UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS ESPACIOS DE BAIRE Y DE CANTOR.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO.

P R E S E N T A :

ALEJANDRO ROMÁN SÁNCHEZ.

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA.

CIUDAD UNIVERSITARIA , D.F. 2014

Hoja de Datos del Jurado.

1. Datos del alumno
Román
Sánchez
Alejandro
5531994176
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
408093413

2. Datos del tutor
Dr.
Fidel
Casarrubias
Segura

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María de Jesús
López
Toriz

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Saúl
Arce
Rocha

Datos del trabajo escrito.
Construcción y propiedades básicas de los espacios de Baire y de Cantor
175 p
2014

Contenido

Agradecimientos

Agradezco a mis padre, Francisco Román Román y Eutiquia Sánchez Estrada, por darme la vida y por todo ese valioso apoyo que he recibido a lo largo de mi vida.

Al Dr. Fidel Casarrubias Segura, por dedicar parte de su valioso tiempo a este trabajo, por sus comentarios y correcciones con respecto al mismo. Además por ser de aquellos profesores cuya forma de exponer hace que en uno surga ese interés por saber más del tema.

A cada uno de mis sinodales, por el tiempo invertido a revisar la tesis, por sus valiosas correcciones y sugerencias.

A cada uno de mis profesores cuya experiencia y exposición me permitieron concebir ideas e interrogantes que de otra manera quizás nunca las hubiera concebido.

Introducción

La teoría descriptiva de conjuntos estudia a los subconjuntos de espacios topológicos que se obtienen a partir de conjuntos sencillos. Esta teoría se remonta a finales del siglo XIX cuando Cantor trataba de refutar lo que hoy día llamamos la hipótesis del continuo. La afirmación de esta hipótesis se obtiene si se prueba que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es numerable o tiene la cardinalidad del continuo. Una de las tantas maneras en que Cantor abordó el problema fue estudiar en un inicio a los subconjuntos más sencillos de $\mathbb{R}$ para después, progresivamente, analizar conjuntos más sofisticados.

Entre estos subconjuntos sencillos se encuentran los conjuntos abiertos (no vacíos), los cuales fácilmente se demuestra que tienen la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$. Pues todo abierto tiene un intervalo abierto, y es posible biyectar a todo intervalo abierto con el conjunto $\mathbb{R}$.

Posteriormente Cantor estudió a los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. En este caso, se puede probar que todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es numerable o tiene la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Ivar Otto Bendixson fue capaz de demostrar esto último para un conjunto cerrado arbitrario. La parte esencial de esta prueba radica en que todo cerrado puede verse como una unión de un cerrado perfecto (o vacío) y de un conjunto numerable. De esta manera se concluye que ningún cerrado sirve como contraejemplo de la hipótesis del continuo.

Por otro lado, durante la época siguiente al término de la Primera Guerra Mundial, Lusin y Sierpiński, por separado, dirigían los avances en la teoría descriptiva de conjuntos, a los que se les unieron varios matemáticos rusos y, sobre todo, polacos, entre ellos Banach, Kuratowski, Ulam y Tarski. Una de las contribuciones de esta escuela de topólogos fue que ellos desarrollaron la teoría descriptiva de conjuntos en una familia de espacios más generales que los espacios $\mathbb{R}^n$. Estos espacios topológicos cumplían dos propiedades, a saber eran completamente metrizables y separables. A este tipo de espacios posteriormente se les conoció con el nombre de espacios polacos.

El tratamiento de los espacios polacos le dió una gran flexibilidad a la teoría. Por ejemplo, el espacio polaco no trivial más sencillo es el espacio de Baire $\mathcal{N}$, el cual es el conjunto de todas las sucesiones de números naturales dotado de la topología producto usual. El estudio de $\mathcal{N}$ es muy simple en comparación de otros espacios polacos arbitrarios. Y esta simplicidad reditúa en algunos resultados generales (por ejemplo, se puede demostrar que todo espacio polaco es imagen continua de $\mathcal{N}$). Haciendo posible que se puedan generalizar los resultados obtenidos en $\mathcal{N}$ a espacios polacos arbitrarios.

Esta tesis está conformada por cuatro capítulos y un apéndice. La idea central de la tesis es abordar cada teorema considerando únicamente los axiomas de Zermelo Fraenkel y el Principio de Elecciones Dependientes en lugar del Axioma de Elección. En el apéndice se puede leer sobre dicho principio y algunos de sus resultados básicos que usaremos en todo el trabajo. Por ejemplo, dicho principio implica el Axioma de Elección para Conjuntos Numerables y también implica que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, entre otros resultados.

En el primer capítulo se da la definición de espacio polaco, así como también se presentan algunos resultados acerca de ellos. Por ejemplo, se demuestra que el producto a lo más numerable de espacios polacos es polaco y que todo subespacio polaco de un espacio polaco es un conjunto G_δ.

En el segundo capítulo se demuestran algunos resultados sobre los espacios de sucesiones arbitrarios. Estos resultados se utilizarán a la hora de estudiar a los espacios de Baire y de Cantor.

En el tercer capítulo se estudia el espacio de Baire $\mathcal{N}$ y se ven algunas propiedades que tiene este espacio. También se hace notar la flexibilidad que posee. Entre los resultados que se exponen está aquel que muestra que todo espacio polaco no vacío es imagen continua del espacio de Baire.

En el cuarto capítulo se aborda el espacio de Cantor $\mathcal{C}$. Se estudian algunas propiedades que posee. Entre los resultados se encuentra el teorema que establece que todo espacio métrico no vacío compacto cero-dimensional y perfecto es esencialmente el espacio 2^ω.

Es importante recalcar que cada una de las proposiciones de este trabajo se demuestran por medio del Principio de Elecciones Dependientes en lugar del Axioma de Elección para conjuntos arbitrarios. El lector notará que las demostraciones son más tecnicas y sofisticadas que estas mismas haciéndolas considerando el Axioma de Elección para conjuntos arbitrarios.

Alejandro Román Sánchez
México, D.F.
Junio de 2014

Capítulo 1

Preliminares

1.1 El principio de elecciones dependientes

Al principio de elecciones dependientes se le puede considerar como una versión débil del axioma de elección para conjuntos arbitrarios; a lo largo de este trabajo intentaremos demostrar siempre que sea posible cada enunciado por medio del principio mencionado, sin usar al axioma de elección para conjuntos arbitrarios. Comenzaremos con enunciar a los axiomas que usaremos en este trabajo.

Axioma de Elección (AE). Si A es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $s : A \to \bigcup A$ tal que:

$$\forall a \in A : \; s(a) \in a.$$

Axioma de Elección Numerable (AEN). Si A es una familia a lo más infinita numerable y no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $s : A \to \bigcup A$ tal que:

$$\forall a \in A : \; s(a) \in a.$$

Principio de elecciones dependientes (ED). Para todo conjunto $A \neq \emptyset$ y toda relación $R \subseteq A \times A$ tal que:

$$\forall a \in A \; \exists b \in A \text{ tal que } bRa,$$

existe una función $f : \omega \to A$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \; f(n+1)Rf(n).$$

A lo largo de toda la discusión, para nosotros el conjunto ω se refiere a los naturales incluyendo al número 0.

En el Apéndice A, se prueban los siguientes resultados que usaremos a lo largo de la discusión:

- ED es una consecuencia de AE.
- ED implica AEN.
- ED garantiza que todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.
- ED garantiza que toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

1.2 Espacios polacos

En esta sección presentaremos a los espacios polacos, así como también sus propiedades básicas. Antes de definir tales espacios, mencionaremos las definiciones de espacio topológico separable y de espacio topológico completamente metrizable.

1.2.1. Definición. Un espacio topológico es *separable* si posee un subconjunto denso numerable.

1.2.2. Definición. Un espacio topológico X es *completamente metrizable* si su topología está inducida por una distancia completa $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Es decir, en la cual toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

A menos que se indique lo contrario, (X, τ_d) denotará al espacio topológico inducido por la métrica d. Con estas dos definiciones en mente, introduciremos la noción de espacio polaco.

1.2.3. Definición. Un *espacio polaco* es un espacio topológico completamente metrizable y separable.

Un ejemplo de espacio polaco es el conjunto $\mathbb{R}$ con su topología usual $\tau_{\mathbb{R}}$. Pues $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso numerable y la métrica completa necesaria para generar la topología usual $\tau_{\mathbb{R}}$ es la métrica euclidiana.

Otras definiciones básicas que nos servirán en la discusión son las siguientes:

1.2.4. Definición. Dado un espacio topológico (X, τ), una *base* para τ es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que

$$\forall A \in \tau \ \exists \mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } A = \bigcup \mathcal{B}_A.$$

Una caracterización de la noción de base para una topología es la siguiente:

1.2.5. Teorema. *Sean (X, τ) un espacio topológico y una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}$ es una base para el espacio (X, τ),*

2. $\forall A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ y $\forall x \in A$ $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$.

1.2.6. Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Y sea:

$$\mathcal{V}(x) = \{v \subseteq X \mid \exists G \in \tau \text{ tal que } x \in G \subseteq v\}.$$

Una colección $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ es una *base de vecindades alrededor de x* si

$$\forall v \in \mathcal{V}(x)\ \exists B \in \mathcal{B}(x) \text{ tal que } x \in B \subseteq v.$$

1.2.7. Definición. Sea X un espacio topológico. Diremos que el espacio X cumple *el primer axioma de numerabilidad* o que es *primero numerable* si existe una base de vecindades numerable para cada punto de X.

1.2.8. Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que el espacio (X, τ) cumple *el segundo axioma de numerabilidad* o que es *segundo numerable* si existe una base numerable para τ.

Por simplicidad escribiremos 1AN para referirnos al primer axioma de numerabilidad y 2AN para el segundo. Con estas dos definiciones en consideración, los siguientes teoremas básicos pueden ser demostrados por medio del axioma de elecciones para conjuntos numerables.

1.2.9. Teorema. *Todo espacio topológico que es 2AN es 1AN.*

1.2.10. Teorema. *Todo espacio topológico que es 2AN es separable.*

En general, la separabilidad no implica 2AN. El siguiente teorema nos da una condición con la cual un espacio separable puede cumplir 2AN.

1.2.11. Teorema. *Todo espacio métrico separable cumple el 2AN.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que D es un subconjunto denso numerable del espacio (X, τ_d). Para cada $z \in D$ consideramos la colección;

$$\mathcal{B}(z) = \{B_{\frac{1}{n}}(z) | n \in \omega \setminus \{0\}\}.$$

Tomamos:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{z \in D} \mathcal{B}(z).$$

Como D es numerable, y ED garantiza que toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable, resulta que $\mathcal{B}$ es numerable.

AFIRMACIÓN: $\mathcal{B}$ es una base para τ_d.

En efecto: Sean $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ y $x \in A$, se tiene que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$. Tomamos $n \in \omega$ fija tal que $\frac{1}{n} < r$, note que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq A$.

Como D es denso en X, existe $z \in D \cap B_{\frac{1}{2n}}(x)$, observe que $x \in B_{\frac{1}{2n}}(z)$ y $B_{\frac{1}{2n}}(z) \in \mathcal{B}$.

Para terminar la afirmación, se probará que $B_{\frac{1}{2n}}(z) \subseteq A$. Sea $y \in B_{\frac{1}{2n}}(z)$, entonces

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{n}.$$

Por lo tanto $y \in B_{\frac{1}{n}}(z) \subseteq A$. $\boxtimes$

Con lo que concluimos la demostración. $\square$

Así pues, se tiene el siguiente teorema.

1.2.12. Teorema. *Todo espacio polaco tiene una base numerable.*

1.2.13. Teorema. *Todo conjunto no vacío con la topología relativa de un espacio polaco es separable.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco. Sea $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Consideramos τ_Y la topología relativa en Y. Como (X, τ) es polaco, entonces (X, τ) cumple 2AN. No es difícil demostrar que todo subespacio con la topología relativa de un espacio que cumple 2AN también tiene un base numerable. Por lo que (Y, τ_Y) cumple 2AN, y por lo tanto es separable. $\square$

Por otro lado, recordando que todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo es también completo, se deduce lo siguiente.

1.2.14. Teorema. *Todo subespacio cerrado no vacío de un espacio polaco es también un subespacio polaco.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco. Consideremos (Y, τ_Y) un subespacio cerrado de (X, τ). Por un lado, tenemos que $\tau = \tau_d$ para alguna métrica completa d sobre X, y además (X, τ) es separable. Entonces, (Y, τ_Y) es completo, pues todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo. Y como todo subespacio de un espacio polaco es separable, se concluye que (Y, τ_Y) es un espacio polaco. $\square$

Uno estaría muy tentado a pensar que el teorema anterior se trata en realidad de una equivalencia; sin embargo, en los próximos teoremas nos daremos cuenta de que esto no es verdad, la razón es que no hemos definido a un espacio polaco como un espacio métrico completo separable, sino como un espacio separable completamente metrizable. Así pues, aunque la topología de un espacio X sea inducida por una métrica no completa, no necesariamente significa que no pueda haber alguna métrica completa que induzca la misma topología del espacio X en cuestión. Aunque no sea un espacio métrico completo con la métrica inicial, sí puede ser un espacio topológico completamente metrizable. Notemos que, en principio, la posibilidad de cambiar de métricas hace que el estudiar qué subespacios de un espacio polaco son espacios polacos no sea tan sencillo.

El siguiente teorema nos ofrece una herramienta muy útil a nuestra discusión acerca de los espacios polacos.

1.2.15. Teorema. *Si (X, d) es un espacio métrico y $r > 0$, entonces la función $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$d'(x, y) = min\{d(x, y), r\}$$

es una métrica en X que induce la misma topología que d. Además, (X, d) es completo si y sólo si (X, d') lo es.

DEMOSTRACIÓN. Dejamos al lector la comprobación de que d' es una métrica.

Ahora probaremos que esta métrica induce la topología de (X, τ_d). Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < r$. Para nuestro propósito bastará mostrar que $B^d_\epsilon(x) = B^{d'}_\epsilon(x)$. Si $y \in B^d_\epsilon(x)$ entonces $d(x, y) < \epsilon < r$. Por lo que $d'(y, x) = \text{mín}\{d(y, x), r\} = d(y, x) < \epsilon$. Por ende, $y \in B^{d'}_\epsilon(x)$.

Por otro lado, si $y \in B^{d'}_\epsilon(x)$ entonces $\text{mín}\{d(y, x), r\} = d'(y, x) < \epsilon$; pero $r > \epsilon$, por lo que $d(y, x) < \epsilon$. De aquí se concluye que $y \in B^d_\epsilon(x)$. Por lo tanto ambas topologías coinciden.

Para demostrar que:

$$(X, d) \text{ es completo} \iff (X, d') \text{ es completo},$$

haremos notar que las sucesiones de Cauchy son las mismas en ambas métricas.

Sea $\{x_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Sea $\epsilon > 0$ fija, entonces existe $N \in \omega$ tal que si $n, m > N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Para tales $n, m > N$ notemos que $d'(x_n, x_m) = \text{mín}\{d(x_n, x_m), r\} \leqslant d(x_n, x_m) < \epsilon$. Por lo tanto, $d'(x_n, x_m) < \epsilon$, para cada $n, m > N$. Es decir, $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d').

Recíprocamente, sea $\{x_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en (X, d'). Sea $\epsilon > 0$ fija. Consideremos también $\epsilon' > 0$ tal que $\epsilon' < r$ y $\epsilon' < \epsilon$. Como $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es de Cauchy en (X, d'), entonces existe $N \in \omega$ tal que si $n, m > N$ entonces $d'(x_n, x_m) < \epsilon'$. Como $r > \epsilon'$, se tiene que $d(x_n, x_m) < \epsilon' < \epsilon$. Por lo que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, para cada $n, m > N$.

Por lo tanto, las sucesiones de Cauchy son las mismas en ambas topologías. Con este último resultado ya es fácil ver que: (X, d) es completo $\iff$ (X, d') es completo.

Pues si (X, d) es completo y si $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy para (X, d'), entonces es una sucesión de Cauchy para (X, d). De aquí que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ sea convergente en (X, d). Supóngase que tal sucesión converge en (X, d) al punto x. Se afirma que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ converge a x en (X, d'). Efectivamente, sea $\epsilon > 0$ fija. Consideremos $\epsilon' > 0$ tal que $\epsilon' < r$ y $\epsilon' < \epsilon$. Entonces existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon' < r$;

es decir, $d(x_n, x) < r$, si $n > N$. De aquí que $d'(x_n, x) = d(x_n, x)$, si $n > N$. Por lo tanto, $d'(x_n, x) < \epsilon' < \epsilon$, si $n > N$. De esta forma podemos concluir que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ converge al punto x en (X, d').

Para demostrar la otra implicación, supongamos que (X, d') es completo y sea $\{x_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión de Cauchy para (X, d). Entonces $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy para (X, d'). Supóngase que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ converge al punto x en (X, d'). Se afirma que $\{x_k\}_{k\in\omega}$ converge al punto x en (X, d). En efecto, sea $\epsilon > 0$ fija. Consideremos un $\epsilon' > 0$ tal que $\epsilon' < r$ y $\epsilon' < \epsilon$. Entonces existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $d'(x_n, x) < \epsilon' < r$. Por lo que $d(x_n, x) = d'(x_n, x) < \epsilon' < \epsilon$, si $n > N$. Por lo tanto, $d(x_n, x) < \epsilon$, si $n > N$. Lo que concluye la demostración. □

Nuestro propósito ahora es demostrar que todo subespacio del tipo G_δ (no vacío) de un espacio polaco es un espacio polaco. Para ello, primero estableceremos el resultado para subespacios abiertos (no vacíos).

1.2.16. Teorema. *Todo subespacio abierto no vacío de un espacio polaco es un espacio polaco.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio polaco. Sea $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto, y consideramos a (U, τ_U). Si $U = X$, entonces U es polaco. Supóngase que $U \neq X$. Como primera observación tenemos que U es separable, pues todo subespacio de un espacio 2AN es 2AN y por ello es separable. Por otro lado, como (X, τ) es completamente metrizable, existe $D : X \times X \to \mathbb{R}$ métrica tal que (X, τ_D) es completo y además $\tau = \tau_D$. Considerando la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \text{mín}\{D(x, y), 1\},$$

por el teorema inmediato anterior tenemos que d es una métrica completa que induce a τ_D. Por lo tanto podemos suponer de antemano que bajo la métrica dada por la definición de espacio completamente metrizable las distancias son menores o iguales que 1.

Ahora definamos la siguiente relación $d' : U \times U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left|\tfrac{1}{d(x, X\setminus U)} - \tfrac{1}{d(y, X\setminus U)}\right|,$$

la cual es una función bien definida, pues si $x \in U$ es tal que $d(x, X \setminus U) = 0$, es decir, $inf\{d(x, y)|y \in X \setminus U\} = 0$. De esta manera, para cada $n \in \omega$ tomamos un único $y_n \in X \setminus U$ tal que $d(x, y_n) < \frac{1}{n+1}$, por ende la sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge al punto x. Y como $X \setminus U$ es cerrado, tendríamos que $x \in X \setminus U$ lo que es una contradicción. Por lo que:

$$\forall x, y \in U : \ d(x, X \setminus U) > 0 \text{ y } d(y, X \setminus U) > 0.$$

Ahora veremos que la función d' es una métrica en U. Sean $x, y, z \in U$.

1. Si $d'(x,y)=0$, entonces $d(x,y)+|\frac{1}{d(x,X\setminus U)}-\frac{1}{d(y,X\setminus U)}|=0$; suponiendo que $x\neq y$, tendríamos que $d'(x,y)=d(x,y)+|\frac{1}{d(x,X\setminus U)}-\frac{1}{d(y,X\setminus U)}|\geqslant d(x,y)>0$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto $x=y$.

   Ahora si $x=y$, entonces $d(x,y)=0$ y $d(x,X\setminus U)=d(y,X\setminus U)$, de aquí que $d'(x,y)=d(x,y)+|\frac{1}{d(x,X\setminus U)}-\frac{1}{d(y,X\setminus U)}|=0$.

2. Por otro lado:

$$d(x,y)+|\tfrac{1}{d(x,X\setminus U)}-\tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}|=d(y,x)+|\tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}-\tfrac{1}{d(x,X\setminus U)}|,$$

   por lo tanto $d'(x,y)=d'(y,x)$.

3. Además,

$$\begin{aligned}d(x,z)+|\tfrac{1}{d(x,X\setminus U)}-\tfrac{1}{d(z,X\setminus U)}| \;\leqslant\; & d(x,y)+|\tfrac{1}{d(x,X\setminus U)}-\tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}|\\ &+d(y,z)+|\tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}-\tfrac{1}{d(z,X\setminus U)}|.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $d'(x,z)\leqslant d'(x,y)+d'(y,z)$.

Con lo que concluimos que d' es una métrica en U.

Ahora probaremos que ambas topologías coinciden.

Sea $A\neq\emptyset$ abierto de la topología relativa en U. Entonces existe $V\subseteq X$ abierto para (X,τ) tal que $A=V\cap U$. Como U es abierto en (X,τ), tenemos que A es abierto en (X,τ). Sea $x\in A=V\cap U$, entonces existe $r>0$ tal que $B_r^d(x)\subseteq V\cap U=A$. Probaremos que $B_r^{d'}(x)\subseteq B_r^d(x)$. Sea $y\in B_r^{d'}(x)$, entonces $d'(x,y)<r$, pero $d(x,y)\leqslant d'(x,y)$, por lo que $y\in B_r^d(x)$. Por lo tanto, todo abierto de la topología relativa en U es abierto de la topología inducida por la métrica d'.

Ahora demostraremos que todo abierto de la topología inducida por d' es abierto de la topología relativa en U, pero antes veremos lo siguiente.

Sea $x\in U$ fijo. Consideramos $r=d(x,X\setminus U)$, la cual ya sabemos que es positiva. Y sea $y\in U$ tal que $d(x,y)<r$, entonces existe $\delta\in\mathbb{R}$ tal que $0\leqslant d(x,y)<\delta<r$. Se afirma que:

$$r-\delta\leqslant d(y,X\setminus U)\leqslant r+\delta.$$

En efecto: Sea $z\in X\setminus U$, se tiene que $r=d(x,X\setminus U)\leqslant d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<\delta+d(y,z)$, entonces:

$$\forall z\in X\setminus U:\ r-\delta<d(y,z).$$

Por lo tanto, $r-\delta\leqslant d(y,X\setminus U)$.

Por otro lado, de la definición de $d(y, X \setminus U)$ tenemos que:

$$\forall z \in X \setminus U: \ d(y, X \setminus U) \leqslant d(y, z).$$

Utilizando la desigualdad del triángulo, tenemos que:

$$\forall z \in X \setminus U: \ d(y, X \setminus U) \leqslant d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z),$$

como $d(x, X \setminus U)$ es la mayor cota superior del conjunto $\{d(x, w) | \ w \in X \setminus U\}$ y los elementos x y y son fijos, se tiene que $d(y, X \setminus U) - d(x, y) \leqslant d(x, X \setminus U)$.

Entonces:

$$d(y, X \setminus U) \leqslant d(y, x) + d(x, X \setminus U) < \delta + r.$$

Por lo tanto, $r - \delta \leqslant d(y, X \setminus U) \leqslant r + \delta$.

A continuación, con el resultado anterior, se probará que:

$$d'(x, y) \leqslant \delta + \tfrac{\delta}{r(r-\delta)}.$$

Para ello consideraremos dos casos: El primero de ellos es cuando $d(y, X \setminus U) \geqslant r$. Con esta suposición tenemos que:

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{d(x,X\setminus U)} - \tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}| &= |\tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}| \\ &= \tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{d(y,X\setminus U)} \\ &\leqslant \tfrac{1}{r} - \tfrac{1}{r+\delta} \\ &= \tfrac{\delta}{r(r+\delta)} \\ &< \tfrac{\delta}{r(r-\delta)}. \end{aligned}$$

Ahora para el caso en que $d(y, X \setminus U) < r$, tenemos que:

$$|\tfrac{1}{d(x,X\setminus U)} - \tfrac{1}{d(y,X\setminus U)}| = \tfrac{1}{d(y,X\setminus U)} - \tfrac{1}{r} \leqslant \tfrac{1}{r-\delta} - \tfrac{1}{r} = \tfrac{\delta}{r(r-\delta)}.$$

Resumiendo lo anterior, en esta parte hemos probado que si $x \in U$, $r = d(x, X \setminus U)$ y $y \in U$ es tal que $d(x, y) < r$, y si $\delta \in \mathbb{R}^+$ es tal que $d(x, y) < \delta < r$, entonces $d'(x, y) \leqslant \delta + \frac{\delta}{r(r-\delta)}$.

Procederemos a probar ahora que para cada $\epsilon > 0$ y para cada $x \in U$, existe un $\delta > 0$ tal que $B^d_\delta(x) \cap U \subseteq B^{d'}_\epsilon(x)$.

Sea $\epsilon > 0$ fija. Sabiendo que $z + \frac{z}{r(r-z)}$ tiende a 0, cuando z tiende a 0, tenemos que existe $\delta' > 0$ tal que si $z < \delta'$, entonces $z + \frac{z}{r(r-z)} < \epsilon$. Así pues, sea $0 < \delta < \text{mín}\{r, \delta'\}$ fija, donde $r = d(x, X \setminus U)$. Sea $y \in B^d_\delta(x) \cap U$. Entonces $d(y, x) < \delta < r = d(x, X \setminus U)$. Además, $\delta < \delta'$. Luego $d'(x, y) \leqslant \delta + \frac{\delta}{r(r-\delta)} < \epsilon$, y , por ende, $y \in B^{d'}_\epsilon(x)$. De esto último concluimos que todo abierto en la topología inducida por d' es abierto en la topología relativa.

Nos falta probar que la métrica d' es completa sobre U.

Sea $\{x_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión de Cauchy bajo d' en U. Como primera observación tenemos que para cada $n \in \omega$, $d(x_n, X \setminus U) > 0$. Sea $\epsilon > 0$ fija. Entonces existe $N \in \omega$ tal que $n, m > N$ implica que $d'(x_n, x_m) < \epsilon$, y como para cada $n, m > N$, $d(x_n, x_m) \leqslant d'(x_n, x_m) < \epsilon$, podemos concluir que la sucesión $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es de Cauchy en (X, τ_d). Debido a que (X, τ_d) es completo, la sucesión $\{x_k\}_{k\in\omega}$ converge a un punto $x \in X$ con la métrica d.

Se afirma que $x \in U$. Efectivamente: Si $x \in X\setminus U$, como la sucesión $\{x_k\}_{k\in\omega}$ converge a un punto x con la métrica d, existe $N_1 \in \omega$ tal que si $n > N_1$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon$; pero $d(x_n, X \setminus U) \leqslant d(x_n, x) < \epsilon$, pues $x \in X \setminus U$. Por lo tanto si $n > N_1$, tenemos que $d(x_n, X\setminus U) < \epsilon$. Luego, con la métrica del valor absoluto en $\mathbb{R}$, la sucesión $\{d(x_k, x)\}_{k\in\omega}$ converge a 0. De la observación anterior, se tiene que:

$$(\forall M \in \mathbb{R}^+)(\exists \widetilde{N_2} \in \omega)(\forall n \in \omega)(n > \widetilde{N_2} \Rightarrow \tfrac{1}{d(x_n, X\setminus U)} > M).$$

Sea $N \in \omega$ tal que si $n, m > N$, $d'(x_n, x_m) < \epsilon$. Consideremos $m > N$ fija y $M > \frac{1}{d(x_m, X\setminus U)}$ fija. Entonces ya sabemos que existe $N_2 \in \omega$ tal que si $k > N_2$, $\frac{1}{d(x_k, X\setminus U)} > \frac{1}{d(x_m, X\setminus U)}$. Sea $n > \max\{N, N_2\}$ arbitraria. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) + \tfrac{1}{d(x_n, X\setminus U)} - \tfrac{1}{d(x_m, X\setminus U)} &= d(x_n, x_m) + \left|\tfrac{1}{d(x_m, X\setminus U)} - \tfrac{1}{d(x_n, X\setminus U)}\right| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Sea $M_1 > \frac{1}{d(x_m, X\setminus U)} + \epsilon > 0$ fija. Entonces existe $N_3 \in \omega$ tal que si $k > N_3$, $\frac{1}{d(x_k, X\setminus U)} > \frac{1}{d(x_m, X\setminus U)} + \epsilon$. Sea $\tilde{n} > \max\{N, N_2, N_3\}$ fija. Entonces tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon &> d(x_m, x_{\tilde{n}}) - \tfrac{1}{d(x_m, X\setminus U)} + \tfrac{1}{d(x_{\tilde{n}}, X\setminus U)} \\ &> d(x_m, x_{\tilde{n}}) - \tfrac{1}{d(x_m, X\setminus U)} + \tfrac{1}{d(x_m, X\setminus U)} + \epsilon \\ &\geqslant \epsilon. \end{aligned}$$

De modo que se tiene una contradicción, por lo tanto $x \in U$.

Por último se afirma que si $x \in U$ y $\{x_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión cuyos términos están en U y tal que converge a un punto x en la métrica d, entonces esa misma sucesión convergerá a x en la métrica d'.

En efecto: Sea $\epsilon > 0$ fija. Sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r^d(x) \subseteq U$. Sea $R = \min\{r, \epsilon\}$. Por hipótesis, existe $N_1 \in \omega$ tal que si $n > N_1$ entonces $d(x_n, x) < R$. Sabiendo que $B_R^d(x)$ es abierto en X y que $B_R^d(x) \subseteq B_r^d(x) \subseteq U$, tenemos que $B_R^d(x)$ es abierto en U. Entonces existe $\delta > 0$ con $\delta < \epsilon$ tal que $B_\delta^{d'}(x) \subseteq B_R^d(x)$. Como $B_\delta^{d'}(x) \subseteq U$, entonces $B_\delta^{d'}(x)$ es un abierto en X. Se tiene entonces que existe $\delta' > 0$ tal que $B^d_{\delta'}(x) \subseteq B^{d'}_\delta(x) \subseteq B^d_\epsilon(x)$, por lo tanto $\delta' \leqslant \epsilon$. Esto implica que existe $N_2 \in \omega$ tal que si $n > N_2$ entonces $d(x_n, x) < \delta'$. Así pues, si $n > N_2$, $x_n \in B^{d'}_\delta(x)$, y de aquí que $d'(x_n, x) < \delta < \epsilon$. Por lo tanto, si $n > N_2$, se tiene que: $d'(x_n, x) < \epsilon$. $\square$

Antes de seguir con el siguiente teorema, introduciremos la noción de conjunto G_δ.

1.2.17. Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto de X es G_δ en (X, τ) si puede ser expresado como una intersección numerable de abiertos.

1.2.18. Teorema. *Todo subconjunto G_δ no vacío de un espacio polaco es un espacio polaco (con la topología relativa).*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio polaco. Sea d_0 una métrica completa que nos da la definición de espacio completamente metrizable. Tal métrica la supondremos con valores menores o iguales que uno. Sea G un subconjunto G_δ de X. Note que G es separable, pues (X, τ) es 2AN. Supóngase que $G = \bigcap_{i=1}^\infty U_i$, donde U_i es un conjunto abierto para cada $i \in \omega \setminus \{0\}$. Podemos suponer que tenemos una cantidad infinita numerable de conjuntos distintos U_n, pues si sólo tuviéramos una cantidad finita de conjuntos distintos, entonces G sería abierto, por lo que también sería polaco, ver el Teorema 1.2.16.

Notemos también que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $U_{n+1} \subseteq U_n$. Entonces por el teorema 1.2.16, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, existe una métrica completa d_n en U_n que induce a la topología relativa. Más aún, podemos suponer que d_n no toma valores mayores que 1.

Definimos la relación $d' : G \times G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d'(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y).$$

Se tiene que d' es una métrica en G.

Primero note que d' es una función. Pues si $x, y, z \in G$ y $n \in \omega$, como $d_n(x, y) \leqslant 1$, entonces para cada $n \in \omega$, $\frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, de aquí se sigue

$$\sum_{n=0}^\infty \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y) \leqslant \sum_{n=0}^\infty \tfrac{1}{2^{n+1}} \in \mathbb{R},$$

es decir, las sumas parciales son crecientes y están acotadas superiormente por un número real, por lo tanto $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y) \in \mathbb{R}$. Con esto sabemos que d' es una función bien definida.

1. Si $d'(x, y) = 0$ entonces $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y) = 0$. Por ello tenemos que $d_0(x, y) = 0$, pues si $d_0(x, y) > 0$ entonces

$$0 < \tfrac{1}{2} d_0(x, y) \leqslant \sum_{n=0}^\infty \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x, y),$$

lo que sería una contradicción. Por lo tanto, $d_0(x,y)=0$, y de aquí que $x=y$.

Ahora si $x=y$, entonces para cada $n\in\omega$, $d_n(x,y)=0$. Por lo tanto, $d'(x,y)=0$.

2. Por otro lado, para cada $n\in\omega$ tenemos que $\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,y)\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,z)+\frac{1}{2^{n+1}}d_n(z,y)$. Por lo que:

$$\begin{array}{rcl}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,y) & \leqslant & \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,z)+\frac{1}{2^{n+1}}d_n(z,y)) \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(z,y).\end{array}$$

La última igualdad se debe a que si $\sum_{n\in\omega}a_n$ y $\sum_{n\in\omega}b_n$ son dos series convergentes. Entonces $\sum_{n\in\omega}a_{n\in\omega}+\sum_{n\in\omega}b_n=\sum_{n\in\omega}(a_n+b_n)$.

3. Por último, $d'(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(y,x)=d'(y,x)$.

Con lo que concluimos que d' es una distancia en G.

Procederemos ahora a probar que todo abierto en la topología relativa con G es abierto para la topología inducida por d'. Para ello es suficiente probar que para cada $x\in G$ y para cada $\epsilon>0$, $B^{d'}_{\frac{\epsilon}{2}}(x)\subseteq B^{d_0}_{\epsilon}(x)\cap G$. Efectivamente, sea $y\in B^{d'}_{\frac{\epsilon}{2}}(x)\subseteq G$, trivialmente $y\in G$. Además, $\frac{1}{2}d_0(x,y)\leqslant d'(x,y)<\frac{\epsilon}{2}$, por lo tanto $y\in B^{d_0}_{\epsilon}(x)$.

Recíprocamente, todo abierto de la topología inducida por d' es abierto de la topología relativa. Para probarlo tendremos que hacer notar las siguientes afirmaciones.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $\epsilon>0$ existe $n_0\in\omega$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{\epsilon}{2}$.

Efectivamente: Como $\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2^{n+1}}$ converge a alguna $R\in\mathbb{R}$ en la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces existe $N\in\omega$ tal que si $n_0>N$ entonces

$$\frac{\epsilon}{2}>|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{1}{2^{n+1}}|=|\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}|=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}},$$

con lo cual hemos probado la Afirmación (1). ⊠

AFIRMACIÓN(2): Para cada $n_0\in\omega$ y para cada $\epsilon>0$, existe $\delta_0>0$ tal que si para todo $n<n_0$ tenemos que $d_n(x,y)<\delta_0$, entonces $\sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,y)<\frac{\epsilon}{2}$.

En efecto: Sea $\delta_0<(\frac{\epsilon}{2})\frac{1}{\sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}}}$. Considérese $x,y\in G$ tales que:

$$\forall n<n_0:\ d_n(x,y)<\delta_0.$$

Con estas consideraciones tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}\sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}}d_n(x,y) & < & \sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}}\delta_0\\ & = & \delta_0\sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}}\\ & < & (\frac{\epsilon}{2})(\sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}})^{-1}(\sum_{n<n_0}\frac{1}{2^{n+1}})\\ & = & \frac{\epsilon}{2}.\end{array}$$

⊠

AFIRMACIÓN(3): Para cada $\delta_0 > 0$ y para cada $x \in G$, existe una sucesión de conjuntos de la forma $\{B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}_{i\in\omega}$ donde para cada $i \in \omega \setminus \{0\}$, se tiene que $0 < \delta_i < \delta_0$ y $B_{\delta_i}^{d_i}(x) \subseteq B_{\delta_{i-1}}^{d_{i-1}}(x)$.

En efecto: Para construir esta sucesión aplicaremos el principio de elecciones dependientes. Consideremos:

$$\mathcal{A} = \{\{B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k} : k \in \omega \setminus \{0\}; \forall i \in \{1,\dots,k\}, 0 < \delta_i < \delta_0;$$

$$\forall i \in \{0,\dots,k-1\}, B_{\delta_{i+1}}^{d_{i+1}}(x) \subseteq B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}.$$

Primero observaremos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Como para cada $n \in \omega$, d_n induce a la topología relativa en U_n, considerando $B_{\delta_0}^{d_0}(x)$, tenemos que $x \in B_{\delta_0}^{d_0}(x) \cap U_1$, por lo que $B_{\delta_0}^{d_0}(x) \cap U_1$ es un abierto en U_1 distinto del vacío, por esta razón existe $\tilde{\delta_1} > 0$ tal que:

$$B_{\tilde{\delta_1}}^{d_1}(x) \subseteq B_{\delta_0}^{d_0}(x) \cap U_1 \subseteq B_{\delta_0}^{d_0}(x)$$

Sea $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \text{mín}\{\tilde{\delta_1}, \delta_0\}$, entonces $B_{\delta_1}^{d_1}(x) \subseteq B_{\tilde{\delta_1}}^{d_1}(x) \subseteq B_{\delta_0}^{d_0}(x)$; es decir, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ consideramos la relación R:

- Sean $\{B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k_1}$, $\{B_{\gamma_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k_2}$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos

$$\{B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k_1} R \ \{B_{\gamma_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k_2} \text{ si y sólo si:}$$

  1. $\{B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k_1} \supseteq \{B_{\gamma_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k_2}$,
  2. $k_1 = k_2 + 1$.

Sea $\{B_{\delta_i}^{d_i}(x)\}_{i\leqslant k} \in \mathcal{A}$. Se tiene que $B_{\delta_k}^{d_k}(x) \cap U_{k+1}$ es abierto en X, pues sabemos que $B_{\delta_k}^{d_k}(x)$ es abierto en (U_k, d_k) y d_k induce la topología relativa sobre U_k. Entonces

$B^{d_k}_{\delta_k}(x) = V_k \cap U_k$ para algún V_k abierto de X, por lo que $B^{d_k}_{\delta_k}(x) \cap U_{k+1}$ es abierto en U_{k+1}. Entonces existe $\delta_{k+1} > 0$ con $\delta_{k+1} < \delta_0$ tal que:

$$B^{d_{k+1}}_{\delta_{k+1}}(x) \subseteq B^{d_k}_{\delta_k}(x) \cap U_{k+1} \subseteq B^{d_k}_{\delta_k}(x)$$

Luego, el principio de elecciones dependientes nos da una sucesión de abiertos con las características buscadas. ⊠

De todo lo anterior concluimos lo siguiente: Sean $\epsilon > 0$ y $x \in G$. Sabemos que existe $n_0 \in \omega$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$ (ver Afirmación(1)). Además, existe un $\delta_0 > 0$ tal que para todo natural $n < n_0$, si $d_n(x,y) < \delta_0$ entonces $\sum_{n<n_0} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x,y) < \frac{\epsilon}{2}$ (ver Afirmación(2)). Tenemos que existe una sucesión $\{B^{d_i}_{\delta_i}(x)\}_{i\in\omega}$ tal que para toda $i \in \omega \setminus \{0\}$, $0 < \delta_i < \delta_0$ y $B^{d_i}_{\delta_i}(x) \subseteq B^{d_{i-1}}_{\delta_{i-1}}(x)$ (ver Afirmación(3)). En particular $B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x) \cap G$ es un abierto en G, pues $B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x)$ es un abierto en U_{n_0-1}. Entonces existe V abierto en X tal que $B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x) = V \cap U_{n_0-1}$, y como U_{n_0-1} es un abierto en X, entonces $B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x)$ es un abierto en X y $B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x) \cap G$ lo es en G.

Se afirma que $B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x) \cap G \subseteq B^{d'}_{\epsilon}(x)$. Sea $y \in B^{d_{n_0-1}}_{\delta_{n_0-1}}(x) \cap G$, entonces para cada $n < n_0$, tenemos que $y \in B^{d_n(x)}_{\delta_n}$. Como para cada $n < n_0$, $\delta_n < \delta_0$, tenemos que:

$$\forall n < n_0 : \ d_n(x,y) < \delta_0.$$

Por lo tanto,

$$d'(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x,y) = \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x,y) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x,y) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Es decir, $y \in B^{d'}_{\epsilon}(x)$. Luego, todo abierto en la topología inducida por d' es abierto en la topología relativa sobre G.

Por último, probaremos que G es un espacio métrico completo. Para esto, sea $\{x_m\}_{m\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en G para d'. Sean $\epsilon > 0$ y $n \in \omega$, entonces existe $N_1 \in \omega$ tal que si $k, m > N_1$, $d'(x_k, x_m) < \epsilon$; y como $x_r \in U_n$ para cada $n \in \omega$, tenemos que $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en cada U_n para la métrica d'. Considerando otra vez $n \in \omega$, y por la observación, tenemos que existe $N_2 \in \omega$ tal que si $m_1, m_2 > N_2$, $d_n(x_{m_1}, x_{m_2}) \leqslant d'(x_{m_1}, x_{m_2}) < \epsilon$. Por lo que $\{x_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en U_n con respecto a d_n. Como (U_n, d_n) es completo, entonces la sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a un $C_n \in U_n$ respecto a la distancia d_n.

Además, la topología de cada U_{n+1} es la inducida desde U_n, con respecto a las métricas d_{n+1} y d_n, respectivamente.

Se afirma que si para cada $n \in \omega$, $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a C_n en U_n y a C_{n+1} en U_{n+1}, entonces $C_n = C_{n+1}$.

En efecto: Sabemos que U_{n+1} es abierto en U_n. Entonces existe $r > 0$ con $r < \epsilon$ tal que $B_r^{d_n}(C_{n+1}) \subseteq U_{n+1}$. Además $B_r^{d_n}(C_{n+1}) \cap U_{n+1} = B_r^{d_n}(C_{n+1})$; y tenemos que $B_r^{d_n}(C_{n+1}) = V \cap U_n$ para algún $V \subseteq X$ abierto para (X, τ). Por lo que $B_r^{d_n}(C_{n+1})$ es abierto en X, y de aquí que $B_r^{d_n}(C_{n+1})$ sea abierto en U_{n+1}. Entonces existe $r' > 0$ tal que $B_{r'}^{d_{n+1}}(C_{n+1}) \subseteq B_r^{d_n}(C_{n+1})$.

Por otro lado, como $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a C_{n+1} en la métrica d_{n+1}, existe $N_1 \in \omega$ tal que si $m > N_1$ entonces $d_{n+1}(x_m, C_{n+1}) < min\{r', \epsilon\}$. Pero, por construcción, tenemos que $B_{r'}^{d_{n+1}}(C_{n+1}) \subseteq B_r^{d_n}(C_{n+1})$. Por lo tanto, si $m > N_1$ entonces $d_n(x_m, C_{n+1}) < r < \epsilon$. Es decir, $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a C_{n+1} en la métrica d_n. Por lo tanto, $C_{n+1} = C_n$.

Luego, podemos concluir que todos los C_n son iguales a un mismo $C \in G$.

Para finalizar se afirma que $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a C en (G, d'). Para esto, sea $\epsilon > 0$ fija. Entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$ (ver Afirmación(1)). Además, existe un $\delta_0 > 0$ tal que para toda $n < n_0$, si $d_n(C, y) < \delta_0$ entonces $\sum_{n<n_0} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(C, y) < \frac{\epsilon}{2}$ (ver Afirmación(2)). Tenemos que existe una sucesión $\{B_{\delta_i}^{d_i}(C)\}_{i\in\omega}$ tal que para toda $i \in \omega \setminus \{0\}$, $0 < \delta_i < \delta_0$ y $B_{\delta_i}^{d_i}(C) \subseteq B_{\delta_{i-1}}^{d_{i-1}}(C)$ (ver Afirmación(3)). Como para toda $n < n_0$, la sucesión $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a C en la métrica d_n, entonces existe $\widetilde{N} \in \omega$ tal que si $m > \widetilde{N}$, entonces para toda $n < n_0$, $d_n(C, x_m) < \delta_n < \delta_0$. Entonces si $m > \widetilde{N}$ y si $n < n_0$, $x_m \in B_{\delta_n}^{d_n}(C) \subseteq U_n$. Así pues, si $m > \widetilde{N}$,

$$\forall n < n_0 : \ d_n(x_m, C) < \delta_0.$$

Luego,

$$\forall m > \widetilde{N} : \ \sum_{n<n_0} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x_m, C) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\forall m > \widetilde{N} : \ d'(x_m, C) < \epsilon.$$

□

El siguiente teorema, junto con el teorema 1.2.18, nos hará ver que los subespacios cerrados de un espacio polaco siempre son polacos.

1.2.19. Teorema. *En un espacio metrizable, todo subconjunto cerrado es un conjunto G_δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio metrizable con la métrica d. Sea $C \subseteq X$ cerrado. Si $C = \emptyset$ ó $C = X$ entonces C es un G_δ. Así que podemos suponer que $C \neq \emptyset$ y $C \neq X$.

Para cada $\epsilon > 0$, consideremos al conjunto $B_\epsilon(C) = \{x \in X | d(x, C) < \epsilon\}$. Se afirma que para cada $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(C)$ es abierto en X.

En efecto: Si $X \setminus B_\epsilon(C) = \emptyset$ entonces $B_\epsilon(C) = X$, por lo que tal conjunto es abierto. Ahora, supóngase que $X \setminus B_\epsilon(C) \neq \emptyset$. Considérese $\{x_m\}_{m\in\omega}$ una sucesión sobre $X \setminus B_\epsilon(C)$ tal que converge a algún $x \in X$. Si $x \in B_\epsilon(C)$ entonces $d(x, C) < \epsilon$, por lo que existiría $z \in C$ tal que $d(x, z) < \epsilon$. Luego, existiría $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon - d(x, z)$. Así pues, si $n > N$ entonces

$$d(x_n, C) \leqslant d(x_n, z) \leqslant d(x_n, x) + d(x, z) < \epsilon;$$

es decir, si $n > N$ se tiene que $x_n \in B_\epsilon(C)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \notin B_\epsilon(C)$. En consecuencia, $X \setminus B_\epsilon(C)$ es cerrado y, de aquí que, $B_\epsilon(C)$ es abierto.

Observe ahora que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(C)$. Efectivamente, por un lado, si $x \in C$ entonces $d(x, C) \leqslant d(x, x) = 0$, por lo tanto para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ tenemos que $d(x, C) < \frac{1}{n}$. Por otro lado, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(C)$ entonces $d(x, C) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Si $x \in X \setminus C$, como $X \setminus C$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq X \setminus C$. Así que si $z \in C$ entonces $d(x, z) \geqslant r$. Pero existe $n \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Por ello $d(x, C) > \frac{1}{n}$; por lo tanto $x \in X \setminus B_{\frac{1}{n}}(C)$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto $x \in C$.

De todo lo anterior se concluye que C es un conjunto G_δ. □

Veremos ahora un teorema de la Topología General que utilizaremos en muchas ocasiones.

1.2.20. Teorema. *Supongamos que (X, τ) es un espacio metrizable por una métrica completa d. Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos tales que, para cada $n \in \omega$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, y tal que la sucesión $\{diam_d(A_n)\}_{n\in\omega}$ converge a 0. Entonces $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \{x\}$, para algún $x \in X$.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$, fijemos un único $x_n \in A_n$. Con estos elementos fijos, consideremos a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Probaremos que dicha sucesión es de Cauchy en la métrica d. Para esto, sea $\epsilon > 0$ fija, entonces existe $N \in \omega$ tal que $diam_d(A_N) < \epsilon$. Como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es decreciente, tenemos que para cada $m, n > N$, $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Con lo cual $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy y converge a algún $x \in X$.

Por otro lado, sea $j \in \omega$ fija. Consideramos a la sucesión $\{x_{j+i}\}_{i\in\omega}$, la cual es una sucesión sobre A_j y convergente al punto x en la métrica d. Por lo tanto $x \in A_j$, puesto que A_j es cerrado.

Por último, si existíera otro punto $y \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$ distinto de x, entonces para cada $k \in \omega$ tenemos que $diam_d(A_n) \geqslant d(x, y) > 0$. Pero $\{diam_d(A_n)\}_{n\in\omega}$ converge a 0. Así que existe $N \in \omega$ tal que $n > N$ implica que $diam_d(A_n) < d(x, y) \leqslant diam_d(A_n)$, lo cual es una contradicción. $\square$

A continuación veremos cómo son los subespacios polacos de un espacio polaco.

1.2.21. Teorema. *Todo subespacio polaco no vacío de un espacio polaco es un subconjunto G_δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio polaco. Sea $\emptyset \neq Y \subseteq X$ tal que (Y, τ_Y) es polaco. Sea d una métrica completa que induce a τ y sea d_0 una métrica completa que induce a τ_Y. Como X es un espacio polaco, tenemos que existe una base numerable $\{U_n\}_{n\in\omega}$ para (X, τ). Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, sea V_n la unión de todos aquellos abiertos $W \in \{U_m\}_{m\in\omega}$ tales que $W \cap Y \neq \emptyset$ y $diam_{d_0}(W \cap Y) < \frac{1}{n}$.

Se afirma que $Y = \overline{Y}^d \cap \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} V_n$, donde $\overline{Y}^d$ es la cerradura de Y con respecto a la métrica d.

Efectivamente: Sea $y \in Y$. Como $Y \subseteq \overline{Y}^d$, tenemos que $y \in \overline{Y}^d$. Además para cualquier $n \in \omega \setminus \{0\}$, se tiene que $y \in B^{d_0}_{\frac{1}{4n}}(y)$. Como $B^{d_0}_{\frac{1}{4n}}(y)$ es abierto en Y, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ existe $\widetilde{W_n}$ abierto en (X, τ) tal que $B^{d_0}_{\frac{1}{4n}}(y) = \widetilde{W_n} \cap Y$. Como $y \in \widetilde{W_n}$, existe $U_{m_n} \in \{U_m\}_{m\in\omega}$ tal que $y \in U_{m_n} \subseteq \widetilde{W_n}$. Luego $y \in U_{m_n} \cap Y \subseteq \widetilde{W_n} \cap Y = B^{d_0}_{\frac{1}{4n}}(y)$; es decir, $U_{m_n} \cap Y \neq \emptyset$ y $diam_{d_0}(U_{m_m} \cap Y) < \frac{1}{n}$. Por lo tanto $y \in \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} V_n$.

Por otro lado, sea $x \in \overline{Y}^d \cap \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} V_n$, entonces $x \in \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} V_n$. Por el axioma de elección para conjuntos numerables, tomamos una sucesión $\{U'_{m_n}\}_{n\in\omega\setminus\{0\}}$ de elementos de la base $\{U_m\}_{m\in\omega}$ tales que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$: $x \in U'_{m_n}$, $Y \cap U'_{m_n} \neq \emptyset$ y $diam_{d_0}(Y \cap U_{m_n}) < \frac{1}{n}$. Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, definimos:

$$W_n = B^d_{\frac{1}{4n}}(x) \cap U'_{m_1} \cap \ldots \cap U'_{m_n}.$$

Cada conjunto W_n es abierto en (X, τ) y además $W_n \neq \emptyset$, pues $x \in W_n$. Por lo que existe $0 < \epsilon_n < \frac{1}{4n}$ tal que $B^d_{\epsilon_n}(x) \subseteq W_n$. Como $x \in \overline{Y}^d$, $B^d_{\epsilon_n}(x) \cap Y \neq \emptyset$; lo que implica que $W_n \cap Y \neq \emptyset$. También observemos que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $diam_d(W_n) < \frac{1}{n}$ (pues $W_n \subseteq B^d_{\frac{1}{4n}}(x)$) y que $W_{n+1} \subseteq W_n$.

Consideremos ahora la siguiente sucesión de conjuntos: $\{\overline{W_n \cap Y}^{d_0}\}_{n\in\omega}$. No es difícil demostrar que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $diam_{d_0}(W_n \cap Y) = diam_{d_0}(\overline{W_n \cap Y}^{d_0})$.

Así pues, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} \overline{W_n \cap Y}^{d_0} = \{y\}$ para alguna $y \in Y$.

Sea ahora $n \in \omega \setminus \{0\}$ arbitrario. Sabemos que $x \in W_n$, por lo que $x \in \overline{W_n}^d$. Además $y \in \overline{W_n \cap Y}^{d_0} \subseteq \overline{W_n}^{d_0} \cap \overline{Y}^{d_0}$, entonces $y \in \overline{W_n}^d$ (pues $y \in \overline{W_n}^{d_0} \subseteq \overline{W_n}^d$). Como

$diam_d(\overline{W_n}^d) = diam_d(W_n) < \frac{1}{n}$, se concluye que $d(x,y) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, de aquí se sigue que $d(x,y) = 0$. Entonces $y = x$. Pero $y \in Y$, por lo tanto $x \in Y$.

De esta manera, podemos concluir que $Y = \overline{Y}^d \cap \bigcap_{n\in\omega\setminus\{0\}} V_n$. Por el teorema 1.2.19, $\overline{Y}^d$ es un G_δ. Se sigue que Y también es un conjunto G_δ. □

1.2.22. Teorema. *Todo producto finito de espacios polacos es un espacio polaco.*

Demostración. Sean $(X_0, \tau_0), \ldots, (X_m, \tau_m)$ una familia finita de espacios polacos no vacíos. Sea $X = \prod_{n=0}^m X_n$ con la topología producto de Tychonoff. Vamos a demostrar que X es polaco. Para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, sea d_n una métrica completa fija que induzca la topología de (X_n, τ_n) y que tome valores menores o iguales que uno.

Definimos la relación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{m} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n),$$

donde $x_n = x(n)$ y $y_n = y(n)$. No es difícil demostrar que d es una métrica sobre X.

Procederemos ahora a mostrar que la distancia d induce la topología producto de Tychonoff.

Sea $\emptyset \neq A \subseteq X$ un abierto sobre el producto de Tychonoff y sea $x \in A$. Para cada $\epsilon > 0$ y para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, definimos $B^n_\epsilon(x) = \bigcap_{i=0}^n \Pi_i^{-1}(B^{d_i}_\epsilon(x_i))$, donde para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $x_i = x(i)$ y $\Pi_j : \prod_{i=1}^m X_i \to X_j$ es la j-ésima función proyección. Como A es abierto en el producto de Tychonoff, tenemos que existen $\epsilon > 0$ y $n \in \{0 \ldots, m\}$ tales que $B^n_\epsilon(x) \subseteq A$. Se afirma que $B^d_{\frac{\epsilon}{2^{n+1}}}(x) \subseteq B^n_\epsilon(x)$. Efectivamente, sea $y \in B^d_{\frac{\epsilon}{2^{n+1}}}(x)$, entonces $d(y,x) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$, por lo que si $i \in \{0, \ldots, n\}$ tenemos que $\frac{1}{2^{i+1}} d_i(x_i, y_i) < \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon$. Por lo tanto $d_i(x_i, y_i) < \frac{2^{i+1}}{2^{n+1}}\epsilon \leqslant \epsilon$; es decir, $y \in B^n_\epsilon(x)$. Luego, los abiertos del producto de Tychonoff son abiertos para la topología inducida por la métrica d.

Por otro lado, sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$, consideramos $B^d_\epsilon(x)$. Se afirma que $B^m_{\frac{\epsilon}{m+1}}(x) \subseteq B^d_\epsilon(x)$. Sea $y \in B^m_{\frac{\epsilon}{m+1}}(x)$, entonces $d_i(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{m+1}$ para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$. Así pues $d(x,y) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \leqslant \sum_{n=0}^m d_n(x_n, y_n) < \sum_{n=0}^m \frac{\epsilon}{m+1} = \epsilon$. Luego, $y \in B^m_{\frac{\epsilon}{m+1}}(x)$. Por lo tanto la topología inducida por la métrica d coincide con la topología producto de Tychonoff.

Por otra parte, como para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, $(X_n \tau_n)$ es polaco. Entonces para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, podemos considerar una base numerable $\mathcal{U}_n$ para X_n.

Definamos $\mathcal{U} = \{\bigcap_{i=0}^n \Pi_i^{-1}(u_i) | n \in \{0, \ldots, m\}; u_i \in \mathcal{U}_i\}$. Se afirma que la familia $\mathcal{U}$ es una base numerable para la topología producto para X.

En efecto: Sean $A \subseteq X$ un abierto no vacío y $x \in A$. Como A es abierto en X, existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(x) \subseteq A$. Además, para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, $B^{d_n}_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n)$ es abierto en X_n. De aquí que existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x_n \in U_n \in B^{d_n}_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n)$. Consideramos $U = \bigcap_{n=0}^m \Pi_n^{-1}(U_n)$. Sea $y \in U$, entonces para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$ se tiene que $\frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \frac{1}{2^{n+2}}\epsilon$, con lo que $d(x, y) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \epsilon \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^{n+2}} = \epsilon \frac{2^{m+1}-1}{2^{m+2}} < \epsilon$. Por lo tanto, $y \in B^d_\epsilon(x) \subseteq A$. Además $x \in U$. Por lo que $\mathcal{U}$ es una base para X. Esta base es numerable, pues para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, $\mathcal{U}_n$ es numerable, y como para cada $k \in \omega$, ω^k tiene la misma cardinalidad que ω, entonces $\mathcal{U}$ es numerable.

Debido a que todo espacio topológico que cumple 2AN es separable, se concluye que X lo es.

Por último, verificaremos que X es completo. Para esto, si $\{x^i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en el producto, tenemos que si $\epsilon > 0$ y $n \in \{0, \ldots, m\}$, entonces existe $N \in \omega$ tal que $i, j > N$ implica que $d(x^i, x^j) < \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon$. Así pues para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, si $i, j > N$ entonces $\frac{1}{2^{n+1}} d_n(x^i_n, x^j_n) \leqslant d(x^i, x^j) < \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon$. Por lo tanto, para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, $\{x^i_n\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en X_n. Luego, cada sucesión $\{x^i_n\}_{i\in\omega}$ converge a un elemento $x_n \in X_n$.

Consideramos $x : \omega \to \bigcup_{i=0}^m X_i$ dada por $x(i) = x_i$. Se afirma que la sucesión $\{x^i\}_{i\in\omega}$ converge a un punto x en la métrica d.

Efectivamente: Sean $\epsilon > 0$ y $n \in \{0, \ldots, m\}$. Tenemos que existe $N_n \in \omega$ tal que si $i > N_n$, entonces $d_n(x^i_n, x_n) < \frac{\epsilon(2^{n+1})}{2(m+1)}$. Sea $N = max\{N_0, \ldots, N_m\}$. Si $i > N$ entonces

$$d(x^i, x) = \sum_{n=0}^m \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x^i_n, x_n) < \sum_{n=0}^m \tfrac{1}{2^{n+1}} \tfrac{\epsilon(2^{n+1})}{2(m+1)} = \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Por lo que la sucesión $\{x^i\}_{i\in\omega}$ converge a x. Se concluye entonces que d es completa y X es un espacio polaco. □

El siguiente teorema generaliza al anterior y nos servirá al trabajar con los espacios de sucesiones, en particular con el espacio de Baire y el de Cantor.

1.2.23. Teorema. *Todo producto infinito numerable de espacios polacos no vacíos es un espacio polaco.*

Demostración. Sea $\{X_n\}_{n\in\omega}$ una familia infinita numerable de espacios polacos no vacíos. Sea $X = \prod_{n=0}^\infty X_n$. Para cada $n \in \omega$, denotemos por τ_n a la topología del conjunto X_n, además consideremos una métrica completa d_n para X_n cuyos valores sean menores o iguales que uno.

Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n).$$

La relación d es una distancia en X. En efecto: Sean $x, y, z \in X$, por notación si $i \in \omega$, entonces $x_i = x(i)$, $y_i = y(i)$ y $z_i = z(i)$.

Primero notemos que

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^{n+1}} \in \mathbb{R}.$$

Además para cada $n \in \omega$, $d_n(x_n, y_n)$ tiene un único valor. Por lo tanto d es una función bien definida.

1. Si $d(x,y) = 0$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) = 0$. Si existíera $m \in \omega$ tal que $d_m(x_m, y_m) > 0$, entonces $0 < \frac{1}{2^{m+1}} d_m(x_m, y_m) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n)$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto para cada $m \in \omega$, $d_m(x_m, y_m) = 0$; es decir, $\forall m \in \omega$, $x_m = y_m$, y de aquí que $x = y$.

   Recíprocamente, si $x = y$, entonces $x_n = y_n$ para cada $n \in \omega$, lo que implica que: $\forall n \in \omega$, $d_n(x_n, y_n) = 0$. Por lo tanto $d(x,y) = 0$.

2. Por otro lado $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(y_n, x_n)$. Por lo que $d(x,y) = d(y,x)$.

3. En cuanto a la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \\ & \leqslant & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n)) \\ & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, z_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(z_n, y_n). \end{array}$$

   La última igualdad se debe a que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, z_n)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(z_n, y_n)$ son series convergentes. Por lo tanto $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Con lo que se concluye que d es una métrica.

Ahora, procederemos a demostrar que d induce la topología producto de $\prod_{n\in\omega} X_n$. Obviamente en ambas topologías se encuentra el conjunto vacío.

Sea $\emptyset \neq A \subseteq X$ un abierto sobre la topología del producto de Tychonoff de X. Sea $x \in A$ y por notación consideraremos para cada $i \in \omega$, $x_i = x(i)$. Para cada $\epsilon > 0$ y cada $m \in \omega$ definimos $B_\epsilon^m(x) = \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_i^{-1}(B_\epsilon^{d_i}(x_i))$, donde para cada $i \in \omega$, $\Pi_i : X \to X_i$ es la i-ésima proyección. Como A es un abierto distinto del vacío en el producto de Tychonoff, se tiene que existen $\epsilon > 0$ y $m \in \omega$ tales que $B_\epsilon^m(x) \subseteq A$.

Se afirma que $B^d_{\frac{\epsilon}{2^{m+1}}}(x) \subseteq B^m_\epsilon(x)$. Efectivamente: Sea $y \in B^d_{\frac{\epsilon}{2^{m+1}}}(x)$, entonces $d(y,x) < \frac{\epsilon}{2^{m+1}}$. Sea $i \leqslant m$ entonces

$$\frac{1}{2^{i+1}} d_i(x_i, y_i) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2^{m+1}}.$$

Luego, $d_i(x_i, y_i) < \frac{2^{i+1}}{2^{m+1}}\epsilon \leqslant \epsilon$; es decir $y_i \in B^{d_i}_\epsilon(x_i)$. Por lo tanto $y \in B^m_\epsilon(x)$. De aquí concluimos que los abiertos del producto de Tychonoff son abiertos para la topología inducida por la métrica d.

Recíprocamente, ya sabemos que para cada $\epsilon > 0$ existe $m \in \omega$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$.

Además para cada $m \in \omega \setminus \{0\}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall n \leqslant m,\ d_n(x_n, y_n) < \delta \text{ implica que } \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pues si $\delta < (\frac{\epsilon}{2})\frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}}}$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) & < & \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} \delta \\ & = & \delta \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} \\ & < & (\frac{\epsilon}{2}) \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}}} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} \\ & = & \frac{\epsilon}{2}. \end{array}$$

Por lo tanto, dada $\epsilon > 0$, consideraremos $m \in \omega$ de la primera observación y $\delta > 0$ de la segunda con respecto a la m recién escogida. De estas elecciones se afirma que $B^m_\delta(x) \subseteq B^d_\epsilon(x)$. En efecto: Sea $y \in B^m_\delta(x)$. Entonces para cada $i \leqslant m$, $d_i(x_i, y_i) < \delta$. Luego

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) & = & \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \\ & < & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ & = & \epsilon. \end{array}$$

Por lo tanto $y \in B_\epsilon(x)$.

Con todo lo anterior podemos ya concluir que la topología inducida por la métrica d en X coincide con la topología producto de Tychonoff en X.

Ahora, como para cada $n \in \omega$, X_n es un espacio polaco, entonces tomamos una única base numerable $\mathcal{U}_n$ para X_n. Consideramos al siguiente conjunto $\mathcal{U} = \{\bigcap_{i=0}^{m} \Pi_i^{-1}(u_i) | m \in \omega; u_i \in \mathcal{U}_i\}$. Se afirma que $\mathcal{U}$ es una base numerable para X.

Sea $\emptyset \neq A \subseteq \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ un abierto y $x \in A$. Como A es abierto, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(x) \subseteq A$. Además, tenemos que por la propiedad arquimediana, existe

$N \in \omega$ tal que $1 < 2^N \epsilon$. Sabemos que para cada $n \in \{0, \dots, N\}$, $B^{d_n}_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n)$ es un abierto en X_n. Tomamos un único $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x_n \in U_n \subseteq B^{d_n}_{\frac{\epsilon}{2}}(x_n)$. Con esto en mente, consideramos al conjunto $U = \bigcap_{n=0}^{N} \Pi_n^{-1}(U_n)$. Probaremos que $x \in U \subseteq A$.

Por ello, sean $y \in U$ y $n \in \{0, \dots, N\}$, tenemos que $\frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \frac{1}{2^{n+2}}\epsilon$. Recordando que si $r \neq 1$ y $s = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i$, entonces $s = a\frac{1-r^n}{1-r}$. En particular:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) & < & \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+2}}\epsilon \\ & = & \epsilon \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+2}} \\ & = & \epsilon(\frac{1}{2^2}) \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \\ & = & \epsilon(\frac{1}{2^2}) \frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}} \\ & = & \frac{1}{2^2}\epsilon \frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{1}{2}} \\ & = & \frac{1}{2}\epsilon(1 - \frac{1}{2^{N+1}}) \\ & = & \epsilon(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+2}}) \\ & = & \epsilon\frac{2^{N+1}-1}{2^{N+2}}. \end{array}$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \epsilon(\frac{2^{N+1}-1}{2^{N+2}})$.

Mientras que para $n > N$, tenemos que $d_n(x_n, y_n) \leqslant 1$, así pues $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+N+2}} = \frac{1}{2^{N+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = (\frac{1}{2^{N+2}})\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{N+1}} < \frac{\epsilon}{2}$; luego

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Utilizando estas dos últimas observaciones, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} d(x, y) & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \\ & = & \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n, y_n) \\ & < & \epsilon(\frac{2^{N+1}-1}{2^{N+2}}) + \frac{\epsilon}{2} \\ & = & \epsilon(\frac{2^{N+1}-1+2^{N+1}}{2^{N+2}}) \\ & = & \epsilon(\frac{2^{N+2}-1}{2^{N+2}}) \\ & < & \epsilon. \end{array}$$

Por lo tanto $y \in B^d_\epsilon(x) \subseteq A$.

Además observemos que $x \in U$. Con lo que se concluye que $\mathcal{U}$ es una base para X. Note que esta base es numerable, pues para cada $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n$ es numerable, y $\bigcup_{k \in \omega} \omega^k$ tiene la misma cardinalidad que ω. Por lo tanto X cumple el 2AN. De aquí se sigue que X es separable.

Por último, demostraremos que $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ es completo. Para esto, sea $\{x^i\}_{i\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en el producto. Sea $n \in \omega$ fija, se afirma que $\{x_n^i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy en X_n. Sea $\epsilon > 0$ fija, entonces existe $N \in \omega$ tal que si $i, j > N$, $d(x^i, x^j) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Así pues, si $i, j > N$, $\frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n^i, x_n^j) \leqslant d(x^i, x^j) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Por lo tanto $\{x_n^i\}_{i\in\omega}$ es de Cauchy en X_n. Por ende, para cada $n \in \omega$, la sucesión $\{x_n^i\}_{i\in\omega}$ converge a un punto $x_n \in X_n$. Con esta notación, definimos al elemento $x : \omega \to \bigcup_{i\in\omega} X_i$ dada por $x(i) = x_i$.

Se afirma que $\{x^i\}_{i\in\omega}$ converge a x en la métrica d.

En efecto: Sea $\epsilon > 0$ fija, entonces existe $m \in \omega$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos que para cada $n \in \{0, \dots, m\}$ fija, existe $N_n \in \omega$ tal que si $i > N$ entonces $d_n(x_n^i, x_n) < \frac{\epsilon(2^{n+1})}{2(m+1)}$. Consideremos $N = max\{N_0, \dots, N_m\}$. Tómese $i > N$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} d(x^i, x) & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n^i, x_n) \\ & = & \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n^i, x_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(x_n^i, x_n) \\ & < & \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\epsilon(2^{n+1})}{2(m+1)} + \frac{\epsilon}{2} \\ & = & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ & = & \epsilon. \end{array}$$

Luego, la sucesión $\{x^i\}_{i\in\omega}$ converge a x, y por lo tanto d es una métrica completa, con lo que se concluye que X es un espacio polaco. □

Ahora, con el teorema inmediato anterior, tenemos un resultado inmediato relacionado con la siguiente definición.

1.2.24. Definición. El *cubo de Hilbert* es el espacio $\mathbb{H} = \mathbb{I}^\omega$ con la topología de Tychonoff, donde $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Como todo producto numerable de espacios polacos es polaco y el espacio $\mathbb{I}$ es polaco como subespacio de $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{H}$ es polaco. Además, $\mathbb{H}$ tiene la siguiente propiedad universal.

1.2.25. Teorema. *Todo espacio métrico separable no vacío es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio métrico separable con métrica d la cual toma valores menores o iguales que uno. Sea $D = \{x_i\}_{i\in\omega}$ un subconjunto denso numerable en X. Definimos la función $f : X \to \mathbb{H}$ por medio de $f(x) = \{d(x, x_i)\}_{i\in\omega}$.

Procederemos a probar que la función f es continua sobre X. Sean $x \in X$ y A un abierto en $\mathbb{H}$ tal que $f(x) \in A$. Entonces existen $B_{\alpha_0}, \dots, B_{\alpha_m}$ abiertos en $[0, 1]$ tales que $f(x) \in \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}(B_{\alpha_i}) \subseteq A$. Como $B_{\alpha_0}, \dots, B_{\alpha_m}$ son abiertos en $[0, 1]$ y además

$\Pi_{\alpha_j}(f(x)) = d(x, x_{\alpha_j}) \in B_{\alpha_j}$ para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $d(x, x_{\alpha_j}) \in B^e_\epsilon(d(x, x_{\alpha_j})) \cap [0,1] \subseteq B_{\alpha_j}$ para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, donde $B^e_\epsilon(d(x, x_{\alpha_j}))$ denota la bola abierta para la topología euclidiana de radio ϵ y con centro en $d(x, x_{\alpha_j})$. Así pues, como $f(x) = \{d(x, x_i)\}_{i \in \omega} \in \bigcap_{i=0}^m \Pi^{-1}_{\alpha_i}(B^e_\epsilon(d(x, x_{\alpha_i})) \cap [0,1]) \subseteq A$. Ahora, sea $j \in \{0, \ldots, m\}$, consideramos al conjunto $\Pi^{-1}_{\alpha_j}(B^e_\epsilon(d(x, x_{\alpha_j})) \cap [0,1])$, como la función $d(i, x_{\alpha_j})$ es continua sobre X, se tiene que existe $\delta_j > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta_j$ entonces $|d(y, x_{\alpha_j}) - d(x, x_{\alpha_j})| < \epsilon$. Sea $\delta = min\{\delta_0, \ldots, \delta_m\}$.

Se afirma que:

$$\forall j \in \{0, \ldots, m\} : \ f[B^d_\delta(x)] \subseteq \Pi^{-1}_{\alpha_j}[B^e_\epsilon(d(x, x_{\alpha_j}))] \cap [0,1]).$$

En efecto: Sean $y \in f[B^d_\delta(x)]$ y $j \in \{0, \ldots, m\}$. Existe $z \in B^d_\delta(x) \subseteq B^d_{\delta_j}(x)$ tal que $f(z) = y$; es decir $z \in B^d_{\delta_j}(x)$. Se tiene que $d(x,z) < \delta_j$, entonces $|d(z, x_{\alpha_j}) - d(x, x_{\alpha_j})| < \epsilon$. De esta manera se tiene lo siguiente: $\Pi_{\alpha_j}(y) = \Pi_{\alpha_j}(f(z)) = \Pi_{\alpha_j}(\{d(z, x_i)\}_{i \in \omega}) = d(z, x_{\alpha_j}) \in B^e_\epsilon(d(x, x_{\alpha_j}))$.

Además $x \in B^d_\delta(x)$. Por lo tanto f es una función continua.

También se tiene que f es inyectiva. Pues si existíeran $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$. Entonces existiría $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(x) \cap B^d_\epsilon(y) = \emptyset$. Por un lado, como D es denso sobre X, existe $x_i \in D \cap B^d_\epsilon(x)$, y como $f(x) = f(y)$, $d(y, x_i) = d(x, x_i) < \epsilon$, por lo que $x_i \in B^d_\epsilon(y)$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto f es inyectiva.

Por último probaremos que f es un homeomorfismo en su imagen. Para esto tomaremos una sucesión en $f[X]$ que converja a un punto en $f[X]$. Supóngase que la sucesión en cuestión es de la forma $\{f(x^i)\}_{i \in \omega}$ y el límite es $f(x)$, donde $x \in X$ y $x^i \in X$ para cada $i \in \omega$. Vamos a demostrar que $\{x^i\}_{i \in \omega}$ converge a x. Para ello, sea $n \in \omega$ fija. Consideramos al elemento $x_n \in D$.

Se afirma que $\lim_i d(x^i, x_n) = d(x, x_n)$. En efecto: Sea $\epsilon > 0$ fija. Sabemos que $\lim_i f(x^i) = f(x)$, entonces existe $N_n \in \omega$ tal que si $m > N_n$ entonces $\delta(f(x^m), f(x)) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$, donde δ es la métrica de $\mathbb{H}$; explícitamente, $\delta(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^{j+1}} d_j(\overline{x}_j, \overline{y}_j) = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^{j+1}} |\overline{x}_j - \overline{y}_j|$. Así pues, para cada $n \in \omega$, si $m > N_n$ entonces $\frac{1}{2^{n+1}} |d(x^m, x_n) - d(x, x_n)| \leqslant \delta(f(x^m), f(x)) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Luego, $\forall m > N_n$: $|d(x^m, x_n) - d(x, x_n)| < \epsilon$. Por lo tanto $\lim_i d(x^i, x_n) = d(x, x_n)$.

Con todo lo anterior en mente, sea $\epsilon > 0$ fija, como D es denso, existe $n \in \omega$ tal que $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{(2)(4)}$. Por otro lado, como $\lim_i d(x^i, x_n) = d(x, x_n)$, entonces existe $N \in \omega$ tal que para toda $i > N$, se tiene que $d(x^i, x_n) - d(x, x_n) \leqslant |d(x^i, x_n) - d(x, x_n)| < \frac{\epsilon}{(4)(2)}$. Entonces $d(x^i, x_n) < \frac{\epsilon}{(4)(2)} + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{(4)(2)} + \frac{\epsilon}{(4)(2)} = \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo que si $i > N$, $d(x^i, x) \leqslant d(x^i, x_n) + d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{5}{8}\epsilon < \epsilon$. Por lo tanto $\{x^i\}_{i \in \omega}$ converge al punto x con la métrica d. $\square$

A continuación se demostrará un teorema que utilizaremos para poder metrizar a algunos espacios topológicos.

1.2.26. Teorema. *Sean Y y Z dos espacios topológicos, donde Z es metrizable. Si existe un homeomorfismo $G : Y \to Z$ entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sea $d : Z \times Z \to \mathbb{R}$ una métrica que induce la topología de Z. Consideramos $D : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por:

$$D(x, y) = d(G(x), G(y)),$$

esta función es una métrica sobre Y. En efecto: Sean $x, y, z \in Y$, tenemos que:

$$\begin{aligned} D(x, y) = 0 \quad &\iff \quad d(G(x), G(y)) = 0 \\ &\iff \quad G(x) = G(y) \\ &\iff \quad x = y. \end{aligned}$$

Por otro lado, $D(x, y) = d(G(x), G(y)) = d(G(y), G(x)) = D(y, x)$.

Por último, $D(x, y) = d(G(x), G(y)) \leqslant d(G(x), G(z)) + d(G(z), G(y)) = D(x, z) + D(z, y)$. Por lo tanto D es una métrica sobre Y.

Resta probar que D induce la topología de Y.

Sean $\emptyset \neq A \subseteq Y$ abierto para la topología de Y y $y \in A$, entonces $G(y) \in G(A)$, y como $G(A)$ es un abierto sobre Z, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B^d_\epsilon(G(y)) \subseteq G(A)$. Se afirma que $B^D_\epsilon(y) \subseteq A$. Efectivamente: Sea $z \in B^D_\epsilon(y)$, entonces $d(G(y), G(z)) = D(y, z) < \epsilon$, entonces $G(z) \in B^D_\epsilon(G(y)) \subseteq G(A)$, por lo tanto $z \in A$.

Por otro lado, sean $\emptyset \neq A \subseteq Y$ abierto para la topología inducida por D y $y \in A$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B^D_\epsilon(y) \subseteq A$. Se afirma que $G(B^D_\epsilon(y)) = B^d_\epsilon(G(y))$. En efecto: Sea $z \in G(B^D_\epsilon(y))$, entonces existe $z_0 \in B^D_\epsilon(y)$ tal que $G(z_0) = z$, así pues, $d(G(y), z) = d(G(y), G(z_0)) = D(y, z_0) < \epsilon$; es decir $z \in B^d_\epsilon(G(y))$. Ahora, si $z \in B^d_\epsilon(G(y))$, por un lado existe $z_0 \in Y$ tal que $G(z_0) = z$. Entonces $D(z_0, y) = d(z, G(y)) < \epsilon$. Luego $z_0 \in B^D_\epsilon(y)$, por lo tanto $z \in G(B^D_\epsilon(y))$.

Con todo lo anterior se concluye que Y es metrizable. $\square$

El siguiente teorema nos será útil a la hora de tratar espacios homeomorfos en el que al menos uno de ellos es polaco.

1.2.27. Teorema. *Sean X, Y espacios topológicos y $F : X \to Y$ un homeomorfismo. Si X es polaco entonces Y también lo es.*

Demostración. Consideramos $F^{-1} : Y \to X$ la inversa de F, claramente también F^{-1} es un homeomorfismo. Sea d una métrica completa sobre X que induce la topología de X y sea Δ un subconjunto denso numerable de X.

Consideramos $D : Y \times Y \to \mathbb{R}$ dada por:

$$D(x, y) = d(F^{-1}(x), F^{-1}(y)).$$

Ya sabemos que D es una métrica y que induce la topología de Y.

Se afirma que D es completa. En efecto: Sea $\{y_i\}_{i\in\omega}$ una sucesión de Cauchy sobre Y. Consideramos la sucesión $\{F^{-1}(y_i)\}_{i\in\omega}$, la cual es una sucesión sobre X. Además $\{F^{-1}(y_i)\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy sobre X, pues si $\epsilon > 0$, como $\{y_i\}_{i\in\omega}$ es de Cauchy, existe $N \in \omega$ tal que si $m, n > N$ entonces $d(F^{-1}(y_n), F^{-1}(y_m)) = D(y_n, y_m) < \epsilon$. Como d es completa, entonces $\{F^{-1}(y_i)\}_{i\in\omega}$ converge a algún punto $x \in X$ con la métrica d. Se probará que $\{y_i\}_{i\in\omega}$ converge a $F(x)$ en la métrica D. Para esto, sea $\epsilon > 0$ como $\{F^{-1}(y_i)\}_{i\in\omega}$ converge, existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $D(y_n, F(x)) = d(F^{-1}(y_n), x) < \epsilon$. Por lo tanto $\{y_i\}_{i\in\omega}$ converge a $F(x)$.

Por último se afirma que $F(\Delta)$ es un subconjunto denso numerable de Y. En efecto: Como F es una biyección, entonces la cardinalidad de $F(\Delta)$ es igual a la del conjunto Δ, el cual es numerable. Además, ya sabemos que $F^{-1}(B^D_\epsilon(y)) = B^d_\epsilon(F^{-1}(y))$. Como $\emptyset \neq B^d_\epsilon(F^{-1}(y)) \cap \Delta$, entonces $\emptyset \neq F[B^d_\epsilon(F^{-1}(y)) \cap \Delta] = F[B^d_\epsilon(F^{-1}(y))] \cap F[\Delta] = F[F^{-1}(B^D_\epsilon(y))] \cap F[\Delta] = B^D_\epsilon(y) \cap F[\Delta]$.

Todo lo anterior nos permite concluir que Y es polaco. □

El siguiente teorema nos ofrece una observación muy importante acerca de los espacios polacos y el espacio de Hilbert.

1.2.28. Teorema. *Todo espacio polaco no vacío X es homeomorfo a un subconjunto G_δ de $\mathbb{H}$. Además, todo G_δ en $\mathbb{H}$ es polaco.*

Demostración. Ya sabemos que todo subconjunto G_δ de un polaco es polaco. Y como $\mathbb{H}$ es polaco, se tiene que todo G_δ en $\mathbb{H}$ es polaco.

Por otro lado, sea X un espacio polaco no vacío. Entonces X es separable, por lo que existe $F : X \to F[X] \subseteq \mathbb{H}$ homeomorfismo. Luego, $F[X]$ es polaco, y por lo tanto $F[X]$ es un conjunto G_δ en $\mathbb{H}$. □

1.3 Espacios compactos

Enseguida se presentará la noción de espacio compacto, y posteriormente se mostrarán algunos teoremas básicos con respecto a este tipo de espacios. Es importante mencionar que las demostraciones de los teoremas se harán sin utilizar el axioma de elección arbitrario, y en lugar de ello se utilizará el principio de elecciones dependientes o el axioma de elecciones para conjuntos numerables.

1.3.1. Definición. Un espacio de Hausdorff K es *compacto* si de toda cubierta abierta de K se le puede extraer una subcubierta finita.

La siguiente definición nos será útil.

1.3.2. Definición. Sea X un conjunto. Si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de X, diremos que una función $\chi : \{0,\ldots,r\} \to X$ para alguna $r \in \omega$ es una *subsucesión truncada* de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ si existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\omega}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tal que $x_{n_j} = \chi(j)$, para cada $j \in \{0,\ldots,r\}$.

1.3.3. Teorema. *Sea X métrico compacto no vacío con métrica d. Entonces toda sucesión sobre X tiene una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión sobre X. Consideremos al conjunto $A = \{x_n | n \in \omega\}$. Construiremos una subsucesión convergente considerando dos casos.

Caso(1): Existe $x \in X$ tal que, para cada $r > 0$, $B_r(x) \cap A$ es un conjunto infinito numerable.

Definamos:

$$\mathcal{A} = \{\{y_n\}_{n\leqslant k} \text{ subsucesión truncada de } \{x_n\}_{n\in\omega} | k \in \omega;\ \text{para cada } m \in \omega,$$
$$y_m \in B_{\frac{1}{m+1}}(x) \cap A\}.$$

Por hipótesis, para $r = 1$ el conjunto $B_1(x) \cap A$ es infinito numerable. Sea x_i, donde $i \in \omega$ es el mínimo tal que $x_i \in B_1(x) \cap A$. Consideremos a la sucesión truncada $\{y_n\}_{n\leqslant 0}$ dada por $y_0 = x_i$. Note que $\{y_n\}_{n\leqslant 0} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

- Sobre $\mathcal{A}$ consideramos la siguiente relación R:
  Si $\{y_n\}_{n\leqslant k_1}$ y $\{z_n\}_{n\leqslant k_2}$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Diremos que $\{y_n\}_{n\leqslant k_1} R\ \{z_n\}_{n\leqslant k_2}$ si:
  1. $\{y_n\}_{n\leqslant k_1} \supseteq \{z_n\}_{n\leqslant k_2}$,
  2. $k_1 = k_2 + 1$.

Sea $\{y_n\}_{n\leqslant k} \in \mathcal{A}$, consideramos $y_k \in B_{\frac{1}{k+1}}(x) \cap A$, como $\{y_n\}_{n\leqslant k}$ es una subsucesión truncada de $\{x_n\}_{n\in\omega}$, entonces existe $i \in \omega$ tal que $y_k = x_i$. Por otro lado, $B_{\frac{1}{k+2}}(x) \cap (A \setminus \{x_0,\ldots,x_i\}) \neq \emptyset$, sea $j \in \omega$ mínimo tal que $x_j \in B_{\frac{1}{k+2}}(x) \cap (A \setminus \{x_0,\ldots,x_i\})$. Definimos $\{z_n\}_{n\leqslant k+1}$ dada por:

$$z_r = \begin{cases} y_r & \text{si } r \in \{0,\ldots,k\} \\ x_j & \text{si } r = k+1. \end{cases}$$

Por el principio de elecciones dependientes, existe $F : \omega \to \mathcal{A}$ tal que

$$\forall n \in \omega :\ F(n+1) R F(n).$$

Tomamos $\{\chi_n\}_{n\in\omega} = \bigcup_{r\in\omega} F(r)$, tenemos que $\{\chi_n\}_{n\in\omega} = \bigcup_{r\in\omega} F(r)$ converge al punto x y es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$.

Caso(2): Para cada $x \in X$ existe $r(x) > 0$ tal que $B_{r(x)}(x) \cap A$ es finito.

Sea $\mathcal{B} = \{B_r(x) | x \in X; r > 0; B_r(x) \cap A \text{ es finito}\}$. Se afirma que $\bigcup \mathcal{B} = X$. En efecto: Obviamente $\bigcup \mathcal{B} \subseteq X$. Sea $x \in X$, por hipótesis, existe $r(x) > 0$ tal que el conjunto $B_{r(x)}(x) \bigcap A$ es finito; por lo que $x \in \bigcup \mathcal{B}$. Como X es compacto, existen $\beta_0, \ldots, \beta_k \in \mathcal{B}$ tales que $X = \bigcup_{i=0}^{k} \beta_i$, entonces X sería finito.

Se afirma que existe $x \in X$ tal que para toda $n \in \omega$, existe $m(n) > n$ tal que $x = x_{m(n)}$. En efecto: Supóngase que para toda $x \in X$ existe $n(x) \in \omega$ tal que para cada $m > n(x)$, $x \neq x_m$. Como X es finito, entonces $X = \{r_0, \ldots, r_s\}$ para alguna $s \in \omega$. Sea $a \in \{0, \ldots, s\}$ fijo, entonces existe $n(r_a) \in \omega$ tal que para cada $m > n(r_a)$, $r_a \neq x_m$. Sea $N > max\{n(r_0), \ldots, n(r_s)\}$, entonces para cada $b \in \{0, \ldots, s\}$, $r_b \neq x_N$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $\forall n \in \omega$, existe $m(n) > n$ tal que $x = x_{m(n)}$.

Consideramos:

$$\mathcal{A} = \{\{y_n\}_{n\leqslant k} \text{ subsucesión truncada de } \{x_n\}_{n\in\omega} | k \in \omega; \text{ para cada } m \in \{0, \ldots, k\}, y_m = x\}$$

Por hipótesis, para $n = 0$, existe $m(0) > 0$ tal que $x = x_{m(0)}$; definimos $\{y_n\}_{n\leqslant 0}$ dada por $y_0 = x_{m(0)} = x$. Note que $\{y_n\}_{n\leqslant 0} \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

- Sobre $\mathcal{A}$ consideramos la siguiente relación R:
  Si $\{y_n\}_{n\leqslant k_1}$ y $\{z_n\}_{n\leqslant k_2}$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Diremos que $\{y_n\}_{n\leqslant k_1} R \ \{z_n\}_{n\leqslant k_2}$ si:

  1. $\{y_n\}_{n\leqslant k_1} \supseteq \{z_n\}_{n\leqslant k_2}$,
  2. $k_1 = k_2 + 1$.

Sea $\{y_n\}_{n\leqslant k} \in \mathcal{A}$, entonces existe $r \in \omega$ tal que $y_k = x_r$, pues $\{y_n\}_{n\leqslant k}$ es una subsucesión truncada de $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Así pues, existe $m(r) > r$ tal que $x = x_{m(r)}$. Definimos $\{z_n\}_{n\leqslant k+1}$ dada por:

$$z_j = \begin{cases} z_j = y_j = x & \text{si } j \in \{0, \ldots, k\} \\ z_j = x_{m(r)} = x & \text{si } j = k + 1. \end{cases}$$

Por el principio de elecciones dependientes, existe $F : \omega \to \mathcal{A}$ función tal que

$$\forall n \in \omega : \ F(n + 1) R F(n).$$

Consideramos $\{\chi_n\}_{n\in\omega} = \bigcup_{k\in\omega} F(k)$, el cual es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tal que

$$\forall n \in \omega : \ \chi_n = x$$

Sea $\epsilon > 0$, si $n > 0$, entonces $d(\chi_n, x) = d(x, x) = 0 < \epsilon$. Por lo tanto $\{\chi_n\}_{n\in\omega}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ que es convergente. □

A los espacios métricos con la propiedad de que toda sucesión tiene una subsucesión convergente se les conoce como secuencialmente compactos.

1.3.4. Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión sobre X tiene una subsucesión convergente.

1.3.5. Teorema. *Sea X un espacio de Hausdorff no vacío y K subespacio compacto no vacío de X, entonces K es cerrado en X.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff y $\emptyset \neq K \subseteq X$ compacto. Si $X \setminus K = \emptyset$, entonces $X = K$, y se tendría el resultado. Por otro lado, sea $y \in X \setminus K$. Consideremos al conjunto $\mathcal{B} = \{B \subseteq X \text{ abierto} | \exists V \subseteq X \text{ abierto tal que } y \in V \ \wedge \ V \cap B = \emptyset\}$.

Se afirma que $K \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. En efecto: Sea $x \in K$, como $y \in X \setminus K$, entonces $x \neq y$. Por otro lado, como X es Hausdorff, existen $B_x, B_y \subseteq X$ abiertos tales que $x \in B_x, y \in B_y$ y $B_x \cap B_y = \emptyset$. Vemos que $B_x \in \mathcal{B}$, además $x \in B_x$, por lo tanto $x \in \bigcup \mathcal{B}$. Así pues, como K es compacto, existen $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B_i$. Como $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, entonces existen $V_0, \ldots, V_n \subseteq X$ abiertos tales que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $y \in V_i$ y $V_i \cap B_i = \emptyset$. Tomamos $\bigcap_{i=0}^{n} V_i$, tenemos que $y \in \bigcap_{i=0}^{n} V_i$ y $\bigcap_{i=0}^{n} V_i$, además se tiene que $\bigcap_{i=0}^{n} V_i \subseteq X \setminus K$. Supóngase por el contrario que $\bigcap_{i=0}^{n} V_i \nsubseteq X \setminus K$, entonces existe $z \in \bigcap\limits_{i=0}^{n} V_i$ tal que $z \in K$, luego existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $z \in B_j$; pero $z \in V_j$, por lo que $z \in V_j \cap B_j = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto K es cerrado. □

1.3.6. Teorema. *Todo espacio métrico compacto no vacío es un espacio polaco y es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{H}$.*

Demostración. Sea K un espacio métrico compacto con d como métrica. Sea $\{x_m\}_{m\in\omega}$ una sucesión de Cauchy en K, entonces $\{x_m\}_{m\in\omega}$ tiene una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k\in\omega}$ convergente a un punto $x \in K$.

Se afirma que $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a x. En efecto: Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N_1 \in \omega$ tal que si $m_k > N_1$ se tiene que $d(x_{m_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, existe $N_2 \in \omega$ tal que si $m, n > N_2$ entonces $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Consideramos $N = max\{N_1, N_2\}$, sea $n > N$. Si $n_k > N$ tenemos que $d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, por lo que $\{x_m\}_{m\in\omega}$ converge a x. Con esto se concluye que (K, d) es un espacio métrico completo.

Enseguida se probará que K es separable. Para esto, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, consideramos el conjunto $\mathcal{A}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(x) | x \in K\}$, sabemos que $K \subseteq \bigcup \mathcal{A}_n$, entonces existen $x_0^n, \ldots, x_{m_n}^n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=0}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$, tomamos $D_n = \{x_0^n, \ldots, x_{m_n}^n\}$. Y consideramos $D = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} D_n$. D es numerable, pues es una unión numerable de conjuntos finitos. Se afirma que D es denso en K. En efecto: Sea $\emptyset \neq A \subseteq K$ abierto en K y sea $x \in A$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$, tomemos $n \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Como $x \in K$, entonces existe $i \in \{0, \dots, m_n\}$ tal que $x \in B_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$, entonces $d(x, x_i^n) < \frac{1}{n} < r$, luego $x_i^n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq A$. Por lo tanto D es denso en K. Por lo que se concluye que K es polaco.

Como K es métrico y separable, K es homeomorfo a un subespacio W de $\mathbb{H}$. Como K es compacto, entonces W también lo es, pues la imagen de cualquier compacto bajo un homeomorfismo es un compacto.

Se afirma que $\mathbb{H}$ es un espacio Hausdorff. Efectivamente, sean $x, y \in \mathbb{H}$ tales que $x \neq y$. Luego, existe $j \in \omega$ tal que $x(j) \neq y(j)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x(j)) \cap B_\epsilon(y(j)) \cap \mathbb{I} = \emptyset$, lo que implica que $\Pi_j^{-1}(B_\epsilon(x(j)) \cap \mathbb{I}) \cap \Pi_j^{-1}(B_\epsilon(y(j)) \cap \mathbb{I}) = \emptyset$. Además $x \in \Pi_j^{-1}(B_\epsilon(x(j)) \cap \mathbb{I})$ y $y \in \Pi_j^{-1}(B_\epsilon(y(j)) \cap \mathbb{I})$. Por lo tanto $\mathbb{H}$ es un espacio Hausdorff.

De esta manera, como W es compacto en $\mathbb{H}$, se concluye que W es cerrado en $\mathbb{H}$. $\square$

Con el teorema 1.3.6, hemos probado que todo espacio métrico compacto cumple 2AN. Pues, si (X, τ) es un espacio métrico compacto, entonces (X, τ) es polaco. Y por ello (X, τ) es separable y métrico, por lo que (X, τ) cumple 2AN.

A continuación, se verá un teorema que nos será de mucha utilidada en lo que resta del trabajo.

1.3.7. Teorema. *Si (X, τ) es un espacio no vacío que cumple 2AN, entonces toda base de X contiene una base numerable.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}'$ una base arbitraria y $\mathcal{B}$ una base numerable de X. Para cada $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, consideramos $\mathcal{F}_B = \{U \in \mathcal{B} | \exists V \in \mathcal{B}' \text{ tal que } U \subseteq V \subseteq B\}$. Primero observemos que para cada $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{F}_B \neq \emptyset$, pues como B abierto no vacío y $\mathcal{B}'$ es una base, existe $V \in \mathcal{B}' \setminus \{\emptyset\}$ tal que $V \subseteq B$; y como V es abierto no vacío y $\mathcal{B}$ es una base, entonces existe $U \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq V$, por lo que $U \in \mathcal{F}_B$.

Ahora, para cada $U \in \mathcal{F}_B$, tomemos un único $V(U) \in \mathcal{B}'$ tal que $U \subseteq V(U) \subseteq B$, y consideramos $\mathcal{F}'_B = \{V(U) | U \in \mathcal{F}_B\}$, tenemos que para cada $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{F}'_B \neq \emptyset$, pues $\mathcal{F}_B \neq \emptyset$. Considerando $\mathcal{B}'_0 = \bigcup_{B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}} \mathcal{F}'_B$.

Veamos que $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}'_0$ es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos numerables. Se afirma que para cada $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$, $B = \bigcup_{V \in \mathcal{F}'_B} V$. En efecto: Sea $z \in B$, entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $z \in U \subseteq B$. Tomamos $V(U) \in \mathcal{F}'_B$. Entonces $z \in U \subseteq V(U) \subseteq B$, por lo tanto $z \in V(U)$. Por otro lado, sea $z \in \bigcup_{V \in \mathcal{F}'_B} V$, entonces existe $V \in \mathcal{F}'_B$ tal que $z \in V$, lo que implica que existe $U \in \mathcal{F}_B$ tal que $V = V(U)$, por lo tanto $z \in V(U) \subseteq B$.

Por útimo tenemos que $\mathcal{B}'_0$ es una base: Sea $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ y sea $x \in A$, entonces existe $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $x \in B \subseteq A$, pero $B = \bigcup_{V \in \mathcal{F}'_B} V$, entonces existe $V \in \mathcal{F}'_B$ tal que

$x \in V \subseteq B \subseteq A$. Con lo que se concluye que $\mathcal{B}_0'$ es una base. $\square$

Ahora, introduciremos al axioma de separación T_4.

1.3.8. Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que:

1. (X, τ) es un espacio T_1 si para cualesquiera puntos distintos x y y de X, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

2. (X, τ) es *normal* o T_4 si X es un espacio T_1 y para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos F_1 y F_2 de X, existen abiertos ajenos A_1 y A_2 de X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.

El siguiente teorema se le conoce como Lema de Urysohn. La demostración de éste lo haremos utilizando el principio de elecciones dependientes.

1.3.9. Teorema. *Sea X un espacio normal. Supongamos que F y G son subconjuntos cerrados ajenos de X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{0\}$ y $f[G] \subseteq \{1\}$.*

Demostración. Sea $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, y considérese $D = \{q_n | n \in \omega\}$ una enumeración de D tal que $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$. Consideremos $V_1 = X \setminus G$, como X es un espacio normal, existen abiertos U y V de X tales que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Definamos $V_0 = U$ y consideramos al conjunto:

$$\mathcal{A} = \{\{U_{q_n}\}_{n \leqslant m} | m \in \omega \setminus \{0\}; \forall n \in \{0, \ldots, m\},\ U_{q_n} \text{ es un abierto en } X;$$

$$F \subseteq U_0 \text{ y } U_1 = X \setminus G; \text{si } r < s \text{ con } r, s \in \{q_0, \ldots, q_m\},\ \text{entonces } \overline{U_r} \subseteq U_s\}.$$

Considerando $\{U_{q_n}\}_{n \leqslant 1}$ donde $U_0 = V_0$ y $U_1 = V_1$. Tenemos que $\{U_{q_n}\}_{n \leqslant 1} \in \mathcal{A}$, pues $F \subseteq U = V_0$, $V_1 = X \setminus G$ y además si $r < s$, entonces $r = 0$ y $s = 1$; y observando que $U_0 = V_0 \subseteq X \setminus V$, entonces $\overline{V_0} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V$. Por lo tanto, $\overline{U_r} = \overline{V_0} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus G = V_1 = U_s$. Con lo que se tiene que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación $\mathcal{R}$:

- Sean $\{U_{q_n}\}_{n \leqslant m_1}$ y $\{V_{q_n}\}_{n \leqslant m_2}$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos

$$\{U_{q_n}\}_{n \leqslant m_1} \mathcal{R}\ \{V_{q_n}\}_{n \leqslant m_2}$$

  si:

  1. $\{U_{q_n}\}_{n \leqslant m_1} \supseteq \{V_{q_n}\}_{n \leqslant m_2}$,
  2. $m_1 = m_2 + 1$.

Sea $\{U_{q_n}\}_{n\leqslant m} \in \mathcal{A}$. Tomemos $r = max\{q_k \mid k \leqslant m;\ q_k < q_{m+1}\}$ y $s = min\{q_l \mid l \leqslant m;\ q_{m+1} < q_l\}$. Como:

$$\forall d \in D \setminus \{1\} :\ d < 1 \text{ y } \forall d \in D \setminus \{0\} :\ d > 0,$$

tenemos que $\{q_k \mid k \leqslant m;\ q_k < q_{m+1}\} \neq \emptyset$ y $\{q_l \mid l \leqslant m;\ q_{m+1} < q_l\} \neq \emptyset$, entonces existe tanto el máximo r como el mínimo s. Además $r, s \in \{q_0, \ldots, q_n\}$ tales que $r < s$, pues $r < q_{m+1} < s$, por lo que $\overline{U_r} \subseteq U_s$.

Como X es un espacio normal, para los subconjuntos cerrados $\overline{U_r}$ y $X \setminus U_s$ existen abiertos ajenos A y B tales que $\overline{U_r} \subseteq A$ y $X \setminus U_s \subseteq B$.

Definimos $\{V_{q_n}\}_{n\leqslant m+1}$ dada por:

$$V_{q_n} = \begin{cases} U_{q_n} & \text{si } n \leqslant m \\ A & \text{si } n = m+1. \end{cases}$$

Note que $\{V_{q_n}\}_{n\leqslant m+1} \supseteq \{U_{q_n}\}_{n\leqslant m}$.

AFIRMACIÓN(1): $\{V_{q_n}\}_{n\leqslant m+1} \in \mathcal{A}$.

En efecto: Tenemos que para cada $n \in \{0, \ldots, m+1\}$, U_{q_n} es un abierto en X. $F \subseteq U_0 = V_0$ y $V_1 = U_1 = X \setminus G$.

Por otro lado, sean $R, \sigma \in \{q_0, \ldots, q_{m+1}\}$ tales que $R < \sigma$, se afirma que $\overline{V_R} \subseteq V_\sigma$.

Caso(1): $R, \sigma \in \{q_0, \ldots, q_m\}$, entonces $\overline{V_R} = \overline{U_R} \subseteq U_\sigma = V_\sigma$.

Caso(2): $R \in \{q_0, \ldots, q_m\}$ y $\sigma = q_{m+1}$, como $R < \sigma = q_{m+1}$, entonces $R \leqslant r$. Si $R = r$, tenemos que $\overline{V_R} = \overline{U_R} = \overline{U_r} \subseteq A = V_{q_{m+1}} = V_\sigma$. Por otro lado, si $R < r$, entonces $\overline{V_R} = \overline{U_R} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq A = V_{q_{m+1}} = V_\sigma$.

Caso(3): $R = q_{m+1}$ y $\sigma \in \{q_0, \ldots, q_m\}$, como $q_{m+1} = R < \sigma$, entonces $s \leqslant \sigma$. Si $s = \sigma$, tenemos que $V_R = V_{q_{m+1}} = A \subseteq X \setminus B \subseteq U_s = V_s = V_\sigma$, entonces $\overline{V_R} \subseteq X \setminus B \subseteq V_\sigma$. Por otro lado si $s < \sigma$, $\overline{V_s} = \overline{U_s} \subseteq U_\sigma = V_\sigma$, además $V_R = V_{q_{m+1}} = A \subseteq X \setminus B \subseteq U_s = V_s \subseteq \overline{V_s} \subseteq V_\sigma$, de aquí que $\overline{V_R} \subseteq \overline{V_s} \subseteq V_\sigma$.

Se concluye que $\{V_{q_n}\}_{n\leqslant m+1} \in \mathcal{A}$. ⊠

Por el principio de elecciones dependientes existe una función $g : \omega \to \mathcal{A}$ tal que

$$\forall n \in \omega :\ g(n+1)\mathcal{R}g(n).$$

Consideremos al elemento $F = \bigcup_{n\in\omega} g(n)$. Note que F es una sucesión de conjuntos con las siguientes propiedades:

- Si $F = \{U_{q_n}\}_{n\in\omega}$ entonces:
  1. $\forall n \in \omega$, U_{q_n} es abierto de X.
  2. $F \subseteq U_0$ y $U_1 = X \setminus G$.
  3. Si $r < s$, con $r, s \in D$ entonces $\overline{U_r} \subseteq U_s$.

Consideramos $f : X \to [0,1]$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} inf\{r \in D | x \in U_r\} & \text{si } x \in X \setminus G \\ 1 & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Note que f es una función bien definida puesto que si $x \in X \setminus G = U_1$ entonces $1 \in \{r \in D : x \in U_r\}$. Además, $\{r \in D : x \in U_r\} \subseteq [0,1]$. Luego, existe $inf\{r \in D : x \in U_r\}$ y además $0 \leqslant inf\{r \in D : x \in U_r\} \leqslant 1$.

Por otra parte, tenemos que $f(G) \subseteq \{1\}$. Si $x \in F$ entonces $x \in U_0$ y $x \in X \setminus G$. Por lo que en este caso $f(x) = 0$.

Antes de probar que la función f es continua demostraremos las siguientes afirmaciones. Sean $x \in X$ y $a, b \in (0,1)$.

AFIRMACIÓN(2): Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $f(x) < a$,
2. Existe $r \in D$ con $r < a$ tal que $x \in U_r$ y $x \in X \setminus G$.

(1) $\Rightarrow$ (2)] Si $f(x) < a < 1$. Como primera observación tenemos que $x \in X \setminus G$. Entonces $f(x) = inf\{r \in D : x \in U_r\} < a$. Por lo tanto existe $r \in D$ con $r < a$ tal que $x \in U_r$ y $x \in X \setminus G$.

(2) $\Rightarrow$ (2)] Si existe $\tilde{r} \in D$ con $\tilde{r} < a$ tal que $x \in U_{\tilde{r}}$ y $x \in X \setminus G$. Entonces $f(x) = inf\{r \in D : x \in U_r\} \leqslant \tilde{r} < a$. Por lo tanto $f(x) < a$ ⊠

AFIRMACIÓN(3): Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $f(x) > b$,
2. Existe $r \in D$ con $r > b$ tal que $x \in X \setminus U_r$.

(1) $\Rightarrow$ (2)] Si $f(x) > b$, entonces se tienen los siguientes casos.

Caso(1): Si $x \in G$. Como $G = X \setminus U_1$, se tiene el resultado.

Caso(2): Si $x \in X \setminus G$. Entonces $f(x) = inf\{r \in D : x \in U_r\} > b$. Por lo tanto existe $\tilde{r} \in D$ con $\tilde{r} > b$ tal que $x \in X \setminus U_{\tilde{r}}$.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Si existe $r \in D$ con $r > b$ tal que $x \in X \setminus U_r$. Supóngase que $f(x) \leqslant b < 1$ entonces $f(x) = inf\{\tilde{r} \in D : x \in U_{\tilde{r}}\} \leqslant b < r$. Por lo tanto existe $\rho < r$ tal que $x \in U_\rho \subseteq \overline{U_\rho} \subseteq U_r$, lo que sería una contradicción. Con todo lo anterior se concluye que $f(x) > b$. ⊠

AFIRMACIÓN(4): Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $f(x) > b$,

2. Existe $r \in D$ con $r > b$ tal que $x \in X \setminus \overline{U_r}$.

(1) $\Rightarrow$ (2)] Si $f(x) > b$. Por la afirmación anterior tenemos que existe $r \in D$ con $r > b$ tal que $x \in X \setminus U_r$.

Sea $\tilde{r} \in D$ con $b < \tilde{r} < r$. Se afirma que $x \in X \setminus \overline{U_{\tilde{r}}}$. En efecto: Si $x \in \overline{U_{\tilde{r}}}$ entonces $x \in \overline{U_{\tilde{r}}} \subseteq U_r$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto $x \in X \setminus \overline{U_{\tilde{r}}}$.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Si existe $r \in D$ con $r > b$ tal que $x \in X \setminus \overline{U_r}$. Entonces $x \in X \setminus \overline{U_r} \subseteq X \setminus U_r$. Y por la afirmación anterior concluimos que $f(x) > b$. ⊠

De esta manera, la AFIRMACIÓN(2) implica que $f^{-1}[[0,a)] = (\bigcup_{r \in D \wedge r < a} U_r) \cap (X \setminus G)$, mientras que la AFIRMACIÓN(4) garantiza que $f^{-1}[(b,1]] = \bigcup_{r \in D \wedge r > b} (X \setminus \overline{U_r})$. Por lo tanto f es una función continua. □

Enunciaremos algunos teoremas relacionados con los espacios normales, los cuales se demostrarán sin recurrir al axioma de elección para conjuntos arbitrarios.

1.3.10. Teorema. *Sean X un espacio Hausdorff y K_1, $K_2 \subseteq X$ subespacios compactos no vacíos de X. Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ entonces existen abiertos ajenos U y V en X tales que $K_1 \subseteq U$ y $K_2 \subseteq V$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos:

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \text{ abierto} | \exists \mathcal{U} \text{ cubierta abierta finita de } K_1 \text{ tal que } B \cap \bigcup \mathcal{U} = \emptyset\}.$$

Se afirma que $K_2 \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Efectivamente: Sea $y \in K_2$. Definimos al conjunto $\widetilde{\mathcal{B}} = \{B \subseteq X \text{ abierto} | \exists V \subseteq X \text{ abierto tal que } y \in V \text{ y } V \cap B = \emptyset\}$. Sea $x \in K_1$, como $y \in X \setminus K_1$, entonces $x \neq y$. Por otro lado, como X es Hausdorff, existen $B_x, B_y \subseteq X$ abiertos tales que $x \in B_x, y \in B_y$ y $B_x \cap B_y = \emptyset$. Vemos que $B_x \in \widetilde{\mathcal{B}}$, además $x \in B_x$, por lo tanto $x \in \bigcup \widetilde{\mathcal{B}}$. Así pues, como K_1 es compacto, existen $B_0, \ldots, B_n \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tales que $K_1 \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B_i$. Como $B_0, \ldots, B_n \in \widetilde{\mathcal{B}}$, entonces existen $V_0, \ldots, V_n \subseteq X$ abiertos tales que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$: $y \in V_i$ y $V_i \cap B_i = \emptyset$. Tomamos $\bigcap_{i=0}^{n} V_i$. Tenemos que $y \in \bigcap_{i=0}^{n} V_i$, además se afirma que $\bigcap_{i=0}^{n} V_i \cap \bigcup_{i=0}^{n} B_i = \emptyset$. En efecto: Supóngase que $z \in \bigcap_{i=0}^{n} V_i \cap \bigcup_{i=0}^{n} B_i$, luego existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $z \in B_j$; pero $z \in V_j$, por lo que $z \in V_j \cap B_j = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Observe ahora que $\bigcap_{i=0}^{n} V_i$ es abierto. Por lo tanto, para cada $y \in K_2$, existe B abierto tal que existe $\mathcal{U}$ cubierta abierta finita de K_1 tal que $B \cap \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$; es decir $K_2 \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Como K_2 es compacto, existen $B_0, \ldots, B_m \in \mathcal{B}$ tales que $K_2 \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} B_i$. Para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, existe $\mathcal{U}_j$ cubierta abierta finita de K_1 tal que $B_j \cap \bigcup \mathcal{U}_j = \emptyset$. Consideramos $V = \bigcup_{j=0}^{m} B_j$ y $U = \bigcap_{j=0}^{m} \bigcup \mathcal{U}_j$. Tenemos que $U \cap V = \emptyset$, pues si $r \in U \cap V$, entonces existe $k \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $r \in B_k$, pero también $r \in \bigcup \mathcal{U}_k$, lo que sería una contradicción. Obviamente $K_2 \subseteq V$. De esta forma, sólo bastaría probar que $K_1 \subseteq U$. Para esto, sean $r \in K_1$ y $j \in \{0, \ldots, m\}$, entonces $r \in \bigcup \mathcal{U}_j$, por lo tanto $r \in U$. $\square$

1.3.11. Teorema. *Todo espacio Hausdorff compacto es normal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio Hausdorff compacto y sean F_1, F_2 conjuntos cerrados ajenos en X. Como X es compacto, tanto F_1 como F_2 son subespacios compactos. Además F_1 y F_2 son ajenos, por lo tanto existen abiertos U y V abiertos ajenos tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Por último, X es T_1, pues X es Hausdorff. $\square$

1.3.12. Teorema. *Si (X, τ) es T_4 entonces para todo subconjunto cerrado $F \subseteq X$ y para cada subconjunto abierto U tal que $F \subseteq U$, existe un abierto W tal que $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.*

DEMOSTRACIÓN. Obviamente X es T_1. Sea $F \subseteq X$ cerrado y $U \in \tau$ tales que $F \subseteq U$. Consideremos $G = X \setminus U$. Note que F y G son cerrados tales que $F \cap G = \emptyset$. Como X es T_4, existen A y B abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$, $F \subseteq A$ y $G = X \setminus U \subseteq B$. Entonces $F \subseteq A \subseteq X \setminus B \subseteq U$, tomando $W = A$, tenemos que $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{X \setminus B} \subseteq X \setminus B \subseteq U$. $\square$

Ahora veremos una definición básica que utilizaremos a la hora de probar que todo espacio compacto que cumple 2AN es metrizable.

1.3.13. Definición. Un espacio X se llama *localmente compacto* si todo punto de X tiene una vecindad compacta.

Todo espacio compacto es localmente compacto, pues todo espacio es vecindad de cada uno de sus puntos. A continuación estableceremos una propiedad útil de los espacios localmente compactos.

1.3.14. Teorema. *Sea X un espacio Hausdorff. Si X es localmente compacto, entonces para cada $x \in X$ y para cada V abierto tal que $x \in V$, existe $\widetilde{K}$ compacto tal que $x \in int_X(\widetilde{K}) \subseteq \widetilde{K} \subseteq V$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V$. Tomemos K una vecindad compacta de x en X. Entonces $V \cap int_X(K) \subseteq K$ es un abierto no vacío en el compacto K y $x \in V \cap int_X(K)$. Como X es Hausdorff, entonces K es Hausdorff y compacto, por lo que K es T_4, entonces existe B abierto en K tal que $x \in B \subseteq \overline{B}^K \subseteq V \cap int_X(K)$. Luego existe $U \subseteq X$ abierto en X tal que $K \cap U = B$. Como K es una vecindad de x en X, tenemos que $x \in int_X(K) \cap U \subseteq K \cap U = B \subseteq \overline{B}^K$. Note ahora que $int_X(K) \cap U$ es un abierto de X y que $\overline{B}^K$ es compacto y que $\overline{B}^k \subseteq V$. □

A continuación demostramos un interesante teorema de metrización.

1.3.15. Teorema. *Todo espacio compacto y Hausdorff que cumple 2AN es metrizable.*

Demostración. Sea K un espacio Hausdorff que cumple 2AN. Sean $x \in K$ y $U \subseteq K$ abierto tal que $x \in U$. Como K es compacto, K es localmente compacto y Hausdorff, entonces existe $\widetilde{K}$ compacto tal que $x \in \widetilde{K} \subseteq U$. Observe que $\widetilde{K}$ y $K \setminus U$ son cerrados tales que $K \cap (X \setminus U) = \emptyset$, además K es T_4, pues es Hausdorff y compacto. Por el lema de Urysohn, existe una función continua $f : K \to [0, 1]$ tal que $f[\widetilde{K}] \subseteq \{1\}$ y $f[K \setminus U] \subseteq \{0\}$. Tenemos que $x \in f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \subseteq U$ (pues $x \in \widetilde{K}$, por lo que $f(x) = 1$). Por lo tanto el conjunto $\mathcal{B} = \{f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] | f : K \to \mathbb{R} \text{ es continua}\}$ es una base en K. Así pues existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n\in\omega}$ tal que los conjuntos $C_n = f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ forman una base de K.

Ahora consideremos la función $F : K \to \mathbb{R}^\omega$ dada por $F(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\omega}$, se afirma que F es continua. En efecto: Sean $x \in K$ y $A \subseteq \mathbb{R}^\omega$ abierto tal que $F(x) \in A$. Como A es abierto, existen $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \omega$ y $A_{\alpha_0}, \dots, A_{\alpha_m}$ abiertos sobre $\mathbb{R}$ tales que $F(x) \in \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}(A_{\alpha_i}) \subseteq A$, donde $\Pi_{\alpha_i} : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ es la $\alpha_i -$ ésima proyección de $\mathbb{R}^\omega$. Como cada $f_{\alpha_j} : K \to \mathbb{R}$ es continua, para cada $j \in \{0, \dots, m\}$, existe $B_{\alpha_j} \subseteq K$ abierto con $x \in B_{\alpha_j}$ tal que $f_{\alpha_j}(x) \in f_{\alpha_j}[B_{\alpha_j}] \subseteq A_{\alpha_j}$. Sea $B = \bigcap_{i=0}^m B_{\alpha_i}$. Por construcción, para cada $j \in \{0, \dots, m\}$, $x \in B_{\alpha_j}$. Ahora bastará probar que $F[\bigcap_{i=0}^m B_{\alpha_i}] \subseteq A$. Para ello, sea $z \in F[\bigcap_{i=0}^m B_{\alpha_i}]$. Entonces existe $\tilde{z} \in \bigcap_{i=0}^m B_{\alpha_i}$ tal que $f(\tilde{z}) = z$, por lo que para cada $j \in \{0, \dots, m\}$, $\Pi_{\alpha_j}(z) = \Pi_{\alpha_j}(F(\tilde{z})) = f_{\alpha_j}(\tilde{z}) \in f_{\alpha_j}[B_{\alpha_j}] \subseteq A_{\alpha_j}$; por lo tanto $z \in \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}[A_{\alpha_i}] \subseteq A$; es decir, F es una función continua.

Además F es una función inyectiva, pues si $x, y \in K$ son tales que $x \neq y$ entonces existe un abierto básico C_n tal que $x \in C_n$ y $y \notin C_n$, por lo que $f_n(x) \neq 0$ y $f_n(y) = 0$, y de aquí que $F(x) \neq F(y)$.

Como $\mathbb{R}^\omega$ es un espacio de Hausdorff, $F[K]$ es Hausdorff, así pues existe una función continua e inyectiva entre el compacto K y un espacio métrico Hausdorff $F[K]$, por lo que tal función es un homeomorfismo. Por lo tanto K es metrizable, pues es homeomorfo a un espacio metrizable. □

Para terminar la discusión sobre espacios polacos generales y algunas de sus propiedades, veremos el siguiente teorema, el cual nos dará una condición muy importante de cuándo un producto de polacos puede ser polaco.

1.3.16. Teorema. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, y supongamos que $X = \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X cumple 2AN.*
2. *$\forall i \in I:\ X_i$ cumple 2AN y cada uno de estos factores tienen la topología indiscreta, excepto quizás a lo sumo una cantidad infinita numerable de ellos.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2)] Supóngase que (X, τ) cumple 2AN y consideremos al siguiente conjunto

$$\mathcal{U} = \{U = \prod_{i\in I} G_i | G_i \text{ es abierto en } X_i \text{ y el conjunto } I_U = \{i \in I | G_i \neq X_i\} \text{ es finito}\}.$$

El conjunto $\mathcal{U}$ es una base para X. Como X cumple 2AN, $\mathcal{U}$ contiene a una base numerable para X. Tomemos una de estas bases y llamémosle $\mathcal{B} = \{U_n = \prod_{i\in I} G_{i,n}\}_{n\in\omega}$, y como notación, para cada $n \in \omega$, consideremos al conjunto $I_n = \{i \in I | G_{i,n} \neq X_i\}$.

Se afirma que para cada $i \in I$, el conjunto $\{G_{i,n}\}_{n\in\omega}$ es una base para X_i. En efecto: Supongamos que $\emptyset \neq A \subseteq X_i$ es un abierto en X_i y que $y \in A$. Como $X \neq \emptyset$, podemos encontrar un punto $x \in X$. Definamos ahora al punto $\tilde{y} \in X$ por medio de:

$$\tilde{y}(j) = \begin{cases} y & \text{si } j = i, \\ x(j) & \text{si } j \in I \setminus \{i\}. \end{cases}$$

Por otro lado, tenemos que $\Pi_i^{-1}(A)$ es un abierto en X. Además, $\tilde{y} \in \Pi_i^{-1}(A)$. Como $\mathcal{B}$ es base de X, existe $U_N = \prod_{j\in I} G_{j,N} \in \mathcal{B}$ tal que $\tilde{y} \in U_N \subseteq \Pi_i^{-1}(A)$. Entonces $y \in G_{i,N} \subseteq A$. Efectivamente, como $\tilde{y} \in U_N$ tenemos que $y = \tilde{y}(i) = \Pi_i(\tilde{y}) \in G_{i,N}$. Además, $U_N \subseteq \Pi_i^{-1}(A)$ implica que $\Pi_i(U_N) \subseteq \Pi_i(\pi_i^{-1}(A)) \subseteq A$. Pero $\Pi_i(U_N) = \Pi_i(\prod_{j\in I} G_{i,N}) = G_{i,N}$. Por lo tanto, la colección $\{G_{i,n}\}_{n\in\omega}$ es una base para X_i; y con esto, X_i cumple el 2AN.

Por otro lado, consideremos $J = \bigcup_{n\in\omega} I_n$, el cual es un subconjunto numerable de I. Si $I \setminus J = \emptyset$, entonces $J = I$, por lo que tendríamos un producto de una cantidad a lo más numerable de conjuntos que cumplen 2AN. Por otro lado, si $I \setminus J \neq \emptyset$, para cada $i \in I \setminus J$ fija, tenemos que:

$$\forall n \in \omega :\ G_{i,n} = X_i,$$

luego, si $i \in I \setminus J$ entonces $\{X_i\}$ es una base para X_i, con lo que se concluye que X_i tiene la topología indiscreta para cada $i \in I \setminus J$. Por lo tanto, en este caso, todos los factores de X tienen la topología indiscreta, excepto una cantidad a lo más numerable de ellos, y estos últimos cumplen 2AN.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Si cada X_i tiene una base numerable y todos ellos tienen la topología indiscreta, excepto quizás una cantidad numerable de ellos, probaremos que X cumple

2AN. Esto lo haremos en dos casos.

Caso(1): $\forall i \in I$, $\mathcal{B}_i = \{X_i\}$. En este caso, tenemos que cada espacio (X_i, τ_i) es indiscreto, y por lo tanto (X, τ) cumple 2AN.

Caso(2): Existe $i \in I$ tal que existe una base para X_i con $\mathcal{B}_i \neq \{X_i\}$. En este caso, para cada $j \in I$ tomaremos las siguientes bases: Si X_j tiene la topología indiscreta, entonces tomamos $\mathcal{B}_j = \{X_j\}$. Como la cantidad de los espacios topológicos que no tienen la topología indiscreta es numerable, entonces hacemos uso del axioma de elección para conjuntos numerables. Tomamos una única base numerable $\mathcal{B}_j$ para X_j. Con lo anterior en mente, consideramos:

$$\mathcal{U} = \{U = \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}[B_{\alpha_i}] | m \in \omega; \forall i \in \{0, \ldots, m\}, B_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}\},$$

probaremos que $\mathcal{U}$ es una base para X. Sean $\emptyset \neq A \subseteq X$ abierto en X y $x \in A$, entonces existen $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in I$ tales que $x \in \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}[A_{\alpha_i}] \subseteq A$, donde para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$, $A_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$ y $x(\alpha_i) \in A_{\alpha_i}$. Entonces para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, existe $B_{\alpha_j} \in \mathcal{B}_{\alpha_j}$ tal que $x(\alpha_j) \in B_{\alpha_j} \subseteq A_{\alpha_j}$, por lo que para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, $x \in \Pi_{\alpha_j}^{-1}[B_{\alpha_j}] \subseteq \Pi_{\alpha_j}^{-1}[A_{\alpha_j}]$; es decir, $x \in \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}[B_{\alpha_i}] \subseteq \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}[A_{\alpha_i}] \subseteq A$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una base para X. Además, como para cada $i \in I$, $\Pi_i^{-1}[X_i] = X$, se tiene que $\mathcal{U}$ es numerable. $\square$

De este último teorema vemos que el producto de una cantidad no numerable de espacios polacos no es polaco, a menos que todos sus factores tengan la topología indiscreta, excepto quizás a lo mucho una cantidad numerable de éstos.

Capítulo 2

Espacios de sucesiones

En esta parte de la tesis veremos algunas observaciones acerca de los espacios de sucesiones, para después discutir sobre dos casos particulares de éstos, a saber, el espacio de Baire y el de Cantor.

2.1 Espacio de sucesiones

Si X es un conjunto arbitrario no vacío, lo podemos considerar como espacio topológico al dotarlo con la topología discreta. Ésta es completamente metrizable, pues es inducida por la métrica discreta.

La siguiente proposición nos da algunas propiedades de los productos de espacios discretos.

2.1.1. Proposición. *Sea X un conjunto no vacío dotado con la topología discreta. Entonces:*

1. *X es separable si y sólo si X es finito o numerable.*
2. *El producto de Tychonoff X^n $(n \in \omega \setminus \{0\})$ es un espacio topológico discreto.*
3. *El espacio de todas las sucesiones en X, X^ω, no es un espacio discreto si $|X| \geqslant 2$.*
4. *El espacio discreto X^n $(n \in \omega \setminus \{0\})$ es polaco si y sólo si $|X| \leqslant \omega$.*
5. *Si $|X| \leqslant \omega$ entonces X^ω es un espacio polaco.*

Demostración. (1) Si X es separable, podemos considerar un conjunto denso numerable D de X. Si $y \in X$ entonces $\{y\}$ es un abierto para X, por lo que $D \cap \{y\} \neq \emptyset$; es decir $y \in D$. Por lo tanto $X \subseteq D$, y de aquí que la cardinalidad de X sea a lo más numerable.

Por otro lado, si X es finito o numerable, entonces X es un conjunto denso numerable para X, por lo que X es separable.

(2) Basta demostrar que si $x \in X^n$ entonces $\{x\}$ es abierto en X^n. Pero si $x \in X^n$, entonces para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\{x(i)\}$ es un abierto en X. Por lo tanto $\bigcap_{i=0}^{n} \Pi_i^{-1}[\{x(i)\}] \subseteq \{x\}$. Por lo que la topología producto de Tychonoff y la topología discreta coinciden.

(3) Si $\{x, y\} \subseteq X$, con $x \neq y$, podemos definir al siguiente elemento de X^ω, $z : \omega \to X$ dada por:

$$z(k) = \begin{cases} x & \text{si } k = 0, \\ y & \text{si } k \in \omega \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Observe que si $\{z\}$ fuera un abierto para el producto de Tychonoff de X^ω, entonces existirían $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \omega$ y $A_{\alpha_0}, \ldots, A_{\alpha_m}$ abiertos en X tales que $z \in \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_i^{-1}[A_{\alpha_i}] \subseteq \{z\}$. Consideremos al elemento $\hat{z} : \omega \to X$ dada por:

$$\hat{z}(k) = \begin{cases} x & \text{si } k \in \omega \setminus \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \\ z(\alpha_i) & \text{si } k = \alpha_{\alpha_i} \text{ para alguna } i \in \{0, \ldots m\}. \end{cases}$$

Vemos que $\hat{z} \in \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_i^{-1}[A_{\alpha_i}]$, pero $\hat{z} \neq z$.

(4) Si X^n es polaco. Entonces X^n tiene la topología discreta y es separable. Por el inciso (1), tenemos que $|X| \leqslant |X^n| \leqslant \omega$. Por lo tanto, $|X| \leqslant \omega$.
Por otro lado, si $|X| \leqslant \omega$. Entonces X es polaco. Por lo tanto X^n es polaco.

(5) Como $|X| \leqslant \omega$ entonces X es polaco. Por lo tanto X^ω es polaco. □

A continuación introduciremos una definición que nos será muy útil.

2.1.2. Definición. Si X es un conjunto no vacío. Dada $x \in X^\omega$ y $n \in \omega$, $x{\restriction_n}$ es el elemento en X^n dada por:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} : \; x{\restriction_n}(i) = x(i).$$

Con la definición anterior en mente, procedemos a probar el siguiente lema.

2.1.3. Lema. *Si X es un conjunto no vacío dotado de la topología discreta. Entonces:*

1. *La familia $\mathcal{B}_X = \{B_s = \{x \in X^\omega | x{\restriction_n} = s\} | n \in \omega \wedge s \in X^n\}$ es una base para X^ω.*
2. *Para cada $s \in \bigcup_{i \in \omega} X^i$, B_s es un abierto-cerrado.*

Demostración. (1) Sea $\emptyset \neq A \subseteq X^\omega$ un abierto para el producto de Tychonoff de X^ω y sea $x \in A$, entonces existen $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \omega$ tales que $x \in \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x(\alpha_i)\}] \subseteq A$. Tomando $n = \text{máx}\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}$, consideramos a $B_{x\restriction_n}$. Notemos que $x \in B_{x\restriction_n} = \bigcap_{i=0}^n \Pi_i^{-1}[\{x(i)\}] \subseteq \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x(\alpha_i)\}] \subseteq A$, por lo que $\mathcal{B}_X$ es una base para X^ω.

(2) Si $n \in \omega$ y $s \in X^n$, se afirma que $X^\omega \setminus B_s = \bigcup_{t \in X^n \setminus \{s\}} B_t$. En efecto: Sea $z \in X^\omega \setminus B_s$, entonces existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $z(k) \neq s(k)$, por lo que $z\restriction_n \in X^n \setminus \{s\}$ y $z \in B_{z\restriction_n}$. Luego $z \in \bigcup_{t \in X^n \setminus \{s\}} B_t$.

Por otro lado, si $z \in \bigcup_{t \in X^n \setminus \{s\}} B_t$, entonces existe $t \in X^n \setminus \{s\}$ tal que $z_{\restriction_n} = t$, si $z \in B_s$, entonces

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} : \ s(i) = z(i) = t(i);$$

es decir $t = s$, lo que sería una contradicción. □

Los espacios topológicos que tienen una base formada por subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez tienen un nombre especial.

2.1.4. Definición. Todo espacio topológico con una base conformada por abiertos que a la vez son cerrados se le conoce como espacio *cero-dimensional*.

De esta manera hemos demostrado que para cualquier espacio discreto X, el espacio X^ω (cuya topología es la topología producto) es un espacio cero-dimensional.

2.2 Árboles

Recordemos que para que X^ω sea un espacio polaco se necesita que X sea finito o numerable y que X tenga la topología discreta. Sin embargo, en esta sección trabajaremos con X^ω, donde X no es necesariamente de cardinalidad finita o numerable. Con esto en mente, daremos algunas definiciones que nos servirán en nuestra discusión.

2.2.1. Definición. Llamaremos al conjunto $X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} X^n$ *conjunto de sucesiones finitas en X.*

2.2.2. Definición. Para cada sucesión finita $s \in X^{<\omega}$ llamaremos *longitud* de s a su dominio, y lo denotaremos por $l(s)$.

2.2.3. Definición. Un árbol A en un conjunto X es un conjunto $A \subseteq X^{<\omega}$ tal que si $s \in A$ y $n \in l(s)$, entonces $x\restriction_n \in A$. A cada elemento de un árbol le llamaremos *nodo*.

2.2.4. *Observación.* Si A es un árbol y $s, t \in A$ entonces definimos:

$$\begin{aligned} s \leqslant t &\iff s \subseteq t \\ &\iff \text{Gráf}(s) \subseteq \text{Gráf}(t), \end{aligned}$$

donde Gráf(s) es la gráfica de la función s. Resulta que $(A, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Si $s \leqslant t$, diremos que t extiende a s o que s es una restricción de t.

2.2.5. *Observación.* Con la relación $\leqslant$ definida en la observación 2.2.4. Tenemos que si A es un árbol y $s, t \in A$, entonces: $s \leqslant t$ si y sólo si $t\restriction_{l(s)} = s$.

DEMOSTRACIÓN. Note que como $t\restriction_{l(s)}$ y s tienen los mismos dominios y codominios, entonces bastará probar que ambos tienen la misma regla de correspondencia. Supóngase que $s \leqslant t$ y sea $x \in l(s) = \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces $(x, s(x)) \in$ Gráf(s), como Gráf$(s) \subseteq$ Gráf(t), tenemos que $(x, s(x)) \in$ Gráf(t) y $(x, t(x)) \in$ Gráf(t). Por otro lado, como t es función entonces $t(x) = s(x)$. Además $x \in l(s)$, por lo tanto $t\restriction_{l(s)}(x) = t(x) = s(x)$.

Por otro lado, si $t\restriction_{l(s)} = s$. Sea $x \in$ Gráf(s). Entonces $x = (i, s(i))$ para algún $i \in\ l(s) = \{0, \ldots, n-1\}$. Por hipótesis tenemos que $x = (i, t\restriction_{l(s)}(i))$ para algún $i \in l(s)$; es decir $x = (i, t(i)) \in$ Gráf(t). Por lo tanto $s \leqslant t$. □

2.2.6. Definición. Sean X un conjunto no vacío y A un árbol sobre X.

1. Un *camino* en A es una sucesión $x \in X^\omega$ tal que $x\restriction_n \in A$ para cada $n \in \omega$. Denotaremos por $[A]$ al conjunto de todos los caminos en A.

2. Una *rama* de A es un subconjunto totalmente ordenado de A maximal respecto a la contención.

3. Un *nodo terminal* de A es un nodo que no puede extenderse propiamente a otro nodo de longitud mayor.

Antes de seguir dando más definiciones, haremos algunas observaciones acerca de la definición de rama.

2.2.7. Proposición. *Una rama R de un árbol A no puede tener más de un elemento de cada longitud n.*

DEMOSTRACIÓN. Si suponemos que $s, t \in R$ son tales que $l(s) = l(t)$ y si $t \neq s$, entonces existe $k \in l(s)$ tal que $s(k) \neq t(k)$. Pero $(k, s(k)) \in$ Gráf(s) y $(k, t(k)) \in$ Gráf(t). Así que si $s \leqslant t$, entonces $(k, s(k)) \in$ Gráf(t) y $(k, t(k)) \in$ Gráf(t), y como t es función, $t(k) = s(k)$. Por otro lado, si $t \leqslant s$, entonces $(k, t(k)) \in$ Gráf(s) y $(k, s(k)) \in$ Gráf(s), y como s es función, se concluye que $s(k) = t(k)$, lo que sería también una contradicción. Por lo tanto $s = t$. □

2.2.8. Proposición. *Si una rama R contiene a un nodo s entonces contiene a cada una de sus restricciones.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que $s \in R$. Supóngase además que existe $k \in l(s)$ tal que $s_{\restriction_k} \notin R$. Consideramos al conjunto $\Delta = R \cup \{s_{\restriction_k}\}$, vemos que $R \subsetneq \Delta$.

Se afirma que Δ es un conjunto totalmente ordenado. En efecto: Note que bastará probar que cualquier elemento de R es comparable con $s_{\restriction_k}$, pues los demás elementos son comparables el uno con el otro, y las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad ya se cumplen para todo elemento de Δ ya que son resultado de algunas propiedades de la contención de conjuntos. Sea $\rho \in R$.

Caso(1): $l(\rho) \leqslant l(s_{\restriction_k})$. Tenemos que ρ, $s \in R$, por lo que son comparables. Pero como $l(s_{\restriction_k}) \leqslant l(s)$ entonces $\rho \leqslant s$, por lo tanto $s_{\restriction_{l(\rho)}} = \rho$.

Se afirma que $s_{\restriction_{l(\rho)}} = (s_{\restriction_k})_{\restriction_{l(\rho)}}$. Efectivamente, sea $m \in l(\rho) \leqslant k$ entonces $s_{\restriction_{l(\rho)}}(m) = s(m) = s_{\restriction_k}(m) = (s_{\restriction_k})_{\restriction_{l(\rho)}}(m)$.

De esta forma se concluye que $\rho = s_{\restriction_{l(\rho)}} = (s_{\restriction_k})_{\restriction_{l(\rho)}}$; es decir que $\rho \leqslant s_{\restriction_k}$.

Caso(2): $k = l(s_{\restriction_k}) \leqslant l(\rho)$. Para probar que ρ y $s_{\restriction_k}$ son comparables, bastará probar que $\rho_{\restriction_k} = s_{\restriction_k}$, lo cual probaremos a partir de dos subcasos.

El primero de los subcasos es si $l(\rho) \leqslant l(s)$. Como s y ρ son comparables entonces $s_{\restriction_{l(\rho)}} = \rho$, y como $k \leqslant l(\rho)$, tenemos que $\rho_{\restriction_k} = (s_{\restriction_{l(\rho)}})_{\restriction_k}$.

AFIRMACIÓN(1): $(s_{\restriction_{l(\rho)}})_{\restriction_k} = s_{\restriction_k}$. En efecto: Sea $m \in \{0, \ldots, k-1\} \subseteq l(p)$ entonces $s_{\restriction_k}(m) = s(m) = s_{\restriction_{l(p)}}(m) = (s_{\restriction_{l(\rho)}})_{\restriction_k}(m)$. ⊠

De esta forma, con la Afirmación (1), se concluye que $\rho_{\restriction_k} = (s_{\restriction_{l(\rho)}})_{\restriction_k} = s_{\restriction_k}$.

El otro subcaso es si $l(s) \leqslant l(\rho)$. Primero observemos que $k = l(s_{\restriction_k}) \leqslant l(s) \leqslant l(\rho)$, por lo tanto tiene sentido considerar al elemento $(\rho_{\restriction_{l(s)}})_{\restriction_k}$. Además, ρ y s son comparables entonces $\rho_{\restriction_{l(s)}} = s$, por lo tanto $s_{\restriction_k} = (\rho_{\restriction_{l(s)}})_{\restriction_k}$.

AFIRMACIÓN(2): $(\rho_{\restriction_{l(s)}})_{\restriction_k} = \rho_{\restriction_k}$. En efecto: Sea $m \in \{0, \ldots, k-1\} \subseteq l(s) \subseteq l(\rho)$ entonces $\rho(m) = \rho_{\restriction_{l(s)}}(m) = (\rho_{\restriction_{l(s)}})_{\restriction_k}(m)$. ⊠

De esta forma, con la Afirmación (2), se concluye que $s_{\restriction_k} = (\rho_{\restriction_{l(s)}})_{\restriction_k} = \rho_{\restriction_k}$.

De esta forma tenemos que Δ es un conjunto totalmente ordenado tal que $R \subsetneq \Delta$, lo que contradiría la hipótesis de que R es un conjunto totalmente ordenado maximal respecto a la contención. Por lo tanto, R contiene a cada una de las restricciones de s. □

2.2.9. Proposición. *Toda rama finita no vacía R de un árbol A son de la forma $\{\sigma_{\restriction_n}\}_{n<m+1}$, donde σ es un nodo terminal de A tal que $l(\sigma) = m$.*

DEMOSTRACIÓN. Como R es totalmente ordenado, finito y distinto del vacío, existe $\sigma \in R$ tal que para cada $s \in R$, $s \leqslant \sigma$. Suponga que $l(\sigma) = m$. Como cada restricción de σ está en R, se tiene que $\{\sigma\restriction_n\}_{n<m+1} \subseteq R$.

Por otro lado, sea $s \in R$ tal que $l(s) = n$, note que $n < m + 1$. Suponga que $s \neq \sigma\restriction_n$, entonces la rama R tiene dos elementos distintos con la misma longitud, lo que sería una contradicción. Por lo tanto $s \in \{\sigma\restriction_n\}_{n<m+1}$. □

2.2.10. Proposición. *Sea X un conjunto no vacío (dotado con la topología discreta) y $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i\in\omega} X^i$. Suponga que existe $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:*

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) \supseteq f(n) \wedge l(f(n+1)) = l(f(n)) + 1$$

Entonces:

1. *Para cada $n \in \omega$, $l(f(n)) \geqslant n$.*
2. *Para cada $n \in \omega$, $[\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_n = f(n)\restriction_n$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Note que $l(f(0)) \geqslant 0$. Si suponemos que $l(f(n)) \geqslant n$ entonces $l(f(n+1)) = l(f(n)) + 1 \geqslant n + 1$.

(2) Sea $n \in \omega$ fijo. Por el inciso anterior, tiene sentido considerar $f(n)\restriction_n$. Como ambas funciones tienen el mismo dominio y el mismo codominio, bastará probar que tienen la misma regla de correspondencia. Sea $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que $[\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_n(j) = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)](j)$ entonces existe $k_0 \in \omega$ tal que $[\bigcup_{k\in\omega} f(k)](j) = f(k_0)(j)$.

Caso(1): $k_0 \leqslant n$. Entonces $f(k_0) \subseteq f(n)$, por lo tanto $f(n)\restriction_n(j) = f(n)(j) = f(n)\restriction_{l(f(k_0))}(j) = f(k_0)(j) = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)](j) = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_n(j)$. Entonces $f(n)\restriction_n = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_n$

Caso(2): $k_0 \geqslant n$. Entonces $f(n) \subseteq f(k_0)$, por lo tanto $f(n)\restriction_n(j) = f(n)(j) = f(k_0)\restriction_{l(f(n))}(j) = f(k_0)(j) = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)](j) = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_n(j)$. Entonces $f(n)\restriction_n = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_n$. □

2.2.11. Proposición. *Para cada rama infinita R de un árbol A existe $x \in [A]$ tal que $R = \{x\restriction_n\}_{n\in\omega}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que por ser R infinito, tenemos que $R \neq \emptyset$.

Por otro lado, sobre la rama R definimos la relación $\mathcal{R}$:

- Sean $t_1, t_2 \in R$. Escribiremos $t_1 \mathcal{R}\ t_2$ si:
    1. $t_1 \supseteq t_2$,

2. $l(t_1) = l(t_2) + 1$.

Sea $t \in R$. Suponga que $l(t) = n$ entonces $\{t_{\restriction_0}, \ldots, t_{\restriction_n}\} \subseteq R$. Como R infinito, existe $r \in R$ tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $r \neq t_{\restriction_i}$. Sabiendo que en toda rama no puede haber más de un elemento con la misma longitud, tenemos que $l(r) > n = l(t)$. Además R es totalmente ordenado, por lo tanto se tiene que r y t son comparables. Luego $r_{\restriction_{l(t)}} = r_{\restriction_n} = t$ entonces $r \supseteq t$ y $l(r) \geqslant n+1$, por lo tanto tiene sentido considerar al elemento $r_{\restriction_{n+1}}$. Por lo que se concluye que $r_{\restriction_{n+1}} \mathcal{R} t$.

Por el principio de elecciones dependientes, existe una función $f : \omega \to R$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) \mathcal{R} f(n).$$

Consideramos $x = \bigcup_{k \in \omega} f(k)$, se afirma que $R = \{x_{\restriction_n}\}_{n \in \omega}$. En efecto: Sea $z \in R$ tal que $l(z) = m$. Como R es una rama y $x_{\restriction_m} = [\bigcup_{k \in \omega} f(k)]_{\restriction_m} = f(m)_{\restriction_m} \in R$ entonces $z = f(m)_{\restriction_m} = [\bigcup_{k \in \omega} f(k)]_{\restriction_m} = x_{\restriction_m}$ (ver 2.2.7).

Para la otra contención, sea $n \in \omega$ fija. Entonces $x_{\restriction_n} = [\bigcup_{k \in \omega} f(k)]_{\restriction_n} = f(n)_{\restriction_n} \in R$. Por lo tanto, $R = \{x_{\restriction_n}\}_{n \in \omega}$.

Por último, se afirma que $x \in [A]$. En efecto: Sea $n \in \omega$. Entonces $x_{\restriction_n} = [\bigcup_{k \in \omega} f(k)]_{\restriction_n} = f(n)_{\restriction_n} \in R \subseteq A$. Por lo tanto $x \in [A]$. $\square$

Enseguida definiremos algunos tipos de árboles.

2.2.12. Definición. Sea A un árbol. Diremos que:

1. A está *bien podado* si no tiene nodos terminales. Es decir, si todos sus nodos se pueden extender a otros elementos de A de longitud mayor.

2. A es *perfecto* si todo nodo $s \in A$ admite dos extensiones incompatibles s_1 y s_2 que son elementos de A. Es decir, estas dos extensiones son de tal forma que existe n en el dominio común de s_1 y de s_2 tal que $s_1(n) \neq s_2(n)$.

3. A está *finitamente ramificado* si cada uno de sus nodos tiene un número finito de extensiones inmediatamente posteriores que están a su vez en A. Es decir, estas extensiones tienen longitud una unidad mayor que el nodo inicial.

2.2.13. Definición. Un espacio topológico X es *perfecto* si no tiene puntos aislados. Es decir, carece de puntos $x \in X$ tales que $x \in X \setminus der(X)$, donde *der* es el operador derivado.

2.2.14. Teorema. *Sea X un conjunto no vacío (dotado con la topología discreta). Los cerrados en X^ω son los conjuntos de la forma $[A]$, donde A es un árbol en X que podemos tomar bien podado.*

Demostración. Sea A un árbol en X, tenemos que $[A]$ es cerrado en X^ω, pues si $x \in X^\omega \setminus [A]$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x\restriction_n \notin A$. Por ello, $x \in B_{x\restriction_n} \subseteq X^\omega \setminus [A]$, luego $X^\omega \setminus [A]$ es abierto.

Por otra parte $[\emptyset] = \emptyset$, por lo que bastará verificar que para cada cerrado $C \subseteq X^\omega$ no vacío existe un árbol A tal que $[A] = C$. Para hacer esto último, si $C \subseteq X^\omega$ es cerrado consideramos al siguiente conjunto $A = \{x\restriction_n | x \in C,\ n \in \omega\} \subseteq X^{<\omega}$. Tenemos que A es un árbol. Además, A está bien podado, ya que si $x \in C$ y $n \in \omega$, tenemos que $x\restriction_{n+1} \in A$, y $x\restriction_{n+1}$ es una extensión cuya longitud es mayor a la de $x\restriction_n$, por lo que A está bien podado.

Observemos que $C \subseteq [A]$, pues si $z \in C$ y $n \in \omega$ entonces $z\restriction_n \in A$, por lo tanto $z \in [A]$. Ahora, si $x \in [A]$ entonces para cada $n \in \omega$, $x\restriction_n \in A$, por lo que existe $y \in C$ tal que $x\restriction_n = y\restriction_n$, luego para cada $n \in \omega$, $B_{x\restriction_n} \cap C \neq \emptyset$. Observemos que los abiertos $\{B_{x\restriction_n}\}_{n\in\omega}$ forman una base de vecindades de x en X^ω, pues si $M \subseteq X^\omega$ es un abierto tal que $x \in M$ entonces existen $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \omega$ tales que $\bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x_{\alpha_i}\}] \subseteq M$; consideramos $k = \text{máx}\{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$, se concluye que $x \in \bigcap_{i=0}^{k} \Pi_i^{-1}[\{x_i\}] \subseteq \bigcap_{i=0}^{m} \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x_{\alpha_i}\}]$. De esta manera $x \in \overline{C}$, pero $C = \overline{C}$, pues C es cerrado. Por lo tanto $[A] = C$. □

Observemos que en el teorema inmediato anterior hemos probado que si A es un árbol (no necesariamente bien podado) entonces $[A]$ es un cerrado en X^ω.

2.2.15. Teorema. *Sea X un conjunto (dotado con la topología discreta) y $A \neq \emptyset$ un árbol bien podado en X. Entonces, son equivalentes:*

1. *A es un árbol perfecto.*

2. *El cerrado $[A]$ es perfecto.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2)] Supóngase que existe $x \in [A]$ tal que x es un punto de aislado de $[A]$, entonces existe una vecindad abierta de la forma $B_{x\restriction_n}$ tal que $B_{x\restriction_n} \cap [A] = \{x\}$.

AFIRMACIÓN: $x\restriction_n$ no puede tener dos extensiones distintas de longitud mayor que n en A.

En efecto: Sea $s_1 \in A$ una extensión de $x\restriction_n$ con longitud mayor que n, tal que $s_1 \neq x\restriction_{l(s_1)}$. Construiremos $y \in X^\omega$ tal que $y\restriction_{l(s_1)} = s_1$.
Consideramos $\mathcal{A} = \{s \in X^{<\omega} | s \supseteq s_1,\ s \in A\}$, observemos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pues $s_1 \in \mathcal{A}$.
Sobre $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $s, t \in \mathcal{A}$. Escribiremos $sR\,t$ si:

    1. $s \supseteq t$,

2. $l(s) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}$. Como A está bien podado, existe σ extensión de t con longitud mayor a $l(t)$ que está también en A, por lo que $l(\sigma) \geqslant l(t) + 1$, tomamos $s = \sigma\restriction_{l(t)+1}$. Tenemos que $s \in A$, pues A es un árbol. Además $s \supseteq t \supseteq s_1$.

Por el principio de elecciones dependientes, existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \; f(n+1)Rf(n).$$

Consideramos $y = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Vemos que $y \in X^\omega$, además observemos que $l(f(0)) \geqslant l(s_1)$, y de aquí que $f(0)\restriction_{l(s_1)}$ tenga sentido. Y como $f(0) \supseteq s_1$ entonces $f(0)\restriction_{l(s_1)} = s_1$.

Además, observemos que $y\restriction_{l(s_1)} = f(0)\restriction_{l(s_1)}$. Pues si $m \in l(s_1)$, tenemos que $y\restriction_{l(s_1)}(m) = y(m)$; por otro lado existe $k \in \omega$ tal que $y(m) = [\bigcup_{n\in\omega} f(n)](m) = f(k)(m)$. Observemos que $k \geqslant 0$, por lo que $f(k) \supseteq f(0)$. Con todo lo anterior en mente, tenemos que $f(0)\restriction_{l(s_1)}(m) = f(0)(m) = f(k)(m) = y(m) = y\restriction_{l(s_1)}(m)$, con lo que se concluye que $y\restriction_{l(s_1)} = f(0)\restriction_{l(s_1)}$.

Por lo tanto $s_1 = f(0)\restriction_{l(s_1)} = y\restriction_{l(s_1)}$.

Así pues $x\restriction_n = (s_1)\restriction_n = (y\restriction_{l(s_1)})\restriction_n = y\restriction_n$. Tenemos que existen $x, y \in X^\omega$ tales que $x\restriction_n = y\restriction_n$, pero $x \neq y$, pues $x\restriction_{l(s_1)} \neq s_1 = y\restriction_{l(s_1)}$. Por construcción, se tiene que $y \in [A]$, pues si $r \in \omega$, entonces $y\restriction_r = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_r = f(r)\restriction_r \in A$. Por lo que $\{x, y\} \subseteq B_{x\restriction_n} \cap [A] = \{x\}$, esto último sería una contradicción. ⊠

De esta manera, por la Afirmación anterior tenemos que A no es un árbol perfecto.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Si $[A]$ es perfecto. Como $A \neq \emptyset$, consideramos $s \in A$ de longitud n, queremos probar que A tiene extensiones para s de longitud mayor que sean incompatibles entre ellas. Construiremos $x \in [A]$ tal que $x\restriction_n = s$. Consideramos al conjunto $\mathcal{B} = \{\sigma \in A | \sigma \supseteq s\}$, tenemos que $s \in \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Sobre $\mathcal{B}$ consideramos la relación $\mathcal{R}$:

- Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{B}$. Escribiremos $\sigma_1 \mathcal{R}\, \sigma_2$ si:

  1. $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$,
  2. $l(\sigma_1) = l(\sigma_2) + 1$.

Sea $\sigma \in \mathcal{B}$, como $\mathcal{B}$ está bien podado, existe $\tau \in \mathcal{B}$ una extensión para σ de longitud mayor, entonces $l(\tau) \geqslant l(\sigma) + 1$. Tomamos $\tau\restriction_{l(\sigma)+1}$, el cual $\tau\restriction_{l(\sigma)+1} \mathcal{R}\, \sigma$. Por el principio de elecciones dependientes, se tiene que existe una función $F : \omega \to \mathcal{B}$ tal que:

$$\forall m \in \omega : \; F(m+1)\mathcal{R}f(m),$$

consideramos $x = \bigcup_{m\in\omega} f(m)$. Tenemos que $x \in [A]$, pues si $r \in \omega$, sabemos que $x\restriction_r = [\bigcup_{k\in\omega} f(k)]\restriction_r = f(r)\restriction_r \in A$. Además $x\restriction_n = f(n)\restriction_n = s$. Así pues, tenemos que existe $x \in [A]$ tal que $x{\restriction_n} = s$. Como $[A]$ es perfecto, x no es un punto aislado de $[A]$, por lo que no puede ocurrir que $B_{x{\restriction_n}} \cap [A] = \{x\}$, luego tenemos que existe $y \in B_{x{\restriction_n}} \cap [A]$ tal que $x \neq y$. Entonces $x{\restriction_n} = y{\restriction_n}$, y como $x \neq y$, existe $m > n$ tal que $x{\restriction_m} \neq y{\restriction_m}$ son elementos de A. □

2.2.16. Teorema. *Sea X un conjunto (dotado con la topología discreta) y $A \neq \emptyset$ un árbol bien podado en X. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A está finitamente ramificado.*

2. *$[A]$ es compacto.*

Demostración. (1) ⇒ (2)] Supongamos que A está finitamente ramificado. Como X^ω es un espacio métrico entonces X^ω es Hausdorff, luego $[A]$ también lo será. Supondremos que $[A]$ tiene una cubierta abierta C que no admite subcubiertas finitas. Consideremos $s_0, \ldots, s_{n_1} \in X^1$ todos los sucesores de la función $\emptyset$ que están en A. Esto es posible, pues A está finitamente ramificado y bien podado.

Se afirma que $[A] = \bigcup_{i=0}^{n_1}\{x \in [A] \mid x{\restriction_1} = s_i\}$. En efecto: Por un lado, $\bigcup_{i=0}^{n_1}\{x \in [A] \mid x{\restriction_1} = s_i\} \subseteq [A]$. Además, si $z \in [A]$ entonces para cada $m \in \omega$, $z{\restriction_m} \in A$. En particular $z{\restriction_1} \in A$, y como $s_0, \ldots, s_{n_1}$ son los únicos sucesores de $\emptyset$ en A, se tiene que existe $i \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $z{\restriction_1} = s_1$.

Si cada uno de los conjuntos $\{x \in [A] \mid x{\restriction_1} = s_i\}$ pudiera cubrirse por un número finito de abiertos de la cubierta C, entonces A también sería cubierto por esos abiertos, lo que sería una contradicción. Por lo tanto existe $\sigma_1 \in A$ de longitud 1 tal que $A_{\sigma_1} = \{x \in A \mid x{\restriction_1} = \sigma_1\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos de la cubierta C.

Consideremos al siguiente conjunto:

$$\mathcal{A} = \{s \in X^n \cap A \mid n \in \omega,\ A_s = \{x \in [A] \mid x{\restriction_n} = s\} \text{ no puede cubrirse por un subconjunto finito de la cubierta abierta } C\}.$$

Vemos que $\sigma_1 \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Consideramos sobre $\mathcal{A}$ la siguiente relación R:

- Sean $s, t \in \mathcal{A}$. Escribiremos $sR\,t$ si:

  1. $l(s) = l(t) + 1$,
  2. $s \supseteq t$.

Sea $t \in \mathcal{A}$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $t \in X^n \cap A$, y además $A_t = \{x \in [A] \mid x{\restriction_n} = t\}$ no puede ser cubierto por un subconjunto finito de la cubierta abierta C. Por otro lado existen $s_0, \ldots, s_m \in X^{n+1}$ quienes son todos los sucesores de t, estos elementos existen pues A está bien podado y la cantidad es finita ya que A está finitamente ramificado.

Se afirma que $A_t = \bigcup_{i=0}^{m}\{x \in [A] \mid x_{\restriction_{n+1}} = s_i\}$. En efecto: Si $z \in A_t$, como $s_0, \ldots, s_m$ son los únicos sucesores de t entonces existe $j \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $z_{\restriction_{n+1}} = s_j$, por lo que $z \in \bigcup_{i=0}^{m}\{x \in [A] \mid x_{\restriction_{n+1}} = s_i\}$. Por otro lado, si $z \in \bigcup_{i=0}^{m}\{x \in [A] \mid x_{\restriction_{n+1}} = s_i\}$ entonces existe $j \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $z \in \{x \in [A] \mid x_{\restriction_{n+1}} = s_j\}$, por lo que $z_{\restriction_{n+1}} = s_j$, pero s_j es un sucesor de t; luego $z_{\restriction_n} = t$.

También tenemos que existe $j \in \{0, \ldots, m\}$ tal que $\{x \in [A] \mid x_{\restriction_{n+1}} = s_j\}$ no es cubierto por una cantidad finita de la cubierta C. Así pues, consideramos $s = s_j$, tenemos que $s_j \supseteq t$, $l(s_j) = l(t) + 1$ y $s_j \in \mathcal{A}$. Con lo anterior en mente, el principio de elecciones dependientes implica que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) R f(n).$$

De esta forma tenemos definida la sucesión $\{f(n)\}_{n\in\omega}$. Consideramos al elemento $f(0)$. Si $l(f(0)) = 0$, entonces $\{f(n)\}_{n\in\omega} = \{s_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en A tal que para cada $i \in \omega$, $s_i \in A$ y $A_{s_i} = \{x \in [A] \mid x_{\restriction_i} = s_i\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos de la cubierta C. Ahora, si $l(f(0)) = k \geqslant 1$, se afirma que si $k_0 < k$ entonces $A_{f(0)} \subseteq A_{f(0)_{\restriction_{k_0}}}$. Efectivamente: Sea $z \in A_{f(0)}$. Entonces $z \in [A]$ es tal que $z_{\restriction_k} = f(0)$. Como $k_0 < k$, se tiene que $z_{\restriction_{k_0}} = f(0)_{\restriction_{k_0}}$, por lo que $z \in A_{f(0)_{\restriction_{k_0}}}$. Así pues, como $A_{f(0)}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos de la cubierta C, se tiene que si $k_0 < k$, entonces $A_{f(0)_{\restriction_{k_0}}}$ tampoco será cubierto por un número finito de abiertos de la cubierta C.

Con lo anterior, tenemos que $\{f(0)_{\restriction_{k_0}}\}_{k_0<k} \cup \{f(n)\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de la forma $\{s_n\}_{n\in\omega}$ en la cual para cada $i \in \omega$, $s_i \in A$ y $A_{s_i} = \{x \in [A] \mid x_{\restriction_i}\}$ no puede cubrirse por un número finito de abiertos de la cubierta C.

Ahora, para ambos casos, es decir para $l(f(0)) = 0$ ó $l(f(0)) \geqslant 1$, tomamos la sucesión $\{s_n\}_{n\in\omega}$, y consideramos $x = \bigcup_{i\in\omega} f(i)$, el cual tiene la propiedad de que $x \in [A]$, puesto que para cada $n \in \omega$, $x_{\restriction_n} = f(n)_{\restriction_n} \in A$.

Tomamos ahora un abierto $V \in C$ tal que $x \in V$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in B_{x_{\restriction_n}} \subseteq V$, pero $A_{x_{\restriction_n}} = \{y \in [A] \mid y_{\restriction_n} = x_{\restriction_n}\} \subseteq B_{x_{\restriction_n}} \subseteq V$, es decir $A_{x_{\restriction_n}} \subseteq V$; lo que sería una contradicción, pues por construcción $A_{x_{\restriction_n}}$ no podía cubrirse por un número finito de abiertos de la cubierta C.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Supóngase que $[A]$ es compacto. Suponga además que existe $s \in A$ un nodo de longitud m que tiene infinitos sucesores inmediatos. Como todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable, podemos considerar un subconjunto infinito numerable $\{s_n\}_{n\in\omega}$ de todos esos sucesores, donde si $n_1 \neq n_2$, entonces $s_{n_1} \neq s_{n_2}$.

Sea $n \in \omega$ fijo, construiremos $x^{(n)} \in [A]$ tal que $s_n \subseteq x^{(n)}$. Para esto, consideraremos al conjuntos $\mathcal{A} = \{t \in A | t \supseteq s_n\}$.

Sobre $\mathcal{A}$ consideramos la siguiente relación R:

- Sean $t_1, t_2 \in \mathcal{A}$. Escribiremos $t_1 R\ t_2$ si:
  1. $t_1 \supseteq t_2$,
  2. $l(t_1) = l(t_2) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}$ tal que $l(t) = k$. Como A está bien podado, existe $\tau \in A$ tal que $\tau \supseteq t$ y $l(\tau) \geqslant k+1$. Entonces $\tau_{\restriction_{k+1}}$ está bien definido y es tal que $\tau_{\restriction_{k+1}} \supseteq t$. Por el principio de elecciones dependientes, existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall r \in \omega : \ f(r+1)Rf(r).$$

Definimos $x^{(n)} = \bigcup_{r\in\omega} f(r)$. Se afirma que $x^{(n)} \in [A]$ y $x^{(n)} \supseteq s_n$. Efectivamente: Por un lado, si $p \in \omega$, entonces $x^{(n)}_{\restriction_p} = [\bigcup_{r\in\omega} f(r)]_{\restriction_p} = f(p)_{\restriction_p} \in A$. Por otro lado $x \supseteq f(0) \supseteq s_n$. Así pues, para cada $n \in \omega$, $x^{(n)} \in B_{s_n}$ y para cualquier $t \in X^{m+1} \setminus \{s_n | n \in \omega\}$, tenemos que $x^{(n)} \notin B_t$.

Por otro lado, resulta que $\mathcal{B} = \{B_{s_n} | n \in \omega\} \cup \{B_t | t \in X^{m+1} \text{ y } \forall n \in \omega, t \neq s_n\}$ es una cubierta abierta de $[A]$. Pues, si $z \in [A]$ y $z_{\restriction_{m+1}} = s_n$ para alguna $n \in \omega$, entonces $z \in \mathcal{B}$. Por otra parte, si para cada $n \in \omega$, $z_{\restriction_{m+1}} \neq s_n$, como $z \in [A]$, tenemos que $z_{\restriction_{m+1}} \in A$, pero para cada $n \in \omega$, $z_{\restriction_{m+1}} \neq s_n$. Entonces $z_{\restriction_{m+1}} \in X^{m+1} \setminus \{s_n | n \in \omega\}$, por lo que $z \in \{B_t | t \in X^{m+1}; \forall n \in \omega, t \neq s_n\} \subseteq \mathcal{B}$. De esta manera hemos probado que $\mathcal{B}$ cubre a $[A]$.

AFIRMACIÓN: Ninguna subcolección finita de $\mathcal{B}$ cubre a $[A]$.

En efecto: Suponga que existe un conjunto $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ finito que cubre a $[A]$.

Caso(1): $\mathcal{B}_0 = \{B_{s_{n_0}}, \ldots, B_{s_{n_k}}\} \subseteq \mathcal{B}$ es finito y $\mathcal{B}_0$ cubre a $[A]$. Sea $\sigma \in \{s_n | n \in \omega\} \setminus \{s_{n_0}, \ldots, s_{n_k}\}$. Consideramos $\mathcal{A}_0 = \{\tilde{s} \in X^{\tilde{n}} \cap A | \tilde{n} \geqslant m+1; \tilde{s} \supseteq \sigma\}$. Vemos que $\sigma \in \mathcal{A}_0$, por lo que $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$.

Consideremos la siguiente relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{A}_0$:

- Sean $r, t \in \mathcal{A}_0$. Escribiremos $r\mathcal{R}\ t$ si:
  1. $l(r) = l(t) + 1$,
  2. $s \supseteq t$.

Sea $t \in \mathcal{A}_0$. Entonces $t \in A \cap X^{\tilde{n}}$ para algún $\tilde{n} \geqslant m+1$ y $t \supseteq \sigma$, como A está bien podado, t se puede extender a un $r \in A$ tal que $r \in X^{\tilde{n}+1}$ y $r_{\restriction_{\tilde{n}}} = t$, por lo que $r\mathcal{R}\ t$. Por el principio de elecciones dependientes, existe una función $g : \omega \to \mathcal{A}_0$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ g(n+1)\mathcal{R}g(n).$$

Con todo lo anterior en mente, consideramos $\sigma_0 = \bigcup_{n\in\omega} g(n) \in X^\omega$. Note que $\sigma_0 \in [A]$ y $(\sigma_o)_{\restriction m+1} = \sigma$. Pues si $r \in \omega$, entonces $(\sigma_0)_{\restriction r} = g(r)_{\restriction r} \in A$ y además $(\sigma_0)_{\restriction m+1} = g(m+1)_{\restriction m+1} = \sigma$. Ahora, si existíera $i \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $\sigma_0 \in B_{s_{n_i}}$, entonces $\sigma = (\sigma_0)_{\restriction m+1} = s_{n_i}$, lo que sería una contradicción, por lo tanto $\mathcal{B}_0$ no cubre a $[A]$.

Antes de proceder con el caso(2), observe que en el caso(1) probamos que dada una cantidad finita de elementos $s_{n_0}, \ldots, s_{n_k}$ entonces para cada $\sigma \in \{s_n | n \in \omega\} \setminus \{s_{n_0}, \ldots, s_{n_k}\}$ existe $\sigma_0 \in [A]$ tal que $(\sigma_0)_{\restriction m+1} = \sigma$. Además se observo que $\sigma_0 \in [A] \setminus \bigcap_{i=0}^{n} B_{s_i}$.

Caso(2): $\mathcal{B}_0 = \{B_{t_0}, \ldots, B_{t_k}\}$, donde para cada $i \in \{0, \ldots, k\}$, $t_{n_i} \in X^{m+1}$ y $t_{n_i} \neq s_n$ para cada $n \in \omega$. Sea $n \in \omega$ fija. Ya sabemos que existe $\sigma_0 \in [A]$ tal que $(\sigma_0)_{\restriction m+1} = s_n$. Si existíera $i \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $\sigma_0 \in B_t$, entonces $s_n = (\sigma_0)_{\restriction m+1} = t_i$, lo que sería una contradicción.

Caso(3): $\mathcal{B}_0 = \{B_{s_{n_0}}, \ldots, B_{s_{n_k}}\} \cup \{B_{t_0}, \ldots, B_{t_{\tilde{k}}}\}$. Sea $\sigma \in \{s_n | n \in \omega\} \setminus \{s_{n_0}, \ldots, s_{n_k}\}$. Ya sabemos que existe $\sigma_0 \in [A]$ tal que $(\sigma_0)_{\restriction m+1} = \sigma$. Además, tenemos que para cada $i \in \{0, \ldots, k\}$, $\sigma_0 \notin B_{s_{n_i}}$. Mientras que considerando a este elemento σ_0 y siguiendo los mismo pasos del caso(2) se tiene que para cada $i \in \{0, \ldots, \tilde{k}\}$, $\sigma_0 \notin B_{t_i}$, lo que sería una contradicción. ⊠

La afirmación anterior garantiza que $[A]$ no es compacto, lo que sería una contradicción. Por lo tanto, A está finitamente ramificado. □

A continuación estableceremos algunas definiciones en las cuales se verán ciertas relaciones entre árboles y sus cerrados.

2.2.17. Definición. Sean A y B dos árboles en un conjunto X.

1. Una aplicación $\phi : A \to B$ es *monótona* si siempre que $s \subseteq t$ entonces $\phi(s) \subseteq \phi(t)$.
2. Si ϕ es monótona definimos $Z(\phi) = \{x \in [A] \mid \forall n \in \omega\ \exists m \in \omega \text{ tal que } l(\phi(x_{\restriction m})) \geqslant n\}$.
3. Para cada $x \in Z(\phi)$ definimos $\tilde{\phi}(x) = \bigcup_{n\in\omega} \phi(x_{\restriction n})$.
4. Decimos que ϕ es *propia* si $Z(\phi) = [A]$.

2.2.18. *Observación.* Sean A y B árboles no vacíos en un conjunto X. Si $\phi : A \to B$ es monótona entonces para cada $x \in Z(\phi)$, $\tilde{\phi}(x) \in [B]$.

Demostración. Primero probaremos que $\tilde{\phi}(x)$ es una función con dominio ω y con codominio X. Sea $i \in \omega$ fija, y consideremos $r \in \omega$ tal que $r > i \geqslant 0$ fija. Entonces existe

$m_r \in \omega$ tal que $l(\phi(x\restriction_{m_r})) \geqslant r$, se afirma que $\tilde{\phi}(x)\restriction_r = [\bigcup_{n\in\omega} \phi(x\restriction_n)]\restriction_r = \phi(x\restriction_{m_r})\restriction_r$. En efecto: Sea $k \in \{0,\ldots,r-1\}$, entonces:

$$\tilde{\phi}(x)\restriction_r(k) = [\bigcup_{n\in\omega} \phi(x\restriction_n)]\restriction_r(k) = [\bigcup_{n\in\omega} \phi(x\restriction_n)](k) = \phi(x\restriction_{\tilde{n}})(k),$$

para algún $\tilde{n} \in \omega$. Primero consideraremos el caso para el cual $m_r \leqslant \tilde{n}$. Entonces $x\restriction_{m_r} \subseteq x\restriction_{\tilde{n}}$, y como ϕ es monótona, tenemos que $\phi(x\restriction_{m_r}) \subseteq \phi(x\restriction_{\tilde{n}})$, por lo que $\phi(x\restriction_{m_r})\restriction_r(k) = \phi(x\restriction_{m_r})(k) = \phi(x\restriction_{\tilde{n}})(k)$; por lo tanto $[\bigcup_{n\in\omega} \phi(x\restriction_n)]\restriction_r(k) = \phi(x\restriction_{m_r})\restriction_r(k)$. Por otro lado, si $\tilde{n} \leqslant m_r$. Entonces $x\restriction_{\tilde{n}} \subseteq x\restriction_{m_r}$, y como ϕ es monótona, se tiene que $\phi(x\restriction_{\tilde{n}}) \subseteq \phi(x\restriction_{m_r})$, por lo que $\phi(x\restriction_{\tilde{n}})(k) = \phi(x\restriction_{m_r})(k) = \phi(x\restriction_{m_r})\restriction_r(k)$; por lo tanto $[\bigcup_{n\in\omega} \phi(x\restriction_n)]\restriction_r(k) = \phi(x\restriction_{m_r})\restriction_r(k)$. Notemos que hemos probado que:

$$\forall r > 0 : \ \tilde{\phi}(x)\restriction_r \in B,$$

y como $\tilde{\phi}(x)\restriction_0 = \emptyset \in B$, pues B es un árbol, se concluye que $\tilde{\phi}(x) \in [B]$, siempre y cuando probemos que $\tilde{\phi}(x)$ mandará a cada elemento de ω a un único elemento de X. Para demostrar esto último, sean $i_1, i_2 \in \omega$ tales que $i_1 = i_2$, y si consideramos dos valores $\tilde{\phi}(x)(i_1)$ y $\tilde{\phi}(x)(i_2)$, entonces existen $n_1, n_2 \in \omega$ tales que $\tilde{\phi}(x)(i_1) = \phi(x\restriction_{n_1})(i_1)$ y $\tilde{\phi}(x)(i_2) = \phi(x\restriction_{n_2})(i_2)$. Si $n_1 \leqslant n_2$, entonces $x\restriction_{n_1} \subseteq x\restriction_{n_2}$, por lo que $\phi(x\restriction_{n_1}) \subseteq \phi(x\restriction_{n_2})$; luego $\phi(x\restriction_{n_1})(i_1) = \phi(x\restriction_{n_2})(i_2)$. Por otro lado, si $n_1 \geqslant n_2$, entonces $x\restriction_{n_1} \supseteq x\restriction_{n_2}$, por lo que $\phi(x\restriction_{n_1}) \supseteq \phi(x\restriction_{n_2})$; luego $\phi(x\restriction_{n_2})(i_2) = \phi(x\restriction_{n_1})(i_1)$. □

2.2.19. Teorema. *Sean A y B dos árboles en un conjunto X. Sea $\phi : A \to B$ una función monótona entre árboles. Entonces $Z(\phi)$ es un conjunto G_δ en $[A]$ y la función $\tilde{\phi} : Z(\phi) \to [B]$ es continua.*

Demostración. Primero probaremos que $Z(\phi)$ es un conjunto G_δ. Notemos que si $Z(\phi) = \emptyset$ entonces $Z(\phi)$ sería un conjunto G_δ. Ahora supóngase que $Z(\phi) \neq \emptyset$, se afirma que $Z(\phi) = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde para cada $n \in \omega$, $U_n = \{x \in [A] \mid \exists m \in \omega, l(\phi(x\restriction_m)) \geqslant n\}$. En efecto: Si $x \in Z(\phi)$ entonces para cada $n \in \omega$ tomamos un único $m_n \in \omega$ tal que $l(\phi(x\restriction_m)) \geqslant n$, por lo que $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Por otro lado, si $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$, entonces para cada $n \in \omega$, $x \in U_n$, por lo que para cada $n \in \omega$ tomamos un único $m_n \in \omega$ tal que $l(\phi(x\restriction_{m_n})) \geqslant n$; por lo tanto $x \in Z(\phi)$.

De esta manera, para demostrar que $Z(\phi)$ es un conjunto G_δ, bastará probar que para cada $n \in \omega$, U_n es un abierto. Sea $x \in U_n$, entonces existe $m_n \in \omega$ tal que $l(\phi(x\restriction_{m_n})) \geqslant n$, note que $x \in B_{x\restriction_{m_n}} \cap [A] \subseteq U_n$. Pues si $z \in B_{x\restriction_{m_n}} \cap [A]$, entonces $z\restriction_{m_n} = x\restriction_{m_n}$, por lo que $\phi(z\restriction_{m_n}) \supseteq \phi(x\restriction_{m_n})$, luego $l(\phi(z\restriction_{m_n})) \geqslant l(\phi(x\restriction_{m_n})) \geqslant n$ y $z \in [A]$; de aquí que $z \in U_n$. Por lo tanto $Z(\phi)$ es un conjunto G_δ en $[A]$.

Por otro lado, para probar que $\tilde{\phi}$ es continua, tomamos un abierto básico en $[B]$ que será de la forma $V_t = [B] \cap B_t$, para algún $\tilde{n} \in \omega$ y $t \in X^{\tilde{n}}$.

Se probará que $\tilde{\phi}^{-1}[V_t] = \bigcup\{B_s \cap Z(\phi) | s \in A; t \subseteq \phi(s)\}$.

Por un lado, sea $z \in \tilde{\phi}^{-1}[V_t]$. Entonces $\tilde{\phi}(z) = \bigcup_{n\in\omega} \phi(z_{\restriction n}) \in [B] \cap B_t$. Como $\tilde{\phi}(z) \in B_t$, tenemos que $\tilde{\phi}_{\restriction \tilde{n}} = t$; además existe $m_{\tilde{n}} \in \omega$ tal que $l(\phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})) \geqslant \tilde{n}$, pues $z \in Z(\phi)$.

AFIRMACIÓN: $\tilde{\phi}(z)_{\restriction \tilde{n}} \subseteq \phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})$.

En efecto: Sea $y \in$ Gráf$(\tilde{\phi}(z)_{\restriction \tilde{n}})$, por lo que $y = (i, \tilde{\phi}(z)_{\restriction \tilde{n}}(i)) = (i, \tilde{\phi}(z)(i))$ para alguna $i \in \{0, \ldots, \tilde{n} - 1\}$, es decir $y \in$ Gráf$(\tilde{\phi}(z))$; de esto último existe $n \in \omega$ y $j \in \{0, \ldots, k_m - 1\}$ tal que $y = (j, \phi(z_{\restriction n}(j)))$, donde k_m es la longitud de $\phi(z_{\restriction n})$.

Caso(1): Si $n \geqslant m_{\tilde{n}}$. Entonces $z_{\restriction n} \supseteq z_{\restriction m_{\tilde{n}}}$, y como ϕ es monótona, se tiene que $\phi(z_{\restriction n}) \supseteq \phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})$, por lo tanto $\phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})(j) = \phi(z_{\restriction n})(j)$; de aquí que $y = (j, \phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})(j)) \in$ Gráf$(\phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}}))$, con lo que se tiene el resultado para este caso.

Caso(2): Si $n \leqslant m_{\tilde{n}}$. Entonces $z_{\restriction n} \subseteq z_{\restriction m_{\tilde{n}}}$, como ϕ es monótona, tenemos que $\phi(z_{\restriction n}) \subseteq \phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})$,y como $y \in$ Gráf$(\phi(z_{\restriction n}))$, por lo tanto $y \in \phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})$. ⊠

Por la Afirmación anterior, tenemos que $t = \tilde{\phi}(z)_{\restriction \tilde{n}} \subseteq \phi(z_{\restriction m_{\tilde{n}}})$ y como $z \in Z(\phi) \subseteq [A]$, luego $z_{\restriction m_{\tilde{n}}} \in A$. Por lo tanto $z \in \bigcup\{B_s \cap Z(\phi) | s \in A; t \subseteq \phi(s)\}$.

Por otro lado, sea $z \in \bigcup\{B_s \cap Z(\phi) | s \in A;\ t \subseteq \phi(s)\}$, entonces existe $s \in A$ con $t \subseteq \phi(s)$ tal que $z \in B_s \cap Z(\phi)$; supóngase que $s \in X^k$. Tenemos que $\tilde{\phi}(z) \in [B]$. Como $z \in B_s$, $z_{\restriction k} = s$, por lo que $t \subseteq \phi(z_{\restriction k})$, entonces $t = \phi(z_{\restriction k})_{\restriction \tilde{n}}$. De aquí que $\tilde{\phi}(z) = \bigcup_{n\in\omega} \phi(z_{\restriction n}) \supseteq \phi(z_{\restriction k}) \supseteq \phi(z_{\restriction k})_{\restriction \tilde{n}} = t$, por lo que $\tilde{\phi}(z)_{\restriction \tilde{n}} = t$. Por lo tanto $\tilde{\phi}(z) \in B_t \cap [B] = V_t$. □

Consideraremos ahora la siguiente definición que nos servirá en nuestra discusión, en particular nos será de utilidad en el siguiente teorema.

2.2.20. Definición. Sea X un conjunto no vacío y sean $x \in X$ y $s \in X^k$ para alguna $k \in \omega$. Definimos a las siguientes funciones:

- $s^\frown x : \{0, \ldots, k\} \to X$ dada por:

$$(s^\frown x)(j) = \begin{cases} s(j) & \text{si } j \in \{0, \ldots, k-1\}, \\ x & \text{si } j = k. \end{cases}$$

- Si para $x_0, \ldots, x_{m+1} \in X$ (para algún $m \in \omega \setminus \{0\}$) la función $s^\frown x_0^\frown \ldots^\frown x_m$ está definida. Entonces definimos $s^\frown x_0^\frown \ldots^\frown x_{m+1} = (s^\frown x_0^\frown \ldots^\frown x_m)^\frown x_{m+1}$.

2.2.21. Teorema. *Sea X un conjunto que admite un buen orden (dotado de la topología discreta). Sean $S \subseteq T \subseteq X^\omega$ dos cerrados no vacíos en X^ω. Entonces, existe una* *retracción $r : T \to S$, es decir, una función continua que restringida a S resulta ser la función identidad sobre S.*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(1): Si $C \subseteq X^{<\omega}$ es un árbol bien podado entonces $C = \{x_{\restriction_n} | x \in [C]; n \in \omega\}$.

En efecto: Sea $z \in C$. Supóngase que $z \in X^N$, y consideramos al conjuntos $\mathcal{A} = \{y \in C | y \supseteq z\}$. Vemos que $z \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Definimos sobre $\mathcal{A}$ la siguiente relación R:

- Sean $t, r \in \mathcal{A}$. Escribiremos $tR\, r$ si:

  1. $t \supseteq r$,
  2. $l(t) = l(r) + 1$.

Sea $r \in \mathcal{A}$, supóngase que $r \in X^k$ para algún $k \in \omega$. Como C está bien podado, tenemos que existe $t \in C$ tal que $t_{\restriction_k} = r$ con $l(t) \geqslant k + 1$. Tomamos $t_{\restriction_{k+1}} \in C$ y $t_{\restriction_{k+1}} \supseteq r \supseteq z$; es decir $t_{\restriction_{k+1}} \in \mathcal{A}$ y además $t_{\restriction_{k+1}} R\, r$. Por el principio de elecciones dependientes, existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) R f(n).$$

Supóngase que $l(f(0)) = k_0$, consideramos $\{f(0)_{\restriction_j}\}_{j<k_0} \cup \{f(n)\}_{n\in\omega} = \{s_i\}_{i\in\omega}$, donde $\{s_i\}_{i\in\omega}$ es una enumeración del conjunto $\{f(0)_{\restriction_j}\}_{j<k_0} \cup \{f(n)\}_{n\in\omega}$, consideramos al elemento $\chi = \bigcup_{i\in\omega} s_i \in X^\omega$. Note que $\chi \in [C]$, pues si $p \in \omega$, entonces $\chi_{\restriction_p} = f(p)_{\restriction_p} \in C$. Y por otro lado, $\chi_{\restriction_N} = f(N)_{\restriction_N} = z$, por lo tanto $z \in \{x_{\restriction_n} | x \in [C]; n \in \omega\}$.

Para probar la otra contención, sea $z \in \{x_{\restriction_n} | x \in [C]; n \in \omega\}$, entonces $z = x_{\restriction_n}$ para algún $x \in [C]$, por lo que $z \in C$. ⊠

Por el teorema 2.2.14, $T = [A]$ y $S = [B]$, donde A y B son árboles bien podados. Aplicando la Afirmación (1), tenemos que $A = \{x_{\restriction_n} | x \in T; n \in \omega\}$ y $B = \{x_{\restriction_n} | x \in S; n \in \omega\}$. Por lo que $B \subseteq A$.

Vamos a construir una función $\phi : A \to B$ monótona y propia tal que, para cada $t \in B$, $\phi(t) = t$ de la siguiente manera:

- Sea $s \in A$, supóngase que $l(\phi(s)) = k$, definiremos a $\phi(s)$ por recursión sobre la longitud de s.

  1. $\phi(\emptyset) = \emptyset$.
  2. Si está definido $\phi(s) \in B$, para cada $x \in X$ tal que $s^\frown x \in A$, definimos $\phi(s^\wedge x)$ de la siguiente manera:

(a) Si $s^\frown x \in B$, $\phi(s^\frown x) = s^\frown x$.

(b) Si $s^\frown x \notin B$, $\phi(s^\frown x) = \phi(s)^\frown y$, donde y es el mínimo del conjunto $\{z \in X | \phi(s)^\frown z \in B\}$ (este último conjunto es distinto del vacío ya que $\phi(s) \in B$ y B está bien podado).

AFIRMACIÓN(2): ϕ es una función monótona entre árboles.

En efecto: Sean $s, t \in A$. Si $s = t$, entonces $\phi(s) = \phi(t)$, y se tendría el resultado en este caso. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $s \subsetneq t$, entonces existen $x_0, \ldots, x_{n_t} \in X$ tales que $t = s^\frown x_0^\frown \ldots^\frown x_{n_t}$.

Sea $t_i \in X$ y definamos $\tilde{t} = \tilde{s}^\wedge t_i$. Note que $\phi(\tilde{t}) \supseteq \phi(\tilde{s})$. Pues si $\tilde{t} = \tilde{s}^\frown t_i \notin B$, entonces $\phi(\tilde{t}) = \phi(\tilde{s}^\frown t_i) = \phi(\tilde{s})^\frown y \supseteq \phi(\tilde{s})$. Por otro lado, si $\tilde{t} = \tilde{s}^\frown t_i \in B$, entonces $\tilde{s} \in B$, pues B es un árbol, por lo que $\phi(\tilde{t}) = \phi(\tilde{s}^\frown t_i) = \tilde{s}^\frown t_i \supseteq \tilde{s} = \phi(\tilde{s})$. Con esto en mente, tenemos que $\phi(t) = \phi(s^\frown x_0^\frown \ldots^\frown x_{n_t}) \supseteq \phi(s^\frown x_0^\frown \ldots^\frown x_{n_t - 1}) \supseteq \ldots \supseteq \phi(s)$, por lo tanto $\phi(t) \supseteq \phi(s)$ y con ello ϕ es un función monótona entre árboles. ⊠

AFIRMACIÓN(3): $Z(\phi) = [A]$.

En efecto: Primero probaremos que para toda $k \in \omega$, $l(\phi(z_{\restriction k})) = k$. Para $k = 0$, se tiene que $z_{\restriction 0} = \emptyset$, entonces $l(\phi(z_{\restriction 0})) = l(\phi(\emptyset)) = l(\emptyset) = 0$. Ahora supóngase que para $k \in \omega$, tenemos que $l(\phi(z_{\restriction k})) = k$, observamos que $z_{\restriction k+1} = (z_{\restriction k})^\frown z(k)$. Así pues, si $(z_{\restriction k})^\frown z(k) \in B$, entonces $l(\phi(z_{\restriction k+1})) = l((z_{\restriction k})^\frown z(k)) = l(z_{\restriction k}) + 1 = k + 1$. Por otro lado, si $z_{\restriction k}^\frown z(k) \notin B$, tenemos que $l(\phi(z_{\restriction k+1})) = l(\phi(z_{\restriction k})^\frown y)) = l(\phi(z_{\restriction k})) + 1 = k + 1$.

Por lo tanto, si $z \in [A]$ y $n \in \omega$, bastará considerar $m \geqslant n$, entonces $l(\phi(z_{\restriction m})) = m \geqslant n$. Mientras que, por definición, $Z(\phi) \subseteq [A]$. Con lo que se concluye que $[A] = Z(\phi)$. ⊠

Consideramos la función continua asociada a ϕ, es decir $\tilde{\phi} : [A] \to [B]$. Vemos que si $z \in [B]$ entonces para cada $n \in \omega$, $z_{\restriction n} \in B$, por lo que $\tilde{\phi}(z) = \bigcup_{n \in \omega} \phi(z_{\restriction n}) = \bigcup_{n \in \omega} z_{\restriction n} = z$. □

2.3 Biyecciones canónicas

Ahora, haremos una introducción acerca de algunas biyecciones canónicas que servirán a la discusión.

2.3.1. Definición. Sobre $\omega \times \omega$ definimos la siguiente relación:

Si $(m, n),\ (\tilde{m}, \tilde{n}) \in \omega \times \omega$, *entonces diremos que* $(m, n) \leqslant (\tilde{m}, \tilde{n})$ *si* :

$\text{máx}\{m,n\} < \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\} \ \vee \ (\text{máx}\{m,n\} = \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\} \ \wedge \ (n < \tilde{n} \vee (n = \tilde{n} \wedge m \leqslant \tilde{m}))).$

A este orden se le conoce como *orden canónico* en $\omega \times \omega$.

2.3.2. Lema. *$(\omega \times \omega, \leqslant)$ es un conjunto totalmente ordenado.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\text{máx}\{m,n\} = \text{máx}\{m,n\}$ y $(n = n$ y $m \leqslant m)$, se tiene que $(m,n) \leqslant (m,n)$.

AFIRMACIÓN(1): $(\omega \times \omega, \leqslant)$ satisface la antisimetría.

En efecto: Supóngase que $(m,n) \leqslant (\tilde{m},\tilde{n})$ y $(\tilde{m},\tilde{n}) \leqslant (m,n)$. Probaremos que $(m,n) = (\tilde{m},\tilde{n})$. Primero suponga que $\text{máx}\{m,n\} < \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\}$. Como $(\tilde{m},\tilde{n}) \leqslant (m,n)$, entonces $\text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\} \leqslant \text{máx}\{m,n\}$, por lo que $\text{máx}\{m,n\} < \text{máx}\{m,n\}$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto, como $(m,n) \leqslant (\tilde{m},\tilde{n})$, se tiene que:

$$\text{máx}\{m,n\} = \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\} \text{ y } (n < \tilde{n} \text{ o } (n = \tilde{n} \text{ y } m \leqslant \tilde{m})).$$

Probaremos que $n < \tilde{n}$ nos conduce a una contradicción. Suponga que $n < \tilde{n}$. Como $(\tilde{m},\tilde{n}) \leqslant (m,n)$, entonces $\tilde{n} < n$ o $(n = \tilde{n}$ y $\tilde{m} \leqslant m)$.

Caso(1): $\tilde{n} < n$. Esto implicaría que $\tilde{n} < \tilde{n}$, lo que es una contradicción.

Caso(2): $n = \tilde{n}$ y $\tilde{m} \leqslant m$. La sola hipótesis de $n = \tilde{n}$ nos garantiza que $n < n$, lo que evidentemente también es una contradicción.

Es decir, en los dos casos anteriores se obtiene una contradicción, por lo que $n < \tilde{n}$ es falso, dejando la única opción de que $n = \tilde{n}$ y $m \leqslant \tilde{m}$. Como $(\tilde{m},\tilde{n}) \leqslant (m,n)$ y $\text{máx}\{m,n\} = \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n})$ y $n = \tilde{n}$, se tiene que $\tilde{m} \leqslant m$, por lo tanto $m = \tilde{m}$. Así pues $(m,n) = (\tilde{m},\tilde{n})$. ⊠

AFIRMACIÓN(2): Dados dos elementos sobre $\omega \times \omega$, estos siempre pueden ser relacionados.

En efecto: Sean $(m,n), (\tilde{m},\tilde{n}) \in \omega \times \omega$. Si $(m,n) \leqslant (\tilde{m},\tilde{n})$, se tiene de inmediato el resultado. Supóngase que $(m,n) \nleqslant (\tilde{m},\tilde{n})$. Entonces:

$$\text{máx}\{m,n\} \geqslant \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\} \text{ y } (\text{máx}\{m,n\} \neq \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\} \text{ o } (n \geqslant \tilde{n} \text{ y } (n \neq \tilde{n} \text{ o } m > \tilde{m})))$$

Para probar que ambos elementos son comparables, consideraremos dos casos.

Caso(1): $\text{máx}\{m,n\} \neq \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\}$. Entonces $\text{máx}\{m,n\} > \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\}$, por lo que en este caso, $(m,n) \geqslant (\tilde{m},\tilde{n})$.

Caso(2): $\text{máx}\{m,n\} = \text{máx}\{\tilde{m},\tilde{n}\}$. Entonces $n \geqslant \tilde{n}$ y ($n \neq \tilde{n}$ o $m > \tilde{m}$). Por un lado, si $n \neq \tilde{n}$, se tiene que $n > \tilde{n}$, por lo que $(m,n) \geqslant (\tilde{m},\tilde{n})$. Por otro lado, si $n = \tilde{n}$, entonces $m > \tilde{m}$, por lo que en este caso $(m,n) \geqslant (\tilde{m},\tilde{n})$.

En ambos casos se tiene que ambos elementos son comparables. ⊠

AFIRMACIÓN(3): $(\omega \times \omega, \leqslant)$ es transitiva.

Supóngase que $(m_1,n_1) \leqslant (m_2,n_2)$ y $(m_2,n_2) \leqslant (m_3,n_3)$, probaremos que $(m_1,n_1) \leqslant (m_3,n_3)$. Suponga que $(m_1,n_1) \nleqslant (m_3,n_3)$, haremos ver que esta suposición conduce a una contradicción. Como dados dos elementos siempre se pueden relacionar, tenemos que $(m_1,n_1) \geqslant (m_3,n_3)$. Note que si $(m_1,n_1) = (m_3,n_3)$ entonces $(m_1,n_1) \leqslant (m_3,n_3)$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto $(m_1,n_1) \neq (m_3,n_3)$. Así pues, $(m_1,n_1) \geqslant (m_3,n_3)$ y $(m_1,n_1) \neq (m_3,n_3)$. Entonces:

$$\text{máx}\{m_1,n_1\} > \text{máx}\{m_3,n_3\} \text{ o } (\text{máx}\{m_1,n_1\} = \text{máx}\{m_3,n_3\}$$

$$\text{y } (n_3 < n_1 \text{ o } (n_3 = n_1 \text{ y } m_3 \leqslant m_1))).$$

Si suponemos que $\text{máx}\{m_1,n_1\} > \text{máx}\{m_3,n_3\}$ entonces $\text{máx}\{m_1,n_1\} > \text{máx}\{m_3,n_3\} \geqslant \text{máx}\{m_2,n_2\} \geqslant \text{máx}\{m_1,n_1\}$; es decir, $\text{máx}\{m_1,n_1\} > \text{máx}\{m_1,n_1\}$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto:

$$(\text{máx}\{m_1,n_1\} = \text{máx}\{m_3,n_3\} \text{ y } (n_3 < n_1 \text{ o } (n_3 = n_1 \text{ y } m_3 \leqslant m_1))).$$

Como $\text{máx}\{m_1,n_1\} = \text{máx}\{m_3,n_3\}$ entonces $\text{máx}\{m_1,n_1\} = \text{máx}\{m_3,n_3\} \geqslant \text{máx}\{m_2,n_2\} \geqslant \text{máx}\{m_1,n_1\}$, por lo tanto $\text{máx}\{m_1,n_1\} = max\{m_2,n_2\} = max\{m_3,n_3\}$, luego tenemos que: $(n_1 < n_2 \vee (n_1 = n_2 \wedge m_1 \leqslant m_2))$ y $(n_2 < n_3 \vee (n_2 = n_3 \wedge m_2 \leqslant m_3))$ y $(n_1 > n_3 \vee (n_1 = n_3 \wedge m_3 \leqslant m_1))$.

A continuación, veremos que todo los casos nos conducen a una contradicción.

Caso(1): Si $n_1 < n_2$ y $n_2 < n_3$ y $n_1 > n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(2): Si $n_1 < n_2$ y $n_2 < n_3$ y $n_1 = n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(3): Si $n_1 < n_2$ y $n_2 = n_3$ y $n_1 > n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(4): Si $n_1 < n_2$ y $n_2 = n_3$ y $n_1 = n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(5): Si $n_1 = n_2$ y $n_2 < n_3$ y $n_1 > n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(6): Si $n_1 = n_2$ y $n_2 < n_3$ y $n_1 = n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(7): Si $n_1 = n_2$ y $n_2 = n_3$ y $n_1 > n_3$. Entonces $n_1 < n_1$.

Caso(8): Si $n_1 = n_2$ y $n_2 = n_3$ y $n_1 = n_3$. Entonces $m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_3 \leqslant m_1$. Por lo tanto $m_1 = m_2 = m_3$, luego $(m_1, n_1) = (m_3, n_3)$, lo que sería una contradicción.

Como todos los casos anteriores nos conducen a una contradicción, se concluye que $(m_1, n_1) \leqslant (m_3, n_3)$. Por lo tanto $(\omega \times \omega, \leqslant)$ satisface la transitividad. ⊠

Así pues, la relación anterior sobre $\omega \times \omega$ es un orden total. □

Probaremos ahora que el orden canónico sobre $\omega \times \omega$ hace a este conjunto semejante a ω; es decir, existe una biyección entre estos conjuntos de tal forma que ésta y su inversa preservan el orden. Pero antes demostraremos tres lemas auxiliares.

2.3.3. Lema. *Sea* $(m, n) \in \omega \times \omega$ *entonces existe* $(\tilde{m}, \tilde{n}) \in \omega \times \omega \setminus \{(m, n)\}$ *tal que* $(m, n) \leqslant (\tilde{m}, \tilde{n})$.

Demostración. Sea $M = \text{máx}\{m, n\}$, consideramos $(M + 1, M + 1) \in \omega \times \omega$, vemos que $(M + 1, M + 1) \neq (m, n)$. Además $\text{máx}\{m, n\} = M < M + 1 = \text{máx}\{M + 1, M + 1\}$, por lo que $(m, n) \leqslant (M + 1, M + 1)$. □

2.3.4. Lema. *Sean* $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \omega \times \omega$ *tales que* $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ *y* $(m_1, n_1) \leqslant (m_2, n_2)$. *Entonces existe a lo mucho un número finito de elementos* $(m, n) \in \omega \times \omega$ *tales que* $(m_1, n_1) \leqslant (m, n) \leqslant (m_2, n_2)$.

Demostración. Consideramos al conjunto: $A = \{(m, n) \in \omega \times \omega | (m, n) \leqslant (m_2, n_2)\}$, tenemos que $(m_2, n_2) \in A$, por lo que $A \neq \emptyset$. Note que $A = \{(m, n) \in \omega \times \omega | \text{máx}\{m, n\} < \text{máx}\{m_2, n_2\} \vee (\text{máx}\{m, n\} = \text{máx}\{m_2, n_2\} \wedge (n < n_2 \vee (n = n_2 \wedge m \leqslant m_2)))\} = \{(m, n) \in \omega \times \omega | \text{máx}\{m, n\} < \text{máx}\{m_2, n_2\}\} \cup \{(m, n) \in \omega \times \omega | \text{máx}\{m, n\} = \text{máx}\{m_2, n_2\} \wedge (n < n_2 \vee (n = n_2 \wedge m \leqslant m_2))\}$, pero los conjuntos $\{(m, n) \in \omega \times \omega | \text{máx}\{m, n\} < \text{máx}\{m_2, n_2\}\}$ y $\{(m, n) \in \omega \times \omega | \text{máx}\{m, n\} = \text{máx}\{m_2, n_2\} \wedge (n < n_2 \vee (n = n_2 \wedge m \leqslant m_2))\} \subseteq \{(m, n) \in \omega \times \omega | \text{máx}\{m, n\} = \text{máx}\{m_2, n_2\}\}$ son finitos. Por lo tanto A es finito. Por otro lado tenemos que $A \supseteq \{(m, n) | (m, n) \leqslant (m_2, n_2)\} \cap \{(m, n) | (m_1, n_1) \leqslant (m, n)\}$, por lo tanto existe una cantidad a lo más finita de elementos $(m, n) \in \omega \times \omega$ tales que $(m_1, n_1) \leqslant (m, n) \leqslant (m_2, n_2)$. □

2.3.5. *Observación.* Si $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \omega \times \omega$ son tales que $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ y $(m_1, n_1) \leqslant (m_2, n_2)$, y si definimos al conjunto $A = \{(m, n) \in \omega \times \omega | (m, n) \leqslant (m_2, n_2)\}$. Tenemos que $\mathcal{A} = A \setminus \{(m_1, n_1)\}$ es un conjunto tal que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}$ es finito. Por lo tanto $\mathcal{A}$ tiene un mínimo $(\bar{m}, \bar{n})$.

2.3.6. Lema. *Sean* $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \omega\times\omega$ *tales que* $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ *y* $(m_1, n_1) \leqslant (m_2, n_2)$. *Entonces para cada* $(\tilde{m_1}, \tilde{n_1}), (\tilde{m_2}, \tilde{n_2}) \in \omega \times \omega$ *tales que* $(\tilde{m_1}, \tilde{n_1}) \geqslant (m_1, n_1)$ *y* $(\tilde{m_2}, \tilde{n_2}) \geqslant (m_1, n_1)$ *y* $(\tilde{m_1}, \tilde{n_1}) \neq (m_1, n_1)$ *y* $(\tilde{m_2}, \tilde{n_2}) \neq (m_1, n_1)$, *los conjuntos* $\mathcal{A}_1 = \{(m, n) \in \omega \times \omega | (m, n) \leqslant (\tilde{m_1}, \tilde{n_1})\} \setminus \{(m_1, n_1)\}$ *y* $\mathcal{A}_2 = \{(m, n) \in \omega \times \omega | (m, n) \leqslant (\tilde{m_2}, \tilde{n_2})\} \setminus \{(m_1, n_1)\}$ *coinciden en su elemento mínimo.*

Demostración. Como $\leqslant$ es un orden total, tenemos que $(\tilde{m_1}, \tilde{n_1}) \leqslant (\tilde{m_2}, \tilde{n_2})$ o $(\tilde{m_2}, \tilde{n_2}) \leqslant (\tilde{m_1}, \tilde{n_1})$. Para facilitar la demostración, considere $(\tilde{m_i}, \tilde{n_i}) \leqslant (\tilde{m_j}, \tilde{n_j})$, donde $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$. Sean $(\bar{m_i}, \bar{n_i})$ mínimo de $\mathcal{A}_i$ y $(\bar{m_j}, \bar{n_j})$ mínimo de $\mathcal{A}_j$. Se afirma que $(\bar{m_i}, \bar{n_i}) = (\bar{m_j}, \bar{n_j})$. En efecto: Para probar esto último, consideraremos los siguientes dos casos.

Caso(1): $(\bar{m_i}, \bar{n_i}) \leqslant (\bar{m_j}, \bar{n_j})$. Entonces $(\bar{m_i}, \bar{n_i}) \leqslant (\bar{m_j}, \bar{n_j}) \leqslant (\tilde{m_j}, \tilde{n_j})$. Por lo tanto $(\bar{m_i}, \bar{n_i}) \in \mathcal{A}_j$, luego $(\bar{m_j}, \bar{n_j}) \leqslant (\bar{m_i}, \bar{n_i})$. Por lo que se concluye que ambos mínimos coinciden.

Caso(2): $(\bar{m_j}, \bar{n_j}) \leqslant (\bar{m_i}, \bar{n_i})$. Como $(m_1, n_1) \leqslant (\bar{m_j}, \bar{n_j}) \leqslant (\bar{m_i}, \bar{n_i}) \leqslant (\tilde{m_i}, \tilde{n_i})$ y $(m_1, n_1) \neq (\bar{m_j}, \bar{n_j})$ entonces $(\bar{m_j}, \bar{n_j}) \in \mathcal{A}_i$. Por lo tanto $(\bar{m_i}, \bar{n_i}) \leqslant (\bar{m_j}, \bar{n_j})$. Luego ambos mínimos coinciden. □

Los lemas 2.3.3, 2.3.4, 2.3.6 y la observación 2.3.5 garantizan que la siguiente relación es de hecho una función.

2.3.7. Definición. Definimos $F : \omega \to \omega \times \omega$ dada por:

- $F(0) = (0, 0)$.
- Si $k \in \omega$ tal que $F(k)$ está bien definida entonces $F(k + 1) = (\bar{m}, \bar{n})$, donde $(\bar{m}, \bar{n})$ es el mínimo elemento en $\omega \times \omega$ mayor que $F(k)$ distinto de $F(k)$.

La función anterior nos será de utilidad en el siguiente teorema.

2.3.8. Teorema. *Existe una biyección entre* $\omega\times\omega$ *y* ω *de tal forma que ésta y su inversa preservan el orden. Es decir,* $\omega \times \omega$ *y* ω *son semejantes.*

Demostración. La función que usaremos para probar este resultado es la función F recién definida.

AFIRMACIÓN(1): F preserva el orden.

En efecto: Sea $k \in \omega$ fijo. Se afirma que para toda $\bar{k} \in \omega$, $F(k) \leqslant F(k + \bar{k})$. Si $\bar{k} = 0$, tenemos que $F(k) \leqslant F(k)$. Suponga que para alguna $\bar{k} \in \omega$ se cumple que $F(k) \leqslant F(k + \bar{k})$. Sea $(\bar{m}, \bar{n}) \geqslant F(k + \bar{k})$ tal que $(\bar{m}, \bar{n}) \neq F(k + \bar{k})$, tendríamos que

$F(k+\bar{k}+1) \in \{(m,n) \in \omega \times \omega | F(k+\bar{k}) \leqslant (m,n) \leqslant (\bar{m},\bar{n})\} \setminus \{F(k+\bar{k})\}$. Por lo tanto $F(k+\bar{k}+1) \geqslant F(k+\bar{k}) \geqslant F(k)$.

Por otro lado, sean $k_1, k_2 \in \omega$ tales que $F(k_1) \leqslant F(k_2)$. Debemos probar que $k_1 \leqslant k_2$. Supóngase que $k_1 > k_2$, entonces existe $k_0 \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $k_2 + k_0 = k_1$, luego $F(k_2) \leqslant F(k_2 + k_0) = F(k_1)$, entonces $F(k_1) = F(k_2)$. Pero $k_2 \leqslant k_2 + 1 \leqslant k_1$, entonces $F(k_2) \leqslant F(k_2+1) \leqslant F(k_1) = F(k_2)$. Por lo tanto $F(k_2) = F(k_2+1)$, esto último sería una contradicción, pues $F(k_2)$ no es el mínimo elemento mayor que $F(k_2)$ distinto de $F(k_2)$. Por lo tanto, $k_1 \leqslant k_2$.

De esta manera se concluye que la función F preserva el orden. ⊠

AFIRMACIÓN(2): F es inyectiva.

En efecto: Sean $k_1, k_2 \in \omega$ tales que $F(k_1) = (k_2)$, entonces $F(k_1) \leqslant F(k_2)$ y $F(k_2) \leqslant F(k_1)$, luego $k_1 \leqslant k_2$ y $k_2 \leqslant k_1$. Por lo tanto $k_1 = k_2$. De aquí que F sea inyectiva. ⊠

AFIRMACIÓN(3): F es sobreyectiva.

En efecto: Sea $(m,n) \in \omega \times \omega$. Entonces existe $(\tilde{m},\tilde{n}) \in \omega \times \omega \setminus \{(m,n)\}$ tal que $(\tilde{m},\tilde{n}) \geqslant (m,n)$. Suponga que:

$$\forall k \in \omega : \ F(k) \neq (m,n).$$

Entonces se tiene que para toda $k \in \omega$, (m,n) no es el mínimo del conjunto $\{(\bar{m},\bar{n} \in \omega \times \omega | F(k) \leqslant (\bar{m},\bar{n}) \leqslant (\tilde{m},\tilde{n})\} \setminus \{F(k)\}$.

Note que con esta suposición se obtiene una cantidad infinita de elementos $(\bar{m},\bar{n})$ tales que $(0,0) \leqslant (\bar{m},\bar{n}) \leqslant (m,n)$. Pues sabemos que $F(0) = (0,0) < (m,n)$. Además $(m,n) \in \{(\bar{m},\bar{n}) \in \omega \times \omega | F(0) \leqslant (\bar{m},\bar{n}) \leqslant (\tilde{m},\tilde{n})\} \setminus \{F(0)\}$ entonces $F(1) \leqslant (m,n)$ y $(m,n) \neq F(1)$ y $F(0) \neq F(1)$. Supóngase que para $k \in \omega$, $F(k) \leqslant (m,n)$, entonces $(m,n) \in \{(\bar{m},\bar{n}) \in \omega \times \omega | F(k) \leqslant (\bar{m},\bar{n}) \leqslant (\tilde{m},\tilde{n})\} \setminus \{F(k)\}$, por lo tanto $F(k+1) \leqslant (m,n)$, pero $(m,n) \neq F(k+1)$. Además, ya sabemos que F es inyectiva, luego existe una cantidad infinita de elementos $(\bar{m},\bar{n})$ tales que $(0,0) \leqslant (\bar{m},\bar{n}) \leqslant (m,n)$. Pero esto último sería una contradicción. ⊠

De esta manera, con las afirmaciones anteriores, se concluye que ω y $\omega \times \omega$ son semejantes. □

Con la función F del Teorema 2.3.8, podemos definir las siguientes funciones que serán de gran utilidad.

2.3.9. Definición. Definimos a la función $\langle\ ,\ \rangle_2 : \omega \times \omega \to \omega$ dada por:

$$\forall (n_0,n_1) \in \omega \times \omega : \ \langle\ ,\ \rangle_2(n_0,n_1) = \langle n_0,n_1\rangle_2 = F^{-1}(n_0,n_1).$$

Es decir, $\langle\ ,\ \rangle_2$ es la inversa de la función F.

2.3.10. Definición. Definimos a la función $\langle\ \rangle_3 : \omega^3 \to \omega$ dada por:

$$\forall (n_0, n_1, n_2) \in \omega^3 :\ \langle n_0, n_1, n_2\rangle_3 = \langle\langle n_0, n_1\rangle_2, n_2\rangle_2$$

2.3.11. *Observación.* La función $\langle\ \rangle_3 : \omega^3 \to \omega$ es biyectiva.

Demostración. Primero probaremos la inyectividad. Sean $(n_0, n_1, n_2), (m_0, m_1, m_2) \in \omega^3$ tales que $\langle n_0, n_1, n_2\rangle_3 = \langle m_0, m_1, m_2\rangle_3$. Entonces $\langle\langle n_0, n_1\rangle_2, n_2\rangle_2 = \langle\langle m_0, m_1\rangle_2, m_2\rangle_2$, luego $\langle n_0, n_1\rangle_2 = \langle m_0, m_1\rangle_2$ y $n_2 = m_2$, por lo que $n_0 = m_0$ y $n_1 = m_1$ y $n_2 = m_2$. Por lo tanto, $\langle\ \rangle_3$ es inyectiva.

Ahora, procederemos a probar la suprayectividad. Sea $a \in \omega$, entonces existen $i, k \in \omega$ tales que $\langle i, k\rangle_2 = a$, además existen $i_1, i_2 \in \omega$ tales que $\langle i_1, i_2\rangle_2 = i$. Así pues $\langle i_1, i_2, i\rangle_3 = \langle\langle i_1, i_2\rangle_2, k\rangle_2 = \langle i, k\rangle_2 = a$. Por lo tanto $\langle\ \rangle_3$ es sobreyectiva. □

2.3.12. Definición. Para cada $\rho \in \omega \setminus \{0\}$ definiremos a las funciones $\langle\ \rangle_\rho : \omega^\rho \to \omega$ de la siguiente manera:

- $\langle\ \rangle_1 : \omega \to \omega$ es la función identidad.
- $\langle\ \rangle_2 : \omega^2 \to \omega$ es la función de la Definición 2.3.9
- Suponga que para $k \in \omega \setminus \{0, 1\}$ tenemos definida a la función biyectiva $\langle\ \rangle_k : \omega^k \to \omega$. Entonces definiremos a la función $\langle\ \rangle_{k+1} : \omega^{k+1} \to \omega$ dada por:

$$\forall (n_0, \ldots, n_k) :\ \langle n_0, \ldots, n_k\rangle_{k+1} = \langle\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle_k, n_k\rangle_2.$$

2.3.13. *Observación.* Para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$, la función $\langle\ \rangle_k : \omega^k \to \omega$ es biyectiva.

Demostración. Obviamente $\langle\ \rangle_1 : \omega \to \omega$ es biyectiva, pues es la función identidad. Además, ya probamos que la función $\langle\ \rangle_2 : \omega^2 \to \omega$ es una biyección (ver teorema 2.3.8).

Por otro lado, sea $k \in \omega \setminus \{0, 1\}$ y suponga que la función $\langle\ \rangle_k : \omega^k \to \omega$ es biyectiva.

Primero probaremos que la función $\langle\ \rangle_{k+1} : \omega^{k+1} \to \omega$ es inyectiva. Sean

$$(n_0, \ldots, n_k), (m_0, \ldots, m_k) \in \omega^{k+1} \text{ tales que } \langle n_0, \ldots, n_k\rangle_{k+1} = \langle m_0, \ldots, m_k\rangle_{k+1}$$

Entonces $\langle\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle_k, n_k\rangle_2 = \langle\langle m_0, \ldots, m_{k-1}\rangle_k, m_k\rangle_2$, de este modo $\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle_k = \langle m_0, \ldots m_{k-1}\rangle_k$ y $n_k = m_k$. Como $\langle\ \rangle_k$ es inyectiva, entonces $n_0 = m_0, \ldots, n_{k-1} = m_{k-1}, n_k = m_k$. Por lo tanto, $\langle\ \rangle_{k+1}$ es inyectiva.

Por último, probaremos que la función $\langle\ \rangle_{k+1} : \omega^{k+1} \to \omega$ es sobreyectiva. Sea $a \in \omega$. Entonces existe $(i, k) \in \omega \times \omega$ tales que $\langle i, k\rangle_2 = a$. Además, existe $(i_0, \ldots, i_{k-1}) \in \omega^k$ tal que $\langle i_0, \ldots, i_{k-1}\rangle_k = i$. Con todo lo anterior en mente, se tiene que $\langle i_0, \ldots, i_{k-1}, k\rangle_{k+1} = \langle\langle i_0, \ldots, i_{k-1}\rangle_k, k\rangle_2 = \langle i, k\rangle_2 = a$. Por lo tanto, $\langle\ \rangle_{k+1}$ es sobreyectiva. □

Con la observación 2.3.13, tenemos que existe al menos una biyección de la forma $\langle\ \rangle_k : \omega^k \to \omega$, para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$. De este modo un mismo número natural puede codificar a una n-ada de naturales.

2.3.14. Definición. Definimos a la función $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \to \omega$ dada por:

$$\langle s\rangle_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } s = \emptyset \\ \langle k-1, \langle s\rangle_k\rangle_2 + 1 & \text{si } s \in \omega^k \setminus \{\emptyset\}. \end{cases}$$

2.3.15. *Observación.* La función $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \to \omega$ es una biyección.

Demostración. Primero probaremos que la función $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \to \omega$ es inyectiva. Sean $s, t \in \omega^{<\omega}$ tales que $\langle s\rangle_\infty = \langle t\rangle_\infty$. Si $s \notin \omega^0$ entonces, como primera observación, tenemos que $t \neq \emptyset$, pues si $t = \emptyset$ entonces $1 \leqslant \langle s\rangle_\infty = \langle t\rangle_\infty = 0$, es decir $1 \leqslant 0$, lo cual sería una contradicción. Así pues, $\langle k_s - 1, \langle s\rangle_{k_s}\rangle_2 + 1 = \langle k_t - 1, \langle t\rangle_{k_t}\rangle_2 + 1$, entonces $\langle k_s - 1, \langle s\rangle_{k_s}\rangle_2 = \langle k_t - 1, \langle t\rangle_{k_t}\rangle_2$, luego $k_s - 1 = k_t - 1$ y $\langle s\rangle_{k_s} = \langle t\rangle_{k_t}$, por lo que $k_s = k_t$, y como $\langle\ \rangle_{k_s}$ es inyectiva, se concluye que $s = t$. Por otro lado, si $s = \emptyset$, supóngase que $t \neq \emptyset$, entonces $0 = \langle t\rangle_\infty = \langle s\rangle_\infty \geqslant 1$, lo que sería una contradicción, luego $t = \emptyset = s$. Por lo tanto, la función es inyectiva.

Por último, probaremos que la función $\langle\ \rangle_\infty : \omega^{<\omega} \to \omega$ es sobreyectiva. Sea $a \in \omega$, si $a = 0$, entonces $0 = \langle\emptyset\rangle_\infty$. Por otro lado, si $a \neq 0$, entonces $a \geqslant 1$, por lo que $a - 1 \geqslant 0$, luego existe $(i,j) \in \omega^2$ tal que $\langle i,j\rangle_2 = a - 1$. De esta manera $\langle i,j\rangle_2 + 1 = a$. Además existe $k \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $k - 1 = i$ y existe $s \in \omega^k$ tal que $j = \langle s\rangle_k$. Así pues, $\langle s\rangle_\infty = \langle k-1, \langle s\rangle_k\rangle_2 + 1 = \langle i,j\rangle_2 + 1 = a$. Por lo tanto, $\langle\ \rangle_\infty$ es sobreyectiva. □

2.3.16. Definición. Para cada $k > 0$, definimos a la función $G_k : \{0,\dots,k-1\} \times \omega \to \omega$ dada por:

$$G_k(i,c) = kc + i.$$

2.3.17. *Observación.* Para cada $k > 0$, la función $G_k : \{0,\dots,k-1\} \times \omega \to \omega$ es una biyección.

Demostración. Sea $k > 0$ fija. Primero probaremos la inyectividad. Sean (i_1, c_1), $(i_2, c_2) \in \{0,\dots,k-1\} \times \omega$ tales que $G_k(i_1,c_1) = G_k(i_2,c_2)$. Queremos demostrar que $(i_1,c_1) = (i_2,c_2)$. Tenemos que $kc_1 + i_1 = kc_2 + i_2$. Definimos al conjunto $A = \{kc \mid c \in \omega; kc \leqslant kc_1 + i_1 = kc_2 + i_2\}$. Note que $kc_1 \in A$, por lo que $A \neq \emptyset$. Además, por la misma definición de A vemos que está acotado por $kc_1 + i_1$, por lo tanto A tiene máximo. Entonces existe $k\tilde{c} \in A$ tal que:

$$\forall kc \in A : \ k\tilde{c} \geqslant kc.$$

AFIRMACIÓN: Para cada $j \in \{1,2\}$, $k\tilde{c} = kc_j$.

En efecto: Sea $j \in \{1, 2\}$ fija. Suponga que $k\tilde{c} \neq kc_j$. Entonces $k\tilde{c} > kc_j$ o $k\tilde{c} < kc_j$.

Caso(1): $k\tilde{c} < kc_j$. Como $kc_j \in A$, entonces $kc_j \leqslant k\tilde{c}$, por lo que en este caso tenemos que $k\tilde{c} < k\tilde{c}$, lo que sería una contradicción.

Caso(2): $k\tilde{c} > kc_j$. Como $k\tilde{c} \leqslant kc_j + i_j$, entonces $kc_j < k\tilde{c} \leqslant kc_j + i_j$, de aquí que $0 < k\tilde{c} - kc_j \leqslant i_j$, factorizando tenemos que $0 < k(\tilde{c} - c_j) \leqslant i_j < k$, entonces $0 < \tilde{c} - c_j < 1$, lo que sería una contradicción, pues $\tilde{c} - c_j$ es un entero.

Como los dos casos conducen a una contradicción, se concluye que $k\tilde{c} = kc_j$. ⊠

Por la Afirmación, tenemos que $kc_1 = kc_2$, por lo que $c_1 = c_2$. Como $kc_1 + i_1 = kc_2 + i_2$, se tiene que $i_1 = i_2$. Por lo tanto, $(i_1, c_1) = (i_2, c_2)$.

Por último, probaremos que G_k es sobreyectiva. Sea $x \in \omega$. Definimos al conjunto $B = \{kc \mid c \in \omega; kc \leqslant x\}$. Note que $B \neq \emptyset$, pues si $c = 0$ entonces $kc = 0 \leqslant x$, por lo tanto $B \neq \emptyset$. Además B está acotado superiormente por x. Luego existe $k\tilde{c} \in B$ tal que:

$$k\tilde{c} \leqslant x \text{ y } \forall kc \in B: \ k\tilde{c} \geqslant kc.$$

Se afirma que $0 \leqslant x - k\tilde{c} < k$. En efecto: Como $x \geqslant k\tilde{c}$, entonces $x - k\tilde{c} \geqslant 0$. Por otro lado, si $x - k\tilde{c} \geqslant k$ entonces $x \geqslant k + k\tilde{c} = k(\tilde{c} + 1) > k\tilde{c}$, luego $k(\tilde{c} + 1) \in B$ y $k(\tilde{c} + 1) > k\tilde{c}$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto $0 \leqslant x - k\tilde{c} < k$.

Definimos $i = x - k\tilde{c}$, de esta manera tenemos que:

$$G_k(i, \tilde{c}) = k\tilde{c} + i = k\tilde{c} + x - k\tilde{c} = x.$$

Por lo tanto F es sobreyectiva. □

2.3.18. Definición. Sean $k > 0$ y X un conjunto. Definimos a la función $\phi_k : (X^\omega)^k \to X^\omega$ dada por:

$$\forall x_0, \ldots, k_{k-1} \in X^\omega: \ \phi_k(x_0, \ldots, x_{k-1}) : \omega \to X \text{ es la función dada por:}$$

$$\phi_k(x_0, \ldots, k_{k-1})(kc + i) = x_i(c), \text{ donde } 0 \leqslant i < k.$$

Note que para cada $k > 0$ y para cada $x_0, \ldots, k_{k-1} \in X^\omega$, la función $\phi_k(x_0, \ldots, k_{k-1})$ está bien definida, pues la función G_k es biyectiva (ver definición 2.3.16 y observación 2.3.17). Por lo tanto, para cada $k > 0$ y para cada conjunto X, la función ϕ_k está bien definida.

Para facilitar la notación, cada vez que no exista confusión, denotaremos a la función ϕ_k como $\langle \ \rangle_k$.

2.3.19. *Observación.* La función $\phi_k = \langle \ \rangle_k : (X^\omega)^k \to X^\omega$ es una biyección.

Demostración. Primero probaremos la inyectividad. Sean $y_0, \ldots, y_{k-1}, x_0, \ldots, x_{k-1} \in X^\omega$ tales que $\phi_k(y_0, \ldots, y_{k-1}) = \phi_k(x_0, \ldots, x_{k-1})$. Sea $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ fija.

Se afirma que $x_i = y_i$. En efecto: Sea $l \in \omega$, tenemos que:

$$y_i(l) = \langle y_0, \ldots, y_{k-1}\rangle(kl + i) = \langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle(kl + i) = x_i(l).$$

Por lo tanto ϕ_k es inyectiva.

Por último, probaremos la sobreyectividad. Sea $\bar{x} \in X^\omega$. Entonces $\bar{x} : \omega \to X$ es una función. Para cada $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ definimos $x_j \in X^\omega$ dada por:

$$\forall c \in \omega : \; x_j(c) = \bar{x}(kc + j) = \bar{x}(n), \text{ donde } n = kc + j \text{ y } (j, c) \in \{0, \ldots, k-1\} \times \omega.$$

Así pues, si $n \in \omega$, entonces:

$$\bar{x}(n) = \bar{x}(kc + i) = x_i(c) = \langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle_k(kc + i) = \langle x_0, \ldots, x_{k-1}\rangle_k(n),$$

$$\text{donde } kc + i = n \text{ y } (i, c) \in \{0, \ldots, k-1\} \times \omega.$$

Por lo tanto ϕ_k es sobreyectiva. □

También existe una biyección entre los conjuntos X^ω y $(X^\omega)^\omega$.

2.3.20. Definición. Definimos la función $\Phi : X^\omega \to (X^\omega)^\omega$ por medio de la regla:

$$\text{Si } x \in X^\omega \text{ entonces } \Phi(x) : \omega \to X^\omega \text{ es la función dada por:}$$

$$\forall n \in \omega : \; \Phi(x)(n) : \omega \to X \text{ es la función cuya regla es:}$$
$$\forall m \in \omega : \; (\Phi(x)(n))(m) = x(\langle n, m\rangle_2).$$

A veces, para facilitar la notación, escribiremos $\langle\ ,\ \rangle$ en lugar de $\langle\ ,\ \rangle_2$.

2.3.21. *Observación.* La función $\Phi : X^\omega \to (X^\omega)^\omega$ es biyectiva.

Demostración. Primero probaremos que Φ es inyectiva. Sean $x, y \in X^\omega$ tales que $\Phi(x) = \Phi(y)$. Sea $j \in \omega$. Entonces existe $(n, m) \in \omega \times \omega$ tal que $\langle n, m\rangle = j$. Así pues, $x(j) = x(\langle n, m\rangle) = (\Phi(x)(n))(m) = (\Phi(y)(n))(m) = y(\langle n, m\rangle) = y(j)$. Es decir, $x = y$. Por lo tanto Φ es inyectiva.

Por último, probaremos que Φ es sobreyectiva. Sea $\bar{x} \in (X^\omega)^\omega$. Consideramos al elemento $x \in X^\omega$ dado por:

$$\forall c \in \omega : \; x(c) = x(\langle n, m\rangle) = (\bar{x}(n))(m), \text{ donde } (n, m) \in \omega \times \omega \text{ es tal que } \langle n, m\rangle = c.$$

Se afirma que $\Phi(x) = \bar{x}$. En efecto: Sean $j \in \omega$ y $i \in \omega$. Entonces $(\Phi(x)(j))(i) = x(\langle j, i\rangle) = (\bar{x}(j))(i)$. Es decir, $\forall i \in \omega$, $\Phi(x)(j) = \bar{x}(j)$. Luego $\Phi(x) = \bar{x}$. Por lo tanto Φ es sobreyectiva. □

Capítulo 3

El espacio de Baire.

En este capítulo veremos las propiedades más importantes del espacio de Baire. Para hacer esto, utilizaremos varios resultados que hemos visto en los capítulos anteriores.

3.1 El espacio de Baire.

Iniciamos esta sección con la definición del espacio de Baire.

3.1.1. Definición. Llamaremos *espacio de Baire* al espacio $\mathcal{N} = \omega^\omega$, donde $\mathcal{N}$ tiene la topología producto de Tychonoff y donde ω tiene la topología discreta.

3.1.2. *Observación.* 1. El espacio $\mathcal{N}$ es polaco, pues es el producto numerable de espacios polacos.

2. El espacio $\mathcal{N}$ es perfecto. Efectivamente: Si existíera $x \in \mathcal{N}$ punto aislado de $\mathcal{N}$, entonces existe U abierto en $\mathcal{N}$ tal que $\{x\} = U \cap \mathcal{N} = U$. De aquí que existan $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \omega$ tales que $x \in \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x_{\alpha_i}\}] \subseteq U$, de esta forma $\{x\} \supseteq \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x_{\alpha_i}\}]$. Por el axioma de elección para conjuntos numerables, existe una función $z : \omega \setminus \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \to \bigcup_{j\in\omega\setminus\{\alpha_0,\ldots,\alpha_m\}}(\omega \setminus \{x(j)\})$. Definamos a la función $y : \omega \to \omega$ por medio de la regla:

$$y(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}, \\ z(j) & \text{si } j \in \omega \setminus \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\}. \end{cases}$$

Entonces $y \in \bigcap_{i=0}^m \Pi_{\alpha_i}^{-1}[\{x_{\alpha_i}\}]$, pero $y \neq x$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{N}$ es un espacio perfecto.

Ahora, daremos algunas definiciones que usaremos a lo largo de nuestra discusión acerca del espacio de Baire.

Debemos de aclarar que dado un conjunto X, $\mathcal{P}(X)$ denotará el conjunto potencia de X.

3.1.3. Definición. Sea X un conjunto.

1. Un *esquema de Suslin* A en X es una función de la forma $A : \omega^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$.
2. La *operación de Suslin* sobre X es la función S que a cada esquema de Suslin A en X le asigna el conjunto $S(A) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) \subseteq X$.

3.1.4. Definición. Sea X un espacio métrico.

1. Diremos que un esquema de Suslin A es *abierto* (respectivamente, *cerrado*) si para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $A(s)$ es abierto (respectivamente, cerrado) en X.
2. Diremos que un esquema de Suslin A *cumple la condición de diámetros* si para cada $x \in \mathcal{N}$, se cumple que $\lim_n diam(A(x{\restriction_n})) = 0$, donde *diam* es el diámetro de un conjunto. Por convención diremos que $diam(\emptyset) = 0$.

3.1.5. *Observación.* Si un esquema de Suslin A sobre un espacio métrico (X, d) cumple la condición de diámetros, entonces $\bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$ contiene como máximo un punto.

DEMOSTRACIÓN. Si $y_1, y_2 \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$ son tales que $y_1 \neq y_2$, entonces para cada $n \in \omega$, $diam(A(x{\restriction_n})) \geqslant d(y_1, y_2) > 0$. Pero $\lim_n diam(A(x{\restriction_n})) = 0$, por lo que existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $diam(A(x{\restriction_n})) < d(y_1, y_2)$. Pero si $n > N$, $d(y_1, y_2) \leqslant diam(A(x{\restriction_n}))$. De aquí que $d(y_1, y_2) < d(y_1, y_2)$. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$ tiene como máximo un elemento. □

3.1.6. Definición. Sea A un esquema de Suslin sobre un espacio métrico X que cumple la condición de diámetros.

1. Definimos al siguiente conjunto:
$$Z(A) = \{x \in \mathcal{N} | \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) \neq \emptyset\}.$$
2. Definimos a la función $\phi : Z(A) \to X$ dada por:
$$\forall x \in Z(A) : \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) = \{\phi(x)\}.$$

   Decimos que ϕ es la *función asociada* al esquema de Suslin A.

3.1.7. Lema. *Sea A un esquema de Suslin sobre un espacio métrico X que cumple la condición de diámetros, entonces:*

1. *$\phi(Z(A)) = S(A)$.*

2. *La función $\phi : Z(A) \to X$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN.
(1) Sea $y \in \phi(Z(A))$. Entonces existe $y_0 \in Z(A)$ tal que $y = \phi(y_0)$. Como $y_0 \in Z(A)$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} A((y_0)\restriction_n) \neq \emptyset$, pero A cumple la condición de diámetros, por lo que $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} A((y_0)\restriction_n)$. De esta manera, se concluye que $y \in S(A)$.

Por otro lado, sea $y \in S(A)$. Entonces existe $z \in \mathcal{N}$ tal que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n) \neq \emptyset$, luego $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n)$. Así pues, si $z \in \mathcal{N}$ entonces $\bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n) \neq \emptyset$. De aquí que $z \in Z(A)$, entonces $\{\phi(z)\} = \bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n) = \{y\}$. Por lo tanto $y = \phi(z)$.

(2) Sea $U \subseteq X$ un abierto de X tal que $x \in \phi^{-1}[U]$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Además, como A cumple la condición de diámetros, existe $n \in \omega$ tal que $d(A(x\restriction_n)) < \epsilon$. Como $\{\phi(x)\} = \bigcap_{m\in\omega} A(x\restriction_m)$, entonces $\phi(x) \in A(x\restriction_n)$.

Por otro lado, se afirma que $A(x\restriction_n) \subseteq B_\epsilon(\phi(x)) \subseteq U$. En efecto: Sea $y \in A(x\restriction_n)$. Como $\phi(x) \in A(x\restriction_n)$, entonces $d(y, \phi(x)) \leqslant d(A(x\restriction_n)) < \epsilon$. Por lo tanto $y \in B_\epsilon(\phi(x))$.

Por último, se afirma que $x \in B_{x\restriction_n} \cap Z(A) \subseteq \phi^{-1}[U]$. Efectivamente: Sea $y \in B_{x\restriction_n} \cap Z(A)$. Entonces $\phi(y) \in A(y\restriction_n) = A(x\restriction_n) \subseteq U$. Por lo tanto, ϕ es una función continua. $\square$

A continuación, veremos la primera relación que existe entre el espacio de Baire y un espacio polaco arbitrario.

3.1.8. Teorema. *Todo espacio polaco no vacío es imagen continua del espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN. Sean (X, τ) un espacio polaco no vacío y d una métrica completa sobre X que induce a τ. La idea central de esta demostración es construir un esquema de Suslin sobre el conjunto X que cumpla la condición de diámetros, y probaremos que su función continua asociada es la que nos da el resultado.

La siguiente afirmación nos servirá para construir el esquema de Suslin.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto en X y para cada $\epsilon > 0$, existen abiertos no vacíos $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de diámetro menor que ϵ tales que $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}$.

En efecto: Sean U un abierto no vacío y $\epsilon > 0$. Definimos D un subconjunto denso numerable de X y sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de las bolas abiertas $B_{\frac{1}{n}}(\delta)$ tales que:

$$\delta \in D,\ \tfrac{1}{n} < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ y } \overline{B_{\frac{1}{n}}(\delta)} \subseteq U.$$

Note que tales bolas abiertas existen. Pues si U es un abierto, entonces existen $x \in D$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$ tales que $\frac{1}{2n} < \frac{\epsilon}{2}$ y $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$, pero sabemos que $\overline{B_{\frac{1}{2n}}(x)} \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x)$. Por lo tanto tales bolas abiertas existen.

Note que por la definición de la enumeración $\{U_n\}_{n\in\omega}$, se tiene que para cada $n \in \omega$, el conjunto U_n es un abierto distinto del vacío que tiene diámetro menor que ϵ. Por lo tanto, para demostrar la afirmación, bastará probar que la enumeración $\{U_n\}_{n\in\omega}$ es tal que:

$$\bigcup_{n\in\omega} U_n = U = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}.$$

Primero probaremos que $U \subseteq \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Para demostrar esto último, sea $x \in U$. Entonces existe $n \in \omega\setminus\{0\}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ y $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$. Además, existe $\delta \in D \cap B_{\frac{1}{3n}}(x)$.

Se quiere demostrar que $x \in B_{\frac{1}{3n}}(\delta)$ y $\overline{B_{\frac{1}{3n}}(\delta)} \subseteq U$. Lo primero se debe a que $\delta \in B_{\frac{1}{3n}}(x)$. Por otro lado, si $y \in \overline{B_{\frac{1}{3n}}(\delta)}$, entonces $y \in B_{\frac{1}{3n}}(\delta)$ ó $y \in der(B_{\frac{1}{3n}}(\delta))$, donde der es el operador derivado.

Caso(1): $y \in B_{\frac{1}{3n}}(\delta)$. Entonces $d(y,x) \leqslant d(y,\delta) + d(\delta,x) < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}$. Por lo tanto, en este caso se concluye que $y \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$.

Caso(2): $y \in der(B_{\frac{1}{3n}}(\delta))$. Entonces para cada $m \in \omega \setminus \{0\}$, tomamos un único $y_m \in (B_{\frac{1}{m}}(y) \setminus \{y\}) \cap B_{\frac{1}{3n}}(\delta)$. Luego:

$$\forall m \in \omega : \ d(y,x) \leqslant d(y,y_m) + d(y_m,\delta) + d(\delta,x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{m} + \frac{2}{3n}.$$

De aquí que:

$$\forall m \in \omega \setminus \{0\} : \ d(y,x) < \frac{1}{m} + \frac{2}{3n}.$$

Es decir, $d(y,x) \leqslant \frac{2}{3n} < \frac{1}{n}$, luego $y \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U$. Por lo tanto, en este segundo caso también se tiene el resultado.

En ambos caso, se tiene que la bola abierta $B_{\frac{1}{3n}}(\delta)$ es un elemento de la enumeración $\{U_n\}_{n\in\omega}$ y que $x \in B_{\frac{1}{3n}}(\delta)$. Por lo tanto, se concluye que $U \subseteq \bigcup_{n\in\omega} U_n$.

Por otro lado, obviamente $\bigcup_{n\in\omega} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}$.

Por último, note que si $y \in \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}$ entonces existe $m \in \omega$ tal que $y \in \overline{U_m} \subseteq U$. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n} \subseteq U$. ⊠

A continuación, construiremos un esquema de Suslin con ciertas propiedades. Para esto, haremos uso del principio de elecciones dependientes y de la afirmación anterior.

Primero, definimos la función $s_0 : \omega^0 = \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X)$ dada por: $s_0(\emptyset) = X$.

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\sigma \supseteq s_0$.
2. $\forall s \in \bigcup_{n<m-1} \omega^n : \ \sigma(s) = \bigcup_{n\in\omega} \sigma(s^\wedge n) = \bigcup_{n\in\omega} \overline{\sigma(s^\wedge n)}$.
3. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n : \ \sigma(s)$ es un abierto no vacío.
4. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \setminus \{\emptyset\} : \ d(\sigma(s)) < \frac{1}{l(s)}$.

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $s_0 \in \mathcal{A}$.
Por otro lado, sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la relación R de la siguiente manera:

- Sean $\sigma_0 : \bigcup_{n<m_0} \omega^n \to \mathcal{P}(X), \sigma_1 : \bigcup_{n<m_1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos $\sigma_0 R \sigma_1$ si:

  1. $\sigma_0 \supseteq \sigma_1$,
  2. $m_0 = m_1 + 1$.

Sea $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X) \in \mathcal{A}$. Queremos probar que existe un elemento $\pi \in \mathcal{A}$ tal que $\pi R \sigma$, para que en la construcción del esquema de Suslin podamos utilizar la función que el principio de elecciones dependientes nos garantiza. Definimos a la familia de conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{\{\{U_i^r\}_{i\in\omega} \mid \sigma(r) = \bigcup_{n\in\omega} U_n^r = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n^r}, \text{ donde cada } U_n^r \text{ es un abierto no vacío}$$

$$\text{de diámetro menor que } \tfrac{1}{m}\} \mid r \in \omega^{m-1}\}.$$

Observe que la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es la misma que la del conjunto ω^{m-1}, y ya sabemos que este último conjunto tiene cardinalidad a lo más numerable. Además, note que por la Afirmación (1), tenemos que para cada $r \in \omega^{m-1}$,

$$\emptyset \neq \{\{U_i^r\}_{i\in\omega} \mid \sigma(r) = \bigcup_{n\in\omega} U_n^r = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n^r}, \text{ donde cada } U_n^r \text{ es un abierto no vacío}$$

$$\text{de diámetro menor que } \tfrac{1}{m}\}.$$

Entonces, el axioma de elección para conjuntos numerables garantiza que existe una función de elección $G : \mathcal{B} \to \bigcup \mathcal{B}$. Para facilitar la notación, suponga que para cada $r \in \omega^{m-1}$, $\{U_n^r\}_{n\in\omega}$ es el elemento de elección. Con todo lo anterior en mente, definimos a la función $\pi : \bigcup_{n<m+1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$\pi(r) = \begin{cases} \sigma(r) & \text{si } r \in \bigcup_{n<m} \omega^n, \\ U_{r(m-1)}^{r\restriction_{m-1}} & \text{si } r \in \omega^m. \end{cases}$$

Observe que $\pi \in \mathcal{A}$, además $\pi R \sigma$. De esta manera, por el principio de elecciones dependientes, existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) R f(n).$$

Definimos a la función $A = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Notemos que A es una función de la forma $A : \omega^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$.

Enseguida procederemos a probar que el esquema de Suslin A satisface ciertas propiedades que utilizaremos.

Algunas de estas propiedades que son fáciles de notar son las siguientes:

1. $A(\emptyset) = s_0(\emptyset) = X$.
2. $\forall s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} : \; d(A(s)) < \frac{1}{l(s)}$.
3. $\forall s \in \omega^{<\omega} : \; A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n)$ y $A(s)$ es un abierto no vacío.

La propiedad restante que utilizaremos se prueba en la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(2): Si $s \subsetneq t$, entonces $\overline{A(t)} \subseteq A(s)$.

Sean $s, t \in \omega^{<\omega}$ tales que $s \subsetneq t$. Probaremos la afirmación por inducción sobre la diferencia $l(t) - l(s)$. Primero, si $l(t) = l(s) + 1$, entonces $t = s^\wedge k$ para alguna $k \in \omega$. De esta manera, $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n) = \bigcup_{n\in\omega} \overline{A(s^\wedge n)} \supseteq \overline{A(s^\wedge k)}$, con lo que en este caso inductivo se tiene el resultado.

Ahora, supóngase que para $t \in \omega^{<\omega}$ tal que $l(t) = l(s) + k_0$, para alguna $k_0 \in \omega \setminus \{0\}$, se cumple que $A(s) \supseteq \overline{A(t)}$. Sea $m \in \omega$ fija. Entonces $A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n) = \bigcup_{n\in\omega} \overline{A(t^\wedge n)} \supseteq \overline{A(t^\wedge m)}$, luego $A(s) \supseteq \overline{A(t)} \supseteq \overline{A(t^\wedge m)}$. Por lo tanto, se ha probado la afirmación. $\boxtimes$

Observe que, por la propiedad (2), A cumple la condición de diámetros. Enseguida probaremos que el conjunto $Z(A)$ es distinto del vacío, para que de esta manera la función asociada al esquema de Suslin tenga un dominio no vacío.

AFIRMACIÓN(3): $Z(A) \neq \emptyset$.

En efecto: Probaremos esta afirmación haciendo notar que se cumplen las hipótesis del teorema 1.2.20. Sea $x \in \mathcal{N}$. Sabemos que d es una métrica completa que induce a (X, τ). Por otro lado, definimos la sucesión de conjuntos $\{\overline{A(x\restriction_n)}\}_{n\in\omega}$, el cual obviamente es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos, pues para cada $n \in \omega$, $A(x\restriction_n) \neq \emptyset$. También, como para cada $n \in \omega$, $x\restriction_{n+1} \supsetneq x\restriction_n$, tenemos que $\overline{A(x\restriction_{n+1})} \subseteq A(x\restriction_n) \subseteq \overline{A(x\restriction_n)}$. Además, tenemos que para cada $n \in \omega$, $d(A(x\restriction_n)) = d(\overline{A(x\restriction_n)})$, y como $\lim_n d(A(x\restriction_n)) = 0$, se concluye que $\{\overline{A(x\restriction_n)}\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos cuyos diámetros convergen a 0, cuando n tiende a infinito. De esta manera, el teorema 1.2.20 garantiza que existe $w \in X$ tal que $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)}$.

Para concluir la afirmación, bastará probar que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)} = \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Obviamente se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)} \supseteq \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Por otro lado, sean $z \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)}$

y $m \in \omega \setminus \{0\}$ fijas. Como $x\restriction_m \subsetneq x\restriction_{m+1}$, entonces $z \in \overline{A(x\restriction_{m+1})} \subseteq A(x\restriction_m)$, luego $z \in \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n) \neq \emptyset$, luego $x \in Z(A)$. ⊠

Note que en la Afirmación (3), hemos probado que $Z(A) = \mathcal{N}$. Por lo tanto, tiene sentido considerar a la función continua $\phi : Z(A) = \mathcal{N} \to X$ asociada al esquema de Suslin A. Esta función es la que nos probará el teorema.

AFIRMACIÓN(4): ϕ es sobreyectiva.

En efecto: Sea $p \in X$. Probaremos la afirmación utilizando el principio de elecciones dependientes. Definimos $\mathcal{A}_0 = \{s \in \omega^{<\omega} | p \in A(s)\}$. Note que $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$, pues $p \in X = A(\emptyset)$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_0$, definimos la relación R_0 de la siguiente manera:

- Sean $s_1, s_2 \in \mathcal{A}_0$. Escribiremos $s_1 R_0 s_2$ si:
  1. $s_1 \supseteq s_2$,
  2. $l(s_1) = l(s_2) + 1$.

Sea $s \in \mathcal{A}_0$. Entonces $p \in A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n)$, luego existe $m \in \omega$ tal que $p \in A(s^\wedge m)$. Observe que $s^\wedge m \in \mathcal{A}_0$ y $s^\wedge m R_0 s$. De esta manera, por el principio de elecciones dependientes, tenemos que existe una función $f_0 : \omega \to \mathcal{A}_0$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f_0(n+1) R_0 f_0(n).$$

Definimos $\sigma = \bigcup_{n\in\omega} f_0(n) : \omega \to \omega$. Como la función ϕ está definida sobre todo el conjunto $\mathcal{N}$, tenemos que $\{\phi(\sigma)\} = \bigcap_{n\in\omega} A(\sigma\restriction_n)$. Pero, por construcción, se tiene que para cada $n \in \omega$, $p \in A(\sigma\restriction_n)$. Como el esquema de Suslin A satisface la condición de diámetros, se concluye que $\phi(\sigma) = p$. ⊠

La última afirmación garantiza que X es imagen continua del espacio de Baire. □

En el siguiente teorema, obtenemos una interesante relación entre un espacio polaco arbitrario y un subespacio de $\mathcal{N}$.

3.1.9. Teorema. *Si X es un espacio polaco distinto del vacío entonces existe un cerrado $C \subseteq \mathcal{N}$ y una biyección continua $\Phi : C \to X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio polaco no vacío y d una métrica completa que induce a τ. La idea central de esta demostración es construir un esquema de Suslin que cumpla la condición de diámetros de tal forma que su función asociada nos garantice el teorema.

La siguiente afirmación será de utilidad para construir el esquema de Suslin.

AFIRMACIÓN(1): Para cada, conjunto F_σ, $F \subseteq X$ y para cada $\epsilon > 0$. Es posible expresar al conjunto F como una unión ajena $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, donde para cada $n \in \omega$, F_n es un conjunto F_σ, $\overline{F_n} \subseteq F$ y $diam(F_n) < \epsilon$.

En efecto: Sea F un conjunto F_σ y $\epsilon > 0$ fijos. Note que si $F = \emptyset$, se tiene el resultado. Por otro lado, suponga que $F \neq \emptyset$. Entonces $F = \bigcup_{n\in\omega} C_n$, donde para cada $n \in \omega$, C_n es un cerrado. Como X es un espacio polaco, tenemos que X cumple el segundo axioma de numerabilidad. Además, la familia $\mathcal{B} = \{B_\delta(x) \mid x \in X;\ \delta < \epsilon\}$ es una base para X. Por lo tanto, existe $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ que es una base numerable para X (ver teorema 1.3.7). Note también que si $B \in \mathcal{B}_0$, entonces $\overline{B}$ tiene el mismo diámetro que B. Definimos a la familia $\overline{\mathcal{B}_0} = \{\overline{B} | B \in \mathcal{B}_0\}$, el cual es a lo más infinito numerable, por lo que definimos una enumeración para esta familia, $\overline{\mathcal{B}_0} = \{B_m\}_{m\in\omega}$.

Observe ahora que $F = \bigcup_{m,n}(C_n \cap B_m)$. Pues si $z \in F$, entonces $z \in \bigcup_{n\in\omega} C_n$, por lo que existe $n_0 \in \omega$ tal que $z \in C_{n_0}$, pero la base $\mathcal{B}_0$ cubre a X, luego existe $m_0 \in \omega$ tal que $z \in B_{m_0}$. Por otro lado, si $z \in \bigcup_{n,m}(C_n \cap B_m)$, entonces existen $n_0, m_0 \in \omega$ tales que $z \in C_{n_0} \cap B_{m_0}$, luego $z \in \bigcup_{n\in\omega} C_n = F$. Por lo tanto, $F = \bigcup_{m,n}(C_n \cap B_m)$.

Note que para cada $(n, m) \in \omega \times \omega$, el conjunto $C_n \cap B_m$ es un cerrado de diámetro menor que ϵ. Consideramos una enumeración sobre los conjuntos $C_n \cap B_m$, es decir $\{C_n \cap B_m\}_{m,n\in\omega} = \{H_k\}_{k\in\omega}$.

Definimos para cada $n \in \omega$, al conjunto $G_n = H_n \setminus \bigcup_{k<n} H_k$. Enseguida, haremos algunas observaciones acerca de la enumeración $\{G_n\}_{n\in\omega}$.

Observación(1): $F = \bigcup_{n\in\omega} G_n$. Efectivamente, sea $z \in \bigcup_{n\in\omega} G_n$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in H_m \setminus \bigcup_{k<m} H_k \subseteq F$. Por otro lado, sea $z \in F$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in H_m$. Definimos $m_0 \in \omega$ como el mínimo tal que $z \in H_{m_0}$, entonces $z \in G_{m_0}$. Por lo tanto, $F = \bigcup_{n\in\omega} G_n$

Observación(2): Si $n \neq m$, entonces $G_n \cap G_m = \emptyset$. Efectivamente, sean $n, m \in \omega$ tales que $n < m$. Suponga que existe $z \in (H_n \setminus \bigcup_{k<n} H_k) \cap (H_m \setminus \bigcup_{k<m} H_k)$. Entonces $z \in H_m \setminus \bigcup_{k<m} H_k$ y $z \in H_n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $G_n \cap G_m = \emptyset$.

Observación(3): Para cada $n \in \omega$, G_n es la intersección de un cerrado y un abierto. Por lo tanto, tenemos que G_n es un conjunto F_σ (ver teorema 1.2.19).

Por lo tanto, las tres observaciones anteriores garantizan que F es una unión numerable ajena de conjuntos F_σ, cada uno con diámetro menor que ϵ.

Por otro lado, como para cada $n \in \omega$, G_n es un conjunto F_σ, entonces $G_n = \bigcup_{m\in\omega} D^n_m$, donde para cada $m \in \omega$, D^n_m es un cerrado. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $D^n_m \subseteq D^n_{m+1}$. También, definimos al conjunto $D^n_{-1} = \emptyset$. Enseguida haremos algunas observaciones con respecto a los conjuntos $D^n_m \setminus D^n_{m-1}$ para cada $n \in \omega$ y para cada $m \in \omega$.

Observación(4): Para cada $n \in \omega$, $G_n = \bigcup_{m\in\omega}(D^n_m \setminus D^n_{m-1})$. Efectivamente, sea $z \in \bigcup_{m\in\omega}(D^n_m \setminus D^n_{m-1})$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in D^n_m \setminus D^n_{m-1} \subseteq G_n$. Por otro lado, sea $z \in G_n$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in D^n_m$. Definimos $m_0 \in \omega$ como el mínimo tal que $z \in D^n_{m_0}$, entonces $z \in D^n_{m_0} \setminus D^n_{m_0-1}$. Por lo tanto, $G_n = \bigcup_{m\in\omega}(D^n_m \setminus D^n_{m-1})$.

Observación(5): Para cada $m \in \omega$, $D^n_m \setminus D^n_{m-1}$ es la intersección de un cerrado y un abierto. Por lo tanto $D_m \setminus D^n_{m-1}$ es un F_σ (ver teorema 1.2.19).

Observación(6): Para cada $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$, $(D^n_{m_1} \setminus D^n_{m_1-1}) \cap (D^n_{m_2} \setminus D^n_{m_2-1}) = \emptyset$. Efectivamente, como para cada $n_1, n_2 \in \omega$ tales que $n_1 \neq n_2$, $G_{n_1} \cap G_{n_2} = \emptyset$, para nuestros propósitos bastará fijar $n \in \omega$, considerar $m_1, m_2 \in \omega$ tales que $m_1 \neq m_2$ y probar que $(D^n_{m_1} \setminus D^n_{m_1-1}) \cap (D^n_{m_2} \setminus D^n_{m_2-1}) = \emptyset$. Suponga que $m_1 < m_2$ y que existe $z \in (D^n_{m_1} \setminus D^n_{m_1-1}) \cap (D^n_{m_2} \setminus D^n_{m_2-1})$. Por hipótesis, tenemos que $m_1 \leqslant m_2 - 1$, entonces $z \in D^n_{m_1} \subseteq D^n_{m_2-1}$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $(D^n_{m_1} \setminus D^n_{m_1-1}) \cap (D^n_{m_2} \setminus D^n_{m_2-1}) = \emptyset$.

Observación(7): $diam(D^n_m \setminus D^n_{m-1}) < \epsilon$. Efectivamente, como para cada $m, n \in \omega$, $D^n_m \setminus D^n_{m-1} \subseteq G_n$ y $diam(G_n) < \epsilon$, tenemos que $diam(D^n_m \setminus D^n_{m-1}) < \epsilon$.

Observación(8): Para cada $n, m \in \omega$, $\overline{D^n_m \setminus D^n_{m-1}} \subseteq F$. Efectivamente, para cada $n, m \in \omega$ se tiene que:

$$\overline{D^n_m \setminus D^n_{m-1}} = \overline{D^n_m \cap (X \setminus D^n_{m-1})} \subseteq \overline{D^n_m} \cap \overline{X \setminus D^n_{m-1}} \subseteq \overline{D^n_m} = D^n_m \subseteq F.$$

Por lo tanto, $\overline{D^n_m \setminus D^n_{m-1}} \subseteq F$.

Definimos a $\{F_n\}_{n\in\omega}$ como una enumeración de $\{D^n_m \setminus D^n_{m-1}\}_{m,n\in\omega}$. Note que, por las observaciones (5)-(8), tenemos que la colección ajena $\{F_n\}_{n\in\omega}$ es tal que $F = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y donde para cada $n \in \omega$, F_n es un conjunto F_σ, $\overline{F_n} \subseteq F$ y $diam(F_n) < \epsilon$. ⊠

Enseguida utilizaremos la afirmación anterior y el principio de elecciones dependientes para construir un esquema de Suslin de tal forma que cumpla algunas propiedades.

Primero, definimos a la función $s_0 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X)$ dada por: $s_0(\emptyset) = X$.

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\sigma \supseteq s_0$.
  2. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \setminus \{\emptyset\} :\ diam(\sigma(s)) < \frac{1}{l(s)}$.
  3. Si $s \subsetneq t \in \bigcup_{n<m} \omega^n$ entonces $\overline{\sigma(t)} \subseteq \sigma(s)$.
  4. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n :\ \sigma(s)$ es un conjunto F_σ.
  5. $\forall s \in \bigcup_{n<m-1} \omega^n : \sigma(s) = \bigcup_{n\in\omega} \sigma(s^\wedge n)$, donde la unión es disjunta.

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $s_0 \in \mathcal{A}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación R:

- Sean $\sigma_0 : \bigcup_{n<m_0} \omega^n \to \mathcal{P}(X), \sigma_1 : \bigcup_{n<m_1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos $\sigma_0 R \sigma_1$ si:

1. $\sigma_0 \supseteq \sigma_1$,
2. $m_0 = m_1 + 1$.

Sea $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elemento del conjunto $\mathcal{A}$. Construiremos un elemento π tal que $\pi R \sigma$. Como para cada $s \in \omega^{m-1}$, $\sigma(s)$ es un conjunto F_σ. Por la Afirmación (1), tenemos que:

$$\{\{F_i^s\}_{i\in\omega} \mid \sigma(s) = \bigcup_{i\in\omega} F_i^s, \text{ la cual es una unión ajena, donde para cada } i \in \omega,\ F_i^s$$

$$\text{es un conjuto } F_\sigma;\ \overline{F_i^s} \subseteq \sigma(s);\ diam(F_i^s) < \tfrac{1}{m}\} \neq \emptyset.$$

Además, definimos a la familia de conjuntos:

$$\mathcal{G} = \{\{\{F_i^s\}_{i\in\omega} \mid \sigma(s) = \bigcup_{i\in\omega} F_i^s, \text{ la cual es una unión ajena, donde para cada } i \in \omega,$$

$$F_i^s \text{ es un conjuto } F_\sigma;\ \overline{F_i^s} \subseteq \sigma(s);\ diam(F_i^s) < \tfrac{1}{m}\} \mid s \in \omega^{m-1}\}.$$

Note que la familia $\mathcal{G}$ tiene la misma cardinalidad que el conjunto ω^{m-1}, el cual es a lo más infinito numerable. De esta manera, por el axioma de elección para conjuntos numerables, existe $G : \mathcal{G} \to \bigcup \mathcal{G}$ función de elección. Para simplificar la notación, para cada $s \in \omega^{m-1}$, $\{F_i^s\}_{i\in\omega}$ denotará su elemento de elección. Con todo lo anterior en mente, definimos $\pi : \bigcup_{n<m+1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$\pi(r) = \begin{cases} \sigma(r) & \text{si } r \in \bigcup_{n<m} \omega^n, \\ U_{r(m-1)}^{r\restriction_{m-1}} & \text{si } r \in \omega^m. \end{cases}$$

Note ahora que $\pi \in \mathcal{A}$ y además $\pi R \sigma$. Por lo tanto, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega :\ f(n+1) R f(n).$$

Definimos a la función $A = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Observe que A es una función de la forma $A : \omega^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto, A es un esquema de Suslin.

Observe que el esquema de Suslin A satsiface las siguientes propiedades:

1. $A(\emptyset) = X$.
2. $\forall s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$: $d(A(s)) < \frac{1}{l(s)}$.
3. $\forall s \in \omega^{<\omega}$: $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n)$, donde la unión es ajena y $A(s)$ es un conjunto F_σ.

4. Si $s, t \in \omega^{<\omega}$ son tales que $s \subsetneq t$ entonces $\overline{A(t)} \subseteq A(s)$.

Note que la propiedad (2) garantiza que el esquema de Suslin A cumple la condición de los diámetros. Por lo tanto, tiene sentido considerar a su función continua asociada ϕ. Antes de probar que ϕ es una biyección, demostraremos que su dominio $Z(A) \neq \emptyset$.

AFIRMACIÓN(2): $Z(A) \neq \emptyset$.

En efecto: Como $X \neq \emptyset$. Sean $p \in X$ fija y el conjunto $\mathcal{A}_0 = \{s \in X^k | k \in \omega; p \in A(s)\}$. Para construir un elemento en el conjunto $Z(A)$, utilizaremos el principio de elecciones dependientes. Primero, observe que $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$, pues $A(\emptyset) = X \neq \emptyset$.

Definimos sobre el conjunto $\mathcal{A}_0$ la siguiente relación R_0:

- Sean $s, t \in \mathcal{A}_0$. Escribiremos sR_0t si:
  1. $s \supseteq t$,
  2. $l(s) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}_0$. Entonces $p \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $n_0 \in \omega$ tal que $p \in A(t^\wedge n_0)$. Definimos $s = t^\wedge n_0$. Tenemos que $s \in \mathcal{A}_0$ y sR_0t. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_0 : \omega \to \mathcal{A}_0$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f_0(n+1) R_0 f_0(n).$$

Ahora, definimos al elemento $x = \bigcup_{n\in\omega} f_0(n)$.

Enseguida probaremos que existe $w \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x{\restriction_n})} = \{w\}$. Para esto, haremos notar que la sucesión de conjuntos $\{\overline{A(x{\restriction_n})}\}_{n\in\omega} = \{\overline{A(f(n){\restriction_n}))}\}_{n\in\omega} = \{A_n\}_{n\in\omega}$ satisface las hipótesis del teorema 1.2.20. Obviamente esta sucesión de conjuntos está conformada por cerrados no vacíos tales que para cada $n \in \omega$, $\overline{A(x{\restriction_{n+1}})} \subseteq A(x{\restriction_n}) \subseteq \overline{A(x{\restriction_n})}$. Además, los diámetros de los conjuntos de esta sucesión convergen a 0, cuando n tiende a infinito. Como la métrica completa d induce a τ, se conluye que existe $w \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \{w\}$.

Procederemos a probar que $x \in Z(A)$. Para ello bastará notar que $\bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) = \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x{\restriction_n})}$. Obviamente se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x{\restriction_n})} \supseteq \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$. Por otro lado, sean $z \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x{\restriction_n})}$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$, como $x{\restriction_n} \subsetneq x{\restriction_{n+1}}$, entonces $z \in \overline{A(x{\restriction_{n+1}})} \subseteq A(x{\restriction_n})$. Por lo tanto $z \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$. Se concluye de esta manera que $x \in Z(A)$. Es decir, $Z(A) \neq \emptyset$. ⊠

Por lo tanto, la función continua $\phi : Z(A) \to X$ asociada al esquema de Suslin A tiene dominio distinto del vacío. Notemos que para probar que ϕ es sobreyectiva, bastará probar que el elemento x definido en la Afirmación (2) es tal que $\phi(x) = p$. Para esto, observe que para cada $n \in \omega$, $p \in A(f(n){\restriction_n}) = A(x{\restriction_n})$. De esta manera $p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$.

Por lo tanto, $p \in f[Z(A)]$.

AFIRMACIÓN(3): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in Z(A)$ tales que $x \neq y$. Sea $n \in \omega$ el mínimo tal que $x\restriction_n \neq y\restriction_n$. Como $x\restriction_0 = \emptyset = y\restriction_0$, se tiene que $n \in \omega \setminus \{0\}$. Luego, tiene sentido considerar al elemento $x\restriction_{n-1} = y\restriction_{n-1} = s$. Si suponemos que $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x) \in A(s^\frown x(n-1))$ y $\phi(y) \in A(s^\frown y(n-1))$. Es decir, tenemos un mismo elemento en dos conjuntos ajenos, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\phi(x) \neq \phi(y)$. ⊠

De esta manera, tenemos que ϕ es una biyección continua.

AFIRMACIÓN(4): $Z(A)$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{N}$.

En efecto: Si $Z(A) = \mathcal{N}$, tenemos el resultado. Por otro lado, suponga que $Z(A) \neq \mathcal{N}$. Probaremos que el conjunto $\mathcal{N} \setminus Z(A)$ es un abierto en $\mathcal{N}$. Sea $x \in \mathcal{N} \setminus Z(A)$. Entonces $\bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n) = \emptyset$.

Primero observemos que obtenemos una contradicción si suponemos que la siguiente propiedad es verdadera:

$$\forall n \in \omega : \ A(x\restriction_n) \neq \emptyset.$$

De esta manera, al suponer verdadera la propiedad mencionada, tenemos que para cada $n \in \omega$, $\overline{A(x\restriction_n)}$ son cerrados no vacíos tales que $\overline{A(x\restriction_{n+1})} \subseteq A(x\restriction_n) \subseteq \overline{A(x\restriction_n)}$ y tales que sus diámetros convergen a 0. Además d es una métrica completa que induce a τ. Entonces existe $w \in X$ tal que $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)}$ (ver teorema 1.2.20). Note que en la Afirmación (2) se probó que:

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)} = \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n).$$

Por lo tanto, $x \in Z(A)$, lo que es una contradicción.

De esta manera, existe $n_0 \in \omega$ tal que $A(x\restriction_{n_0}) = \emptyset$. Observe que $x \in B_{x\restriction_{n_0}} \subseteq X \setminus Z(A)$. Pues si $z \in B_{x\restriction_{n_0}}$ y $z \in Z(A)$. Entonces $\bigcap_{m\in\omega} A(z\restriction_m) \neq \emptyset$, pero $A(x\restriction_{n_0}) = A(z\restriction_{n_0}) = \emptyset$, luego $\bigcap_{m\in\omega} A(z\restriction_m) = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $X \setminus Z(A)$ es un abierto en $\mathcal{N}$. ⊠

Con todo lo anterior en mente, se concluye que ϕ es una biyección continua y que $Z(A)$ es un cerrado en $\mathcal{N}$. Por lo tanto, se tiene el teorema. □

3.1.10. *Observación.* Con el teorema anterior podemos probar de una manera más fácil que todo espacio polaco no vacío es imagen continua del espacio de Baire.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\emptyset \neq X$ un espacio polaco. Entonces existe un cerrado $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{N}$ y $f : C \to X$ una biyección continua. Como ω admite un buen orden y $C \subseteq \omega^\omega$ son dos cerrados distintos del vacío, entonces existe $r : \omega^\omega \to C$ retracción (ver teorema 2.2.21). Consideramos $F = f \circ r : \omega^\omega \to X$, el cual es una función continua y sobreyectiva. Por lo tanto X es imagen continua del espacio de Baire. □

Ahora, si al espacio polaco arbitrario distinto del vacío lo asumimos cero-dimesional, obtenemos un homeomorfismo. Esto lo veremos en el siguiente teorema.

3.1.11. Teorema. *Todo espacio polaco cero-dimensional distinto del vacío es homeomorfo a un subespacio cerrado del espacio de Baire $\mathcal{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, τ) un espacio polaco cero-dimensional distinto del vacío y d una métrica completa que induce a τ. La idea de la demostración es construir un esquema de Suslin que cumple la condición de diámetros de tal forma que su función asociada es la que nos garantizará el teorema. Para ello, primero probaremos la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(1): Para cada U abierto en X y para cada $\epsilon > 0$. El conjunto U se puede expresar como una unión disjunta $U = \bigcup_{n\in\omega} V_n$, donde para cada $n \in \omega$, V_n es un abierto-cerrado y de diámetro menor que ϵ.

En efecto: Sean U abierto en X y $\epsilon > 0$. Como X es un espacio cero-dimensional, existe una base $\mathcal{B}$ conformada por abiertos-cerrados. Definimos:

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} \mid diam(B) < \epsilon\}.$$

Observe que $\mathcal{B}_0$ es una base para X. Efectivamente, sean $A \subseteq X$ abierto en X y $x \in A$. Entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$, luego existe $r > 0$ tal que $x \in B_r(x) \subseteq B \subseteq A$. Definimos $k = \min\{r, \frac{\epsilon}{4}\}$, entonces $x \in B_k(x) \subseteq B_r(x) \subseteq A$. De esta manera, existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \subseteq B_k(x) \subseteq A$. Además, $diam(B_1(x)) \leqslant diam(B_k(x)) = 2k \leqslant 2\frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_0$ es una base para X.

Por otro lado, como X es un espacio polaco, tenemos que X cumple 2AN. Luego existe $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_0$ numerable tal que es una base para X (ver teorema 1.3.7).

Note que si $U = \emptyset$, se tiene la afirmación. Por otro lado, suponga que $U \neq \emptyset$. Definimos el conjunto $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}_1 | B \subseteq U\}$. Note que $\mathcal{C}$ es a lo más numerable. También observe que $U = \bigcup \mathcal{C}$. Efectivamente, sea $z \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $z \in B \subseteq U$. Por otro lado, si $z \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $z \in B \subseteq U$. Por lo tanto, $U = \bigcup \mathcal{C}$.

De esta manera, es posible expresar al conjunto U como: $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$, donde para cada $n \in \omega$, $U_n \in \mathcal{B}_1$ tal que $U_n \subseteq U$.

Ahora, definimos para cada $n \in \omega$, $V_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n} U_i$. Probaremos que la familia $\{V_n\}_{n\in\omega}$ satisface las propiedades buscadas en la afirmación.

Observación(1): Si $n_1, n_2 \in \omega$ tales que $n_1 < n_2$, entonces $V_{n_1} \cap V_{n_2} = \emptyset$. Efectivamente, suponga que existe $z \in V_{n_1} \cap V_{n_2}$. Entonces $z \in U_{n_2} \setminus \bigcup_{i<n_2} U_{n_2}$ y $z \in U_{n_1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $V_{n_1} \cap V_{n_2} = \emptyset$.

Observación(2): $U = \bigcup_{n\in\omega} V_n$. Efectivamente, sea $z \in U$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in U_m$. Definimos $m_0 \in \omega$ como el mínimo tal que $z \in U_{m_0}$. Por lo tanto $z \in U_{m_0} \setminus \bigcup_{i<m_0} U_i = V_{m_0}$. Por otro lado, si $z \in \bigcup_{n\in\omega} V_n$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in U_m \setminus \bigcup_{i<m} U_i \subseteq U$. Por lo tanto $U = \bigcup_{n\in\omega} V_n$.

Observación(3): Note que para cada $n \in \omega$, U_n es abierto-cerrado y $diam(U_n) < \epsilon$.

Por lo tanto, $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$ es una unión disjunta, donde para cada $n \in \omega$, U_n es un abierto-cerrado y de diámetro menor que ϵ. ⊠

Enseguida, usaremos el principio de elecciones dependientes y la Afirmación (1) para construir un esquema de Suslin que satisfaga algunas propiedades.

Primero, definimos a la función $s_0 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X)$ dada por: $s_0(\emptyset) = X$.

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas la funciones de la forma $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\sigma \supseteq s_0$.
  2. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n$: $\sigma(s)$ es un abierto-cerrado y $\sigma(s) = \bigcup_{n\in\omega} \sigma(s^\wedge n)$ es una unión ajena.
  3. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \setminus \omega^0$: $diam(\sigma(s)) < \frac{1}{l(s)}$.

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $s_0 \in \mathcal{A}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $\sigma_0 : \bigcup_{n<m_0} \omega^n \to \mathcal{P}(X), \sigma_1 : \bigcup_{n<m_1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos $\sigma_0 R \sigma_1$ si:

  1. $\sigma_0 \supseteq \sigma_1$,
  2. $m_0 = m_1 + 1$.

Sea $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elemento del conjunto $\mathcal{A}$. Construiremos un elemento π tal que $\pi R \sigma$. Como para cada $r \in \omega^{m-1}$, $\sigma(r)$ es un abierto, la Afirmación(1) garantiza que:

$$\emptyset \neq \{\{U_i^s\}_{i\in\omega} \mid \sigma(r) = \bigcup_{i\in\omega} U_i^r \text{ es una unión ajena donde cada elemento es un abierto-cerrado de diámetro menor que } \tfrac{1}{m}\}.$$

Por otro lado, definimos:

$$\mathcal{D} = \{\{\{U_i^s\}_{i\in\omega} \mid \sigma(r) = \bigcup_{i\in\omega} U_i^r \text{ es una unión ajena donde cada elemento es un abierto-cerrado de diámetro menor que } \tfrac{1}{m}\} \mid s \in \omega^{m-1}\}.$$

Note que la familia $\mathcal{D}$ es a lo más numerable y satisface las hipótesis del axioma de elección para conjuntos numerables. Por lo tanto, existe $G : \mathcal{D} \to \bigcup \mathcal{D}$ función de elección. Para facilitar la notación, para cada $s \in \omega^{m-1}$, $\{U_n^s\}_{n\in\omega}$ será su elemento de elección. Ahora definimos la función $\pi : \bigcup_{n<m+1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$\pi(r) = \begin{cases} \sigma(r) & \text{si } r \in \bigcup_{n<m} \omega^n \\ U_{r(m-1)}^{r\restriction_{m-1}} & \text{si } r \in \omega^m. \end{cases}$$

Note que $\pi \in \mathcal{A}$, además $\pi R \sigma$. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) R f(n).$$

Definimos $A = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Observe que A es una función de la forma $A : \omega^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$. Además, note que el esquema de Suslin A satisface las siguientes propiedades:

1. $A(\emptyset) = s_0(\emptyset) = X$.
2. $\forall s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$: $d(A(s)) < \frac{1}{l(s)}$.
3. $\forall s \in \omega^{<\omega}$: $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n)$ es una unión ajena y $A(s)$ es un abierto-cerrado.

Otra propiedad que satisface el esquema de Suslin A se prueba en la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(2): Si $s \subsetneq t$ entonces $A(t) \subseteq A(s)$.

En efecto: Sean $s, t \in \omega^{<\omega}$ tales que $s \subsetneq t$. Probaremos la afirmación por inducción sobre la diferencia $l(t) - l(s)$. Primero, si $l(t) = l(s) + 1$, entonces $t = s^\wedge k$ para alguna $k \in \omega$. De esta manera $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n) \supseteq A(s^\wedge k)$. Por lo tanto, en este caso se tiene el resultado. Por otro lado, suponga que para $l(t) = l(s) + k_0$, para alguna $k_0 \in \omega \setminus \{0\}$, se tiene que $A(s) \supseteq A(t)$. Sea $m \in \omega$ fija. Entonces $A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n) \supseteq A(t^\wedge m)$. Luego, $A(t) \supseteq A(t^\wedge m)$.

Por lo tanto, si $s \subsetneq t$ entonces $A(t) \subseteq A(s)$. ⊠

Note que la propiedad(2) garantiza que el esquema de Suslin A cumple la condición de diámetros. Luego existe su función continua asociada ϕ. Enseguida probaremos que el dominio de ϕ es distinto del vacío.

AFIRMACIÓN(3): $Z(A) \neq \emptyset$.

En efecto: Utilizaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento en $Z(A)$. Como $X \neq \emptyset$, existe $p \in X$. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{A}_0 = \{s \in X^k \mid k \in \omega;\ p \in A(s)\}.$$

Note que $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$, pues $A(\emptyset) = X \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_0$, definimos la relación R_0:

- Sean $s, t \in \mathcal{A}_0$. Escribiremos sR_0t si:
    1. $s \supseteq t$,
    2. $l(s) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}_0$. Entonces $p \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $n_0 \in \omega$ tal que $p \in A(t^\wedge n_0)$. Definimos $s = t^\wedge n_0$, tenemos que $s \in \mathcal{A}_0$ y sR_0t. De esta manera, el principio de elecciones dependientes implica que existe una función $f_0 : \omega \to \mathcal{A}_0$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f_0(n+1)R_0f_0(n).$$

Definimos $x = \bigcup_{n\in\omega} f_0(n)$. Probaremos que la sucesión de conjuntos $\{A(x{\restriction_n})\}_{n\in\omega} = \{A(f(n){\restriction_n})\}_{n\in\omega} = \{A_n\}_{n\in\omega}$ cumple las hipótesis del teorema 1.2.20. Obviamente, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\omega}$ está conformada por conjuntos cerrados no vacíos tales que para cada $n \in \omega$, $A(x{\restriction_{n+1}}) \subseteq A(x{\restriction_n})$. Además, los diámetros de los conjuntos de esta sucesión convergen a 0, cuando n tiende a infinito. Como la métrica completa d induce a τ, tenemos que existe $w \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) = \{w\}$ (ver teorema 1.2.20). Por lo tanto, $x \in Z(A)$. ⊠

Por la afirmación anterior, la función continua asociada al esquema de Suslin A tiene dominio distinto del vacío. En las siguientes afirmaciones, probaremos que ϕ es un homeomorfismo y que su dominio $Z(A)$ es cerrado en $\mathcal{N}$. Para que, de esta manera, concluir la demostración del teorema.

AFIRMACIÓN(4): ϕ es sobreyectiva.

En efecto: Notemos que para probar que ϕ es sobreyectiva, bastará probar que el elemento x definido en la Afirmación(3) es tal que $\phi(x) = p$. Para ello, observemos que para cada $n \in \omega$, $p \in A(f(n){\restriction_n}) = A(x{\restriction_n})$. De esta manera, $p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$. Por lo tanto $p \in f[Z(A)]$. ⊠

AFIRMACIÓN(5): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in Z(A)$ tales que $x \neq y$. Definimos $n \in \omega$ como el mínimo tal que $x{\restriction_n} \neq y{\restriction_n}$. Como $x{\restriction_0} = \emptyset = y{\restriction_0}$, se tiene que $n \in \omega \setminus \{0\}$. Luego existe el elemento $x{\restriction_{n-1}} = y{\restriction_{n-1}} = s$. Si suponemos que $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x) \in A(s^\wedge x(n-1))$ y $\phi(y) \in A(s^\wedge y(n-1))$. Es decir, un mismo elemento está en dos conjuntos ajenos, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\phi(x) \neq \phi(y)$. ⊠

Por las dos afirmaciones anteriores, se concluye que ϕ es biyectiva.

AFIRMACIÓN(6): $Z(A)$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{N}$.

En efecto: Por un lado, si $Z(A) = \mathcal{N}$, tenemos el resultado. Por otro lado, suponga que $Z(A) \neq \mathcal{N}$. Queremos probar que el conjunto $\mathcal{N} \setminus Z(A)$ es abierto. Sea $x \in \mathcal{N} \setminus Z(A)$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) = \emptyset$.

Note que existe $n_0 \in \omega$ tal que $A(x{\restriction_{n_0}}) = \emptyset$. Efectivamente, si suponemos que para cada $n \in \omega$, $A(x{\restriction_n}) \neq \emptyset$. Entonces para cada $n \in \omega$, $A(x{\restriction_n})$ son cerrados no vacíos tales que $A(x{\restriction_{n+1}}) \subseteq A(x{\restriction_n})$ y tales que sus diámetros convergen a 0. Además, d es una métrica completa que induce a τ. Entonces existe $w \in X$ tal que $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$ (ver teorema 1.2.20). De esta manera, $x \in Z(A)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe $n_0 \in \omega$ tal que $A(x{\restriction_{n_0}}) = \emptyset$.

Observe ahora que $x \in B_{x\restriction_{n_0}} \subseteq X \setminus Z(A)$. Efectivamente, suponga que existe $z \in B_{x\restriction_{n_0}}$ tal que $z \in Z(A)$. Entonces $\bigcap_{m\in\omega} A(z{\restriction_m}) \neq \emptyset$, pero $A(x{\restriction_{n_0}}) = A(z{\restriction_{n_0}}) = \emptyset$, luego $\bigcap_{m\in\omega} A(z{\restriction_m}) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $x \in B_{x\restriction_{n_0}} \subseteq X \setminus Z(A)$. Es decir, $X \setminus Z(A)$ es un abierto en $\mathcal{N}$. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(7): ϕ es una función abierta.

En efecto: Sea $s \in X^k$. Bastará probar que $\phi[Z(A) \cap B_s]$ es un conjunto abierto en X. Por un lado, si $\phi[Z(A) \cap B_s] = \emptyset$, se tiene el resultado. Por otro lado, suponga que $\phi[Z(A) \cap B_s] \neq \emptyset$.

Probaremos que $\phi[Z(A) \cap B_s] = A(s)$. Efectivamente, sea $z \in \phi[Z(A) \cap B_s]$. Entonces existe $z_0 \in Z(A) \cap B_s$ tal que $\phi(z_0) = z$, luego $\bigcap_{n\in\omega} A((z_0){\restriction_n}) = \{z\}$ y $(z_0){\restriction_k} = s$. Por lo tanto, $z \in A((z_0){\restriction_k}) = A(s)$.

Por otro lado, sea $z \in A(s)$. Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento χ en $Z(A) \cap B_s$ tal que $\phi(\chi) = z$. Definimos el conjunto $\mathcal{A}_1 = \{\sigma \in X^p \mid p \in \omega;\ z \in A(\sigma);\ \sigma \supseteq s\}$. Note que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, pues $s \in \mathcal{A}_1$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_1$, definimos la relación R_1:

- Sean $r, t \in \mathcal{A}_1$. Escribiremos rR_1t si:

  1. $r \supseteq t$,
  2. $l(r) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}_1$. Entonces $z \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $n_0 \in \omega$ tal que $z \in A(t^\wedge n_0)$. Definimos $r = t^\wedge n_0$. Note que $r \in \mathcal{A}_1$ y rR_1t. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_1 : \omega \to \mathcal{A}_1$ tal que:

$$\forall n \in \omega :\ f_1(n+1) R_1 f_1(n).$$

Definimos $\chi = \bigcup_{n\in\omega} f_1(n)$. Observe ahora que $\chi \in \mathcal{N}$ y además para cada $n \in \omega$, $z \in A(f(n)_{\restriction n}) = A(\chi_{\restriction n})$. Luego $\chi \in Z(A)$, $\chi_{\restriction k} = f(k)_{\restriction k} = s$ y $\phi(\chi) = z$. Por lo tanto, $z \in \phi[Z(A) \cap B_s]$.

De esta manera, se concluye que ϕ es una función abierta. ⊠

Por lo tanto, X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{N}$. □

Ahora, si al espacio polaco distinto del vacío además de cero-dimensional lo consideramos con una cierta propiedad con respecto a sus compactos, entonces se obtiene un homeomorfismo entre este espacio y el espacio de Baire. Pero para probar esta observación, antes deberemos de demostrar algunos otros teoremas.

3.1.12. Teorema. *Si (Y,d) es un espacio métrico tal que para cada $\epsilon > 0$ y para cada $0 < \delta < \epsilon$ existe $F_\delta = \{x_0^\delta, \ldots, x_{n_\delta}^\delta\} \subseteq Y$ tal que $Y = \bigcup_{i=0}^{n_\delta} B_\delta(x_i^\delta)$, entonces toda sucesión de Y posee una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. Sean $\{y_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión y $\epsilon > 0$ fijas. Primero construiremos para cada $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, una sucesión $\{B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)\}_{i\leqslant m_n}$ para alguna $m_n \in \omega$ tal que $Y = \bigcup_{i=0}^{m_n} B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)$. Para ello, definimos:

$$\Delta = \{\{\{B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)\}_{i\leqslant m} \mid m \in \omega;\ Y = \bigcup_{i=0}^{m} B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)\} \mid n \in \omega \text{ tal que } \tfrac{1}{2^n} < \epsilon\}.$$

Note que Δ es a lo más numerable. Además, por hipótesis, tenemos que para cada $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, $\emptyset \neq \{\{B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)\}_{i\leqslant m} \mid m \in \omega;\ Y = \bigcup_{i=0}^{m} B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)\}$. De esta manera, al aplicar el axioma de elección para conjuntos numerables sobre Δ, obtenemos una función de elección sobre Δ. Para facilitar la notación, para cada $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, denotaremos a su elemento de elección sobre Δ como $\{B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)\}_{i\leqslant m_n}$ para alguna $m_n \in \omega$ tal que $Y = \bigcup_{i=0}^{m_n} B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)$. Enseguida probaremos una propiedad que cumplen cada una de estas sucesiones de bolas abiertas.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ fija y para cada $\{z_k\}_{k\in\omega}$ sucesión, existe $i(n) \in \{0, \ldots, m_n\}$ tal que:

$$\forall \tilde{n} \in \omega:\ \exists\ \tilde{m}(\tilde{n}) > \tilde{n} \text{ tal que } z_{\tilde{m}(\tilde{n})} \in B_{\frac{1}{2^n}}(x_{i(n)}^n).$$

En efecto: Sean $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ y $\{z_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión fijas. Suponga que:

$$\forall i \in \{0, \ldots, m_n\}:\ \exists \tilde{n}(i) \in \omega \text{ tal que } \forall \tilde{m} > \tilde{n}(i):\ z_{\tilde{m}} \notin B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n).$$

Entonces para cada $i \in \{0, \ldots, m_n\}$, sea $\tilde{n}(i) \in \omega$ fijo tal que:

$$\forall \tilde{m} > \tilde{n}(i): \ z_{\tilde{m}} \notin B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n).$$

Definimos $N = \max\{\tilde{n}(0), \ldots, \tilde{n}(m_n)\}$. De esta manera, si $\tilde{m} > N$, entonces para cada $i \in \{0, \ldots, m_n\}$, $\tilde{m} > N \geqslant \tilde{n}(i)$, luego para cada $i \in \{0, \ldots, m_n\}$, $z_{\tilde{m}} \notin B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)$. Es decir $z_{\tilde{m}} \in \bigcap_{i=0}^{m_n}(Y \setminus B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n)) = Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m_n} B_{\frac{1}{2^n}}(x_i^n) = Y \setminus Y = \emptyset$, lo que es una contradicción. $\boxtimes$

La idea central de la demostración es aplicar varias veces la Afirmación (1) y el principio de elecciones dependientes para construir una subsucesión de Cauchy para $\{y_n\}_{n\in\omega}$.

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las sucesiones de la forma $\{\{\chi_n^k\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant m}$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:
  1. $\{\chi_n^0\}_{n\in\omega} = \{y_n\}_{n\in\omega}$.
  2. Si para $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, $\{\chi_n^j\}_{n\in\omega}$ está definida, entonces $\{\chi_n^{j+1}\}_{n\in\omega}$ es una subsucesión de $\{\chi_n^j\}_{n\in\omega}$ tal que $\{\chi_n^{j+1}\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{j+n_0}}}(x_i^{j+n_0})$ para alguna $i \in \{0, \ldots, m_{j+n_0}\}$, donde $n_0 \in \omega$ es el mínimo tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$.

Procedemos a construir un elemento en el conjunto $\mathcal{A}$. Note que, por la Afirmación (1), para $n_0 \in \omega$ el mínimo tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$, existe $i(n_0) \in \{0, \ldots, m_{\tilde{n}}\}$ tal que:

$$\forall \tilde{n}: \ \exists \ \tilde{m}(\tilde{n}) > \tilde{n} \text{ tal que } y_{\tilde{m}(\tilde{n})} \in B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_{i(n_0)}^{n_0}).$$

Definamos ahora al conjunto:

$$\mathcal{A}(n_0) = \{\{z_k\}_{k\leqslant h} \text{ subsucesión truncada de } \{y_n\}_{n\in\omega} \mid h \in \omega \setminus \{0\}; \ \forall k \leqslant h:$$
$$z_k \in B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_{i(n_0)}^{n_0})\}.$$

Se afirma que $\mathcal{A}(n_0) \neq \emptyset$. En efecto: Para $1 \in \omega$, la Afirmación (1) garantiza que existe $\tilde{m}(1) > 1$ tal que $y_{\tilde{m}(1)} \in B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_{i(n_0)}^{n_0})$. De manera análoga, para $\tilde{m}(1) \in \omega$, existe $\tilde{m}(\tilde{m}(1)) > \tilde{m}(1)$ tal que $y_{\tilde{m}(\tilde{m}(1))} \in B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_{i(n_0)}^{n_0})$. De esta manera, definimos a la sucesión truncada$\{z_k\}_{k\leqslant 1}$ dada por:

$$z_k = \begin{cases} y_{\tilde{m}(1)} & \text{si } k = 0 \\ y_{\tilde{m}(\tilde{m}(1))} & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Note que $\{z_k\}_{k\in\omega} \in \mathcal{A}(n_0)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}(n_0) \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}(n_0)$ definimos la siguiente relación R_{n_0}:

- Sean $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_1}, \{\beta_k\}_{k\leqslant h_2} \in \mathcal{A}(n_0)$. Escribiremos $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_1} R_{n_0} \{\beta_k\}_{k\leqslant h_2}$ si:
  1. $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_1} \supseteq \{\beta_k\}_{k\leqslant h_2}$,
  2. $h_1 = h_2 + 1$.

Sea $\{\beta_k\}_{k\leqslant h} \in \mathcal{A}(n_0)$. Como $\{\beta_k\}_{k\leqslant h}$ es una subsucesón truncada de $\{y_n\}_{n\in\omega}$, entonces $\beta_h = y_t$ para alguna $t \in \omega$. La Afirmación (1) garantiza que existe $\tilde{m}(t) > t$ tal que $y_{\tilde{m}}(t) \in B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x^{n_0}_{i(n_0)})$. De esta manera, definimos $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_2+1}$ dada por:

$$\alpha_k = \begin{cases} \beta_k & \text{si } k \leqslant h \\ y_{\tilde{m}(t)} & \text{si } k = h+1. \end{cases}$$

Observe ahora que $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h+1} \in \mathcal{A}(n_0)$ y $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h+1} R_{n_0} \{\beta_k\}_{k\leqslant h}$. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_{n_0} : \omega \to \mathcal{A}(n_0)$ tal que:

$$\forall a \in \omega : \; f_{n_0}(a+1) R_{n_0} f_{n_0}(a).$$

Definimos $\{z_k\}_{k\in\omega} = \bigcup_{a\in\omega} f_{n_0}(a)$. Con todo lo anterior en mente, sea $\{\{\chi^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant 1}$ dada por:

$$\{\chi^k_n\}_{n\in\omega} = \begin{cases} \{y_n\}_{n\in\omega} & \text{si } k = 0 \\ \{z_n\}_{n\in\omega} & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Note que $\{\{\chi^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant 1} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación R:

- Sean $\{\{\alpha^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h_1}, \{\{\beta^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h_2} \in \mathcal{A}$. Escribiremos

  $$\{\{\alpha^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h_1} R \; \{\{\beta^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h_2}$$

  si:
  1. $\{\{\alpha^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h_1} \supseteq \{\{\beta^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h_2}$,
  2. $h_1 = h_2 + 1$.

Procedemos a probar que el conjunto $\mathcal{A}$ cumple la segunda hipótesis del principio de elecciones dependientes. Sea $\{\{\beta^k_n\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h} \in \mathcal{A}$. Consideramos a la sucesión $\{\beta^h_n\}_{n\in\omega}$ y al natural $h + n_0$. Note que $\epsilon > \frac{1}{2^{n_0}} \geqslant \frac{1}{2^{h+n_0}}$, luego la Afirmación (1) garantiza que existe $i(h+n_0) \in \{0, \ldots, m_{h+n_0}\}$ tal que:

$$\forall \tilde{n} \in \omega \; \exists \tilde{m}(\tilde{n}) > \tilde{n} \text{ tal que } \beta^h_{\tilde{m}(\tilde{n})} \in B_{\frac{1}{2^{h+n_0}}}(x^{h+n_0}_{i(h+n_0)})$$

Con lo anterior en mente, definimos el conjunto:

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{\{z_k\}_{k\leqslant m} \text{ subsucesión truncada de } \{\beta_n^h\}_{n\in\omega} \mid m \in \omega \setminus \{0\};\ \forall k \leqslant m,$$
$$z_k \in B_{\frac{1}{2^{h+n_0}}}(x_{i(h+n_0)}^{h+n_0})\}.$$

Probaremos que $\widetilde{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Efectivamente, tenemos que para $1 \in \omega$, existe $\tilde{m}(1) > 1$ tal que $\beta_{\tilde{m}(1)}^h \in B_{\frac{1}{2^{h+n_0}}}(x_{i(h+n_0)}^{h+n_0})$. De la misma manera, para $\tilde{m}(1) \in \omega$ existe $\tilde{m}(\tilde{m}(1)) > \tilde{m}(1)$ tal que $\beta_{\tilde{m}(\tilde{m}(1))}^h \in B_{\frac{1}{2^{h+n_0}}}(x_{i(h+n_0)}^{h+n_0})$. Definimos $\{z_k\}_{k\in\omega}$ dada por:

$$z_k = \begin{cases} \beta_{\tilde{m}(1)}^h & \text{si } k = 0 \\ \beta_{\tilde{m}(\tilde{m}(1))}^h & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Observe que $\{z_k\}_{k\in\omega} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, $\widetilde{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\widetilde{\mathcal{A}}$ definimos la siguiente relación $\tilde{R}$:

- Sean $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_1}, \{\gamma_k\}_{k\leqslant h_2} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Escribiremos $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_1}\tilde{R}\ \{\gamma_k\}_{k\leqslant h_2}$ si:

  1. $\{\alpha_k\}_{k\leqslant h_1} \supseteq \{\gamma_k\}_{k\leqslant h_2}$,
  2. $h_1 = h_2 + 1$.

Sea $\{\gamma_k\}_{k\leqslant m} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Como $\{\gamma_k\}_{k\leqslant m}$ es una subsucesión truncada de $\{\beta_n^h\}_{n\in\omega}$, existe $t \in \omega$ tal que $\gamma_m = \beta_t^h$. Por otro lado, la Afirmación (1) implica que existe $\tilde{m}(t) > t$ tal que $\beta_{\tilde{m}(t)}^h \in B_{\frac{1}{2^{h+n_0}}}(x_{i(h+n_0)}^{h+n_0})$. Definimos $\{\alpha_k\}_{k\leqslant m+1}$ dada por:

$$\alpha_k = \begin{cases} \gamma_k & \text{si } k \leqslant m \\ \beta_{\tilde{m}(t)} & \text{si } k = m+1. \end{cases}$$

Note que $\{\alpha_k\}_{k\leqslant m+1} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ y $\{\alpha_k\}_{k\leqslant m+1}\tilde{R}\{\gamma_k\}_{k\leqslant m}$. De esta manera, el principio de elecciones dependientes implica que existe una función $\tilde{f} : \omega \to \widetilde{\mathcal{A}}$ tal que:

$$\forall a \in \omega :\ \tilde{f}(a+1)\tilde{R}\tilde{f}(a).$$

Sea $\{Z_k\}_{k\in\omega} = \bigcup_{a\in\omega} \tilde{f}(a)$. Definimos $\{\{\chi_n^k\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h+1}$ dada por:

$$\{\chi_n^k\}_{n\in\omega} = \begin{cases} \{\beta_n^k\}_{n\in\omega} & \text{si } k \leqslant h \\ \{Z_n\}_{n\in\omega} & \text{si } k = h+1. \end{cases}$$

Observe ahora que $\{\{\chi_n^k\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h+1} \in \mathcal{A}$ y $\{\{\chi_n^k\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h+1}R\{\{\beta_n^k\}_{n\in\omega}\}_{k\leqslant h}$. Por lo tanto, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall a \in \omega :\ f(a+1)Rf(a).$$

Con todo lo anterior en mente, para facilitar la notación, definimos $\{\{\chi_n^k\}_{n\in\omega}\}_{k\in\omega} = \bigcup_{a\in\omega} f(a)$.

AFIRMACIÓN(2): La sucesión $\{\chi_n^n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy.

En efecto: Sea $\tilde{\epsilon} > 0$. Además, sea $j \in \omega\setminus\{0\}$ tal que $\frac{2}{2^{j+n_0}} < \tilde{\epsilon}$. Primero probaremos por inducción que:

$$\forall k \in \omega: \ \{\chi_n^{j+k}\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_o}^{(j-1)+n_0}), \text{ donde } i_0 \in \{0,\ldots,m_{(j-1)+n_0}\} \text{ es fija}$$

$$\text{y tal que } \{\chi_n^j\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0}).$$

Note que para $k = 0$, se tiene la propiedad anterior. Pues $\{\chi_n^j\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0})$. Por otro lado, suponga que para $k \in \omega$ se cumple que:

$$\{\chi_n^{j+k}\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0}).$$

Como $\{\chi_n^{j+k+1}\}_{n\in\omega}$ es una subsucesión de $\{\chi_n^{j+k}\}_{n\in\omega}$, se obtiene que $\{\chi_n^{j+k+1}\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{(j-1)+k_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0})$. Por lo tanto, se tiene la propiedad anterior.

De esta manera, si $\tilde{n}, \tilde{m} > j$. Tenemos que $\{\chi_n^{\tilde{m}}\}_{n\in\omega}, \{\chi_n^{\tilde{n}}\}_{n\in\omega} \subseteq B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0})$. Entonces $\chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}}, \chi_{\tilde{n}}^{\tilde{n}} \in B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0})$. Luego:

$$d(\chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}}, \chi_{\tilde{n}}^{\tilde{n}}) \leqslant diam(B_{\frac{1}{2^{(j-1)+n_0}}}(x_{i_0}^{(j-1)+n_0})) = \frac{2}{2^{(j-1)+n_0}} < \tilde{\epsilon}.$$

Por lo tanto, $\{\chi_n^n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy. ⊠

AFIRMACIÓN(3): $\{\chi_n^n\}_{n\in\omega}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\omega}$.

En efecto: Sean $n, m \in \omega$ tales que $n < m$. Como $\{\chi_k^m\}_{k\in\omega}$ es una subsucesión de $\{\chi_k^n\}_{k\in\omega}$, tenemos que $\chi_m^m = \chi_{\tilde{m}}^n$, para alguna $\tilde{m} \in \omega$. Note que $n < \tilde{m}$, pues $n < m$. Además, como $\{\chi_k^n\}_{k\in\omega}$ es una subsucesión de $\{y_k\}_{k\in\omega}$, tenemos que $\chi_{\tilde{m}}^m = y_{k_1}$ y $\chi_n^n = y_{k_2}$ para algunas $k_1, k_2 \in \omega$. Luego, $k_1 < k_2$, puesto que $n < \tilde{m}$. De esta manera, hemos probado que $\{\chi_n^n\}_{n\in\omega}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\omega}$. ⊠

Por lo tanto, se tiene una subsucesión de $\{y_k\}_{k\in\omega}$ que es de Cauchy. □

3.1.13. Teorema. *Sea (Y, d) un espacio métrico tal que toda sucesión en Y tiene una subsucesión convergente, y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una cubierta abierta de Y. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in Y$, existe $\alpha(x)$ tal que $B_\delta(x) \subseteq U_{\alpha(x)}$.*

Demostración. Supóngase que para cada $\delta > 0$, existe $x(\delta) \in Y$ tal que:

$$\forall \alpha \in \Omega : \ B_\delta(x(\delta)) \nsubseteq U_\alpha.$$

De esta manera, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, existe $x_n \in Y$ tal que:

$$\forall \alpha \in \Omega : \ B_{\frac{1}{n}}(x_n) \nsubseteq U_\alpha.$$

Luego, aplicando el axioma de elección para conjuntos numerables, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, tomamos un único punto $x_n \in Y$ tal que:

$$\forall \alpha \in \Omega : \ B_{\frac{1}{n}}(x_n) \nsubseteq U_\alpha.$$

Con estos elementos, definimos a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$, luego esta subsucesión tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k\in\omega}$, digamos que converge a $x \in Y$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una cubierta, existe $\alpha_0 \in \Omega$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$, pero U_{α_0} es abierto. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq U_{\alpha_0}$. Además, como la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\omega}$ converge a x, existe $N \in \omega$ tal que $d(x_N, x) < \frac{\epsilon}{2}$, donde $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$. Pero, si $z \in B_{\frac{1}{N}}(x_N)$, entonces $d(z, x_N) < \frac{1}{N}$, luego $d(z,x) \leqslant d(z,x_N) + d(x_N,x) < \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por lo tanto, $z \in B_\epsilon(x) \subseteq U_{\alpha_0}$.

Con todo lo anterior, obtenemos una contradicción, pues hemos llegado a que $B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subseteq U_{\alpha_0}$. □

3.1.14. Teorema. *Sea (Y,d) un espacio métrico tal que toda sucesión en Y tiene una subsucesión convergente, y si para cada $\epsilon > 0$ y para cada $0 < \alpha < \epsilon$, existe $F_\alpha = \{x_0^\alpha, \ldots, x_{n_\alpha}^\alpha\} \subseteq Y$ tal que $Y = \bigcup_{i=0}^{n_\alpha} B_\alpha(x_i^\alpha)$. Entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ una cubierta abierta para Y. Por el teorema 3.1.13, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in Y$ existe $\beta(x) \in \Omega$ tal que $B_\delta(x) \subseteq U_{\beta(x)}$.

Por otro lado, sea $0 < \alpha < \delta$ fija. Entonces existe $F_\alpha = \{x_0^\alpha, \ldots, x_{n_\alpha}^\alpha\} \subseteq Y$ tal que $Y = \bigcup_{i=0}^{n_\alpha} B_\alpha(x_i^\alpha)$. Por lo tanto, $Y = \bigcup_{i=0}^{n_\alpha} B_\alpha(x_i^\alpha) \subseteq \bigcup_{i=0}^{n_\alpha} B_\delta(x_i^\delta)$. Ahora, para cada $i \in \{0, \ldots, n_\alpha\}$, tomamos un único $\beta_i \in \Omega$ tal que $B_\delta(x_i^\alpha) \subseteq U_{\beta_i}$. Luego, $Y \subseteq \bigcup_{i=0}^{n_\alpha} U_{\beta_i}$. Por lo tanto, Y es compacto. □

3.1.15. Teorema. *Todo espacio polaco no vacío cero-dimensional tal que todos sus compactos tienen interior vacío es homeomorfo al espacio de Baire $\mathcal{N}$.*

Demostración. Notemos en primer lugar que $\mathcal{N}$ es un espacio polaco cero-dimensional no vacío cuyos compactos tienen todos interior vacío. En efecto: Ya sabemos que $\mathcal{N}$ es un espacio polaco cero-dimensional.

Además, recordemos que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, los abiertos B_s también son cerrados. Por otro lado, si suponemos que existe $K \subseteq \mathcal{N}$ un compacto con interior no vacío, entonces existe $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $B_s \subseteq K$, y como B_s es cerrado, tenemos que B_s es un compacto. Pero B_s no puede ser compacto, pues la familia $\{B_{s^\wedge n}\}_{n\in\omega}$ cubre a B_s, es ajena y es tal que no se le puede extraer una subcubierta finita. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es un espacio polaco cero-dimensional no vacío cuyos compactos tienen todos interior vacío.

Procedemos a probar la otra parte del teorema. Para ello, sea (X, τ) un espacio polaco cero-dimensional no vacío cuyos compactos tienen todos interior vacío y sea d una métrica completa que induce a la topología τ. La idea de la demostración es construir un esquema de Suslin que cumpla la condición de diámetros de tal forma que su función continua asociada nos garantice el teorema.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto-cerrado y para cada $\epsilon > 0$, existe una familia numerable $\{V_i\}_{i\in\omega}$ de abiertos-cerrados ajenos de diámetro menor que ϵ tal que $U = \bigcup_{i\in\omega} V_i$.

En efecto: Sea $\mathcal{B}$ una base de abiertos-cerrados. Definimos a la familia:

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} \mid diam(B) < \epsilon\}.$$

Note que $\mathcal{B}_0$ es una base para X. Pues si $\emptyset \neq A \subseteq X$ es un abierto y $x \in A$, entonces existe $r > 0$ tal que $x \in B_r(x) \subseteq A$. Sea $k = \min\{r, \frac{\epsilon}{4}\}$, entonces $x \in B_k(x) \subseteq B_r(x) \subseteq A$. Como $\mathcal{B}$ es una base para X, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_k(x) \subseteq A$. Luego, $B \in \mathcal{B}_0$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_0$ es una base para X.

Por otro lado, como X es un espacio polaco, entonces X cumple 2AN. Por lo tanto, $\mathcal{B}_0$ contiene una base numerable $\mathcal{B}_1$ (ver teorema 1.3.7). Definimos el conjunto $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}_1 | B \subseteq U\}$. Note que $\mathcal{A}$ es numerable.

Observe ahora que $U = \bigcup \mathcal{A}$. Pues si $z \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $z \in B \subseteq U$. Por otro lado, si $z \in U$, como $\mathcal{B}_1$ es una base para X, existe $B \in \mathcal{B}_1$ tal que $z \in B \subseteq U$, luego $z \in \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $U = \bigcup \mathcal{A}$.

De esta manera, existe una enumeración para el conjunto $\mathcal{A} = \{U_n\}_{n\in\omega}$. Luego, tenemos que $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$.

Definimos para cada $n \in \omega$, $V_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n} U_i$. Con esta definición en mente , sea $\{V_n\}_{n\in\omega}$. Enseguida, haremos algunas observaciones con respecto a esta última sucesión de conjuntos.

Observación (1): Si $n_1, n_2 \in \omega$ son tales que $n_1 < n_2$, entonces $V_{n_1} \cap V_{n_2} = \emptyset$. Efectivamente, suponga que existe $z \in V_{n_1} \cap V_{n_2}$, entonces $z \in U_{n_2} \setminus \bigcup_{i<n_2} U_i$ y $z \in U_{n_1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $V_{n_1} \cap V_{n_2} = \emptyset$.

Observación (2): $U = \bigcup_{n\in\omega} V_n$. Efectivamente, sea $z \in \bigcup_{n\in\omega} V_n$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $z \in V_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n} U_i \subseteq U_n \subseteq U$. Por otro lado, sea $z \in U$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $z \in U_n$. Definimos $m \in \omega$ como el mínimo tal que $z \in U_m$, luego $z \in U_m \setminus \bigcup_{i<m} U_i = V_m$. Por lo tanto, $U = \bigcup_{n\in\omega} V_n$.

Observación (3): Para cada $n \in \omega$, el conjunto V_n es un abierto-cerrado con diámetro menor que $\epsilon > 0$.

De esta manera, las observaciones anteriores garantizan la afirmación. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(2): Para cada conjunto U abierto-cerrado no vacío y para cada $\epsilon > 0$. El conjunto U se puede descomponer como una unión ajena de una cantidad infinita numerable de abierto-cerrados no vacíos con diámetros menores que ϵ.

En efecto: Sean $\emptyset \neq U \subseteq X$ un abierto-cerrado y $\epsilon > 0$. Note que existe $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ tal que para todo conjunto finito $F = \{x_0, \ldots, x_m\} \subseteq U$, $U \nsubseteq \bigcup_{i=0}^{m} B_{\epsilon_0}(x_i)$. Para esto, aplicaremos el teorema 3.1.14. Suponga que para cada $0 < \delta < \epsilon$ existe $F_\delta = \{x_0^\delta, \ldots, x_{n_\delta}^\delta\} \subseteq U = \overline{U}$ tal que $\overline{U} = U \subseteq \bigcup_{i=0}^{n_\delta} B_\delta(x_i^\delta)$. Entonces toda sucesión sobre $U = \overline{U}$ tiene una subsucesión de Cauchy, y dicha subsucesión de Cauchy es convergente en $U = \overline{U}$. Por lo tanto, U es compacto. Luego, U tiene interior vacío. Pero como U es abierto, se tiene que $U = int(U) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ tal que para todo conjunto finito $F = \{x_0, \ldots, x_m\} \subseteq U$, $U \nsubseteq \bigcup_{i=0}^{m} B_{\epsilon_0}(x_i)$.

Observe ahora que si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una cubierta abierta de U tal que para cada $\alpha \in \Omega$, $diam(U_\alpha) < \epsilon_0$, entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ no tiene una subcubierta finita. Efectivamente, suponga que existe $\{U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_k}\} \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ tal que $\bigcup_{i=0}^{k} U_{\alpha_i} \supseteq U$. Entones, para cada $i \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $U_{\alpha_i} \neq \emptyset$, tomamos un único elemento $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$. Definimos:

$$\Delta = \{B_{\epsilon_0}(x_{\alpha_i}) | i \in \{0, \ldots, k\} \text{ tal que } U_{\alpha_i} \neq \emptyset\}.$$

Note que $\bigcup_{i=0}^{k} U_{\alpha_i} \subseteq \bigcup \Delta$. Pues, si $z \in \bigcup_{i=0}^{k} U_{\alpha_i}$, entonces existe $i \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $z \in U_{\alpha_i}$. Por otro lado, $d(z, x_{\alpha_i}) \leqslant diam(U_{\alpha_i}) < \epsilon_0$. Luego, $U \subseteq \bigcup \Delta$, lo que es una contradicción, pues ϵ_0 es tal que $U \nsubseteq \bigcup \Delta$.

De esta manera, tenemos que existe $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ tal que si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una cubierta abierta de U tal que:

$$\forall \alpha \in \Omega : \ diam(U_\alpha) < \epsilon_0.$$

Entonces para cada $V \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, V finito, $\bigcup V \nsupseteq U$.

Por otro lado, como $\emptyset \neq U \subseteq X$ es un abierto-cerrado y $\epsilon_0 > 0$, la Afirmación (1) garantiza que existe una familia de abierto-cerrados ajenos $\{V_i\}_{i\in\omega}$ cuyos diámetros son menores que ϵ_0 tal que $U = \bigcup_{i\in\omega} V_i$. Sea $V = \{V_i | V_i \neq \emptyset\}$. Si V fuera finito, suponga que $V = \{V_{i_0}, \ldots, V_{i_k}\}$, entonces $U = \bigcup_{i\in\omega} V_i = V_{i_0} \cup \cdots \cup V_{i_k}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, V es numerable infinito numerable.

Por lo tanto, el conjunto U se puede descomponer como una unión ajena de una cantidad infinita numerable de abierto-cerrados no vacíos cuyos diámetros son menores que ϵ. $\boxtimes$

Enseguida, aplicaremos la Afirmación (2) y el principio de elecciones dependientes para construir un esquema de Suslin que cumpla la condición de diámetros y algunas otras propiedades. Primero, definimos $s_0 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X)$ dada por: $s_0(\emptyset) = X$.

- Sea $\mathcal{C}$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ ($m \in \omega \setminus \{0\}$) tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\sigma \supseteq s_0$.
  2. $\forall s \in \bigcup_{n<m-1} \omega^n$: $\sigma(s) = \bigcup_{k\in\omega} \sigma(s^\wedge k)$ es una unión ajena.
  3. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n$: $\sigma(s)$ es un abierto-cerrado no vacío.
  4. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \setminus \{\emptyset\}$: $diam(\sigma(s)) < \frac{1}{l(s)}$.

Note que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pues $s_0 \in \mathcal{C}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{C}$ definimos la relación R:

- Sean $\sigma_0 : \bigcup_{n<m_0} \omega^n \to \mathcal{P}(X), \sigma_1 : \bigcup_{n<m_1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{C}$. Escribiremos $\sigma_0 R \sigma_1$ si:

  1. $\sigma_0 \supseteq \sigma_1$,
  2. $m_0 = m_1 + 1$.

Sea $\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elemento del conjunto $\mathcal{C}$. Construiremos un elemento γ tal que $\gamma R \sigma$. Para ello, definimos:

$$\mathcal{D} = \{\{\{U_i^s\}_{i\in\omega} \mid \sigma(s) = \bigcup_{n\in\omega} U_n^s \text{ es una unión ajena de abierto-cerrados no vacíos cuyos diámetros son menores que } \tfrac{1}{m}\} \mid s \in \omega^{m-1}\}.$$

Observe que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{C}$ es a lo máximo numerable. Además, note que, por la Afirmación (2), para cada $s \in \omega^{m-1}$,

$$\{\{U_i^s\}_{i\in\omega} \mid \sigma(s) = \bigcup_{n\in\omega} U_n^s \text{ es una unión ajena de abierto-cerrados no vacíos cuyos diámetros son menores que } \tfrac{1}{m}\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, el axioma de elección para conjuntos numerables implica que existe una función de elección $G : \mathcal{D} \to \bigcup \mathcal{D}$. Para facilitar la notación, denotaremos a $\{U_i^s\}_{i\in\omega}$ el elemento de elección correspondiente al elemento $s \in \omega^{m-1}$. De esta manera, definimos $\gamma : \bigcup_{n<m+1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$\gamma(s) = \begin{cases} \sigma(s) & \text{si } s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \\ U_{s(m-1)}^{s\restriction_{m-1}} & \text{si } s \in \omega^m. \end{cases}$$

Note ahora que $\gamma \in \mathcal{C}$ y $\gamma R \sigma$. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{C}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1) R f(n).$$

Definimos $A = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Observe que A es un esquema de Suslin con las siguientes propiedades:

1. $A(\emptyset) = X$.

2. $\forall s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$: $diam(A(s)) < \frac{1}{l(s)}$.

3. $\forall s \in \omega^{<\omega}$: $A(s) \neq \emptyset$ es un abierto-cerrado y $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n)$ es una unión disjunta.

Otra propiedad que cumple el esquema de Suslin A se prueba en la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(3): Si $s, t \in \omega^{<\omega}$ son tales que $s \supsetneq t$, entonces $A(t) \subseteq A(s)$.

En efecto: Probaremos la afirmación por inducción sobre la diferencia $l(t) - l(s)$. Primero, suponga que $l(t) = l(s) + 1$, entonces $A(t) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n) = A(s)$. Por lo tanto, $A(t) \subseteq A(s)$.

Por otro lado, suponga que para $l(t) = l(s) + m$, para alguna $m \in \omega$, se cumple que $A(t) \subseteq A(s)$. Sea $m_0 \in \omega$ fija. Entonces $A(t^\wedge m_0) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n) = A(t) \subseteq A(s)$. Por lo tanto, $A(t^\wedge m_0) \subseteq A(s)$. De esta manera, se ha probado la afirmación. $\boxtimes$

Observe que la propiedad (2) implica que el esquema de Suslin A cumple la condición de diámetros. Por lo tanto, existe su función continua asociada ϕ. Procedemos a probar que el dominio de esta última función es todo el conjunto $\mathcal{N}$.

AFIRMACIÓN(4): $Z(A) = \mathcal{N}$.

En efecto: Sea $x \in \mathcal{N}$. Para probar la afirmación, aplicaremos el teorema 1.2.20 al conjunto $\bigcap_{n\in\omega} A(x_{\restriction n})$. Para ello, haremos ver que la sucesión de conjuntos $\{A(x_{\restriction n})\}_{n\in\omega}$ satisface las hipótesis de dicho teorema. Obviamente d es una métrica completa que induce a (X, τ). Además, note que $\{A(x_{\restriction n})\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos. Como para cada $n \in \omega$, $x_{\restriction n+1} \supsetneq x_{\restriction n}$, tenemos que $A(x_{\restriction n+1}) \subseteq A(x_{\restriction n})$. Por otro lado, tenemos que $\lim_n d(A(x_{\restriction n})) = 0$. Por lo tanto, $\{A(x_{\restriction n})\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos cuyos diámetros convergen a 0, cuando n tiende a infinito. Luego, existe $w \in X$ tal que $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x_{\restriction n})$ (ver teorema 1.2.20). Entonces, $\bigcap_{n\in\omega} A(x_{\restriction n}) \neq \emptyset$. Es decir, $x \in Z(A)$. Por lo tanto, $Z(A) = \mathcal{N}$. $\boxtimes$

La afirmación anterior implica que la función continua asociada al esquema de Suslin A es de la forma $\phi : \mathcal{N} \to X$. Con esto en mente, procedemos a probar que ϕ es un homeomorfismo.

AFIRMACIÓN(5): ϕ es sobreyectiva.

En efecto: Sea $p \in X = A(\emptyset) = \bigcup_{n\in\omega} A(\emptyset^\wedge n)$. Entonces existe $m \in \omega$ tal que $p \in A(\emptyset^\wedge m)$. Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento x en $\mathcal{N}$ tal que $\phi(x) = p$. Para ello, definimos el conjunto $\mathcal{C}_0 = \{s \in \omega^k | k \in \omega \setminus \{\emptyset\}; p \in A(s)\}$. Note que $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$, pues $\emptyset^\wedge m \in \mathcal{C}_0$.

Sobre el conjunto $\mathcal{C}_0$ definimos la relación R_0:

- Sean $s, t \in \mathcal{C}_0$. Escribiremos sR_0t si:
  1. $s \supseteq t$,
  2. $l(s) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{C}_0$. Entonces $p \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $r \in \omega$ tal que $p \in A(t^\wedge r)$. También, note que $t^\wedge r \in \mathcal{C}_0$ y $t^\wedge rR_0t$. Luego, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_0 : \omega \to \mathcal{C}_0$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f_0(n+1)R_0f_0(n).$$

Sea $x = \bigcup_{n\in\omega} f_0(n)$. Como para cada $k \in \omega$, $p \in A(f_0(k)\restriction_k) = A(x\restriction_k)$. Se concluye que $\phi(x) = p$. Por lo tanto, ϕ es sobreyectiva. ⊠

AFIRMACIÓN(6): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in Z(A)$ tales que $x \neq y$. Definimos $n \in \omega$ como el mínimo tal que $x\restriction_n \neq y\restriction_n$. Como $x\restriction_0 = \emptyset = y\restriction_0$, se tiene que $n \in \omega \setminus \{0\}$. Luego, existe el elemento $x\restriction_{n-1} = y\restriction_{n-1} = s$. Suponga que $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x) \in A(s^\wedge x(n-1))$ y $\phi(y) \in A(s^\wedge y(n-1))$. Es decir, tenemos un mismo elemento en dos conjuntos ajenos, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\phi(x) \neq \phi(y)$. ⊠

AFIRMACIÓN(7): ϕ es una función abierta.

En efecto: Sea $s \in \omega^k$. Bastará probar que el conjunto $\phi[Z(A) \cap B_s]$ es abierto. Obviamente, si $\phi[Z(A) \cap B_s] = \emptyset$, se tiene el resultado. Por otro lado, suponga que $\phi[Z(A) \cap B_s] \neq \emptyset$. Para concluir la afirmación, demostraremos que $\phi[Z(A) \cap B_s] = A(s)$. Sea $z \in \phi[Z(A) \cap B_s]$, entonces existe $z_0 \in Z(A) \cap B_s$ tal que $\phi(z_0) = z$, entonces $\bigcap_{n\in\omega} A((z_0)\restriction_n) = \{z\}$ y $(z_0)\restriction_k = s$. Luego, $z \in A((z_0)\restriction_k) = A(s)$.

Por otro lado, sea $z \in A(s)$. Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento $\chi \in Z(A)$ tal que $\phi(\chi) = z$. Definimos $\mathcal{A}_1 = \{\sigma \in X^p | p \in \omega; z \in A(\sigma); \sigma \supseteq s\}$. Note que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, pues $s \in \mathcal{A}_1$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_1$ definimos la relación R_1:

- Sean $r, t \in \mathcal{A}_1$. Escribiremos rR_1t si:
  1. $r \supseteq t$,
  2. $l(r) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}_1$. Entonces $z \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $n_0 \in \omega$ tal que $z \in A(t^\wedge n_0)$. Sea $r = t^\wedge n_0$. Note que $r \in \mathcal{A}_1$ y rR_1t. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_1 : \omega \to \mathcal{A}_1$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f_1(n+1)R_1f_1(n).$$

Definimos $\chi = \bigcup_{n\in\omega} f_1(n)$. Observe ahora que $\chi \in \mathcal{N}$ y además para cada $n \in \omega$, $z \in A(f(n)_{\restriction n}) = A(\chi_{\restriction n})$. Luego, $\chi \in Z(A)$, $\chi_{\restriction k} = f(k)_{\restriction k} = s$ y $\phi(\chi) = z$. Por lo tanto, $z \in \phi[Z(A) \cap B_s]$ ⊠

Por lo tanto, las Afirmaciones(5)-(7) concluyen la demostración del teorema. □

El siguiente resultado es un caso particular del teorema anterior.

3.1.16. Corolario. *El espacio de Baire $\mathcal{N}$ es homeomorfo al conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con la topología relativa con respecto a la topología euclidiana de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Aplicaremos el teorema 3.1.15 al conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para esto, probaremos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ satisface las hipótesis de dicho teorema.

AFIRMACIÓN(1): $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio polaco.

En efecto: Note que $\mathbb{Q}$ se puede ver como una unión numerable de cerrados de $\mathbb{R}$, a saber $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$. Luego, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es una intersección numerable de abiertos, y como $\mathbb{R}$ es un espacio polaco, tenemos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio polaco (ver teorema 1.2.18). ⊠

No es difícil demostrar la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(2): La familia $\mathcal{B} = \{(x, y) \subseteq \mathbb{R} | x < y; x, y \in \mathbb{Q}\}$ es una base para $\mathbb{R}$.

Definimos a la familia de conjuntos:

$$\mathcal{B}_0 = \{(x, y) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} | x < y; \ x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Observe que, por la Afirmación (2), la familia $\mathcal{B}_0$ es una base para el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dotado de la topología relativa.

AFRIMACIÓN(3): $\mathcal{B}_0$ está compuesto por abiertos-cerrados para la topología relativa de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En efecto: Note que si $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $x < y$, tenemos que $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus(x,y)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = [(-\infty, x) \cup (y, +\infty)] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. ⊠

De esta manera, la Afirmación (3) garantiza que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es cero-dimensional.

AFIRMACIÓN(4): Todos los compactos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tienen interior vacío.

En efecto: Si existíera un compacto $K \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tal que $int(K) \neq \emptyset$. Entonces existirían $z \in K$ y $r > 0$ tales que $B_r(z) \subseteq K$. Como $\mathcal{B}_0$ es una base para $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tendríamos la existencia de $B \in \mathcal{B}_0$ tal que $x \in B \subseteq B_r(z) \subseteq K$, pero B es cerrado y K compacto. Por lo tanto, B sería compacto en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Además, como $B \in \mathcal{B}_0$, existirían $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x < y$ tales que $B = (x, y) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, luego $(x, y) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sería compacto en $\mathbb{R}$. Entonces $(x, y) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sería cerrado en $\mathbb{R}$, lo que sería una contradicción. Por lo tanto, la afirmación es verdadera. ⊠

De esta manera, se concluye que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es un espacio polaco cero-dimensional no vacío cuyos compactos tienen interior vacío. Por lo tanto, el teorema 3.1.15 garantiza que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es homeomorfo al espacio de Baire $\mathcal{N}$. □

Observemos que con un argumento análogo al del resultado anterior, podemos probar que $\mathbb{Q}$ es un espacio métrico separable cero-dimensional cuyos compactos tienen interior vacío. Pero, la cardinalidad de $\mathcal{N}$ no es la misma que la de $\mathbb{Q}$, por lo que $\mathbb{Q}$ no es homeomorfo con $\mathcal{N}$. Luego $\mathbb{Q}$ no es completamente metrizable, por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es un espacio polaco. En particular, $\mathbb{Q}$ no sería un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$.

El siguiente teorema es una observación referente a la relación que tiene $\mathbb{Q}$ como conjunto totalmente ordenado con respecto a ciertos conjuntos totalmente ordenados, pero antes daremos la definición de conjuntos totalmente ordenados semejantes.

3.1.17. Definición. Sean A, B dos conjuntos totalmente ordenados. Se dice que A y B son semejantes si existe una biyección $f : A \to B$ tal que:

$$\forall a, b \in A : \ a < b \iff f(a) < f(b).$$

A la función f se le dice que es una biyección que conserva el orden de A y B.

3.1.18. Teorema. *Sea $(D, \leqslant_D)$ un conjunto totalmente ordenado. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *D satisface las siguientes propiedades:*
    - *D es numerable.*
    - *D no tiene máximo ni mínimo.*
    - *Para cada $d_1, d_2 \in D$ tales que $d_1 \neq d_2$ y $d_1 \leqslant_D d_2$ existe $d \in D \setminus \{d_1, d_2\}$ tal que $d_1 \leqslant_D d \leqslant_D d_2$.*
2. *D es semejante al conjunto $\mathbb{Q}$ con el orden usual.*

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2)] Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir una función que conserva el orden de D y $\mathbb{Q}$. Para ello, tomemos dos enumeraciones fijas $\mathbb{Q} = \{q_n | n \in \omega\}$ y $D = \{d_n | n \in \omega\}$. Por otro lado, sea $f_0 : \{q_0\} \to D$ la función dada por: $f_0(q_0) = d_0$.

Definimos la siguiente relación $\mathcal{R}$:

- Sean $a, b \in D$ y $p, q \in \mathbb{Q}$. Escribiremos $(p, q)\mathcal{R}(a, b)$ si:
$$(a \leqslant_D b \wedge p \leqslant q) \text{ ó } (a \geqslant_D b \wedge p \geqslant q).$$
- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto que tiene a la función f_0 y a todas las funciones de la forma $f : \delta \to D$ ($\delta = \{q_0, \ldots, q_m\}$, para alguna $m \in \omega \setminus \{0\}$) tales que satisfacen las siguientes propiedades:
    1. $f \supseteq f_0$,
    2. Si para $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, los elementos $f(q_0), \ldots, f(q_k)$ están definidos de tal forma que si $j_1 \neq j_2$, $f(q_{j_1}) \neq f(q_{j_2})$. Entonces el elemento $f(q_{k+1}) = d_{\tilde{n}}$ es tal que $\tilde{n}$ es el mínimo en $\omega \setminus \{0, \ldots, k\}$ tal que:
    $$\forall j \in \{0, \ldots, k\} : \ f(q_j) \neq d_{\tilde{n}} \text{ y } (q_{k+1}, q_j)\mathcal{R}(d_{\tilde{n}}, f(q_j)).$$

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación R:

- Sean $f_1 : \{q_0, \ldots, q_{k_1}\} \to D, f_2 : \{q_0, \ldots, q_{k_2}\} \to D$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos $f_1 R f_2$ si:
    1. $f_1 \supseteq f_2$,
    2. $k_1 = k_2 + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}$. Queremos construir un elemento s tal que sRt. Para ello, consideramos los siguientes dos casos.

Caso(1): $t = f_0$. Efectivamente, como $f_0(q_0) = d_0$, entonces $q_1 \leqslant q_0$ ó $q_0 \leqslant q_1$. Definimos el conjunto $D_0 = \{d \in D | (q_0, q_1)\mathcal{R}(d_0, d)\} \setminus \{d_0\}$. Note que $D_0 \neq \emptyset$, pues D no tiene máximo ni mínimo y D es un conjunto totalmente ordenado. Sea $\tilde{n} \in \omega$ el mínimo tal que $d_{\tilde{n}} \in D_0$. Con lo anterior en mente, definimos la función $s : \{q_0, q_1\} \to D$ dada por:

$$s(q_i) = \begin{cases} d_0 & \text{si } i = 0 \\ d_{\tilde{n}} & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Observe ahora que $s \in \mathcal{A}$ y sRt. Por lo tanto, en este caso se ha construido un elemento s tal que sRt.

Caso(2): $t \in \mathcal{A} \setminus \{f_0\}$. Efectivamente, suponga que $t : \{q_0, \ldots, q_m\} \to D$. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{D} = \{d \in D \mid \forall j \in \{0, \ldots, m\} : \ (q_{m+1}, q_j)\mathcal{R}(d, f(q_j))\} \setminus \{f(q_0), \ldots, f(q_m)\}.$$

Note que $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Pues si consideramos r_1 el máximo del conjunto $\{q_0, \ldots, q_m\}$ tal que $r_1 < q_{m+1}$ y r_2 el mínimo del conjunto $\{q_0, \ldots, q_m\}$ tal que $q_{m+1} < r_2$. Observe que al menos r_1 ó r_2 existe, puesto que $m \in \omega \setminus \{0\}$ y $\mathbb{Q}$ no tiene máximo ni mínimo. Por otro lado, tenemos que existe $\delta \in D$ tal que $f(r_1) <_D \delta$ ó $\delta <_D f(r_2)$, ya que D es un conjunto totalmente ordenado que no tiene máximo ni mínimo y tal que dados dos elementos distintos de D existe un tercer elemento distinto a los dos que está entre éstos mismo. Por lo tanto, $\mathcal{D} \neq \emptyset$, a saber $\delta \in \mathcal{D}$. Con lo anterior en mente, sea $\tilde{n} \in \omega$ el mínimo tal que $d_{\tilde{n}} \in \mathcal{D}_0$. De esta manera, definimos la función $s : \{q_0, \ldots, q_{m+1}\} \to D$ dada por:

$$s(q) = \begin{cases} t(q) & \text{si } q \in \{q_0, \ldots, q_m\} \\ d_{\tilde{n}} & \text{si } q = q_{m+1}. \end{cases}$$

Observe que $s \in \mathcal{A}$ y sRt. Por lo tanto, se tiene que en este caso también existe $s \in \mathcal{A}$ tal que sRt.

De esta manera, los dos casos anteriores y el principio de elecciones dependientes garantizan que existe una función $g : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ g(n + 1)Rg(n).$$

Sea $G = \bigcup_{n\in\omega} g(n) : \mathbb{Q} \to D$. Note ahora que la función G tiene las siguientes propiedades:

1. $G(q_0) = d_0$.

2. Si tenemos $G(q_0), \ldots G(q_n)$ definidos de tal forma que si $n_1 \neq n_2$, $G(q_{n_1}) \neq G(q_{n_2})$. Entonces $G(q_{n+1}) = d_m$ está definido de tal forma que $m \in \omega$ es el mínimo tal que:
$$\forall j \in \{0, \ldots, n\} : \ G(q_j) \neq d_m \text{ y } (q_j, q_{m+1})\mathcal{R}(G(q_j), d_m).$$

Procedemos a probar que la función G es una biyección que conserva el orden.

AFIRMACIÓN(1): G es inyectiva.

En efecto: Sean $q_n, q_m \in \mathbb{Q}$ tales que $q_n \neq q_m$, sin pérdida de generalidad, suponga que $n < m$. Sean los elementos $G(q_0), \ldots, G(q_{m-1})$, entonces $G(q_m) = d_{\tilde{n}}$, donde $\tilde{n} \in \omega$ es tal que:
$$\forall j \in \{0, \ldots, m-1\} : \ G(q_j) \neq d_{\tilde{n}}$$
Por lo tanto, $G(q_m) \neq G(q_n)$. ⊠

AFIRMACIÓN(2): G conserva el orden.

En efecto: Sean $q_n, q_m \in \mathbb{Q}$ tales que $q_n \leqslant q_m$.

Caso(1): $n = m$. Entonces $q_n = q_m$, por lo que $G(q_n) = G(q_m)$, luego $G(q_n) \leqslant_D G(q_m)$.

Caso(2): $n \neq m$. Sean $M = max\{n, m\}$ y $G(q_0), \ldots, G(q_{M-1})$, entonces $G(q_M) = d_{\tilde{n}}$, donde $\tilde{n} \in \omega \setminus \{0, \ldots, M-1\}$ es el mínimo tal que:
$$\forall j \in \{0, \ldots, M-1\} : \ d_{\tilde{n}} \neq G(q_j) \text{ y } (q_j, q_M)\mathcal{R}(G(q_j), d_{\tilde{n}}).$$
Como $q_n \leqslant q_m$, por la propiedad (2) de la función G, tenemos que $G(q_n) \leqslant_D G(q_m)$.

Por lo tanto, los dos casos anteriores implican que si $q_n \leqslant q_m$ entonces $G(q_n) \leqslant_D G(q_m)$.

Por otro lado, sean $q_n, q_m \in \mathbb{Q}$ tales que $G(q_n) \leqslant_D G(q_m)$.

Caso(1): $n = m$. Entonces $q_n = q_m$, luego $q_n \leqslant q_m$.

Caso(2): $n \neq m$. Sean $M = max\{m, n\}$, y $G(q_0), \ldots, G(q_{M-1})$, entonces $G(q_M) = d_{\tilde{n}}$, donde $\tilde{n} \in \omega \setminus \{0, \ldots, M-1\}$ es el mínimo tal que:
$$\forall j \in \{0, \ldots, M-1\} : \ d_{\tilde{n}} \neq G(q_j) \text{ si } (q_j, q_M)\mathcal{R}(G(q_j), d_{\tilde{n}}).$$

Como $G(q_n) \leqslant_D G(q_m)$, tenemos que $q_n \leqslant q_m$.

Por lo tanto, los dos casos anteriores garantizan que si $G(q_n) \leqslant_D G(q_m)$ entonces $q_n \leqslant q_m$. ⊠

AFIRMACIÓN(3): G es sobreyectiva.

Por lo tanto, las Afirmaciones(1)-(3) garantizan que D y $\mathbb{Q}$ son semejantes.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Suponga que D es un conjunto totalmente ordenado semejante al conjunto $\mathbb{Q}$. Entonces existe una biyección $f : \mathbb{Q} \to D$ tal que conserva el orden de $\mathbb{Q}$ y D. Luego D es infinito numerable.

Note que D no tiene máximo ni mínimo. Pues si D tuviera un máximo (respectivamente, mínimo), entonces $\mathbb{Q}$ tendría un máximo (respectivamente, un mínimo), lo que sería una contradicción.

Observe ahora que para cada $d_1, d_2 \in D$ tales que $d_1 \neq d_2$ y $d_1 \leqslant_D d_2$ existe $d \in D \setminus \{d_1, d_2\}$ tal que $d_1 \leqslant_D d \leqslant_D d_2$. Efectivamente, como d_1, d_2 son dos elementos distintos de D. Entonces $f^{-1}(d_1)$ y $f^{-1}(d_2)$ son distintos entre ellos y además $(f^{-1}(d_1), f^{-1}(d_2))\mathcal{R}(d_1, d_2)$, entonces existe $q \in \mathbb{Q} \setminus \{f^{-1}(d_1), f^{-1}(d_2)\}$ tal que q está entre $f^{-1}(d_1)$ y $f^{-1}(d_2)$, y como f conserva el orden, tendríamos que $f(q)$ está entre d_1 y d_2. Además, $f(q)$ sería distinto a $f(d_1)$ y a $f(d_2)$. Por lo tanto, D satisface esta última propiedad. □

El resultado del teorema 3.1.18 nos será útil para demostrar el siguiente teorema.

3.1.19. Teorema. *Todo espacio métrico no vacío perfecto numerable y cero-dimensional es homeomorfo a* $\mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea (X, d) un espacio métrico no vacío perfecto numerable y cero-dimensional. El primer objetivo de la demostración es construir un esquema de Suslin sobre el conjunto X tal que cumple la condición de diámetros. Para esto, primero procedemos a probar la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(1): Para cada abierto-cerrado U distinto del vacío y para cada $\epsilon > 0$. El conjunto U se puede expresar como una unión ajena de una familia infinita numerable de abierto-cerrados no vacíos cuyos diámetros son menores que ϵ.

En efecto: Sea U un abierto cerrado no vacío y $\epsilon > 0$ fijos. Primero observemos que el conjunto U tiene infinitos puntos de X. Efectivamente, si suponemos que $U = \{x_0, \ldots, x_n\}$ para alguna $n \in \omega$. Sea $\delta = \text{mín}\{d(x_i, x_j) \mid i, j \in \{0, \ldots, n\};\ i \neq j\}$. Entonces existen $i_0, j_0 \in \{0, \ldots, n\}$, $i_0 \neq j_0$ tales que $\delta = d(x_{i_0}, x_{j_0})$. Además, $x_{i_0} \in U$ y

U es abierto, luego existe $r > 0$ tal que $B_r(x_{i_0}) \subseteq U$. Note que $B_r(x_{i_0}) \cap B_\delta(x_{i_0}) \cap X = \{x_{i_0}\}$. Pues $\{x_{i_0}\} \subseteq B_r(x_{i_0}) \cap B_\delta(x_{i_0}) \cap X$. Mientras que si $z \in B_r(x_{i_0}) \cap B_\delta(x_{i_0}) \cap X$, entonces $z \in B_r(x_{i_0}) \subseteq U$, por lo que $z \in U$, luego existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $z = x_j$, pero $z \in B_\delta(x_{i_0})$. Si suponemos que $x_j \neq x_{i_0}$, entonces $d(x_j, x_{i_0}) = d(z, x_{i_0}) < \delta \leqslant d(x_j, x_{i_0})$, lo que es una contradicción. Luego, $z = x_{i_0}$. Por lo tanto, U tiene infinitos puntos de X.

Sea $\{q_i\}_{i\in\omega}$ una enumeración del conjunto U. Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir la familia infinita numerable con las propiedades de la afirmación. Para ello, procedemos a contruir una sucesión de conjuntos. Como X es cero-dimensional, existe $\mathcal{B}$ base para X formada por abierto-cerrados. Además, existe $r_0 > 0$ y $r_0 < \frac{\epsilon}{2}$ tal que $q_0 \in B_{r_0}(q_0) \subseteq U \setminus \{q_1\}$. Sea $U_0 \in \mathcal{B}$ tal que $q_0 \in U_0 \subseteq B_{r_0}(q_0) \subseteq U \setminus \{q_1\} \subsetneq U$. Con lo anterior hemos logrado tomar un abierto-cerrado $U_0 \subsetneq U$ de diámetro menor que ϵ tal que $q_0 \in U_0$.

Por otro lado, el conjunto $U \setminus U_0 = U \cap (X \setminus U_0)$ es un abierto-cerrado. Además, $X \neq U \cap (X \setminus U_0)$, pues $q_0 \in U_0$. También, $\emptyset \neq U \cap (X \setminus U_0)$, pues $q_1 \in U \setminus U_0$. Como todos los abierto-cerrados distintos del vacío tienen una infinidad de elementos, entonces existe $\tilde{n} \in \omega \setminus \{1\}$ tal que $q_{\tilde{n}} \in U \cap (X \setminus U_0) = U \setminus U_0$. Además, note que $q_1 \in U \setminus U_0$, pues si $q_1 \in U_0 \subseteq U \setminus \{q_1\}$, lo que es una contradicción, por lo que $q_1 \in U \setminus U_0$. De esta manera, existe $r_1 > 0$ y $r_1 < \frac{\epsilon}{2}$ tal que $q_1 \in B_{r_1}(q_1) \subseteq U \setminus (U_0 \cup \{q_{\tilde{n}}\}) \subsetneq U \setminus U_0$, entonces existe $U_1 \in \mathcal{B}$ tal que $q_1 \in U_1 \subseteq B_{r_1}(q_1) \subseteq U \setminus (U_0 \cup \{q_{\tilde{n}}\}) \subsetneq U \setminus U_0$. Por lo tanto, $U_1 \subsetneq U \setminus U_0$ y $q_1 \in U_0 \cup U_1$ y $q_0 \in U_0 \cup U_1$. De esta manera, hemos logrado tomar un abierto-cerrado U_1 de diámetro menor que ϵ tal que $\emptyset \neq U_1 \subsetneq U \setminus U_0$ y de modo que $q_1 \in U_0 \cup U_1$.

Con lo anterior en mente, definimos la sucesión $\{U_i\}_{i\leqslant 1}$.

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las sucesiones de la forma $\{V_n\}_{n\in\{0,\ldots,m\}}$ ($m \in \omega$) tales que satisfacen las siguientes propiedades:
  1. $\forall n \in \{0, \ldots, m\}$: V_n es un abierto-cerrado no vacío de diámetro menor que ϵ.
  2. Los elementos de la sucesión son ajenos dos a dos.
  3. $\{q_0, \ldots, q_m\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} V_i$.
  4. $V_0 = U_0$.
  5. $\forall n \in \{1, \ldots, m\}$: $V_n \subsetneq U \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} V_i\}$.

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $\{U_i\}_{i\leqslant 1} \in \mathcal{A}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $\{V_n\}_{n\leqslant m_1}, \{W_n\}_{n\leqslant m_2} \in \mathcal{A}$. Escribiremos $\{V_n\}_{n\leqslant m_1} R \; \{W_n\}_{n\leqslant m_2}$ si:

1. $\{V_n\}_{n\leqslant m_1} \supseteq \{W_n\}_{n\leqslant m_2}$,
2. $m_1 = m_2 + 1$.

Sea $\{V_n\}_{n\leqslant m} \in \mathcal{A}$. Construiremos $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{V}R\{V_n\}_{n\leqslant m}$. Para ello, consideraremos dos casos. Pero, antes note que $U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i \neq \emptyset$.

Caso(1): $q_{m+1} \in U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$. Efectivamente, como $U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$ es un abierto-cerrado no vacío, entonces $U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$ tiene una infinidad de elementos. Por lo que existe $\hat{q} \in U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$ tal que $\hat{q} \neq q_{m+1}$, luego existe $r > 0$ y $r < \frac{\epsilon}{2}$ tal que $q_{m+1} \in B_r(q_{m+1}) \subseteq U \setminus (\bigcup_{i=0}^m V_i \cup \{\hat{q}\}) \subsetneq U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$. Como $\mathcal{B}$ es una base para X, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $q_{m+1} \in W \subseteq B_r(q_{m+1}) \subseteq U \setminus (\bigcup_{i=0}^m V_i \cup \{\hat{q}\}) \subsetneq U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$. Definimos $\mathcal{V} = \{W_n\}_{n\leqslant m+1}$ dado por:

$$W_n = \begin{cases} V_n & \text{si } n \in \{0, \dots, m\} \\ W & \text{si } n = m+1. \end{cases}$$

Note ahora que $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{V}R\{V_n\}_{n\leqslant m}$. Por lo tanto, en este primer caso, se ha construido $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{V}R\{V_n\}_{n\leqslant m}$.

Caso(2): $q_{m+1} \in \bigcup_{i=0}^m V_i$. Efectivamente, como $\emptyset \neq U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$, existe $x_0 \in U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$. Además, el conjunto $U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$ es un abierto-cerrado, por lo que $U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$ tiene una infinidad de elementos, entonces existe $\hat{q} \in U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$ tal que $\hat{q} \neq x_0$. Luego existe $\epsilon > 0$ y $r < \frac{\epsilon}{2}$ tal que $x_0 \in B_r(x_0) \subseteq U \setminus (\bigcup_{i=0}^m V_i \cup \{\hat{q}\}) \subsetneq U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$. Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es una base para X, tenemos que existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in W \subseteq B_r(x_0) \subseteq U \setminus (\bigcup_{i=0}^m V_i \cup \{\hat{q}\}) \subsetneq U \setminus \bigcup_{i=0}^m V_i$. Definimos $\mathcal{V} = \{W_n\}_{n\leqslant m+1}$ dada por:

$$W_n = \begin{cases} V_n & \text{si } n \in \{0, \dots, m\} \\ W & \text{si } n = m+1. \end{cases}$$

Note ahora que $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{V}R\{V_n\}_{n\leqslant m}$. Por lo tanto, en este caso, se ha construido $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{V}R\{V_n\}_{n\leqslant m}$.

De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1)Rf(n).$$

Definimos $\{U_n\}_{n\in\omega} = \bigcup_{m\in\omega} f(m)$. Note que la sucesión $\{U_n\}_{n\in\omega}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\forall n \in \omega :\ U_n$ es un abierto-cerrado no vacío de diámetro menor que ϵ.

2. Si $n_1 \neq n_2$ entonces $U_{n_1} \cap U_{n_2} = \emptyset$.

3. $\bigcup_{i\in\omega} U_i = U$.

La última propiedad es verdadera. Pues si $n \in \omega$ entonces $q_n \in \bigcup_{i=0}^{n} U_i \subseteq \bigcup_{i\in\omega} U_i$, por lo que $U \subseteq \bigcup_{i\in\omega} U_i$. Por otro lado, si $z \in \bigcup_{i\in\omega} U_i$, entonces existe $j \in \omega$ tal que $z \in U_j \subseteq U \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} V_i \subsetneq U$. Luego, $z \in U$. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in\omega} U_i = U$. ⊠

Procedemos a construir un esquema de Suslin sobre el conjunto X aplicando el principio de elecciones dependientes y la Afirmación (1). Primero, sea $s_0 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X)$ la función dada por: $s_0(\emptyset) = X$.

- Sea $\mathcal{A}_0$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma

$$\sigma : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X)\ (m \in \omega \setminus \{0\})$$

  tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\sigma \supseteq s_0$.
  2. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n :\ \sigma(s) = \bigcup_{n\in\omega} \sigma(s^\wedge n)$ es una unión ajena.
  3. $\forall s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \setminus \{\emptyset\} :\ \sigma(s)$ es un abierto-cerrado no vacío tal que $diam(\sigma(s)) < \frac{1}{l(s)}$.

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $s_0 \in \mathcal{A}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_0$ definimos la relación R_0:

- Sean $\sigma_1 : \bigcup_{n<m_1} \omega^n \to \mathcal{A}, \sigma_2 : \bigcup_{n<m_2} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{A}_0$. Escribiremos $\sigma_1 R_0 \sigma_2$ si:

  1. $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$,
  2. $m_1 = m_2 + 1$.

Sea $\tau : \bigcup_{n<m} \omega^n \to \mathcal{P}(X) \in \mathcal{A}_0$. Construiremos un elemento σ tal que $\sigma R_0 \tau$. Definimos la familia:

$$\mathcal{F} = \{\{\{U_i^s\} \mid \tau(s) = \bigcup_{n\in\omega} U_n^s \text{ una unión ajena donde cada conjunto } U_n^s \text{ es un}$$

$$\text{abierto-cerrado distinto del vacío de diámetro menor que } \tfrac{1}{m}\}_s \mid s \in \omega^{m-1}\}.$$

Note que la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es la de ω^{m-1}, el cual es de cardinalidad a lo más infinito numerable. Además, por la Afirmación (1), tenemos que para cada $s \in \omega^m$,

$$\emptyset \neq \{\{U_i^s\} \mid \tau(s) = \bigcup_{n\in\omega} U_n^s \text{ una unión ajena donde cada conjunto } U_n^s \text{ es un}$$

abierto-cerrado distinto del vacío de diámetro menor que $\frac{1}{m}\}$.

Por el axioma de elección para conjuntos numerables, existe una función de elección sobre $\mathcal{F}$. Para facilitar la notación, para cada $s \in \omega^m$, denotaremos por $\{U^s_n\}_{n\in\omega}$ al elemento de elección del elemento s. De esta manera, definimos $\sigma : \bigcup_{n<m+1} \omega^n \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$\sigma(s) = \begin{cases} \tau(s) & \text{si } s \in \bigcup_{n<m} \omega^n \\ U^{s\restriction_{m-1}}_{s(m-1)} & \text{si } s \in \omega^m. \end{cases}$$

Observe ahora que $\sigma \in \mathcal{A}$ y $\sigma R \tau$. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $g : \omega \to \mathcal{A}_0$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ g(n+1) R_0 g(n).$$

Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} g(n)$. Note que A es un esquema de Suslin que cumple las siguientes propiedades:

1. $A(\emptyset) = X$.

2. $\forall s \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} : \ diam(A(s)) < \frac{1}{l(s)}$.

3. $\forall s \in \omega^{<\omega}$: $A(s)$ es un abierto-cerrado no vacío y $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n)$ es una unión disjunta.

En la siguiente afirmación, se prueba otra propiedad que satisface el esquema de Suslin A.

AFIRMACIÓN(2): Si $s, t \in \omega^{<\omega}$ son tales que $s \subsetneq t$ entonces $A(t) \subseteq A(s)$.

En efecto: Probaremos la afirmación por inducción sobre la diferencia $l(t) - l(s)$. Primero, suponga que $l(t) = l(s) + 1$, entonces $A(t) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A(s^\wedge n) = A(s)$. Por lo tanto, $A(t) \subseteq A(s)$.

Por otro lado, suponga que para $l(t) = l(s) + m$, para alguna $m \in \omega$, se cumple que $A(t) \subseteq A(s)$. Sea $m_0 \in \omega$ fija. Entonces $A(t^\wedge m_0) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n) = A(t) \subseteq A(s)$. Por lo tanto, $A(t^\wedge m_0) \subseteq A(s)$. De esta manera, se ha probado la afirmación. ⊠

Note que la propiedad (2) implica que el esquema de Suslin A cumple la condición de diámetros, entonces existe su función continua asociada ϕ. Procedemos a probar que esta función tiene dominio distinto del vacío.

AFIRMACIÓN(3): $Z(A) \neq \emptyset$.

En efecto: Utilizaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento sobre $Z(A)$. Como $X \neq \emptyset$, tenemos que existe $p \in X = A(\emptyset) = \bigcup_{n\in\omega} A(\emptyset^\wedge n)$, luego existe $n_1 \in \omega$ tal que $p \in A(\emptyset^\wedge n_1)$. Definimos $s_1 = \emptyset^\wedge n_1$. Por otro lado, sea:

$$\mathcal{A}_1 = \{s \in \omega^k \mid k \in \omega \setminus \{0\};\ s \supseteq s_1;\ p \in A(s)\}.$$

Note que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, pues $s_1 \in \mathcal{A}_1$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_1$ definimos la siguiente relación R_1:

- Sean $s, t \in \mathcal{A}_1$. Escribiremos sR_1t si:
  1. $l(s) = l(t) + 1$,
  2. $s \supseteq t$.

Sea $t \in \mathcal{A}_1$. Entonces $p \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $n_0 \in \omega$ tal que $p \in A(t^\wedge n_0)$. Observe ahora que $t^\wedge n_0 \in \mathcal{A}_1$ y $(t^\wedge n_0)R_1t$. Por lo tanto, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_1 : \omega \to \mathcal{A}_1$ tal que:

$$\forall n \in \omega :\ f_1(n+1)R_1f_1(n).$$

Definimos $x = \bigcup_{n\in\omega} f_1(n)$. Note que $p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$. Pues si suponemos que $l(f(0)) = k_0$. Por construcción del elemento x, tenemos que para $k \geqslant k_0$, $p \in A(f(k){\restriction_k}) = A(x{\restriction_k})$. Por otro lado, si $k \leqslant k_0$, entonces $x{\restriction_k} \subseteq f(0)$, luego $A(f(0)) \subseteq A(x{\restriction_k})$, pero $p \in A(f(0))$, por lo que $p \in A(x{\restriction_k})$. Por lo tanto, para cada $n \in \omega$, $p \in A(x{\restriction_n})$. Es decir, $p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$. Por lo tanto, se concluye que $x \in Z(A)$. ⊠

De esta manera la función continua asociada $\phi : Z(A) \to X$ tiene dominio no vacío. Procedemos a probar que ϕ es un homeomorfismo.

AFIRMACIÓN(4): ϕ es una función sobreyectiva.

En efecto: Note que en la Afirmación (3) ya probamos que ϕ es sobreyectiva. Pues se tomo un elemento arbitrario $p \in X$, y fue posible construir un elemento $x \in Z(A)$ tal que $\phi(x) = p$, ya que $p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$. ⊠

AFIRMACIÓN(5): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in Z(A)$ tales que $x \neq y$. Definimos $n \in \omega$ como el mínimo tal que $x{\restriction_n} \neq y{\restriction_n}$. Como $x{\restriction_0} = \emptyset = y{\restriction_0}$, se tiene que $n \in \omega \setminus \{0\}$. Entonces existe $x{\restriction_{n-1}} = y{\restriction_{n-1}} = s$. Suponga que $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x) \in A(s^\wedge x(n-1))$ y $\phi(y) \in A(s^\wedge y(n-1))$. Es decir, tenemos un mismo elemento en dos conjuntos disjuntos, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\phi(x) \neq \phi(y)$. ⊠

AFIRMACIÓN(6): ϕ es una función abierta.

En efecto: Sea $s \in \omega^k$. Bastará probar que el conjunto $\phi[Z(A) \cap B_s]$ es un abierto. Si $\phi[Z(A) \cap B_s] = \emptyset$, entonces se tiene el resultado. Por otro lado, suponga que $\phi[Z(A) \cap B_s] \neq \emptyset$. Procedemos a probar que $\phi[Z(A) \cap B_s] = A(s)$.

Efectivamente, sea $z \in \phi[Z(A) \cap B_s]$. Entonces existe $z_0 \in Z(A) \cap B_s$ tal que $\phi(z_0) = z$, luego $\bigcap_{n\in\omega} A((z_0)_{\restriction n}) = \{z\}$ y $(z_0)_{\restriction k} = s$. Por lo tanto, $z \in A((z_0)_{\restriction k}) = A(s)$.

Por otro lado, si $z \in A(s)$. Para probar la otra contención, aplicaremos el principio de elecciones dependientes. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{A}_2 = \{\sigma \in \omega^p \mid p \in \omega;\ z \in A(\sigma);\ \sigma \supseteq s\}.$$

Note que $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$, pues $s \in \mathcal{A}_2$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_2$ definimos la siguiente relación R_2:

- Sean $r, t \in \mathcal{A}_2$. Escribiremos rR_2t si:
  1. $r \supseteq t$,
  2. $l(r) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}_2$. Entonces $z \in A(t) = \bigcup_{n\in\omega} A(t^\wedge n)$, luego existe $n_0 \in \omega$ tal que $z \in A(t^\wedge n_0)$. Definimos $r = t^\wedge n_0$. Note que $r \in \mathcal{A}_2$ y rR_2t. Por lo tanto, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_2 : \omega \to \mathcal{A}_2$ tal que:

$$\forall n \in \omega :\ f_2(n+1)R_2f_2(n)$$

Sea $\chi = \bigcup_{n\in\omega} f_2(n)$. Observe ahora que $\chi \in \mathcal{N}$ y para cada $n \in \omega$, $z \in A(f_2(n)_{\restriction n}) = A(\chi_{\restriction n})$. Luego, $\chi \in Z(A)$, $\chi_{\restriction k} = f_2(k)_{\restriction k} = s$ y $\phi(\chi) = z$. Por lo tanto, $z \in \phi[Z(A) \cap B_s]$.

De esta manera concluimos que ϕ es una función abierta. ⊠

Las Afirmaciones(4)-(6) garantizan que $Z(A)$ es homeomorfo a X. Enseguida, se probarán dos afirmaciones que utilizaremos a la hora de obtener otras dos funciones de tal forma que al componerlas con la función ϕ se obtenga el resultado del teorema.

AFIRMACIÓN(7): $Z(A)$ es denso en $\mathcal{N}$.

En efecto: Sean $x \in \mathcal{N}$ y $n \in \omega$ fijos. Como $A(x_{\restriction n}) \neq \emptyset$, sea $q \in A(x_{\restriction n}) \subseteq X$ fijo. Además, ϕ es sobreyectiva, entonces existe $y \in Z(A)$ tal que $\phi(y) = q$. De esta manera, tenemos que $\phi(y) \in A(x_{\restriction n}) \cap A(y_{\restriction n})$. Entonces $x_{\restriction n} = y_{\restriction n}$, luego $y \in B_{x_{\restriction n}} \cap Z(A)$. Por lo tanto, $Z(A)$ es denso en $\mathcal{N}$. ⊠

AFIRMACIÓN(8): Si $F : Z \to Y$ es un homeomorfismo y $D_0 \subseteq Z$ es denso en Z entonces $F(D_0) \subseteq Y$ es denso en Y.

En efecto: Sean $y \in Y$ y $A \subseteq Y$ abierto en Y tal que $y \in A$. Entonces $F^{-1}(y) \in Z$ y $F^{-1}[A]$ es abierto en Z tal que $F^{-1}(y) \in F^{-1}[A]$. Como D_0 es denso en Z, tenemos que existe $x \in D_0$ tal que $x \in F^{-1}[A] \cap D_0$, luego $F(x) \in A \cap F[D_0]$. Por lo tanto, $F[D_0]$ es denso en Y. ⊠

Como $Z(A)$ es homeomorfo a X y $\mathcal{N}$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (ver corolario 3.1.16). Por las Afirmaciones (7) y (8), se tiene que X es homeomorfo a un subconjunto denso $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Aplicaremos el teorema 3.1.18 al conjunto totalmente ordenado D, para de esta manera obtener una biyección que conserva el orden de D y $\mathbb{Q}$, la cual resultará ser un homeomorfismo entre estos últimos conjuntos. Para esto, primero probaremos que D satisface las hipótesis del teorema 3.1.18.

AFIRMACIÓN(9): D respecto al orden usual en $\mathbb{R}$ no puede tener máximo ni mínimo.

En efecto: Suponga que existe m tal que es mínimo de D, entonces existiría $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $i < m$ y $i \notin D$. Con esto en mente, suponga que existe $d \in D$ tal que $d \in B_{|m-i|}(i)$, entonces $d - i \leqslant |d - i| < |m - i| = m - i$. Luego $d < m$, lo que es una contradicción. Entonces:

$$\forall d \in D : \ d \notin B_{|m-i|}(i).$$

Pero esto último también es una contradicción, pues D es un conjunto denso de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por lo tanto, D no tiene mínimo.

Por otro lado, suponga que existe M tal que es máximo de D, entonces existiría $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $i \notin D$ tal que $M < i$. Con esto en mente, suponga que existe $d \in D$ tal que $d \in B_{|M-i|}(i)$. Luego $i - d \leqslant |d - i| < |M - i| = i - M$. Por lo tanto, $d > M$, lo que es una contradicción. Entonces:

$$\forall d \in D : \ d \notin B_{|M-i|}(i).$$

Pero esto último también es una contradicción, pues D es un conjunto denso de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por lo tanto, D no tiene máximo. ⊠

AFIRMACIÓN(10): Si $d_1, d_2 \in D$ tales que $d_1 \neq d_2$ y $d_1 < d_2$ entonces existe $d \in D$ tal que $d_1 < d < d_2$.

En efecto: Sean $d_1, d_2 \in D$ tales que $d_1 \neq d_2$ y $d_1 < d_2$. Sea $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $d_1 < k < d_2$. Definimos $\delta = \min\{|d_1 - k|, |d_2 - k|\}$. Como D es denso en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces existe $d \in D$ tal que $d \in B_\delta(k)$, luego $k - d \leqslant |d - k| < \delta \leqslant |d_1 - k| = k - d_1$, luego $d > d_1$. Por otro lado, $d - k \leqslant |d - k| < \delta \leqslant |d_2 - k| = d_2 - k$, entonces $d < d_2$. Por lo tanto, existe $d \in D$ tal que $d_1 < d < d_2$. ⊠

Note ahora que D es numerable, pues X lo es. De esta manera, D satisface las hipótesis del teorema 3.1.18. Por lo tanto, existe $f : \mathbb{Q} \to D \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ función biyectiva que conserva el orden. Probaremos que la función f es un homeomorfismo, para ello demostraremos las siguientes afirmaciones.

AFIRMACIÓN(11): Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $d \in D$ tal que $f[(-\infty, f^{-1}(d)) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (-\infty, a) \cap D$.

En efecto: Sea $a \in \mathbb{R}$. Note que $(-\infty, a) \cap D = [(-\infty, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})] \cap D$ es un abierto en D. Sea $x \in (-\infty, a) \cap D$, como D es denso en $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ y $(x, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es abierto en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces existe $d \in D$ tal que $d \in (x, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Probaremos que $f[(-\infty, f^{-1}(d)) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (-\infty, a) \cap D$. Sea $z \in f[(-\infty, f^{-1}(d)) \cap \mathbb{Q}]$, entonces existe $z_0 \in (-\infty, f^{-1}(d)) \cap \mathbb{Q}$ tal que $f(z_0) = z$, por lo que $z_0 < f^{-1}(d)$, luego $z = f(z_0) < d < a$. Además, $f[(-\infty, f^{-1}(d)) \cap \mathbb{Q}] \subseteq D$. Por lo tanto, $z \in (-\infty, a) \cap D$. Es decir, $f[(-\infty, f^{-1}(d)) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (-\infty, a) \cap D$ ⊠

AFIRMACIÓN(12): Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $d \in D$ tal que $f[(f^{-1}(d), +\infty) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (a, +\infty) \cap D$.

En efecto: Sea $a \in \mathbb{R}$. Note que $(a, +\infty) \cap D = [(a, +\infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})] \cap D$ es un abierto en D. Sea $x \in (a, +\infty) \cap D$, como D es denso en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $(a, x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ es abierto en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces existe $d \in D$ tal que $d \in (a, x) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Probaremos que $f[(f^{-1}(d), +\infty) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (a, +\infty) \cap D$. Sea $z \in f[(f^{-1}(d), +\infty) \cap \mathbb{Q}]$, entonces existe $z_0 \in (f^{-1}(d), +\infty) \cap \mathbb{Q}$ tal que $f(z_0) = z$, luego $f^{-1}(d) < z_0$, por lo que $a < d < f(z_0) = z$. Por lo tanto, $z \in (a, +\infty)$, y obviamente $z \in D$. Es decir, $f[(f^{-1}(d), +\infty) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (a, +\infty) \cap D$. ⊠

AFIRMACIÓN(13): f es una función continua.

En efecto: Sea $x \in \mathbb{Q}$ y $A \subseteq D$ abierto en D tal que $f(x) \in A$. Por un lado, existe $r > 0$ tal que $B_r^D(f(x)) = (f(x) - r, f(x) + r) \cap D \subseteq A$, entonces $f(x) \in (f(x) - r, f(x) + r) \cap D = [(-\infty, f(x) + r) \cap D] \cap [(f(x) - r, +\infty) \cap D]$. Las Afirmaciones (11) y (12) garantizan que existen $d_1, d_2 \in D$ tales que:

$$f[(-\infty, f^{-1}(d_1)) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (-\infty, f(x) + r) \cap D \text{ y } f[(f^{-1}(d_2), +\infty) \cap \mathbb{Q}] \subseteq (f(x) - r, +\infty) \cap D.$$

De esta manera, tenemos que:

$$\begin{aligned} f[(f^{-1}(d_2), f^{-1}(d_1)) \cap \mathbb{Q}] &= f[(-\infty, f^{-1}(d_1)) \cap \mathbb{Q}] \cap f[(f^{-1}(d_2), +\infty) \cap \mathbb{Q}] \\ &\subseteq [(-\infty, f(x) + r) \cap (f(x) - r, +\infty)] \cap D \\ &= (f(x) - r, f(x) + r) \cap D \\ &\subseteq A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función continua. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(14): Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $(f(q), +\infty) \cap D \subseteq f[(a, +\infty) \cap \mathbb{Q}]$.

En efecto: Sea $a \in \mathbb{R}$. Como $(a, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ es un abierto en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, tenemos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (a, +\infty)$.

Note que $(f(q), +\infty) \cap D \subseteq f[(a, +\infty) \cap \mathbb{Q}]$. Efectivamente, sea $z \in (f(q), +\infty) \cap D$, como $z \in D$ y f es sobreyectiva, entonces existe $z_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $f(z_0) = z$, por lo que $f(q) < f(z_0)$. Como f conserva el orden, tenemos que $a < q < z_0$. Luego $z_0 \in (a, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Por lo tanto, $z \in f[(a, +\infty) \cap \mathbb{Q}]$. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(15): Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $(-\infty, f(q)) \cap D \subseteq f[(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}]$.

En efecto: Sea $a \in \mathbb{R}$. Como $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ es abierto en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, tenemos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (-\infty, a)$.

Note que $(-\infty, f(q)) \cap D \subseteq f[(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}]$. Efectivamente, sea $z \in (-\infty, f(q)) \cap D$, como $z \in D$ y f es sobreyectiva, entonces existe $z_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $f(z_0) = z$, por lo que $f(z_0) < f(q)$. Como f conserva el orden, tenemos que $z_0 < q < a$. Luego, $z_0 \in (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$. Por lo tanto $z = f(z_0) \in f[(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}]$. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(16): f es una función abierta.

En efecto: Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ abierto en $\mathbb{Q}$. Si $A = \emptyset$, entonces $f[A] = \emptyset$. Por otro lado, suponga que $A \neq \emptyset$, entonces $f[A] \neq \emptyset$. Sea $z \in f[A]$, entonces existe $z_0 \in A$ tal que $f(z_0) = z$. Como A es abierto en $\mathbb{Q}$, entonces existe $r > 0$ tal que $[(-r + z_0, +\infty) \cap \mathbb{Q}] \cap [(-\infty, z_0 + r) \cap \mathbb{Q}] = (-r + z_0, z_0 + r) \cap \mathbb{Q} \subseteq A$. Por las Afirmaciones (14) y (15), tenemos que existen $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que:

$$\begin{aligned}
[f(q_1), +\infty) \cap D] \cap [(-\infty, f(q_2)) \cap D] &\subseteq f[(-r + z_0, +\infty) \cap \mathbb{Q}] \cap f[(-\infty, z_0 + r) \cap \mathbb{Q}] \\
&= f[[(-r + z_0, +\infty) \cap (-\infty, z_0 + r)] \cap \mathbb{Q}] \\
&= f[(-r + z_0, z_0 + r) \cap \mathbb{Q}] \\
&\subseteq f[A].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función abierta. $\boxtimes$

De esta manera, f es un homeomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y D. Pero, D es homeomorfo a X. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es homeomorfo a X. $\square$

De ahora en adelante escribiremos $A \cong B$ para denotar que los espacios A y B son homeomorfos.

A continuación exibiremos algunos homeomorfismos que nos permitirán ver la flexibilidad de trabajar con el espacio de Baire.

3.1.20. Lema. *Si X es un conjunto no vacío y $k \in \omega \setminus \{0\}$, entonces $(X^\omega)^k \cong X^\omega$.*

Demostración. Primero probaremos la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(1): Sea $f : \mathcal{X} = X_1^\omega \times \ldots \times X_u^\omega \to Y = Y_1^\omega \times \ldots \times Y_v^\omega$ una función tal que para todo $x \in \mathcal{X}$ y para todo $n \in \omega$ existe $m \in \omega$ tal que todo elemento $x' \in \mathcal{X}$ cuyas sucesiones coincidan hasta m con las de x cumple que las sucesiones de $f(x')$ coinciden hasta n con las de $f(x)$, entonces f es continua.

En efecto: Para facilitar la demostración de esta afirmación, usaremos la siguiente notación, si $x \in \mathcal{X}$, entonces denotaremos $x = (x_1, \ldots, x_u)$ y $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_v(x))$. Sean $x \in \mathcal{X}$ y $A \subseteq Y$ abierto tal que $f(x) \in A$. Como A es un abierto en Y y $f(x) \in A$, entonces existen $A_1, \ldots, A_v$ abiertos en $A_1 \subseteq Y_1^\omega, \ldots, A_v \subseteq Y_v^\omega$ tales que $f(x) \in \bigcap_{i=1}^{v} \Pi_i^{-1}[A_i] \subseteq A$. Sea $i \in \{1, \ldots, v\}$, entonces $f_i(x) = \Pi_i(f(x)) \in A_i \subseteq Y_i^\omega$. Luego, existe $n_i \in \omega$ tal que $f_i(x) = \pi_i(f(x)) \in B_{\Pi_i(f(x))\restriction_{n_i}} \subseteq A_i \subseteq Y_i^\omega$. Sea $n = \max\{n_1, \ldots, n_v\}$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, v\}$, $f_i(x) = \Pi_i(f(x)) \in B_{\Pi_i(f(x))\restriction_n} \subseteq B_{\Pi_i(f(x))\restriction_{n_i}} \subseteq A_i \subseteq Y_i^\omega$. Por lo tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, v\}$, $f(x) \in \Pi_i^{-1}[B_{\pi_i(f(x))\restriction_n}] \subseteq \Pi_i^{-1}[A_i] \subseteq A$. Luego, $f(x) \in \bigcap_{i=1}^{v} \Pi_i^{-1}[B_{\Pi_i(f(x))\restriction_n}] = \bigcap_{i=1}^{v} \Pi_i^{-1}[B_{f_i(x)\restriction_n}] \subseteq A$.

Sea $D = \bigcap_{i=1}^{v} \Pi_i^{-1}[B_{\pi_i(f(x))\restriction_n}]$. Por otro lado, para $x \in \mathcal{X}$ y para $n \in \omega$, por hipótesis, existe un $m \in \omega$ tal que todo elemento $x' \in \mathcal{X}$ cuyas sucesiones coincidan hasta m con las de x cumple que las sucesiones de $f(x')$ coinciden hasta n con las de $f(x)$. Con esto en mente, definimos $C = \bigcap_{i=1}^{u} P_i^{-1}[B_{P_i(x)\restriction_m}] = \bigcap_{i=1}^{u} P_i^{-1}[B_{(x_i)\restriction_m}]$.

Note que $f[C] \subseteq D \subseteq A$. Efectivamente, sea $z \in f[C]$, entonces existe $\tilde{z} \in C$ tal que $f(\tilde{z}) = z$. Como $\tilde{z} \in C$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, u\}$, $\tilde{z}_i = P_i(\tilde{z}) \in B_{P_i(x)\restriction_m} = B_{(x_i)\restriction_m}$, por lo que $(\tilde{z}_i)\restriction_m = (x_i)\restriction_m$. Por hipótesis, tenemos que para cada $j \in \{1, \ldots, v\}$, $f_j(\tilde{z})\restriction_n = f_j(x)\restriction_n$. Luego $\Pi_j(f(\tilde{z}))\restriction_n = f_j(\tilde{z})\restriction_n = f_j(x)\restriction_n$, entonces $\Pi_j(f(\tilde{z})) \in B_{f_j(x)\restriction_n}$. Por lo que $f(\tilde{z}) \in \Pi_j^{-1}[B_{f_j(x)\restriction_n}]$. De esta manera, $f(\tilde{z}) \in \bigcap_{i=1}^{v} \Pi_i^{-1}[B_{\pi_i(f(x))\restriction_n}] = D \subseteq A$. Por lo tanto f es una función continua. ⊠

Se afirma que la función $\phi_k : (X^\omega)^k \to X^\omega$ definida por la regla:

$$\forall x_0, \ldots, x_{k-1} \in X^\omega : \ \phi_k(x_0, \ldots, x_{k-1}) : \omega \to X \text{ es la función dada por:}$$

$$\phi_k(x_0, \ldots, x_{k-1})(kc + i) = x_i(c), \text{ donde } 0 \leqslant i < k,$$

es un homeomorfismo (ver definición 2.3.18). Como la función ϕ_k es una biyección (ver observación 2.3.19), para demostrar el teorema, bastará aplicar la Afirmación (1) a ϕ_k y a su inversa.

AFIRMACIÓN(2): ϕ_k es continua.

En efecto: Probaremos que ϕ_k satisface las hipótesis de la Afirmación (1). Sean $x \in (X^\omega)^k$ y $n \in \omega$. Para facilitar la notación, denotaremos $x = (x_0, \ldots, x_{k-1})$. Definimos $m > n$ fija y al conjunto $A' = \{x' = (x'_0, \ldots, x'_{k-1}) \mid \forall i \in \{0, \ldots, k-1\}, (x'_i)_{\restriction m} = (x_i)_{\restriction m}\}$.

Por otro lado, sea $x' \in A'$. Probaremos que $\phi_k(x')_{\restriction n} = \phi_k(x)_{\restriction n}$. Efectivamente, sea $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces existe $(c, i) \in \omega \times \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $j = kc + i$ (ver observación 2.3.17). De esta manera, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \phi_k(x')_{\restriction n}(j) & = & (\langle x'_0, \ldots, x'_{k-1} \rangle_k)_{\restriction n}(j) \\ & = & \langle x'_0, \ldots, x'_{k-1} \rangle_k(j) \\ & = & \langle x'_0, \ldots, x'_{k-1} \rangle(kc + i) \\ & = & x'_i(c) \\ & = & x_i(c). \end{array}$$

Note que la última igualdad se debe a que $c \in \{0, \ldots, m-1\}$, pues $c \leqslant kc+i = j < n < m$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} \phi_k(x')_{\restriction n}(j) & = & x_i(c) \\ & = & \langle x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle_k(kc + i) \\ & = & \langle x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle_k(j) \\ & = & (\langle x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle_k)_{\restriction n}(j) \\ & = & \phi_k(x)_{\restriction n}(j). \end{array}$$

De esta manera se tiene que $\phi_k(x')_{\restriction n} = \phi_k(x)_{\restriction n}$. Es decir, la función ϕ_k satisface las hipótesis de la Afirmación (1). Por lo tanto, $\phi_k = \langle\ \rangle_k$ es una función continua. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(3): ϕ_k^{-1} es una función continua.

En efecto: En la observación 2.3.19, cuando se demostró la sobreyectividad de ϕ_k, se construyó la función inversa de ϕ_k. A saber, dicha función es de la forma $\langle\ \rangle_k^{-1} : X^\omega \to (X^\omega)^k$ y está dada por:

$$\forall x' \in X^\omega : \ \langle\ \rangle_k^{-1}(x') \text{ es el elemento de } (X^\omega)^k \text{ tal que:}$$

$$\forall j \in \{0, \ldots, k-1\} : \ x_j \in X^\omega \text{está dada por:}$$

$$\forall c \in \omega : \ x_j(c) = x'(kc + j) = x'(n), \ \text{donde } n = kc + j \text{ y } (j, c) \in \{0, \ldots, k-1\} \times \omega.$$

Queremos probar que esta función satisface las hipótesis de la Afirmación (1). Para ello, sean $x' \in X^\omega$ y $n \in \omega$, definamos $m > kn + (k-1)$. Por otro lado, sean $y \in X^\omega$ tal que $y_{\restriction m} = x'_{\restriction m}$ y $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Queremos probar que $((\langle\ \rangle_k^{-1}(y))_i)\restriction_n = ((\langle\ \rangle_k^{-1}(x'))_i)\restriction_n$. Efectivamente, sea $\tilde{n} \in \{0,\ldots,n-1\}$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} ((\langle\ \rangle_k^{-1}(x'))_i)\restriction_n(\tilde{n}) & = & (\langle\ \rangle_k^{-1}(x'))_i(\tilde{n}) \\ & = & x_i(\tilde{n}) \\ & = & x'(k\tilde{n}+i) \\ & = & y(k\tilde{n}+i). \end{array}$$

La última igualdad se debe a que $k\tilde{n}+i \leqslant kn+(k-1) < m$. De esta manera, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} ((\langle\ \rangle_k^{-1}(x'))_i)\restriction_n(\tilde{n}) & = & y(k\tilde{n}+i) \\ & = & (\langle\ \rangle_k^{-1}(y))_i(\tilde{n}) \\ & = & ((\langle\ \rangle_k^{-1}(y))_i)\restriction_n(\tilde{n}). \end{array}$$

Por lo tanto, para cada $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, $((\langle\ \rangle_k^{-1}(x'))_i)\restriction_n = ((\langle\ \rangle_k^{-1}(y))_i)\restriction_n$. Luego, ϕ_k^{-1} es continua. ⊠

De esta manera, las Afirmaciones (2) y (3) garantizan que para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$, $(X^\omega)^k \cong X^\omega$. □

3.1.21. *Observación.* Con el lema 3.1.20, en particular, tenemos que para cada $k \in \omega \setminus \{0\}$, $\mathcal{N}^k \cong \mathcal{N}$.

3.1.22. Lema. *Sea X un conjunto no vacío entonces $X^\omega \cong (X^\omega)^\omega$.*

Demostración. Probaremos que la función $\Phi : X^\omega \to (X^\omega)^\omega$ dada por:

$$\forall x \in X^\omega : \ \Phi(x) : \omega \to X^\omega \text{ es la función dada por:}$$

$$\forall n \in \omega : \ \Phi(x)(n) : \omega \to X \text{ es la función dada por:}$$

$$\forall m \in \omega : \ (\Phi(x)(n))(m) = x(\langle n,m\rangle_2),$$

es un homeomorfismo. Como ya probamos que Φ es una biyección (ver observación 2.3.21), bastará probar que Φ y su inversa son continuas.

AFIRMACIÓN(1): Φ es continua.

En efecto: Sean $x \in X^\omega$ y $A \subseteq (X^\omega)^\omega$ abierto en $(X^\omega)^\omega$ tal que $\phi(x) \in A$. Entonces existen $A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_r} \subseteq X^\omega$ abiertos tales que $\phi(x) \in \bigcap_{i=1}^r \Pi_{\alpha_i}^{-1}[A_{\alpha_i}] \subseteq A$. Luego, para cada $j \in \{1,\ldots,r\}$, existe $n_j \in \omega$ tal que $B_{\Pi_{\alpha_j}(\phi(x))\restriction_{n_j}} \subseteq A_{\alpha_j}$. Definimos $n = \max\{n_1,\ldots,n_r\}$. De esta manera, para cada $j \in \{1,\ldots,r\}$, $B_{\Pi_{\alpha_j}(\phi(x))\restriction_n} \subseteq B_{\Pi_{\alpha_j}(\phi(x))\restriction_{n_j}} \subseteq A_{\alpha_j}$. Sea $\alpha = \max\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$. Por lo tanto,

$$\phi(x) \in \bigcap_{i=1}^{\alpha} \Pi_i^{-1}[B_{\Pi_i(\phi(x))\restriction_n}] \subseteq A.$$

Sean $C = \bigcap_{i=1}^{\alpha} \Pi_i^{-1}[B_{\Pi_i(\phi(x))\restriction_n}]$ y $\alpha \times n \subseteq \omega \times \omega$. Para facilitar la notación, denotamos $F = \langle\ ,\ \rangle_2$. Como F es una biyección y $\alpha \times n$ es finito, entonces $F(\alpha \times n) \subseteq \omega$ es finito. Luego, existe $m \in \omega$ tal que para cada $x \in F(\alpha \times n)$, $x < m$. De esta manera, tenemos que $F(\alpha \times n) \subseteq \{0, \ldots, m-1\}$.

Procedemos a probar que $B_{x\restriction_m} \subseteq \phi^{-1}[A]$. Efectivamente, sea $z \in B_{x_{\restriction_m}}$, entonces $z_{\restriction_m} = x_{\restriction_m}$. Por otro lado, sean $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ y $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $\Pi_i(\phi(z)) = \phi_i(z)$ y $(\phi_i(z))(j) = z(\langle i, j\rangle) = x(\langle i, j\rangle)$. La última igualdad se debe a que $\langle i, j\rangle = F(i, j) < m$. Luego, $(\phi_i(z))(j) = x(\langle i, j\rangle) = (\phi_i(x))(j)$. De esta manera, $\phi_i(z) = \Pi_i(\phi(z)) \in B_{\Pi_i(\phi(x))\restriction_n} = B_{\phi_i(x)\restriction_n}$. Por lo que $\phi(z) \in \Pi_i^{-1}[B_{\Pi_i(\phi(x))\restriction_n}] \subseteq C$, luego $z \in \phi^{-1}[C] \subseteq \phi^{-1}[A]$. Por lo tanto $B_{x_{\restriction_n}} \subseteq \phi^{-1}[A]$. Con lo que se concluye que ϕ es continua. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(2): Φ^{-1} es continua.

En efecto: Note que cuando demostramos la sobreyectividad en la observación 2.3.21, construimos la función inversa de Φ. A saber, la función Φ^{-1} es de la forma $\phi^{-1} : (X^\omega)^\omega \to X^\omega$ y dada por:

$$\forall x' \in (X^\omega)^\omega :\ \phi^{-1}(x') = x \in X^\omega \text{ está dada por:}$$

$$\forall c \in \omega :\ x(c) = x(\langle n, m\rangle) = (x'(n))(m), \text{ donde } (n, m) \in \omega \times \omega \text{ es tal que } \langle n, m\rangle = c.$$

Procedemos a probar que esta función es continua. Para ello, sean $x' \in (X^\omega)^\omega$ y $A \subseteq X^\omega$ abierto tal que $\phi^{-1}(x') \in A$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $B_{\phi^{-1}(x')_{\restriction_n}} \subseteq A$.

Primero observe que existe $M \in \omega$ tal que $\langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0, \ldots, n-1\}) \subseteq M \times M$. Efectivamente, sea $\langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0, \ldots, n-1\}) \subseteq \omega \times \omega$. Para facilitar la notación, para cada $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, denotaremos $\langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(j) = (\alpha_j, \beta_j)$. Sea $M_j = \max\{\alpha_j, \beta_j\}$. Con esto en mente, definimos $M = \max\{M_0, \ldots, M_{n-1}\}$. Se tiene que $\langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0, \ldots, n-1\}) \subseteq M \times M$. Pues si $z \in \langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0, \ldots, n-1\})$, entonces $z = (\alpha_j, \beta_j)$ para alguna $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, por lo que $M \geqslant M_j \geqslant \alpha_j$ y $M \geqslant M_j \geqslant \beta_j$. Luego, $z \in M \times M$. Por lo tanto, existe $M \in \omega$ tal que $\langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0, \ldots, n-1\}) \subseteq M \times M$.

Por otro lado, definimos el conjunto $C = \bigcap_{i=0}^{M} P_i^{-1}[B_{(x_i')\restriction_M}]$. Procedemos a probar que $C \subseteq \phi[B_{\phi^{-1}(x')_{\restriction_n}}]$. Efectivamente, sea $z' \in C$. Suponga que $\phi^{-1}(z') = z$. Entonces se cumple que:

$$\forall c \in \omega :\ z(c) = z(\langle \bar{n}, \bar{m}\rangle) = (z'(\bar{n}))(\bar{m}), \text{ donde } (\bar{n}, \bar{m}) \in \omega \times \omega \text{ tal que } \langle \bar{n}, \bar{m}\rangle = c.$$

Como $z' \in C$, entonces para cada $j \in \{0, \ldots, M\}$, $(x_j')_{\restriction_M} = (z_j')_{\restriction_M}$.

Observación (1): Para cada $c \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\phi^{-1}(x')_{\restriction_n}(c) = z_{\restriction_n}(c) = \phi^{-1}(z')_{\restriction_n}(c)$. Efectivamente, sea $c \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $\phi^{-1}(x')_{\restriction_n}(c) = \phi^{-1}(x')(c) = x(c) = x(\langle \tilde{n}, \tilde{m}\rangle)$, donde $(\tilde{n}, \tilde{m}) \in \omega \times \omega$ tal que $c = \langle \tilde{n}, \tilde{m}\rangle$. Luego, $\phi^{-1}(x')_{\restriction_n}(c) = (x'(\tilde{n}))(\tilde{m})$.

Como $\langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0,\dots,n-1\}) \subseteq M\times M$ y $\langle \tilde{n},\tilde{m}\rangle = c \in \{0,\dots,n-1\}$, entonces $(\tilde{n},\tilde{m}) = \langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\langle\tilde{n},\tilde{m}\rangle) \in \langle\ ,\ \rangle_2^{-1}(\{0,\dots,n-1\}) \subseteq M\times M$, por lo que $\tilde{n},\tilde{m} \in \{0,\dots,M-1\}$. De esta manera, tenemos que $\phi^{-1}(x')_{\restriction n}(c) = (x'(\tilde{n}))(\tilde{m}) = (x'(\tilde{n}))_{\restriction M}(\tilde{m}) = (z'(\tilde{n}))_{\restriction M}(\tilde{m}) = (z'(\tilde{n}))(\tilde{m}) = z(\langle\tilde{n},\tilde{m}\rangle) = z(c) = z_{\restriction n}(c) = \phi^{-1}(z')_{\restriction n}$. Por lo tanto,

$$\forall c \in \{0,\dots,n-1\}:\ \phi^{-1}(x')_{\restriction n}(c) = z_{\restriction n}(c) = \phi^{-1}(z')_{\restriction n}(c).$$

La observación (1) garantiza que $\phi^{-1}(x')_{\restriction n} = z_{\restriction n} = \phi^{-1}(z')_{\restriction n}$. Entonces $\phi^{-1}(z') \in B_{\phi^{-1}(x')_{\restriction n}}$, luego $z' = \phi(\phi^{-1}(z')) \in \phi[B_{\phi^{-1}(x')_{\restriction n}}]$, por lo que $z' \in \phi[B_{\phi^{-1}(x')_{\restriction n}}]$.

De esta manera, se concluye que Φ^{-1} es continua. ⊠

Por lo tanto, se tiene que $(X^\omega)^\omega \cong X^\omega$. □

3.1.23. *Observación.* Como caso particular del lema 3.1.22, tenemos que $\mathcal{N}^\omega \cong \mathcal{N}$.

3.1.24. Lema. *Si X es un conjunto no vacío entonces $X \times X^\omega \cong X^\omega$.*

Demostración. Primero definimos la función $\phi : X^\omega \to X\times X^\omega$ dada por:

$$\forall x \in X^\omega:\ \phi(x) = (x(0), x'),\ \text{donde:}$$

$$\forall n \in \omega:\ x'(n) = x(n+1).$$

Probaremos que esta función es un homeomorfismo.

AFIRMACIÓN(1): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in X^\omega$ tales que $\phi(x) = \phi(y)$. Como $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $(x(0), x') = (y(0), y')$, por un lado $x(0) = y(0)$. Además, para cada $n \in \omega$, $x(n+1) = x'(n) = y'(n) = y(n+1)$. Luego, $x = y$. Por lo tanto, ϕ es inyectiva. ⊠

AFIRMACIÓN(2): ϕ es sobreyectiva.

En efecto: Sea $z \in X\times X^\omega$. Suponga que $z = (z_1, z_2)$. Definimos $x \in X^\omega$ dada por:

$$x(n) = \begin{cases} z_1 & \text{si } n = 0 \\ z_2(n-1) & \text{si } n \in \omega\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Procedemos a probar que $\phi(x) = z$. Por un lado, tenemos que $\phi(x) = (x(0), x')$, donde para cada $n \in \omega$, $x'(n) = x(n+1)$. Pero $x(0) = z_1$. Además, sea $n \in \omega$, entonces $x'(n) = x(n+1) = z_2(n+1-1) = z_2(n)$. Por lo tanto, $\phi(x) = z$. ⊠

AFIRMACIÓN(3): ϕ es continua.

En efecto: Sean $x \in X^\omega$ y $A \subseteq X \times X^\omega$ abierto tal que $\phi(x) \in A$. Entonces $\phi(x) = (x(0), x') \in \Pi_1^{-1}[\{x(0)\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{x'_{\restriction n}}] \subseteq A$ para alguna $n \in \omega$.

Procedemos a probar que $\phi[B_{x_{\restriction n+1}}] \subseteq A$. Efectivamente, sea $z \in B_{x_{\restriction n+1}}$, entonces $z_{\restriction n+1} = x_{\restriction n+1}$. Luego $\phi(z) = (z(0), z')$, donde para cada $n \in \omega$, $z'(n) = z(n+1)$. Por un lado, tenemos que $\Pi_1(\phi(z)) = z(0) = x(0)$, entonces $\phi(z) \in \Pi_1^{-1}[\{x(0)\}]$. Por otro lado, sea $\Pi_2(\phi(z)) = z'$, queremos probar que $z'_{\restriction n} = x'_{\restriction n}$. Para ello, sea $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $z'_{\restriction n}(j) = z'(j) = z(j+1) = z_{\restriction n+1}(j+1) = x_{\restriction n+1}(j+1) = x(j+1) = x'(j) = x'_{\restriction n}(j)$. Por lo tanto, $z'_{\restriction n} = x'_{\restriction n}$. Con lo que se concluye que $\phi[B_{x_{\restriction n+1}}] \subseteq \Pi_1^{-1}[\{x(0)\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{x'_{\restriction n}}] \subseteq A$. Luego ϕ es continua. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(4): La función inversa de ϕ es continua.

En efecto: Note que en la Afirmación (3), construimos la función inversa de ϕ. A saber, la inversa es la función de la forma $\phi^{-1} : X \times X^\omega \to X^\omega$ dada por:

$$\text{Si } z = (z_1, z_2) \in X \times X^\omega, \text{ entonces } \phi^{-1}(z) = x, \text{ donde:}$$

$$x(n) = \begin{cases} z_1 & \text{si } n = 0 \\ z_2(n-1) & \text{si } n \in \omega \setminus \{0\}. \end{cases}$$

De esta manera, probaremos que ϕ^{-1} es una función continua. Para ello, sean $z \in X \times X^\omega$ y $A \subseteq X^\omega$ abierto tal que $\phi^{-1}(z) \in A$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $B_{\phi^{-1}(z)_{\restriction n}} \subseteq A$. Definimos el conjunto $C = \Pi_1^{-1}[\{z_1\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{(z_2)_{\restriction n}}]$.

Note que $\phi^{-1}[C] \subseteq A$. Efectivamente, sea $y = (y_1, y_2) \in C$. Entonces $\phi^{-1}(y) = y'$, donde $y'(0) = y_1$ y para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $y'(n) = y_2(n-1)$. Queremos probar que $\phi^{-1}(z)_{\restriction n} = \phi^{-1}(y)_{\restriction n}$. Para ello, sea $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Por un lado, si $j = 0$, entonces $x(0) = z_1 = y_1 = y'(0)$. Por otro lado, si $j \in \omega \setminus \{0\}$, entonces $x(j) = z_2(j-1) = (z_2)_{\restriction n}(j-1) = (y_2)_{\restriction n}(j-1) = y_2(j-1) = y'(j)$. Por lo tanto, $\phi^{-1}[C] \subseteq B_{\phi^{-1}(z)_{\restriction n}} \subseteq A$. Luego, ϕ^{-1} es una función continua. $\boxtimes$

Por lo tanto, las afirmaciones anteriores garantizan que ϕ es un homeomorfismo. $\square$

3.1.25. *Observación.* Con el lema 3.1.24, tenemos que $\omega \times \mathcal{N} \cong \mathcal{N}$.

3.1.26. Teorema. $\mathcal{N} \cong 2 \times \mathcal{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Definimos la función $\phi : \mathcal{N} \to 2 \times \mathcal{N}$ dada por:

$$\forall x \in \mathcal{N} : \ \phi(x) = (i, x'),$$

$$\text{donde } x' \text{ e } i \text{ vienen dados por:}$$

$$x'(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \neq 0 \\ c & \text{si } n = 0, \text{ donde: } x(0) = 2c + i, \ i \in 2. \end{cases}$$

Probaremos que esta función es un homeomorfismo.

AFIRMACIÓN(1): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $\phi(x) = \phi(y)$. Note que $x = y$. Pues si $j \in \omega \setminus \{0\}$, $x(j) = x'(j) = y'(j) = y(j)$. Mientras que si $j = 0$, entonces $x(0) = 2c_1 + i = 2x'(j) + i = 2y'(j) + i$, y además $y(0) = 2c_2 + i = 2y'(j) + i$. Por lo tanto, $x = y$. ☒

AFIRMACIÓN(2): ϕ es sobreyectiva.

En efecto: Sea $y = (i, y') \in 2 \times \mathcal{N}$. Definimos $x \in \mathcal{N}$ dada por:

$$x(n) = \begin{cases} y'(n) & \text{si } n \in \omega \setminus \{0\} \\ 2y'(0) + i & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Note que $\phi(x) = y$. Efectivamente, si suponemos que $\phi(x) = (j, x')$. Por un lado, tenemos que si $n \in \omega \setminus \{0\}$, $x'(n) = x(n) = y'(n)$. Además, si $n = 0$, tenemos que $2y'(0) + i = x(0) = 2c + j$. Por lo que $y'(0) = c = x'(0)$ y $j = i$ (ver definición 2.3.16 y observación 2.3.17). Por lo tanto, $\phi(x) = (i, y') = y$. ☒

AFIRMACIÓN(3): ϕ es una función continua.

En efecto: Sean $x \in \mathcal{N}$ y $A \subseteq 2 \times \mathcal{N}$ abierto tal que $\phi(x) \in A$. Suponga que $\phi(x) = (i, x')$, entonces $\Pi_1^{-1}[\{i\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{x'_{\restriction n}}] \subseteq A$ para alguna $n \in \omega$.

Observe ahora que $\phi[B_{x_{\restriction n}}] \subseteq \Pi_1^{-1}[\{i\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{x'_{\restriction n}}]$. Efectivamente, sea $z \in B_{x_{\restriction n}}$, entonces $\phi(z) = (j, z')$, donde:

$$z'(k) = \begin{cases} z(k) & \text{si } k \neq 0 \\ c & \text{si } k = 0, \text{ donde } z(0) = 2c + j \text{ y } j \in 2. \end{cases}$$

Probaremos que $z'_{\restriction n} = x'_{\restriction n}$. Para ello, sea $r \in \{0, \ldots, n-1\}$. Por un lado, si $r \neq 0$, entonces $z'_{\restriction n}(r) = z'(r) = z(r) = x(r) = x'(r) = x'_{\restriction n}(r)$. Por otro lado, si $r = 0$, tenemos que $2x'(0) + i = x(0) = z(0) = 2c + j$, entonces $x'(0) = c = z'(0)$ y $j = i$ (ver definición 2.3.16 y observación 2.3.17). Por lo que $z'_{\restriction n} = x'_{\restriction n}$ y $j = i$. Luego, $\phi(z) \in \Pi_1^{-1}[\{i\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{x'_{\restriction n}}] \subseteq A$. Por lo tanto, $\phi[B_{x_{\restriction n}}] \subseteq A$. Es decir, ϕ es una función continua. ☒

AFIRMACIÓN(4): La función inversa de ϕ es continua.

En efecto: Note que en la Afirmación (2) se contruyó la función inversa de ϕ. A saber, la función inversa es de la forma $\phi^{-1} : 2 \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dada por:

$$\forall y = (i, y') \in 2 \times \mathcal{N} : \ \phi^{-1}(y) = x \text{ está dada por:}$$

$$x(n) = \begin{cases} y'(n) & \text{si } n \in \omega \setminus \{0\} \\ 2y'(0) + i & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Procedemos a probar que ϕ^{-1} es continua. Para ello, sean $y = (y_1, y_2) \in 2 \times \mathcal{N}$ y $A \subseteq \mathcal{N}$ abierto tal que $\phi^{-1}(y) \in A$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $B_{\phi^{-1}(y)\restriction_n} \subseteq A$. Definimos $C = \Pi_1^{-1}[\{y_1\}] \cap \Pi_2^{-1}[B_{(y_2)\restriction_n}]$.

Observe que $\phi^{-1}[C] \subseteq B_{\phi^{-1}(y)\restriction_n}$. Efectivamente, sea $z = (z_1, z_2) \in C$, entonces $\phi^{-1}(z) = z' \in \mathcal{N}$, donde:

$$z'(n) = \begin{cases} z_2(n) & \text{si } n \in \omega \setminus \{0\} \\ 2z_2(0) + z_1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Demostraremos que $\phi^{-1}(z)\restriction_n = \phi^{-1}(y)\restriction_n$. Sea $r \in \{0, \dots, n-1\}$. Por un lado, si $r \neq 0$, entonces $\phi^{-1}(z)\restriction_n(r) = \phi^{-1}(z)(r) = z'(r) = z_2(r) = y_2(r) = \phi^{-1}(y)(r) = \phi^{-1}_{\restriction_n}(r)$. Por otro lado, si $r = 0$, entonces $\phi^{-1}(z)\restriction_n(0) = \phi^{-1}(z)(0) = z'(0) = 2z_2(0) + z_1 = 2y_2(0) + y_1 = y'(0) = \phi^{-1}(y)(0) = \phi^{-1}(y)\restriction_n(0)$. Luego, $\phi^{-1}[C] \subseteq B_{\phi^{-1}(y)\restriction_n} \subseteq A$. Por lo tanto, ϕ^{-1} es continua. ⊠

De esta manera, las afirmaciones garantizan que $\mathcal{N} \cong 2 \times \mathcal{N}$. □

Note que los homeomorfismos construidos en cada uno de los resultados anteriores pueden verse como codificaciones entre los conjuntos involucrados.

3.1.27. *Observación.* Hemos probado que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2 \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pues $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cong \mathcal{N} \cong \mathcal{N}^2 \cong (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$.

3.1.28. *Observación.* $\mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$.

Demostración. Probaremos que el conjunto $\mathbb{Q}^2$ con su topología usual satisface las hipótesis del teorema 3.1.19. Es decir, demostraremos que $\mathbb{Q}^2$ es un espacio métrico perfecto numerable y cero-dimensional. Para esto, observe primero que $\mathbb{Q}^2$ es un espacio métrico. También que $\mathbb{Q}$ es biyectable con ω, ω lo es con ω^2, y ω^2 con $\mathbb{Q}^2$. Por lo tanto, $\mathbb{Q}^2$ es un espacio métrico infinito numerable.

AFIRMACIÓN(1): $\mathbb{Q}^2$ es un espacio perfecto.

En efecto: Suponga que existe $x \in \mathbb{Q}^2$ tal que es un punto aislado. Entonces existe $B \subseteq \mathbb{Q}^2$ abierto tal que $B \cap \mathbb{Q}^2 = \{x\}$, por lo que $\{x\}$ es un abierto en $\mathbb{Q}^2$. Luego existen $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{Q}$ abiertos tales que $x \in \Pi_1^{-1}[A_1] \cap \Pi_2^{-1}[A_2] \subseteq \{x\}$. Suponga que $x = (x_1, x_2)$. Como $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{Q}$ son abiertos en $\mathbb{Q}$, entonces existen $y_1 \in A_1 \setminus \{x_1\}$ y $y_2 \in A_2 \setminus \{x_2\}$. Note que $y = (y_1, y_2) \in \Pi_1^{-1}[A_1] \cap \Pi_2^{-1}[A_2]$, pero $y \notin \{x\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{Q}^2$ no tiene puntos aislados. De esta manera, concluimos que $\mathbb{Q}^2$ no es perfecto. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(2): $\mathbb{Q}^2$ es cero-dimensional.

En efecto: Sea $\mathcal{B} = \{[(i_1, i_1) \times (j_1, j_2)] \cap \mathbb{Q}^2 \mid i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};\ i_1 < i_2, j_1 < j_2\}$. Note que todo elemento de $\mathcal{B}$ es un abierto en $\mathbb{Q}^2$.

Además, observe que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathbb{Q}^2$. Efectivamente, sean $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ y $A \subseteq \mathbb{Q}^2$ abierto tal que $(q_1, q_2) \in A$, entonces existe $A_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto en $\mathbb{R}^2$ tal que $A_0 \cap \mathbb{Q}^2 = A$, luego existen $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tales que $(q_1, q_2) \in (k_1, k_2) \times (k_3, k_4) \subseteq A_0$. Además, existen $i_1, i_2 \in (k_1, k_2) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tales que $i_1 < i_2$ y existen $j_1, j_2 \in (k_3, k_4) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tales que $j_1 < j_2$ y tales que $(q_1, q_2) \in (i_1, i_2) \times (j_1, j_2) \subseteq A_0$. Entonces $(q_1, q_2) \in [(i_1, i_2) \times (j_1, j_2)] \cap \mathbb{Q}^2 \subseteq A_0 \cap \mathbb{Q}^2 = A$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathbb{Q}^2$.

Por otro lado, como para cada $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $i_1 < i_2$ y $j_1 < j_2$, se tiene que $\mathbb{Q}^2 \setminus [(i_1, i_2) \times (j_1, j_2)] \cap \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}^2 \cap [(-\infty, i_1) \cup (i_2, +\infty)] \times [(-\infty, j_1) \cup (j_2, +\infty)]$ es un abierto en $\mathbb{Q}^2$. Se tiene que $\mathbb{Q}^2$ es un espacio cero-dimensional. $\boxtimes$

De esta manera, tenemos que $\mathbb{Q}^2$ es un espacio métrico perfecto numerable y cero-dimensional. Por lo tanto, $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^2$. $\square$

Capítulo 4

El espacio de Cantor.

4.1 El espacio 2^ω

Para comenzar este capítulo, definiremos al espacio de Cantor.

4.1.1. Definición. Llamaremos espacio de Cantor al subespacio $\mathcal{C} = 2^\omega$ del espacio de Baire $\mathcal{N}$.

Notemos que el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ está formado por todas las sucesiones de ceros y unos.

4.1.2. *Observación.* El espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es polaco, perfecto, cerrado y compacto.

Demostración. Primero observe que $\mathcal{C}$ es polaco, pues $2 = \{0, 1\}$ es finito y polaco.

AFIRMACIÓN(1): $\mathcal{C}$ es perfecto.

En efecto: Suponga que existe $x \in \mathcal{C}$ tal que es un punto aislado en $\mathcal{C}$. Entonces $\{x\}$ es abierto en $\mathcal{C}$, por lo que existe $B \subseteq \mathcal{N}$ abierto en $\mathcal{N}$ tal que $B \cap \mathcal{C} = \{x\}$. Como $x \in B$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $B_{x\restriction_m} \subseteq B$, luego $B_{x\restriction_m} \cap \mathcal{C} \subseteq B \cap \mathcal{C} = \{x\}$, por lo que $B_{x\restriction_m} \cap \mathcal{C} \subseteq \{x\}$. Definimos $y \in \mathcal{N}$ dada por:

$$y(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in \omega \setminus \{m\} \\ y(j) \in \{0, 1\} \setminus \{x(m)\} & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Note que $y \in \mathcal{C}$ y $y \in B_{x\restriction_m}$, pero $y \neq x$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es perfecto. ⊠

AFIRMACIÓN(2): $\mathcal{C}$ es cerrado en $\mathcal{N}$.

En efecto: Probaremos que el conjunto $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$ es un abierto en $\mathcal{N}$. Para ello, observe primero que $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C} \neq \emptyset$. Con esto en mente, sea $x \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$, entonces el elemento $x : \omega \to \omega$ es tal que existe $j \in \omega$ tal que $x(j) \neq 0$ y $x(j) \neq 1$. Sea $j_0 \in \omega$ el mínimo tal que $x(j_0) \neq 0$ y $x(j_0) \neq 1$.

Note que $x \in B_{x\restriction_{j_0+1}} \subseteq \mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$. Efectivamente, sea $z \in B_{x\restriction_{j_0+1}}$, entonces $z(j_0) = x(j_0) \neq 0$ y $z(j_0) \neq 1$, por lo que $z \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$ es abierto en $\mathcal{N}$. ⊠

Por otro lado, definimos el conjunto:

$$A = \{s \in \omega^{<\omega} \mid \text{si } l(s) = n \neq 0,\ \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, s(j) \in \{0,1\}\} \cup \{\emptyset\}.$$

AFIRMACIÓN(3): A es un árbol.

En efecto: Sea $s \in A$ y $n < l(s)$. Por un lado, si $n > 0$, entonces para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $s\restriction_n(j) = s(j) \in \{0,1\}$, por lo que $s\restriction_n \in A$. Mientras que si $n = 0$, entonces $s\restriction_n = s\restriction_0 = \emptyset \in A$. De esta manera se concluye que A es un árbol. ⊠

AFIRMACIÓN(4): A está bien podado.

En efecto: Sea $s \in A$. Construiremos una extensión en A de longitud mayor que la de s. Para ello, consideraremos los siguientes dos casos.

Caso(1): $l(s) = n > 0$. Entonces para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $s(j) \in \{0,1\}$. Definimos $t : \{0, \dots, n\} \to \omega$ dada por:

$$t(j) = \begin{cases} s(j) & \text{si } j \in \{0, \dots, n-1\} \\ 0 & \text{si } j = n. \end{cases}$$

De esta manera, tenemos que $t \in A$ y t es una extensión de longitud mayor que la de s.

Caso(2): $l(s) = 0$. Entonces $t = (0)$ es una extensión de longitud mayor que la de $\emptyset$.

De esta manera, concluimos que A está bien podado. ⊠

AFIRMACIÓN(5): A está finitamente ramificado.

En efecto: Sea $s \in A$. Probaremos que existe una cantidad finita de extensiones inmediatamente posteriores de s. Para ello, consideramos los siguientes dos casos.

Caso(1): $l(s) = n > 0$. Sea $t \in A$ una extensión inmediatamente posterior a s, entonces para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $t(j) = s(j) \in \{0,1\}$. De esta manera, tenemos que $t(n) \in \{0,1\}$, pues $t \in A$. Por lo tanto sólo tenemos dos opciones para t.

Caso(2): $l(s) = 0$. Entonces (0) y (1) son las únicas extensiones posteriores de $\emptyset$.

De esta manera, se concluye que A está finitamente ramificado. ⊠

Por lo tanto, la Afirmaciones (3)-(5) garantizan que $[A]$ es compacto (ver teorema 2.2.16).

AFIRMACIÓN(6): $[A] = \mathcal{C}$.

En efecto: Sean $x \in [A]$ y $n \in \omega$. Entonces $x{\restriction_{n+1}} \in A$, luego $x(n) \in \{0,1\}$. Por lo tanto, $x \in \mathcal{C}$.

Por otro lado, sea $x \in \{0,1\}^\omega$. Entonces para cada $n \in \omega$, $x(n) \in \{0,1\}$. Sea $m \in \omega$. Queremos probar que $x{\restriction_m} \in A$.

Caso(1): $m \in \omega \setminus \{\emptyset\}$. tenemos que para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, $x{\restriction_m}(j) \in \{0,1\}$. Luego, $x{\restriction_m} \in A$.

Caso(2): $m = 0$. Entonces $x{\restriction_0} = \emptyset \in A$.

De esta manera, por ambos casos, tenemos que $x \in [A]$. ⊠

Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es compacto. □

A continuación veremos algunos resultados que nos permiten ver algunas relaciones que existen entre $\mathcal{C}$ y algunos espacios topológicos.

4.1.3. Teorema. *Todo espacio métrico compacto no vacío es imagen continua del espacio de Cantor.*

Demostración. Antes de comenzar la demostración del enunciado del teorema, probaremos algunas afirmaciones que nos serán de utilidad. Primero, definimos la función $f : \mathcal{C} \to \mathbb{I}$ dada por:

$$\forall x \in \mathcal{C} : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1}.$$

Observe primero que f está bien definida. Pues si $x \in \mathcal{C}$, entonces para cada $m \in \omega$, definimos $a_m = x(m)(\frac{1}{2})^{m+1}$ y $b_m = (\frac{1}{2})^{m+1}$. Tenemos que $0 \leqslant a_m \leqslant b_m$ y como $\sum_{n=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n+1}$ converge, entonces se concluye que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}$ converge. Además, tenemos que:

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})^{n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Luego, para cada $x \in \mathcal{C}$, $f(x) \in [0,1]$. Por otro lado, tenemos que para cada $x \in \mathcal{C}$, $f(x)$ tiene un único valor. Por lo tanto, f es una función bien definida.

Se probará que la función f es continua y sobreyectiva. Pero primero procederemos a aplicar el principio de elecciones dependientes para construir una sucesión de números que satisfarán algunas propiedades.

Sea $\alpha \in \mathbb{I}$. Para facilitar la notación, denotaremos $\alpha_0 = \alpha$. Definimos al elemento α_1 de la siguiente manera:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 2\alpha_0 - 1 & \text{si } 2\alpha_0 \geqslant 1 \\ 2\alpha_0 & \text{si } 2\alpha_0 < 1. \end{cases}$$

Ahora, sea $s_1 : \{0,1\} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$s_1(i) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } i = 0 \\ \alpha_1 & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $s = \{\alpha_n\}_{n<m} : \{0,\dots,m\} \to \mathbb{R}$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\alpha_0 = \alpha$.
  2. Si para $n \in \omega$, el elemento α_n está definido, entonces α_{n+1} está dada por:

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n - 1 & \text{si } 2\alpha_n \geqslant 1 \\ 2\alpha_n & \text{si } 2\alpha_n < 1. \end{cases}$$

Note que $s_1 \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la siguiente relación R:

- Sean $s : \{0,\dots,m_1\} \to \mathbb{R}, t : \{0,\dots,m_2\} \to \mathbb{R}$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos sRt si:

  1. $s \supseteq t$,
  2. $m_1 = m_2 + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}$. Suponga que $t = \{\alpha_n\}_{n<m}$ para alguna $m \in \omega \setminus \{0\}$. Con esto en mente, definimos al elemento α_m de la siguiente manera:

$$\alpha_m = \begin{cases} 2\alpha_{m-1} - 1 & \text{si } 2\alpha_{m-1} \geqslant 1 \\ 2\alpha_{m-1} & \text{si } 2\alpha_{m-1} < 1. \end{cases}$$

Note que $s \in \mathcal{A}$ y sRt. Por lo tanto, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $g : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \; g(n+1)Rg(n).$$

Definimos $\{\alpha_n\}_{n\in\omega} = \bigcup_{m\in\omega} g(m)$. Notemos que $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\alpha_0 = \alpha$.

2. Si para $n \in \omega$, α_n está definida, entonces:

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n - 1 & \text{si } 2\alpha_n \geqslant 1 \\ 2\alpha_n & \text{si } 2\alpha_n < 1. \end{cases}$$

Por otro lado, definimos $x \in \mathcal{C}$ dada por:

$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2\alpha_n < 1 \\ 1 & \text{si } 2\alpha_n \geqslant 1. \end{cases}$$

Probaremos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} = \alpha_0$. Pero antes demostraremos algunas afirmaciones.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $n \in \omega$, $\alpha_n \in [0,1]$.

En efecto: Probaremos esta afirmación por inducción sobre el subíndice de α_n. Note que por definición, $\alpha_0 = \alpha \in [0,1]$. Por otro lado, suponga que se cumple $\alpha_n \in [0,1]$.

Caso(1): $2\alpha_n \geqslant 1$. Entonces $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1 \geqslant 0$. Además, como $\alpha_n \in [0,1]$, tenemos que $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1 \leqslant 2 - 1 = 1$. Por lo tanto, en este caso, $\alpha_n \in [0,1]$.

Caso(2): $2\alpha_n < 1$. Por un lado, tenemos que $0 \leqslant 2\alpha_n = \alpha_{n+1}$. Además, $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n < 1$. Por lo tanto, en este caso, $\alpha_{n+1} \in [0,1]$. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(2): Para cada $M \in \omega \setminus \{0\}$, $\sum_{n=0}^{M} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = \frac{x(M)}{2^{M+1}} - \frac{\alpha_M}{2^M}$.

En efecto: Esta afirmación se probará por inducción. Para $M = 1$, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{1} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = \tfrac{x(0)}{2} + \tfrac{x(1)}{2^2} - \alpha_0.$$

Por un lado, si $x(0) = 1$, entonces $\alpha_1 = 2\alpha_0 - 1$, luego $\alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{2}$. De esta manera, se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{1} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{x(1)}{2^2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\alpha_1}{2} = \tfrac{x(1)}{2^2} - \tfrac{\alpha_1}{2}.$$

Por otro lado, si $x(0) = 0$, entonces $\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{2}$. Luego, $\sum_{n=0}^{1} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = \frac{x(1)}{2^2} - \frac{\alpha_1}{2}$. Por lo tanto, para $M = 1$ se cumple la propiedad.

Suponga que para $M \in \omega \setminus \{0\}$, se cumple:

$$\sum_{n=0}^{M} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = \tfrac{x(M)}{2^{M+1}} - \tfrac{\alpha_M}{2^M}.$$

Entonces:

$$\sum_{n=0}^{M+1} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = (\sum_{n=0}^{M} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0) + \tfrac{x(M+1)}{2^{M+2}} = \tfrac{x(M)}{2^{M+1}} - \tfrac{\alpha_M}{2^M} + \tfrac{x(M+1)}{2^{M+2}}.$$

Por un lado, si $x(M) = 1$, entonces tenemos que $\alpha_M = \frac{\alpha_{M+1}}{2} + \frac{1}{2}$. Luego,

$$\begin{array}{rcl}\sum_{n=0}^{M+1} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 & = & \frac{1}{2^{M+1}} - \frac{1}{2^M}(\frac{\alpha_{M+1}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} \\ & = & \frac{1}{2^{M+1}} - \frac{\alpha_{M+1}}{2^{M+1}} - \frac{1}{2^{M+1}} + \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} \\ & = & \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} - \frac{\alpha_{M+1}}{2^{M+1}}.\end{array}$$

Por otro lado, si $x(M) = 0$, entonces $\alpha_M = \frac{\alpha_{M+1}}{2}$. Luego,

$$\begin{array}{rcl}\sum_{n=0}^{M+1} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 & = & (\sum_{n=0}^{M} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0) + \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} \\ & = & -\frac{\alpha_M}{2^M} + \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} \\ & = & -\frac{\alpha_{M+1}}{2^{M+1}} + \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} \\ & = & \frac{x(M+1)}{2^{M+2}} - \frac{\alpha_{M+1}}{2^{M+1}}.\end{array}$$

Por lo tanto, para cada $M \in \omega \setminus \{0\}$, $\sum_{n=0}^{M} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0 = \frac{x(M)}{2^{M+1}} - \frac{\alpha_M}{2^M}$. ⊠

AFIRMACIÓN(3): Para cada $M \in \omega \setminus \{0\}$, $|\sum_{n=0}^{M} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0| \leqslant \frac{1}{2^M}$.

En efecto: Por la afirmación anterior, tenemos que para cada $M \in \omega \setminus \{0\}$,

$$|\sum_{n=0}^{M} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0| = |\tfrac{x(M)}{2^{M+1}} - \tfrac{\alpha_M}{2^M}| = \tfrac{1}{2^M}|\tfrac{x(M)}{2} - \alpha_M|.$$

Caso(1): $x(M) = 0$. Entonces:

$$|\sum_{n=0}^{M} x(n)(\tfrac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0| = \tfrac{1}{2^M}|\tfrac{x(M)}{2} - \alpha_M| = \tfrac{1}{2^M}|-\alpha_M| = \tfrac{\alpha_M}{2^M} \leqslant \tfrac{1}{2^M}.$$

Por lo tanto, en este caso, se tiene que $|\sum_{n=0}^{M} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \alpha_0| \leqslant \frac{1}{2^M}$.

Caso(2): $x(M)=1$ y $\frac{1}{2}\geqslant\alpha_M$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
|\sum_{n=0}^{M}x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}-\alpha_0| & = & \frac{1}{2^M}|\frac{x(M)}{2}-\alpha_M| \\
 & = & \frac{1}{2^M}|\frac{1}{2}-\alpha_M| \\
 & = & \frac{1}{2^M}(\frac{1}{2}-\alpha_M) \\
 & \leqslant & \frac{1}{2^M}(\frac{1}{2}) \\
 & \leqslant & \frac{1}{2^{M+1}} \\
 & \leqslant & \frac{1}{2^M}.
\end{array}$$

Por lo tanto, en este caso, se tiene que $|\sum_{n=0}^{M}x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}-\alpha_0|\leqslant\frac{1}{2^M}$.

Caso(3): $x(M)=1$ y $\alpha_M>\frac{1}{2}$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
|\sum_{n=0}^{M}x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}-\alpha_0| & = & \frac{1}{2^M}|\frac{x(M)}{2}-\alpha_M| \\
 & = & \frac{1}{2^M}(\alpha_M-\frac{1}{2}) \\
 & \leqslant & \frac{1}{2^M}(1-\frac{1}{2}) \\
 & = & \frac{1}{2^M}(\frac{1}{2}) \\
 & = & \frac{1}{2^{M+1}} \\
 & \leqslant & \frac{1}{2^M}.
\end{array}$$

Por lo tanto, en este caso, se tiene que $|\sum_{n=0}^{M}x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}-\alpha_0|\leqslant\frac{1}{2^M}$. ⊠

AFIRMACIÓN(4): $f(x)=\alpha_0$.

En efecto: Sea $\epsilon>0$. Definimos $M\in\omega\setminus\{0\}$ tal que $\frac{1}{2^M}<\epsilon$. Sea $\tilde{n}>M$, entonces existe $r\in\omega\setminus\{0\}$ tal que $\tilde{n}=M+r$. Luego, $|\sum_{n=0}^{\tilde{n}}x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}-\alpha_0|\leqslant\frac{1}{2^{\tilde{n}}}=\frac{1}{2^{M+r}}<\epsilon$. De esta manera, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)(\frac{1}{2})^{n+1}=\alpha_0$. ⊠

Como se tomo un elemento $\alpha_0=\alpha\in[0,1]$ arbitrario y, a partir de él, construimos un elemento $x\in\mathcal{C}$ tal que $f(x)=\alpha_0$, se concluye que f es sobreyectiva.

AFIRMACIÓN(5): f es continua.

En efecto: Sean $x\in\mathcal{C}$ y $\epsilon>0$. Definimos $n_0\in\omega$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}}<\epsilon$.

Note que $f[B_{x\restriction_{n_0}}]\subseteq B_\epsilon(f(x))$. Efectivamente, sea $y\in B_{x\restriction_{n_0}}$, entonces $y\restriction_{n_0}=x\restriction_{n_0}$.

Luego,

$$\begin{array}{rcl} |f(x)-f(y)| & = & |\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(\frac{1}{2})^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} y(n)(\frac{1}{2})^{n+1}| \\ & = & |\sum_{n=n_0}^{\infty}(x(n)-y(n))(\frac{1}{2})^{n+1}| \\ & \leqslant & \sum_{n=n_0}^{\infty}|x(n)-y(n)|(\frac{1}{2})^{n+1} \\ & \leqslant & \sum_{n=n_0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n+1} \\ & = & \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{n_0-1}(\frac{1}{2})^{n+1} \\ & = & 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n_0-1}(\frac{1}{2})^{n} \\ & = & 1 - \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^{n_0}}{1-\frac{1}{2}} \\ & = & 1 - \frac{(\frac{1}{2})(1-(\frac{1}{2})^{n_0})}{\frac{1}{2}} \\ & = & 1 - 1 + (\frac{1}{2})^{n_0} \\ & = & (\frac{1}{2})^{n_0} \\ & < & \epsilon. \end{array}$$

Por lo tanto, $f[B_{x\restriction_{n_0}}] \subseteq B_\epsilon(f(x))$. De esta manera, concluimos que f es continua. $\boxtimes$

Por otro lado, definimos la función $F : \mathcal{C}^\omega \to \mathbb{H} = \mathbb{I}^\omega$ dada por:

$$\forall x \in \mathcal{C} : \; F(x) : \omega \to \mathbb{I} \text{ es la función dada por:}$$

$$\forall n \in \omega : \; F(x)(n) = f(x_n) \in \mathbb{I}.$$

AFIRMACIÓN(6): F es sobreyectiva.

En efecto: Sea $y \in \mathbb{H} = \mathbb{I}^\omega$. Entonces para cada $n \in \omega$, sea un único $x_n \in \mathcal{C}$ tal que $f(x_n) = y(n)$. Definimos $x \in \mathcal{C}^\omega$ tal que para cada $n \in \omega$, $x(n) = x_n$. De esta manera, para cada $n \in \omega$, tenemos que $F(x)(n) = f(x_n) = y(n)$. Luego, $F(x) = y$. Por lo tanto, F es sobreyectiva. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(7): F es continua.

En efecto: Sean $x \in \mathcal{C}^\omega$ y $A \subseteq \mathbb{H}$ abierto tal que $F(x) \in A$. Como $F(x) \in A$ y $A \subseteq \mathbb{H}$ es abierto, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \omega$ tales que $F(x) \in \bigcap_{j=1}^m \Pi_{\alpha_j}^{-1}[A_{\alpha_j}] \subseteq A$, donde $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_m} \subseteq \mathbb{I}$ abiertos en $\mathbb{I}$. Por otro lado, tenemos que $f : \mathcal{C} \to \mathbb{I}$ es continua, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $f^{-1}[A_{\alpha_j}] \subseteq \mathcal{C}$ es abierto en $\mathcal{C}$. Observe ahora que el conjunto $\bigcap_{j=1}^m \Pi_{\alpha_j}^{-1}[f^{-1}[A_{\alpha_j}]]$ es abierto en $\mathcal{C}^\omega$.

Se probará que $F[\bigcap_{j=1}^m \Pi_{\alpha_j}^{-1}[f^{-1}[A_{\alpha_j}]]] \subseteq A$. Efectivamente, si $z \in \bigcap_{j=1}^m \Pi_{\alpha_j}^{-1}[f^{-1}[A_{\alpha_j}]]$, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $z \in \Pi_{\alpha_j}^{-1}[f^{-1}[A_{\alpha_j}]]$. Luego, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\Pi_{\alpha_j}(z) \in f^{-1}[A_{\alpha_j}]$. De esta manera, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $f(z_{\alpha_j}) = f(\Pi_{\alpha_j}(z)) \in A_{\alpha_j}$. Por otro lado, sabemos que $F(z) : \omega \to \mathbb{I}$ es tal que para cada $n \in \omega$, $F(z)(n) =$

$f(z_n)$. Note que $F(z) \in \bigcap_{j=1}^m \Pi_{\alpha_j}^{-1}[A_{\alpha_j}]$. Pues si $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\Pi_{\alpha_j}(F(z)) = F(z)(\alpha_j) = f(z_{\alpha_j}) \in A_{\alpha_j}$. Luego, $F(z) \in \bigcap_{j=1}^m \Pi_{\alpha_j}^{-1}[A_{\alpha_j}] \subseteq A$. Por lo tanto,

$$F[\bigcap_{j=1}^{m} \Pi_{\alpha_j}^{-1}[f^{-1}[A_{\alpha_j}]]] \subseteq A.$$

De esta manera, se concluye que F es una función continua. $\boxtimes$

Por otro lado, si $Y = \{0,1\}$, tenemos que $Y^\omega \cong (Y^\omega)^\omega$, por lo que $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}^\omega$ (ver lema 3.1.22). Además como f y F son sobreyectivas y continuas, tenemos que existe una función continua y sobreyectiva $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{H}$. Como observación adicional a nuestros propósitos, notemos que con todo lo anterior hemos probado que $\mathbb{H}$ es un espacio compacto, sin necesidad de hacer referencia al teorema de Tychonoff, el cual se apoya en el axioma de elección para conjuntos arbitrarios.

Ahora, con la función ϕ en mente, procederemos a probar el teorema. Sea X un espacio métrico compacto no vacío, entonces X es homeomorfo a un cerrado K del cubo de Hilbert $\mathbb{H}$ (ver teorema 1.3.6). Definimos $K' = \phi^{-1}[K] \subseteq \mathcal{C}$. Note que K' es cerrado en $\mathcal{C}$, pues $\mathcal{C} \setminus K' = \mathcal{C} \setminus \phi^{-1}[K] = \phi^{-1}[\mathbb{H}] \setminus \phi^{-1}[K] = \phi^{-1}[\mathbb{H} \setminus K]$. De esta manera, tenemos una aplicación $\phi' : K' \to X$ continua y sobreyectiva.

Por otro lado, denotaremos por $\tau_{\restriction_{\{0,1\}^\omega}}$ a la topología de $\mathcal{N}$ restringida al conjunto $\{0,1\}^\omega$. Mientras que por τ_T denotaremos a la topología de Tychonoff de $\{0,1\}^\omega$ con $\{0,1\}$ dotada de la topología discreta.

AFIRMACIÓN(8): $(\{0,1\}^\omega, \tau_{\restriction_{\{0,1\}^\omega}}) = (\{0,1\}^\omega, \tau_T)$.

En efecto: Note que bastará probar que para cada $\tilde{n} \in \omega$ y para cada $x \in \{0,1\}^\omega$, se tiene que:

$$\{z \in \mathcal{N} | x_{\restriction_{\tilde{n}}} = z_{\restriction_{\tilde{n}}}\} \cap \{0,1\}^\omega = \{z \in \{0,1\}^\omega | x_{\restriction_{\tilde{n}}} = z_{\restriction_{\tilde{n}}}\} = \widetilde{B}_{x_{\restriction_{\tilde{n}}}}.$$

Por un lado, si $y \in B_{x_{\restriction_{\tilde{n}}}} \cap \{0,1\}^\omega$, entonces $y \in \{0,1\}^\omega$ y $y_{\restriction_{\tilde{n}}} = x_{\restriction_{\tilde{n}}}$. Por lo tanto, $y \in \widetilde{B}_{x_{\restriction_{\tilde{n}}}}$.

Por otro lado, si $y \in \widetilde{B}_{x_{\restriction_{\tilde{n}}}}$, entonces $y \in \{0,1\}^\omega$ y $x_{\restriction_{\tilde{n}}} = y_{\restriction_{\tilde{n}}}$. Luego, $y \in B_{x_{\restriction_{\tilde{n}}}} \cap \{0,1\}^\omega$.

De esta manera, se concluye que $(\{0,1\}^\omega, \tau_{\restriction_{\{0,1\}^\omega}}) = (\{0,1\}^\omega, \tau_T)$. $\boxtimes$

Como $\{0,1\}$ admite un buen orden, K' y $\mathcal{C}$ son cerrados tales que $\emptyset \neq K' \subseteq \mathcal{C}$, entonces existe una retracción $r : \mathcal{C} \to K'$ (ver teorema 2.2.21). Luego, $\phi' \circ r : \mathcal{C} \to X$ es una función continua y suprayectiva. Por lo tanto, X es imagen continua del espacio de Cantor. $\square$

A continuación veremos algunos conceptos análogos a los esquemas de Suslin y a otros conceptos que se vieron en el Capítulo 3 sobre el espacio de Baire.

4.1.4. Definición. Sea X un conjunto arbitrario.

1. Un *esquema de Hausdorff* es una función A de la forma $A : 2^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$.

2. La *operación de Hausdorff* es la función S que a cada esquema de Hausdorff A en X le asigna el conjunto $S(A) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \bigcap_{n \in \omega} A(x{\restriction_n}) \subseteq X$.

4.1.5. Definición. Sea X un espacio métrico.

1. Diremos que un esquema de Hausdorff A es *abierto* (respectiavmente, *cerrado*) si para cada $s \in 2^{<\omega}$, $A(s)$ es abierto (respectivamente, cerrado).

2. Diremos que un esquema de Hausdorff A cumple la *condición de diámetros* si para todo $x \in \mathcal{C}$ se cumple que $\lim_n diam(A(x{\restriction_n})) = 0$, donde $diam(A(x{\restriction_n}))$ denota al diámetro de $A(x{\restriction_n})$ y convenimos en que $diam(\emptyset) = 0$.

4.1.6. *Observación.* Si A es un esquema de Hausdorff sobre un espacio métrico (X, d) que cumple la condición de diámetros, entonces $\bigcap_{n \in \omega} A(x{\restriction_n})$ contiene como máximo un punto.

Demostración. Suponga que existen $y_1, y_2 \in \bigcap_{n \in \omega} A(x{\restriction_n})$ tales que $y_1 \neq y_2$, entonces para cada $n \in \omega$, $d(A(x{\restriction_n})) \geqslant d(y_1, y_2) > 0$. Pero, $\lim_n d(A(x{\restriction_n})) = 0$, por lo que para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $d(A(x{\restriction_n})) < \epsilon$. En particular, si $\epsilon = d(y_1, y_2) > 0$, tenemos que existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$, $d(y_1, y_2) \leqslant d(A(x{\restriction_n})) < \epsilon = d(y_1, y_2)$, lo que es una contradicción. $\square$

4.1.7. Definición. Sea X un espacio métrico, A un esquema de Hausdorff que cumple la condición de diámetros.

1. Definimos:
$$Z(A) = \{x \in \mathcal{C} | \bigcap_{n \in \omega} A(x{\restriction_n}) \neq \emptyset\}.$$

2. Definimos la función $\phi : Z(A) \to X$ tal que:
$$\forall x \in Z(A) : \bigcap_{n \in \omega} A(x{\restriction_n}) = \{\phi(x)\}.$$

4.1.8. Lema. *En el contexto de la Definición 4.1.7*

1. $\phi[Z(A)] = S(A)$.

2. *ϕ es continua.*

Demostración. (1) Sea $y \in \phi[Z(A)]$, entonces existe $y_0 \in Z(A)$ tal que $y = \phi(y_0)$. Como $y_0 \in Z(A)$, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} A((y_0)\restriction_n) \neq \emptyset$. Pero, A cumple la condición de los diámetros, por lo que $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} A((y_0)\restriction_n)$, luego $y \in S(A)$.

Por otro lado, sea $y \in S(A)$, entonces existe $z \in \mathcal{C}$ tal que $y \in \bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n) \neq \emptyset$, luego $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n)$. De esta manera, tenemos que $z \in \mathcal{C}$ y $\bigcap_{n\in\omega} A(z\restriction_n) \neq \emptyset$, por lo que $z \in Z(A)$. Tenemos que $\{\phi(z)\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n) = \{y\}$, entonces $\phi(z) = y$, luego $y \in \phi[Z(A)]$. Por lo tanto, $\phi[Z(A)] = S(A)$.

(2) Sea $\emptyset \neq U \subseteq X$ abierto en X y sea $x \in \phi^{-1}[U]$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(\phi(x)) \subseteq U$. Además, existe $n \in \omega$ tal que $d(A(x\restriction_n)) < \epsilon$. Como $\{\phi(x)\} = \bigcap_{m\in\omega} A(x\restriction_m)$, entonces $\phi(x) \in A(x\restriction_n)$.

Se afirma que $A(x\restriction_n) \subseteq B_\epsilon(\phi(x)) \subseteq U$. Efectivamente, sea $y \in A(x\restriction_n)$, como $\phi(x) \in A(x\restriction_n)$, entonces $d(y, \phi(x)) \leqslant d(A(x\restriction_n)) < \epsilon$, por lo que $y \in B_\epsilon(\phi(x))$. Por lo tanto, $A(x\restriction_n) \subseteq B_\epsilon(\phi(x)) \subseteq U$.

También tenemos que $x \in B_{x\restriction_n} \subseteq \phi^{-1}[U]$. Pues si $y \in B_{x\restriction_n}$, entonces $y\restriction_n = x\restriction_n$, luego $\phi(y) \in A(y\restriction_n) = A(x\restriction_n) \subseteq U$. Por lo tanto, $x \in B_{x\restriction_n} \subseteq \phi^{-1}[U]$. Luego, $x \in B_{x\restriction_n} \subseteq \phi^{-1}[U]$. □

4.2 El teorema de Brouwer

En esta sección demostramos la conocida caracterización del espacio de Cantor: Todo espacio métrico compacto cero-dimensional y perfecto es esencialmente el espacio 2^ω. Para esto, primero probaremos algunos lemas auxiliares. Para facilitar la discusión, a lo largo de esta sección, X denotará un espacio no vacío métrico con métrica d, compacto, cero-dimensional y perfecto.

4.2.1. *Observación.* X es completo, pues todo espacio métrico compacto es completo.

4.2.2. Lema. *Para cada ϵ y para cada U abierto-cerrado no vacío de X. Se tiene que U puede descomponerse en una unión ajena finita de al menos dos abierto-cerrados, donde cada uno de éstos tiene diámetro menor que ϵ y es distinto del vacío.*

Demostración. Primero, note que si U es un abierto-cerrado no vacío de X, entonces no puede contener un único punto, porque si lo tuviera, entonces tal punto sería aislado.

Sea U un abierto-cerrado no vacío. Entonces existen $y_1, y_2 \in U$ tales que $y_1 \neq y_2$, luego $d(y_1, y_2) > 0$. Como U es abierto, tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(y_1) \subseteq U$. Sean $r = \text{mín}\{\epsilon, d(y_1, y_2)\}$ y $\mathcal{B}$ una base de abierto-cerrados de X. De esta manera, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $y_1 \in B \subseteq B_r(y_1) \subseteq B_\epsilon(y_1) \subseteq U$. Por lo tanto, $y_1 \in B \subseteq U$ y B es un abierto-cerrado. Consideramos $U_1 = B$ y $U_2 = (X \setminus B) \cap U$. Note que U_1 y U_2 son dos abierto-cerrados. Además, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = U$, $y_1 \in U_1$, $y_2 \in U_2$, es decir $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$.

De esta manera, hemos probado que si U es un abierto-cerrado no vacío, entonces U se puede ver como una unión disjunta de dos abierto-cerrados no vacíos.

Por otro lado, sean $\epsilon > 0$ y $i \in \{1, 2\}$. Definimos:

$$\mathcal{B}_i = \{U_i \cap V \mid V \in \mathcal{B};\ diam(V) < \epsilon\} \setminus \{\emptyset\}.$$

Observe que U_i es compacto, pues U_i es cerrado y X es compacto. Además, tenemos que $\mathcal{B}_i$ cubre a U_i, entonces existe $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ subcubierta finita de $\mathcal{B}_i$.

Luego, para cada $i \in \{1, 2\}$, tenemos que $U_i = \bigcup_{j=0}^{n_i} B_j^i$, donde $B_j^i \neq \emptyset$ es un abierto-cerrado con $diam(B_j^i) < \epsilon$.

Además, sea $i \in \{1, 2\}$ fija. Para cada $j \in \{0, \ldots, n_i\}$, sea $G_j^i = B_j^i \setminus \bigcup_{k<j, k\in\omega} B_k^i$. Definimos $\mathcal{V}_i = \{G_1^i, \ldots, G_{n_i}^i\} \setminus \{\emptyset\}$. La familia $\mathcal{V}_i$ tiene las siguientes propiedades.

Observación(1): $\mathcal{V}_i \neq \emptyset$. Pues $G_0^i = B_0^i \neq \emptyset$.

Observación(2): $U_i = \bigcup \mathcal{V}_i$. Efectivamente, sea $z \in U_i$, entonces existe $k_0 \in \{0, \ldots, n_i\}$ tal que $z \in B_{k_0}^i$. Definimos $k' \in \{0, \ldots, n_i\}$ como el mínimo tal que $z \in B_{k'}^i$, entonces $z \in B_{k'}^i \setminus \bigcup_{k<k', k\in\omega} B_k^i = G_{k'}^i$, por lo que $z \in \bigcup \mathcal{V}_i$.

Por otro lado, sea $z \in \bigcup \mathcal{V}_i$, entonces existe $k_0 \in \{0, \ldots, n_i\}$ tal que $z \in G_{k_0}^i = B_{k_0}^i \setminus \bigcup_{k<k_0, k\in\omega} B_k^i$, luego $z \in B_{k_0}^i \subseteq \bigcup_{j=0}^{n_i} B_j^i = U_i$, por lo que $z \in U_i$. Por lo tanto, $U_i = \bigcup \mathcal{V}_i$

Observación(3): Para cada $j_1, j_2 \in \{0, \ldots, n_i\}$ tales que $j_1 \neq j_2$,

$$(B_{j_1}^i \setminus \bigcup_{k<j_1, k\in\omega} B_k^i) \cap (B_{j_2}^i \setminus \bigcup_{k<j_2, k\in\omega} B_k^i) = \emptyset.$$

Efectivamente, sean $j_1, j_2 \in \{0, \ldots, n_i\}$ tales que $j_1 \neq j_2$. Suponga que $j_1 < j_2$. También, supóngase que existe $z \in (B_{j_1}^i \setminus \bigcup_{k<j_1, k\in\omega} B_k^i) \cap (B_{j_2}^i \setminus \bigcup_{k<j_2, k\in\omega} B_k^i)$, entonces $z \in (B_{j_2}^i \setminus \bigcup_{k<j_2, k\in\omega} B_k^i)$ y $z \in B_{j_1}^i$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $(B_{j_1}^i \setminus \bigcup_{k<j_1, k\in\omega} B_k^i) \cap (B_{j_2}^i \setminus \bigcup_{k<j_2, k\in\omega} B_k^i) = \emptyset$.

De esta manera, como $U_1 \cup U_2 = U$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, tenemos que el abierto-cerrado no vacío U puede descomponerse en una unión ajena finita de al menos dos abierto-cerrados, donde cada uno de éstos tiene diámetro menor que ϵ y es distinto del vacío. $\square$

En estos momentos, la idea central es aplicar el lema 4.2.2 y el principio de elecciones dependientes para construir un esquema de Hausdorff que cumpla la condición de diámetros y cuya función continua asociada sea un homeomorfismo entre los conjuntos $Z(A)$ y X. Para esto, primero fijaremos una sucesión de sucesiones de conjuntos de X con ciertas propiedades.

4.2.3. Lema. *Existe una función s^0 de la forma $s^0 : \omega \to \mathcal{B}$ y tal que satisface las siguientes propiedades:*

1. $s^0(0) = \{X\}$.

2. *Si para $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $s^0(j)$ está definido de tal forma que $s^0(j) = \{U_i\}_{i=1}^m$, donde U_i es un abierto-cerrado distinto del vacío para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $s^0(j+1)$ se obtiene con la siguiente construcción:*

   (a) *Como para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es un abierto-cerrado no vacío de X. Entonces, existe una familia $\{U_k^i\}_{k\in\{1,\ldots,n_i\}}$ tal que: $U_i = \bigcup_{k=1}^{n_i} U_k^i$, donde $n_i \geqslant 2$; $\emptyset \neq U_k^i$ es un abierto-cerrado tal que $diam(U_k^i) < \frac{1}{j+1}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n_i\}$; $U_{k_1}^i \cap U_{k_2}^i = \emptyset$, si $k_1 \neq k_2$ (En este punto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tomamos una única familia $\{U_k^i\}_{k\in\{1,\ldots,n_i\}}$).*

   (b) *Definimos $n_0 = 0$. Además, para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^m n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, definimos $r'(l)$ como el elemento en $\{0, \ldots, m-1\}$ tal que $l \in (\sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}, \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)+1} n_{\tilde{r}}] \cap \omega = L_{r'(l)}$.*

   (c) *Entonces, $s^0(j+1) = \{V_l\}_{l=1}^{\sum_{\tilde{r}=0}^m n_{\tilde{r}}}$ es tal que para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^m n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, $V_l = U_k^i$ donde $i = r'(l) + 1$ y $k = l - \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos:

$$\mathcal{B} = \{\{U_i\}_{i=1}^m \mid m \in \omega \setminus \{0\}; \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}, U_i \in \mathcal{P}(X)\}.$$

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $s : \{0, \ldots, n\} \to \mathcal{B}$ ($n \in \omega \setminus \{0\}$) tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $s(0) = \{X\}$.
  2. Si para $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $s(j)$ está definido de tal forma que $s(j) = \{U_i\}_{i=1}^m$, donde U_i es un abierto-cerrado distinto del vacío para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $s(j+1)$ se obtiene con la siguiente construcción:

     (a) Como para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es un abierto-cerrado no vacío de X. Entonces, existe una familia $\{U_k^i\}_{k\in\{1,\ldots,n_i\}}$ tal que: $U_i = \bigcup_{k=1}^{n_i} U_k^i$, donde $n_i \geqslant 2$; $\emptyset \neq U_k^i$ es un abierto-cerrado tal que $diam(U_k^i) < \frac{1}{j+1}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n_i\}$; $U_{k_1}^i \cap U_{k_2}^i = \emptyset$, si $k_1 \neq k_2$ (En este punto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tomamos una única familia $\{U_k^i\}_{k\in\{1,\ldots,n_i\}}$).

     (b) Definimos $n_0 = 0$. Además, para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^m n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, definimos $r'(l)$ como el elemento en $\{0, \ldots, m-1\}$ tal que $l \in (\sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}, \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)+1} n_{\tilde{r}}] \cap \omega = L_{r'(l)}$.

(c) Entonces, $s(j+1) = \{V_l\}_{l=1}^{\sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}}$ es tal que para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, $V_l = U_k^i$ donde $i = r'(l) + 1$ y $k = l - \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}$.

Observe ahora que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Pues, como $X \neq \emptyset$ es abierto-cerrado. Por el lema 4.2.2, tenemos que existe una familia $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ tal que:

1. $n \geqslant 2$.
2. $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$.
3. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i es un abierto-cerrado no vacío tal que $diam(X_i) < 1$.
4. $X_i \cap X_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Definimos la función $s : \{0, 1\} \to \mathcal{B}$ dada por:

$$s(i) = \begin{cases} \{X\} & \text{si } i = 0 \\ \{X_i\}_{i=0}^{n} & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Note ahora que $s \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{A} \neq \emptyset$

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $s : \{0, \ldots, n_s\} \to \mathcal{B}, t : \{0, \ldots, n_t\} \to \mathcal{B}$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos sRt si:

  1. $s \supseteq t$,
  2. $n_s = n_t + 1$.

Sea $t : \{0, \ldots, n\} \to \mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Suponga que $t(n) = \{U_i\}_{i=1}^{m}$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es un abierto-cerrado no vacío de X. Luego, el lema 4.2.2 garantiza que existe una familia $\{U_k^i\}_{k=1}^{n_i}$ tal que:

1. $n_i \geqslant 2$.
2. $U_i = \bigcup_{k=1}^{n_i} U_k^i$.
3. Para cada $k \in \{1, \ldots, n_i\}$, U_k^i es un abierto-cerrado no vacío tal que $diam(U_k^i) < \frac{1}{j+1}$.
4. $U_{k_1}^i \cap U_{k_2}^i = \emptyset$, si $k_1 \neq k_2$.

Con lo anterior en mente, definimos $n_0 = 0$ y para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, definimos $r'(l)$ como el elemento en $\{0, \ldots, m-1\}$ tal que $l \in (\sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}, \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)+1} n_{\tilde{r}}] \cap \omega = L_{r'(l)}$.

De esta manera, sea $\{V_l\}_{l=1}^{\sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}}$ tal que para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, $V_l = U_k^i$ donde $i = r'(l) + 1$ y $k = l - \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}$.

Además, definimos a la función $s : \{0, \ldots, n+1\} \to \mathcal{B}$ dada por:

$$s(j) = \begin{cases} t(j) & \text{si } j \in \{0, \ldots, n\} \\ \{V_i\}_{i=0}^{\sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}} & \text{si } j = n+1. \end{cases}$$

Observe ahora que $s \in \mathcal{A}$ y sRt. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \; f(n+1)Rf(n).$$

Por otro lado, note que $s^0 = \bigcup_{n \in \omega} f(n)$ es una función de la forma $s^0 : \omega \to \mathcal{B}$ y tal que satisface las siguientes propiedades:

1. $s^0(0) = \{X\}$.

2. Si para $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $s^0(j)$ está definido de tal forma que $s^0(j) = \{U_i\}_{i=1}^{m}$, donde U_i es un abierto-cerrado distinto del vacío para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces $s^0(j+1)$ se obtiene con la siguiente construcción:

   (a) Como para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, U_i es un abierto-cerrado no vacío de X. Entonces, existe una familia $\{U_k^i\}_{k \in \{1, \ldots, n_i\}}$ tal que: $U_i = \bigcup_{k=1}^{n_i} U_k^i$, donde $n_i \geqslant 2$; $\emptyset \neq U_k^i$ es un abierto-cerrado tal que $diam(U_k^i) < \frac{1}{j+1}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n_i\}$; $U_{k_1}^i \cap U_{k_2}^i = \emptyset$, si $k_1 \neq k_2$ (En este punto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tomamos una única familia $\{U_k^i\}_{k \in \{1, \ldots, n_i\}}$).

   (b) Definimos $n_0 = 0$. Además, para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, definimos $r'(l)$ como el elemento en $\{0, \ldots, m-1\}$ tal que $l \in (\sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}, \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)+1} n_{\tilde{r}}] \cap \omega = L_{r'(l)}$.

   (c) Entonces, $s^0(j+1) = \{V_l\}_{l=1}^{\sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}}$ es tal que para cada $l \in [1, \sum_{\tilde{r}=0}^{m} n_{\tilde{r}}] \cap \omega$, $V_l = U_k^i$ donde $i = r'(l) + 1$ y $k = l - \sum_{\tilde{r}=0}^{r'(l)} n_{\tilde{r}}$.

$\square$

Una vez que logramos fijar una sucesión de sucesiones de conjuntos de X por medio de la función s^0 del lema 4.2.3, procedemos a construir un esquema de Hausdorff que cumple la condición de diámetro aplicando el principio de elecciones dependientes. Para esto, definimos $\alpha_0 = \{\emptyset\}$. Suponga que $s^0(1) = \{X_i\}_{i=1}^{m}$, entonces:

1. $m \geqslant 2$.

2. $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$.
3. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, X_i es un abierto-cerrado no vacío tal que $diam(X_i) < 1$.
4. $X_{k_1} \cap X_{k_2} = \emptyset$, si $k_1 \neq k_2$.

Con esto en mente, definimos al conjunto:

$$\alpha_1 = \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}) \mid 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1) \mid 0 \leqslant i \leqslant m-2\}.$$

Además, sea $C_1 : \alpha_0 \cup \alpha_1 \to \mathcal{P}(X)$ la función dada por:

$$C_1(\lambda) = \begin{cases} X & \text{si } \lambda = \emptyset \\ X_{i+1} \cup \ldots \cup X_m & \text{si } \lambda = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}) \text{ para alguna } 1 \leqslant i \leqslant m-1 \\ X_{i+1} & \text{si } \lambda = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1) \text{ para alguna } 0 \leqslant i \leqslant m-2. \end{cases}$$

Note que C_1 está bien definida, pues $\alpha_0 \cap \alpha_1 = \emptyset$. También, tenemos que $(1) \in \alpha_1$.

4.2.4. Lema. *Para cada $s \in \alpha_1 \setminus \{(1)\}$, $(1) \nsubseteq s$.*

Demostración. Suponga que existe $\sigma \in \alpha_1 \setminus \{(1)\}$ tal que $(1) \subsetneq \sigma$. Como $\sigma \in \alpha_1$, entonces:

$$\sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}) \text{ para alguna } 1 \leqslant i \leqslant m-1$$
$$\text{ó } \sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1) \text{ para alguna } 0 \leqslant i \leqslant m-2.$$

En ambos caso, queremos obtener una contradicción.

Caso(1): $\sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces})$ para alguna $i \in \omega$ tal que $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Entonces tenemos que $0 = 1$, lo que obviamente es una contradicción.

Caso(2): $\sigma = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant m-2$. Como $\sigma \supsetneq (1)$, entonces $i \geqslant 1$, por lo que $0 = 1$, lo que también es una contradicción.

Por lo tanto, como en cada uno de los dos casos anteriores se tiene una contradicción, se concluye que para cada $s \in \alpha_1 \setminus \{(1)\}$, $(1) \nsubseteq s$. □

Para facilitar la discusión, consideremos la siguiente definición.

4.2.5. Definición. Para cada $A \subseteq \{0,1\}^{<\omega}$, definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{NT}(A) = \{s \in A \mid \forall \sigma \in A \setminus \{s\},\ s \nsubseteq \sigma\}.$$

De esta manera, el lema 4.2.4 implica que $(1) \in \mathcal{NT}(\alpha_1)$. Por otro lado, consideraremos lo siguiente.

- Sea $\mathcal{A}_1$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $C_k : \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k \to \mathcal{P}(X)$ $(k \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\alpha_0 = \{\emptyset\}$.
  2. $\alpha_1 = \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) | 1 \leqslant i \leqslant m-1\} \cup \{(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) | 0 \leqslant i \leqslant m-2\}$.
  3. $C_k \supseteq C_1$.
  4. Si para $r \in \{0,\ldots,k-1\}$, α_r está definido de tal forma que:
     (a) Para cada $s \in \alpha_r$ nodo terminal de α_r, $C_k(s) = V_j$, donde $s^0(r) = \{V_i\}_{i=1}^{\tilde{m}}$ y para alguna $j \in \{1,\ldots,\tilde{m}\}$.
     (b) El conjunto $\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r$ tiene por lo menos un elemento en $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r)$.
     (c) $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r) \subseteq \alpha_r$.
     Entonces:

     $$\alpha_{r+1} = \bigcup_{s \in \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r) \subseteq \alpha_r} [\{s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) | 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1\} \cup$$
     $$\cup \{s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) | 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2\}],$$

     donde: Para cada $s \in \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r) \subseteq \alpha_r$, el número $\tilde{n}_s$ está dada por la función s^0 $(C_k(s) = \bigcup_{i=0}^{\tilde{n}_s} U_i^s)$.
  5. Si para $r \in \{0,\ldots,k-1\}$, está definido $C_k(\sigma)$ para cada $\sigma \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r$. Entonces para cada $t \in \alpha_{r+1}$, se tiene:
     (a) $C_k(t) = C_k(s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})) = U_{i+1}^s \cup \ldots \cup U_{\tilde{n}_s}^s$, si $t = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})$ para algún $s \in \mathcal{NT}(\alpha_r)$ y para algún $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$.
     (b) $C_k(t) = C_k(s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)) = U_{i+1}^s$, si $t = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para algún $s \in \mathcal{NT}(\alpha_r)$ y para algún $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$.

Note que para que tenga sentido el conjunto $\mathcal{A}_1$, se deben probar los siguientes lemas.

4.2.6. Lema. $(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1}) \cap \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1}) \neq \emptyset$.

Demostración. Como existe $\tilde{s} \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r$ un elemento en $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r)$, entonces $\tilde{s}^\wedge 1 \in (\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r \cup \alpha_{r+1}) \cap \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1})$. □

4.2.7. Lema. $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1}) \subseteq \alpha_{r+1}$.

Demostración. Sea $s \in \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1})$. Suponga que $\tilde{s} \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r$, entonces $\tilde{s} \in \alpha_r$, ya que $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_r) \subseteq \alpha_r$. Luego, $\tilde{s} \in \mathcal{NT}(\alpha_r)$, por lo que $\tilde{s}^\wedge 1 \in \alpha_{r+1}$. De esta manera, tenemos que $\tilde{s} \notin \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1})$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{r+1}) \subseteq \alpha_{r+1}$. □

4.2.8. Lema. *Sea $M_0 \in \omega$ fija entonces para cada $M' \in \omega \setminus \{0\}$, $\alpha_{M_0+M'}$ tiene solamente extensiones impropias de elementos del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_{M_0})$.*

Demostración. Probaremos esta afirmación por inducción sobre M'. Para $M' = 1$, por la misma definición de α_{M_0+1}, tenemos que α_{M_0+1} tiene solamente extensiones impropias de nodos terminales de α_{M_0}.

Por otro lado, suponga que $M' \in \omega \setminus \{0\}$ es tal que $\alpha_{M_0+M'}$ tiene solamente extensiones impropias de elementos del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_{M_0})$. Por definición, tenemos que $\alpha_{M_0+M'+1}$ tiene solamente extensiones impropias de elementos del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_{M_0+M'})$. De esta manera, si $s \in \alpha_{M_0+M'+1}$, entonces $s = \tau^\wedge(R_1, \ldots, R_k)$ para alguna $k \in \omega \setminus \{0\}$, donde τ es un elemento de $\mathcal{NT}(\alpha_{M_0+M'})$. Pero $\alpha_{M_0+M'}$ tiene solamente extensiones impropias de elementos del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_{M_0})$. Luego, $\tau = \tau_1^\wedge(s_1, \ldots, s_{k'})$ para alguna $k' \in \omega \setminus \{0\}$ y para alguna τ_1 elemento de $\mathcal{NT}(\alpha_{M_0})$. Por lo tanto, $s = \tau_1^\wedge(s_1, \ldots, s_{k'})^\wedge(R_1, \ldots, R_k)$. Es decir, s es una extensión impropia de un elemento del conjunto α_{M_0}. □

4.2.9. Lema. *$\alpha_{j_1} \cap \alpha_{j_2} = \emptyset$, si $j_1 \neq j_2$.*

Demostración. Sean $j_1 \neq j_2$, suponga que $j_1 < j_2$. Entonces $j_2 = j_1 + b$, para alguna $b \in \omega \setminus \{0\}$. Luego, el lema 4.2.8 garantiza que α_{j_2} tiene solamente extensiones impropias de elementos del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_{j_1})$. De esta manera, si suponemos que $x \in \alpha_{j_1} \cap \alpha_{j_2}$, entonces x es una extensión impropia de algún elemento de $\mathcal{NT}(\alpha_{j_1})$ y $x \in \alpha_{j_2}$, lo que es una contradicción. □

De esta manera, tenemos que $\mathcal{A}_1$ está bien definido, puesto que los lemas 4.2.6 - 4.2.9 garantizan que los conjuntos α_r y las funciones C_k (descritas en $\mathcal{A}_1$) están bien definidos.

Además, note que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, pues $C_1 \in \mathcal{A}_1$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_1$ definimos la relación R_1:

- Sean $s : \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{k_s} \to \mathcal{P}(X), t : \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{k_t} \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{A}_1$. Escribiremos sR_1t si:

1. $s \supseteq t$,
2. $k_s = k_t + 1$.

Sea $t : \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k \to \mathcal{P}(X)$ elemento del conjunto $\mathcal{A}_1$. Sabemos que $\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{k-1}$ tiene por lo menos un elemento en $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{k-1})$ y $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{k-1} \subseteq \alpha_{k-1}$. Pero, los lemas 4.2.6 y 4.2.7 implican que en $\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k$ existe por lo menos un elemento de $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k)$ y $\mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k) \subseteq \alpha_k$. De esta manera, definimos:

$$\alpha_{k+1} = \bigcup_{s \in \mathcal{NT}(\alpha_k} [\{s^\wedge(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}) \mid 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1\} \cup \{s^\wedge(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2\}]$$

Por otro lado, por el lema 4.2.9, tenemos que $\alpha_{k+1} \cap \alpha_i = \emptyset$, si $i \in \{0, \ldots, k\}$. Con lo anterior en mente, consideramos lo siguiente.

- Para cada $s \in \mathcal{NT}(\alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k) \subseteq \mathcal{NT}(\alpha_k)$, sea la subfamilia $\{U_k^s\}_{k=1}^{\tilde{n}_s}$ de la familia $s^0(k+1) = \{V_l\}_{l=1}^{\Lambda}$ tal que:

  1. $\tilde{n}_s \geqslant 2$.
  2. $t(s) = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_s} U_k^s$.
  3. Para cada $k \in \{1, \ldots, \tilde{n}_s\}$, U_k^s es un abierto-cerrado no vacío tal que $diam(U_k^s) < \frac{1}{k+1}$.
  4. $U_{k_1}^s \cap U_{k_2}^s = \emptyset$, si $k_1 \neq k_2$.

- Definimos la función $\sigma : \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k \cup \alpha_{k+1} \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

  1. $\sigma(z) = t(z)$, si $z \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_k$.
  2. $\sigma(z) = \sigma(s^\wedge(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}) = U_{i+1}^s \cup \ldots \cup U_{\tilde{n}_s}^s$, si $z = s^\wedge(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces})$ para algún $s \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$ y para algún $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$.
  3. $\sigma(z) = \sigma(s^\wedge(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1)) = U_{i+1}^s$, si $z = s^\wedge(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-veces}, 1)$ para algún $s \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$ y para algún $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$.

Note que $\sigma \in \mathcal{A}_1$ y $\sigma R_1 t$. Por lo tanto, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_1 : \omega \to \mathcal{A}_1$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \ f_1(n+1) R_1 f_1(n).$$

Sea $A = \bigcup_{n \in \omega} f_1(n)$. De hecho, A es un esquema de Hausdorff. Pero antes de ver esto último, probaremos que $\{0,1\}^{<\omega} = \bigcup_{k \in \omega} \alpha_k$. Para ello, primero demostraremos los siguientes lemas.

Sea $k \in \omega$ fija. Para cada $s \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$, denotaremos:

$$\mathcal{A}_s = \{s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \mid 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1\} \cup \{s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2\}$$

4.2.10. Lema. *Para cada $s \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$, se tiene que $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \in \mathcal{NT}(\mathcal{A}_s)$.*

Demostración. Suponga que existe $\sigma \in \mathcal{A}_s$ tal que $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \subsetneq \sigma$.

Caso(1): $\sigma = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$. Como $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \subsetneq \sigma$, entonces $i > \tilde{n}_s - 1$, lo que es una contradicción.

Caso(2): $\sigma = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$. Como $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \subsetneq \sigma$, entonces $i \geqslant \tilde{n}_s - 1 > \tilde{n}_s - 2$, lo que es tambié una contradicción .

Como en cada uno de los casos anteriores se obtiene una contradicción, se concluye que:

$$s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \in \mathcal{NT}(\mathcal{A}_s)$$

□

4.2.11. Lema. *Para cada $s \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$, se tiene $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ (para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$) es elemento de $\mathcal{NT}(\mathcal{A}_s)$.*

Demostración. Suponga que existe $\sigma \in \mathcal{A}_s$ tal que $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \subsetneq \sigma$.

Caso(1): $\sigma = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-veces})$ para alguna $1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_s - 1$. Entonces $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \subsetneq s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-veces})$. Suponga que $l(s) = \{0,1,\ldots,M-1\}$, entonces $\sigma(M-1+i+1) = \sigma(M+i) = 1$, pues $\sigma = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-veces}) \supsetneq s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$. Pero $\sigma(M+i) = 0$, por lo que $1 = 0$, lo que es una contradicción.

Caso(2): $\sigma = s^\wedge(\underbrace{0,\dots,0}_{j-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_s - 2$. Suponga que $l(s) = \{0,\dots,M-1\}$, como $s^\wedge(\underbrace{0,\dots,0}_{i-veces},1) \subsetneq s^\wedge(\underbrace{0,\dots,0}_{j-veces},1) = \sigma$, entonces $\sigma(M-1+i+1) = \sigma(M+i) = 1$. Además, $j > i$, por lo que $\sigma(M+1) = 0$. Luego, $0 = 1$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, como en cada uno de los dos casos anteriores se tienen una contradicción, se concluye que $\sigma^\wedge(\underbrace{0,\dots,0}_{i-veces},1) \in \mathcal{NT}(\mathcal{A}_s)$. □

4.2.12. Lema. *Para cada $k \in \omega$ y para cada $s,t \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$ tales que $s \neq t$. Entonces para cada $R_1,\dots,R_n \in \{0,1\}$, $s \nsubseteq t^\wedge(R_1,\dots,R_n)$ y $t \nsubseteq s^\wedge(R_1,\dots R_n)$.*

Demostración. Sean $k \in \omega$ y $s,t \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$ tales que $s \neq t$. También, considere $R_1,\dots,R_n \in \{0,1\}$. Probaremos el lema por inducción sobre el subíndice $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Sea $R \in \{0,1\}$. Suponga que $s \subseteq t^\wedge(R)$. Por un lado, si $s = t^\wedge(R)$, entonces $s = t^\wedge(R) \supsetneq t$, luego $t \notin \mathcal{NT}(\alpha_k)$. Por lo tanto, $s \subsetneq t^\wedge(R)$, por lo que $l(t) \geqslant l(s)$. Sea $x \in s$, entonces $x = (j, s(j))$ para alguna $j \in l(s) = \{0,\dots,M_1-1\}$. Pero $s \subsetneq t^\wedge(R)$, por lo que $x \in t^\wedge(R)$. Luego, $(j,s(j)) \in t^\wedge(R)$ para alguna $j \in l(t) = \{0,\dots,M_2-1\}$, pues $l(s) \leqslant l(t)$. Como $(j,t(j)) \in t^\wedge(R)$ y $t^\wedge(R)$ es una función, tenemos que $s(j) = t(j)$, por lo que $x = (j,s(j)) = (j,t(j))$. Luego, $x \in t$. Por lo tanto, $s \subsetneq t$, pues $s \neq t$. Es decir, $s \notin \mathcal{NT}(\alpha_k)$, lo que es una contradicción. De esta manera, se concluye que $s \nsubseteq t^\wedge(R)$.

Como s y t tienen las mismas hipótesis, tenemos que $s \nsubseteq t^\wedge(R)$ y $t \nsubseteq s^\wedge(R)$.

Por otro lado, suponga que:

$$s \nsubseteq t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}}) \text{ y } t \nsubseteq s^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}}), \text{ donde } R_1,\dots,R_{\tilde{r}} \in \{0,1\}.$$

Probaremos que si $R_{\tilde{r}+1} \in \{0,1\}$, entonces $s \nsubseteq t^\wedge(R_1,\dots R_{\tilde{r}+1})$ y $t \nsubseteq s^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}+1})$.

Efectivamente, suponga que $s \subseteq t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}+1})$. Como $s \nsubseteq t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}})$, entonces existe $x \in s$ tal que $x \notin t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}})$. Además, como $s \subseteq t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}+1})$, entonces $x \in t^\wedge(R_1,\dots R_{\tilde{r}+1})$. Suponga que $l(t) = \{0,\dots,M_1-1\}$, entonces tenemos que existe $j_0 \in dom(t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}+1})) = \{0,\dots,M_1-1\} \cup \{M_1,\dots,M_1+\tilde{r}\}$ (donde $dom(t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}+1}))$ es el dominio de la función $t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}+1})$).

Observación(1): $j_0 = M_1 + \tilde{r}$. Pues si $j_0 < M_1 + \tilde{r}$, entonces $x = (j_0, s(j_0)) \in t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}})$. Luego, $x \in t^\wedge(R_1,\dots,R_{\tilde{r}})$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $j_0 = M_1 + \tilde{r}$.

Observación(2): $\tilde{r} \geqslant 1$.

Observación(3): $\{0,\ldots,M_2-1\} = l(s) \leqslant l(t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}+1})) = \{0,\ldots,M_1+\tilde{r}\}$.

Observación(4): Para cada $k \in l(s)$ tal que $k < j_0$, $(k,s(k)) \in t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}})$. Efectivamente, sea $k \in l(s)$ tal que $k < j_0$. Tenemos que:

$$(k, t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}})(k)) \in t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}}) \subsetneq t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}},R_{\tilde{r}+1}),$$

pero $(k,s(k)) \in t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}},R_{\tilde{r}+1})$. Además, como $t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}+1})$ es una función, se tiene que $s(k) = t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}})(k)$. De esta manera, $k \in l(s)$ tal que $k < j_0$, $(k,s(k)) \in t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}})$. Pero $l(s) \subseteq \{0,\ldots,M_1+\tilde{r}\}$. Por lo tanto, para cada $k \in l(s)$, $(k,s(k)) \in t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}})$.

Pero la Observación(4) garantiza que $s \subseteq t^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}})$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $s \not\subseteq t^\wedge(R_1,\ldots R_{\tilde{r}+1})$

Como los elementos s y t satisfacen las mismas hipótesis, entonces se concluye que $t \not\subseteq s^\wedge(R_1,\ldots,R_{\tilde{r}+1})$. □

4.2.13. Lema. *Para cada $n \in \omega$ y para cada $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ tal que $l(s) = n$ se cumple que: $s \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_n$.*

Demostración. Probaremos este lema aplicando inducción.

Para $n = 0$. Sea $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ tal que $l(s) = 0$, entonces $s = \emptyset$, pero $\alpha_0 = \{\emptyset\}$, por lo que $s \in \alpha_0$.

Por otro lado, para $n = 1$. Sea $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ tal que $l(s) = 1$, entonces $s = (1)$ ó $s = (0)$, pero $(1),(0) \in \alpha_1$, por lo que $s \in \alpha_0 \cup \alpha_1$.

Ahora, suponga que el elemento $n \in \omega$ es tal que si $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ con $l(s) = n$ entonces $s \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_n$. Sea $t \in \{0,1\}^{<\omega}$ tal que $l(t) = n+1$. Queremos probar que $t \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que existe $R \in \{0,\ldots,n\}$ tal que $t_{\restriction n} \in \alpha_R$.

Si $R = 0$, entonces $t_{\restriction n} \in \alpha_0 = \{\emptyset\}$, por lo que $t_{\restriction n} = \emptyset$. De esta manera, tanto $t^\wedge_{\restriction n}(0) = (0) \in \alpha_1 \subseteq \alpha_0 \cup \alpha_1$ como $t_{\restriction n} = (1) \in \alpha_1 \subseteq \alpha_0 \cup \alpha_1$. Además, como $n+1 = 1$, se tiene el resultado para $R = 0$.

Ahora, suponga que $R \geqslant 1$, entonces $R-1 \geqslant 0$, por lo que existe el conjunto α_{R-1}. De esta manera, tenemos que:

$$t_{\restriction n} \in \alpha_R = \bigcup_{s \in \mathcal{NT}(\alpha_{R-1})} [\{s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \mid 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1\} \cup \{s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \mid 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2\}],$$

entonces existe $s \in \mathcal{NT}(\alpha_{R-1})$ tal que:

$$t_{\restriction n} = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \text{ para alguna } 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$$

$$\text{ó } t_{\restriction n} = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \text{ para alguna } 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$$

Note que para probar el lema, bastará ver que $t^\wedge(0) \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}$ y que $t^\wedge(1) \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}$. Para esto, consideraremos los siguientes casos con sus respectivos subcasos.

Caso(1): $t_{\restriction n} = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$. Entonces, por un lado, tenemos que $t^\wedge_{\restriction n}(0) = s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(i+1)-veces}$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$.

Subcaso(1): $i < \tilde{n}_s - 1$. Entonces $i \leqslant \tilde{n}_s - 2$, luego $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0,0}_{(i+1)-veces})$, donde $1 < 2 \leqslant i + 1 \leqslant \tilde{n}_s - 1$. Por lo tanto, $t^\wedge_{\restriction n}(0) \in \mathcal{A}_s$.

También note que en este subcaso se tiene $t^\wedge_{\restriction n}(1) = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 < 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$. De esta manera, $t^\wedge_{\restriction n}(1) \in \mathcal{NT}(\mathcal{A}_s)$ (ver el lema 4.2.11). Por lo tanto, $t^\wedge_{\restriction n}(1) \in \mathcal{A}_s \subseteq \alpha_R \subseteq \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_n \cup \alpha_{n+1}$.

Subcaso(2): $i = \tilde{n}_s - 1$. Primero demostraremos que $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \in \mathcal{NT}(\alpha_R)$. Para ello, suponga que existe $\sigma \in \alpha_R$ tal que $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \subsetneq \sigma$. Como $\sigma \in \alpha_R$, entonces $\sigma \in \mathcal{A}_s$ ó $\sigma \notin \mathcal{A}_s$.

Por un lado, si $\sigma \in \mathcal{A}_s$, entonces $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \subsetneq \sigma$, lo que es una contradicción, pues ya probamos que el elemento $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \in \mathcal{NT}(\mathcal{A}_s)$ (ver el lema 4.2.10). Por lo tanto, $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \in \mathcal{NT}(\alpha_R)$.

Mientras que si $\sigma \notin \mathcal{A}_s$, entonces existe $\tau \in \mathcal{NT}(\alpha_{R-1})$, $\tau \neq s$ tal que $\sigma \in \mathcal{A}_\tau$. Por lo que $\sigma = \tau^\wedge(k_1,\ldots,k_j)$ para alguna $j \geqslant 1$. Además, tenemos que:

$$s \subsetneq s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} = \tau^\wedge(k_1,\ldots,k_j) \text{ para alguna } j \geqslant 1.$$

Luego $s \subsetneq \tau^\wedge(k_1,\ldots,k_j)$ para alguna $j \geqslant 1$, lo que es una contradicción (ver el lema 4.2.12). Por lo tanto, $s^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(\tilde{n}_s-1)-veces} \in \mathcal{NT}(\alpha_R)$. De esta manera, tenemos que $t_{\restriction n} \in$

$\mathcal{NT}(\alpha_R)$. Luego,

$$t^\wedge_{\restriction n}(0),\ t^\wedge_{\restriction n}(1) \in \alpha_{R+1} \subseteq \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_R \cup \alpha_{R+1} \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}.$$

Caso(2): $t_{\restriction n} = s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$. Para ver que $t^\wedge_{\restriction n}(0), t^\wedge_{\restriction n}(1) \in \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}$, bastará observar que $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$ es un elemento del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_R)$. Efectivamente, suponga que existe $\sigma \in \alpha_R$ tal que $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \subsetneq \sigma$, entonces $\sigma \in \mathcal{A}_s$ ó $\sigma \notin \mathcal{A}_s$.

Por un lado, observe que suponer $\sigma \in \mathcal{A}_s$ implica una contradicción, pues se tiene que $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \in \mathcal{NT}(\alpha_R)$ (ver el lemma 4.2.11).

Por otro lado, si $\sigma \notin \mathcal{A}_s$, entonces existe $\tau \in \mathcal{NT}(\alpha_{R-1})$ con $\tau \neq s$ tal que $\sigma = \tau^\wedge(k_1,\ldots,k_j)$ para alguna $j \geqslant 1$, luego $s \subsetneq s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \subsetneq \sigma = \tau^\wedge(k_1,\ldots,k_j)$ para alguna $j \geqslant 1$. De esta manera, tenemos que $s \subsetneq \tau^\wedge(k_1,\ldots,k_j)$ para alguna $j \geqslant 1$, lo que es una contradicción (ver el lema 4.2.12).

Por lo tanto, $s^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$ es un elemento del conjunto $\mathcal{NT}(\alpha_R)$. Luego, $t^\wedge_{\restriction n}(0), t^\wedge_{\restriction n}(1) \in \alpha_{R+1} \subseteq \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_R \cup \alpha_{R+1} \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}$. □

Note que el lema 4.2.13 implica que $\bigcup_{k\in\omega} \alpha_k = \{0,1\}^{<\omega}$.

4.2.14. Lema. *El elemento $A = \bigcup_{n\in\omega} f_1(n)$ es una función de la forma $A : \bigcup_{k\in\omega} \alpha_k \to \mathcal{P}(X)$.*

En efecto: Sea $x \in \bigcup_{k\in\omega} \alpha_k$. Probaremos que existe $y \in \mathcal{P}(X)$ tal que $A(x) = y$. Por un lado, tenemos que existe $k_0 \in \omega$ tal que $x \in \alpha_{k_0}$. Como para cada $m \in \omega$, $f_1(m+1) R_1 f_1(m)$. Entonces existe $m_0 \in \omega$ tal que $A(x) = f_1(m_0)(x) \in \mathcal{P}(X)$.

Por otro lado, si $(x,y),(x,y') \in$ Gráf(A), entonces $A(x) = y$ y $A(x) = y'$. Queremos probar que $y = y'$. Tenemos que existe $k \in \omega$ tal que $x \in \alpha_k$. Como para cada $m \in \omega$, $f_1(m+1) \supseteq f_1(m)$, se tiene que existe $m_0 \in \omega$ mínimo tal que $f_1(m_0) : \alpha_0 \cup \ldots \cup \alpha_{k'} \to \mathcal{P}(X)$ donde $k' \geqslant k$. Observemos que para cada $r \in \omega \setminus \{0\}$, $f_1(m_0+r) \supseteq f_1(m_0)$. Luego, para cada $r \in \omega \setminus \{0\}$, $(f_1(m_0))(x) = (f_1(m_0+r))(x) = A(x)$, por lo que $y = y'$.

Por lo tanto, A es una función de la forma $A : \{0,1\}^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$. Es decir, A es un esquema de Hausdorff. □

4.2.15. Lema. *El esquema de Hausdorff $A : \{0,1\}^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$ cumple la condición de los diámetros.*

Demostración. Sean $x \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$ fijas. Entonces existe $k \in \omega$ tal que $x{\restriction_n} \in \alpha_k$. Procedemos a probar algunas observaciones.

Observación(1): Existe $r \in \omega$ tal que $x{\restriction_{n+r}} \in \alpha_{k+1}$. Efectivamente, si $k = 0$, entonces $x{\restriction_n} \in \alpha_0 = \{\emptyset\}$, por lo que $x{\restriction_n} = \emptyset$. Luego, $x{\restriction_n}^{\wedge}(0) = (0) \in \alpha_1$ y $x{\restriction_n}^{\wedge}(1) = (1) \in \alpha_1$. Por lo tanto, $x{\restriction_{n+1}} \in \alpha_1$ si $k = 0$.

Por otro lado, suponga que $k \geqslant 1$. Entonces existe el conjunto α_{k-1}, por lo que:

$$x{\restriction_n} \in \alpha_k = \bigcup_{s \in \mathcal{NT}(\alpha_{k-1})} [\{s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) | 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1\} \cup \{s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) | 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2\}].$$

Luego, existe $s \in \mathcal{NT}(\alpha_{k-1})$ tal que:

$$x{\restriction_n} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \text{ para alguna } 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$$

$$\text{ó } x{\restriction_n} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \text{ para alguna } 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2.$$

Por lo que consideraremos los siguientes casos.

Caso(1): $x{\restriction_n} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$. En este caso, consideraremos dos subcasos.

Subcaso(1): Para cada $j \in \omega$ tal que $i \leqslant j \leqslant \tilde{n}_s - 1$, $x{\restriction_{n+r_j}} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-veces})$ para alguna $r_j \in \omega$. En particular, tenemos que $x{\restriction_{n+r_{\tilde{n}_s-1}}} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0}_{(\tilde{n}_s-1)-veces}) \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$, ver el lema 4.2.10. Por lo tanto, $x{\restriction_{n+r_{\tilde{n}_s-1}+1}} \in \alpha_{k+1}$.

Subcaso(2): Existe $j \in \omega$ tal que $i \leqslant j \leqslant \tilde{n}_s - 1$. Entonces $x{\restriction_{n+r_j}} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{j-veces})$ para alguna $r_j \in \omega$. Definimos $j_0 \in \omega$ como el mínimo tal que $i \leqslant j_0 \leqslant \tilde{n}_s - 1$ y $x{\restriction_{n+r_{j_0}}} = s^{\wedge}(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{j_0-veces})$ para alguna $r_{j_0} \in \omega$. Entonces $1 \leqslant i \leqslant j_0 \leqslant \tilde{n}_s - 1$, luego $0 \leqslant i-1 \leqslant j_0 - 1 \leqslant \tilde{n}_s - 2$, por lo que $0 \leqslant j_0 - 1 \leqslant \tilde{n}_s - 2$. De esta manera, se concluye que $x{\restriction_{n+r_j}} \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$. Por lo tanto, $x{\restriction_{n+r_j}}^{\wedge}(0)$, $x{\restriction_{n+r_j}}^{\wedge}(1) \in \alpha_{k+1}$. Luego, $x{\restriction_{n+r_j+1}} \in \alpha_{k+1}$.

Por lo tanto, si $x_{\restriction n} = s^\wedge(\underbrace{0,\dots,0}_{i-veces})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 1$, la observación es verdadera.

Caso(2): $x_{\restriction n} = s^\wedge(\underbrace{0,\dots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_s - 2$. Entonces $x_{\restriction n} \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$. Luego $x_{\restriction n}^\wedge(0)$, $x_{\restriction n}^\wedge(1) \in \alpha_{k+1}$, por lo que $x_{\restriction n+1} \in \alpha_{k+1}$.

Por lo tanto, la Observación(1) es verdadera. También la siguiente observación nos será de utilidad para probar que el esquema de Hausdorff cumple la condición de diámetros.

Observación(2): Existe $r \in \omega$ tal que $x_{\restriction n+r} \in \alpha_{k+1}$. Efectivamente, probaremos esta observación aplicando el principio de inducción. Por un lado, si $k = 0$, como $x_{\restriction 0} \in \alpha_0$ y $x_{\restriction n}^\wedge(0)$, $x_{\restriction n}^\wedge(1) \in \alpha_1$, por lo que se tiene la observación para $k = 0$.

Ahora, suponga que para $k \in \omega$ existe $r \in \omega$ tal que $x_{\restriction r} \in \alpha_k$, por la Observación (1), tenemos que existe $r' \in \omega$ tal que $x_{\restriction_{r+r'}} \in \alpha_{k+1}$. Por lo tanto, para cada $k \in \omega$ existe $r \in \omega$ tal que $x_{\restriction r} \in \alpha_k$.

Con la observación anterior en mente, procedemos a demostrar que:

$$\lim_n diam(A(x_{\restriction n})) = 0.$$

Para esto, sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n_1 \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{n_1} < \epsilon$ y $n_1 \geqslant 2$. Sea $r \in \omega$ tal que $x_{\restriction r} \in \alpha_{n_1}$. Como $n_1 \neq 0$, tenemos que $r \neq 0$, pues si $r = 0$, entonces $x_{\restriction 0} = \emptyset \in \alpha_{n_1}$, por lo que $\alpha_{n_1} = \alpha_0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $r \geqslant 1$, entonces existe el elemento $x_{\restriction r-1}$.

Como $A(x_{\restriction r-1}) = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_{x_{\restriction r-1}}} U_k^{x_{\restriction r-1}}$, con $diam(U_k^{x_{\restriction r-1}}) < \frac{1}{n_1-1+1} = \frac{1}{n_1} < \epsilon$. En particular, $diam(A(x_{\restriction r})) < \frac{1}{n_1} < \epsilon$. Para concluir la afirmación, sólo debemos de probar la siguiente observación.

Observación(3): Para cada $\tilde{k} \in \omega \setminus \{0\}$, $A(x_{\restriction_{r+\tilde{k}}}) \subseteq A(x_{\restriction r})$. Efectivamente, probaremos esta observación aplicando el principio de inducción. Por un lado, si $\tilde{k} = 1$, tenemos que:

$$A(x_{\restriction r}) = \bigcup_{i=1}^{\tilde{n}_{x_{\restriction r}}} U_i^{x_{\restriction r}} \supseteq A(x_{\restriction r+1}).$$

Por lo tanto, $A(x_{\restriction_{r+\tilde{k}}}) \subseteq A(x_{\restriction r})$ para $\tilde{k} = 1$.

Por otro lado, suponga que para $\tilde{k} \in \omega \backslash \{0\}$, tenemos que $A(x\restriction_{r-\tilde{k}}) \subseteq A(x\restriction_r)$, entonces:

$$A(x\restriction_r) \supseteq A(x\restriction_{r+\tilde{k}}) = \bigcup_{i=1}^{\tilde{n}_{x\restriction_{r+\tilde{k}}}} U_i^{x\restriction_{r+\tilde{k}}} \supseteq A(x\restriction_{r+\tilde{k}+1}).$$

Por lo tanto, $A(x\restriction_r) \supseteq A(x\restriction_{r+\tilde{k}+1})$. Con lo que se tiene el resultado de la observación.

De esta manera, por la Observación (3), si $n > r$, entonces existe $\tilde{k} \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $r+\tilde{k} = n$, luego $A(x\restriction_n) = A(x\restriction_{r+\tilde{k}}) \subseteq A(x\restriction_r)$, por lo que $diam(A(x\restriction_n)) \leqslant diam(A(x\restriction_r)) < \frac{1}{n_1} < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_n diam(A(x\restriction_n)) = 0$. □

Por lo tanto, el esquema de Hausdorff A tiene su función continua asociada $\phi : Z(A) \to X$. Además, A también cumple la siguiente propiedad.

4.2.16. Lema. *Para cada* $s \in 2^{<\omega}$,

$$A(s) = A(s^\wedge 0) \cup A(s^\wedge 1) \text{ } y \text{ } A(s^\wedge 0) \cap A(s^\wedge 1) = \emptyset.$$

Demostración. Sea $s \in \{0,1\}^{<\omega}$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $s \in \alpha_k$. Si $k = 0$, entonces $s \in \alpha_0 = \{\emptyset\}$, luego $s = \emptyset$ y $\emptyset \in \mathcal{NT}(\alpha_0)$, por lo que

$$A(\emptyset^\wedge(0)) = A(0) = U_2^\emptyset \cup \ldots \cup U_{\tilde{n}_\emptyset}^\emptyset \text{ y } A(\emptyset^\wedge(1)) = A(1) = U_1^\emptyset.$$

De esta manera, se tiene que $A(0) \cap A(1) = \emptyset$. Además, por definición, tenemos que:

$$A(\emptyset) = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_\emptyset} U_k^{\tilde{n}_\emptyset} = A(0) \cup A(1).$$

Por otro lado, suponga que $k \geqslant 1$, entonces existe el conjunto α_{k-1}. Luego,

$$s \in \alpha_k = \bigcup_{\tau \in \mathcal{NT}(\alpha_{k-1})} [\{\tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) | 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 1\} \cup \{\tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) | 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 2\}].$$

Entonces existe $\tau \in \mathcal{NT}(\alpha_{k-1})$ tal que:

$$s = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \text{ para alguna } 1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 1$$

$$\text{ó } s = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1) \text{ para alguna } 0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 2.$$

Enseguida consideraremos los siguientes casos.

Caso(1): $s = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 1$. En este caso consideraremos los siguientes subcasos.

Subcaso(1): $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 2$. Entonces $\tau^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(i+1)-veces} = s^\wedge(0)$, por lo que $1 < 2 \leqslant i+1 \leqslant \tilde{n}_\tau - 1$. Luego $A(s^\wedge(0)) = A(\tau^\wedge \underbrace{(0,\ldots,0)}_{(i+1)-veces}) = U^\tau_{i+2} \cup \ldots \cup U^\tau_{\tilde{n}_\tau}$.

Por otro lado, $s^\wedge(1) = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$, entonces $A(s^\wedge(1)) = A(\tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)) = U^\tau_{i+1}$. Por lo tanto,

$$A(s^\wedge(1)) = U^\tau_{i+1} \text{ y } A(s^\wedge(0)) = U^\tau_{i+2} \cup \ldots \cup U^\tau_{\tilde{n}_\tau},$$

por lo que $A(s^\wedge(1)) \cap A(s^\wedge(0)) = \emptyset$.

Además, como $s = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})$ para alguna $1 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 2 < \tilde{n}_\tau - 1$, entonces $A(s) = A(\tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces})) = U^\tau_{i+1} \cup \ldots \cup U^\tau_{\tilde{n}_\tau} = A(s^\wedge(1)) \cup A(s^\wedge(0))$. Por lo tanto, se tiene el resultado de la para este subcaso.

Subcaso(2): $i = \tilde{n}_\tau - 1$. Entonces $s = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces}) \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$. Luego $A(s) = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_s} U^s_k$. Además, $A(s^\wedge(0)) = U^s_2 \cup \ldots \cup U^s_{\tilde{n}_s}$ y $A(s^\wedge(1)) = U^s_1$. Por lo tanto,

$$A(s) = A(s^\wedge(0)) \cup A(s^\wedge(1)) \text{ y } A(s^\wedge(0)) \cap A(s^\wedge(1)) = \emptyset.$$

Por lo que se tiene el resultado del lema para este subcaso. Luego, el lema se cumple para este primer caso.

Caso(2): $s = \tau^\wedge(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-veces},1)$ para alguna $0 \leqslant i \leqslant \tilde{n}_\tau - 2$. Entonces $s \in \mathcal{NT}(\alpha_k)$. Luego $A(s^\wedge(0)) = U^s_2 \cup \ldots \cup U^s_{\tilde{n}_s}$ y $A(s^\wedge(1)) = U^s_1$. Por lo tanto,

$$A(s^\wedge(0)) \cap A(s^\wedge(1)) = \emptyset \text{ y } A(s) = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_s} U^s_k = A(s^\wedge(0)) \cup A(s^\wedge(1)).$$

Por lo tanto, se tiene el lema. □

A continuación probaremos que el dominio $Z(A)$ del esquema de Hasudorff es todo $\mathcal{C}$.

4.2.17. Lema. $Z(A) = \mathcal{C}$.

Demostración. Obviamente, $Z(A) \subseteq \mathcal{C}$. Por otro lado, sea $x \in \mathcal{C}$. Haremos ver que la sucesión de conjuntos $\{A(x{\restriction_n})\}_{n\in\omega}$ cumple las hipótesis del teorema 1.2.20. Obviamente, d es una métrica completa que induce a X. También, note que $\{A(x{\restriction_n})\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos, pues para cada $n \in \omega$, $A(x{\restriction_n}) \neq \emptyset$. Además, como para cada $n \in \omega$, $x{\restriction_{n+1}} \supsetneq x{\restriction_n}$, tenemos que $A(x{\restriction_{n+1}}) \subseteq A(x{\restriction_n})$ (ver la Observación(3) del lema 4.2.15). También se tiene que $\lim_n d(A(x{\restriction_n})) = 0$. Luego, $\{A(x{\restriction_n})\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos cuyos diámetros convergen a 0, cuando n tiende a infinito. Por lo cual, existe $w \in X$ tal que $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$ (ver teorema 1.2.20). Por lo tanto, $\bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n}) \neq \emptyset$. Es decir, $x \in Z(A)$. De esta manera, se concluye que $Z(A) = \mathcal{C}$. □

Con todo lo que hemos demostrado a lo largo de esta sección, hemos probado el siguiente lema que utilizaremos en la demostración del teorema de Brouwer.

4.2.18. Lema. *Existe un esquema de Hausdorff $A : \{0,1\}^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$ tal que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\lim_n diam(A(x{\restriction_n})) = 0$.
2. *Para cada $s \in 2^{<\omega}$, $A(s) = A(s^\frown 0) \cup A(s^\frown 1)$ y $A(s^\frown 0) \cap A(s^\frown 1) = \emptyset$.*
3. $Z(A) = \mathcal{C}$.

Ahora, procedemos a probar el teorema de Brouwer.

4.2.19. Teorema. *Todo espacio métrico no vacío compacto cero-dimensional y perfecto es homeomorfo al espacio de Cantor.*

Demostración. Sea $\emptyset \neq X$ un espacio métrico con métrica d compacto cero-dimensional y perfecto.

Tomamos un esquema de Hausdorff A que cumple las propiedades del lema 4.2.18. Se tiene que la función asociada continua ϕ es de la forma $\phi : Z(A) = \mathcal{C} \to X$. Probaremos que ϕ es un homeomorfismo.

AFIRMACIÓN(1): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in \mathcal{C}$ tales que $x \neq y$. Definimos $n \in \omega$ como el mínimo tal que $x(n) \neq y(n)$. Entonces $x{\restriction_n} = y{\restriction_n}$. Suponga que $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x) \in \bigcap_{n\in\omega} A(x{\restriction_n})$ y $\phi(y) \in \bigcap_{n\in\omega} A(y{\restriction_n})$. De esta manera, tenemos que $A(x{\restriction_n}) = A(y{\restriction_n}) = A(x{\restriction_{n+1}}) \cap A(y{\restriction_{n+1}})$, entonces $\phi(x) = \phi(y) \in A(x{\restriction_{n+1}}) \cap A(y{\restriction_{n+1}})$, lo que es una contradicción (ver el lema anterior). Por lo tanto, $\phi(x) \neq \phi(y)$. ⊠

AFIRMACIÓN(2): ϕ es sobreyectiva.

En efecto: Sea $p \in X$. Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento $x \in \mathcal{C}$ tal que $\phi(x) = p$. Como:

$$X = A(\emptyset) = \bigcup_{s \in \alpha_1} A(s) = A(\emptyset^\frown 0) \cup A(\emptyset^\frown 1),$$

entonces existe $s_1 \in \alpha_1$ tal que $p \in A(s_1)$. Definimos:

$$\mathcal{A}_2 = \{s \in \{0,1\}^{<\omega} \mid p \in A(s); s \supseteq s_1\}.$$

Note que $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$, pues $s_1 \in \mathcal{A}_2$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}_2$ definimos la relación R:

- Sean $s, t \in \mathcal{A}_2$. Escribiremos sR_2t si:
  1. $s \supseteq t$,
  2. $l(s) = l(t) + 1$.

Sea $t \in \mathcal{A}_2$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $t \in \alpha_k$ y $p \in A(t) = A(t^\frown 0) \cup A(t^\frown 1)$. Definimos $s = t^\frown 0$ ó $s = t^\frown 1$ tal que $p \in A(s)$. Note que $s \in \mathcal{A}_2$ y sRt. De esta manera, el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f_2 : \omega \to \mathcal{A}_2$ tal que:

$$\forall n \in \omega : \; f_2(n+1) R_2 f_2(n).$$

Sea $\sigma = \bigcup_{n \in \omega} f_2(n)$. Observe que $\sigma \in \mathcal{C}$ es tal que para cada $m \in \omega$, $p \in A(\sigma\restriction_m)$. Luego, $\phi(\sigma) = p$. Por lo tanto, ϕ es sobreyectiva. ⊠

De esta manera, tenemos una función biyectiva continua $\phi : \mathcal{C} \to X$. Como $\mathcal{C}$ es compacto y X es métrico, y por ende X es Hausdorff, entonces ϕ es un homeomorfismo entre $\mathcal{C}$ y X. □

4.3 Algunas otras propiedades del espacio 2^ω

Iniciamos esta sección con algunas observaciones.

4.3.1. *Observación.* Si X es un espacio topológico finito discreto con al menos dos puntos distintos entonces X^ω es un espacio métrico compacto cero-dimensional y perfecto.

DEMOSTRACIÓN. Suponga que $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ para alguna $k \geqslant 2$ y con X dotado con la topología discreta. Como todo espacio que tiene la topología discreta es a su vez un espacio métrico, se tiene que X^ω es un espacio métrico.

AFIRMACIÓN(1): X^ω es perfecto.

En efecto: Suponga que existe $x \in X^\omega$ un punto aislado de X^ω, entonces $\{x\}$ es un abierto en X^ω, luego existe $m \in \omega$ tal que $B_{x\restriction_m} \subseteq \{x\}$. Note que $m-1 \geqslant 0$. Pues si $m=0$, se tiene que $X^\omega = B_{x\restriction_0} \subseteq \{x\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $m-1 \geqslant 0$. Sea $y' \in X \setminus \{x(m)\}$ fija. Definimos $y \in X^\omega$ la función dada por:

$$y(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in \omega \setminus \{m\} \\ y' & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Note que $y \in B_{x\restriction_m}$, pero $y \neq x$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, X^ω es perfecto.
⊠

Procedemos a aplicar el teorema 2.2.16 para probar que X^ω es compacto. Para esto, definimos:

$$A = \{s \in X^{<\omega} \mid l(s) = n \in \omega \setminus \{0\}, \forall j \in \{0, \dots, n-1\};\ s(j) \in X\} \cup \{\emptyset\}.$$

AFIRMACIÓN(2): A es un árbol.

En efecto: Sean $s \in A$ y $0 \leqslant n < l(s)$. Por un lado, si $n = 0$, se tiene que $s\restriction_0 = \emptyset \in A$. Mientras que si $n \neq 0$. Sea $j \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces $s\restriction_n(j) = s(j) \in X$. Por lo tanto, $s\restriction_n \in A$. De esta manera, se concluye que A es un árbol. ⊠

AFIRMACIÓN(3): A es un árbol bien podado.

En efecto: Sea $s \in A$. Por un lado, si $s = \emptyset$, entonces (x_1) es un extensión impropia de longitud mayor a la de s. Mientras que si $s \in A \setminus \{\emptyset\}$, entonces $s \in X^{<\omega}$ tal que $l(s) = n$ para alguna $n \in \omega \setminus \{0\}$. Luego, para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $s(j) \in X$. Sea $\rho \in X$ fijo. Definimos la función $t : \{0, \dots, n\} \to X$ dada por:

$$t(j) = \begin{cases} s(j) & \text{si } j \in \{0, \dots, n-1\} \\ \rho & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Observe ahora que $t \in A$ y t es una extensión de longitud mayor que la de s. ⊠

AFIRMACIÓN(4): A está finitamente ramificado.

En efecto: Sea $s \in A$. Por un lado, si $s = \emptyset$, tenemos que $(x_1), \dots, (x_k)$ son todas las extensiones inmediatamente posteriores a $\emptyset$. Mientras que si $s \in A \setminus \{\emptyset\}$ tal que $l(s) = n$ para alguna $n \in \omega \setminus \{0\}$. Sea t un extensión inmediatamente posterior a s. Como X es finito y $t(n) \in X$, entonces solamente existe una cantidad finita de opciones para t. Por lo tanto, A está finitamente ramificado. $\boxtimes$

Las afirmaciones (2)-(4) implican que $[A]$ es compacto (ver teorema 2.2.16).

AFIRMACIÓN(5): $[A] = X^\omega$.

En efecto: Obviamente $[A] \subseteq X^\omega$. Por otro lado, observe que $\emptyset \in [A]$. Con esto en mente, sea $x \in X^\omega \setminus \{\emptyset\}$, entonces para cada $n \in \omega$, $x(n) \in X$. En particular, para $m \in \omega$ fija, tenemos que para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, $x_{\restriction m}(j) \in X$. Luego, $x_{\restriction m} \in A$. Por lo tanto, $x \in [A]$. $\boxtimes$

De esta manera, se concluye que X^ω es compacto. Además, como el conjunto:

$$\mathcal{B} = \{B_{x_{\restriction n}} \mid x \in X^\omega \text{ y } n \in \omega\}$$

es una base para X^ω conformado por abierto-cerrados, se concluye que X^ω es un espacio cero-dimensional. $\square$

4.3.2. *Observación.* Si X es un espacio topológico finito discreto con al menos dos puntos distintos entonces X^ω es homeomorfo al espacio de Cantor. En particular, para cada $n \in \omega \setminus \{0, 1\}$, tenemos que $n^\omega \cong \mathcal{C}$.

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes de esta sección. En él se demuestra esencialmente que el espacio de Cantor es un subespacio de todo espacio polaco no vacío.

4.3.3. Teorema. *Todo espacio polaco perfecto no vacío contiene un subespacio homeomorfo al espacio de Cantor.*

DEMOSTRACIÓN. Sean X un espacio polaco perfecto no vacío y d una métrica completa sobre X que induce a la topología de X. La idea central de la demostración es contruir un esquema de Hausdorff que cumpla la condición de diámetros de tal forma que su función continua asociada garantice el resultado del teorema. Para esto, primero probaremos la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $\epsilon > 0$ y para cada $\emptyset \neq A \subseteq X$ abierto, existen $\emptyset \neq A_1$ y $\emptyset \neq A_2$ abiertos tales que:

1. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

2. $\overline{A_1} \subseteq A$ y $\overline{A_2} \subseteq A$.

3. $diam(A_1) < \epsilon$ y $diam(A_2) < \epsilon$.

En efecto: Sean $\epsilon > 0$ y $\emptyset \neq A \subseteq X$ abierto. Note que la cardinalidad del conjunto A es mayor o igual a 2. Pues si $A = \{x\}$, entonces x es un punto aislado de la topología de X, lo que es una contradicción, por lo tanto la cardinalidad de A es mayor o igual que 2.

Con lo anterior en mente, sean $x, y \in A$ tales que $x \neq y$. Como A es abierto, tenemos que existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_{r_1}(x) \subseteq A$ y $B_{r_2}(y) \subseteq A$. Definimos $r = d(x,y) > 0$ y $\delta = \min\{r_1, r_2, \frac{r}{2}, \frac{\epsilon}{2}\}$. Tenemos que $\emptyset \neq B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ y $\emptyset \neq B_{\frac{\delta}{2}}(y)$ y ambos son abiertos. Probaremos que $B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ y $B_{\frac{\delta}{2}}(y)$ satisfacen las propiedades de la afirmación.

Primero observe que $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(y) = \emptyset$. Pues si suponemos que existe $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(y)$, entonces $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(x) \subseteq B_\delta(x) \subseteq B_{\frac{r}{2}}(x)$ y $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(y) \subseteq B_\delta(y) \subseteq B_{\frac{r}{2}}(y)$. Luego, $d(z,x) < \frac{r}{2}$ y $d(z,y) < \frac{r}{2}$, por lo que:

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \tfrac{r}{2} + \tfrac{r}{2} = r = d(x,y),$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \cap B_{\frac{\delta}{2}}(y) = \emptyset$.

Por otro lado, note que $\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x)} \subseteq A$ y $\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(y)} \subseteq A$. Pues $\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x)} \subseteq B_\delta(x) \subseteq B_{r_1}(x) \subseteq A$ y $\overline{B_{\frac{\delta}{2}}(y)} \subseteq B_\delta(y) \subseteq B_{r_2}(y) \subseteq A$. Además, tenemos que $diam(B_{\frac{\delta}{2}}(x)) = \delta \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ y $diam(B_{\frac{\delta}{2}}(y)) = \delta \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Por lo tanto, existen $\emptyset \neq A_1 = B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ y $\emptyset \neq A_2 = B_{\frac{\delta}{2}}(y)$ abiertos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\overline{A_1} \subseteq A_1$, $\overline{A_2} \subseteq A$, $diam(A_1) < \epsilon$ y $diam(A_2) < \epsilon$. ⊠

Enseguida procedemos a construir un esquema de Hausdorff que cumple la condición de diámetros aplicando el principio de elecciones dependientes. Primero definimos la función $A_0 : \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X)$ dada por: $A_0(\emptyset) = X$.

Como $\emptyset \neq X$ es un abierto entonces la Afirmación(1) implica que existen X_0 y X_1 abiertos no vacíos tales que:

1. $X_0 \cap X_1 = \emptyset$.
2. $\overline{X_0} \subseteq X$ y $\overline{X_1} \subseteq X$.
3. $diam(X_0) < 1$ y $diam(X_1) < 1$.

Con esto en mente, definimos $A_1 : 2^0 \cup 2^1 \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$A_1(s) = \begin{cases} X & \text{si } s = \emptyset \\ X_0 & \text{si } s = (0) \\ X_1 & \text{si } s = (1). \end{cases}$$

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las funciones de la forma $\alpha : 2^0 \cup \ldots \cup 2^m \to \mathcal{P}(X)$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\alpha(\emptyset) = X$.
  2. $\forall s \in 2^1 \cup \ldots \cup 2^m :\ d(\alpha(s)) < \frac{1}{l(s)}$.
  3. $\forall s \in 2^0 \cup \ldots \cup 2^m :\ \alpha(s)$ es un abierto no vacío en X.
  4. $\forall s \in 2^0 \cup \ldots \cup 2^{m-1} :\ \alpha(s^\wedge 0) \cap \alpha(s^\wedge 1) = \emptyset$.
  5. $\forall s \in 2^0 \cup \ldots \cup 2^{m-1} :\ \overline{\alpha(s^\wedge 0)} \subseteq \alpha(s)$ y $\overline{\alpha(s^\wedge 1)} \subseteq \alpha(s)\}$.

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $A_1 \in \mathcal{A}$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $\alpha : 2^0 \cup \ldots \cup 2^{m_1} \to \mathcal{P}(X), \beta : 2^0 \cup \ldots \cup 2^{m_2} \to \mathcal{P}(X)$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos $\alpha R \beta$ si:

  1. $\alpha \supseteq \beta$,
  2. $m_1 = m_2 + 1$.

Sea $\beta : 2^0 \cup \ldots \cup 2^m \to \mathcal{P}(X)$ elemento del conjunto $\mathcal{A}$, construiremos un elemento α tal que $\alpha R \beta$. Para ello, primero note que la Afirmación(1) garantiza que:

$$\emptyset \neq \{\{F_1^s\}_{i\in\{0,1\}} \mid F_o^s,\ F_1^s \text{ son abiertos no vacíos tales que } F_0^s \cap F_1^s = \emptyset,$$

$$\overline{F_0^s} \subseteq \beta(s),\ \overline{F_1^s} \subseteq \beta(s),\ diam(F_0^s) < \tfrac{1}{m+1},\ diam(F_1^s) < \tfrac{1}{m+1}\}.$$

También tenemos que el conjunto:

$$\{\{\{F_1^s\}_{i\in\{0,1\}} \mid F_o^s,\ F_1^s \text{ son abiertos no vacíos tales que } F_0^s \cap F_1^s = \emptyset,$$

$$\overline{F_0^s} \subseteq \beta(s),\ \overline{F_1^s} \subseteq \beta(s),\ diam(F_0^s) < \tfrac{1}{m+1},\ diam(F_1^s) < \tfrac{1}{m+1}\} \mid s \in 2^m\}$$

es a lo más infinito numerable. Luego, el axioma de elección para conjuntos numerables garantiza que para cada $s \in 2^m$, podemos tomar un único elemento $\{F_i^s\}_{i\in\{0,1\}}$. De esta manera, definimos la función $\alpha : 2^0 \cup \ldots \cup 2^m \cup 2^{m+1} \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$\alpha(s) = \begin{cases} \beta(s) & \text{si } s \in 2^0 \cup \ldots \cup 2^m \\ F_{s(m)}^{s\restriction m} & \text{si } s \in 2^{m+1}. \end{cases}$$

Observe ahora que $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\alpha R \beta$. Por lo tanto, por el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega :\ f(n+1) R f(n).$$

Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. Tenemos que A es un esquema de Hausdorff, es decir A es una función de la forma $A = \bigcup_{n\in\omega} f(n) : 2^{<\omega} \to \mathcal{P}(X)$.

AFIRMACIÓN(2): A cumple la condición de diámetros.

En efecto: Sean $x \in \mathcal{C}$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \omega\setminus\{0\}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Sea $n > N$, entonces $x\restriction_n = f(n)\restriction_n \in \omega^n$, por lo que $diam(A(x\restriction_n)) = diam(A(f(n)\restriction_n)) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$. Por lo tanto, $\lim_n diam(A(x\restriction_n)) = 0$. $\boxtimes$

Como el esquema de Hausdorff cumple la condición de diámetros, entonces existe su función continua asociada $\phi : \mathcal{C} \to X$.

AFIRMACIÓN(3): $Z(A) = \mathcal{C}$.

En efecto: Sea $x \in \mathcal{C}$. Probaremos que la sucesión de conjuntos $\{\overline{A(x\restriction_n)}\}_{n\in\omega}$ satisface las hipótesis del teorema 1.2.20. Tenemos que d es una métrica completa que induce a la topología de X. También note que la sucesión de conjuntos $\{\overline{A(x\restriction_n)}\}_{n\in\omega}$ está conformado de conjuntos cerrados no vacíos, pues para cada $n \in \omega$, $A(x\restriction_n) \neq \emptyset$. Por otro lado, como para cada $n \in \omega$, $x\restriction_{n+1} \supsetneq x\restriction_n$, tenemos que $\overline{A(x\restriction_{n+1})} \subseteq A(x\restriction_n) \subseteq \overline{A(x\restriction_n)}$. Además, tenemos que para cada $n \in \omega$, $diam(A(x\restriction_n)) = diam(\overline{A(x\restriction_n)})$ y $\lim_n d(A(x\restriction_n)) = 0$, se concluye que $\{\overline{A(x\restriction_n)}\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos cuyos diámetros convergen a 0, cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, existe $w \in X$ tal que $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)}$ (ver teorema 1.2.20).

Procedemos a probar que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)} = \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Efectivamente, primero observemos que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)} \supseteq \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Por otro lado, sean $z \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)}$ y $n \in \omega\setminus\{0\}$, como $x\restriction_n \subsetneq x\restriction_{n+1}$, entonces $z \in \overline{A(x\restriction_{n+1})} \subseteq A(x\restriction_n)$. Luego, $z \in \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Por lo tanto, $\{w\} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x\restriction_n)} = \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Es decir, $\bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n) \neq \emptyset$. De esta manera, se concluye que $x \in Z(A)$. Mientras que obviamente $Z(A) \subseteq \mathcal{C}$ $\boxtimes$

La Afirmación (3) implica que la función continua asociada es de la forma $\phi : \mathcal{C} \to X$.

AFIRMACIÓN(4): ϕ es inyectiva.

En efecto: Sean $x, y \in \mathcal{C}$ tales que $x \neq y$. Suponga que $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x) \in \bigcap_{n\in\omega} A(y\restriction_n)$ y $\phi(y) \in \bigcap_{n\in\omega} A(x\restriction_n)$. Por otro lado, sea $n \in \omega$ el mínimo tal que $x(n) \neq y(n)$. Entonces tenemos que $A(x\restriction_n^\wedge x(n)) \cap A(y\restriction_n^\wedge y(n)) = \emptyset$. Pero $\phi(x) = \phi(y) \in A(y\restriction_n^\wedge y(n))$ y $\phi(y) = \phi(x) \in A(x\restriction_n^\wedge x(n))$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\phi(x) \neq \phi(y)$. $\boxtimes$

De esta manera, tenemos que $\phi : \mathcal{C} \to X$ es una función continua inyectiva, y como $\mathcal{C}$ es compacto, concluimos que $\mathcal{C} \cong \phi(\mathcal{C}) \subseteq X$. $\square$

Para terminar este capítulo, veremos una relación importante que existe entre el espacio de Baire y un cierto subespacio del espacio de Cantor. Pero para esto último, procedemos a demostrar ciertas propiedades de la siguiente relación.

4.3.4. Definición. Definimos la relación $f : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ dada por:

$$\forall x \in \mathcal{C} : \ f(x) : \omega \to \{0,1\} \text{ es una función dada por:}$$

- Si $j \in [0, x_0 - 1] \cap \omega$ entonces $f(x)(j) = 0$.
- Si $j \in (x_0 + \ldots + x_m + m, x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$, entonces $f(x)(j) = 0$.
- Si $j = x_0 + \ldots + x_m + m$ para alguna $m \in \omega$, entonces $f(x)(j) = 1$,

donde para cada $j \in \omega$, $x_j = x(j)$.

Para facilitar la discusión, a lo largo de esta sección f denotará la relación anterior.

4.3.5. Lema. *La relación f es una función.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{N}$. Para facilitar la notación, para cada $m \in \omega$, denotaremos:

$$\mathcal{Z}_m = (x_0 + \ldots + x_m + m, x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + m] \cap \omega,$$

$$\mathcal{Y}_m = \{x_0 + \ldots + x_m + m\}.$$

Para probar que f es una función, sólo bastará observar que para cada $x \in \mathcal{N}$, $f(x)$ es una función de la forma $f(x) : \omega \to \{0,1\}$. Esto último se hará ver con las siguientes afirmaciones.

AFIRMACIÓN(1): Para cada $M \in \omega \setminus \{0\}$,

$$[0, x_0 - 1] \cup [\bigcup_{0 \leqslant m < M} \mathcal{Z}_m] \cup [\bigcup_{0 \leqslant m < M} \{x_0 + \ldots + x_m + m\}] \cap \omega = [0, x_0 + \ldots + x_M + M - 1] \cap \omega$$

En efecto: Probaremos esta afirmación por inducción sobre $M \in \omega \setminus \{0\}$. Para $M = 1$, tenemos que:

$$[0, x_0 - 1] \cup (x_0, x_0 + x_1 + 0] \cup \{x_0\} \cap \omega = [0, x_0 - 1] \cup [x_0, x_0 + x_1] \cap \omega = [0, x_0 + x_1] \cap \omega,$$

por lo que se cumple para $M = 1$.

Por otro lado, suponga que para $M \in \omega \setminus \{0\}$ se cumple que:

$$[0, x_0 - 1] \cup [\bigcup_{0 \leqslant m < M} \mathcal{Z}_m] \cup [\bigcup_{0 \leqslant m < M} \{x_0 + \ldots + x_m + m\}] \cap \omega = [0, x_0 + \ldots + x_M + M - 1] \cap \omega.$$

Note ahora que:

$$[0,x_0-1]\cup[\bigcup_{0\leqslant m<M+1}\mathcal{Z}_m]\cup[\bigcup_{0\leqslant m<M+1}\mathcal{Y}_m]\cap\omega=$$

$$[0,x_0-1]\cup[\bigcup_{0\leqslant m<M}\mathcal{Z}_m]\cup[\bigcup_{0\leqslant m<M}\mathcal{Y}_m]\cup\mathcal{Z}_M\cup\mathcal{Y}_M\cap\omega=$$

$$[0,x_0+\ldots+x_M+M-1]\cup\mathcal{Z}_M\cup\mathcal{Y}_M\cap\omega=$$

$$[0,x_0+\ldots+x_M+x_{M+1}+M]\cap\omega.$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(2): $[0,x_0-1]\cup[\bigcup_{m\in\omega}\mathcal{Z}_m]\cup[\bigcup_{m\in\omega}\mathcal{Y}_m]\cap\omega=\omega$.

En efecto: Obviamente, $[0,x_0-1]\cup[\bigcup_{m\in\omega}\mathcal{Z}_m]\cup[\bigcup_{m\in\omega}\mathcal{Y}_m]\cap\omega\subseteq\omega$. Por otro lado, sea $j\in\omega$, la Afirmación (1) implica que:

$$j\in[0,x_0+\ldots+x_{j+1}+(j+1)-1]\cap\omega=[0,x_0-1]\cup[\bigcup_{0\leqslant m<j+1}\mathcal{Z}_m]\cup[\bigcup_{0\leqslant m<j+1}\mathcal{Y}_m]\cap\omega$$

$$\subseteq[0,x_0-1]\cup[\bigcup_{m\in\omega}\mathcal{Z}_m]\cup[\bigcup_{m\in\omega}\mathcal{Y}_m]\cap\omega.$$

$\boxtimes$

De esta manera, la Afirmación (2) garantiza que para cada $x\in\mathcal{N}$ y para cada $j\in\omega$, existe $i\in\{0,1\}$ tal que $f(x)(j)=i$.

Ahora, para ver que para cada $x\in\mathcal{N}$ y para cada $j\in\omega$, $f(x)(j)$ es un único valor bien definido, probaremos que los conjuntos sobre el cual se definió $f(x)$ son disjuntos dos a dos. Para ello, demostraremos las siguientes afirmaciones.

AFIRMACIÓN(3): Para cada $m\in\omega$, se cumple que:

$$[0,x_0-1]\cap(x_0+\ldots+x_m+m,x_0+\ldots+x_m+x_{m+1}+m]=\emptyset.$$

En efecto: Suponga que existe un elemento

$$j\in[0,x_0-1]\cap(x_0+\ldots+x_m+m,x_0+\ldots+x_m+x_{m+1}+m],$$

entonces $x_0\leqslant x_0+\ldots+x_m+m<j\leqslant x_0-1<x_0$, lo que es una contradicción. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(4): Para cada $m\in\omega$, se cumple que:

$$[x_0-1]\cap\{x_0+\ldots+x_m+m\}=\emptyset.$$

En efecto: Suponga que $[x_0 - 1] \cap \{x_0 + \ldots + x_m + m\} \neq \emptyset$, entonces

$$x_0 \leqslant x_0 + \ldots + x_m + m \leqslant x_0 - 1 < x_0,$$

lo que es una contradicción. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(5): Para cada $m_1, m_2 \in \omega$ tales que $m_1 < m_2$, se cumple que:

$$(x_0+\ldots+x_{m_1}+m_1, x_0+\ldots+x_{m_1+1}+m_1] \cap (x_0+\ldots+x_{m_2}+m_2, x_0+\ldots+x_{m_2+1}+m_2] = \emptyset$$

En efecto: Sean $m_1, m_2 \in \omega$ tales que $m_1 < m_2$. Suponga que existe un elemento

$$j \in (x_0+\ldots+x_{m_1}+m_1, x_0+\ldots+x_{m_1+1}+m_1] \cap (x_0+\ldots+x_{m_2}+m_2, x_0+\ldots+x_{m_2+1}+m_2],$$

entonces $x_0 + \ldots + x_{m_2} + m_2 < j \leqslant x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1$. Luego,

$$x_{m_1+1} + m_2 \leqslant x_{m_1+1} + \ldots + x_{m_2} + m_2 < x_{m_1+1} + m_1.$$

De esta manera, tenemos que $m_2 < m_1$, lo que contradice nuestra hipótesis. $\boxtimes$

AFIRMACIÓN(6): Para cada $m_1, m_2 \in \omega$, se cumple que:

$$(x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1, x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1] \cap \{x_0 + \ldots + x_{m_2}\} = \emptyset.$$

En efecto: Sean $m_1, m_2 \in \omega$. Para probar esta afirmación, consideraremos los siguientes tres casos.

Caso(1): $m_1 = m_2$. Suponga que:

$$(x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1, x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1] \cap \{x_0 + \ldots + x_{m_2}\} \neq \emptyset,$$

entonces:

$$x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1 < x_0 + \ldots + x_{m_2} + m_2 = x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1,$$

lo que es una contradicción.

Caso(2): $m_1 < m_2$. Suponga que:

$$(x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1, x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1] \cap \{x_0 + \ldots + x_{m_2}\} \neq \emptyset,$$

entonces $x_0 + \ldots + x_{m_2} + m_2 \leqslant x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1$. Luego,

$$x_{m_1+1} + m_2 \leqslant x_{m_1+1} + \ldots + x_{m_2} + m_2 \leqslant x_{m_1+1} + m_1,$$

por lo que $m_2 \leqslant m_1$, lo que es una contradicción.

Caso(3): $m_2 < m_1$. Suponga que:

$$(x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1, x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1] \cap \{x_0 + \ldots + x_{m_2}\} \neq \emptyset,$$

entonces $x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1 < x_0 + \ldots + x_{m_2} + m_2$. Luego,

$$m_1 \leqslant x_{m_2+1} + \ldots + x_{m_1} + m_1 < m_2,$$

por lo que $m_1 < m_2$, lo que es una contradicción a la hipótesis.

Por lo tanto, los tres casos anteriores garantizan que:

$$(x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1, x_0 + \ldots + x_{m_1} + x_{m_1+1} + m_1] \cap \{x_0 + \ldots + x_{m_2}\} = \emptyset. \qquad \boxtimes$$

AFIRMACIÓN(7): Para cada $m_1, m_2 \in \omega$ tales que $m_1 < m_2$, se cumple que:

$$\{x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1\} \cap \{x_0 + \ldots + x_{m_2}\} = \emptyset.$$

En efecto: Suponga que $x_0 + \ldots + x_{m_1} + m_1 = x_0 + \ldots + x_{m_2} + m_2$, entonces $m_1 = x_{m_1+1} + \ldots + x_{m_2} + m_2 \geqslant m_2$, entonces $m_1 \geqslant m_2$, lo que es una contradicción a la hipótesis. $\boxtimes$

Las afirmaciones (3)-(7) implican que dado un elemento $j \in \omega$, $f(x)(j)$ es único. Por lo tanto, para cada $x \in \mathcal{N}$, $f(x) \in \mathcal{C}$. $\square$

En algunos lemas posteriores, probaremos ciertas propiedades de la función f.

4.3.6. Lema. *f es inyectiva.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $x \neq y$. Definimos $j_0 \in \omega$ como el mínimo tal que $x(j_0) \neq y(j_0)$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x(j_0) < y(j_0)$. Probaremos que $f(x) \neq f(y)$.

Caso(1): $j_0 = 0$. Entonces $x(0) < y(0)$, luego $f(x)(x(0)) = 1$. Mientras que $f(y)(x(0)) = 0$, pues $y(0)$ es el mínimo natural tal que $f(y)(y(0)) = 1$ y puesto que $x(0) < y(0)$. Por lo tanto, $f(x) \neq f(y)$ si $j_0 = 0$.

Caso(2): $j_0 \in \omega\backslash\{0\}$. Note que $f(x)(x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0) = 1$. Queremos probar que $f(y)(x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0) = 0$. Efectivamente, suponga que $f(y)(x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0) = 1$, entonces:

$$x(0) + \ldots + x(j_0) + j_0 = y(0)$$

$$\text{ó } x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0 = y(0)+\ldots+y(m)+m \text{ para alguna } m\in\omega.$$

Demostraremos que en ambas opciones se tiene una contradicción.

Si $x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0 = y(0)$, entonces $x(0) < x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0$, pues $j_0 \in \omega\setminus\{0\}$. Luego, $x(0) < x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0 = y(0)$. Es decir, $x(0) < y(0)$, lo que es una contradicción a la hipótesis de que j_0 es el mínimo natural tal que $x(j_0)\neq y(j_0)$, pues $j_0 > 0$. Por lo tanto, $x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0 \neq y(0)$.

Entonces, se tiene que $x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0 = y(0)+\ldots+y(m)+m$ para alguna $m\in\omega$. Consideraremos los siguientes subcasos, cada una de las cuales implican una contradicción.

Subcaso(1): $m = j_0$. Como j_0 es el mínimo natural tal que $x(j_0)\neq y(j_0)$ y como $x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0 = y(0)$. Entonces $x(j_0)+j_0 = y(m)+m$, luego $x(j_0)=y(j_0)$, lo que es una contradicción.

Subcaso(2): $0 < j_0 < m$. Entonces $x(j_0)+j_0 = y(j_0)+\ldots+y(m)+m > y(j_0)+j_0$. Luego, $x(j_0) > y(j_0)$, lo que es una contradicción, pues supusimos que $x(j_0) < y(j_0)$.

Subcaso(3): $m < j_0$. Entonces $j_0 \leqslant x(m+1)+\ldots+x(j_0)+j_0 = m$, luego $j_0\leqslant m$, lo que es una contradicción, pues $m < j_0$.

De esta manera, concluimos que:

$$f(y)(x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0) = 0 \text{ y } f(x)(x(0)+\ldots+x(j_0)+j_0) = 1.$$

Por lo tanto, $f(x)\neq f(y)$. □

Definimos el conjunto $\mathcal{C}_0 = \bigcap_{n\in\omega}\{y\in\mathcal{C} \mid \exists m > n \text{ tal que } y(m)=1\}$. En los siguientes lemas veremos algunas propiedades del conjunto $\mathcal{C}_0$ que nos serán de utilidad para probar el teorema.

4.3.7. Lema. *Se tiene que $\mathcal{C}_0$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $n\in\omega$ fija. Probaremos que el conjunto:

$$\Delta_n = \{y\in\mathcal{C} \mid \exists m > n \text{ tal que } y(m)=1\} \text{ es un abierto.}$$

Si $\Delta_n = \emptyset$, entonces se tiene el resultado. Por otro lado, suponga que $\Delta_n\neq\emptyset$, sea $\tilde{y}\in\Delta_n$. Definimos $m_0\in\omega$ como el mínimo mayor que n tal que $\tilde{y}(m_0)=1$.

Observe que $B_{\tilde{y}\restriction_{m_0+1}} \subseteq \Delta_n$. Efectivamente, sea $z\in B_{\tilde{y}\restriction_{m_0+1}}$, entonces $z\restriction_{m_0+1} = \tilde{y}\restriction_{m_0+1}$, por lo que $z(m_0)=\tilde{y}(m_0)=1$. Además, $m_0 > n$, luego $z\in\Delta_n$. Por lo tanto, $B_{\tilde{y}\restriction_{m_0+1}}\subseteq\Delta_n$. De esta manera, se concluye que $\mathcal{C}_0$ es un conjunto G_δ de $\mathcal{C}$. □

4.3.8. Lema. *Se tiene que* $f[\mathcal{N}] = \mathcal{C}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in \mathcal{C}_0$, entonces para cada $n \in \omega$ existe $m(n) > n$ tal que $y(m) = 1$. Aplicaremos el principio de elecciones dependientes para construir un elemento en $x \in \mathcal{N}$ tal que $f(x) = y$. Definimos $\alpha_0 \in \omega$ como el mínimo tal que $y(\alpha_0) = 1$.

- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son todas las sucesiones de la forma $\{B_n\}_{n\leqslant m}$ $(m \in \omega \setminus \{0\})$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

  1. $\forall n \leqslant m: \ B_n \in \omega$.
  2. $B_0 = \alpha_0$.
  3. Si para $n < m$, B_n está definida. Entonces $B_{n+1} = m(B_n)$, donde $m(B_n) \in \omega$ mínimo mayor que B_n tal que $y(m(B_n)) = 1$.

Sea $m(\alpha_0)$ el mínimo mayor que α_0 tal que $y(m(\alpha_0)) = 1$. De esta manera, definimos la sucesión $\{B_n\}_{n\leqslant 1}$ dada por:

$$B_n = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } n = 0 \\ m(\alpha_0) & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Note que $\{B_n\}_{n\leqslant 1} \in \mathcal{A}$, por lo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sobre el conjunto $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $\{\gamma_n\}_{n\leqslant m_1}, \{\beta_n\}_{n\leqslant m_2}$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos

$$\{\alpha_n\}_{n\leqslant m_1} R \ \{\beta_n\}_{n\leqslant m_2}$$

  si:

  1. $\{\alpha_n\}_{n\leqslant m_1} \supseteq \{\beta_n\}_{n\leqslant m_2}$,
  2. $m_1 = m_2 + 1$.

Sea $\{\beta_n\}_{n\leqslant m} \in \mathcal{A}$. Note que el elemento $\beta_m \in \omega$ es el mínimo mayor que β_{m-1} tal que $y(\beta_m) = 1$. Sea γ el mínimo mayor que β_m tal que $y(\gamma) = 1$. Con esto en mente, definimos $\{\gamma_n\}_{n\leqslant m+1}$ dada por:

$$\gamma_n = \begin{cases} \beta_n & \text{si } n \leqslant m \\ \gamma & \text{si } n = m + 1. \end{cases}$$

Observe ahora que $\{\gamma_n\}_{n\leqslant m+1} R \{\beta_n\}_{n\leqslant m}$. Luego el principio de elecciones dependientes garantiza que existe una función $g : \omega \to \mathcal{A}$ tal que:

$$\forall n \in \omega: \ g(n+1) R g(n).$$

Definimos $\{\chi_m\}_{m\in\omega} = \bigcup_{n\in\omega} g(n)$. Note que $\chi(0) = \alpha_0$.

Por otro lado, para facilitar la demostración, definimos la función $m(\ ) : \omega \to \omega$ dada por:

$$\forall k \in \omega : \ m(k) \text{ es el mínimo mayor que k tal que } y(m(k)) = 1.$$

Observe que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\chi_n = m^n(\alpha_0)$. Efectivamente, probaremos esta observación por inducción. Tenemos que $\chi_1 = m(\alpha_0)$. Por otro lado, suponga que $\chi_n = m^n(\alpha_0)$ es verdadero. Por definición, tenemos que $\chi_{n+1} = m(\chi_n) = m(m^n(\alpha_0)) = m^{n+1}(\alpha_0)$. Por lo tanto, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\chi_n = m^n(\alpha_0)$.

Con lo anterior en mente, definimos la relación x dada por:

- $x(0) = \chi(0) = \alpha_0$
- Si para $m \in \omega \setminus \{0\}$, los elementos $x(0), \ldots, x(m-1)$ están definidos, entonces:

$$x(m) = \chi(m) - x(0) - \ldots - x(m-1) - m.$$

Enseguida probaremos que $x \in \omega^\omega$. Sólo bastará probar que para cada $n \in \omega$, $x(n) \in \omega$. Haremos ver esto último por inducción. Obviamente, tenemos que $x(0) = \chi(0) = \alpha_0 \in \omega$. Por otro lado, suponga que para $m \in \omega \setminus \{0\}$, $x(0), \ldots, x(m-1) \in \omega$, probaremos que $x(m) \in \omega$. Efectivamente, tenemos que $x(m) = \chi(m) - x(0) - \ldots - x(m-1) - m$. Por un lado, si $m = 1$, tenemos que $\chi(1) > \chi(0) = x(0)$, entonces $\chi(1) \geqslant x(0) + 1$, por lo que $x(1) = \chi(1) - x(0) - 1 \geqslant 0$. Por otro lado, si $m \in \omega \setminus \{0\}$, entonces $m - 1 > 0$, luego $m - 2 \geqslant 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} x(m) &= \chi(m) - x(0) - \ldots - x(m-1) - m \\ &= \chi(m) - x(0) - \ldots - x(m-2) \\ &\quad -[\chi(m-1) - x(0) - \ldots - x(m-2) - (m-1)] \\ &= \chi(m) - \chi(m-1) + m - 1, \end{aligned}$$

pero $\chi(m) > \chi(m-1)$. Luego $\chi(m) \geqslant \chi(m-1) + 1$, por lo que:

$$x(m) = \chi(m) - \chi(m-1) - 1 + m \geqslant m \geqslant 0.$$

Por lo tanto, $x(m) \in \omega$. De esta manera, se concluye que x es una función de la forma $x : \omega \to \omega$.

A continuación demostraremos que $f(x) = y$. Para ello, probaremos que para cada $j \in \omega$, $f(x)(j) = y(j)$. Efectivamente, sea $j \in \omega$, consideraremos los siguientes casos:

Caso(1): $j \in [0, x_0 - 1] \cap \omega$. Entonces $f(x)(j) = 0$. Por otro lado, tenemos que $j \leqslant x_0 - 1 < x(0) = \alpha_0$, entonces $y(j) = 0$. Por lo tanto, si $j \in [0, x_0 - 1]$, $f(x)(j) = 0 = y(j)$.

Caso(2): $j \in (x_0+\ldots+x_m+m, x_0+\ldots+x_m+x_{m+1}+m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$. Entonces $f(x)(j) = 0$. Queremos probar que $y(j) = 0$. Para ello, suponemos que $y(j) = 1$ y consideraremos los siguientes subcasos.

Subcaso(1): $m = 0$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_0 & = & x(0) \\
& < & j \\
& \leqslant & x(0) + x(1) \\
& = & x(0) + \chi(1) - x(0) - 1 \\
& = & \chi(1) - 1 \\
& < & \chi(1),
\end{array}$$

luego $\chi(0) = \alpha_0 < j < \chi(1)$. Como $y(j) = 1$ y como $j > \chi(0)$, entonces $j \geqslant \chi(1)$, por lo que $\chi(1) > \chi(1)$, lo que es una contradicción.

Subcaso(2): $m \in \omega \setminus \{0\}$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\chi(m) & = & x(0) + \ldots + x(m-1) + [\chi(m) - x(0) - \ldots - x(m-1) - m] + m \\
& = & x(0) + \ldots + x(m-1) + x(m) + m \\
& < & j \\
& \leqslant & x(0) + \ldots + x(m) + x(m+1) + m \\
& = & x(0) + \ldots + x(m) + [\chi(m+1) - x(0) - \ldots - x(m) - (m+1)] + m \\
& = & \chi(m+1) - 1 \\
& < & \chi(m+1),
\end{array}$$

por lo que $\chi(m) < j < \chi(m+1)$. Como $y(j) = 1$ y $\chi(m) < j$, entonces $\chi(m+1) \leqslant j < \chi(m+1)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, en este caso, concluimos que $y(j) = 0 = f(x)(j)$.

Caso(3): $j = x(0) + \ldots + x(m) + m$ para alguna $m \in \omega$. Entonces $f(x)(j) = 1$. Por un lado, si $m = 0$, entonces $j = x(0) = \alpha_0$, por lo que $y(j) = 1$. Mientras que si $m \in \omega \setminus \{0\}$, entonces:

$$\begin{array}{rcl}
j & = & x(0) + \ldots + x(m-1) + x(m) + m \\
& = & x(0) + \ldots + x(m-1) + [\chi(m) - x(0) - \ldots - x(m-1) - m] + m \\
& = & \chi(m),
\end{array}$$

por lo que $y(j) = 1$.

Los casos anteriores garantizan que $f(x) = y$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_0 \subseteq f[\mathcal{N}]$.

Enseguida, probaremos que $f[\mathcal{N}] \subseteq \mathcal{C}_0$. Efectivamente, sea $a \in f[\mathcal{N}]$, entonces existe $x \in \mathcal{N}$ tal que $f(x) = a$. De esta manera, tenemos que:

- $a(j) = 0$, si $j \in [0, x_0 - 1] \cap \omega$.
- $a(j) = 0$, si $j \in (x_0 + \ldots + x_m + m, x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$.
- $a(j) = 1$, si $j = x_0 + \ldots + x_m + m$ para alguna $m \in \omega$.

Queremos probar que $a \in \mathcal{C}_0$. Para ello, sea $n \in \omega$. Si $n \in [0, x_0 - 1]$, entonces $a(n) = 0$. Definimos $m = x(0)$, luego $a(m) = 1$ y $m > n$. Mientras que si $n \in (x_0 + \ldots + x_m + m, x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$, definimos $k = x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + (m+1)$, luego $a(k) = 1$ y $k > n$. Por último, si $n = x_0 + \ldots + x_m + m$ para alguna $m \in \omega$, definimos $k = x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + (m+1)$, luego $a(k) = 1$ y $k > n$. Por lo tanto, $a \in \mathcal{C}_0$. Es decir, $f[\mathcal{N}] \subseteq \mathcal{C}_0$

Por lo tanto, concluimos que $f[\mathcal{N}] = \mathcal{C}_0$. □

Definimos el conjunto $\mathcal{B} = \{B_s \cap \mathcal{C}_0 \mid s \in 2^{<\omega};\ s \text{ termina en } 1\}$.

4.3.9. Lema. *El conjunto $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{C}_0$, donde $\mathcal{C}_0$ tiene la topología relativa con respecto a la de $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $A \neq \emptyset$ un abierto en $\mathcal{C}_0$ y $z \in A$. Entonces existe D abierto en $\mathcal{C}$ tal que $A = D \cap \mathcal{C}_0$, luego $z \in D$, por lo que sabemos que existe $n \in \omega$ tal que $B_{z\restriction_n} \subseteq D$. De esta manera, $A = D \cap \mathcal{C}_0 \supseteq B_{z\restriction_n} \cap \mathcal{C}_0$. Como $z \in \mathcal{C}_0$, entonces existe $m > n - 1$ tal que $z(m) = 1$. Definimos $m_0 \in \omega$ como el mínimo mayor que $n - 1$ tal que $z(m_0) = 1$. Note que $z(m_0) = 1$, es decir $z\restriction_{m_0+1} \in 2^{<\omega}$ y termina en 1.

Además, observe que $B_{z\restriction_{m_0+1}} \subseteq B_{z\restriction_n}$. Pues si $y \in B_{z\restriction_{m_0+1}}$, entonces $y\restriction_{m_0+1} = z\restriction_{m_0+1}$. Luego, para cada $j \in \{0, \ldots, m_0\}$, $y(j) = z(j)$. Como $n - 1 < m_0$, se tiene que $n \leqslant m_0$. Entonces, tenemos que para cada $j \in \{0, \ldots, n\}$, $y(j) = z(j)$. Por lo tanto, $B_{z\restriction_{m_0+1}} \subseteq B_{z\restriction_n}$.

De esta manera, tenemos que $z \in B_{z\restriction_{m_0+1}} \cap \mathcal{C}_0 \subseteq B_{z\restriction_n} \cap \mathcal{C}_0 \subseteq A$. Con lo que se concluye que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{C}_0$. □

4.3.10. Lema. *La función f es continua.*

Demostración. Sea $s \in 2^{<\omega}$ tal que s termina en 1. Por el lema anterior, bastará probar que $f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0]$ es un abierto. Suponga que $l(s) = \{0, \ldots, n-1\}$ para alguna $n \in \omega$. Tenemos que $s(n-1) = 1$, por lo que $n-1 \geqslant 0$. Sea $\Delta = \{k \in \{0, \ldots, n-1\} \mid s(k) = 1\}$. Note que $\Delta \neq \emptyset$, pues $s(n-1) = 1$. Por otro lado, como $\Delta \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$, se tiene que Δ es finito y distinto del vacío. De esta manera, es posible la siguiente definición $\Delta = \{\chi_0, \ldots, \chi_k\}$ para alguna $k \in \omega$, donde:

- χ_0 es el mínimo de Δ.
- Si para $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, χ_j está definido, entonces χ_{j+1} es el mínimo elemento de Δ mayor que χ_j.

Observe que $\chi_k = n - 1$. Ahora, definimos la relación t dada por:

- $t(0) = \chi_0$.
- Si para $m \in \{0, \ldots, k-1\}$ tenemos definidos $t(0), \ldots, t(m)$, entonces:

$$t(m+1) = \chi_{m+1} - t(0) - \ldots - t(m) - (m+1).$$

Probaremos que t es una función de la forma $t : \{0, \ldots, k\} \to \omega$. Sea $m \in \{0, \ldots, k\}$. Bastará demostrar que $t(m) \in \omega$, esto último lo haremos notar por inducción. Efectivamente, note primero que $t(0) = \chi_0 \in \omega$. Por otro lado, suponga que para $m \in \{0, \ldots, k-1\}$ se cumple que $t(0), \ldots, t(m) \in \omega$. Observe ahora que:

$$t(m+1) = \chi_{m+1} - t(0) - \ldots - t(m) - (m+1) \in \omega.$$

Pues si $m = 0$, entonces $t(1) = \chi_1 - t(0) - 1 = \chi_1 - \chi_0 - 1 \geqslant 0$. Mientras que si $m \in \{1, \ldots, k-1\}$, entonces:

$$\begin{aligned} t(m+1) &= \chi_{m+1} - t(0) - \ldots - t(m) - (m+1) \\ &= \chi_{m+1} - t(0) - \ldots - t(m-1) \\ &\quad -[\chi_m - t(0) - \ldots - t(m-1) - m] - (m+1) \\ &= \chi_{m+1} - \chi_m - 1 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Luego, $t(m+1) \in \omega$. De esta manera, se concluye que $t : \{0, \ldots, k\} \to \omega$ es una función. Luego, $t \in \omega^{<\omega}$.

Note que para probar la continuidad de f, bastará ahora ver que $f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0] = B_t$.

Sea $a \in f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0]$. Entonces $f(a) \in B_s \cap \mathcal{C}_0$. Primero notemos que $f(a) : \omega \to \{0, 1\}$ está dada por:

- $f(a)(i) = 0$, si $i \in [0, a_0 - 1] \cap \omega$.
- $f(a)(i) = 0$, si $i \in (a_0 + \ldots + a_m + m, a_0 + \ldots + a_m + a_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$.
- $f(a)(i) = 1$, si $i = a_0 + \ldots + a_m + m$ para alguna $m \in \omega$.

Por hipótesis, tenemos que $f(a)\restriction_n = s$, entonces si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, se tiene que $f(a)(i) = s(i)$.

Queremos probar que para cada $j \in \{0, \ldots, k\}$, se cumple que $a(j) = t(j)$, esto último lo haremos por inducción. Pero, antes de proceder a probarlo, demostraremos la siguiente observación.

Observación(1): Para cada $m \in \{0, \ldots, k\}$, $\chi_m = a(0) + \ldots + a(m) + m$.

Efectivamente, haremos ver esta observación aplicando inducción. Primero veremos que $a(0) = t(0)$. Como $\chi_0 \leqslant n-1$, entonces $f(a)(\chi_0) = s(\chi_0) = 1$, luego $f(a)(\chi_0) = 1$. De esta manera, $\chi_0 = a(0)+\ldots+a(m)+m$ para alguna $m \in \omega$. Si suponemos que $m > 0$, tenemos que $n-1 \geqslant \chi_0 = a(0) + \ldots + a(m) + m > a(0)$, por lo que $1 = f(a)(a(0)) = s(a(0))$, luego $s(a(0)) = 1$. Pero χ_0 es el mínimo natural tal que $s(\chi_0) = 1$. Por lo que $a(0) \geqslant \chi_0 > a(0)$, lo que es una contradicción. Por lo que se concluye que $m = 0$.

Por otro lado, suponga que para $m \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\chi_m = a(0) + \ldots + a(m) + m$. Entonces $\chi_{m+1} > \chi_m = a(0)+\ldots+a(m)+m$ es el mínimo tal que $s(\chi_{m+1}) = 1$. Además, $\chi_{m+1} \leqslant n-1$, por lo que $f(a)(\chi_{m+1}) = s(\chi_{m+1}) = 1$, entonces $\chi_{m+1} = a(0)+\ldots+a(\tilde{n})+\tilde{n}$ para alguna $\tilde{n} \in \omega$. Pero:

$$\begin{aligned} a(0) + \ldots + a(\tilde{n}) + \tilde{n} &= \chi_{m+1} \\ &> \chi_m \\ &= a(0) + \ldots + a(m) + m, \end{aligned}$$

por lo que $a(0) + \ldots + a(\tilde{n}) + \tilde{n} > a(0) + \ldots + a(m) + m$. Demostraremos que $\tilde{n} = m+1$. Si suponemos que $\tilde{n} < m+1$, entonces $\tilde{n} \leqslant m$, y como:

$$a(0) + \ldots + a(\tilde{n}) + \tilde{n} > a(0) + \ldots + a(m) + m,$$

tenemos que $a(\tilde{n}) + \tilde{n} > a(\tilde{n}) + \ldots + a(m) + m \geqslant a(\tilde{n}) + m$, entonces $\tilde{n} > m$. De esta manera, se tiene que $\tilde{n} \geqslant m+1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\tilde{n} \geqslant m+1$.

Por otro lado, si $\tilde{n} > m+1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} n-1 &\geqslant \chi_{m+1} \\ &= a(0) + \ldots + a(\tilde{n}) + \tilde{n} \\ &> a(0) + \ldots + a(m+1) + (m+1) \\ &> a(0) + \ldots + a(m) + m \\ &= \chi_m, \end{aligned}$$

por lo que $s(a(0) + \ldots + a(m+1) + (m+1)) = f(a(0) + \ldots + a(m+1) + (m+1)) = 1$, pero ya hicimos notar que $\chi_{m+1} > a(0) + \ldots + a(m+1) + (m+1) > \chi_m$, por lo que se tiene que $s(a(0) + \ldots + a(m+1) + (m+1)) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\tilde{n} \leqslant m+1$.

Luego, $\tilde{n} \leqslant m+1$ y $m+1 \leqslant \tilde{n}$, por lo que $\tilde{n} = m+1$. De esta manera, hemos probado que para cada $m \in \{0,\ldots,k\}$, $\chi_m = a(0)+\ldots+a(m)+m$. Por lo tanto, la observación es verdadera.

De esta manera, por la Observación (1), tenemos que $\chi_0 = a(0)+\ldots+a(m)+m = a(0)$, pero $t(0) = \chi_0$. Por lo tanto, $t(0) = a(0)$.

Por otro lado, suponga que para $m \in \{0,\ldots,k-1\}$ se cumple que:

$$a(0) = t(0), \ldots, a(m) = t(m).$$

Entonces $a(m+1) = t(m+1)$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} t(m+1)+t(0)+\ldots+t(m)+(m+1) & = & \chi_{m+1} \\ & = & a(0)+\ldots+a(m+1)+(m+1), \end{array}$$

por lo que $t(m+1) = a(m+1)$. Por lo tanto, $a \in B_t$. Con lo que se concluye que $f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0] \subseteq B_t$.

Ahora, probaremos que $B_t \subseteq f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0]$. Efectivamente, sea $a \in B_t \subseteq \mathcal{N}$. Obviamente, se tiene que $f(a) \in \mathcal{C}_0$, pues $f[\mathcal{N}] = \mathcal{C}_0$. Por lo que bastará probar que $f(a) \in B_s$. Recordemos que $l(s) = \{0,\ldots,n-1\}$. Además, la función $f(a) : \omega \to \{0,1\}$ está dada por:

- $f(a)(j) = 0$, si $j \in [0, a_0 - 1] \cap \omega$.
- $f(a)(j) = 0$, si $j \in (a_0+\ldots+a_m+m, a_0+\ldots+a_m+a_{m+1}+m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$.
- $f(a)(j) = 1$, si $j = a_0+\ldots+a_m+m$ para alguna $m \in \omega$.

Se probará que $f(a)\restriction_n = s$. Sea $j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Por una lado, si $j \in \Delta$. Como para cada $m \in \{0,\ldots,k\}$, $\chi_m = t(0)+\ldots+t(m)+m$ y como $a \in B_t$. Tenemos que $a\restriction_{l(t)} = a\restriction_{\{0,\ldots,k\}} = t$. Luego, $\chi_m = t(0)+\ldots+t(m)+m = a(0)+\ldots+a(m)+m$, entonces para cada $m \in \{0,\ldots,k\}$, $f(a)(\chi_m) = f(a)(a(0)+\ldots+a(m)+m) = 1$ y $s(\chi_m) = 1$. Luego, para cada $m \in \{0,\ldots,k-1\}$, $f(a)(\chi_m) = s(\chi_m)$.

Por otro lado, si $j \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \Delta = l(s) \setminus \Delta$, entonces $s(j) = 0$. Como $j \in l(s) \setminus \Delta$ y $\chi_k = n-1 > j$, entonces existe $\chi_{k_0} \in \Delta$el mínimo tal que $\chi_{k_0} > j$. En este punto consideramos los siguientes casos.

Caso(1): $k_0 = 0$. Entonces $a(0) = \chi_0 > j$, luego $a(0) > j$, por lo que $0 \leqslant j \leqslant a(0)-1$. Por lo tanto, $f(a)(j) = 0 = s(j)$.

Caso(2): $k_0 \neq 0$. Entonces $k_0 - 1 \geqslant 0$. Se tiene que $\chi_{k_0-1} < j$, pues $\chi_{k_0} \in \Delta$ es el mínimo tal que $\chi_{k_0} > j$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} a(0) + \ldots + a(k_0 - 1) + (k_0 - 1) & = & \chi(k_0 - 1) \\ & < & j \\ & < & \chi(k_0) \\ & = & a(0) + \ldots + a(k_0) + k_0, \end{array}$$

entonces $a(0) + \ldots + a(k_0 - 1) + (k_0 - 1) < j \leqslant a(0) + \ldots + a(k_0) + (k_0 - 1)$. Luego, $f(a)(j) = 0$.

De esta manera, se tiene que $f(a)_{\restriction n} = s$. Luego, $B_t \subseteq f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0]$.

Como $\mathcal{B} = \{B_s \cap \mathcal{C}_0 \mid s \in 2^{<\omega};\ s \text{ termina en } 1\}$ es base para $\mathcal{C}_0$, $f[\mathcal{N}] = \mathcal{C}_0$ y para cada $s \in 2^{<\omega}$ que termina en 1 existe $t \in \omega^{<\omega}$ tal que $B_t = f^{-1}[B_s \cap \mathcal{C}_0]$, se concluye que f es una función continua. □

Como ya probamos que f es continua e inyectiva, entonces para probar que f es un homemorfismo sobre su imagen $\mathcal{C}_0$, bastará demostrar que f es una función abierta sobre su imagen.

4.3.11. Lema. *La función f es abierta.*

Demostración. Sea $t \in \omega^{<\omega}$. Para demostrar que f es abierta, bastará ver que $f[B_s]$ es un conjunto abierto en $\mathcal{C}_0$. Con esto en mente, observe primero que $f[B_\emptyset] = f[\mathcal{N}] = \mathcal{C}_0$, por lo que en este caso, f manda al abierto $B_\emptyset$ a un abierto en la topología de $\mathcal{C}_0$.

Por otro lado, suponga que $t \in \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ es tal que $l(t) = \{0, \ldots, n-1\}$ para alguna $n \in \omega \setminus \{0\}$. Entonces $n - 1 \geqslant 0$. Definimos $s \in 2^{<\omega}$ dada por:

- $s(j) = 0$, si $j \in [0, t_0 - 1] \cap \omega$.
- $s(j) = 0$, si $j \in (t_0 + \ldots + t_m + m, t_0 + \ldots + t_m + t_{m+1} + m] \cap [0, t_0 + \ldots + t_{n-1} + (n-1)] \cap \omega$ para alguna $m \in \{0, \ldots, n-1\}$.
- $s(j) = 1$, si $j = t_0 + \ldots + t_m + m$ para alguna $m \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Queremos probar que $f[B_t] = B_s \cap \mathcal{C}_0$. Efectivamente, sea $a \in f[B_t]$, entonces existe $b \in B_t$ tal que $f(b) = a$, de esta forma $b_{\restriction n} = t$. Mientras que $f(b) : \omega \to \{0, 1\}$ está dada por:

- $f(b)(j) = 0$, si $j \in [0, b_0 - 1] \cap \omega$.
- $f(b)(j) = 0$, si $j \in (b_0 + \ldots + b_m + m, b_0 + \ldots + b_m + b_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$.
- $f(b)(j) = 1$, si $j = b_0 + \ldots + b_m + m$ para alguna $m \in \omega$.

Observación(1): Observe que $f(b){\restriction}_{l(s)} = s$. Pues si $j \in l(s)$, entonces tenemos los siguientes tres casos.

Caso(1): $j \in [0, t_0 - 1] \cap \omega$. Entonces $s(j) = 0$. Por otro lado, como $b \in B_t$, entonces $b(0) = t(0)$. De esta manera, $j \in [0, b(0) - 1] \cap \omega$, por lo que $f(b)(j) = 0 = s(j)$.

Caso(2): $j \in (t_0 + \ldots + t_m + m, t_0 + \ldots + t_m + t_{m+1} + m] \cap [0, t_0 + \ldots + t_{n-1} + (n-1)] \cap \omega$ para alguna $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces $s(j) = 0$. Como $b \in B_t$ y $l(t) = \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que para cada $\tilde{m} \in \{0, \ldots, n-1\}$, $b(\tilde{m}) = t(\tilde{m})$. De esta manera, tenemos que:

$$j > t(0) + \ldots + t(m) + m = b(0) + \ldots + b(m) + m.$$

Queremos probar que $m + 1 \leqslant n - 1$. Primero suponga que $m + 1 > n - 1$, entonces $m \geqslant n - 1$, y como $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que $m = n - 1$, entonces:

$$t(0) + \ldots + t(n-1) + (n-1) < j \leqslant t(0) + \ldots + t(n-1) + (n-1),$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $m + 1 \leqslant n - 1$. Luego,

$$t(0) + \ldots + t(m) + m = b(0) + \ldots + b(m) + m$$

$$\text{y } t(0) + \ldots + t(m) + t(m+1) + m = b(0) + \ldots + b(m+1) + m,$$

por lo que $b(0) + \ldots + b(m) + m < j \leqslant b(0) + \ldots + b(m+1) + m$. De esta manera, en este caso, se tiene que $f(b)(j) = 0 = s(j)$.

Caso(3): $j = t_0 + \ldots + t_m + m$ para alguna $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Entonces $s(j) = 1$. Como $b \in B_t$ y $l(t) = \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $t(0) = b(0), \ldots, t(m) = b(m)$. Luego $j = b(0) + \ldots + b(m) + m$. De esta manera, tenemos que $f(b)(j) = 1$.

Los tres casos anteriores garantizan que para cada $j \in l(s)$, $f(b){\restriction}_{l(s)}(j) = s(j)$. Por lo tanto, $f(b){\restriction}_{l(s)} = s$. Es decir, $f[B_t] \subseteq B_s \cap \mathcal{C}_0$.

Por otro lado, procedemos a probar que $B_s \cap \mathcal{C}_0 \subseteq f[B_t]$. Para ello, sea $a \in B_s \cap \mathcal{C}_0$. Como $a \in \mathcal{C}_0 = f[\mathcal{N}]$, entonces existe $b \in \mathcal{N}$ tal que $f(b) = a \in B_s$.

Observación(2): Se tiene que $b \in B_t$. Efectivamente, note primero que $f(b)$ está dada de la siguiente manera:

- $a(j) = f(b)(j) = 0$, si $j \in [0, b_o - 1] \cap \omega$.
- $a(j) = f(b)(j) = 0$, si $j \in (b_0 + \ldots + b_m + m, b_0 + \ldots + b_m + b_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$.

- $a(j) = f(b)(j) = 1$, si $j = b_0 + \ldots + b_m + m$ para alguna $m \in \omega$.

Probaremos esta observación por inducción. Note primero que $t(0) = b(0)$. Pues si suponemos que $t(0) > b(0)$, entonces $b(0) \in [0, t(0)-1] \cap \omega \subseteq l(s)$. Luego $1 = f(b)(b(0)) = s(b(0)) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $t(0) \leqslant b(0)$.

Mientras que si $t(0) < b(0)$, entonces $t(0) \in [0, b(0) - 1]$. Luego $1 = s(t(0)) = f(b)(t(0)) = 0$, lo que es una contradicción, por lo que $t(0) \geqslant b(0)$. De esta manera, como $t(0) \leqslant b(0)$ y $b(0) \leqslant t(0)$, entonces $b(0) = t(0)$.

Como $t(0) = b(0)$. Tenemos que si $n - 1 = 0$, entonces $b_{\restriction 1} = t$.

Por otro lado, suponga que $n - 1 \geqslant 1$, entonces $n - 2 \geqslant 0$. Supóngase que para $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ se cumple que $b(0) = t(0), \ldots, b(j) = t(j)$. Queremos probar que $b(j+1) = t(j+1)$. Para ello, definimos $i = t(0) + \ldots + t(j+1) + (j+1)$, entonces $s(i) = 1$. Como $i \in l(s)$, tenemos que $f(b)(i) = 1$. También, se tiene que:

$$i = t(0) + \ldots + t(j+1) + (j+1) > t(0) + \ldots + t(j) + j = b(0) + \ldots + b(j) + j$$

De esta manera, si suponemos que $b(j+1) > t(j+1)$, entonces:

$$\begin{aligned} b(0) + \ldots + b(j+1) + (j+1) &> t(0) + \ldots + t(j+1) + (j+1) \\ &= i \\ &> b(0) + \ldots + b(j) + j. \end{aligned}$$

Luego $f(b)(i) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $b(j+1) \leqslant t(j+1)$.

Ahora, si suponemos que $b(j+1) < t(j+1)$, entonces:

$$b(0) + \ldots + b(j+1) < t(0) + \ldots + t(j+1)$$

Luego, $b(0) + \ldots + b(j+1) + 1 \leqslant t(0) + \ldots + t(j+1)$. Por lo que

$$b(0) + \ldots + b(j+1) + (j+1) \leqslant t(0) + \ldots + t(j+1) + j.$$

De esta manera, se tiene que:

$$\begin{aligned} t(0) + \ldots + t(j) + j &= b(0) + \ldots + b(j) + j \\ &< b(0) + \ldots + b(j+1) + (j+1) \\ &\leqslant t(0) + \ldots + t(j+1) + j. \end{aligned}$$

Luego,

$$1 = f(b)(b(0) + \ldots + b(j+1) + (j+1)) = s(b(0) + \ldots + b(j+1) + (j+1)) = 0,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $b(j+1) \geqslant t(j+1)$. De esta manera, se concluye que $t(j+1) = b(j+1)$. Por lo que $b \in B_t$. Es decir, $b \in B_t \cap \mathcal{C}_0$.

Por lo tanto, f es una función tal que para cada $t \in \omega^{<\omega}$ existe $s \in 2^{<\omega}$ tal que $f[B_t] = B_s \cap \mathcal{C}_0$. Es decir, f es una función abierta sobre su imagen. $\square$

Por lo tanto, con toda la discusión anterior se ha demostrado el siguiente teorema que esencialmente nos dice que el espacio de Baire es homeomorfo a un subespacio G_δ de 2^ω.

4.3.12. Teorema. *Si $f : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ es una relación dada por:*

$$\forall x \in \mathcal{C} : \ f(x) : \omega \to \{0,1\} \text{ es una función dada por:}$$

- *Si $j \in [0, x_0 - 1] \cap \omega$ entonces $f(x)(j) = 0$.*
- *Si $j \in (x_0 + \ldots + x_m + m, x_0 + \ldots + x_m + x_{m+1} + m] \cap \omega$ para alguna $m \in \omega$, entonces $f(x)(j) = 0$.*
- *Si $j = x_0 + \ldots + x_m + m$ para alguna $m \in \omega$, entonces $f(x)(j) = 1$,*

donde para cada $j \in \omega$, $x_j = x(j)$. Entonces f es un homeomorfismo sobre su imagen $f[\mathcal{N}] = \bigcap_{n\in\omega}\{y \in \mathcal{C} \mid \exists m > n \text{ tal que } y(m) = 1\}$ y $f[\mathcal{N}]$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{C}$.

Apéndice A

El principio de elecciones dependientes

En este apartado exponemos brevemente algunos hechos relacionados con el principio de elecciones dependientes.

Axioma de Elección (AE). Si A es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $s : A \to \bigcup A$ tal que

$$\forall a \in A : \ s(a) \in a.$$

Axioma de Elección Numerable (AEN). Si A es una familia a lo más infinita numerable y no vacía de conjuntos no vacíos, entonces existe una función $s : A \to \bigcup A$ tal que

$$\forall a \in A : \ s(a) \in a.$$

Principio de elecciones dependientes (ED). Para todo conjunto $A \neq \emptyset$ y toda relación $R \subseteq A \times A$ tal que

$$\forall a \in A \ \exists b \in A \text{ tal que } bRa,$$

existe una función $f : \omega \to A$ tal que

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1)Rf(n).$$

Recordemos que a lo largo de todo el trabajo, para nosotros el conjunto ω se refiere a los naturales incluyendo al número 0. Al conjunto $\omega \setminus \{0\}$ lo denotaremos por $\mathbb{N}$.

A continuación haremos notar que ED es una consecuencia de AE.

A.0.13. Teorema. *El axioma de elección implica el principio de elecciones dependientes.*

Demostración. Sean $A \neq \emptyset$ y $R \subseteq A \times A$ tal que

$$\forall a \in A\ \exists b \in A \text{ tal que } bRa.$$

Para cada $a \in A$, consideramos al conjunto $A_a = \{b \in A \mid bRa\}$.

Además definimos a la familia $\Delta = \{A_a \mid a \in A\}$. Como $A \neq \emptyset$, existe $\hat{a} \in A$, por ello tiene sentido tomar $A_{\hat{a}}$; por lo tanto $\Delta \neq \emptyset$.

Por otro lado, sea $a \in A$, entonces existe $b \in A$ tal que bRa, por lo que $b \in A_a$.

Por AE, tenemos que existe una función $s : \Delta \to \bigcup \Delta$ tal que

$$\forall B \in \Delta : \ s(B) \in B.$$

Como $A \neq \emptyset$, existe $\hat{a} \in A$.

Consideramos la función $f : \omega \to A$ dada de la siguiente manera:

- $f(0) = \hat{a}$
- Supóngase que $f(n)$ está definida, entonces $f(n+1) = s(A_{f(n)})$.

Sea $n \in \omega$, tenemos que $f(n+1) = s(A_{f(n)}) \in A_{f(n)}$, de aquí que $f(n+1)Rf(n)$.

Por lo tanto se tiene que AE implica ED. □

A.0.14. Definición. Sea A una familia d conjuntos. Una función de elección para A es una función $f : A \to \bigcup A$ tal que

$$(\forall x \in A, x \neq \emptyset)(f(x) \in x).$$

Si es que solamente queremos considerar ED en lugar de AE, el siguiente teorema nos será muy útil a lo largo de la discusión. Cabe mencionar que a partir de este punto las demostraciones de los teoremas se harán considerando únicamente ED, a menos que se diga lo contrario.

A.0.15. Teorema. *Habiendo ED, toda familia numerable no vacía de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia numerable no vacía de conjuntos no vacíos.

Caso(1): $\mathcal{A}$ es finita.

Si $|\mathcal{A}| = 1$, tendríamos que $\mathcal{A} = \{A\}$, donde $A \neq \emptyset$, entonces existe $a \in A$. Definimos $s : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ dada por $s(A) = a$.

Supóngase que para cada familia $\mathcal{A} \neq \emptyset$, con cardinalidad n, de conjuntos no vacíos existe una función $s_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ tal que

$$\forall A \in \mathcal{A} : \ s_{\mathcal{A}}(A) \in A.$$

Sea $\mathcal{B} \neq \emptyset$, con cardinalidad $n+1$, una familia de conjuntos no vacíos. Sabemos que para $|\mathcal{B}| = 1$ se satisface, así pues, supongamos que $n \geqslant 2$. Fijemos un elemento $B \in \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B} \setminus \{B\} \neq \emptyset$. Además $|\mathcal{B} \setminus \{B\}| = n$ y tiene conjuntos no vacíos, de aquí que exista una función $s : \mathcal{B} \setminus \{B\} \to \bigcup(\mathcal{B} \setminus \{B\})$ tal que

$$\forall b \in \mathcal{B} \setminus \{B\} : s(b) \in b$$

Como $B \neq \emptyset$, se tiene que existe $\beta \in B$. Definimos la función $\sigma : \mathcal{B} \to \bigcup \mathcal{B}$ dada por:

$$\sigma(b) = \begin{cases} s(b) & \text{si } b \in \mathcal{B} \setminus \{B\}, \\ \beta & \text{si } b = B. \end{cases}$$

Obteniendo de esta manera el resultado para familias finitas.

Caso(2): $\mathcal{A}$ es infinita.

Supóngase que $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\in\omega}$. Para cada $m \in \omega \setminus \{0\}$, $\mathcal{B}$ denotará a la familia de todas las funciones de elección sobre $\{A_0, \ldots, A_{m-1}\} \subseteq \mathcal{A}$.

Como $A_0 \neq \emptyset$, tenemos que existe $\hat{a} \in A_0$. Definimos la función $\hat{s} : \{A_0\} \to \bigcup \mathcal{A}$ dada por $\hat{s}(A_0) = \hat{a}$, por lo tanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Consideramos sobre $\mathcal{B}$ la relación R:

- Sean $h : \{A_0, \ldots, A_{m-1}\} \to \bigcup \mathcal{A}$, $g : \{A_0, \ldots, A_{n-1}\} \to \bigcup \mathcal{A}$ elementos del conjunto $\mathcal{B}$. Escribiremos hRg si y sólo si:
  1. $g \subseteq h$,
  2. $m = n + 1$.

Sea $g \in \mathcal{B}$. Supóngase que $g : \{A_0, \ldots, A_{m-1}\} \to \bigcup \mathcal{A}$. Como $A_m \neq \emptyset$, tenemos que existe $\hat{a} \in A_m$.

Definimos $h : \{A_0, \ldots, A_m\} \to \bigcup \mathcal{A}$ dada por:

$$h(A_j) = \begin{cases} g(A_j) & \text{si } j \in \{0, \ldots, m-1\}, \\ \hat{a} & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Observamos que $g \subseteq h$ y $h \in \mathcal{B}$. Así pues, por el Principio de Elecciones Dependientes, existe una función $f : \omega \to \mathcal{B}$ tal que

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1)Rf(n).$$

Tomamos en cuenta a $F = \bigcup_{n\in\omega} f(n) : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$. Es decir, si $a \in \mathcal{A}$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $F(a) = (f(n))(a)$. Note que F es una función, pues para cada $n \in \omega$, $f(n+1)Rf(n)$. Por lo tanto, se satisface que:

$$\forall A \in \mathcal{A} : \ F(A) \in A.$$

Por lo que $F : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$. es una función de elección sobre $\mathcal{A}$. □

El teorema anterior nos permite utilizar al axioma de elección numerable (AEN) en nuestra discusión. Como no suponemos AE, es importante precisar lo que es un conjunto infinito.

A.0.16. Definición. X es un *conjunto infinito* si no existen funciones biyectivas de X en un número natural.

Con esto en mente demostraremos el siguiente teorema.

A.0.17. Teorema. *Habiendo ED, todo conjunto infinito tiene un subconjunto infinito numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto infinito. Consideramos

$$\mathcal{A} = \{f : \{0, \ldots, n-1\} \to X | n \in \omega \setminus \{0\} \text{ y } f \text{ es inyectiva}\}.$$

Como X es infinito, $X \neq \emptyset$, por lo que existe $x \in X$. Notemos que la función $h : \{0\} \to X$ dada por $h(0) = x$ pertenece al conjunto $\mathcal{A}$.

Sobre $\mathcal{A}$ definimos la relación R:

- Sean $f : \{0, \ldots, n-1\} \to X$, $g : \{0, \ldots, m-1\} \to X$ elementos del conjunto $\mathcal{A}$. Escribiremos fRg si y sólo si:
  1. $f \supseteq g$,
  2. $n = m + 1$.

Sea $g : \{0, \ldots, n-1\} \to X \in \mathcal{A}$, entonces g es inyectiva. Note que si para toda $x \in X$ existe $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $g(j) = x$, entonces g sería biyectiva y, por lo tanto, X sería finito. Por lo cual existe $x \in X$ tal que $\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $g(j) \neq x$.

Definimos $h : \{0, \ldots, n\} \to X$ dada por:

$$h(j) = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \in \{0, \ldots, n-1\}, \\ x & \text{si } j = n. \end{cases}$$

Por ED, existe una función $f : \omega \to \mathcal{A}$ tal que

$$\forall n \in \omega : \; f(n+1) R f(n).$$

Tomemos $F = \bigcup_{n \in \omega} f(n) : \omega \to X$. Note que F es inyectiva, pues si $x, y \in \omega$ son tales que $F(x) = F(y)$, entonces existen $n_x, n_y \in \omega$ tales que $f(n_x)(x) = f(n_y)(y)$. Supóngase que $n_x \leqslant n_y$, por lo que $f(n_y)(y) = f(n_x)(x) = f(n_y)(x)$, y con ello, $x = y$. Observe ahora que $F[\omega] \subseteq X$ y que $\aleph_0 = |\omega| = |F[\omega]|$. □

A.0.18. Teorema. *Habiendo ED, toda unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Primero haremos la siguiente observación: Si X es un conjunto numerable, entonces ó existe una función $\phi : \omega \to X$ biyectiva ó existe una función $\phi : \{0, \ldots, n-1\} \to X$ biyectiva para alguna $n \in \omega$ (donde, para $n = 0$, $\{0, \ldots, n-1\} = \emptyset$). En ambos casos, la función ϕ es suprayectiva.

Sea $\{S_i\}_{i\in\omega}$ tal que para cada $i \in \omega$, S_i es numerable. Sea $S = \bigcup_{i\in\omega} S_i$. Como para cada $i \in \omega$, S_i es numerable, entonces para cada $i \in \omega$, tomamos una única función suprayectiva $\psi_i : \omega \to S_i$.

Consideramos la función $\psi : \omega \times \omega \to S$, dada por $\psi(i, n) = \psi_i(n)$, la cual es suprayectiva.

En la Sección 2.3 se prueba que existe una función que hace semejante a $\omega \times \omega$ con ω utilizando solamente ED, por lo que tendríamos que existe una función suprayectiva $\phi : \omega \to \omega \times \omega$. Consideramos $\psi \circ \phi : \omega \to S$, la cual sería suprayectiva. Por lo tanto, $|S| \leqslant |\omega| = \aleph_0$. □

La siguiente definición tiene cierta relación con ED, la cual se hará notar con el teorema que le sigue.

A.0.19. Definición. Una relación *bien fundada* sobre un conjunto X es una relación binaria R sobre X tal que para todo subconjunto no vacío S de X, hay un elemento m en S tal que ningún s en S cumple sRm.

A.0.20. Teorema. *Si A es un conjunto no vacío y $R \subseteq A \times A$ es una relación en A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R está bien fundada.

(2) No existe ninguna función $f : \omega \to A$ para la cual se cumpla que:

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1)Rf(n).$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2)] Supóngase que existe una función $f : \omega \to A$ tal que

$$\forall n \in \omega : \ f(n+1)Rf(n).$$

Entonces, $\emptyset \neq f[\omega] \subseteq A$. Si $m \in f[\omega]$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $f(n) = m$, por otro lado $f(n+1)Rf(n) = m$, por lo tanto, R no está bien fundada.

(2) $\Rightarrow$ (1)] Supóngase que existe $B \neq \emptyset$ y $B \subseteq A$ tal que

$$\forall m \in B \ \exists s \in B \text{ tal que } sRm.$$

Entonces B y $R \cap (B \times B)$ satisfacen la hipótesis de ED, así pues, existe una función $f : \omega \to B$ tal que

$$\forall n \in \omega : \; f(n+1) R f(n).$$

$\square$

Bibliografía

[1] Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer- Verlag. New York, Inc. 1995

[2] Carlos Ivorra Castillo, *Teoría Descriptiva de Conjuntos* [en línea] [fecha de consulta: 01 de Septiembre 2014] <www.uv.es/ivorra/Libros/TDC.pdf>

[3] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos (una introducción)*, Sociedad Matemática Mexicana, vol. 13 de la serie TEXTOS, 1998

[4] Fidel Casarrubias Segura; Ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de Topología General*, Sociedad Matemática Mexicana, vol. 37 de la serie TEXTOS, 2012

[5] G. Engelking,, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Verlag Helderman, 1989.

[6] S. M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Springer, 1998

[7] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc. 2004