ con $i_x \in I$ tal que $x \in U_{i_x}$ dado que $f_i$ es continua para toda $i$ y coinciden en las intersecciones, tenemos que $f$ esta bien definida y $f \in \mathcal{F}(U)$. Por tanto se cumple el axioma* ***AX2****.*

**Ejemplo 3.2** *Del mismo modo, si tomamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X$ una variedad k-diferenciable o lisa, y pedimos que las funciones además de ser continuas sean funciones k-diferenciables o lisas, respectivamente obtenemos la gavilla de funciones k-diferenciables sobre una variedad k-diferenciable o la gavilla de funciones lisas sobre una variedad lisa.*

*En el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tomamos a $X$ una variedad compleja y funciones holomorfas, de donde obtenemos la gavilla de funciones holomorfas sobre una variedad compleja.*

Ahora daremos una definición que sirve para examinar el comportamiento de las secciones de una gavilla localmente, es decir, en vecindades muy pequeñas para cada punto $p$ de X.

## 3.2. El grupo de gérmenes

En esta sección nos enfocamos en definir el tallo de una gavilla en un punto, aunque la definición usual es usando limites directos, la simplificaremos dando una definición dada por una relación de equivalencia. La relación entre estas dos definiciones puede verse en [TE] (proposición 4.2, pagina 9).

Sea $X$ un espacio topológico, $p$ un elemento de $X$ y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre $X$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$\Omega_p = \{(U, f) | U \text{ es un abierto tal que } p \in U \text{ y } f \in \mathcal{F}(U)\}.$$

Sobre este conjunto definimos la siguiente relación: $(U, f) \sim (V, g)$ si y solo si existe un abierto $W \subset U \cap V$ tal que $p \in W$ y $f|_W = g|_W$.

**Proposición 3.3** *La relación $\sim$ es de equivalencia.*

***Demostración:***
La *reflexividad* y *simetría* son directas de la definición.
*Transitividad*: Si $(U, f) \sim (V, g)$ y $(V, g) \sim (Z, h)$ por definición tenemos que existen $W_1 \subset U \cap V$ y $W_2 \subset V \cap Z$ tales que $f|_{W_1} = g|_{W_1}$ y $g|_{W_2} = h|_{W_2}$. Sea $W = W_1 \cap W_2$ , como $W \subset W_1$ y $W \subset W_2$ entonces $f|_W = g|_W$ y $g|_W = h|_W$. por lo que $f|_W = h|_W$ además $W = W_1 \cap W_2 \subset U \cap Z$ que por definición implica que $(U, f) \sim (Z, h)$ . Por lo tanto $\sim$ es relación de equivalencia.

$\rightmoon$

Además podemos dotar de una estructura algebraica (de grupos abelianos) al conjunto cociente $\Omega_p/_\sim$ con la siguiente operación:

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{V\cap V} + g|_{U\cap V})]$$

Esta operación está bien definida, para probarlo, sean : $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ y : $(V_1, f_1) \sim (V_2, g_2)$ , por definición eso quiere decir que, existen abiertos $W_f \subset U_1 \cap U_2$ y $W_g \subset V_1 \cap V_2$ tales que $f_1|_{W_f} = f_2|_{W_f}$ y $g_1|_{W_g} = g_2|_{W_g}$, tomando $W = W_f \cap W_g$ se tiene que W es subconjunto de $U_1, U_2, V_1$ y $V_2$ por lo que $W \subset U_1 \cap U_2$ y $W \subset V_1 \cap V_2$ lo que implica que $f_1|_W = f_2|_W$ y $g_1|_W = g_2|_W$ y así sumando las dos igualdades tenemos que $f_1|_W + g_1|_W = f_2|_W + g_2|_W$ por lo tanto $(W, f_1 + g_1) \sim (W, f_2 + g_2)$, esto demuestra que la operación esta bien definida y además, es asociativa y conmutativa.

El neutro es la clase $[(X, 0_\mathcal{F})] = [(U, 0_{\mathcal{F}(U)})]$ para cualquier abierto U de X y el inverso aditivo de la clase $[(U, f)]$ es la clase de $[(U, -f)]$. Esta construcción motiva la siguiente definición:

**Definición 3.4** *Dado X un espacio topológico, p un elemento de X y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X, definimos el grupo de gérmenes de la pregavilla $\mathcal{F}$ en el punto p como el conjunto cociente $\Omega_p/_\sim$ dotado con la estructura algebraica anterior.*

*Notación*: $\mathcal{F}_p \equiv \Omega_p/_\sim$ y se le llama el tallo de $\mathcal{F}$ en $p$ . Un elemento de $\mathcal{F}_p$ será de la forma $f_p \equiv [(U, f)]$ y se llamará el germen de la sección $f$ en el punto p. Además la aplicación de $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ dada por $f \longmapsto f_p$ resulta un homomorfismo de grupos.

De la misma forma, si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de anillos o módulos, los grupos de gérmenes adquieren la misma estructura de manera natural.

El siguiente teorema nos muestra cómo un hecho global se puede probar localmente:

**Teorema 3.5** *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, U un abierto de X y sean f y g elementos de $\mathcal{F}(U)$ tales que $f_p = g_p$ para todo p en U, entonces $f = g$.*

***Demostración:***
Si $U = \emptyset$ entonces $\mathcal{F}(U) = 0$ , luego $f = g = 0$ por lo que no hay nada que probar. Sea $U \neq \emptyset$, si $p \in U$ por hipótesis tenemos que $f_p = [(U, f)] = [(V, g)] = g_p$ que por definición implica que existe un abierto $W_p \subset U$ tal que $p \in W_p$ y $f|_{W_p} = g|_{W_p}$ , que por ser homomorfismos restricción se tiene que $f|_{W_p} - g|_{W_p} = (f - g)|_{W_p} = 0_{\mathcal{F}(W_p)}$ además $\{W_p\}_{p\in U}$ es una cubierta abierta de U, pero $\mathcal{F}$ es gavilla se tiene que $f - g = 0_\mathcal{F}$ .

$\rightmoon$

Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre un espacio topológico $X$ y $U$ es un subconjunto abierto de $X$, definimos la restricción de $\mathcal{F}$ a $U$, como la pregavilla $\mathcal{F}|_U$ que a cada abierto $V$ subconjunto de $U$ le asigna el grupo $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ y las restricciones entre abiertos son las mismas que las de $\mathcal{F}$ . Si $\mathcal{F}$ es una gavilla, su restricción a cualquier abierto también es gavilla.

La siguiente definición nos da la manera de relacionar dos pregavillas (gavillas) por medio de secciones locales y grupos de gérmenes.

**Definición 3.6** *Sea $X$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre $X$. Una subpregavilla de $\mathcal{F}$ es una pregavilla $\mathcal{G}$ en $X$ tal que para cualquier subconjunto abierto $U$ de $X$, se cumple que $\mathcal{G}(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y las restricciones de $\mathcal{G}$ son las restricciones de $\mathcal{F}$, es decir, $\rho_{\mathcal{G}V,U} = \rho_{\mathcal{F}V,U}$ tales que $V \subset U$.*
*Si $\mathcal{G}$ es gavilla diremos que es una subgavila de $\mathcal{F}$.*

*Observación:* Si $\mathcal{G}$ es una pregavilla de $\mathcal{F}$ y $p \in X$, tenemos un homomorfismo inyectivo natural $\mathcal{G}_p \to \mathcal{F}_p$ dado por $f_p \longmapsto g_p$ que nos permite identificar al grupo $\mathcal{G}_p$ con un subgrupo de $\mathcal{F}_p$.

Ahora que tenemos una noción general de gavillas, nos interesa la manera en que podamos compararlas. Por ello, en la siguiente sección daremos unas definiciones que nos permitan hacerlo.

## 3.3. Morfismos de gavillas

Como ya se mencionó, esta sección está enfocada en dar una relación entre gavillas sobre un espacio topológico, además de definir las gavillas núcleo, imagen e imagen directa, que junto con las sucesiones, que sirven para poder comparar gavillas.

**Definición 3.7** *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos pregavillas sobre un espacio topológico $X$. Un morfismo de pregavillas $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada abierto $U$ de $X$ le asigna un homomorfismo de grupos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ tal que si $V \subset U \subset X$ son abiertos, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}V,U}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}V,U}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Dado $\alpha$ un morfismo entre pregavillas y $p \in X$, $\alpha$ induce un homomorfismo $\alpha_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ entre los grupos de gérmenes, dado por $\alpha_p([(U, f)]) = [(U, \alpha_U(f))]$ , con $p \in U$. Primero probaremos que esta bien definido. Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que $[(U, f)] = [(U, g)] \in \mathcal{F}_p$. Por hipótesis existe $W \subset U$ tal que $p \in W$ y $f|_W = g|_W$ , que induce un diagrama conmutativo como el de la definición anterior, por lo que $\alpha_U(f)|_W = \alpha_W(f|_W) = \alpha_W(g|_W)$ y $\alpha_U(g)|_W = \alpha_W(g)|_W$ lo que implica que $\alpha_U([(U.f)]) = \alpha_U([(U, g)])$. Luego $\alpha_p$ esta bien definido.Para probar que es un homomorfismo de grupos abelianos, sean $[(U, f)], [(U, g)] \in \mathcal{F}_p$ entonces $\alpha_p([(U, f)] + [(U, g)]) = \alpha_U([(U, (f + g))]) = [(U, \alpha_U(f + g))]) = [(U, \alpha_U(f) + \alpha_U(g))] = [(U, \alpha_U(f))] + [(U, \alpha_U(g))] = \alpha_p([(U, f)]) + \alpha_p([(U, g)])$.

De esto se sigue que, si $U$ es un abierto de X y $p \in U$ , el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\alpha_p"] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd}$$

**Ejemplo 3.3** *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, y $\mathcal{G}$ una subgavilla de $\mathcal{F}$, de manera natural, podemos definir el morfismo $i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ que a cada abierto U de X le asigna $i_U : \mathcal{G}_U \to \mathcal{F}_U$ la inclusión natural de el subgrupo $\mathcal{G}(U)$ en el grupo $\mathcal{F}(U)$. Es claro que es un morfimo de grupos, al ser la inclusión y dados $V \subset U$ abiertos, el diagrama correspondiente a $\iota$ queda de la siguiente manera:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "i_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}V,U}"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}V,U}"] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r, "i_V"] & \mathcal{F}(V) \end{tikzcd}$$

*Que es claramente conmutativo.*

**Definición 3.8**
- *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X. Si $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ y $\beta : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ son morfismos, el morfismo composición $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ está dado por: $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U$ para cada abierto U de X.*
- *Un morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es isomorfismo, si existe un morfismo de gavillas $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, tal que, $\alpha \circ \beta = Id_{\mathcal{G}}$ y $\beta \circ \alpha = Id_{\mathcal{F}}$.*

La segunda parte de está definición, es equivalente a lo siguiente:

**Lema 3.9** *Dado $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas, los siguientes son equivalentes:*

1. *$\alpha$ es isomorfismo.*
2. *Para todo U abierto de X, todos los homomorfismos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ son isomorfismos.*

***Demostración***
1) $\Rightarrow$ 2)
Como $\alpha$ es isomorfismo,existe $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ morfismo, tal que, $\alpha \circ \beta = Id_{\mathcal{G}}$ y $\beta \circ \alpha = Id_{\mathcal{F}}$ . Sea $U \subset X$ abierto, como $\alpha$ y $\beta$ son morfismos de gavillas, entonces, $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ y $\beta : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$ son homomorfismos y por la definición de composición se tiene que $\alpha_U \circ \beta_U = (\alpha \circ \beta)_U = (Id_{\mathcal{G}})_U = Id_{\mathcal{G}(U)}$ y $\beta_U \circ \alpha_U = (\beta \circ \alpha)_U = (Id_{\mathcal{F}})_U = Id_{\mathcal{F}(U)}$ . Por lo tanto $\alpha_U$ es isomorfismo.
2) $\Rightarrow$ 1)
Sea $U \subset X$ abierto, como $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es isomorfismo, sea $\beta_U = (\alpha_U)^{-1}$ el homomorfismo inverso de $\alpha_U$, por la definición de composición tenemos que : $(\alpha \circ \beta)_U = \alpha_U \circ \beta_U = Id_{\mathcal{G}(U)}$ y $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U = Id_{\mathcal{F}(U)}$ . Por lo tanto $\alpha$ es un isomorfismo de gavillas.

☽

El siguiente teorema muestra la utilidad e importancia de los gérmenes.

**Teorema 3.10** *Sea $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X, $\alpha$ es isomorfismo si y sólo si para todo p elemento de X $\alpha_p$ es isomorfismo.*

***Demostración***

$\Rightarrow$

Sea $p \in X$ y $\alpha_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ el homomorfismo correspondiente a $p$. Probaremos que $\alpha_p$ es isomorfismo probando que es inyectiva y suprayectiva.

*Inyectividad:* Sea $f_p \in Ker(\alpha_p)$ supongamos que, $f_p = [(U, f)]$ con $U \subset X$ tal que $p \in U$ y $f \in \mathcal{F}(U)$ . Por hipótesis $[(U, \alpha_U(f)] = [(X, 0_{\mathcal{G}(U)})]$ es decir, existe $W \subset U$ abierto, tal que $p \in W$ y $\alpha_U(f)|_W = 0_{\mathcal{G}(W)}$ , como $\alpha$ es morfismo, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}W,U}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}W,U}"] \\
\mathcal{F}(W) \arrow[r, "\alpha_W"] & \mathcal{G}(W)
\end{tikzcd}$$

Entonces, $\alpha_W \circ \rho_{\mathcal{F}W,U}(f) = \rho_{\mathcal{G}W,U} \circ \alpha_U(f) = 0_{\mathcal{G}(W)}$ lo que implica que $f|_W \in Ker(\alpha_W) = 0_{\mathcal{F}(W)}$, pues por el lema anterior, $\alpha_W$ es isomorfismo, en particular es inyectivo. Por lo tanto $f_p = [(U, f)] = [(W, f|_W)] = [(W, 0_{\mathcal{F}(W)})] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$ que prueba la inyectividad de $\alpha_p$.

*Suprayectividad* Sea $g_p \in \mathcal{G}_p$ y supongamos que, $g_p = [(U, g)]$ con $U \subset X$ tal que $p \in U$ y $g \in \mathcal{G}(U)$, entonces existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\alpha_U(f) = g$ , ya que $\alpha_U$ es suprayectiva, pero $\alpha_U([(U, f)]) = [(U, \alpha_U(f))] = [(U, g)] = g_p$ y por tanto $\alpha_p$ es suprayectiva. Hemos probado que $\alpha_p$ es inyectiva y suprayectiva, lo que implica que $\alpha_p$ es isomorfismo.

$\Leftarrow$

Nuevamente por el lema anterior, basta probar que para todo $U \subset X$ abierto, los homomorfismos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ son isomorfimos. Sea $U \subset X$ un abierto y $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ el homomorfismo que le corresponde por $\alpha$. Probaremos que $\alpha_U$ es inyectivo y suprayectivo.

*Inyectividad.* Si $f \in Ker(\alpha_U)$ entonces $\alpha_U(f) = 0_{\mathcal{G}(u)}$, por lo que para todo $p \in U$,se tiene que, $[(U, \alpha_U(f))] = [(U, 0_{\mathcal{G}(U)})] = 0_{\mathcal{G}_p}$ , ya que $\mathcal{G}$ es gavilla. Así $\alpha_p(f_p) = [(U, \alpha_U(f))] = 0_{\mathcal{G}_p}$ pero $\alpha_p$ es inyectiva para todo $p \in U$, lo que implica que $f_p = 0_{\mathcal{F}_p}$ para todo $p \in U$, que por el teorema **3.5**, implica que $f = 0_{\mathcal{F}(U)}$, por lo tanto $\alpha_U$ es inyectiva.

*Suprayectividad.* Sea $g \in \mathcal{G}(U)$ y $p \in U$ entonces $g_p \in \mathcal{G}_p$, pero $\alpha_p$ es suprayectivo por hipótesis, por lo que existe $f_p \in \mathcal{F}_p$ tal que $\alpha(f_p) = g_p$, supongamos que $f_p = [(U_p, f(p))]$ con $U_p \subset X$ abierto tal que $p \in U_p$ y $f(p) \in \mathcal{F}(U_p)$ , de esta manera $\alpha_p([(U_p, f(p))]) = [(U_p, \alpha_{U_p}(f(p)))] = [(U, g)] = g_p$ , por lo que existe $W_p \subset U_p$ abierto tal que $p \in W_p$ y $(\alpha_{U_p}(f(p)))|_{W_p} = g|_{W_p}$ , es decir, $\alpha_{W_p}(f(p)|_{W_p}) = g|_{W_p}$. Lo que nos genera una familia de secciones $f(P)|_{W_p} \in \mathcal{F}(W_p)$, con $p \in U$ y una cubierta abierta $\{W_p\}_{p \in U}$. Además para todo $p, q \in U$ se cumple que $(f(p)|_{W_p})|_{W_p \cap W_q} = (f(q)|_{W_q})|_{W_p \cap W_q}$, ya que $(f(p)|_{W_p})|_{W_p \cap W_q} = f(p)|_{W_p \cap W_q}$ y $(f(q)|_{W_q})|_{W_p \cap W_q} = f(q)|_{W_p \cap W_q}$ aplicando a ambas igualdades $\alpha_{W_p \cap W_q}$ tenemos que $\alpha_{W_p \cap W_q}((f(p)|_{W_p})|_{W_p \cap W_q}) = \alpha_{W_p \cap W_q}(f(p)|_{W_p \cap W_q}) = g|_{W_p \cap W_q}$ y $\alpha_{W_p \cap W_q}((f(q)|_{W_q})|_{W_p \cap W_q}) = \alpha_{W_p \cap W_q}(f(q)|_{W_p \cap W_q}) = g|_{W_p \cap W_q}$, igualando tenemos que, $\alpha_{W_p \cap W_q}(f(p)|_{W_p \cap W_q}) = \alpha_{W_p \cap W_q}(f(q)|_{W_p \cap W_q})$, pero $W_p \cap W_q$ es abierto, y ya probamos que para cualquier abierto (en particular para $W_p \cap W_q$) $\alpha_{W_p \cap W_q}$ es inyectivo, lo que nos da la igualdad buscada.Pero como $\mathcal{F}$ es gavilla, usando el axioma 2 tenemos que existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{W_p} = f(p)|_{W_p}$para toda p. Por lo tanto tenemos que $\alpha_U(f)|_{W_p} = \alpha_{W_p}(f|_{W_p}) = \alpha_{W_p}(f(p)|_{W_p}) = g|_{W_p}$ para todo $p \in U$, entonces $(\alpha_U(f) - g)|_{W_p} = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$, es decir, $\alpha_U(f) = g$ lo que nos dice que $\alpha_U$ es suprayectiva y en consecuencia, un isomorfismo.

☽

**Definición 3.11** *Sea $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico $X$, diremos que $\alpha$ es inyectivo (respectivamente suprayectivo), si para todo $p \in X$ se cumple que $\alpha_p$ es inyectivo (respectivamente suprayectivo).*

Algo que debe notarse de la prueba anterior es que puede formularse un teorema similar cambiando isomorfismo por inyectividad, pero en el caso de la suprayectividad, el hecho de que $\alpha$ sea suprayectiva no implica la suprayectividad de $\alpha_U$ para cada abierto $U$.

**Ejemplo 3.4** *Para $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ consideramos las siguientes gavillas*

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{C}| \quad f \quad holomorfa\}$$

$$\mathcal{G}(U) = \{g : U \to \mathbb{C}^*| \quad g \quad holomorfa\}$$

*para cada $U \subset X$ abierto. A la gavilla $\mathcal{F}$ la pensamos con la estructura aditiva de $\mathbb{C}$ dada por la suma puntual y a la gavilla $\mathcal{G}$ la pensamos con la estructura multiplicativa de $\mathbb{C}^*$ dada por la multiplicación puntual, sea*

$$\exp : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

*dada por $\exp_U(f) = \exp(2\pi i f)$ para cualquier $U \subset X$ abierto y $f \in \mathcal{F}(U)$. Consideremos la función $g(z) = \frac{1}{z}$ dado que $0 \notin X$ $g$ es una función holomorfa e invertible (ella es su propia inversa) por lo cual $g \in \mathcal{G}(X)$, pero no existe una función holomorfa $f$ en $X$ (es decir $f \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\exp(2\pi i f) = g$ por lo cual la función exponencial no es un morfismo de gavillas suprayectivo en $X$. Sin embargo, para cualquier punto $p \in X$ existe una rama de logaritmo ($\ln(z)$) que contiene a $p$ y $f(z) = \frac{-1}{2\pi i}\ln(z)$ una función holomorfa en una vecindad de $p$ tal que $\exp(2\pi i f) = g$ , lo cual implica que para cualquier punto $p$ el morfismo exponencial es suprayectivo.*

De estas observaciones tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 3.12** *Un morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es inyectivo si y sólo si para cada abierto $U$ de $X$, el homomorfismo $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es inyectivo.*

***Demostración***
Ver la prueba del teorema (**3.10**) y la definición de inyectividad.

☽

**Proposición 3.13** *Si para todo abierto $U$ de $X$, se tiene que el homomorfismo $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es suprayectivo, entonces el morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es suprayectivo.*

***Demostración***
Ver la prueba del teorema (**3.10**) y la definición de suprayectividad.

☽

**Corolario 3.14** *$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces, $\alpha$ es isomorfismo si y sólo si es inyectivo y suprayectivo.*

**Definición 3.15** *Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $X$, una gavilla asociada a $\mathcal{F}$, es una gavilla $\mathcal{F}^+$ y un morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ que cumplen la siguiente propiedad universal; para cada gavilla $\mathcal{G}$ sobre $X$ y morfismo de pregavillas $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, entonces existe un único morfismo de gavillas $\tilde{\alpha} : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

**Proposición 3.16** *Dada una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $X$, entonces la gavilla asociada $\mathcal{F}^+$ existe y es única salvo isomorfismo. Además $\theta_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$ es un isomorfismo para todo $p$ en $X$.*

***Demostración***

Primero construyamos la gavilla $\mathcal{F}^+$. Dado $U$ subconjunto abierto de $X$, sea $\mathcal{F}^+(U)$ el conjunto de funciones $s : U \to \coprod_{p\in U} \mathcal{F}_p$ tales que:

1. Para toda $p$ en $U$, $s(p) \in \mathcal{F}_p$
2. Existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de $U$ y elementos $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tales que $s(p) = (S_\alpha)_p = [(U_\alpha, s_\alpha)]$ para todo $p \in U_\alpha$.

Con la suma puntual y las restricciones usuales, no es difícil ver que $\mathcal{F}^+$ es una pregavilla, por lo que sólo probaremos que es una gavilla. Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de $U$, veamos que se verifican los dos axiomas:

- **AX1** Es claro por la forma en que se construyó la gavilla.
- **AX2** Supongamos que $s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$, para $s_\alpha \in \mathcal{F}^+(U_\alpha)$ y $s_\beta \in \mathcal{F}^+(U_\beta)$. Si $\{V_{\alpha i}\}$ es una cubierta abierta para $U_\alpha$ con elementos $s_{\alpha i} \in \mathcal{F}(V_{\alpha i})$, entonces por la propiedad 2, tenemos que $s_\alpha(p) = (s_{\alpha i})_p$ para todo $p \in V_{\alpha i}$, de manera análoga, si $\{V_{\beta i}\}$ es una cubierta abierta para $U_\beta$ con elementos $s_{\beta i} \in \mathcal{F}(V_{\beta i})$ tales que $s_\beta(p) = (s_{\beta i})_p$ para todo $p \in V_{\beta i}$. Así, para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que:

  $$s_\alpha(p) = (s_{\alpha i})_p = (s_{\beta i})_p = s_\beta(p)$$

  Sea $(s_{\alpha i})_p = [(V_{\alpha i}, s_{\alpha i})]$ y $(s_{\beta i})_p = [(V_{\beta i}, s_{\beta i})]$, como $(s_{\alpha i})_p = (s_{\beta i})_p$, entonces, existe $V_{\alpha\beta}$ tal que $s_{\alpha i}|_{V_{\alpha\beta}} = s_{\beta i}|_{V_{\alpha\beta}}$ y como $U = \cup_\alpha U_\alpha = \cup_\alpha(\cup_i V_{\alpha i})$, esto implica que $s_{\alpha i} \in \mathcal{F}^+(U)$ y además:

  $$s_{\alpha i}|_{U_\alpha} = [(U_\alpha, s_{\alpha i})] = [(V_{\alpha\beta}, s_{\alpha i})] = [(U_\alpha, s_\alpha)] = s_\alpha$$

  y

  $$s_{\alpha i}|_{U_\beta} = [(U_\beta, s_{\alpha i})] = [(V_{\alpha\beta}, s_{\alpha i})] = [(V_{\alpha\beta}, s_{\beta i})] = [(U_\beta, s_\beta)] = s_\alpha$$

Así $\mathcal{F}^+$ es gavilla.

Dado $U$ subconjunto abierto de $X$ definimos el siguiente morfismo:

$$\theta_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}^+(U)$$

$$s \longmapsto \theta_U(s) : U \longrightarrow \textstyle\coprod_{p\in U} \mathcal{F}_p$$

$$p \longmapsto s_p$$

Queremos probar que $\theta_U$ es un homomorfismo de grupos, sean $s, t \in \mathcal{F}(U)$, entonces:

$$\theta_U(s+t)(p) = (s+t)_p = s_p + t_p = \theta_U(s)(P) + \theta_U(t)(p)$$

Además, es claro que dados $V \subset U$ abiertos, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}V,U}"] & \mathcal{F}^+(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}^+V,U}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\theta_V"] & \mathcal{F}^+(V) \end{tikzcd}$$

Por lo que $\theta$ es un morfismo de gavillas, sea $p \in U$ queremos probar que:

$$\theta_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$$

$$[(U,s)] \mapsto [(U, \theta_U(s))]$$

Es un isomorfismo. Sea $[(U,s)] \in \mathcal{F}_p$, tal que $\theta_U([(U,s)]) = [(U, \theta_u(s))] = [(X, 0_{\mathcal{F}^+})]$, entonces existe $W \subset U$ abierto tal que, $p \in W$ y $\theta_U(s)|_W = 0_{\mathcal{F}^+(W)}$, esto es $\theta_W(s|_W) = \theta_U(s)|_W = 0_{\mathcal{F}^+(W)}$. Por lo tanto, para todo $q \in W$ se tiene que $[(U,s)] = [(W, s|_W)] = [(W, 0_{\mathcal{F}(W)})] = 0_{\mathcal{F}_q}$, en particular para $q = p$, lo que implica que $[(U,s)] = 0_{\mathcal{F}_p} = [(X, 0_{\mathcal{F}^+(X)})]$. Así $\theta_U$ es inyectiva. Sea $s_p \in \mathcal{F}_p^+$, supongamos que $s_p = [(U,g)]$ con $p \in U \subset X$ abierto, tal que $g \in \mathcal{F}^+(U)$. La sección es de la forma $g : U \to \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p$, por lo que existe $V_p$ vecindad abierta de $p$ y $s_p \in \mathcal{F}(V_p)$ tal que, para todo $q \in V_p$ se tiene que $g(q) = (s_p)_q$. De la aplicación:

$$\theta_{V_p}(s_p) : V_p \to \coprod_{p \in V_p} \mathcal{F}_p$$

$$q \mapsto (s_p)_q \in \mathcal{F}_q$$

Obtenemos que $\theta_{V_p}(s_p)(q) = (s_p)_q = g(q)$, para todo $q \in V_p$, lo que implica que $\theta_{V_p}(s_p) = g|_{V_p}$. Luego $\beta = [(V_p, s_p)]$ es la preimagen de $[(U,g)]$, pues $\theta_p(\beta) = \theta_p([(V_p, s_p)]) = [(V_p, \theta_{V_p}(s_p))] = [(V_p, g|_{V_p})] = [(U,g)]$. Por lo tanto, $\theta_p$ es suprayectiva, y en consecuencia un isomorfismo.

Ahora, lo siguiente que debemos probar es que cumple la propiedad universal, sea $\mathcal{G}$ una gavilla sobre $X$ y un morfismo de pregavillas $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, para cada $U$ abierto definimos $\bar{\alpha} : \mathcal{F}^+(U) :\to \mathcal{G}(U)$ como sigue: dado $f \in \mathcal{F}^+(U)$ consideramos los pares $(V_p, s_p)$ con $p \in V_p \subset U$ y $s_p \in \mathcal{F}(V_p)$ que cumplen la definición de $\mathcal{F}^+(U)$ para $f$, de modo que los abiertos $V_p$ cubran a $U$, es decir, para todo $q \in V_p, (s_p)_q \in \mathcal{F}_q$ y $U = \cup_p V_p$. De esta manera tenemos una familia de secciones $\alpha_{V_p}(s_p) \in \mathcal{G}(V_p)$ y queremos probar que esta familia de secciones se extienden a una sección en $\mathcal{G}(U)$, para ello basta probar que para todo $p, q \in U$ se tiene que $\alpha_{V_p}(S_p)|_{V_p \cap V_q} = \alpha_{V_q}(S_q)|_{V_p \cap V_q}$. Si $V_p \cap V_q = \emptyset$ no hay nada que probar, por lo tanto sea $V_p \cap V_q \neq \emptyset$, para cada $z \in V_p \cap V_q$ se tiene que $[(V_p, s_p)] = (s_p)_z = (s_q)_z = [(V_q, s_q)]$, es decir, existe $U_z \subset V_p \cap V_q$ tal que $z \in U_z$ y $s_p|_{U_z} = s_q|_{U_z}$. Es claro que $V_p \cap V_q = \cup_{z \in V_p \cap V_q} U_z$.

Además se tiene que $\alpha_{U_z}((s_p|_{V_p \cap V_q})|_{U_z}) = \alpha_{U_z}(s_p|_{U_z}) = \alpha_{U_z}(s_q|_{U_z}) = \alpha_{U_z}((s_q|_{V_p \cap V_q})|_{U_z})$, y los diagramas inducidos por el morfismo $\alpha$ para las siguientes cadenas de abiertos; $U_z \subset V_p \cap V_q \subset V_p$ y $U_z \subset V_p \cap V_q \subset V_q$, implican que $(\alpha_{V_p}(s_p)|_{V_p \cap V_q})|_{U_z} = (\alpha_{V_q}(s_q)|_{V_p \cap V_q})|_{U_z}$. Luego como $\mathcal{G}$ es gavilla, $\alpha_{V_p}(s_p)|_{V_p \cap V_q} = \alpha_{V_q}(s_q)|_{V_p \cap V_q}$, lo que implica que existe una única $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ tal que, para toda $q \in U$ se tiene que $\gamma|_{V_q} = \alpha_{V_q}(s_q)$. Definimos $\bar{\alpha}_U(f) = \gamma$.

Este elemento cumple que $(\bar{\alpha}_U(f))_p = \alpha_p(f(p))$ lo cual se sigue del isomorfismo $\theta_p$. Luego, esta definición no depende de las secciones ni de la cubierta de $U$, es decir. esta bien definida, ya que $f = g \in \mathcal{F}^+(U)$,si $p \in U$ se tiene que $(\bar{\alpha}_U(f))_p = \alpha_p(f(p)) = \alpha_p(g(p)) = (\bar{\alpha}_U(g))_p$, así $\bar{\alpha}_U(f) = \bar{\alpha}_U(g)$.

Para ver que es un homomorfismo de grupos, sean $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$, si $p \in U$, entonces $(\bar{\alpha}(f+g))_p = \alpha_p((f+g)(p)) = \alpha_p(f(p) + g(p)) = \alpha_p(f(p)) + \alpha_p(g(p)) = (\bar{\alpha}_U(f) + \bar{\alpha}_u(g))_p$, por lo que $\bar{\alpha}(f+g) = \bar{\alpha}_U(f) + \bar{\alpha}_u(g)$.

Sean $V \subset U$ abiertos de $X$. Si $f \in \mathcal{F}^+(U)$ y $p \in V$ entonces $(\bar{\alpha}(f|_V)_p = \alpha_p((f|_V(p))) = \alpha_p(f(p)) = (\bar{\alpha}_U(f))_p = (\bar{\alpha}_U(f)|_V)_p$, luego $\bar{\alpha}_V(f|_V) = (\bar{\alpha}_U(f))|_V$ y por lo tanto el diagrama inducido por $\bar{\alpha}$ es conmutativo, lo que prueba que $\bar{\alpha}$ es un morfismo de gavillas.

Por último, si $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\bar{\alpha}_U(\theta_U(s)) = \alpha_U(s)$ ya que el elemento $\theta_U(s)$ podemos calcularlo a partir del par $[(U,s)]$, así $\alpha = \bar{\alpha} \circ \theta$. Ya que construimos $\theta$ y vimos que cumple la propiedad universal, probemos la unicidad. Supongamos que existe $(\mathcal{F}^*, \bar{\theta})$ con la misma propiedad, lo que nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\bar{\theta}"] & \mathcal{F}^+ \\ \mathcal{F}^* \arrow[ur, "\tilde{\Psi}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\theta = \Psi \circ \bar{\theta}$, de manera análoga, tenemos que existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\bar{\theta}"] \arrow[d, "\theta"] & \mathcal{F}^* \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\tilde{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir $\bar{\theta} = \Phi \circ \theta$, por lo que obtenemos que $\bar{\theta} = \Phi \circ \Psi \circ \bar{\theta}$ y que $\theta = \Psi \circ \Phi \circ \theta$ por lo que $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{F}^+}$ y $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathcal{F}^*}$ lo cual prueba que $\mathcal{F}^+ \simeq \mathcal{F}^*$.

$\rrbracket$

Sea $X$ un espacio topológico, $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X y $\mathcal{G}$ una subgavilla de $\mathcal{F}$. Entonces, podemos definir la pregavilla $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^-$ , de la siguiente manera; dado $U$ abierto de $X$ $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^-(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, tomando como restricciones los homomorfismos inducidos por las restricciones de $\mathcal{F}$. En general no se trata de una gavilla, pero como ya vimos podemos asociarle una gavilla, lo que motiva la siguiente definición.

**Definición 3.17** *La gavilla asociada a la pregavilla* $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^-$ *es llamada la gavilla cociente y se denota como* $\mathcal{F}/\mathcal{G} \equiv (\mathcal{F}/\mathcal{G})^{-+}$*.Esta gavilla cumple que para todo* $p \in X$ *se tiene que* $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_p \cong ((\mathcal{F}/\mathcal{G})^-)_p \cong \mathcal{F}_p/\mathcal{G}_p$.

Si $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico $X$, podemos definir $\ker \alpha$ como una subgavilla de $\mathcal{F}$ como sigue: dado $U \subset X$ abierto, $(\ker \alpha)(U) = \ker \alpha_U$, dado que $\alpha_U$ es un homomorfismo de grupos, podemos asegurar que $\ker \alpha_U$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$. Las restricciones están dadas por $\rho_{(\ker \alpha)V,U} = \rho_{\mathcal{F}V,U}|_{\ker \alpha_U}$. Así, para todos $V \subset U \subset X$ abiertos tenemos el homomorfismo $\rho_{(\ker \alpha)V,U} : \ker \alpha_U \to \ker \alpha_V$ y para cada $x \in \ker \alpha_U$ usando la conmutatividad del diagrama inducido por el morfismo $\alpha$ se tiene que $\alpha_V((\rho_{\mathcal{F}V,U})|_{\ker \alpha_U}(x)) = \alpha_V(\rho_{\mathcal{F}V,U}(x)) = \rho_{\mathcal{G}V,U}(\alpha_U(x)) = \rho_{\mathcal{G}V,U}(0_{\mathcal{G}(U)})$, lo que prueba que la restricción está bien definida. Para ver que es gavilla, consideremos $U \subset X$ un conjunto abierto y $\{U_i\}$ una cubierta abierta de $U$,que cumple el axioma uno es inmediato, ya que $\mathcal{F}$ es gavilla, y la sección cero es un elemento de $\ker \alpha(U)$ , además toda sección de $\ker \alpha(U)$ es una sección de $\mathcal{F}(U)$. Para ver que se cumple el axioma dos, suponemos que existen elementos $s_i \in \ker \alpha(U_i)$ que coinciden en las intersecciones, como $\mathcal{F}$ es gavilla, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que, $s|_{U_i} = s_i$ para toda $i$, como $\alpha$ es un morfismo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}U_i,U}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}U_i,U}"] \\ \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\alpha_{U_i}"] & \mathcal{G}(U_i) \end{tikzcd}$$

Si $s_i \in \ker \alpha(U_i)$ implica que $\alpha_{U_i}(s_i) = 0$ pero, del diagrama anterior, tenemos que $\alpha_{U_i}(s_i) = \alpha_{U_i} \circ \rho_{\mathcal{F}U_i,U}(s) = \rho_{\mathcal{G}U_i,U} \circ \alpha_U(s)$ lo que implica que $\rho_{\mathcal{G}U_i,U} \circ \alpha_U(s) = 0$. Como $\mathcal{G}$ es gavilla se tiene que $\alpha_U(s) = 0$, lo que implica que $s \in \ker \alpha(U)$. Por lo tanto $\ker \alpha$ es gavilla.

De la misma manera podemos definir una subpregavilla $(Im\alpha)^-$ de $\mathcal{G}$, dada por $(Im\alpha)^-(U) = Im\alpha_U$ y restricciones $\rho_{(Im\alpha)V,U} = \rho_{\mathcal{G}V,U}$, para cada $V \subset U$ abiertos de X. En general no es una gavilla, por lo que definimos $Im\alpha = (Im\alpha)^{-+}$.

**Ejemplo 3.5** *Para* $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *consideramos las siguientes gavillas*

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to \mathbb{C}| \quad f \quad holomorfa\}$$

$$\mathcal{G}(U) = \{g : U \to \mathbb{C}^*| \quad g \quad holomorfa\}$$

*para cada* $U \subset X$ *abierto. A la gavilla* $\mathcal{F}$ *la pensamos con la estructura aditiva de* $\mathbb{C}$ *dada por la suma puntual y a la gavilla* $\mathcal{G}$ *la pensamos con la estructura multiplicativa de* $\mathbb{C}^*$ *dada por la multiplicación puntual, sea*

$$\exp : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

*el morfismo exponencial como en el ejemplo (**3.4**). Para cada* $p \in X$ *consideramos* $U_p$ *el interior de alguna rama de logaritmo que contenga a* $p$ *y definimos* $g_p : U_p \to \mathcal{C}$ *como* $g_p(z) = \frac{1}{z}$*, como vimos* $g_p \in Im \exp(U_p)$*, además es claro que* $g_p|_{U_p \cap U_q} = g_q|_{U_p \cap U_q}$ *para cualquier* $p, q \in X$ *y que* $\{U_p\}_{p \in X}$ *es una cubierta abierta de* $X$*, si consideramos* $g \in \mathcal{G}(X)$ *la sección definida por* $g(z) = \frac{1}{z}$ *tenemos que* $g|_{U_p} = g_p$ *para toda* $p \in X$ *y como* $\mathcal{G}$ *es gavilla, se tiene que esta sección es única, pero* $g \notin Im \exp(X)$ *lo cual implica que* $Im \exp$ *no es gavilla.*

Observemos que la inclusión $i : (Im\alpha)^- \to \mathcal{G}$ se extiende usando la propiedad universal de la gavilla asociada a un morfismo $i^+ : Im\alpha \to \mathcal{G}$ de tal manera que $i = i^+ \circ j$ , con $j : (Im\alpha)^- \to Im\alpha$. Además tenemos que dado $p \in X$ se tiene que $i_p = i_p^+ \circ j_p$ por lo que $i_p^+$ es inyectivo, así $i_U^+ : Im\alpha_U \to \mathcal{G}$ es inyectivo para cualquier abierto $U$. Esto nos permite considerar a $Im\alpha$ como una subgavilla de $\mathcal{G}$.

**Definición 3.18** *Llamaremos coimagen y conúcleo de un morfismo* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *a las gavillas cociente de* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$

$$coim\alpha \equiv \mathcal{F}/\ker\alpha \quad y \quad coker\alpha \equiv \mathcal{G}/Im\alpha$$

*respectivamente.*

*Observación* No es muy difícil probar que $(\ker\alpha)_p = \ker\alpha_p$ y $(Im\alpha)_p = Im\alpha_p$. Así $\alpha$ es inyectivo si y sólo si $\ker\alpha = \{0\}$, y es suprayectivo si y sólo si $Coker\alpha = \{0\}$.

**Definición 3.19** *Se dice que una sucesión de gavillas* $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ *es exacta en* $\mathcal{G}$*, si* $\ker\beta = Im\alpha$.

**Proposición 3.20** *Una sucesión de gavillas* $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ *es exacta en* $\mathcal{G}$ *, si y sólo si* $\mathcal{F}_p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}_p$ *es una sucesión exacta de grupos en* $\mathcal{G}_p$ *para todo* $p \in X$.

***Demostración***
Es inmediato por el teorema (**3.10**) y la observación anterior.

☽

## 3.4. Imagen directa de una gavila

Las definiciones anteriores están basadas en gavillas sobre un mismo espacio topológico $X$. Por lo que ahora daremos una manera de transportar gavillas de un espacio topológico a otro a través de funciones continuas, por medio de la siguiente definición.

**Definición 3.21** *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua entre espacios topológicos y* $\mathcal{F}$ *una gavilla sobre* $X$*. La gavilla imagen directa de* $\mathcal{F}$ *por* $f$*, denotado por* $f_*(\mathcal{F})$ *es una gavilla sobre* $Y$ *determinada de la siguiente forma:* $f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^-1(U))$ *para cada abierto* $U$ *de* $Y$*, y las restricciones dadas por* $\rho_{f_*(\mathcal{F})V,U} = \rho_{\mathcal{F}f^{-1}(V),f^{-1}(U)}$ *para cada* $V \subset U \subset Y$ *abiertos.*

Está bien definida, ya que el hecho de pedir que $f$ sea continua nos asegura que $f^{-1}(U)$ es un abierto de $X$ para cualquier abierto $U$ de $Y$, por lo que solo tenemos que probar que $f_*(\mathcal{F})$ es gavilla.

- Probar que $f_*(\mathcal{F})$ es pregavilla es fácil, usando el hecho de que $\mathcal{F}$ es gavilla.

    1. $f_*(\mathcal{F})(\emptyset) = \mathcal{F}(f^{-1}(\emptyset)) = \mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$
    2. $\rho_{f_*(\mathcal{F})U,U} = \rho_{\mathcal{F}f^{-1}(U),f_{-1}(U)}$ es la identidad en $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*(\mathcal{F})(U)$ con $U \subset Y$ abierto.
    3. Para $W \subset V \subset U$ abiertos en $Y$ tenemos que $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ son conjuntos abiertos de $X$. Como $\rho_{f_*(\mathcal{F})W,U} = \rho_{\mathcal{F}f^{-1}(W),f_{-1}(U)}$ y $\rho_{f_*(\mathcal{F})W,V} \circ \rho_{f_*(\mathcal{F})V,U} = \rho_{\mathcal{F}f^{-1}(W),f_{-1}(V)}\rho_{\mathcal{F}f^{-1}(V),f_{-1}(U)}$, entonces $\rho_{f_*(\mathcal{F})W,U} = \rho_{f_*(\mathcal{F})W,V} \circ \rho_{f_*(\mathcal{F})V,U}$.

- Para ver que $f_*(\mathcal{F})$ es gavilla. Sea $U \subset Y$ abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de $U$

    1. **AX1** Sea $s \in f_*(\mathcal{F})(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0_{f_*(\mathcal{F})(U)}$ para todo $i$, esta ultima implica que $\rho_{f_*(\mathcal{F})U_i,U}(s) = \rho_{\mathcal{F}f^{-1}(U_i),f^{-1}(U)}(s) = 0_{f_*(\mathcal{F})(U_i)} = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(U_i))}$ Luego como $U = \cup_{i\in I} U_i$, esto implica que $f^{-1}(U) = \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ en $X$, entonces $s = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(U))} = 0_{f_*(\mathcal{F})(U)}$
    2. **AX2** Sea $s_i \in f_*(\mathcal{F})(U_i)$ una familia de secciones tales que para todo $i, j$ en $I$ $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Nuevamente tenemos que $f^{-1}(U) = \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ y $s_i \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ para cada $i$, luego si $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ implica que $s_i|_{f^{-1}(U_i)\cap f^{-1}(U_j)} = s_j|_{f^{-1}(U_i)\cap f^{-1}(U_j)}$ para todo $i, j$ en $I$, por lo que existe $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*(\mathcal{F})(U)$ tal que para todo $i \in I$ $s|_{U_i} = s|_{f^{-1}(U_i)} = s_i$. Así $f_*(\mathcal{F})$ es una gavilla sobre $Y$.

Capítulo 4

# Gavillas de anillos

## 4.1. Espacios anillados

En este trabajo nos interesan en particular las gavillas de anillos que, como ya se mencionó anteriormente son gavillas sobre un espacio topológico donde cada grupo $\mathcal{F}(U)$ tiene estructura de anillo conmutativo con uno y las restricciones son homomorfismos de anillos.

**Definición 4.1** *Un espacio anillado $(X,\ \mathcal{O}_X)$ es un espacio topológico $X$ equipado con una gavilla de anillos. Esta gavilla es llamada la gavilla estructural de $X$ y usualmente se denota por $\mathcal{O}_X$.*

Dado cualquier espacio topológico $X$, sea $\mathcal{O}_X$ la gavilla de funciones $\mathbb{K}$-valuadas donde $\mathbb{K}$ es un campo, como vimos le podemos dar estructura de grupo abeliano con la suma puntual, pero ademas podemos darle estructura de anillo con el producto puntual, así $(X\ ,\mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado y por ahora (a menos que se indique lo contrario) pensaremos en $\mathcal{O}_X$ como esta gavilla y para simplificar notación dado un abierto $U$ de $X$ escribiremos $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ en lugar de $\mathcal{O}_X(U)$. Con está aclaración podemos dar la siguiente definición que solo tiene sentido si consideramos una gavilla cuyas secciones son funciones.

**Definición 4.2** *Sean $(X,\ \mathcal{O}_X)$ y $(Y,\ \mathcal{O}_Y)$ dos espacios anillados, un morfismo de espacios anillados está dado por una función continua $\phi : X \to Y$ con la propiedad de que para cualquier $U$ abierto de $Y$, y cualquier sección $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ se tiene que $g \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$.*

Dado $\phi$ un morfismo de anillos, para cualquier abierto $U$ de $Y$ podemos definir un homomorfimo de anillos dado por:

$$\phi_U^* : \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

$$g \longmapsto g \circ \phi$$

Este homomorfismo satisface que $\rho_{\phi^{-1}(V),\phi^{-1}(U)} \circ \phi_U^* = \phi_V^* \circ \rho_{v,u}$, es decir, $\phi_U^*$ es compatible con las restricciones.

## 4.2. Gavillas de módulos

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. En esta sección hablaremos de gavillas de $\mathcal{O}_X$ módulos.

**Definición 4.3** *Un $\mathcal{O}_X$-módulo es una gavilla $\mathcal{F}$ tal que, para cualquier abierto $U$ de $X$, $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo y las restricciones son funciones lineales.*

**Ejemplo 4.1** *La suma directa de n copias de la gavilla $\mathcal{O}_X$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

**Definición 4.4** *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos el producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ como la gavilla asociada a la pregavilla que a cada abierto $U$ de $X$ le asocia $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ que de nuevo es un $\mathcal{O}_X$-módulo.*

**Definición 4.5** *Una sucesión de $\mathcal{O}_x$-módulos*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \xrightarrow{\eta} \mathcal{H}$$

*es exacta, si es exacta como sucesión de gavillas.*

## 4.3. Gavilla estructural de un conjunto algebraico

Para poder asociarle una gavilla estructural adecuada a un conjunto algebraico, necesitamos el siguiente teorema, que lo que nos permite definir una gavilla en una base de la topología del espacio y extenderlo a cualquier abierto de X.

**Teorema 4.6** *Sea $X$ un espacio topológico, $\mathfrak{U}$ una base para la topología de $X$ y $\mathbb{K}$ un campo. Suponemos que para cualquier conjunto abierto $U \in \mathfrak{U}$ , el conjunto $\mathcal{F}(U)$ de funciones de $U$ en $\mathbb{K}$ satisface las siguientes condiciones:*

1. *(Restricción) Si $U, V \in \mathfrak{U}$ , $V \subset U$ y $s \in \mathcal{F}(U)$ entonces $s|_V \in \mathcal{F}(V)$.*
2. *(Pegado) Si un conjunto abierto $U \in \mathfrak{U}$ es cubierto por $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{U}$ y si $s$ es una función de $U$ en $\mathbb{K}$ tal que para todo $i \in I$ $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ entonces $s \in \mathcal{F}(U)$.*

*Entonces existe una única gavilla $\overline{\mathcal{F}}$ de funciones en $X$ tal que, para cualquier abierto $U \in \mathfrak{U}$ se tiene que $\mathcal{F}(U) = \overline{\mathcal{F}}(U)$.*

***Demostración:***
Sea $U$ abierto de $X$, entonces $U$ es unión de elementos de $\mathfrak{U}$ (por ser base), es decir $U = \cup_{i\in I} U_i$ con $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{U}$ , definimos:

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s :\to \mathbb{K}| \quad s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i) \quad para \quad toda \quad i \in I\}$$

1. Primero hay que probar que $\overline{\mathcal{F}}(U)$ esta bien definido, es decir, que no depende de la cubierta. Sean $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{U}$ y $\{W_j\}_{j\in J} \subset \mathfrak{U}$ dos cubiertas de $U$ y sean $\overline{\mathcal{F}}_I(U) = \{s :\to \mathbb{K}|s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ para toda $i \in I\}$ y $\overline{\mathcal{F}}_J(U) = \{s :\to \mathbb{K}|s|_{W_i} \in \mathcal{F}(W_j)$ para toda $j \in J\}$, queremos probar que $\overline{\mathcal{F}}_J(U) = \overline{\mathcal{F}}_I(U)$ . Sea $s \in \overline{\mathcal{F}}_J(U)$, por definición implica que $s|_{W_j} \in \mathcal{F}(W_j)$ para toda $j \in J$, Sea $V_{j,i} = W_j \cap U_i$ es un elemento de $\mathfrak{U}$ , como $V_{j,i} \subset W_j$ la condición 1 de el lema, implica que $s|_{V_{j,i}} \in \mathcal{F}(V_{j,i})$ para toda $j \in J$ y $\forall i \in I$ además para cada $i$, $U_i$ está cubierta por $\{V_{j,i}\}_{j\in J}$ y $(s|_{U_i})|_{V_{j,i}} = s|_{V_{j,i}} \in \mathcal{F}(V_{j,i})$ para toda $j \in J$ y por la condición 2 esto implica que $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ esto es para cada $i$ , nuevamente por la condición 2 implica que $s \in \mathcal{F}(U)$ que por la definición de $\overline{\mathcal{F}}$ implica que $s \in \overline{\mathcal{F}}_I(U)$. La otra contención es análoga, por lo tanto tenemos que $\overline{\mathcal{F}}_J(U) = \overline{\mathcal{F}}_I(U)$ , lo que significa que la definición no depende de la cubierta elegida.

2. Ahora probaremos que para cualquier abierto $U \in \mathfrak{U}$ se tiene que $\mathcal{F}(U) = \overline{\mathcal{F}}(U)$. Como ya probamos que no depende de la cubierta que se tome, sea $\{U\} \subset \mathfrak{U}$ es una cubierta abierta de $U$ lo que implica que $\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \to \mathbb{K}| \quad s|_U = s \in \mathcal{F}(U)\} = \mathcal{F}(U)$.

3. Que $\overline{\mathcal{F}}$ es una pregavila es claro, por lo que solo nos falta probar que es gavilla, para esto, sea $U$ un conjunto abierto de $X$ y $\{V_j\}_{j\in J}$ una cubierta abierta de $U$.

- **AX1** Si $s \in \overline{\mathcal{F}(U)}$ no es la sección 0, implica que existe $x \in U$ tal que $s(x) = m \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ , como $x \in U$ existe $j_x \in J$ tal que $x \in V_{j_x}$ por lo que $s|_{V_{j_x}} \not\equiv 0$ y por lo tanto se cumple **AX1**.
- **AX2** Consideremos una familia de $s_j \in \overline{\mathcal{F}}(V_j)$ tales que para toda $j_1, j_2 \in J$ se tiene que $s_{j_1}|_{V_{j_1} \cap V_{j_2}} = s_{j_2}|_{V_{j_1} \cap V_{j_2}}$. Definimos a $s : U \to \mathbb{K}$ de la manera natural, es decir, para cada $x \in U$ sea $j_x \in J$ tal que $x \in V_{j_x}$ entonces $s(x) = s_{j_x}(x)$ es una función bien definida de $U$ en $\mathbb{K}$ ya que $\{V_j\}_{j \in J}$ es una cubierta de $U$ y las secciones coinciden en las intersecciones. Por lo que solo necesitamos probar que $s \in \overline{\mathcal{F}}(U)$. Observemos que para toda $j \in J$, $V_j$ es un abierto, por lo que existen $\{U_{i_j}\}_{i_j \in I_j} \subset \mathfrak{U}$ tales que $V_j = \cup_{i_j \in I_j} U_{i_j}$ (porque $\mathfrak{U}$ es base) por lo que $s_j \in \overline{\mathcal{F}}(V_j)$ implica (por la definición de $\overline{\mathcal{F}}$) que $s_j|_{U_{j,i}} \in \mathcal{F}(U_{j,i})$ para toda $i \in I_j$, además como $\{V_j\}_{j \in J}$ es una cubierta de $U$ eso implica que $\cup_{j \in J}\{U_{i_j},\}_{i_j \in I_j} = \cup_{k \in K} U_k \subset \mathfrak{U}$ con $K = \cup_{j \in J} I_j$ es una cubierta de $U$, así $s|_{U_k} \in \mathcal{F}(U_k)$ para toda $k \in K$ que por definición de $\overline{\mathcal{F}}$ implica que $s \in \overline{\mathcal{F}}(U)$.

Por lo tanto $\overline{\mathcal{F}}$ es gavilla.

4. Por último, probaremos la unicidad de $\overline{\mathcal{F}}$. Sea $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ una gavilla, tal que $\overline{\overline{\mathcal{F}}}(U) = \mathcal{F}(U)$ para cualquier $U \in \mathfrak{U}$. Sea $V \subset X$ abierto, definimos:

$$\phi_V : \overline{\overline{\mathcal{F}}} \to \overline{\mathcal{F}}$$

$$s \mapsto s$$

Está bien definido, ya que por hipótesis, tenemos que $\overline{\overline{\mathcal{F}}}(U) = \mathcal{F}(U) = \overline{\mathcal{F}}(U)$ para cualquier $U \in \mathfrak{U}$ así, dada una cubierta de $V$ , $\{U_\alpha\}$, como $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ es gavilla, se tiene que $s|_{U_\alpha} \in \overline{\overline{\mathcal{F}}}(U_\alpha) = \overline{\mathcal{F}}(U_\alpha)$, para toda $\alpha$, lo que implica, por la definición de $\overline{\mathcal{F}}$, que $s \in \overline{\mathcal{F}}(V)$. Es claro que es inyectiva para cualquier abierto, pero además es suprayectiva, ya que dada $t \in \overline{\mathcal{F}}(V)$, sean $t_\alpha = t|_{U_\alpha} \in \overline{\mathcal{F}}(U_\alpha) = \overline{\overline{\mathcal{F}}}(U_\alpha)$, por como definimos estas funciones, coinciden en las intersecciones, dado que $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ es gavilla, se tiene que existe $s \in \overline{\overline{\mathcal{F}}}(V)$ tal que $s|_{U_\alpha} = t_\alpha$, por lo que $s = t$, lo que implica que $\phi_V$ es suprayectivo, para cualquier abierto $V$, lo cual implica que es isomorfiso, así $\phi$ es un isomorfismo, lo cual implica que $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \simeq \overline{\mathcal{F}}$ lo cual nos da la unicidad.

☽

**Lema 4.7** *Sea $X$ un espacio topológico y sea $\mathfrak{U}$ una base para la topología de $X$, sean $\mathcal{F}$ una gavilla y $\mathcal{G}$ una pregavilla en $X$. Si $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$ para cualquier $U \in \mathfrak{U}$ entonces $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}^+$*

La prueba de este lema es similar a la prueba de la unicidad del teorema anterior

☽

Sea $V \subset \mathbb{K}^n$ un conjunto algebraico afín, para cada abierto básico $D(f)$ podemos considerar $\mathcal{F}(D(f), \mathbb{K})$ el anillo de funciones $\mathbb{K}$-valuadas, y el homomorfimo de anillos dado por la restricción usual, $\rho : \Gamma(V) \to \mathcal{F}(D(f), \mathbb{K})$ , dado que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in D(f)$, esto implica que $\rho(f)$ es invertible en $\Gamma(D(f), \mathbb{K})$ así, por la propiedad universal de la localización existe $r : \Gamma(V)_f \to \mathcal{F}(D(f), \mathbb{K})$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "s"] & \mathcal{F}(D(f), \mathbb{K}) \\
\Gamma(V)_f \arrow[ur, dashed, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Además $r$ es inyectiva, ya que si $r(g/f^n) = 0$ entonces $g(x) = 0$ para toda $x \in D(f)$, por lo que $fg = 0$ en $V$ lo que implica que $g/f^n$ es cero en $\Gamma(V)_f$.

**Definición 4.8** *Sea $V$ un conjunto algebraico afín y sea $f \in \Gamma(V)$ un elemento no cero. Definimos:*

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$$

*(identificado con un subanillo del anillo de funciones $\mathbb{K}$-valuadas en D(f) por medio de r).*

Sea $\mathfrak{U} = \{D(f) | \quad f \in \Gamma(V) \quad y \quad f \not\equiv 0\}$, es una cubierta base con la topología de Zariski de V. Ahora veremos que la definición anterior cumple las hipótesis del teorema (**4.6**)

1. *(Restricción)* Sean $D(f), D(g) \in \mathfrak{U}$ tales que $D(f) \subset D(g)$ eso implica que $V(g) \subset V(f)$, por lo que $f$ se anula en $V(g)$, por el teorema de los ceros de Hilbert se tiene que $f^m = gh$. Dada $u/g^k \in \Gamma(V)_g$, restringiendo a $D(f)$ podemos escribir $\frac{u}{g^k} = \frac{u(h^k)}{g^k h^k} = \frac{u(h^k)}{(gh)^k} = \frac{u(h^k)}{f^{k+m}} \in \Gamma(V)_f$.

2. *(Pegado)* Dado que $D(f)$ puede cubrirse con abiertos básicos $D(f_i)$, donde $f_i \neq 0$, que nos dice que $V(f)$ es la intersección de los conjuntos $V(f_i)$, que por las propiedades de estos conjuntos, implica que $V(f) = V(I)$ con $I \subset \Gamma(V)$, el ideal generado por los $f_i$, pero como $\Gamma(V)$ es un anillo noetheriano, podemos suponer que $I$ está generado por un número finito de elementos, es decir $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.

   Sea $s_i$ una sección de $D(f_i)$, entonces podemos escribir $s_i = a_i/f_i^n$ (podemos suponer que es la misma $n$ para todos los $f_i$ ya que solo hay un número finito de estos elementos y si $s_i = a_i/f_i^{n_i} = f_i^{n-n_i}$ con $n = máx\{n_i\}$). Supongamos que estas secciones coinciden en las intersecciones, lo que implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^N f_j^N (a_i f_j^n - a_j f_i^n) = 0$ así $f_j^{N+n} a_i f_i^N = f_i^{N+n} a_j f_j^N$ (esta relación se extiende a $V$ por ser un abierto denso)

   Sea $f$ un polinomio que se anula en $V(f) = V(f_1, \ldots, f_r) = V(f_1^{n+N}, \ldots, f_r^{n+N})$, el teorema de los ceros de Hilbert nos dice que $f \in \sqrt{\langle f_1^{n+N}, \ldots, f_r^{n+N} \rangle}$, en otras palabras, que existe $m \in \mathbb{N}$ y elementos $b_j \in \Gamma(V)$ tales que $f^m = \Sigma_{i=1}^r b_i f_i^{n+N}$.

   Buscamos una sección $s$ en $D(f)$ de la forma $a/f^m$ tal que $s|_{D(f_i)} = s_i$ en $D(f_i)$ lo que implica que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^M (a f_i^n - a_i f^m) = 0$ multiplicando ambos lados por $f_i^N$ tenemos que $f_i^{M+N}(a f_i^n - a_i f^m) = 0$ así

   $$f_i^{M+N+n} a = f_i^{M+N} a f_i^n = f_i^{M+N} a_i f^m = f_i^{M+N} a_i (\Sigma_{j=1}^r b_j f_j^{n+N})$$

   $$= f_i^M \Sigma_{j=1}^r b_j f_i^N a_i f_j^{n+N} = f_i^M \Sigma_{j=1}^r b_j f_i^{N+n} a_j f_j^N = f_i^{M+N+n} \Sigma_{j=1}^r b_j a_j f_j^N$$

   Si definimos $a = \Sigma_{j=1}^r b_j a_j f_j^N$ es claro que la sección $s$ cumple lo que queríamos.

$\supset$

*Observación* En el caso especial de que $\Gamma(V)$ es dominio entero (cuando $V$ es irreducible) el anillo $\Gamma(V)_f$ es un subanillo del campo de fracciones de $\Gamma(V)$ y el homomorfismo natural

$$j : \Gamma(V) \to \Gamma(V)_f$$

$$f \mapsto f/f^0$$

es inyectivo.

## 4.4. Variedades afines

**Definición 4.9** *Una variedad algebraica afín, es un espacio anillado que es isomorfo (como espacio anillado) a* $(V, \mathcal{O}_V)$*, con* $V$ *un conjunto algebraico afín y* $\mathcal{O}_V$ *la gavilla estructural de funciones regulares en* $V$*. Los morfismos, son simplemente morfismos de espacios anillados.*

**Proposición 4.10** *Sea* $V$ *un conjunto algebraico afín y consideramos a* $f \in \Gamma(V)$*. El conjunto abierto* $D(f) = \{x \in V | f(x) \neq 0\}$ *equipado con la restricción de la gavilla* $\mathcal{O}_V$ *a* $D(f)$*, es una variedad algebraica afín.*

***Demostración:***
Supongamos que el conjunto $V$ está encajado en $\mathbb{K}^n$, sea $I = I(V)$ y sea $F$ un polinomio tal que la restricción a $V$ es $f$. Queremos probar que $D(f)$ es isomorfo a un conjunto algebraico afín, para ello consideremos el siguiente morfismo:

$$\phi : D(f) \to \mathbb{K}^{n+1}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 1/f((x_1, \ldots, x_n)))$$

Sea $W = \phi(D(f))$, por la forma en la que se definió el morfismo, se puede ver que $W = V(J)$ con $J = I + \langle x_{n+1}F - 1\rangle$. Este morfimo es claramente inyectivo por lo que si lo restringimos a su imagen es un homeomorfismo, con inversa:

$$\pi : W \to D(f)$$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

☽

**Ejemplo 4.2** *El conjunto de matrices invertibles con coeficientes en los complejos* $(GL(n, \mathbb{C}))$ *es una variedad algebraica afín, para probarlo veamos a* $GL(n, \mathbb{C})$ *como un subconjunto de* $\mathbb{C}^{n^2}$ *y consideremos a* $f$ *la función determinante de las matrices de* $n \times n$ *que es una función polinomial, es decir,* $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n^2}]$*, ahora definimos el morfismo*

$$\psi : GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{n^2+1}$$

$$(x_1, \ldots, x_{n^2}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n^2}, \frac{1}{f((x_1, \ldots, x_{n^2}))})$$

*este morfismo es inyectivo por lo que restringido a la imagen un isomorfismo, además se tiene que* $\psi(GL(n, \mathbb{C})) = V(ft - 1) = V$ *por lo cual se tiene que:*

$$\Gamma(V) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n^2}, t] \backslash \langle ft - 1\rangle = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n^2}][t] \backslash \langle ft - 1\rangle \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n^2}]_f = \Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n^2}]})$$

*el isomorfismo es por el lema de Rabinowitsch, y por proposición (**4.10**) implica que* $GL(n, \mathbb{C})$ *es una variedad algebraica afín.*

## 4.5. Variedades algebraicas

El principal uso de los espacios anillados, es que nos permiten definir objetos que son localmente isomorfos a algún tipo particular de espacios. Por ejemplo, una variedad diferenciable, es un espacio anillado localmente isomorfo a un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con la gavilla de funciones diferenciables. En el caso de la geometría algebraica, los modelos locales son las variedades algebraicas afines.

**Definición 4.11** *Una variedad algebraica es un espacio anillado cuasi-compacto* $(X, \mathcal{O}_X)$*, que es localmente isomorfo a una variedad algebraica afín. Los morfismos de variedades algebraicas son los morfismos de espacios anillados.*

Decir que $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente isomorfo a una variedad algebraica afín, significa que para toda $x \in X$ existe un conjunto abierto $U$ que contiene a $x$, tal que, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es isomorfo a una variedad algebraica afín.

Como ya vimos, un conjunto algebraico afín es un espacio topológico noetheriano, por lo que como espacio topológico es cuasi-compacto, lo que significa que en particular una variedad algebraica afín es una variedad algebraica.

**Definición 4.12** *Sea* $(X, \mathcal{O}_X)$ *una variedad algebraica. Un conjunto abierto de* $X$ *que es isomorfo a una variedad algebraica afín es llamado un conjunto abierto afín de* $X$

**Proposición 4.13** *Sea* $(X, \mathcal{O}_X)$ *una variedad algebraica. El conjunto de todos los abiertos afines de* $X$ *forman una base para la topología de* $X$*. Más precisamente, cualquier subconjunto abierto de* $X$ *es la unión finita de abiertos afines de* $X$

***Demostración:***
Como $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad algebraica, tenemos que para toda $x \in X$ existe $U_x$ un subonjunto abierto afín de $X$ tal que $x \in U_x$, por lo que $X = \cup_{x \in X} U_x$, pero como $X$ es cuasi-compacto, tenemos que $X = \cup_{i=1}^{r} U_i$, donde los $U_i$ son abiertos afines de $X$. Sea $U \subset X$ abierto, tenemos entonces que $U = \cup_{i=1}^{r} (U \cap U_i)$, pero como $U \cap U_i \subset U_i$, que es un conjunto algebraico afín. En el capítulo uno, probamos que estos conjuntos son la unión finita de abiertos basicos, que por la proposición anterior es una variedad algebraica afín, por lo tanto, $U$ es la unión finita de conjuntos afines.

$\mathbb{D}$

*Observaciones:*

1. los polinomios son funciones continuas con la topología de Zariski para ver esto, sean $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y $V \subset \mathbb{K}$ un conjunto cerrado, si $V = \mathbb{K}$ entonces $f^{-1}(V) = \mathbb{A}^n$ que es un conjunto cerrado, por lo cual supondremos que $V$ es un subconjunto propio de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ que como vimos en el ejemplo (**1.2**) es un conjunto finito, es decir, $V = \{a_1, \ldots, a_m\}$ con $a_i \in \mathbb{K}$ para toda $i$.

$$f^{-1}(\{a_i\}) = \{\bar{x} \in \mathbb{A}^n | f(\bar{x}) = a_i\} = \{\bar{x} \in \mathbb{A}^n | f(\bar{x}) - a_i = 0\} = V(f - a_i)$$

   que es un conjunto cerrado para toda $i$, además se tiene que $f^{-1}(V) = f^{-1}(\cup_{i=1}^{m} \{a_i\}) = \cup_{i=1}^{m} f^{-1}(\{a_i\}) = \cup_{i=1}^{m} V(f - a_i)$ que al ser la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, por lo que $f$ es una función continua.

2. Dado $V$ un abierto afín sabemos que existe una base para la topología de Zariski de $V$ formada por abiertos estándar $D(f)$ con $f \in \Gamma(V)$. Sea $g \in \Gamma(D(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(V)_f$ entonces $g = \frac{a}{f^n}$ con $n \geqslant 0$ y $a \in \Gamma(V)$, por la observación anterior $a$ y $f^n$ son continuas en $D(f)$ y $f^n$ no se anula en $D(f)$ por lo que $g$ es continua en $D(f)$, además como $\mathcal{O}_V$ es gavilla y las restricciones a los abiertos de una base de cualquier sección global $g$ en $\mathcal{O}_V$ son continuas, podemos concluir que $g$ es una función continua.

Si $X$ es una variedad algebraica y $U$ es un conjunto abierto de $X$, se tiene por la proposición anterior que las secciones de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ son funciones $\mathbb{K}-$valuadas continuas (con $\mathbb{K}$ equipado con la topología de Zariski) ya que por la proposición (**4.13**) tenemos que el conjunto de todos los abiertos afines forman una base para la topología de $U$ y por las observaciones anteriores, la restricción de una sección $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_V)$ a cada uno de estos abiertos es una función continua por lo cual $f$ es una función continua en $U$.

**Corolario 4.14** *Una variedad algebraica no vacia, se puede descomponer de manera única como la unión finita de conjuntos cerrados irreducibles, que no se contienen unos a otros. Estos conjuntos son las componentes irreducibles de la variedad.*

**Ejemplo 4.3** *Dada $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica*

1. *Si $U$ es un subconjunto abierto de $X$, entonces $U$ equipado con la gavilla $\mathcal{O}_X|_U$ es una variedad algebraica.*

   *En particular, cualquier subconjunto abierto de una variedad afín es una variedad algebraica (llamada una variedad algebraica cuasi-afín).*

2. *Si $Y$ un subconjunto cerrado de $X$, queremos definir una gavilla sobre $Y$, para ello, sea $V \subset Y$ abierto en $Y$, definimos*

$$\mathcal{O}_Y^-(V) = \{f : V \to \mathbb{K} | \exists U \subset X \quad abierto \quad tal \quad que \quad U \cap Y = V$$

$$y \quad \exists g \in \mathcal{O}_X(U) \quad tal \quad que \quad g|_V = f\}$$

   *Esta definición sólo nos define una pregavilla, por lo que tenemos que considerar la gavilla asociada $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y^{-+}$. Dicha gavilla le da una estrucura de espacio anillado a $Y$ que hace a la inclusión un morfismo de variedades, por lo cual, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es una variedad algebraica.*

**Definición 4.15** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica, las variedades descritas en el ejemplo anterior son subvariedades abiertas (en el caso del inciso 1) y subvariedades cerradas (en el caso del inciso 2).*

### 4.5.1. Anillos locales

Dada una variedad algebraica $(X, \mathcal{O}_X)$ y $x \in X$, consideremos el grupo de gérmenes de $\mathcal{O}_X$ en $x$ que lo denotaremos por $\mathcal{O}_{X,x}$ , que como ya vimos en el capítulo tres, podemos dotar con una estructura extra (en este caso de anillo).

**Proposición 4.16** *Dada una variedad algebraica $(X, \mathcal{O}_X)$ y $x \in X$, entonces $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local, con ideal máximo $\mathfrak{M}_{X,x} = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} | f(x) = 0\}$. Además:*

$$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_{X,x} \simeq \mathbb{K}$$

***Demostración:***
Consideremos el morfismo de anillos dado por la evaluación en $x$, es decir:

$$\pi : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{K}$$

$$f \mapsto f(x)$$

Está bien definido ya que cualquier representante de una clase, toma el mismo valor en $X$ (por la forma en la que se definió el grupo de germenes), además es claramente suprayectiva y se tiene que :

$$\ker \pi = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} | f(x) = 0\} = \mathfrak{M}_{X,x}$$

Así, por el primer teorema de isomorfismo tenemos entonces que:

$$\mathcal{O}_{X,x} / \ker \pi = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{M}_{X,x} \simeq Im\pi = \mathbb{K}$$

Lo que implica que $\mathfrak{M}_{X,x}$ es un ideal máximo. Sea $f \in \mathcal{O}_{X,x} \diagdown \mathfrak{M}_{X,x}$ , eso implica que $f(x) \neq 0$, por continuidad tenemos que existe $U$ vecindad abierta de $x$, tal que $f(u) \neq 0 \quad \forall u \in U$, por lo que $f$ es invertible en $U$, así l germen de $f$ es invertible en $\mathcal{O}_{X,x}$ , lo que implica que $f$ es unidad, por lo tanto $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local.

$\gimel$

### 4.5.2. Gavillas de módulos sobre una variedad algebraica

Sea $(V, \mathcal{O}_V)$ una variedad algebraica, y consideramos $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_V)$, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_V-$módulo, entonces, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ es un $A-$módulo.

**Definición 4.17** *Sea $M$ un $A-$módulo, definimos un $\mathcal{O}_V-$módulo $\widetilde{M}$ en los abiertos estándar de $V$ de la siguiente manera:*

$$\widetilde{M}(D(f)) = M_f = M \otimes_A A_f$$

*Para cada $f \in A$, en particular $\widetilde{M}(V) = \Gamma(V, M) = M$*

Recordemos que podemos describir al módulo localizado $M_f$ como el conjunto de pares $(x, s) \in (MXS)/\sim$ con $S = \{f^0, f^1.f^2, \ldots\}$ y la relación dada por:

$$(x, s) \sim (y, t) \Leftrightarrow \exists u \in S \quad tal \quad que \quad u(xt - ys) = 0$$

*Observación:* El término $u$ puede ser necesario, ya que $A$ no es necesariamente un dominio entero y $M$ puede no ser libre de torsión, es decir, puede pasar que $ax = 0$ con $a \in A \setminus \{0\}$ y $x \in M \setminus \{0\}$.

Denotamos a la clase de $(x, s)$ como $x/s$ o como $x \otimes 1/s$. La prueba de que es gavilla, es análoga a la de la definición (**4.8**) y en particular tenemos que $\widetilde{A} = \mathcal{O}_V$.

**Proposición 4.18** *Dada una sucesión exacta de $A-$módulos*

$$0 \to M^! \to M \to M^{!!} \to 0$$

*Entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \to M_f^! \to M_f \to M_f^{!!} \to 0$$

***Demostración:***
Que la sucesión $M^! \to M \to M^{!!} \to 0$ sea exacta, implica por las propiedades de producto tensorial que $M^! \otimes_A A_f \to M \otimes_A A_f \to M^{!!} \otimes_A A_f \to 0$ es exacta, pero por definición eso implica que $M_f^! \to M_f \to M_f^{!!} \to 0$ es exacta.

Sea $\widetilde{\iota} : M_f^! \to M_f$, queremos probar que $\widetilde{\iota}$ es inyectiva. Supongamos que $\widetilde{\iota}(x^!/f^n) = 0$ en $M_f$, esto implica que $f^r \iota(x^!) = 0$ en $M$ y por lo tanto $f^r x^! = 0$ en $M^!$ por hipótesis, por lo cual $x^!/f^n = 0$ en $M_f^!$. Lo cual prueba la inyectividad y por lo tanto la exactitud (en pocas palabras probamos que $A_f$ es un $A-$módulo plano ([AM] capítulo 2, página 9).

☽

**Lema 4.19** *Dados dos $A-$módulos, $M$ y $N$, se tiene que:*

1. $(M \oplus N)_f \simeq M_f \oplus N_f$
2. $(M \otimes_A N)_f \simeq M_f \otimes_{A_f} N_f$

***Demostración:***
1)
$(M \oplus N)_f = (M \oplus N) \otimes_A A_f \simeq (M \otimes_A A_f) \oplus (N \otimes_A A_f) = M_f \oplus N_f$
El isomorfismo es una propiedad del producto tensorial ([AM] capítulo 2, página 26).
2)
Definimos

$$\varphi : M_f \otimes_{A_f} N_f \to (M \otimes_A N)_f$$
$$\frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{f^m} \mapsto \frac{a \otimes b}{f^{n+m}}$$

queremos probar que $\varphi$ es isomorfismo. Sea $\frac{a\otimes b}{f^n} \in (M \otimes_A N)_f$ proponemos a $\frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{1} \in M_f \otimes_{A_f} N_f$ al aplicar $\varphi$ tenemos que $\varphi(\frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{1}) = \varphi(\frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{f^0}) = \frac{a\otimes b}{f^{n+0}} = \frac{a\otimes b}{f^n}$ lo cual prueba que $\varphi$ es supra-yectivo, para la inyectividad, suponemos que $\varphi(\frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{f^m}) = 0$ lo cual implica que $\frac{a\otimes b}{f^{n+m}} = 0$ que por definición implica que existe $l \in \mathbb{Z}^+$ tal que $0 = f^i(a \otimes b) = (f^l a) \otimes b = a \otimes (f^l b)$ lo cual implica que $a \otimes b = 0$ que prueba la inyectividad.

☽

**Definición 4.20** *Dada $V$ una variedad algebraica afín y $M$ un $\mathcal{O}_V$-módulo, que es isomorfo a un $\mathcal{O}_V$-módulo de la forma $\widetilde{M}$, se llama un módulo cuasi-coherente. Si $M$ es finitamente generado sobre $A$, decimos que $\widetilde{M}$ es coherente.*

**Proposición 4.21** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica afín y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo. Entonces $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente (respectivamente coherente) si y sólo si, existe una cubierta finita $\{U_\alpha\}$ de abiertos afines de $X$ y $M_\alpha$, $A_\alpha-$módulos, con $A_\alpha = \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ (de tipo finito) , tales que para cualquier $\alpha$ se tiene que:*

$$\mathcal{F}|_{U_\alpha} \simeq \widetilde{M_\alpha}$$

La prueba se puede consultar en [H] (capítulo 5, página 113).

Esta proposición nos dice que la propiedad de ser cuasi-coherente (respectivamente coherente) es una propiedad local, además justifica la siguiente definición.

**Definición 4.22** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es una gavilla cuasi-coherente (respectivamente coherente) si existe una cubierta $\{U_\alpha\}$ de abiertos afines de $X$ tales que: $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ es cuasi-coherente (respectivamente coherente) para cada $U_\alpha$.*

**Proposición 4.23** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica y sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dos gavillas cuasi-coherentes sobre $X$, entonces:*

1. *La gavilla $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es cuasi-coherente.*
2. *Para cualquier abierto afín $U$ de $X$, se tiene que:*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) \simeq \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

***Demostración:***
Si $U$ es un conjunto abierto, entonces $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U = (\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U$ ya que estas dos gavillas están asociadas a la misma pregavilla ($W \mapsto \mathcal{F}(W) \otimes_{\mathcal{O}_X(W)} \mathcal{G}(W)$ en $U$). Si $U$ es un abierto afín, sea $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$,$F = \Gamma(U, \mathcal{F})$ y $G = \Gamma(U, \mathcal{G})$, entonces

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U = \widetilde{F} \otimes_{\widetilde{A}} \widetilde{G} \simeq \widetilde{F \otimes_A G}$$

que prueba las dos afirmaciones.

$\rrbracket$

## 4.6. Variedades proyectivas

Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto algebraico proyectivo, con la topología de Zariski. Para darle una estructura de variedad algebraica a $V$, debemos primero dotarla de una gavilla estructural, para ello, consideremos su base estándar, dada por los conjuntos abiertos $D^+(f)$ con $f \in \Gamma_h(V)$ polinomio homogéneo de grado positivo. Pero antes, necesitamos algunas definiciones previas.

**Definición 4.24** *Sea $R$ un anillo graduado y $f \in R$ un elemento homogéneo de grado $d$. Se define una graduación sobre el anillo localizado $R_f$, estableciendo que: grado$(g/f^r) = e - rd$ con $g$ un elemento homogéneo de grado $e$. El conjunto de elementos de grado 0 de $R_f$ es un subanillo, denotado por $R_{(f)}$.*

Si consideramos $R = \Gamma_h(V)$ y un polinomio homogéneo de grado positivo, entonces los elementos de $R_{(f)}$ tienen la ventaja de definir funciones del conjunto $D^+(f)$ al campo, ya que al cambiar de representante, el escalar está tanto en el numerador como en el denominador.

**Definición 4.25** *Sea $V$ un conjunto algebraico proyectivo. Definimos la gavilla de funciones $\mathbb{K}-$valuadas en $V$ como:*

$$\Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma_h(V)_{(f)}$$

*Para cualquier polinomio homogéneo de grado positivo*

De forma similar al caso afín podemos ver que se cumplen las condiciones del teorema (**4.6**), lo que nos define una gavilla sobre $V$, para ver que con esta gavilla los conjuntos algebraicos proyectivos resultan ser variedades algebraicas, probaremos primero que $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica, para ello probaremos que los conjuntos abiertos $D^+(x_i)$ son variedades afines, ya que $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n D^+(x_i)$. Dado que los cambios de coordenadas inducen homografias en $\mathbb{P}^n$, basta probar que $D^+(x_0)$ es afín. Para ello necesitamos un enlace entre el espacio afín y el proyectivo.

Como ya vimos el conjunto $U_0 = D^+(x_0)$, es el conjunto de puntos en $\mathbb{P}^n$ tal que la primera coordenada $x_0$ es distinta de cero. Definimos:

$$j : \mathbb{A}^n \to U_0$$

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mapsto (1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

Que tiene como inversa a la función dada por:

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$$

**Proposición 4.26** *Consideremos a $\mathbb{A}^n$ con la topología de Zariski y a $U_0$ con la topología de Zariski inducida por $\mathbb{P}^n$, entonces se tiene que:*

1. *$j$ es homeomorfismo*

2. *$j$ es un isomorfismo de espacios anillados, entre la variedad afín $(\mathbb{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ y $(U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_0})$.*

Para probar esta proposición, estudiaremos la homogeneización y la deshomogeneización con un poco de detalle. Si $p$ es un polinomio homogéneo de grado $d$, en las variables $t_1, \ldots, t_m$, entonces la formula

(0)

$$p\left(\frac{t_1}{t_i}, \ldots, \frac{t_m}{t_i}\right) = \frac{p(t_1, \ldots, t_m)}{t_i^d}$$

Se preserva en el campo de fracciones. Para las siguientes definiciones usaremos la siguiente notación para distinguir entre los dos anillos de polinomios, un polinomio en $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ se escribirá con letra mayúscula y un polinomio en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se escribirá con letra minúsculas.

a) El operador $\flat$. Es un homomorfismo de anillos suprayectivo dado por

$$\flat : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

$$P(x_0, \ldots, x_n) \mapsto \qquad P_\flat(x_1, \ldots, x_n) = P(1, x_1, \ldots, x_n)$$

El núcleo de este homomorfismo es el ideal $\langle x_0 - 1 \rangle$. Estamos interesados en el caso especial cuando P es polinomio homogéneo de grado d. En este caso tenemos que (en el campo de fracciones $\mathbb{K}(x_0, \ldots, x_n)$).

(1)

$$P_\flat\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = P\left(\frac{x_0}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \frac{P(x_0, \ldots, x_n)}{x_o^d}$$

De la formula anterior deducimos que si $P$ es un polinomio homogéneo de grado d, entonces $P_\flat$ es de grado d si y solo si $x_0$ no divide a $P$.

b) El operador $\sharp$. *(Nota: este operador no es un homomorfismo)* Al contrario del operador $\flat$, este operador va de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ a $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$; si $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $p^\sharp$ es el polinomio homogéneo de grado menor en $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tal que $p = (p^\sharp)_\flat$, que podemos describir de la siguiente manera; si $p = p_1 + \ldots + p_d$, donde $p_i$ es un polinomio homogéneo de grado $i$ y $p_d \neq 0$, entonces $p^\sharp(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d p_o + x_0^{d-1} p_1 + \ldots + p_d$ es decir

(2)

$$p^\sharp(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d p\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

*Observaciones*

*i)* Si $p, q \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ entonces $(pq)^\sharp = p^\sharp q^\sharp$, esto se sigue de la formula (2)

*ii)* Si $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $p = (p^\sharp)_\flat$

*iii)* Si $P \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo, entonces $x_0^r (P_\flat)^\sharp = P$, donde $r$ es la potencia mas grande tal que $x_0^r$ divide a $P$. (lo que nos reduce al caso cuando $x_0$ no divide a $P$, usando (1) y (2) se puede ver que el grado no decrece cuando se pasa de $P$ a $P_\flat$). De esto se sigue que si $P$ es homogéneo y $P_\flat = 0$ entonces $P = 0$

***Demostración de la proposición:***
1) *j es homeomorfismo*
Dado que los conjuntos $D^+(F)$ y $D(f)$ forman una base para la topología de $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{A}^n$ respectivamente, el resultado se sigue de las siguientes dos formulas:

- Si $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo, entonces:
$$j^{-1}(D^+(F)) = j^{-1}(D^+(F) \cap U_0) = D(F_\flat)$$
- Si $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ entonces:
$$j(D(f)) = D^+(f^\sharp) \cap U_0$$

2)*El isomorfismo*
Consideremos $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ de grado $d$. Es suficiente con probar el siguiente isomorfismo:
$$\Gamma(D^+(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \simeq \Gamma(D(F_\flat), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$$
Primero observemos que $D^+(F) \cap U_0 = D^+(x_0F)$ de lo cual tenemos que:
$$\Gamma(D^+(F) \cap U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_0F)}$$
y los elementos de este anillo son de la forma $P/(x_0F)^r$ donde $P$ es homogéneo de grado $r(d+1)$, pero también podemos ver a sus elementos como $P/x_0^sF^r$, donde $P$ es de grado $rd+s$. Por otro lado, se tiene que
$$\Gamma(D(F_\flat), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{F_\flat}$$

Dado que $(x_0F)_\flat = F_\flat$, entonces $\flat$ induce un homomorfismo $\psi$ en los anillos locales
$$\psi : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{x_0F} \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{F_\flat}$$
Definamos a $\varphi$ como la composición de $\psi$ con la inclusión natural
$$\iota : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_0F)} \to \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{x_0F}$$
Queremos probar que $\varphi$ es el isomorfismo buscado, para ello observemos que
$$\varphi(P/x_0^sF^r) = P_\flat/F_\flat^r$$
Primero queremos probar que $\varphi$ es inyectiva. Si $\varphi(P/x_0^sF^r) = 0$ por la igualdad de arriba se tiene que $P_\flat/F_\flat^r = 0$, lo que implica que $P_\flat = 0$ y por una de las observaciones se tiene entonces que $P = 0$. Para la suprayectividad consideremos $p/F_\flat^r \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{F_\flat}$, entonces $p/F_\flat^r = \varphi(x_0^sp^\sharp/F^r)$ donde $s = rd - grado(p)$

☽

**Corolario 4.27** *Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto algebraico proyectivo. El espacio anillado $(V, \mathcal{O}_V)$ (con la gavilla de la definición anterior), es una variedad algebraica.*

***Demostración:***
Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ como es un conjunto algebraico, eso implica que es un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}^n$, sea $f \in \Gamma_h(V)$ la imagen del polinomio homogéneo $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, entonces tenemos que $D^+(f) = V \cap D^+(F)$ por lo que el homorfismo de restricción
$$\rho : \Gamma(D^+(F), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to \Gamma(D^+(f), \mathcal{O}_V)$$
Es suprayectivo, pero entonces $\mathcal{O}_V$ es la imagen de la gavilla $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ en la gavilla de funciones en $V$, pero por la proposición anterior $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica, lo que implica que $V$ es una subvariedad encajada (con la inclusión) en $\mathbb{P}^n$ y por tanto, es una variedad algebraica.

$\rightmoon$

**Definición 4.28** *Una variedad que es isomorfa a un conjunto algebraico proyectivo (respectivamente a un subconjunto abierto de un conjunto algebraico proyectivo) con la gavilla anterior, se dice que es una variedad proyectiva (respectivamente cuasi-proyectiva).*

### 4.6.1. Gavillas de módulos sobre una variedad proyectiva

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad algebraica proyectiva equipada con un encaje en $\mathbb{P}^n$. Daremos una definición de gavillas de módulos sobre variedades proyectivas similar a la definición para variedades afines, pero para ello necesitamos módulos graduados (que se definieron en el capítulo dos) sobre el anillo $R = \Gamma_h(X)$. Es importante notar que la graduación de este anillo depende del encaje.

**Definición 4.29** *Sea $M$ un $R-$módulo graduado. Definimos $\widehat{M}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo en los abiertos estándar de $X$ como sigue: si $f \in R$ es un polinomio homogéneo de grado positivo, entonces*

$$\widehat{M}(D^+(f)) = M_{(f)}$$

Donde $M_{(f)}$ denota el submódulo de $M_f$ que consiste de los elementos de grado 0, es decir, los elementos de la forma $x/f^n$, con $x$ un polinomio homogéneo de grado $ngrado(f)$.

*Observaciones:*

1. Restringiendo al abierto afín $D^+(f)$ cuyo anillo es $R_{(f)}$ se puede ver que que la gavilla $\widehat{M}$ es simplemente la gavilla $\widetilde{M_{(f)}}$ (según la definición **4.17**) asociada al $R_{(f)}-$módulo $M_{(f)}$. En particular un $\mathcal{O}_X-$módulo $\widehat{M}$ es cuasi-coherente (respectivamente coherente), si $M$ es cuasi-coherente (respectivamente un $R$- módulo de tipo finito).
2. $\widehat{R} = \mathcal{O}_X$

**Proposición 4.30** *Sea $\varphi : M \to N$ un morfismo homogéneo entre dos $R-$módulos graduados de grado 0 y suponemos que para alguna $n$ suficientemente grande se tiene que $\varphi_n : M_n \to N_n$ es supreyectiva. Entonces*

$$\widehat{\varphi} : \widehat{M} \to \widehat{N}$$

*es un morfismo de gavillas suprayectivo.*

***Demostración:***
Sea $D^+(f)$ un conjunto abierto, con $f$ un polinomio homogéneo de grado positivo. Queremos probar que $\varphi_{(f)} : M_{(f)} \to N_{(f)}$ es suprayectivo. Sea $y/f^r \in N_{(f)}$, para alguna $s$ lo suficientemente grande se tiene que $f^s y$ es imagen de $\varphi$, por lo tanto también lo es $y/f^r = f^s y/f^{r+s}$

$\rightmoon$

Ahora nuestro objetivo es definir a las gavillas $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y $\mathcal{O}_X(d)$ en una variedad proyectiva $(X, \mathcal{O}_X)$, la ventaja sobre la gavilla estructural original es que dada $d > 0$ se tiene que las secciones globales son los polinomios homogéneos de grado $d$. Pero primero daremos la definición de un módulo desplazado.

**Definición 4.31** *Sea $R$ un anillo graduado y $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un $R-$módulo graduado y $d \in \mathbb{Z}$. El módulo $M(d)$ es un módulo graduado igual a $M$ excepto por una graduación desplazada, es decir*

$$M(d)_n = M_{d+n}$$

Algo que se debe notar, es que desplazar un módulo no altera la exactitud de una sucesión de módulos.

**Definición 4.32** *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad proyectiva encajada en $\mathbb{P}^n$, $d \in \mathbb{Z}$ y consideremos $R = \Gamma_h(X)$. La gavilla $\mathcal{O}_X(d)$ es la gavilla asociada al módulo $R(d)$, es decir, $\mathcal{O}_X(d) = \widehat{R(d)}$. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo, podemos escribir $\mathcal{F}(d)$ como la gavilla*

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d)$$

Las secciones de $\mathcal{O}_X(d)$ sobre el conjunto $D^+(f)$ son los elementos de la forma $a/f^r$, donde $grado(a) - rgrado(f) = d$.

*Observaciones*

1. La gavilla $\mathcal{O}_X(d)$ depende fundamentalmente de la graduación en $R$ y por tanto del encaje de $X$ en $\mathbb{P}^n$

2. Si $M$ es un $R-$módulo graduado, entonces

$$\widehat{M(d)} \simeq \widehat{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d) \simeq \widehat{M}(d)$$

**Teorema 4.33** *Sea $R_d$ el espacio vectorial de los polinomios homogéneos de grado $d$ en las variables $x_0, \ldots, x_n$, entonces*

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \begin{cases} 0 & si\ d < 0 \\ R_d & si\ d \geq 0 \end{cases}$$

***Demostración:***
Sea $f \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. $f \neq 0$. Por definición, su restricción al conjunto $D^+(x_i)$ es una función racional de la forma $P_i(x_0, \ldots, x_n)/x_i^r$, donde $P_i$ es un polinomio homogéneo de grado $d + r$, podemos suponer que $x_i$ no divide a $P_i$. Análogamente para $i \neq j$ , tenemos que $f|_{D^+(x_j)}$ es de la forma $P_j(x_0, \ldots, x_n)/x_j^s$, donde $P_j$ es un polinomio homogéneo de grado $d + s$ tal que $x_j$ no divide a $P_j$. Dado que ambos polinomios son restricciones de $f$, coinciden en la intersección $D^+(x_i) \cap D^+(x_j) = D^+(x_i x_j)$ y por tanto son iguales en el anillo localizado $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i x_j)}$, o en el campo de fracciones $\mathbb{K}(x_0, \ldots, x_n)$, de ello se sigue que $x_j^s P_i = x_i^r P_j$, pero $x_i$ no divide a $P_i$ y $x_j$ no divide a $P_j$ por lo que la igualdad se da si y sólo si $r = 0 = s$, así $P_i = P_j$. Además esto lo hicimos para cualesquiera $i, j$ distintas, lo que implica que la sección $f$ está dada por un polinomio homogéneo de grado $d$.

$\mathfrak{D}$

**Corolario 4.34** *Para toda $d \geq 0$ se tiene que*

$$dim_{\mathbb{K}}(\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = \binom{n+d}{d}$$

***Demostración:***
Por la proposición anterior tenemos que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = R_d$, pero $R_d$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial que tiene como base al conjunto

$$\{x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} | \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant d \quad para \quad toda \quad i \quad y \quad \Sigma_{i=0}^n \alpha_i = d\}$$

es decir el conjunto de monomios de grado $d$ en las variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$, el numero de estos monomios es igual al de las combinaciones con repetición de $n+1$ elementos tomados de $d$ en $d$ que por definición es

$$\binom{d + (n+1) - 1}{d} = \binom{n+d}{d}$$

☽

Lo que nos muestra que a diferencia de las variedades afines, cuyos espacios de secciones rara vez son de dimensión finita, el espacio de secciones sobre el espacio proyectivo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es de dimensión finita.

# Bibliografía


[AM] Atiyah, M. F. and I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, Reading, 1969.

[H] Hartshorne R., Algebraic Geometry. Springer, Berlin, 1977.

[QL] Liu, Q., Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[M] Matsumura, H., Commutative Algebra. Benjamin, New York, 1980.

[RM] Miranda R., Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Graduate Studies in Mathematics series No. 5, AMS, 1995.

[P] Perrrin, D., Algebraic Geometry. An Introduction. Springer Verlag, London, 2008.

[TE] Tennison B. R., Sheaf Theory. London Mathematical Society Lecture Note Series 20. Cambridge, University Press, 1975.

[ZF] Zaldívar F., Variedades algebraicas
https://dl.dropboxusercontent.com/u/30868497/variedades.pdf