



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS DE CONCRETO

ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS PARA EL MODELADO DEL  
PROCESO DE FALLA EN ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JUAN JESÚS GUTIÉRREZ TREJO

TUTORES PRINCIPALES:  
DR. GUSTAVO AYALA MILIÁN, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. JAIME RETAMA VELASCO, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D.F. OCTUBRE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Juan José Pérez Gavilán Escalante

Secretario: M. I. Octavio García Domínguez

Vocal: Dr. A. Gustavo Ayala Milián

1er. Suplente: Dr. Gelacio Juárez Luna

2do. Suplente: Dr. Jaime Retama Velasco

Lugar donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, México, D.F.

Tutor de tesis:

Dr. A. Gustavo Ayala Milián

---

Firma



*«Todo fragmento, o parte, de la totalidad de la naturaleza es siempre una mera aproximación a la verdad completa, o la verdad completa hasta donde la conocemos»*

*Richard P. Feynman*



*A mi familia y a Mónica por su apoyo incondicional.*



# Agradecimientos

Agradezco a mis tutores, los Profesores A. Gustavo Ayala Milián y Jaime Retama Velasco por el apoyo, conocimientos y críticas constructivas brindados durante la realización de este trabajo de investigación. Asimismo quiero agradecer a mis sinodales por sus aportaciones y comentarios, de los que tuve una perspectiva más amplia del tema.

Agradezco al *Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería* de la *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)* y al *Instituto de Ingeniería (II)* por la oportunidad brindada para realizar mis estudios de posgrado. Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)* por el apoyo económico otorgado durante el periodo de mis estudios en esta institución. Adicionalmente quiero agradecer a la *Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA)* de la UNAM y al proyecto **Simulación numérica del proceso de falla en elementos de concreto reforzado considerando el efecto del calor de hidratación del cemento en los concretos jóvenes, PAPIIT IN108512**, por la beca otorgada para culminar este proyecto de investigación.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>XVI</b>
<b>Abstract</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>5</b>
<b>3. Mecánica del daño</b>	<b>9</b>
3.1. Modelo de daño continuo . . . . .	10
3.2. Modelo de daño discreto . . . . .	10
3.3. Modelo de discontinuidades interiores . . . . .	12
<b>4. Formulación del modelo de concreto reforzado</b>	<b>15</b>
4.1. Formulación variacional de un sólido continuo . . . . .	15
4.2. Formulación variacional de un sólido con discontinuidades interiores . . . . .	17
4.3. Cinemática de la discontinuidad . . . . .	18
4.3.1. Aproximación del modelo de discontinuidades interiores por el MEF	19
4.4. Modelo constitutivo de daño . . . . .	24
4.4.1. Modelo de daño con ablandamiento isótropo . . . . .	25
4.5. Enriquecimiento del Modelo de Discontinuidades Interiores . . . . .	29
4.5.1. Formulación variacional del modelo CRDDI . . . . .	30
4.5.2. Aproximación del modelo de CRDDI por medio del MEF . . . . .	31
4.5.3. Modelo interacción concreto–acero . . . . .	34
<b>5. Implantación numérica</b>	<b>39</b>

**6. Ejemplos numéricos** **45**

6.1. Comparación entre la rigidez del concreto simple y del concreto reforzado . 46

6.2. Tensión indirecta en una viga de concreto simple . . . . . 47

6.3. Viga de concreto reforzado . . . . . 49

6.4. Ménsula sujeta a carga vertical . . . . . 52

**7. Conclusiones** **57**

**A. Modelo de refuerzo embebido** **61**

**B. Modelo de adherencia del Código Europeo de Diseño CEB–FIP Model Code 1990** **63**

# Índice de figuras

1.1. Daño en la presa Campos Novos, ubicada sobre el río Canoas, en el estado de Santa Catarina, Brasil [35]. . . . .	1
3.1. Daño en un elemento unidimensional. . . . .	9
3.2. Curva de zona cohesiva, proceso de ablandamiento. . . . .	11
3.3. Sólido discretizado por el MEF con una grieta interna . . . . .	12
3.4. Aproximaciones de discontinuidades interiores . . . . .	13
4.1. Sólido continuo con dominio $\Omega$ y frontera $\Gamma$ . . . . .	16
4.2. Continuo dividido en $\Omega^-$ y $\Omega^+$ por una discontinuidad sobre $\Gamma_d$ . . . . .	17
4.3. Sólido discretizado por el MEF. . . . .	20
4.4. Elemento finito de deformación constante cruzado por una discontinuidad. . . . .	21
4.5. Curva de ablandamiento del modelo de la grieta cohesiva. . . . .	24
4.6. Zona de micro-agrietamiento dentro de una superficie cohesiva. . . . .	25
4.7. Modelos de refuerzo. . . . .	29
4.8. Sólido de concreto reforzado . . . . .	31
4.9. Aproximación mediante el MEF . . . . .	32
4.10. Esfuerzos de adherencia provocados por el deslizamiento del acero dentro del concreto. . . . .	34
6.1. Control de a) carga, b) desplazamiento. . . . .	45
6.2. Viga de concreto reforzado. . . . .	46
6.3. Rigidez de la viga de concreto simple y de concreto reforzado . . . . .	47
6.4. Viga con una muesca en el centro del claro. . . . .	48
6.5. Diagrama carga–deflexión. . . . .	48
6.6. Geometría y armado de la viga. . . . .	49

6.7. Diagrama carga-deflexión. . . . .	50
6.8. Curva experimental vs curva de la simulación numérica. . . . .	51
6.9. Estado de esfuerzos $\sigma_{xx}$ . . . . .	52
6.10. Ménsula de concreto reforzado. . . . .	53
6.11. Diagrama carga–desplazamiento. . . . .	54
6.12. Estado de esfuerzos máximos principales para M23. . . . .	55
6.13. Comparación de la curva de capacidad con diferentes cuantías de refuerzo principal. . . . .	56
A.1. Elemento de concreto reforzado triangular de deformación constante. . . . .	61
B.1. Relación adherencia–deslizamiento para carga monótona creciente. . . . .	64

# Índice de tablas

B.1. Parámetros del modelo de adherencia del Código Europeo CEB-FIP Model Code 1990, [10] . . . . .	65
--	----



# Resumen

En esta tesis, se presenta el enriquecimiento y la validación numérica del elemento finito desarrollado por Retama y Ayala para modelar numéricamente el comportamiento mecánico del concreto reforzado en su evolución al colapso. Este elemento considera el proceso de agrietamiento y evolución al colapso en el concreto y su interacción con el acero de refuerzo. El planteamiento matemático está basado en la Formulación de Desplazamientos dentro del esquema general del Cálculo Variacional. La aproximación del sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se lleva a cabo mediante el Método de los Elementos Finitos, y su implantación numérica se efectúa en un programa de análisis no-lineal. Para validar el modelo propuesto, se simula numéricamente el comportamiento de una serie de elementos estructurales de concreto reforzado, comparando su respuesta así obtenida con resultados de estudios experimentales.



# Abstract

In this thesis, enrichment and numerical validation of the finite element developed by Retama and Ayala is presented to model numerically the mechanical behavior of reinforced concrete in its evolution to collapse. This element takes into account the formation of cracks and the evolution to collapse in plain concrete and its interaction with the reinforcing steel. The mathematical approach is based on the Formulation of Displacements within the general scheme of Variational Calculus. The approximation of the system of differential equations governing the problem is carried out using the Finite Element Method, and its numerical implementation is performed in a program for non-linear analysis. To validate the proposed model, numerical simulations of the behavior of a set of reinforced concrete structural elements are performed, comparing their response thus obtained with experimental studies.



# Capítulo 1

## Introducción

El comportamiento mecánico del concreto reforzado es influenciado principalmente por la formación y propagación de grietas y fisuras, así como por la interacción entre el concreto y el acero de refuerzo. Las grietas pueden afectar el comportamiento de las estructuras ante cargas externas, y además su seguridad. De ocurrir, la importancia de su influencia depende del tipo de construcción y de la función social para la cual fueron edificadas.

Construcciones como escuelas, hospitales, centros comerciales, entre otros, deben cumplir con un comportamiento adecuado para garantizar la seguridad de sus ocupantes. En la figura 1.1 se ilustra el caso de la formación y propagación de un conjunto de fisuras en la presa Campos Novos, Brasil [35]. Este tipo de estructuras generalmente producen energía eléctrica, y su interrupción podría ocasionar pérdidas económicas significativas.

Con el fin de simular la formación y propagación de fisuras en elementos estructurales de concreto reforzado (vigas, columnas, losas, muros de contención, etc.), surge la necesidad de desarrollar e implementar modelos analíticos capaces de reproducir numéricamente este fenómeno. Estas herramientas brindan una mejor comprensión del comportamiento de las estructuras ante diversos tipos de cargas externas. Más aún, la implementación de



Figura 1.1: Daño en la presa Campos Novos, ubicada sobre el río Canoas, en el estado de Santa Catarina, Brasil [35].

métodos avanzados de análisis estructural permite a los ingenieros optimizar la economía y la seguridad del diseño de las construcciones. Asimismo, al conocer su capacidad residual una vez que se alcancen las condiciones de diseño, si es que sucede, es posible determinar su comportamiento ante acciones que las rebasen.

Ante cargas de servicio, los modelos numéricos desarrollados en las últimas décadas brindan una estimación precisa del comportamiento de las estructuras de concreto reforzado; sin embargo, la respuesta estructural ante cargas de baja probabilidad de ocurrencia (*cargas extremas*) sigue siendo un tema de estudio, es decir, ante demandas que ocasionen la incursión de la estructura en un estado de colapso total o parcial de un sistema estructural [45].

Predecir el comportamiento de una estructura a través de simulaciones numéricas después de que ésta alcance su resistencia máxima, puede permitir que los ingenieros la diseñen para que se comporte de forma dúctil, es decir, evitar que la estructura falle de forma frágil (sin advertencia). Cuando una estructura posee suficiente ductilidad, ésta puede absorber y disipar energía mediante deformaciones inelásticas [40]. De igual forma, diseñar una estructura para que falle de forma dúctil, radica en el hecho de que los usuarios perciban visualmente el nivel de daño y dispongan del tiempo necesario para desalojar la construcción; por otro lado, cuando una carga extrema ha provocado que una estructura colapse, es posible determinar a través de la simulación numérica lo ocurrido patológicamente, y de ello extraer los factores que probablemente contribuyeron a la falla del sistema, tratando de evitar lo sucedido en edificaciones posteriores, e inclusive definir nuevos criterios de diseño en reglamentos de construcción.

## Contenido

A continuación se hace una descripción general del contenido de esta tesis.

- Capítulo 1. Se describen los fenómenos que contribuyen al comportamiento no-lineal del concreto reforzado y se justifica el empleo de los modelos numéricos para su estudio y comprensión en el proceso de daño en la evolución al colapso de las estructuras.
- Capítulo 2. Se describe un panorama general en el estudio del concreto reforzado como material homogéneo y discreto, haciéndose una comparación entre las ventajas y desventajas que ofrecen ambas técnicas, justificando el empleo de la segunda en esta tesis para modelar el comportamiento de elementos estructurales en su evolución al colapso.
- Capítulo 3. Se describen las principales características de los modelos de daño (grieta discreta, grieta distribuida y de discontinuidades interiores), para evaluar el proceso de falla en materiales cuasi-frágiles, como el concreto simple. Se profundiza principalmente en el modelo de discontinuidades interiores, el cual posee tres aproximaciones: débil y fuerte en el dominio del continuo, y la discreta en el dominio de la discontinuidad. En esta tesis se emplea la aproximación discreta, la cual utiliza una ley constitutiva tracción-salto para describir el comportamiento de la discontinuidad; el resto del dominio, que permanece elástico, emplea un modelo constitutivo continuo esfuerzo-deformación.
- Capítulo 4. Se presenta la base matemática para determinar el comportamiento del concreto reforzado. Primero se desarrolla la Formulación Variacional del modelo de Discontinuidades Interiores en su Aproximación Discreta. Para simular la presencia de una discontinuidad en un sólido, se enriquece la cinemática del campo de desplazamientos y deformaciones. Se emplea una relación constitutiva tracción-salto para describir el comportamiento de la grieta. El sistema de ecuaciones diferenciales obtenido de la formulación variacional se aproxima mediante una discretización de elemento finito triangular de deformación constante. La matriz de rigideces obtenida de esta formulación resulta ser simétrica. En la segunda parte de la formulación, presentada en la sección 4.5, se describe la técnica propuesta para acoplar el acero de refuerzo dentro del sólido de concreto. A este respecto, se realiza un enriquecimiento energético en la Formulación Variacional del modelo de daño empleado. Se asume que el comportamiento del acero de refuerzo es elasto-plástico perfecto. Para tomar en cuenta la interacción entre el refuerzo y el concreto que le rodea, se recurre al modelo de adherencia del Código Europeo de diseño CEB-FIP Mode Code 1990.
- Capítulo 5. Se desarrolla la implantación numérica del Modelo de Concreto Reforzado en la Aproximación Discreta de Discontinuidades Interiores (CRDDI) bajo el esquema del Método de los Elementos Finitos. Se describen los aspectos más importantes del algoritmo implantado en el programa para análisis no-lineal FEAP (*Finite Element Analysis Program*) [50].

- Capítulo 6. Se presentan cuatro ejemplos para ilustrar el funcionamiento del modelo de concreto reforzado CRDDI. El primer ejemplo tiene como propósito calcular la rigidez de una viga con y sin acero de refuerzo. El segundo consiste en el análisis de una viga de tres puntos, con una muesca en el centro del claro, para validar el Modelo de Discontinuidades Internas en su Aproximación Discreta. Los dos ejemplos restantes consisten en el análisis no-lineal de una viga y una ménsula de concreto reforzado. Se compara la respuesta de los tres últimos ejemplos con resultados obtenidos en laboratorio, extraídos de la literatura especializada en el tema.
- Capítulo 7. Se presenta una serie de conclusiones y comentarios referentes al modelo de análisis no-lineal para estructuras de concreto reforzado CRDDI.
- Apéndice A. Se describe de manera detallada la estrategia numérica para transferir la efecto del acero de refuerzo al concreto simple.
- Apéndice B. Se describen las principales características del modelo de adherencia (diámetro de la varilla, tipo de corrugado y relación entre los desplazamientos relativos de ambos materiales) del código de diseño CEB-FIP Model Code 1990 [10].

# Capítulo 2

## Antecedentes

Desde el siglo XIX, los ingenieros estructuristas se percataron de que ciertos aspectos en el comportamiento mecánico del concreto reforzado, como la formación de grietas y fisuras, no podían ser descritos satisfactoriamente a través de las técnicas que emplea la mecánica de los medios continuos [1].

Con la invención de las computadoras, en la década de los años 40 del siglo pasado, y la rapidez con que se implementó en ellas el Método de los Elementos Finitos (MEF) desde su aparición en los años 60 [7, 24, 52], es posible diseñar modelos matemáticos para simular el proceso del agrietamiento en el concreto simple.

Los modelos de daño más empleados para simular el agrietamiento en el concreto simple son el de la *Grieta Discreta* [23, 25, 37] y el de la *Grieta Distribuida* [13, 42, 47]. Sin embargo, el primero, además de que es estrictamente aplicable a materiales frágiles, su aplicación conlleva una demanda computacional excesiva debido a que para propagar una fisura se requiere un remallado permanente; no obstante, en problemas de daño localizado, esta aproximación ofrece resultados satisfactorios. El segundo modelo simula el agrietamiento modificando las ecuaciones constitutivas mediante un parámetro de daño, reduciendo el costo computacional; sin embargo, se necesitan mallas finas para obtener buenos resultados. Un tercer modelo de daño, que se ha venido desarrollando recientemente y que incluye las características más relevantes de las formulaciones anteriores, es el de *Discontinuidades Interiores* [4, 8, 27, 43]. En esta aproximación se mejoran los campos de desplazamientos y deformaciones, permitiendo modelar la presencia de discontinuidades en el interior de sólidos. Las principales ventajas numéricas de este modelo son: 1) localización y propagación de una o varias discontinuidades sin la necesidad de un remallado durante el proceso de análisis, 2) liberación de esfuerzos de cohesión, propios de los materiales cuasi-frágiles, y 3) disipación de energía de deformación, producto de la acumulación del daño. Estas características son consistentes con los principios que establece la Termodinámica.

Para tomar en cuenta el efecto mecánico del acero de refuerzo dentro del concreto simple se han empleado dos técnicas: 1) la más común considera que la rigidez del acero de refuerzo se distribuye uniformemente dentro del concreto, es decir, se emplea un módulo de elasticidad equivalente concreto-acero, obteniéndose un material homogéneo. Esta técnica

origina la existencia de adherencia perfecta entre ambos materiales; sin embargo, se ha demostrado que la adherencia se pierde parcialmente inclusive para niveles de carga en los cuales aún no se ha alcanzado la resistencia máxima [30, 32]; en una estructura de concreto reforzado la pérdida de adherencia contribuirá a la pérdida de rigidez global [40]; y 2) las barras de refuerzo se representan usando elementos unidimensionales, simulando un material discreto. En este caso, se pueden incluir elementos de interfaz para conectar al acero de refuerzo con los elementos de concreto, permitiendo implementar una relación constitutiva que sea capaz de desarrollar los esfuerzos de adherencia entre ambos materiales. Sin embargo, esta técnica incrementa el número de grados de libertad del sistema estructural, elevándose la demanda computacional. Asimismo, para localizar correctamente el acero de refuerzo dentro del elemento de concreto, es necesario construir mallas estructuradas; hecho que resulta laborioso, tomando en cuenta que el armado del acero de refuerzo posee una configuración compleja.

En el análisis no-lineal de estructuras de concreto reforzado, generalmente se emplea el modelo de la grieta distribuida para simular el daño en el concreto simple, mientras que el efecto del acero de refuerzo se incluye de forma distribuida, y la no-linealidad en él se incorpora mediante un modelo elástico-plástico perfecto [11, 19, 32, 41]. Esta estrategia resulta bastante efectiva cuando se desea determinar la resistencia última de una estructura; sin embargo, cuando se pretende conocer el comportamiento más allá de este punto, es decir, en su evolución al colapso, es posible que se pierda la adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo, ocasionado por la degradación de la resistencia del concreto, provocando la separación entre éstos. Si se prescinde de la pérdida de adherencia entre ambos materiales, se estaría sobrestimando la resistencia de las estructuras de concreto reforzado en su evolución al colapso. Por esta razón, resulta evidente la necesidad de incluir dentro del análisis no-lineal un modelo de adherencia que sea capaz de disipar la energía ocasionada por el deslizamiento entre ambos materiales. Un estudio detallado de las técnicas de mayor uso en el estudio del comportamiento mecánico del concreto reforzado se describen en el reporte del ACI 446.3R-97 [1].

Las dificultades descritas en los párrafos anteriores son la principal motivación para realizar este trabajo de investigación. Con el fin de reproducir satisfactoriamente el comportamiento no-lineal del concreto reforzado en su evolución al colapso se pretende: 1) emplear el Modelo de Discontinuidades Interiores, el cual ha demostrado tener un desempeño apropiado para modelar la presencia y propagación del agrietamiento, 2) implementar una estrategia para incluir el acero de refuerzo de tal forma que sea posible tomar en cuenta la interacción entre éste y el concreto simple y 3) la implantación del modelo en el Método de los Elementos Finitos para ser utilizado en un programa de análisis no-lineal.

## Objetivo

El objetivo principal de esta tesis es enriquecer y validar la formulación desarrollada por Retama [43] para modelar numéricamente el comportamiento inelástico del concreto reforzado (formación y propagación del agrietamiento así como la interacción entre el concreto y el acero de refuerzo) que incluya un algoritmo computacional basado en el Método de los Elementos Finitos para ser implantado en un programa de análisis no-lineal.

Para alcanzar este objetivo se tienen las siguientes metas:

1. Enriquecer la formulación variacional desarrollada por Retama [43], que considera el proceso de agrietamiento en sólidos, para tomar en cuenta el efecto del acero de refuerzo y su interacción con el concreto simple.
2. Emplear una relación constitutiva, ante carga monótona creciente, que permita disipar los esfuerzos de adherencia existentes entre el acero de refuerzo y el concreto que le rodea.
3. Enriquecer el elemento finito triangular bidimensional desarrollado por Retama [43], para capturar dentro de su dominio el efecto del acero de refuerzo.
4. Desarrollar los algoritmos computacionales e implantarlos en el programa de elementos finitos para análisis no-lineal FEAP (de su acrónimo en el idioma Inglés, *Finite Element Analysis Program*).
5. Emplear la herramienta computacional desarrollada para simular numéricamente problemas de interés práctico en el área de la Ingeniería Estructural.
6. Validar los resultados obtenidos de la simulación con pruebas experimentales, reportadas en la literatura especializada en el comportamiento del concreto reforzado.



# Capítulo 3

## Mecánica del daño

Para reproducir el comportamiento de los materiales a nivel macroscópico se recurre a las ecuaciones constitutivas, que relacionan los esfuerzos y deformaciones mediante un operador lineal que representa la rigidez del material. Cuando un material deja de comportarse linealmente, ya sea por aparición de grietas en el caso del concreto o por bandas de cortante en los metales, es posible modificar las ecuaciones constitutivas para simular la degradación del material.

En este contexto, la *Mecánica del Daño*, introducida por Kachanov en 1958, estudia el deterioro de los materiales debido al proceso de iniciación y crecimiento de micro defectos, tales como micro-poros y micro-fisuras, producto de los esfuerzos internos que sufre el sólido [29], figura 3.1, degradando la rigidez del material mediante una variable escalar conocida como *variable de daño*. Este factor varía de *cero* para un material sano, hasta *uno* para un material completamente dañado. Este proceso debe ser consistente con el incremento de *entropía* en el sistema, término introducido por el físico alemán Clausius en el año de 1850 para representar el grado de uniformidad con que está distribuida la energía. Esta magnitud es una variable de estado que se encuentra gobernada por la *Segunda Ley de la Termodinámica* [20, 34].

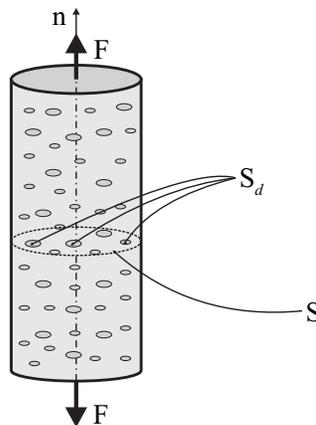


Figura 3.1: Daño en un elemento unidimensional.

En general, dentro de la mecánica del daño, existen dos aproximaciones para simular el daño en sólidos. La primera, simula el agrietamiento distribuyéndolo dentro del *continuo*, modificando las relaciones constitutivas, y la segunda, lo modela de forma *discreta*, introduciendo además una relación constitutiva *tracción-salto* para la discontinuidad.

### 3.1. Modelo de daño continuo

Partiendo de la idea de Kachanov, en 1968 Rashid introdujo una aproximación propiamente en el contexto del MEF. En ella, al alcanzarse la resistencia a tensión del material se introduce la formación de un conjunto de grietas paralelas [42]. Esta aproximación propaga la grieta en una sola dirección, por lo que se le conoce como *Grieta Fija*. Debido a esta limitante, Cope *et al.*, en 1980 proponen el *Modelo de Grieta Giratoria* [12], y De Borst, en 1985, propone la aproximación de la *Grieta Multidireccional*, [13].

El modelo de daño distribuido, también conocido por el nombre de *Agrietamiento Distribuido*, ofrece la ventaja de no requerir un remallado durante la simulación del proceso de falla del material. Sin embargo, para que este modelo reproduzca adecuadamente el daño, es necesario emplear mallas finas, de lo contrario durante el proceso de ablandamiento del material se pueden imponer deformaciones falsas ocasionando un atoramiento de esfuerzos. Este hecho afectaría la liberación adecuada de la energía de fractura, ocasionando problemas numéricos, además de ser inconsistente con el *Principio de Conservación de la Energía, Primera Ley de la Termodinámica*.

### 3.2. Modelo de daño discreto

El estado cristalográfico del que está compuesta la materia es modificado por fuerzas externas. Cuando ocurre esto, se produce un desequilibrio interno que ocasiona, a nivel meso-escala, la separación de las moléculas, disminuyéndose la energía de atracción (fuerzas de Van der Waals) que las mantiene unidas. A nivel macro-escala, el conjunto de esas fuerzas representan a los esfuerzos de cohesión, figura 3.2. En otras palabras, durante la iniciación del micro agrietamiento, hasta la aparición de fisuras, se libera una cierta cantidad de energía de deformación, producto del decremento de los esfuerzos de cohesión generados en las superficies de las grietas. Este fenómeno provoca la disminución en la resistencia del material, y por lo tanto un aumento de deformaciones y desplazamientos en dicha zona. El intercambio de energía para producir la discontinuidad, se convierte en energía cinética, consistente con el *Principio de la Conservación de la Energía*.

Dentro del contexto del MEF, el campo de esfuerzos, perteneciente a las fuerzas de cohesión, queda determinado en función de un modelo constitutivo conocido como *tracción-salto*, y se asume que éste tiene lugar entre las fronteras de los elementos sólidos que forman la malla. A esta aproximación se le conoce como *Modelo de la Grieta Discreta* porque el daño se localiza artificialmente en los bordes de los elementos que discretizan a

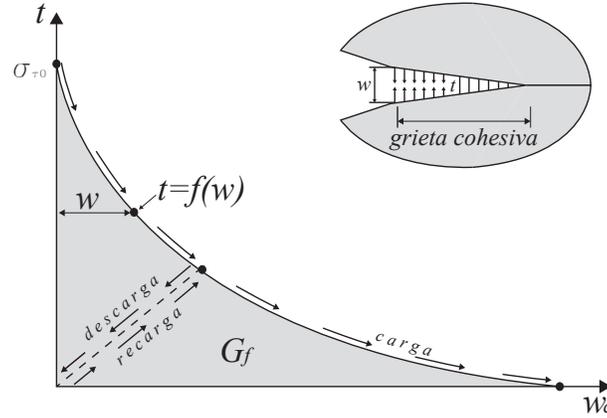


Figura 3.2: Curva de zona cohesiva, proceso de ablandamiento.

la estructura.

Para materiales dúctiles como el acero, Dugdale en 1960 [16] y Barenblatt en 1962 [5] introdujeron el modelo que representa la fractura elasto-plástica, y por su parte Hillerborg *et al.* en 1976 en materiales cuasi-frágiles, como el concreto [23]. Este último modelo se convirtió en una extensión del modelo de la grieta discreta, asumiendo que una grieta cohesiva se puede desarrollar en cualquier lugar de un sólido, aún cuando no existe la presencia de una macro grieta [27], por lo que esta aproximación recibe el nombre de *Modelo de la Grieta Ficticia*.

La figura 3.2 representa el comportamiento de un espécimen sometido a tensión. Es fácil ver que al aplicar una fuerza al espécimen, en éste se desarrollarán esfuerzos, y que al alcanzar éstos la resistencia a tensión del material  $\sigma_{t0}$ , se producirá una grieta cohesiva perpendicular a la dirección del esfuerzo principal máximo, con apertura finita  $w^1$ . En este momento se comienzan a liberar esfuerzos cohesivos en la zona del daño. Conforme aumenta la apertura, las fuerzas de cohesión se debilitan, llegando un momento en el que son nulas. La relación entre fuerzas de cohesión y apertura de la grieta llevó a Hillerborg a concluir que tales esfuerzos son función de la apertura de la grieta, *i.e.*,  $\sigma = f(w)$ .

Asumiendo una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones antes de que se alcance la resistencia a tensión del material  $\sigma_{t0}$ , es posible obtener de pruebas experimentales el parámetro  $f(w)$ , que gobierna la curva de ablandamiento durante el proceso de degradación de la resistencia del material, figura 3.2, así como la energía de fractura *i.e.*, el área bajo la curva.

Para simular el proceso de agrietamiento utilizando el modelo de *zona cohesiva*, implantado en el MEF, se debe determinar previamente al análisis la zona donde se espera que pueda presentarse el daño. Para propagar la grieta, éste modelo requiere un remallado en la zona de estudio, generándose un costo computacional adicional, por lo que éste hecho es su principal desventaja. Sin embargo, en problemas de daño localizado este modelo genera

<sup>1</sup>En los capítulos posteriores se introduce el concepto *salto del desplazamiento*  $[\mathbf{u}]$ , el cual es equivalente a  $w_c$  del modelo constitutivo *tracción-salto*

buenas aproximaciones.

### 3.3. Modelo de discontinuidades interiores

Partiendo de la realidad física, cuando una discontinuidad cruza un cuerpo, figura 3.3, en el que la separación de las partes que lo componen se encuentra en función de las fuerzas de cohesión existentes entre las caras de la discontinuidad, y de las fuerzas o desplazamientos externos, es posible contemplar las ideas principales que emplean los modelos de la grieta distribuida y grieta discreta para representar los fenómenos inelásticos que acontecen en la zona de localización de deformaciones durante el proceso de daño (Belytschko *et al.*, [8], Simo *et al.*, [49], Oliver [38], Alfaiate *et al.* [4], Juárez y Ayala [28], Retama [43]).

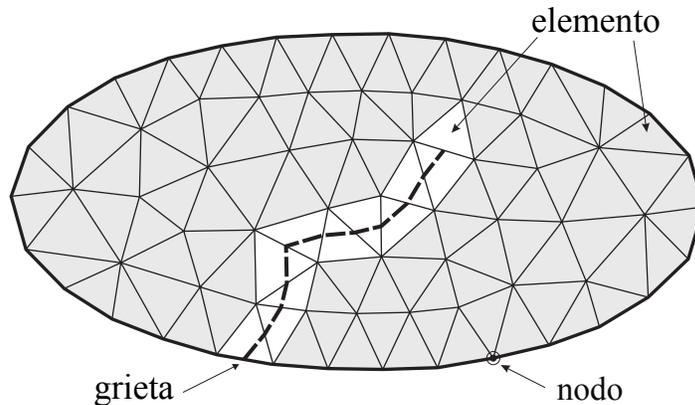


Figura 3.3: Sólido discretizado por el MEF con una grieta interna

La *Aproximación de Discontinuidades Interiores* adquiere entonces, la cualidad de detectar la discontinuidad mediante un criterio de falla, o fluencia, dependiendo del material, y propagarla dentro del volumen discretizado, sin la necesidad de realizar un remallado. Es decir, al detectar la zona de localización, se inicia y propaga automáticamente el agrietamiento cuando la física del problema lo dicta. La formulación de esta aproximación toma en cuenta la *cinemática de desplazamientos y deformaciones*, así como el *equilibrio* que se debe tener entre las tracciones que hay en las superficies de la discontinuidad.

Existen tres de aproximaciones que tienen como base el Modelo de Discontinuidades Interiores, y todas ellas emergen de una formulación variacional, en la que se incluyen los campos físicos más importantes para determinar el daño en el material. Estas aproximaciones se pueden clasificar de acuerdo al tipo de discontinuidad y relaciones constitutivas empleadas [18]:

1. *Aproximación Continua*. Se considera que el sólido es continuo en todo su dominio, empleando relaciones constitutivas continuas de esfuerzo–deformación.
  - *Discontinuidad Débil*. En esta aproximación, el campo de desplazamientos es

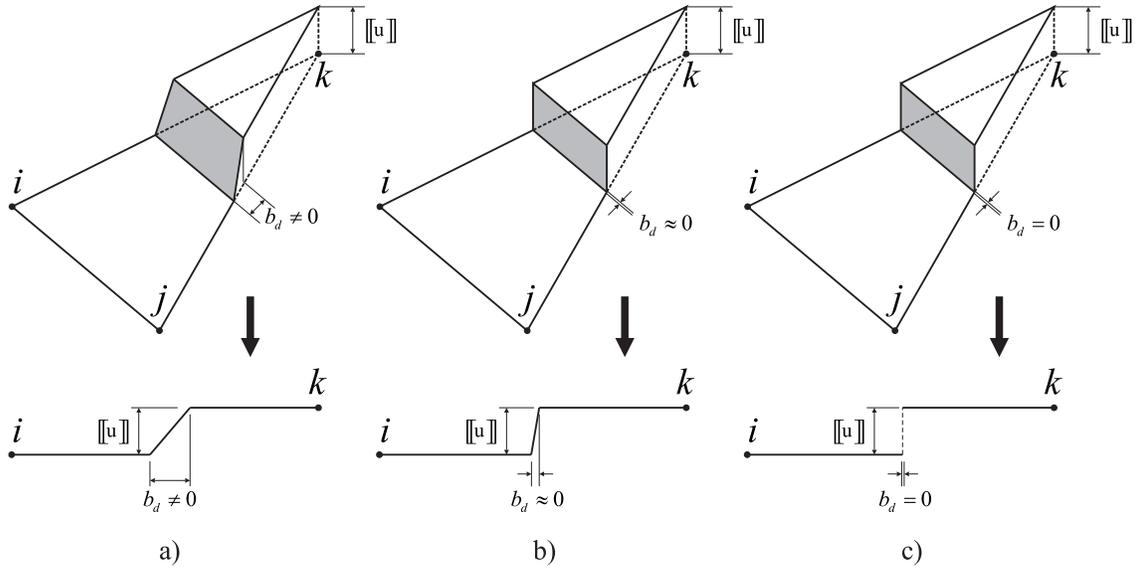


Figura 3.4: Aproximaciones de discontinuidades interiores

continuo, y el de deformaciones discontinuo, debido a que se presenta un salto en la zona de localización, figura 3.4a.

- *Discontinuidad Fuerte.* El campo de desplazamientos es discontinuo, y el de deformaciones es no acotado, debido a que la zona de localización tiende a cero, figura 3.4b.

2. *Aproximación Discreta.* En esta aproximación el sólido se convierte en un cuerpo discreto, por lo que se emplean dos leyes constitutivas. Para la zona que no presenta daño se emplea una relación continua esfuerzo–deformación, y para la discontinuidad se emplea una relación tracción–salto, figura 3.4c.

En esta tesis se emplea el Modelo de Discontinuidades Internas en su Aproximación Discreta para modelar el daño, ocasionado por el agrietamiento en el concreto simple; además, de acuerdo a la formulación variacional desarrollada por Retama [43], es posible tomar en cuenta los campos que gobiernan el comportamiento del acero de refuerzo y el efecto de la adherencia existente entre estos dos materiales, así como los posibles efectos no–lineales que afecten el comportamiento en las estructuras de concreto reforzado.



# Capítulo 4

## Formulación del modelo de concreto reforzado

En esta investigación, el comportamiento del concreto reforzado se aborda desde el punto de vista de los Principios Variacionales. En ellos es posible incluir los campos físicos más importantes que gobiernan el comportamiento de este material, así como sus condiciones de estacionalidad, aproximándolos por medio del MEF. En consecuencia, simular el comportamiento de concreto reforzado, desde este enfoque, ofrece las ventajas de incorporar la energía que suministra el acero de refuerzo, la energía de disipación entre la frontera del acero y el concreto que le rodea, así como la energía que se produce en la frontera de la discontinuidad; de esta forma se desarrolla el *Modelo de Concreto Reforzado en la Aproximación Discreta de Discontinuidades Interiores* (CRDDI).

### 4.1. Formulación variacional de un sólido continuo

Para formular la base teórica del modelo CRDDI, primero es conveniente desarrollar el funcional de energía potencial que establece las condiciones de equilibrio para un sólido elástico sin discontinuidades. Considérese el sólido de la figura 4.1 que ocupa un volumen  $\Omega$ , limitado por una superficie  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ , de modo que  $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_t$ . Sobre la superficie  $\Gamma_t$  se define el vector normal  $\boldsymbol{\nu}$ . Sobre  $\Gamma_u$  se imponen las condiciones esenciales de frontera  $\bar{\mathbf{u}}$ , mientras que las condiciones naturales  $\bar{\mathbf{t}}$  se prescriben en  $\Gamma_t$ .

El funcional de energía potencial total del sólido de la figura 4.1 corresponde a

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \Phi(\mathbf{u})] d\Omega - \int_{\Gamma_t} \phi(\mathbf{u}) d\Gamma \quad (4.1)$$

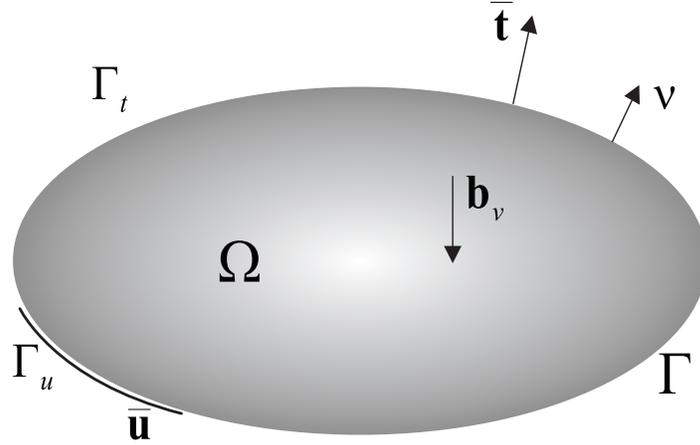


Figura 4.1: Sólido continuo con dominio  $\Omega$  y frontera  $\Gamma$ .

donde la energía de deformación interna se define como

$$U_c = \int_{\Omega} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega \quad (4.2)$$

y el funcional de cargas prescritas como

$$P = - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \phi(\mathbf{u}) \, d\Gamma \quad (4.3)$$

donde  $\Phi(\mathbf{u})$  corresponde al trabajo realizado por las fuerzas de cuerpo y  $\phi(\mathbf{u})$  al de tracciones.

Definiendo el funcional de energía potencial total de la ecuación (4.1) como

$$\Pi(\mathbf{u}) = U_c + P \quad (4.4)$$

y tomando la primera variación respecto al campo de desplazamientos e igualando a cero para que el funcional tenga valor estacionario

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = \delta(U_c + P) = 0 \quad (4.5)$$

se obtienen las ecuaciones de Euler–Lagrange, para este problema en particular.

Así, al aplicar la primer variación sobre el funcional  $\Pi(\mathbf{u})$  para buscar su estacionalidad sobre el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ , el cual debe cumplir la restricción sobre  $\Gamma_u$  se demuestra que es equivalente a aplicar el *Principio de los Trabajos virtuales*. Este es precisamente el *Principio de la Energía Potencial Mínima*, el cual enuncia que: *de todas las configuraciones deformadas compatibles  $\mathbf{u}$ , con condiciones de frontera definidas en  $\Gamma_u$ , aquella que satisface las condiciones de equilibrio corresponde a la energía potencial estacionaria*.

Es conveniente mencionar que este principio es válido para estructuras con comportamiento elástico [21].

## 4.2. Formulación variacional de un sólido con discontinuidades interiores

Para estudiar el proceso de falla en materiales cuasi-frágiles de forma analítica, se considera que existe una *zona de localización* con ancho  $b_d$ , en la que se concentran las deformaciones, induciendo un salto en el campo de desplazamientos cuando  $b_d = 0$ , figura 4.2. Existen tres aproximaciones para modelar este fenómeno: Discontinuidad Débil y Fuerte en la aproximación del Continuo, y la Aproximación Discreta. Las principales características de estas aproximaciones se presentaron en el Capítulo 3.

En este trabajo se emplea la Aproximación Discreta del Modelo de Discontinuidades Interiores, en la que el sólido deja de ser continuo debido a que las deformaciones originadas por el micro-agrietamiento, u otros fenómenos inelásticos, se concentran en la banda  $b_d$ , sobre la superficie  $\Gamma_d$ , por lo que se emplean relaciones constitutivas tracción-salto en la discontinuidad, mientras que en el resto del dominio se utiliza una ley constitutiva esfuerzo-deformación.

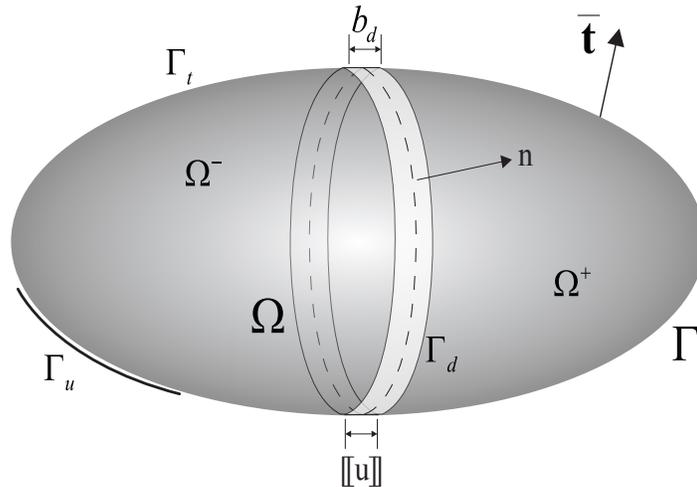


Figura 4.2: Continuo dividido en  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$  por una discontinuidad sobre  $\Gamma_d$ .

En el momento en que el sólido de la figura 4.2 ha sido dividido por una discontinuidad  $\Gamma_d$ , se generan dos subdominios,  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$ , provocando un salto  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  en el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ . El salto ocasiona que en  $\Gamma_d$  se libere energía de deformación inelástica  $\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ , dada por

$$\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \int_0^{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \mathbf{t}^T d\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.6)$$

siendo  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  el vector de tracciones que relaciona al vector del salto de desplazamientos  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  con el tensor constitutivo tracción–salto  $\mathbf{T}$ , el cual que se describirá en la sección 4.4. Para un comportamiento elástico lineal de las tracciones definidas en la discontinuidad se tiene que la ecuación (4.6) se simplifica a

$$\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket^T \mathbf{T} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.7)$$

Imponiendo de forma fuerte (punto a punto) la compatibilidad de deformaciones y desplazamientos en la discontinuidad, se puede definir el funcional de energía asociado a esta zona como

$$\Pi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = U_d \quad (4.8)$$

mientras que el funcional de energía potencial para el sólido elástico cruzado por una discontinuidad queda definido como

$$\Pi(\mathbf{u}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = U_c + U_d + P \quad (4.9)$$

y de forma explícita el funcional anterior se puede expresar como

$$\Pi(\mathbf{u}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \int_{\Omega} [\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \Phi(\mathbf{u})] d\Omega - \int_{\Gamma_t} \phi(\mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) d\Gamma \quad (4.10)$$

En términos físicos este funcional representa el equilibrio entre la energía de deformación en  $\Omega$  y la energía liberada en la frontera de la discontinuidad  $\Gamma_d$ .

### 4.3. Cinemática de la discontinuidad

Cuando el cuerpo de la figura 4.2 es cruzado por una discontinuidad, tanto el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  como el de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se vuelven discontinuos. En el momento

que se presenta el salto  $[[\mathbf{u}]]$  es posible representar la cinemática del sólido por dos partes, la regular y la irregular [4, 38, 43],

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Gamma_d}(\mathbf{x}) [[\mathbf{u}]](\mathbf{x}, t) \quad (4.11)$$

donde  $\hat{\mathbf{u}}$  corresponde a la parte regular,  $[[\mathbf{u}]]$  a la parte irregular, y  $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$  es la función de Heaviside, que depende de la posición del nodo  $i$  respecto a la discontinuidad. Esta función se define como

$$\mathcal{H}_{\Gamma_d}^i = \begin{cases} \alpha_d \mathbf{I} & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ (1 - \alpha_d) \mathbf{I} & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (4.12)$$

donde  $\alpha_d$  es una constante que define la orientación del salto,  $0 \leq \alpha_d \leq 1$ ; si  $\alpha_d = 0$ , el salto se transmite hacia  $\Omega^-$ , y si  $\alpha_d = 1$  el salto se transmite a  $\Omega^+$ ;  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimensiones  $(n_{st} \times n_{st})$  y  $n_{st}$  es la dimensión espacial del problema. Considerando los  $n$  nodos del elemento finito que participan en el movimiento relativo se concluye que

$$\mathcal{H}_{\Gamma_d} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\Gamma_d}^1 \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{\Gamma_d}^n \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Así como el campo de desplazamientos queda representado por una combinación de dos partes, la elástica e inelástica, el campo de deformaciones infinitesimales a su vez está dado por una parte acotada y una no acotada.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d}(\nabla^s [[\mathbf{u}]]) + (\nabla \mathcal{H}_{\Gamma_d} \otimes [[\mathbf{u}]])^s = \underbrace{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{acotado}} + \underbrace{\delta_{\Gamma_d} ([[ \mathbf{u} ]]) \otimes \mathbf{n}}_{\text{no acotado}}^s \quad (4.14)$$

donde  $\delta_{\Gamma_d}$  es la función delta de Dirac sobre la frontera de la discontinuidad  $\Gamma_d$ ,  $\phi$  es una función regular definida en el dominio  $\Omega$ , satisfaciendo

$$\int_{\Omega} \delta_{\Gamma_d} \phi d\Omega = \int_{\Gamma_d} \phi d\Gamma \quad (4.15)$$

### 4.3.1. Aproximación del modelo de discontinuidades interiores por el MEF

Jirásek [26] en el año 2000 clasificó las propuestas de diversos investigadores relativas al Modelo de Discontinuidades Interiores en tres subgrupos, denominados como: 1) *Cinemática y Simétricamente Óptimo* (KOS), 2) *Estática y Simétricamente Óptimo* (SOS) y 3) *Cinemática y Estáticamente No-Simétrico* (KSON).

En el grupo SOS, Belytscho *et al.*, [8], proponen un enriquecimiento en el campo de desplazamientos y deformaciones, satisfaciéndose la continuidad de las tracciones; sin embargo, el movimiento de cuerpo rígido no se reproduce correctamente. Aproximaciones donde se satisface tanto la cinemática de la discontinuidad como la continuidad de las tracciones KSON, se emplea la formulación de Petrov–Galerkin; sin embargo, en ella se presenta una matriz de rigidez no simétrica [38, 39, 49].

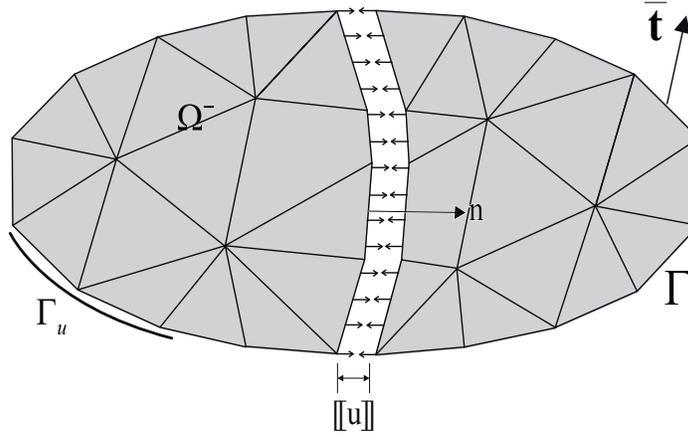


Figura 4.3: Sólido discretizado por el MEF.

La matriz de rigideces empleada en esta investigación forma parte de la familia KOS, que corresponde a los trabajos realizados por Lofti y Shing [33], Juárez y Ayala [28] y Retama [43]. En esta formulación, la continuidad de tracciones se satisface de forma fuerte, surgiendo naturalmente en la formulación variacional. A este respecto, el enriquecimiento de la cinemática del campo de desplazamientos y deformaciones permite modelar el movimiento de cuerpo rígido, relativo a la discontinuidad.

En este trabajo de investigación la discretización del funcional de energía potencial, correspondiente al modelo de discontinuidades interiores, se realiza mediante una aproximación de elementos finitos de deformación constante, como se ilustra en la figura 4.3. De la misma figura, considérese uno de los elementos finitos cruzado por una discontinuidad, como se ilustra en la figura 4.4. El campo de desplazamientos totales de este elemento se define como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}} + (\mathcal{H}_{\Gamma_d} - \mathbf{N}\mathcal{H}_{\Gamma_d})\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.16)$$

donde la matriz  $\mathbf{N}$  contiene las funciones de interpolación estándar del elemento,  $\mathbf{N}_c$  contiene las funciones de interpolación asociadas a los nodos del subdominio  $\Omega^+$ , el vector  $\hat{\mathbf{u}}$  contiene a los desplazamientos nodales estándar y el vector  $\tilde{\mathbf{u}}$  a los desplazamientos nodales asociados a  $\Omega^+$  (nodos  $j$  y  $k$ ), que quedan determinados en función de  $\mathcal{H}_{\Gamma_d}$ .

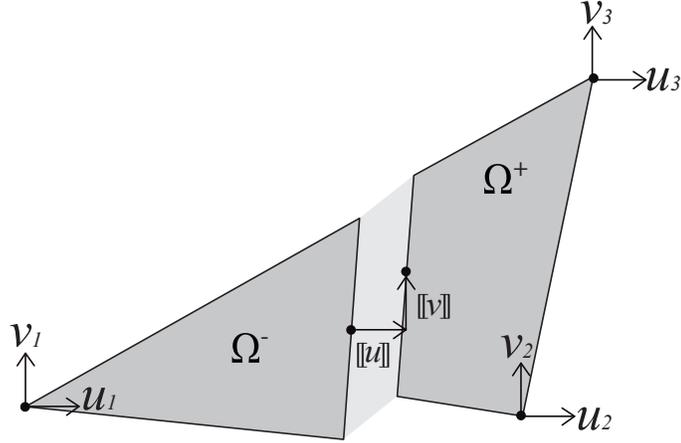


Figura 4.4: Elemento finito de deformación constante cruzado por una discontinuidad.

Tomando a  $\mathbf{N}_c$  como

$$\mathbf{N}_c = \mathcal{H}_{\Gamma_d} - \mathbf{N}\mathcal{H}_{\Gamma_d} \quad (4.17)$$

se puede escribir el campo de desplazamientos totales mediante

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{N}_c\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.18)$$

Es importante notar que el salto de los desplazamientos  $[[\mathbf{u}]]$  se define en un nodo ubicado en el centroide del sólido. Asimismo, el salto induce un incremento en los desplazamientos  $\tilde{\mathbf{u}}$ , por lo que estrictamente  $\tilde{\mathbf{u}}([[ \mathbf{u} ]])$ .

Asimismo, el campo de deformaciones queda determinado como

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_c\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.19)$$

donde  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}_c$  son matrices que contienen las derivadas parciales de  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{N}_c$  respectivamente. Considerando que la función  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  contiene las funciones de forma asociadas a los nodos en  $\Omega^+$ , [2, 39, 43], entonces se puede establecer que

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^+} N_i^+ \quad (4.20)$$

por lo tanto

$$\mathbf{B}_c = -\nabla^s \varphi(\mathbf{x}) \quad (4.21)$$

En consecuencia, el campo de deformaciones, dependiente del de los desplazamientos, se aproxima de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} - \nabla^s \varphi(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.22)$$

Al sustituir las ecuaciones (4.18) y (4.19) dentro del funcional de energía potencial de la ecuación (4.10), y definiendo la función de las fuerzas de cuerpo  $\Phi(\mathbf{u})$  a través de la interpolación  $\mathbf{u}^T \mathbf{b}_v$  y la función de fuerzas prescritas  $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}}$ , y aplicando la primer variación del mismo respecto a  $\mathbf{u}$  y  $[\![\mathbf{u}]\!]$  para que  $\Pi(\mathbf{u}, [\![\mathbf{u}]\!])$  tenga valor estacionario

$$\delta \Pi(\mathbf{u}[\![\mathbf{u}]\!]) = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b}_v d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \mathbf{T}[\![\mathbf{u}]\!] d\Gamma \right] = 0 \quad (4.23)$$

se obtiene la matriz de rigideces (4.24) para el modelo de discontinuidades interiores en la aproximación discreta en la formulación de desplazamientos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} & \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}}^T & \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

donde

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.25)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega \quad (4.26)$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}_c^T \mathbf{T} \mathbf{N}_c d\Gamma \quad (4.27)$$

y las fuerzas externas

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_v d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4.28)$$

El segundo término de la submatriz  $\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}$  representa el comportamiento inelástico asociado a la frontera de la discontinuidad  $\Gamma_d$ . A nivel de elemento, el daño se concentra en el nodo ubicado en el centroide del sólido 2D, en el cual se evalúan los desplazamientos del salto  $[[\mathbf{u}]]$ . Para inducir el efecto de la discontinuidad sobre el continuo se emplea la condensación estática, distribuyendo el daño capturado en  $\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}$  sobre los grados de libertad estándar del elemento finito empleado. Esto provee una ventaja importante para su implementación en programas de elemento finito estándar. Es importante observar que la matriz de rigideces de la ecuación (4.24) es simétrica, por lo que la matriz de rigideces obtenida de la condensación estática, ecuación (4.29), también lo será.

$$(\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} - \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}}\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1}\mathbf{K}_{\tilde{u}\hat{u}}) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.29)$$

Cabe destacar que cuando aún no se presenta el comportamiento inelástico del material, es decir, cuando la resistencia a tensión en el elemento aún no se ha sobrepasado, el único término que se toma en cuenta en la expresión (4.29) es  $\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}}$ , por lo que es evidente que en esta parte de la ecuación (4.29) se incluyen tanto los efectos elásticos como inelásticos.

En lo sucesivo, la matriz de rigidez de ecuación (4.29) será escrita como  $\mathbf{K}_c$ ; el vector de desplazamientos nodales como  $\mathbf{U}_c$  y el vector de cargas externas como  $\mathbf{P}_c$ . El subíndice  $c$  indica que nos referimos al elemento de concreto simple.

$$\mathbf{K}_c \mathbf{U}_c = \mathbf{P}_c \quad (4.30)$$

La incorporación del acero de refuerzo dentro de la formulación del modelo de discontinuidades interiores se presenta en la sección 4.5. A continuación se describe de manera detallada el modelo constitutivo tracción–salto que gobierna el comportamiento inelástico de la discontinuidad en el concreto.

## 4.4. Modelo constitutivo de daño

Para definir el comportamiento de un cuerpo, además de requerirse las ecuaciones de equilibrio y cinemática que gobiernan el problema, es necesario establecer el modelo constitutivo que relacione el campo de los esfuerzos con el de las deformaciones. Cuando se alcanza la resistencia del material, se recurre a los modelos constitutivos de daño, que permiten representar el comportamiento no-lineal a escala macroscópica durante el proceso de falla. En materiales de comportamiento cuasi-frágil es factible emplear el modelo de la grieta cohesiva [14, 23], introducido por Barenblatt [5] y Dugdale [16].

Hillerborg [23] extendió las ideas del modelo de la grieta cohesiva a materiales como el concreto, introduciendo conceptos como el de la grieta ficticia y el de energía de fractura  $G_f$ , la cual se obtiene de pruebas de laboratorio. Este concepto se implanta en los modelos de elementos finitos para simular la disipación de energía durante el proceso de falla [3, 46].

A raíz de sus experimentos, Hillerborg encontró la existencia de una cierta relación entre el esfuerzo de resistencia a tensión  $\sigma_{t0}$  y la apertura de la grieta  $w$ , figura 4.5. El área bajo la curva  $f(w)$  representa la energía disipada durante la evolución del daño. Esta función es mejor conocida como curva de ablandamiento.

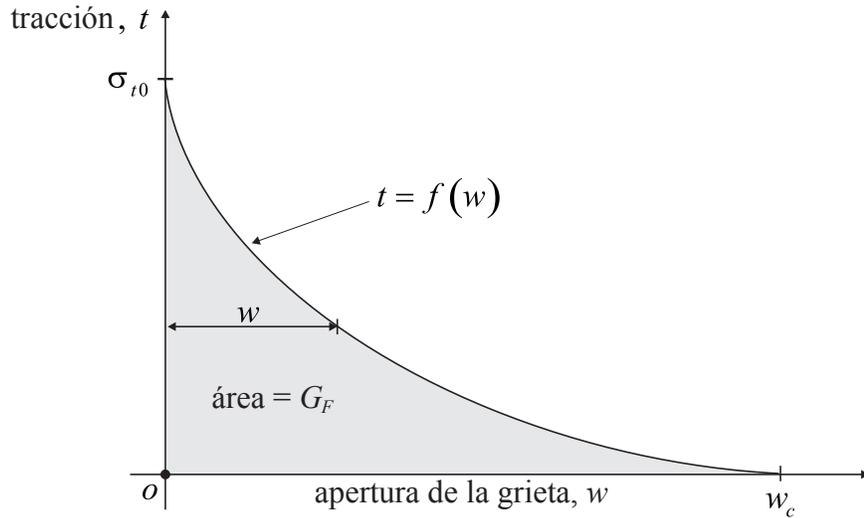


Figura 4.5: Curva de ablandamiento del modelo de la grieta cohesiva.

Como se ha descrito anteriormente, el modelo de discontinuidades interiores en la aproximación discreta, emplea dos modelos constitutivos, uno para la discontinuidad, tracción-salto, y otro esfuerzo-deformación para el resto del dominio, figura 4.6. La zona inelástica se puede representar con un modelo de daño isótropo o por uno anisótropo.

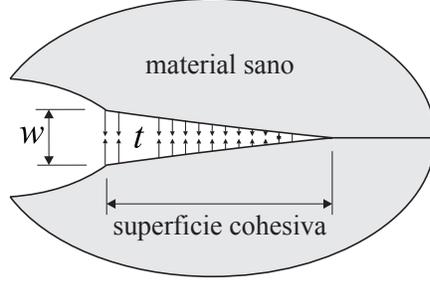


Figura 4.6: Zona de micro-agrietamiento dentro de una superficie cohesiva.

La principal ventaja de este modelo se atribuye a que es posible realizar la transición de la zona elástica a la zona inelástica capturando el daño anisótropo, a diferencia de los modelos continuos, donde el daño se distribuye en una zona determinada.

#### 4.4.1. Modelo de daño con ablandamiento isótropo

Muchos investigadores han tomado en cuenta el proceso irreversible del incremento de la entropía en la simulación de la evolución del daño en los materiales [4, 18, 43]. Considerando este principio en el modelo constitutivo tracción-salto, es posible simular la degradación del concreto y otros materiales.

Definiendo la densidad de energía libre de Helmholtz por unidad de área como

$$\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega(\kappa)) = [1 - \omega(\kappa)]\psi_0(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \quad (4.31)$$

donde  $\omega(\kappa)$  es una variable interna de daño, que puede variar de 0, correspondiente a un estado no dañado del material, hasta 1, para un estado completamente dañado;  $\kappa$  es una variable escalar que puede considerarse como un salto equivalente, *i.e.*  $\kappa = \llbracket u \rrbracket_{eq} = \max \langle \llbracket u \rrbracket_n \rangle$ ,  $\llbracket u \rrbracket_n$  es la componente normal del salto del desplazamiento;  $\langle \cdot \rangle$  son los corchetes de McAuley e indican que se toma en cuenta únicamente la parte positiva de  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{eq}$ ;  $\psi_0$  es la energía libre elástica definida como

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket^T \mathbf{T}^{el} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.32)$$

donde  $\mathbf{T}^{el}$  es el tensor constitutivo elástico definido en la frontera de la discontinuidad  $\Gamma_d$ . Para problemas térmicamente estables, la ecuación (4.31) satisface la desigualdad de Clausius-Duhem

$$\mathcal{D} = \mathbf{t}^T \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \dot{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega(\kappa)) \geq 0 \quad (4.33)$$

donde el vector de tracciones  $\mathbf{t}^T$  y la variación del salto respecto al tiempo  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  son parámetros asociados a expresiones relacionadas con valores obtenidos experimentalmente; por otro lado, determinar la evolución de la entropía interna en el material,  $\dot{\psi}([[ \mathbf{u} ]], \omega(\kappa))$ , es una tarea sumamente difícil. Para determinar este valor de suma importancia se diferencia  $\psi([[ \mathbf{u} ]], \omega(\kappa))$  respecto a sus argumentos

$$\dot{\psi}([[ \mathbf{u} ]], \omega(\kappa)) = \frac{\partial \psi}{\partial [[ \mathbf{u} ]]} [[\dot{\mathbf{u}}]] + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \dot{\omega} \quad (4.34)$$

y se sustituye en la ecuación (4.33), obteniéndose

$$\mathcal{D} = \left( \mathbf{t} - \frac{\partial \psi}{\partial [[ \mathbf{u} ]]} \right)^T [[\dot{\mathbf{u}}]] + \psi_0 \dot{\omega} \geq 0 \quad (4.35)$$

el potencial de energía de disipación. En el,  $\dot{\omega}$  es la variable interna que permite medir el incremento de la daño en el material y  $\psi_0$  es la energía libre elástica, ecuación (4.32). Todas las variables que intervienen en este potencial de disipación de energía mecánica son conocidas, por lo que se pueden hacer las siguientes consideraciones consistentes con la termodinámica:

1. La desigualdad de la ecuación (4.35) debe cumplirse para cualquier variación del salto en la evolución del tiempo. Esta condición da origen a la ecuación constitutiva *tracción-salto*:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \psi}{\partial [[ \mathbf{u} ]]} = (1 - \omega) \mathbf{T}^{el} [[ \mathbf{u} ]] \quad (4.36)$$

2. De acuerdo a la ley constitutiva, el valor de la disipación de energía resulta

$$\mathcal{D} = \psi_0 \dot{\omega} \geq 0 \quad (4.37)$$

De la ecuación (4.37) es fácil ver que la variación de  $\omega$  respecto al tiempo siempre va incrementando, de lo contrario no se cumpliría la desigualdad. Más aún, la energía libre elástica por unidad de área siempre es positiva, *i.e.*,  $\psi_0 \geq 0$ .

### Tensor constitutivo tangente

Derivando la ecuación (4.36) respecto al tiempo, se obtiene el tensor constitutivo tangente en su forma incremental

$$\dot{\mathbf{t}} = (1 - \omega)\mathbf{T}^{el} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \dot{\omega} \mathbf{t}^{el} \quad (4.38)$$

donde  $\mathbf{t}^{el}$  es el vector de tracción elástico,  $\mathbf{T}^{el}$  y  $\dot{\omega}$  representa la tasa de daño en el material:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \frac{d\omega}{d\kappa} \left[ \frac{\partial \kappa}{\partial \llbracket u \rrbracket_n} \llbracket \dot{u} \rrbracket_n + \frac{\partial \kappa}{\partial \llbracket u \rrbracket_s} \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \right] \quad (4.39)$$

En esta ecuación, los términos entre el corchete representan la variación total de la componente normal y tangencial de salto de los desplazamientos.

Sustituyendo la ecuación (4.39) en la (4.38) resulta

$$\dot{\mathbf{t}} = \left[ (1 - \omega)\mathbf{T}^{el} - \frac{d\omega}{d\kappa} \mathbf{t}^{el} \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \right] \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \quad (4.40)$$

Si se produce una descarga, la tasa de daño es cero,  $\dot{\omega} = 0$ , y ambas ecuaciones, (4.39) y (4.40), se reducen a

$$\dot{\mathbf{t}} = (1 - \omega)\mathbf{T}^{el} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \quad (4.41)$$

### Función de fluencia para el concreto

Para dar inicio a la etapa en la que el material comienza a ceder energía debido al daño que éste sufre, es conveniente definir una función asociada a las variables termodinámicas,  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{eq}$  y  $\omega$ , similar a la que se emplea en teoría de plasticidad.

$$f(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega) = \langle \llbracket u \rrbracket_{eq} \rangle - \kappa \leq 0 \quad (4.42)$$

Esta función considera una región donde el material es elástico lineal, y a partir de un cierto umbral comienzan a producirse los fenómenos inelásticos asociados a la superficie  $\Gamma_d$ .

Si la función de fluencia  $f(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega) \leq 0$  el comportamiento del material es elástico. Si  $f(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega) = 0$  el material se encuentra en estado de carga neutra, de descarga o en estado inelástico. Si la variación de las variables internas se dirigen hacia el interior de la superficie o se mantienen sobre ella, es decir  $\dot{f}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega)|_{\dot{\omega}=0} \leq 0$ , el proceso de carga es elástica o de carga neutra, y el comportamiento del material es elástico. Si la variación de las variables se dirigen hacia el exterior de la superficie de fluencia,  $\dot{f}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \omega)|_{\dot{\omega}=0} \geq 0$ , el proceso es

inelástico y las variables internas evolucionan. Estas condiciones de carga/descarga se pueden expresar mediante las condiciones de Kuhn–Tucker [48]:

$$f([\mathbf{u}], \omega) \leq 0; \quad \dot{\omega} \geq 0; \quad \dot{\omega} f([\mathbf{u}], \omega) = 0 \quad (4.43)$$

En el caso en que las variables internas evolucionen, debe cumplirse en todo momento la condición de consistencia:

$$\dot{f}([\mathbf{u}], \omega) = 0 \quad (4.44)$$

es decir

$$\dot{f}([\mathbf{u}], \omega) \cdot \dot{\omega} = 0 \quad (4.45)$$

## 4.5. Enriquecimiento del Modelo de Discontinuidades Interiores

A nivel local el acero de refuerzo debe proporcionar rigidez adicional al concreto simple para que éste pueda soportar esfuerzos mayores en aquellas zonas donde sea vulnerable a sufrir agrietamiento. A nivel global, se busca encontrar una proporción entre ambos materiales de tal forma que el sistema estructural no presente una falla frágil ante un conjunto de solicitaciones; es decir, se busca que la estructura desarrolle un cierto nivel de ductilidad para que la falla sea gradual y permita a los ocupantes de una estructura tomar ciertas medidas de precaución.

En las secciones precedentes se desarrolló la formulación matemática del modelo de discontinuidades interiores en su aproximación discreta para simular el daño en materiales cuasi-frágiles, como el concreto simple. En esta sección se presenta el planteamiento teórico para enriquecer la formulación variacional que gobierna el modelo de daño, y así obtener las ecuaciones que determinan el comportamiento del concreto reforzado, incluyendo la interacción entre el acero y el concreto que lo rodea.

Dentro del contexto de la aproximación del MEF existen tres aproximaciones para modelar el acero de refuerzo dentro de los elementos de concreto [22, 32, 44]:

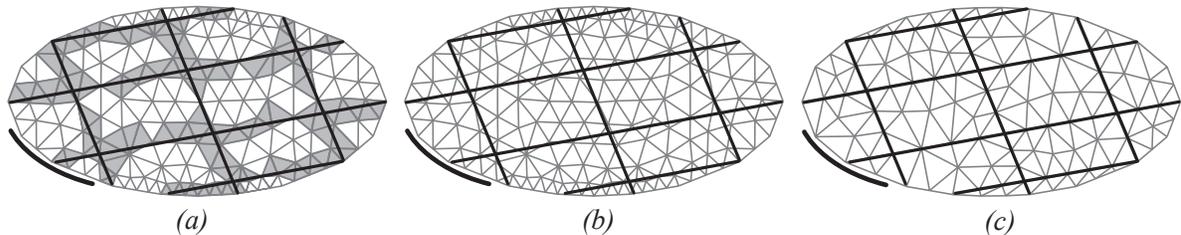


Figura 4.7: Modelos de refuerzo.

1. *Modelo de refuerzo distribuido.* El acero de refuerzo se distribuye dentro del volumen de concreto mediante una relación constitutiva de material compuesto homogéneo, figura 4.7a. Este modelo ofrece buenos resultados y computacionalmente es muy efectivo, sin embargo sólo es posible considerar adherencia perfecta entre ambos materiales.
2. *Modelo de refuerzo embebido.* Se emplean elementos unidimensionales para modelar el acero, los cuales trabajan conjuntamente con elementos finitos que representan el concreto, figura 4.7b. Su principal característica es que las propiedades del acero no se distribuyen para homogeneizar al material compuesto, a diferencia de lo que se hace en el modelo de refuerzo distribuido. Este modelo permite incluir un modelo de ablandamiento para modelar la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto que lo rodea.

3. *Modelo de refuerzo discreto.* De forma similar al modelo de refuerzo embebido, este modelo emplea elementos unidimensionales y su principal característica es que puede considerar el deslizamiento entre el acero y el concreto, figura 4.7c. Para lograr esto, se emplean *elementos de interfaz* que miden los desplazamientos relativos entre los materiales; sin embargo, esto genera un incremento en el número de grados de libertad de la estructura, originando una demanda computacional importante. Otra desventaja es que el acero de refuerzo debe coincidir con los bordes de los elementos de concreto, lo que obliga a construirse mallas estructuradas.

En los dos últimos modelos se acepta que existe compatibilidad de desplazamientos y deformaciones; sin embargo, esto no necesariamente es verdad puesto que sencillamente podemos imaginar que para originar un estado de deformaciones en ambos materiales no se tendrá, bajo un mismo nivel de carga o desplazamiento, el mismo nivel de deformaciones unitarias, y el concreto fácilmente se agrietará, mientras que el acero probablemente permanecerá en estado elástico.

En esta investigación se emplea el modelo de refuerzo embebido, aceptando la compatibilidad de desplazamientos entre ambos materiales; sin embargo, no necesariamente se acepta la compatibilidad de deformaciones puesto que el modelo de discontinuidades interiores en su aproximación discreta acepta la existencia de una discontinuidad, lo que da origen a considerar el deslizamiento entre el concreto y el acero. Para disipar la energía que libera el ablandamiento del concreto que rodea al acero de refuerzo, se emplea el modelo constitutivo propuesto en el Código de Diseño Europeo CEB-FIP Model Code 1990 [10].

#### 4.5.1. Formulación variacional del modelo CRDDI

Una vez desarrollado el funcional de energía potencial total para un sólido discontinuo tomando en cuenta la energía de disipación que se presenta en la frontera de la discontinuidad  $\Gamma_d$ , es posible enriquecer el funcional  $\Pi(\mathbf{u}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ , asociado al problema de discontinuidades interiores, con la energía de deformación que le suministra el acero de refuerzo.

Considérese el cuerpo mostrado en la figura 4.8, la energía de deformación elástica del concreto está dada por  $\psi(\boldsymbol{\epsilon})$ , la energía asociada a la frontera de la discontinuidad  $\psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ , la energía del acero de refuerzo y los esfuerzos de adherencia sobre la frontera  $\Gamma_B$ , que unen a ambos materiales, por el funcional  $\Theta(\mathbf{u})$ . El funcional asociado al problema del sólido de concreto reforzado está dado como

$$\Pi(\mathbf{u}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = U_c + U_d + U_s + P \tag{4.46}$$

donde el término adicional que incluye la energía  $U_s$  del acero de refuerzo está dada por la ecuación 4.47; los términos restantes ya se han descrito previamente.



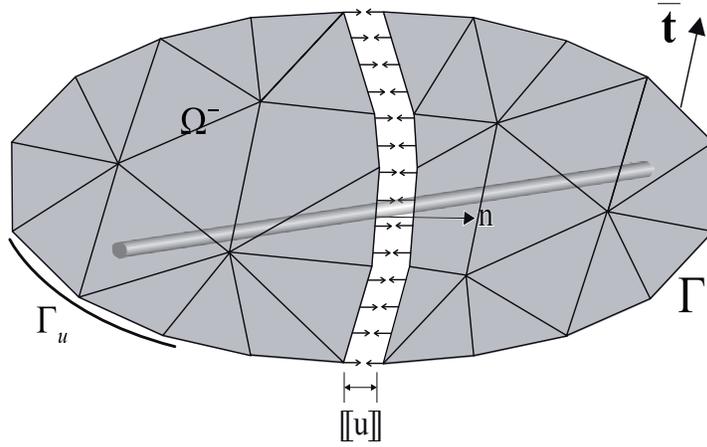


Figura 4.9: Aproximación mediante el MEF

De la interpolación del campo de deformaciones, que depende del campo de desplazamientos se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s \mathbf{U}_s \quad (4.50)$$

donde la matriz  $\mathbf{B}_s$  contiene las derivadas de las funciones de forma para el elemento unidimensional y el vector  $\mathbf{U}_s$  representa los desplazamientos nodales. Sustituyendo la ecuación (4.50) en el funcional de la ecuación (4.49) y llevando a cabo su correspondiente minimización se obtiene la ya conocida matriz de rigideces para un elemento unidimensional

$$\mathbf{K}_s = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del acero de refuerzo y  $A$  es el área de la sección transversal, siempre y cuando ésta permanezca constante a lo largo de la longitud  $L$  del elemento. La ecuación (4.51) corresponde a la deducción en un sistema de coordenadas locales. Para tomar en cuenta una orientación general de la barra en el plano, se recurre a la matriz de transformación  $\mathbf{R}$ , ecuación (4.52), que permite proyectar los coeficientes de la matriz de rigidez de un sistema local a uno global

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de la varilla respecto a la dirección horizontal global del problema.

Para poder sumar la matriz de rigideces del refuerzo con la del elemento de concreto, perteneciente a la formulación de discontinuidades interiores, es necesario calcular una matriz de rigidez equivalente para el acero. Esto se logra empleando la estrategia propuesta por Retama [44], donde se emplea la matriz de transformación  $\mathbf{N}_{cs}$  que contiene las funciones de forma de los sólidos en 2D; en ella se toman como variables las coordenadas de intersección de la varilla con los bordes del sólido de concreto. De esta forma se proyecta la rigidez del refuerzo sobre los grados de libertad del elemento de concreto simple, obteniéndose la matriz de rigidez equivalente para el acero de refuerzo

$$\mathbf{K}_{\hat{s}} = \mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K}_s \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs} \quad (4.53)$$

La matriz  $\mathbf{N}_{cs}$  es de dimensiones  $(4 \times n_c)$ , donde  $n_c$  es el número de grados de libertad del elemento de concreto; por ejemplo, si se formula el problema de discontinuidades interiores para un elemento triangular de deformación constante (como es el caso de esta tesis), donde la dimensión de la matriz de rigidez es de  $(6 \times 6)$ , entonces  $n_c$  es igual a 6, y la matriz  $\mathbf{N}_{cs}$  es de  $(4 \times 6)$ . Una descripción detallada de  $\mathbf{N}_{cs}$  se presenta en el apéndice A.

### Comportamiento del acero

Se asume que el acero tiene un comportamiento elasto-plástico perfecto durante el proceso de carga. En este trabajo únicamente se considera la no-linealidad del material, por lo que el comportamiento del refuerzo viene dado por la descomposición de la deformación en una componente elástica  $e$  y otra plástica  $p$ . Entonces, el estado de deformación total se puede expresar como la suma de ambas partes

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_s^e + \boldsymbol{\varepsilon}_s^p \quad (4.54)$$

En consecuencia, el campo de esfuerzos está dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_s = E_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s^e - \boldsymbol{\varepsilon}_s^p) \quad (4.55)$$

y la tasa de deformación plástica asociada a la función de fluencia se define como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^p = \dot{\lambda} f_{\sigma_s} \quad (4.56)$$

donde la razón de cambio de plasticidad en el acero de refuerzo está dada por la variación del multiplicador  $\dot{\lambda}$ , mientras que el gradiente  $f_{\sigma} = \partial f / \partial \sigma$  establece la razón de cambio en la superficie de fluencia. Estas condiciones son similares a las de Kuhn-Tucker, presentadas anteriormente.

La función de fluencia para un estado plástico ideal está expresada como

$$f(\sigma_s) = |\sigma_{se}(\sigma_s)| - \sigma_0 \quad (4.57)$$

donde  $\sigma_{se}$  es el esfuerzo efectivo, definido por un criterio de fluencia, y  $\sigma_0$  es el esfuerzo de fluencia. Las condiciones de ablandamiento/endurecimiento son introducidas haciendo del esfuerzo de fluencia una función escalar de la deformación plástica. La deformación plástica equivalente  $\kappa$  está definida a través de la hipótesis de endurecimiento por deformación isótropa, que define una relación proporcional con la razón de deformación plástica  $\dot{\kappa}$ .

### 4.5.3. Modelo interacción concreto–acero

La interacción entre el concreto y el acero se da por medio de la adherencia entre ambos materiales; sin embargo, como se sabe, bajo ciertos niveles de daño, esta propiedad mecánica disminuye o se pierde parcialmente [40], ya sea porque el acero sufre grandes deformaciones, provocando la separación entre los materiales, o visto desde otro enfoque: cuando el concreto se comienza a agrietar, entre la superficie del acero y el concreto que la rodea deja de existir esa unión molecular que ofrece la adherencia a través de la interacción química que se produce cuando el concreto inicia y termina el proceso de fraguado, dando paso a la interacción mecánica originada por el contacto entre el concreto y el corrugado del acero de refuerzo. Desde esta perspectiva, el concreto deja de trabajar en conjunto con el refuerzo, disminuyéndose la rigidez del concreto reforzado. Para simular este fenómeno, es posible relacionar los esfuerzos de adherencia, originados por el movimiento entre ambos materiales, con el los desplazamientos de la discontinuidad  $[[\mathbf{u}]]$ , de tal forma que cuando se presenten desplazamientos relativamente grandes, se comience a perder la adherencia, reflejándose a nivel global en el decremento de la resistencia del concreto reforzado.

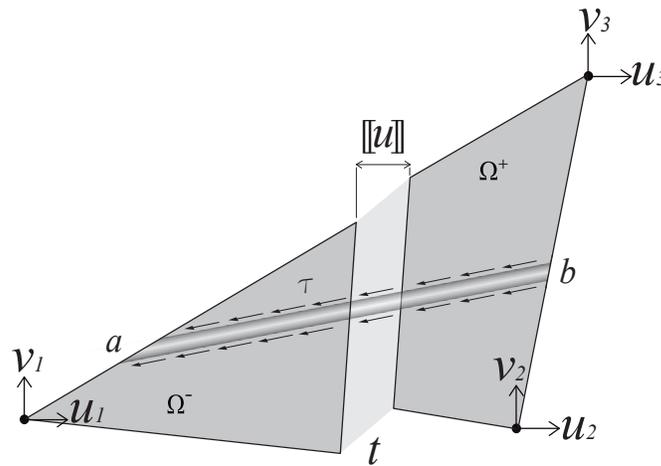


Figura 4.10: Esfuerzos de adherencia provocados por el deslizamiento del acero dentro del concreto.

La ecuación (4.53) corresponde al modelo de refuerzo embebido, y en ella es posible incluir los esfuerzos tangenciales que se producen sobre la superficie del acero  $\Gamma_B$ . Del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.10 se pueden relacionar a los esfuerzos de adherencia y a la rigidez del acero a través del equilibrio en la frontera  $\Gamma_B$ . Es evidente que los esfuerzos de adherencia que se producen en la superficie del acero y el concreto que lo rodea son originados por los desplazamientos relativos existentes entre ellos, de allí se puede escribir la ecuación de equilibrio estático a través de la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{sb} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{RN}_{cs} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{U}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{RN}_{cs} \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_s \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

en ella,  $\mathbf{P}_b$  es equivalente a las fuerzas externas aplicadas sobre la malla de elementos sólidos  $\mathbf{f}^{ext}$  y,  $\mathbf{P}_s$  es el vector de cargas aplicadas sobre los grados de libertad que conforman el acero de refuerzo,  $\mathbf{U}_c$  es el vector que relaciona los desplazamientos del elemento de concreto con los del acero  $\mathbf{U}_s$ . De acuerdo a las propiedades matemáticas del modelo de acero embebido, no es posible prescribir cargas sobre los grados de libertad que conforman el acero de refuerzo, por lo que se puede hacer que el vector  $\mathbf{P}_s$  valga cero, simplificándose la ecuación (4.58) a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bs} \\ \mathbf{K}_{sb} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{RN}_{cs} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{U}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{RN}_{cs} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

donde los esfuerzos de adherencia sobre el concreto están dados por la siguiente expresión

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} k_{ba} & 0 \\ 0 & k_{bb} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

y las reacciones que éste último le origina al acero por

$$\mathbf{K}_{bs} = \mathbf{K}_{sb} = -\mathbf{K}_{bb} \quad (4.61)$$

Las tracciones entre ambos materiales quedan definidas mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{K}_{ss} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{bb} \quad (4.62)$$

Las ecuaciones (4.60) y (4.61) dependen de los factores  $k_{ba}$  y  $k_{bb}$ , los cuales representan la rigidez equivalente que proporcionan los esfuerzos de adherencia, y quedan definidos como

$$k_{ba} = \tau_a(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \cdot \left( \frac{\pi \cdot d \cdot L}{2 \cdot b} \right) \quad (4.63)$$

$$k_{bb} = \tau_b(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \cdot \left( \frac{\pi \cdot d \cdot L}{2 \cdot b} \right) \quad (4.64)$$

donde  $d$  es el diámetro de la varilla que cruza al elemento finito de concreto de ancho  $b$ ,  $L$  es la longitud de la varilla, los valores  $\tau_a$  y  $\tau_b$  son los esfuerzos de adherencia y dependen de los desplazamientos relativos entre los materiales. Para definir los esfuerzos de adherencia en función de salto de los desplazamientos<sup>2</sup>  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \approx s$ , (donde  $s$  indica el deslizamiento entre el concreto y el acero), se emplea el modelo trilineal que presenta el Código de Diseño Europeo CEB-FIP Model Code 1990 [10], descrito en el apéndice B.

Para determinar el efecto que el desarrollo de la adherencia le induce al acero de refuerzo por el agrietamiento del concreto en su periferia, se despeja  $\mathbf{U}_s$  de la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (4.59) y se sustituye en la primera, obteniéndose la siguiente expresión

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bs}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sb})}_{\mathbf{K}_{\bar{s}}} \mathbf{RN}_{cs} \mathbf{U}_c = \mathbf{RN}_{cs} \mathbf{f}^{ext} \quad (4.65)$$

donde  $\mathbf{K}_{\bar{s}}$  es la matriz de rigidez equivalente del acero que incorpora el efecto de la adherencia. La igualdad anterior representa el equilibrio que debe existir en el elemento de concreto reforzado.

Realizando las operaciones matriciales de la ecuación (4.65) se obtiene la siguiente expresión de equilibrio para el acero de refuerzo

$$\mathbf{K}_{\bar{s}} = \frac{k_s}{1 + k_s \cdot \left( \frac{1}{k_{ba}} + \frac{1}{k_{bb}} \right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Cuando los esfuerzos de adherencia  $\tau_a$  y  $\tau_b$  tienden a infinito, la ecuación (4.66) se simplifica a la (4.51), representativa del caso en el que existe adherencia perfecta entre la superficie del acero y el concreto que la rodea.

Simplificando la ecuación (4.66) se tiene

---

<sup>2</sup>En este caso el deslizamiento entre el concreto y el acero de refuerzo surge de forma natural debido a las características del modelo de discontinuidades interiores en la aproximación discreta, originando directamente que el deslizamiento  $s \approx \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ .

$$\mathbf{K}_{\bar{s}} = \frac{k_s \cdot k_{ba} \cdot k_{bb}}{\underbrace{k_s \cdot (k_{ba} + k_{bb}) + k_{ba} \cdot k_{bb}}_{k_{\bar{s}}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

donde  $k_{\bar{s}}$  es el factor que representa la variación de rigidez del acero de refuerzo en función del desarrollo de los esfuerzos de adherencia y del comportamiento inelástico del acero.

Una vez que se hace presente el deslizamiento entre el concreto y el refuerzo, la rigidez del elemento se ve afectada de tal forma que ésta se asemeja a la del concreto simple. Esto se debe a que la rigidez del acero de refuerzo se trasmite hacia el concreto a través de los esfuerzos de adherencia; cuando éstos últimos se pierden, la interacción entre ambos materiales se disipa y, hablando estrictamente, se tendría a ambos materiales trabajando por separado. Para simular el decremento de la rigidez del concreto reforzado, producto del deslizamiento entre ambos materiales, el factor de la ecuación (4.67) modifica las propiedades elásticas del acero de refuerzo, siguiendo un patrón que depende de los desplazamientos relativos entre ambos materiales.

Para obtener los desplazamientos en el acero de refuerzo, de la ecuación dos del sistema (4.59) se despeja  $\mathbf{U}_s$ .

$$\mathbf{U}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sb} \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs} \mathbf{U}_c \quad (4.68)$$

En esta expresión se conocen todas las variables, por lo que también es posible calcular el estado de esfuerzos y deformaciones en el acero de refuerzo.

Finalmente, sustituyendo  $\mathbf{K}_s$  de la ecuación (4.53) por  $\mathbf{K}_{\bar{s}}$  y sumando a  $\mathbf{K}_c$  de la ecuación (4.30), se obtiene *La Matriz de Rigideces del Elemento de Concreto Reforzado*, correspondiente al modelo CRDDI.

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{\bar{u}\bar{u}} - \mathbf{K}_{\bar{u}\bar{u}} \mathbf{K}_{\bar{u}\bar{u}}^{-1} \mathbf{K}_{\bar{u}\bar{u}})}_{concreto} + \underbrace{\mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{\bar{s}} \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs}}_{acero} \mathbf{U}_{cr} = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.69)$$

De forma compacta, la ecuación fundamental para el cálculo de estructuras de concreto reforzado en su evolución al colapso se puede escribir como

$$\mathbf{K}_{cr} \mathbf{U}_{cr} = \mathbf{f}^{ext} \quad (4.70)$$

donde

$$\mathbf{K}_{cr} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_{\hat{s}} \quad (4.71)$$

Se puede concluir que la generalización del planteamiento matemático de la Formulación Variacional del Funcional de Energía Potencial Total, permite incluir aquellas variables físicas que originen tanto el comportamiento elástico como inelástico del concreto reforzado en su evolución al colapso. Teóricamente, por tanto, es factible tomar en cuenta cualquier tipo de energía asociada al comportamiento inelástico del concreto reforzado.

La matriz de rigideces deducida anteriormente es análoga a la que se obtiene en la formulación de desplazamientos mediante la aproximación del método de los elementos finitos, por lo que en esencia, el modelo presentado se centra en calcular los desplazamientos que sufren los grados de libertad de los sólidos que representan al concreto reforzado; de ello se puede conocer automáticamente qué es lo que sucede con el material, si surgen o no discontinuidades; si es que se presentan, se requiere una modificación del campo de deformaciones, y por lo tanto una redistribución en el campo de esfuerzos, como se describió en la sección 4.2. Por otro lado, tanto el comportamiento del acero de refuerzo como el desarrollo de los esfuerzos de adherencia, también son función de los desplazamientos que sufren los grados de libertad de los sólidos empleados, por lo tanto, es posible establecer una interacción mecánica entre el concreto y el acero.

El planteamiento incremental iterativo para resolver el sistema de ecuaciones no-lineales que determinan el comportamiento del concreto reforzado, bajo carga monótona creciente, se presenta en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Implantación numérica

En el capítulo anterior se desarrolló el modelo matemático que permite modelar de forma aproximada el comportamiento del concreto reforzado, incluyendo la no—linealidad en el concreto simple, producto del agrietamiento de éste, además de acoplar el modelo de refuerzo embebido, incorporando la interacción entre la superficie del acero y el concreto que le rodea. La matriz de rigideces que determina el comportamiento global del concreto reforzado  $\mathbf{K}_{cr}$ , constituye básicamente un enriquecimiento en la formulación del modelo de discontinuidades interiores en su aproximación discreta. En este capítulo se presenta la metodología empleada para resolver numéricamente las ecuaciones no—lineales que gobiernan el comportamiento del concreto reforzado bajo un estado de carga monótona creciente.

Considérese la matriz de rigideces<sup>1</sup> en su forma incremental para el cálculo de estructuras de concreto reforzado deducida en el capítulo anterior

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} + \mathbf{K}_{\hat{s}}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) & \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{u}\hat{u}} & \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\hat{u}}^{int} \\ \mathbf{f}_{\tilde{u}}^{int} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s^{int} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

donde

$$\mathbf{f}_{\hat{u}}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\sigma^{\hat{u}} + \sigma^{\tilde{u}}) d\Omega \quad (5.2)$$

y

$$\mathbf{f}_{\tilde{u}}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T (\sigma^{\hat{u}} + \sigma^{\tilde{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{t} d\Gamma \quad (5.3)$$

son las fuerzas internas en el sólido de concreto simple, y

---

<sup>1</sup>El término  $(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$  indica que éstas matrices son función del salto de los desplazamientos.

$$\mathbf{f}_s^{int} = \mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \sigma_s \Omega \quad (5.4)$$

es el vector de fuerzas internas en el acero de refuerzo.

Para calcular los desplazamientos totales  $\Delta \hat{\mathbf{u}}$  la ecuación (5.1) es necesario determinar primero el valor de los desplazamientos  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$  debidos al salto  $[[\mathbf{u}]]$ . A través de la condensación estática es posible resolver este problema. De la primer ecuación del sistema de ecuaciones (5.1) se despeja el vector  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1} \mathbf{K}_{\tilde{u}\hat{u}} \Delta \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_{\tilde{u}\hat{u}}^{-1} \mathbf{f}_{\hat{u}}^{int} \quad (5.5)$$

y se sustituye en la primer ecuación del mismo sistema, obteniéndose

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} - \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1} ([[ \mathbf{u} ]]) \mathbf{K}_{\tilde{u}\hat{u}})}_{concreto} + \underbrace{\mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{\tilde{s}} ([[ \mathbf{u} ]]) \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs}}_{acero} \Delta \mathbf{U}_{cr} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}_{cr}^{int} \quad (5.6)$$

donde

$$\mathbf{f}_{cr}^{int} = \mathbf{f}_{\hat{u}}^{int} - \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1} \mathbf{f}_{\tilde{u}}^{int} + \mathbf{f}_s^{int} \quad (5.7)$$

representa al vector de las fuerzas internas en el concreto reforzado, producto de la variación de los desplazamientos en los grados de libertad sobre los cuales se prescriben las cargas externas.

Para solucionar la ecuación (5.6) se requiere de un método numérico iterativo ya que los términos  $\mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}$ ,  $\mathbf{K}_{\tilde{s}}$  y  $\mathbf{f}_{\tilde{u}}^{int}$  no son una función lineal de los desplazamientos del salto  $\tilde{\mathbf{u}}$ , sino que todos ellos dependen tanto de los desplazamientos regulares  $\hat{\mathbf{u}}$ , como de los irregulares  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Sin embargo, la ecuación (5.6) contiene varios términos que permanecerán elásticos durante el proceso incremental de carga, por lo que su solución demandará operaciones innecesarias durante el proceso de convergencia. Existe una alternativa menos demandante computacionalmente. Para ello considérese la ecuación (5.5) que es la que contiene la relación no-lineal entre las tracciones  $\mathbf{t}$  y el salto de los desplazamientos  $\tilde{\mathbf{u}}([[ \mathbf{u} ]])$ . Es evidente que el costo computacional demandado en la solución de esta ecuación es mucho menor, además de que únicamente se tiene como incógnita, a nivel local, el vector  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Para dar solución a este sistema de ecuaciones, en esta tesis se emplea el método clásico iterativo de Newton–Raphson.

Asimismo, como se describió en el capítulo 4, sección 4.5, el comportamiento del acero es función de los desplazamientos que sufren los grados de libertad del sólido de concreto,

por lo que en sentido estricto, también el modelo de refuerzo embebido es una función no-lineal. Respecto al deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto que le rodea, al generarse una discontinuidad en este último, surge de forma natural el corrimiento entre ambos materiales, por lo que en esta instancia es posible ingresar al modelo CEB-FIP Model Code 1990 (Apéndice B) con el valor  $[\mathbf{u}]$  y obtener los esfuerzos de adherencia que gobiernan el modelo interacción concreto-acero.

## Análisis incremental iterativo

Para cada incremento de carga global hacer el mapeo para todos y cada uno de los elementos de la malla y

1.  $\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ , iniciar con el vector calculado en el último estado de carga global  $k$ .
2.  $d\tilde{\mathbf{u}}^{(i)} = \Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} - \mathbf{J}^{(i)-1}\mathbf{f}(\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)})$  comenzar con el proceso iterativo  $i$ .  
donde  $\mathbf{J}^{(i)}$  es la matriz de rigidez tangente, equivalente a la matriz Jacobiana de la función  $\mathbf{f}$ .

$$\mathbf{f} \leftarrow \Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} = -\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}}^{-1(i,k)} \left[ \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}}^T \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{u}}}^{int(i)} \right]$$

$\Delta\hat{\mathbf{u}}$  es el vector asociado a los desplazamientos regulares a nivel elemental de la última iteración global.

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}}^{(i,k)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{T}^{(i,k)} d\Gamma$$

$\mathbf{T}^{(i,k)} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \right)^{(i,k)}$  es la matriz del tensor constitutivo tracción-salto del material.

$$\mathbf{t}^{(i,k)} = -\frac{n\sigma_{t0}^2}{G_f(n+1)} \left[ 1 - \frac{\sigma_{t0} d[\mathbf{u}]^{(i,k)}}{G_f(n+1)} \right]^{-1}$$

donde  $n$  determina la variación de la curva de ablandamiento del concreto,  $G_f$  es la energía de fractura del concreto y  $\sigma_{t0}$  es su resistencia a tensión.

3. Se actualiza el salto:  $\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} = \Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} + d\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$
4. Checar la convergencia: Si  $\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} - \Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k-1)}$  es menor a un valor establecido previamente, ir a los pasos 5, 6, 7 y 8; y pasar al siguiente incremento de desplazamiento o carga  $k$  a nivel global, de lo contrario regresar al paso 2.
5. Se calculan los modos cinemáticos mejorados, las deformaciones, esfuerzos y reacciones internas en el concreto simple.

$$\Delta \mathbf{u}_c^{(k)} = \mathbf{N} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{N}_c \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$$

$$\Delta \varepsilon_c^{(k)} = \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{B}_c \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$$

$$\Delta \sigma_c^{(k)} = \mathbf{C} (\mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{B}_c \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k)})$$

$$\mathbf{f}_c^{int,(k)} = \mathbf{f}_{\hat{u}}^{int,(k)} - \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1(k)} \mathbf{f}_{\tilde{u}}^{int,(k)}$$

6. Una vez conocidos los desplazamientos asociados al sólido 2D de concreto reforzado, se calcula el comportamiento del acero de refuerzo: desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y fuerzas internas.

$$\Delta \mathbf{u}_s^{(k)} = \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs} \Delta \mathbf{u}_c^{(k)}$$

$$\Delta \varepsilon_s^{(k)} = \mathbf{B}_s^T \Delta \mathbf{u}_s^{(k)} + \Delta \varepsilon_s^{p,(k)}$$

$$\Delta \sigma_s^{(k)} = \mathbf{C}_s \Delta \varepsilon_s^{(k)}$$

$$\mathbf{f}_s^{int,(k)} = \mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \Delta \sigma_s d\Omega$$

7. Con el valor del salto se ingresa al modelo CEB–FIP Model Code y se determinan los desplazamientos relativos entre  $\Delta \mathbf{u}_s^{(k)}$  y  $\Delta \mathbf{u}_c^{(k)}$  *i.e.*  $\approx \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ , y se obtienen los coeficientes  $\tau_{ba}^{(k)}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$  y  $\tau_{bb}^{(k)}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ . Se calcula la matriz de rigidez tangente del acero de refuerzo acoplada con el modelo de adherencia.

$$\mathbf{K}_{\tilde{s}}^{(k)} = \frac{k_s^{(k)} \cdot k_{ba}^{(k)} \cdot k_{bb}^{(k)}}{k_s^{(k)} \cdot (k_{ba}^{(k)} + k_{bb}^{(k)}) + k_{ba}^{(k)} \cdot k_{bb}^{(k)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y se proyectan los coeficientes de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{\tilde{s}}^{(k)}$  sobre los grados de libertad del elemento de concreto

$$\mathbf{K}_{\tilde{s}}^{(k)} = \mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{\tilde{s}}^{(k)} \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs}$$

8. Finalmente, se calcula la matriz de rigidez tangente para el elemento  $n$  de concreto reforzado en el incremento  $k$ -ésimo de carga, así como el vector de cargas internas

$$\mathbf{K}_{cr}^{(k)} = \mathbf{K}_{\hat{u}\hat{u}} - \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1(k)} \mathbf{K}_{\tilde{u}\hat{u}} + \mathbf{N}_{cs}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{\tilde{s}}^{(k)} \mathbf{R} \mathbf{N}_{cs}$$

$$\mathbf{f}_{cr}^{int,(k)} = \mathbf{f}_{\hat{u}}^{int,(k)} - \mathbf{K}_{\hat{u}\tilde{u}} \mathbf{K}_{\tilde{u}\tilde{u}}^{-1(k)} \mathbf{f}_{\tilde{u}}^{int,(k)} + \mathbf{f}_s^{int,(k)}$$

La implantación de este algoritmo se llevó a cabo en el programa FEAP, desarrollado en la Universidad de California en Berkeley por el Prof. Taylor, [50].



# Capítulo 6

## Ejemplos numéricos

En el capítulo anterior se presentó con detalle la estrategia para dar solución al conjunto de ecuaciones no-lineales algebraicas que corresponden al modelo CRDDI, que permite simular el comportamiento no-lineal del concreto reforzado. Con el objetivo de demostrar la consistencia de esta formulación, en este capítulo se presenta la simulación numérica de una serie de elementos estructurales de concreto reforzado. Estos especímenes han sido analizados experimental y numéricamente por diversos investigadores.

Para obtener la curva carga-desplazamiento se emplea un *control de desplazamientos*. La prescripción de desplazamientos, a su vez, origina la presencia de esfuerzos dentro del espécimen; tales esfuerzos permitirán conocer las fuerzas nodales internas. Estas fuerzas son equivalentes a la carga externa, excepto por el signo menos, y son las que provocarían los desplazamientos prescritos.

Principalmente existen dos razones muy importantes para usar un control de desplazamientos [15]:

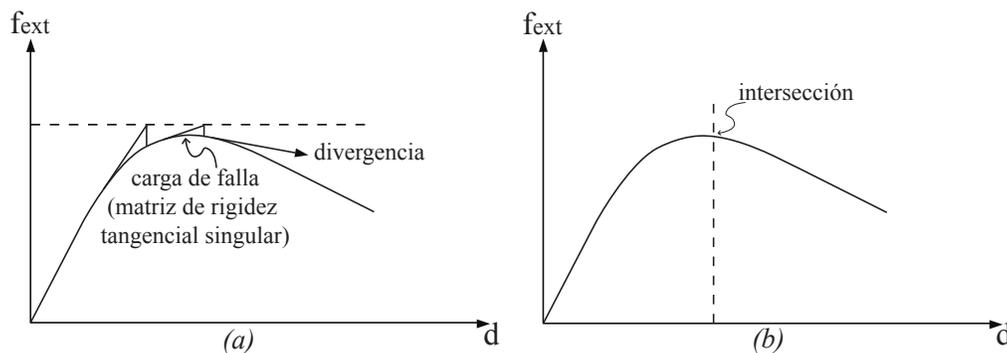


Figura 6.1: Control de a) carga, b) desplazamiento.

1. Bajo un *control de carga*, la matriz de rigidez tangente se vuelve singular no sólo en el punto límite de la curva carga-deflexión, donde se presenta falla global de la

estructura, sino también cuando se presenta un máximo local a lo largo de esta curva, figura 6.1a. La matriz de rigidez originada por el *control de desplazamientos* no se vuelve singular en ningún momento del análisis incremental, figura 6.1b.

2. La matriz de rigideces está mejor condicionada por lo que la solución tiende a converger con más rapidez.

En este trabajo de investigación, es de principal interés conocer la forma que tiene la curva carga–desplazamiento después de que se presenta la falla global de la estructura, porque de acuerdo a ello es posible conocer la forma en que se presentará la falla.

## 6.1. Comparación entre la rigidez del concreto simple y del concreto reforzado

Este primer ejemplo consiste únicamente en validar la formulación numérica presentada con la que se espera un incremento de la rigidez del concreto simple por la presencia del acero de refuerzo, por lo que el análisis corresponde a un problema elástico lineal. Considérese la viga simplemente apoyada de la figura 6.2<sup>1</sup>, la cual está sometida a una carga de 65 kN en el centro del claro. Para este problema se calcula la deflexión al centro del claro para la viga de concreto simple y de concreto reforzado. El módulo de elasticidad del concreto es  $E_c = 23,230$  MPa y el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.167$ . Para el acero de refuerzo, se tienen tres tipos de varilla, Núm. 2, Núm. 4 y Núm. 9, y su módulo de elasticidad  $E_s$  es 190, 200 y 218 MPa, respectivamente. A continuación se presentan las dimensiones y el armado de la viga.

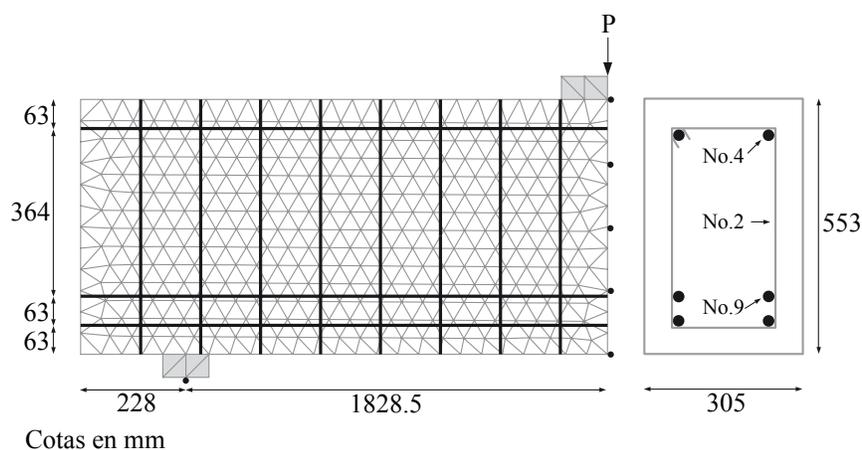


Figura 6.2: Viga de concreto reforzado.

<sup>1</sup>Con el fin de reducir la demanda computacional de los ejemplos realizados en esta tesis, únicamente fue modelada la parte simétrica de los elementos estructurales (excepto el ejemplo de la sección 6.2.).

En la figura 6.3 se presenta la respuesta de la viga sometida a la carga concentrada en el centro del claro. La deflexión, cuando no se incluyó el acero de refuerzo, fue de 0.2 mm, mientras que cuando sí se consideró el refuerzo fue de 0.1553 mm, es decir 28.7% menos, lo que representa un evidente incremento en la rigidez de la viga cuando ésta se encuentra reforzada.

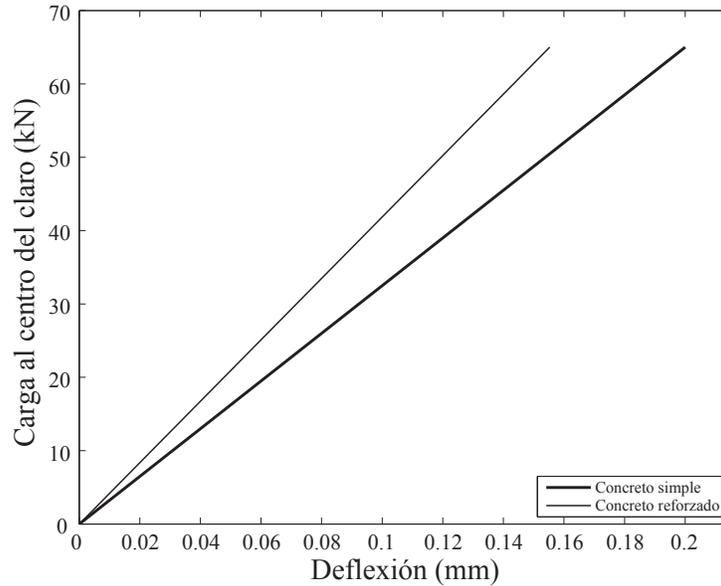
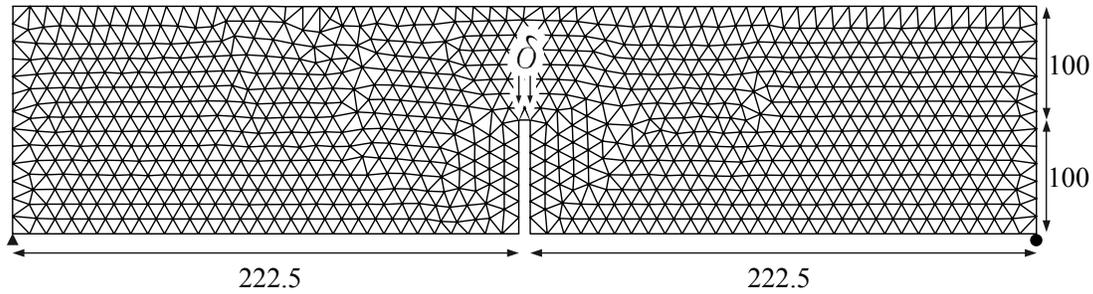


Figura 6.3: Rigidez de la viga de concreto simple y de concreto reforzado

## 6.2. Tensión indirecta en una viga de concreto simple

Para tener una mayor comprensión de la importancia de los diversos parámetros del ablandamiento del concreto, este ejemplo hace referencia a un problema de tensión indirecta con una viga de concreto simple, con una muesca en el centro del claro, figura 6.4. Este espécimen corresponde a un experimentado realizado por Kormeling y Reinhardt [31], y analizado numéricamente por Rots mediante un modelo de daño continuo presentado en su tesis [46], todos ellos de la Universidad de Delft, en Holanda. Los parámetros elásticos son  $E = 20,000 \text{ N/mm}^2$  y  $\nu = 0.2$ . Los parámetros inelásticos están dados por el esfuerzo de fluencia  $\sigma_{t0} = 2.4 \text{ N/mm}^2$  y la energía de fractura  $G_f = 113 \text{ N/m}$ . Las propiedades geométricas y las condiciones de frontera se presentan a continuación.

Para reproducir los resultados experimentales reportados por Kormeling y Reinhardt, la simulación numérica consistió en prescribir un control de desplazamientos  $\delta$  en el centro del claro (ver figura 6.4), mientras que la carga equivalente se determinó a partir de las reacciones verticales en los apoyos. En este ejemplo se empleó únicamente el Modelo de Discontinuidades Internas en su Aproximación Discreta para capturar el daño en el concreto simple, iniciándose éste en el Modo-I de falla, bajo el criterio de Rankine.



Ancho de la viga 100 mm, ancho de la muesca 5 mm

Cotas en mm

Figura 6.4: Viga con una muesca en el centro del claro.

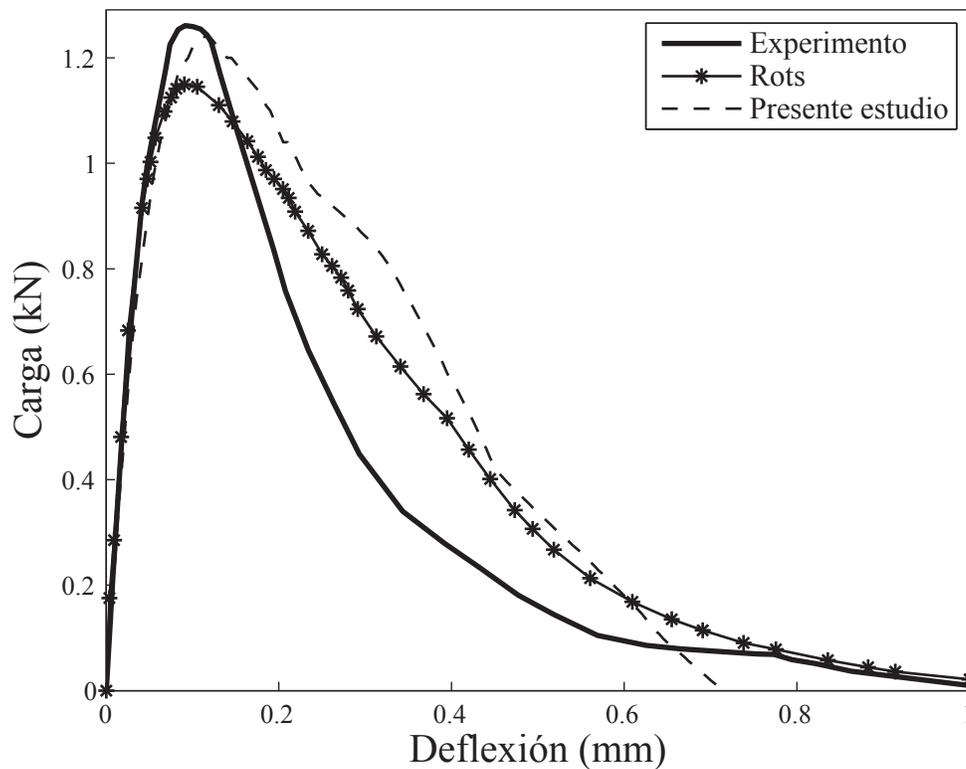


Figura 6.5: Diagrama carga-deflexión.

La carga máxima equivalente obtenida de de la simulación numérica fue de 1240 kN, mientras que la carga máxima reportada por los resultados experimentales fue de 1260 kN, es decir 1.58 % menor al valor esperado. No obstante, dentro del área de la ingeniería civil, resultados numéricos con diferencia del orden del 3 % respecto a los experimentales son aceptables.

Considerando la rama descendente del diagrama carga-deflexión de la figura 6.5 , se observa que la viga tiene un comportamiento dúctil, es decir, después de la resistencia máxima,

la degradación de la rigidez se presenta de forma suave, que es lo que se busca en los materiales empleados en la construcción para evitar una falla frágil, tanto a nivel local como global. En esta parte de la curva es notoria la diferencia entre los resultados numéricos y los experimentales. Una explicación a ello es que la función de ablandamiento empleada podría no disipar correctamente la energía elástica que cede el material. Otro punto importante a considerar, es que el modelo de daño está basando en una formulación bidimensional, cuando estrictamente, cualquier problema debe analizarse en tres dimensiones. No obstante, en términos generales, el Modelo de Discontinuidades Interiores reproduce satisfactoriamente el comportamiento hasta el punto de máxima resistencia. Asimismo, la similitud entre esta simulación y la de Rots presenta una buena correlación.

### 6.3. Viga de concreto reforzado

Burns y Siess [9], en el año de 1962, realizaron una serie de experimentos en vigas, marcos, conexión viga-marco, con el fin de determinar expresiones analíticas que sirviesen como base para el diseño de estos elementos estructurales. De las 59 vigas ensayadas, se analizarán numéricamente la viga J-4 para simular el resultado experimental. Esta viga también ha sido estudiada numéricamente por Kwak y Filippou [32], de la Universidad de California en Berkeley, y por Barzegar y Schnobrich [6], de la Universidad de Urbana en Illinois, por lo que también se realiza una comparación con los resultados obtenidos por estos investigadores.

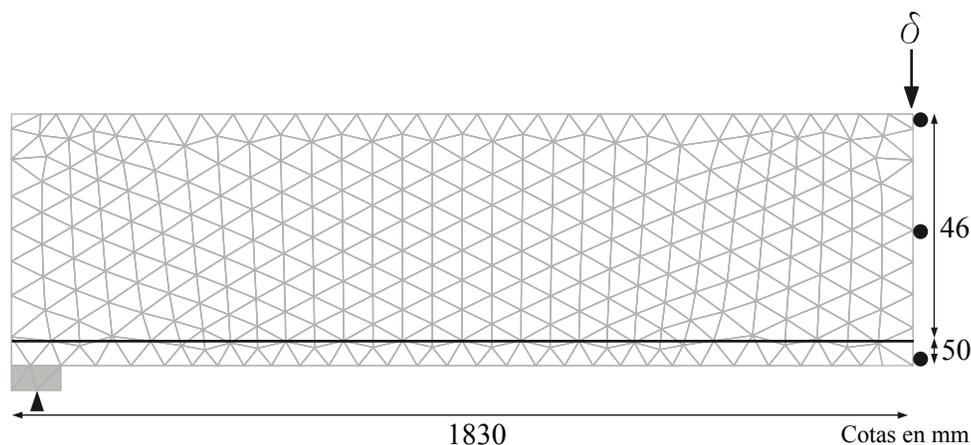


Figura 6.6: Geometría y armado de la viga.

La geometría y el armado del espécimen se dan en la figura 6.6. Las propiedades elásticas de los materiales usados son las siguientes: para concreto se tiene  $E_c = 26,200$  MPa, la resistencia a compresión  $f_c = 33.23$  MPa, el esfuerzo máximo a tensión  $\sigma_{t0} = 5\sqrt{f_c}$  MPa, la densidad de energía de fractura  $G_f = 8.75E-5$  kN/mm, y el módulo de Poisson  $\nu = 0.167$ . El módulo de elasticidad para el acero es  $E_s = 203,395$  MPa y su esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 310$  MPa. El porcentaje de acero respecto a la sección transversal de la viga es de 0.99 %.

Como se describió en el capítulo 4, en esta tesis se propone el uso de mallas no estructuradas, por lo que el acero de refuerzo puede cruzar libremente los elementos finitos que discretizan el volumen de la estructura.

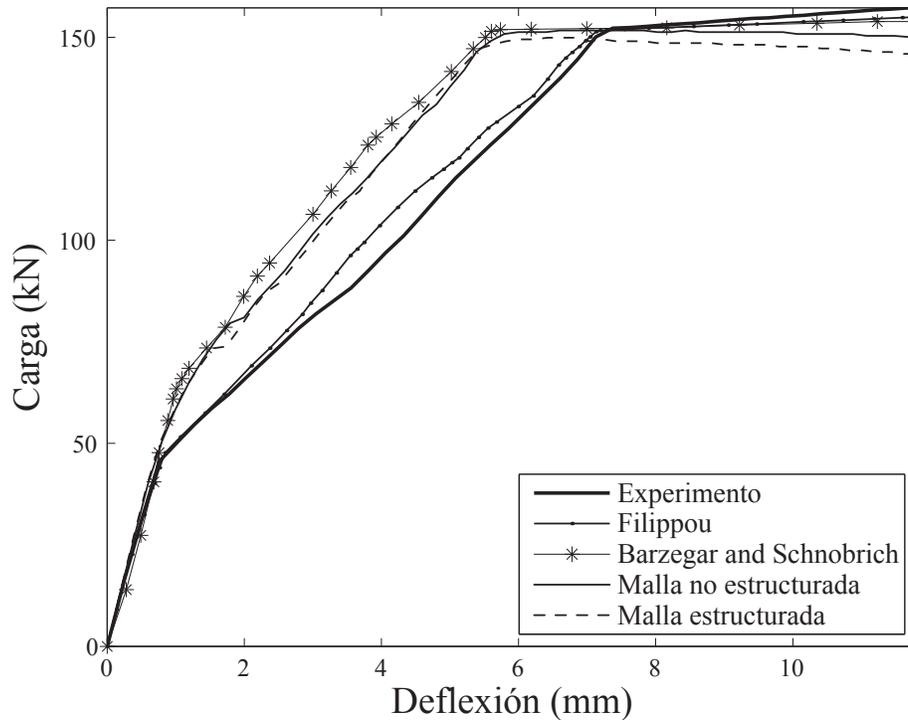


Figura 6.7: Diagrama carga-deflexión.

Para demostrar la correlación entre la respuesta que ofrece una malla estructura y una que no lo está, se calculó la curva carga-deflexión para la viga sometida a un incremento de desplazamientos  $\delta$  en el centro del claro (figura 6.6). La respuesta estructural, reacción (carga equivalente) *vs* deflexión se presenta en la figura 6.7. En ella se observa que las pendientes al inicio de la curva prácticamente son iguales; sin embargo, después de que comienza el agrietamiento, las curvas presentan una variación que no corresponde del todo con los resultados experimentales. Esto se debe, como se verá más adelante, a que este análisis se realizó considerando una conexión perfecta entre el acero y el concreto, a diferencia del trabajo de Kwak y Filippou [32], en el que se considera un modelo de adherencia. No obstante, las curvas tienen aproximadamente la misma forma, y en la etapa de la resistencia máxima los resultados prácticamente son iguales. La carga máxima reportada del experimento fue de 152.2 kN, mientras que la obtenida de la simulación numérica de 150.8 kN, es decir un 0.9 % de diferencia.

En la figura 6.8 se ilustra la respuesta de la simulación numérica considerando el daño por el agrietamiento en el concreto simple y el deslizamiento entre este y el acero de refuerzo. Se observa que la solución del modelo que toma en cuenta una compatibilidad perfecta de deformaciones entre ambos materiales sobrestima la capacidad de carga del elemento estructural.

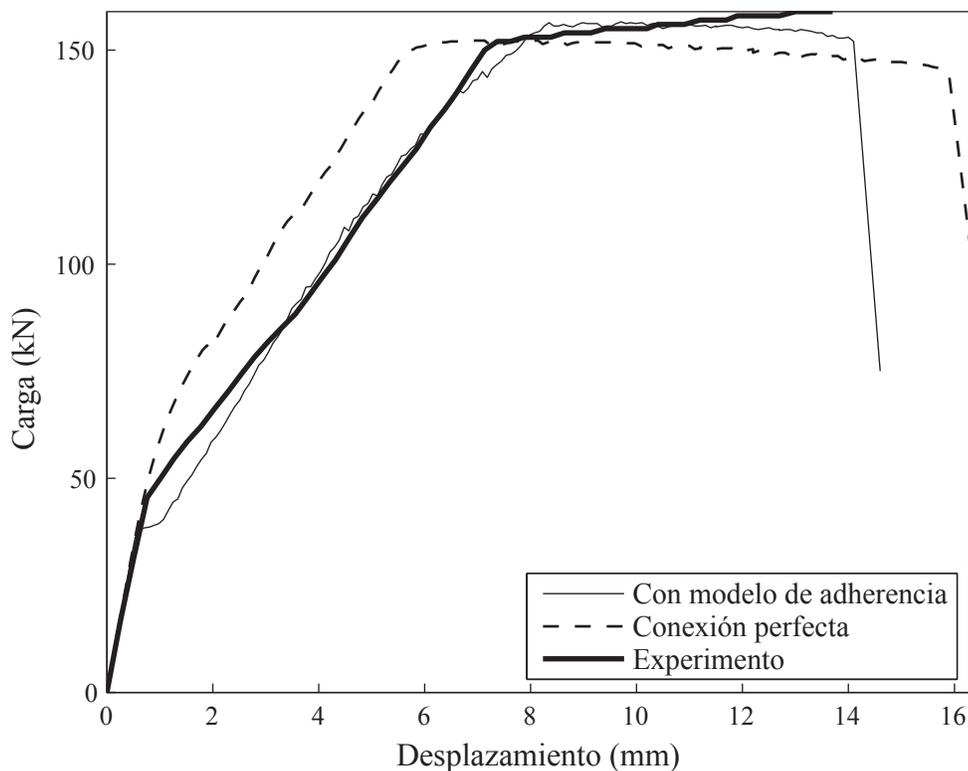


Figura 6.8: Curva experimental vs curva de la simulación numérica.

Esto se debe a que al prescindir del ablandamiento causado por el agrietamiento del concreto existente en la periferia del refuerzo, producto de una alta concentración de esfuerzos, no se libera la energía que generan los esfuerzos de adherencia en dicha zona, contrario al caso en el que sí se toma en cuenta el ablandamiento del concreto. Sin embargo, a pesar de que en la simulación numérica donde sí se toma en cuenta el deslizamiento entre ambos materiales ofrece resultados aceptables, no se logra reproducir por completo el comportamiento del elemento en el rango elástico lineal; esto se debe a que el elemento sólido de tres nodos ofrece una respuesta mucho más rígida comparada, por ejemplo, con un elemento cuadrilátero bidimensional; esto, desde luego, origina que el modelo de daño imponga el ablandamiento del concreto prematuramente para disipar la energía de fractura en aquellas zonas donde la capacidad del material se ha sobrepasado, afectando no sólo a un elemento finito en un estado incremental de carga, sino a varios de los elementos que se encuentren en su periferia. Para eliminar esta desventaja es recomendable emplear una malla fina cuando se utilizan elementos finitos triangulares.

Respecto a las mallas, es importante enfatizar que para esperar una respuesta similar ante una malla estructurada y una que no lo está, es que el tamaño de los elementos finitos, en ambos casos, tengan aproximadamente el mismo tamaño.

Por otro lado, generalmente cuando se realiza el estudio de elementos estructurales en laboratorio, se tiene la desventaja de que al emplear un control de carga y/o de despla-

zamiento, no se obtiene la curva completa del comportamiento del espécimen. La razón por la que en un experimento no se obtiene la curva completa, es porque la máquina que aplica la carga sobre el espécimen deja de trabajar cuando ésta detecta que el elemento ha fallado, es decir, cuando el elemento estructural deja de tomar carga. Esto no ocurre en la simulación numérica, específicamente cuando se aplica un control de desplazamientos. Esta es precisamente una de las mayores ventajas del análisis numérico, porque de él se puede extraer información valiosa que sirve para evaluar la capacidad estructural más allá de su resistencia máxima. A menudo, en el área de la ingeniería estructural es de principal interés conocer la forma en que fallan los elementos estructurales para adecuar su diseño, de tal forma que tenga un comportamiento dúctil. En la figura 6.8 se demuestra este aspecto de la simulación numérica. En ella se observa el nivel de desplazamiento para el cual la viga se dirige hacia el colapso.

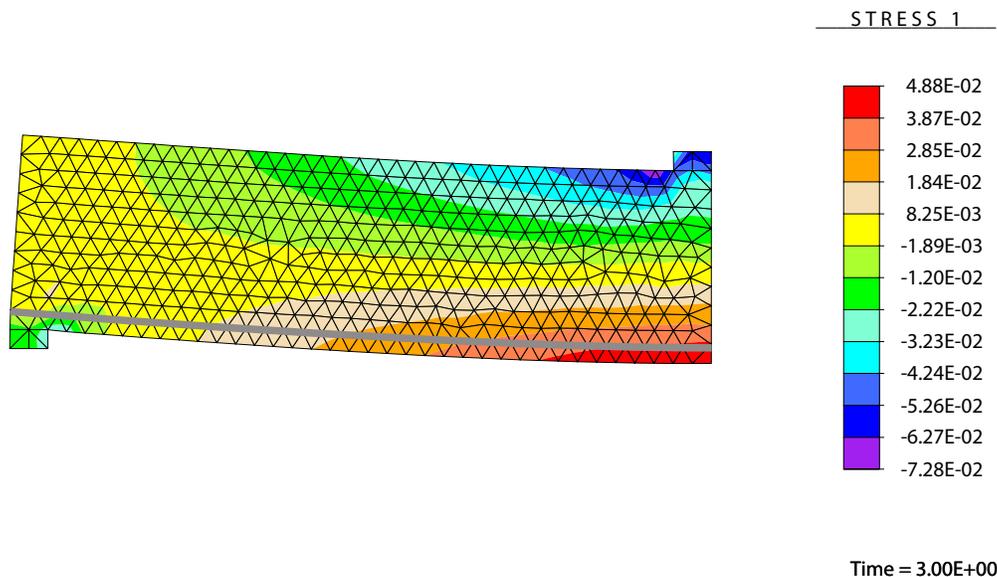


Figura 6.9: Estado de esfuerzos  $\sigma_{xx}$ .

## 6.4. Ménsula sujeta a carga vertical

Las ménsulas son elementos estructurales muy empleados en sistemas constructivos como el concreto presforzado, el cual se beneficia de las diversas cualidades que ofrece el concreto, como lo son la calidad y velocidad de construcción de los elementos, brindando un menor costo respecto al sistema de construcción *in situ*.

En la década de los años 70 del siglo pasado, el empleo de este tipo de elementos estructurales tuvo un incremento significativo, por lo que diversos investigadores concentraron sus esfuerzos para determinar expresiones matemáticas que permitiesen obtener su resistencia ante cargas verticales. Uno de los pioneros en el tema fue Fattuhi [17], quien llevó a cabo

un programa experimental en el que se estudiaron 32 ménsulas de concreto reforzado sujetas a carga vertical; a 26 de estas ménsulas se les añadió fibras de acero para incrementar su resistencia tanto a cortante como a flexión. De este trabajo, se obtuvieron una serie de expresiones empíricas para determinar la resistencia a cortante de ménsulas de concreto reforzado.

La finalidad de incrementar la resistencia en el concreto al añadir fibras de acero, radica principalmente en modificar el modo de falla de las ménsulas, *i.e.*, tratar de evitar el modo de falla frágil (por cortante), buscando un comportamiento dúctil, es decir, falla por flexión; no obstante, el modo de falla también depende del volumen de las barras de refuerzo principal y de la relación  $a/h$ , [17, 51, 36], (ver figura 6.10).

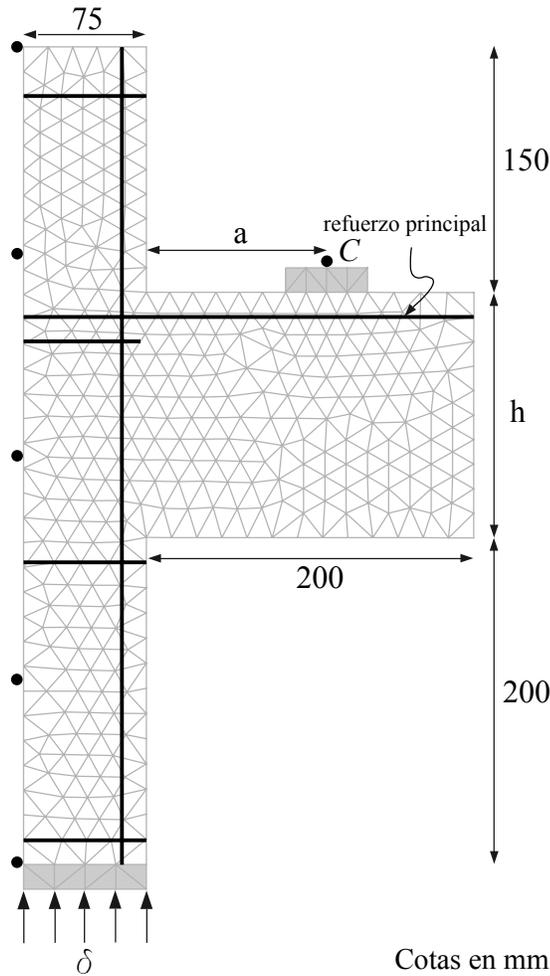


Figura 6.10: Ménsula de concreto reforzado.

Del trabajo experimental de Fattuhi [17], se simuló numéricamente el comportamiento de las ménsulas Núm. 23 y Núm. 37. Ambas ménsulas corresponden a la geometría presentada en la figura 6.10. La principal diferencia se encuentra en la relación  $a/h$  y el porcentaje del área del refuerzo principal  $A_s/bh$ .

Para la ménsula Núm. 23 se tiene que  $a_{23} = 110$  mm,  $h_{23} = 148.5$  mm y  $A_s/bh_{23} = 1.00\% \approx 2$  Núm. 4, mientras que para la ménsula Núm. 37,  $a_{37} = 135$  mm,  $h_{37} = 149.1$  mm y  $A_s/bh_{37} = 1.49\% \approx 3$  Núm. 4. El acero de refuerzo longitudinal para ambas columnas consta de 4 varillas del Núm. 4, y de 4 varillas del Núm. 2 para el acero transversal. Las propiedades elásticas del concreto reportadas por Fatuhhi fueron, para la ménsula Núm. 23, la resistencia última  $f_{cu}^{23} = 28.3$  MPa, la resistencia a tensión  $\sigma_{t0}^{23} = 5.12$  MPa, para la ménsula Núm. 37,  $f_{cu}^{37} = 32.2$  MPa,  $\sigma_{t0}^{37} = 5.71$  MPa; la densidad de energía de fractura  $G_f = 7.0E-05$  kN/mm. Las propiedades elásticas para las varillas del Núm. 2 son  $f_{su} = 666$  MPa y su esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 451$  MPa; para el acero del Núm. 4  $f_{su} = 684$  MPa y  $\sigma_y = 427$  MPa.

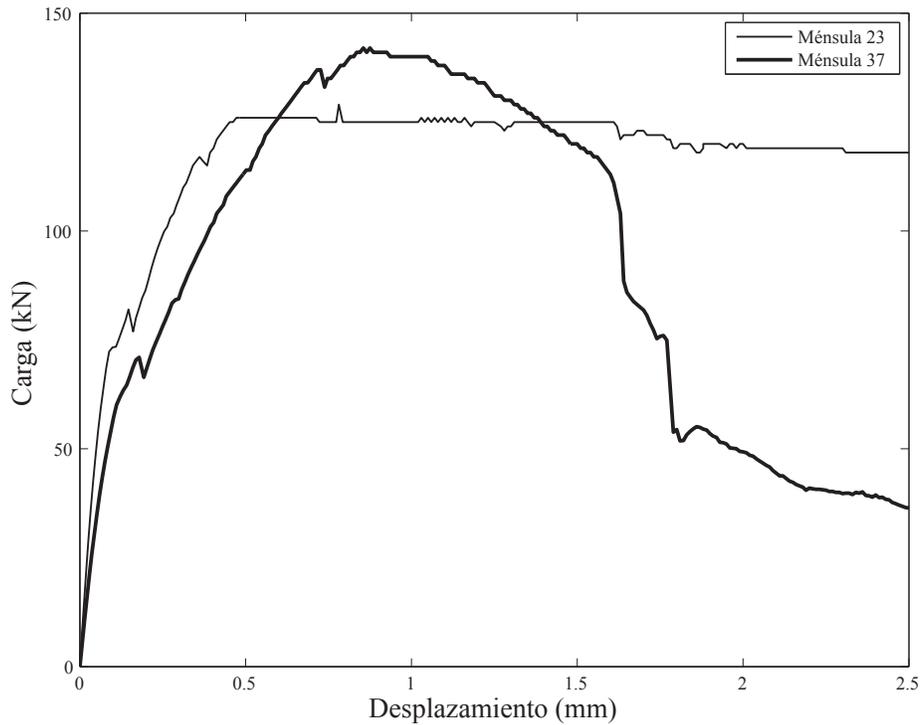


Figura 6.11: Diagrama carga–desplazamiento.

El análisis incremental se efectuó a través de la imposición de un control de desplazamientos, aplicado en la base de la columna, midiéndose la reacción en el apoyo  $C$  de la ménsula, figura 6.10. De esta forma se obtuvo la curva carga–desplazamiento de la figura 6.11. De la simulación numérica, la ménsula Núm. 23 alcanzó la carga última a los 129 kN, mientras que la prueba experimental reportó un valor de 126.5 kN. Para la ménsula Núm. 37, del análisis numérico se obtuvo una carga máxima de 142 kN, y del resultado experimental 140 kN. El error relativo en el análisis de ambas ménsulas resultó de 1.93% y 1.40%, respectivamente, ambos menores al 3% (porcentaje comúnmente empleado en el área de la ingeniería civil para validar resultados numéricos y analíticos). Evidentemente el modelo CRDDI logra reproducir los resultados experimentales satisfactoriamente.

A raíz de su trabajo experimental, Fattuhi concluyó que la falla en ambas ménsulas se

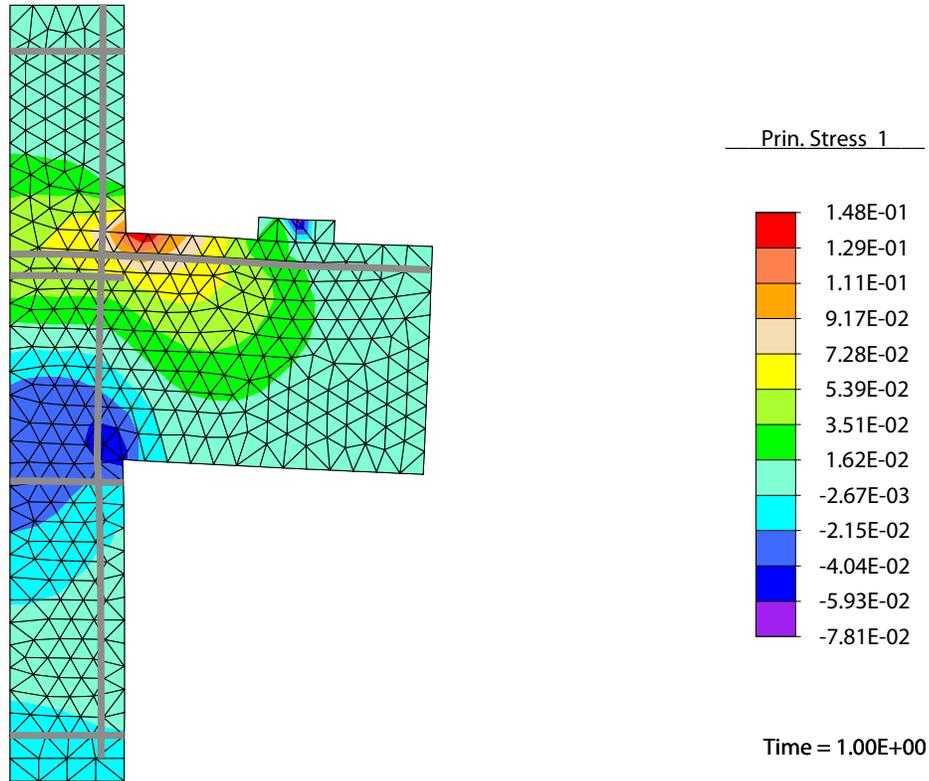


Figura 6.12: Estado de esfuerzos máximos principales para M23.

presenta por flexión [17], resultado consistente con los resultados de la simulación numérica. Sin embargo, a través de la simulación numérica también se puede obtener la curva completa del comportamiento del elemento, por lo que ésta herramienta puede permitir desarrollar un criterio más amplio respecto al diseño empleado, ya que es posible predecir qué ocurre, con cierta precisión, después de que se alcanza la resistencia última en el elemento.

Un punto importante a considerar es que la distancia  $a$  para la ménsula Núm. 23 es de 110 mm, mientras que para la ménsula Núm. 37 es 135 mm; al ser  $a^{37} > a^{23}$ , evidentemente el momento flector originado por la reacción en el apoyo  $C$ , respecto al borde de la columna-viga, será mucho mayor. Esto se verá influenciado en la rigidez tangente calculada en el proceso incremental. Es decir, mientras aumente el momento flector, incrementarán los esfuerzos internos en dicha zona y obviamente el agrietamiento será prematuro. Al observar las curvas de la figura 6.13, es posible percatarse que la rigidez de la ménsula Núm. 37 decrece antes de que lo haga la rigidez de la ménsula Núm. 23. Se puede concluir que la resistencia global de las ménsulas, además de depender de la cuantía de refuerzo principal, también es función de la distancia  $a$ . Mientras la distancia  $a$  se incrementa, la resistencia a la falla de la ménsula se verá reducida.

Con el fin de comparar la forma de las curvas de capacidad y el valor de la carga equivalente, presentado más allá del punto de la resistencia máxima, considérese un análisis

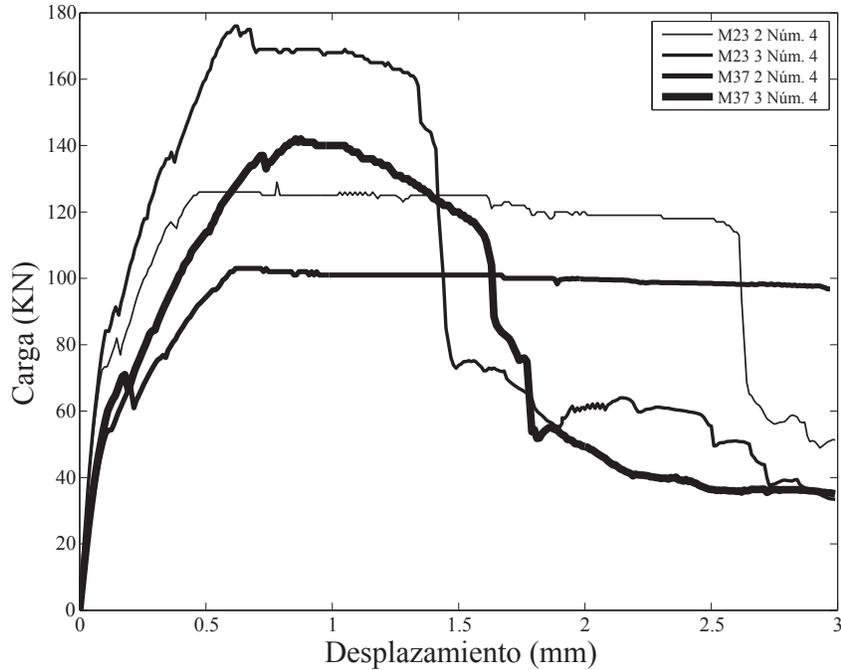


Figura 6.13: Comparación de la curva de capacidad con diferentes cuantías de refuerzo principal.

empleando 2 y 3 varillas del Núm. 4 para las ménsulas Núm. 23 y Núm. 37. Comparando las curvas de las ménsulas Núm. 23<sup>2,3</sup> y Núm. 37<sup>2,3</sup> (el superíndice 2 y 3 indica el número de varillas principales). Se observa que a medida que incrementan los desplazamientos, la carga equivalente (reacción en  $C$ ) correspondiente a las ménsulas Núm. 23<sup>3</sup> y Núm. 37<sup>3</sup> siempre es mayor de la que presentan las ménsulas Núm. 23<sup>2</sup> y Núm. 37<sup>2</sup>; sin embargo, después de que se alcanza la resistencia máxima, estas curvas ceden, producto de la sobre resistencia, lo que no ocurre con las ménsulas Núm. 27<sup>2</sup> y Núm. 37<sup>2</sup>, que si bien ofrecen una menor resistencia, presentan un incremento en su capacidad de deformación, es decir poseen una mayor ductilidad.

A continuación se presentan las ductilidades para los cuatro casos presentados. La ménsula Núm. 23<sup>2</sup> desarrolló una ductilidad  $\Delta u/\Delta y = 2.51 \text{ mm}/0.47 \text{ mm} = 5.32$ , mientras que la ménsula Núm. 23<sup>3</sup> desarrolló una ductilidad  $\Delta u/\Delta y = 1.33 \text{ mm}/0.5 \text{ mm} = 2.66$ , es decir la ménsula Núm. 23<sup>2</sup> tiene la capacidad de deformarse dos veces más que la ménsula Núm. 23<sup>3</sup>. Para la ménsula Núm. 37, se presentaron las siguientes ductilidades: la ménsula Núm. 37<sup>2</sup>, desarrolló una ductilidad  $\Delta u/\Delta y = 2.95 \text{ mm}/0.55 \text{ mm} = 5.36$ , mientras que la ménsula Núm. 37<sup>3</sup>,  $\Delta u/\Delta y = 1.59 \text{ mm}/0.51 \text{ mm} = 3.1$ , es decir, la ménsula Núm. 37<sup>2</sup> puede deformarse 3/4 más que la ménsula Núm. 37<sup>3</sup>. Las curvas de la figura 6.13 muestran cómo al variar la cantidad de refuerzo principal se puede modificar radicalmente el comportamiento de la ménsula, por lo que también es factible verificar mediante la simulación numérica el diseño de elementos estructurales.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis se validó y enriqueció el elemento desarrollado por Retama [43] para modelar el comportamiento no-lineal del concreto reforzado. La base matemática del modelo CRDDI se desarrolló a partir de una formulación variacional de la energía potencial total, tomando en cuenta los campos energéticos más importantes que determinan el comportamiento del concreto reforzado. En él se incluyen los fenómenos inelásticos, como la presencia de grietas, y la interacción entre el acero de refuerzo y el concreto que lo rodea.

Para simular el proceso de agrietamiento se recurrió al Modelo de Discontinuidades Interiores en su Aproximación Discreta. Antes de presentarse el daño se asumió un comportamiento elástico lineal; en el momento en que se sobre pasa el esfuerzo de fluencia en el concreto, se introduce una discontinuidad perpendicular a la dirección del esfuerzo principal máximo. La liberación de los esfuerzos de cohesión, tracciones en la superficie de la discontinuidad, se establecieron a través de una relación constitutiva tracción-salto; esta relación está gobernada por el modelo de zona cohesiva, asumiendo que el proceso de ablandamiento del concreto simple está gobernado por una ley exponencial. Asimismo se demostró que la matriz de rigideces, obtenida de la Formulación de Discontinuidades Interiores en su Aproximación Discreta, es simétrica.

Respecto al acero de refuerzo, se empleó el modelo de refuerzo embebido para tomar en cuenta su efecto dentro del sólido de concreto. A diferencia de las técnicas que emplean los modelos de refuerzo discreto y distribuido, este modelo ofrece una serie de ventajas significativas; por ejemplo, no se requieren mallas estructuradas para localizar al acero de refuerzo, lo que implícitamente reduce el costo computacional; para el análisis únicamente se toman en cuenta los grados de libertad que corresponden al sólido de concreto; se conservan las propiedades elásticas del acero de refuerzo y las del concreto simple, es decir, no se distribuyen uniformemente dentro del concreto, a diferencia de lo que hace la técnica del refuerzo distribuido. Por otro lado, en la técnica del refuerzo discreto, considerando adherencia perfecta, el número de grados de libertad corresponde a los del elemento de concreto más los del acero de refuerzo; asimismo, si se considera el efecto de la adherencia, hay que emplear elementos de interfaz, los cuales generan grados de libertad extra.

Asimismo, se asume que el acero de refuerzo desarrolla un comportamiento elasto-plástico

perfecto, es decir, se desprecia el endurecimiento por deformación e isotropo; no obstante, sí se toma en cuenta, de forma aproximada, la interacción entre éste y el concreto que lo rodea. Esta consideración fue fundamental para realizar este trabajo de investigación, ya que uno de los objetivos fue desarrollar una estrategia que tomara en cuenta los mecanismos que ocasionan la no-linealidad en el comportamiento del concreto reforzado. Se demuestra mediante el modelo Interacción Concreto-Acero, la posibilidad de implantar un modelo constitutivo que gobierne la interacción entre el concreto y el acero de refuerzo. Este modelo es capaz de acoplar las propiedades del acero de refuerzo con la interfaz de la adherencia permitiendo modelar el deslizamiento entre ambos materiales. Para determinar los esfuerzos de adherencia, producto de los desplazamientos relativos entre ambos materiales, se emplearon las expresiones matemáticas incluidas en el Código de Diseño CEB-FIP Model Code 1990.

Respecto a la simulación numérica, se demostró que existe, en términos generales, una buena correlación respecto a los resultados obtenidos en laboratorio, tomados de la literatura especializada en el estudio del comportamiento del concreto reforzado.

El primer ejemplo consistió en demostrar el incremento de la rigidez global de una viga cuando se incluye el acero de refuerzo dentro del concreto simple. El segundo ejemplo consistió en analizar hasta la falla una viga de concreto sin acero de refuerzo, con una muesca al centro del claro. Esta viga fue estudiada experimentalmente por Kormeling y Reinhardt, y simulada numéricamente por Rots (todos ellos de la Universidad de Delft, en Holanda). Este ejemplo sirvió para validar la consistencia numérica del Modelo de Discontinuidades Interiores en su Aproximación Discreta. Se observó que existe una buena correlación de la simulación numérica respecto a los resultados experimentales en la rama ascendente de la curva; sin embargo, en la pendiente negativa se presentó una variación que no corresponde del todo con las pruebas de laboratorio. Esto puede deberse a que la función de ablandamiento empleada en este trabajo de investigación no libera satisfactoriamente la energía ocasionada por el daño en el concreto. No obstante, en términos generales, el modelo representa las características principales del comportamiento de la viga, obtenidas en el laboratorio.

El tercer ejemplo, consistió en determinar la resistencia de una viga de concreto simplemente reforzada, sometida a carga vertical en el centro del claro. Los estudios experimentales fueron realizados por Burns y Siees [9], de la Universidad de Illinois. Los resultados numéricos obtenidos en esta investigación se mostraron congruentes con los reportados en las pruebas experimentales. También se realizó una comparación con simulaciones realizadas por Kwak y Filippou [32], de la Universidad de California en Berkeley y por Barzegar y Schnobrich [6], de la Universidad de Illinois. Este ejemplo demostró la importancia de tomar en cuenta el mecanismo de adherencia en de la modelación de elementos estructurales sometidos a cargas que los lleven colapso, ya que este fenómeno afecta la capacidad de carga ante este tipo de escenarios. Por otro lado para localizar al acero de refuerzo se emplearon dos tipos de mallas, una estructurada y una que no lo está, demostrando que se obtienen resultados aproximadamente iguales. Sin embargo, ello depende de que la densidad de los elementos empleados sea del mismo orden en ambos casos. El objetivo principal de emplear el uso de mallas no estructuradas, es que la configuración del acero de refuerzo

por lo general siempre tiene una forma irregular, por lo que construir mallas estructuradas puede resultar bastante laborioso y poco práctico para los fines que demanda la ingeniería estructural.

El cuarto ejemplo consistió en la simulación del comportamiento de las ménsulas Núm. 23 y Núm. 37 de concreto reforzado. Los resultados de laboratorio se obtuvieron del trabajo realizado por Fattuhi. El número de varillas de refuerzo principal empleado fueron 2 del Núm. 4 y 3 Núm. 4, para ambas ménsulas. El objetivo principal de este ejemplo fue determinar la ductilidad desarrollada por las ménsulas, con diferentes cantidades de acero de refuerzo principal. Se concluyó que las ménsulas que contienen 2 varillas del Núm. 4, presentaron una ductilidad aproximadamente del doble respecto a las que poseen una cantidad de 3 varillas del Núm. 4. La razón principal de esta diferencia radica en que al emplear una mayor cantidad de acero de refuerzo principal, los elementos poseen una sobre resistencia; sin embargo, el modo de falla global desarrollado fue frágil, contrario a lo buscado en un diseño dúctil. En este ejemplo, la simulación numérica no reportó deslizamiento entre el concreto y el acero de refuerzo. Esto probablemente sea uno de los beneficios del empleo de un concreto de alta resistencia, que es el que utilizó [17] en sus pruebas experimentales.

Adicionalmente, se determinó la influencia que tiene la distancia de la columna al apoyo sobre el cual se aplica la carga. Cuando el apoyo sobre el cual se aplica la carga se aleja de la columna, se incrementa el momento flector, intensificándose los esfuerzos de tensión entre la columna y la viga, ocasionando un decremento en la resistencia global de la ménsula.

En términos generales, esta serie de ejemplos numéricos demuestran que el Elemento Finito Enriquecido, para el estudio del comportamiento de estructuras de concreto reforzado, ofrece resultados aproximados bastante coherentes.

Por otro lado, cuando se determinan expresiones de diseño de elementos estructurales se recurre principalmente a ensayos de laboratorio. Esta actividad demanda un presupuesto económico considerable. Se necesita materia prima para construir los especímenes, máquinas de laboratorio para realizar los experimentos, personal que maneje estos instrumentos, laboratoristas que estén al tanto del control de las pruebas. Además, el tiempo que se emplea para llevar un programa experimental puede durar años. Asimismo, para obtener resultados confiables de las pruebas en laboratorio, se debe tener un control detallado del proceso de carga, condiciones de frontera, entre otros. Es aquí donde la simulación numérica tiene un impacto económico importante. Esta actividad es, sin duda, relativamente menos costosa. Por tanto, en la actualidad el análisis numérico resulta bastante atractivo, y los resultados obtenidos tienen un nivel de aproximación bastante aceptable.

El desarrollo del conocimiento científico en el estudio del daño, y su implementación tanto en la mecánica aplicada como en la simulación numérica, continuará en proceso de expansión, y sin duda, en un tiempo no muy lejano se analizarán estructuras completas y complejas geoméricamente, bajo sollicitaciones extremas, con un grado de precisión muy elevado, en un tiempo de análisis relativamente corto.



# Apéndice A

## Modelo de refuerzo embebido

En la sección 4.5.2 del capítulo 4, se describió la forma en que se transforma la matriz de rigidez del acero de refuerzo embebido para poder sumarla con la matriz de rigidez del elemento de concreto. En este apéndice se describe de manera detallada las principales características de la matriz de proyección  $\mathbf{N}_{es}$ , que depende básicamente de las funciones de forma del elemento finito triangular de deformación constante y de las coordenadas de intersección del acero de refuerzo con los bordes del elemento finito.

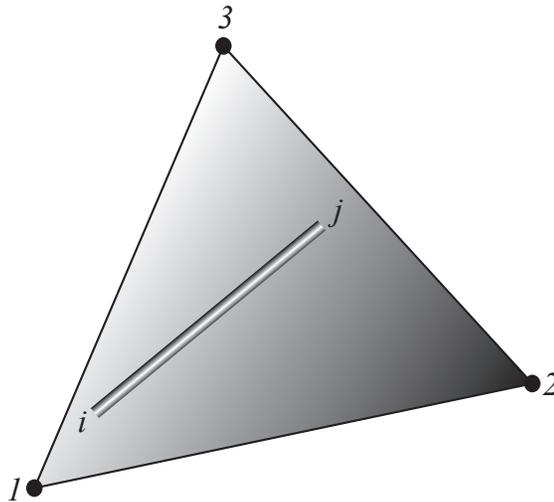


Figura A.1: Elemento de concreto reforzado triangular de deformación constante.

De forma análoga a como se proyectan las tracciones impuestas sobre la frontera de un elemento hacia los grados de libertad de los nodos mediante las funciones de interpolación, aquí se usará la misma técnica, sólo que en este caso la estrategia consiste en proyectar los coeficientes de las columnas de la matriz de rigidez del refuerzo de acero sobre los grados de libertad del elemento de concreto. De esta forma se obtiene una matriz de rigidez equivalente para el refuerzo, la cual es posible sumar con la matriz del elemento de concreto.

Consideremos las funciones de forma asociadas a los nodos del elemento triangular de deformación constante de la figura A.1

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y}{2 \cdot A} \\
N_2 &= \frac{a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y}{2 \cdot A} \\
N_3 &= \frac{a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y}{2 \cdot A}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\
a_2 &= x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\
a_3 &= x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1
\end{aligned} \tag{A.2}$$

y el área  $A$  del elemento triangular se obtiene a través de:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3) \tag{A.3}$$

La matriz  $\mathbf{N}_{cs}$  tiene dimensiones  $(4 \times n_{st} \cdot n_c)$ ,  $n_{st}$  corresponde a la dimensión espacial del problema y  $n_c$  es el número de nodos del elemento de concreto, en este caso el elemento triangular posee 2 grados de libertad por nodo, lo que conduce a que la matriz  $\mathbf{N}_{cs}$  sea de  $(4 \times 6)$ ; las primeras dos filas de esta matriz corresponden a la proyección de la rigidez del extremo  $i$  del refuerzo, mientras que las últimas dos al extremo  $j$ , por lo que en ellas se sustituyen las coordenadas  $(x_i, y_i)$  y  $(x_j, y_j)$ , respectivamente.

$$\mathbf{N}_{cs} = \begin{bmatrix} N_1^i & 0 & N_2^i & 0 & N_3^i & 0 \\ 0 & N_1^i & 0 & N_2^i & 0 & N_3^i \\ N_1^j & 0 & N_2^j & 0 & N_3^j & 0 \\ 0 & N_1^j & 0 & N_2^j & 0 & N_3^j \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Es fácil demostrar que cuando los extremos del refuerzo se encuentran sobre los bordes del elemento de concreto, los coeficientes de la matriz  $\mathbf{N}_{cs}$  varían entre 0 y 1.

# Apéndice B

## Modelo de adherencia del Código Europeo de Diseño CEB–FIP Model Code 1990

En la sección 4.5.3 del Capítulo 4 se presentó el Modelo de Interacción Concreto–Acero empleado en esta tesis. Se desarrolló la formulación para tomar en cuenta la variación de la adherencia, producto del deslizamiento entre el acero y el concreto que lo rodea. Para tener consistencia con la física del problema, se recurrió al modelo que proporciona los esfuerzos de adherencia, incluido en el Código de Diseño CEB–FIP Model Code 1990, del Comité Euro–International Du Beton [10]. Este modelo depende principalmente de los desplazamientos relativos existentes entre el concreto y el acero, originados por la degradación de la adherencia. A continuación se describe tal modelo, así como los factores involucrados para poder implantarlo dentro del Modelo Interacción Concreto–Acero.

La adherencia depende de varios factores como el corrugado, resistencia del concreto, posición y orientación del refuerzo, estado de esfuerzos, condiciones de frontera y recubrimiento del concreto. Por lo tanto el diagrama de la figura B.1 puede ser considerado como una curva media estadística, aplicable como una formulación promedio [10].

La primera parte de la curva se atribuye al momento en que la varilla comienza a deslizarse dentro de concreto, caracterizada por aplastamiento local y micro–agrietamiento. En este rango, los esfuerzos de adherencia incrementan con una proporción no lineal. La primer meseta horizontal ocurre solamente para concreto confinado, en el que se ha presentado un estado considerable de aplastamiento. La rama descendente representa la reducción en los esfuerzos de adherencia debido a la aparición de grietas en el concreto que rodea al refuerzo. La última parte representa el desarrollo de esfuerzos de fricción ocasionados por el contacto entre ambos materiales, pero no son producto de la adherencia porque ésta ya ha dejado de existir como tal, es decir representa un estado de esfuerzos residuales.

Para que se desarrollen los esfuerzos de adherencia hay que considerar lo siguiente:

El refuerzo y el concreto deben tener las mismas deformaciones ( $\epsilon_s = \epsilon_c$ ) en aquellas zonas

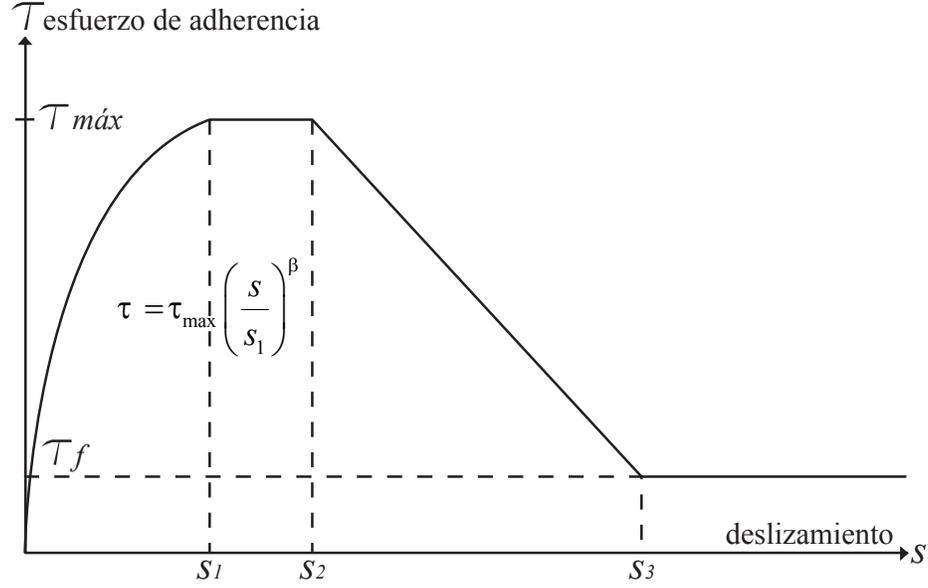


Figura B.1: Relación adherencia–deslizamiento para carga monótona creciente.

donde la estructura está sujeta a esfuerzos de compresión, y en las partes no agrietadas donde se demandan esfuerzos de tensión.

En las zonas transversales agrietadas, las fuerzas de tensión en el acero son transferidas hacia la grieta. En general, los desplazamientos absolutos del acero  $U_s$  y los del concreto  $U_c$  entre dos grietas o a lo largo de la longitud de desarrollo  $l_d$ , son diferentes.

Los desplazamientos relativos  $s = U_s - U_c$  generan la liberación de los esfuerzos de adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo. La magnitud de estos esfuerzos depende principalmente de la superficie del refuerzo, el deslizamiento  $s$ , la resistencia del concreto  $f_c$  y la posición del refuerzo. Una parte de los esfuerzos de tensión del refuerzo se liberan ya sea entre dos grietas o a lo largo de la longitud de desarrollo  $l_d$ , y son transmitidos al concreto por la adherencia.

La variación de los desplazamientos relativos a lo largo de la longitud de desarrollo  $l_d$  está caracterizada por la diferencia de deformaciones

$$\frac{ds}{dx} = \epsilon_s - \epsilon_c \tag{B.1}$$

Dependiendo de la elección del coeficiente  $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ , se puede reproducir una amplia gama de la forma de la curva adherencia–deslizamiento; comenzando por un esfuerzo constante de adherencia  $\beta = 0$  hasta una relación lineal  $\beta = 1$ .

Los parámetros dados en la Tabla B.1, son válidos para refuerzo corrugado de acuerdo a normas estándar internacionales, y son influenciados principalmente por el confinamiento, condiciones de adherencia y resistencia del concreto.

Para cargas monótonas crecientes, los esfuerzos de adherencia entre el concreto y las barras de refuerzo pueden ser calculados con las ecuaciones (B.2), que son función de los desplazamientos relativos  $s$ .

$$\tau = \begin{cases} \tau_{max} \cdot \left(\frac{s}{s_1}\right)^\beta & si \ 0 \leq s \leq s_1 \\ \tau_{max} & si \ s_1 \leq s \leq s_2 \\ \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \cdot \left(\frac{s-s_2}{s_3-s_2}\right) & si \ s_2 \leq s \leq s_3 \\ \tau_f & si \ s_3 < s \end{cases} \quad (B.2)$$

Para barras corrugadas con área  $A_{sr} > A_{sr_{min}}$ , el esfuerzo de adherencia  $\tau_{max}$  incrementa y el deslizamiento  $s_1$  decrece; sin embargo este efecto se desprecia. Además, la rigidez de la rama ascendente difiere cuando el concreto está confinado, sin embargo, este efecto también se desprecia. Finalmente también se desprecia el efecto que puede tener el compactado y las características de curado del concreto.

Cuadro B.1: Parámetros del modelo de adherencia del Código Europeo CEB-FIP Model Code 1990, [10]

Parámetros	Concreto No-Confinado †		Concreto Confinado ††	
	Buenas cond. de adherencia	Otras cond. de adherencia	Buenas cond. de adherencia	Otras cond. de adherencia
$s_1 \text{ mm}$	0.6	0.6	1.0	1.0
$s_2 \text{ mm}$	0.6	0.6	3.0	3.0
$s_3 \text{ mm}$	1.0	2.5	$bc$	$bc$
$\beta$	0.4	0.4	0.4	0.4
$\tau_{max} \text{ Mpa}$	$2.0 \sqrt{f_c}$	$1.0 \sqrt{f_c}$	$2.5 \sqrt{f_c}$	$1.25 \sqrt{f_c}$
$\tau_f \text{ Mpa}$	$0.15 \tau_{max}$	$0.15 \tau_{max}$	$0.4 \tau_{max}$	$0.4 \tau_{max}$

$bc$  indica la separación del corrugado.

† Falla por separación del concreto del acero.

†† Falla por cortante entre el concreto y el corrugado.

Los valores de las columnas 1,2 y 3 son válidos cuando

$$A_{sr_{min}} = 0,25nA_s \quad (B.3)$$

donde

$A_{sr_{min}}$  es el área de los estribos (dos ramas).

$n$  número de barras sujetas por los estribos.

$A_s$  área de una barra de refuerzo.

Los valores de las columnas 4 y 5 se usan para concreto confinado en buenas condiciones (concreto recubierto  $c \geq 5\phi_s$ , separación  $> 10\phi_s$ ), donde  $\phi_s$  es el diámetro del refuerzo.



# Referencias

- [1] ACI. Finite element analysis of fracture in concrete structures: State of the Art. Informe Técnico 446.3R-97, ACI, 1997.
- [2] J. Alfaiate. Strong discontinuities embedded in finite elements. Informe Técnico Relatório ICIST, DTC no. 09/00, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2000.
- [3] J. Alfaiate, E. B. Pires, y J. A. C. Martins. A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete. *Computers and Structures*, 63(1):17-26, 1997.
- [4] J. Alfaiate, G. N. Wells, y L. J. Sluys. On the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-I and mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(6):661-686, 2002.
- [5] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Archive of Applied Mechanics*, 7:55-129, 1962.
- [6] F. Barzegar y W. C. Schnobrich. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete under short term monotonic loading. Informe Técnico SRS No. 530, Civil Engineering Studies. University of Illinois, Urbana, IL., 1986.
- [7] K. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1996.
- [8] T. Belytschko, J. Fish, y B. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70:59-89, 1988.
- [9] N. H. Burns y C. P. Siess. Load-deformation characteristics of beam-bolumn connections in reinforced concrete. Civil Engineering Studies, SRS No. 234, University of Illinois, Urbana, IL, 1962.
- [10] CEB-FIP Model Code. Informe Técnico, Comite Euro-International du Beton, Suiza, 1990.
- [11] V. Cervenka, R. Eligehausen, y R. Pukl. SBETA-Computer program for nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures. Informe Técnico 90/1, University of Stuttgart, Stuttgart, Alemania, 1990.

- [12] R. J. Cope, P.V. Rao, L.A. Clark, y P. Norris. Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs. *Numerical methods for nonlinear problems*. Taylor, C., Hinton, E. y Oden, D.R.J. Eds., Pineridge Press, Swansea, Reino Unido, 457–470, 1980.
- [13] R. De Borst. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 2:35–36, 1985.
- [14] R. De Borst, M. A. Gutiérrez, G. N. Wells, J. J. C. Remmers, y H. Askes. Cohesive–zone models, higher–order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:289–315, 2004.
- [15] R. De Borst y L. J. Sluys. *Computational methods in non-linear solid mechanics*. Delft University of Technology, Delft, Holanda, 1999.
- [16] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8:100–104, 1960.
- [17] N. I. Fatuhhi. Strength of SFRC corbels subjected to vertical load. *ASCE Journal of Structural Division*, 116(3):701–718, 1990.
- [18] L. E. Fernández. *Modelado numérico de la fractura en el concreto*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2002.
- [19] H. A. Franklin. *Nonlinear analysis of reinforced concrete frames and panels*. Tesis de Doctorado, University of California, Berkeley, CA, 1970.
- [20] Y. C. Fung. *Foundations of solid mechanics*. Prentice–Hall, Inc., Nueva Jersey, 1965.
- [21] A. Ghali y A. Neville. *Análisis estructural*. Editorial Diana, S. A., D.F., México, 1983.
- [22] R. C. Gonçalves. *Modelação de vigas de betão reforçadas com chapas metálicas*. Informe Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2005.
- [23] A. Hillerborg, M. Modeer, y P. E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–782, 1976.
- [24] T. J. R. Hughes. *The finite element method*. Prentice–Hall, INC., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1987.
- [25] A. R. Ingraffea. *Discrete fracture propagation in rock: Laboratory Test and Finite Element Analysis*. Tesis de Doctorado, University of Colorado, Boulder, EUA, 1977.
- [26] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:307–330, 2000.

- [27] G. Juárez. *Modelado numérico de problemas de fractura en sólidos mediante discontinuidades interiores*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2006.
- [28] G. Juárez y A. G. Ayala. Variational formulation of the material failure process in solids by embedded discontinuities model. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25:26–62, 2009.
- [29] L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tehk. Nauk*, 8:26–31, 1958.
- [30] A. Katz. Bond mechanism of FRP rebars to concrete. *Materials and Structures*, 32:761–768, 1999.
- [31] H. A. Kormeling y H. W. Reinhardt. Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. Informe Técnico 5–83–12, Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Delft, Holanda, 1983.
- [32] H. G. Kwak y F. C. Filippou. Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Informe Técnico No. UCB/SEMM–90/14, Department of civil Engineering, University of California Berkeley, Berkeley, CA, 1990.
- [33] H. R. Lotfi y P. B. Shing. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1307–1325, 1995.
- [34] L. E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1969.
- [35] H. Marengo. Analisis de riesgo de falla en presas. Informe Técnico, Academia de Ingeniería A.C., D.F., México, 2011.
- [36] A. Mordini. *Three–dimensional numerical modeling of reinforced concrete*. Tesis de Doctorado, University of Parma, Parma, Italia, 2006.
- [37] D. Ngo y A. C. Scordelis. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal*, 64:152–163, 1967.
- [38] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(21):3575–3600, 1996.
- [39] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(21):3601–3623, 1996.
- [40] R. Park y T. Paulay. *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva Zelanda, 1975.

- [41] K. R. Rajagopal. *Nonlinear analysis of reinforced concrete beams, beam-columns and slabs by finite elements*. Tesis de Doctorado, Iowa State University, Ames, Iowa, 1976.
- [42] Y. R. Rashid. Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7(4):334–344, 1968.
- [43] J. Retama. *Formulation and approximation to problems in solids by embedded discontinuity models*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2010.
- [44] J. Retama y G. Ayala. Simulación del comportamiento mecánico del concreto reforzado considerando un modelo de daño en el concreto y el comportamiento no lineal del acero. SMIE 2012, XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Acapulco, México, 2012.
- [45] J. Retama, G. Ayala, y J.J. Gutiérrez. Modelado Numérico del Daño en Estructuras de Concreto Reforzado. *IMCYC. Concreto y Cemento. Investigación y Desarrollo*, 2(5):37–46, 2014.
- [46] J. G. Rots. *Computational modeling of concrete fracture*. Tesis de Doctorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda, 1988.
- [47] J. G. Rots, P. Nauta, y G.M.A. Kusters. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON*, 30(1):1–48, 1985.
- [48] J. C. Simo y T. J. R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer–Verlag, Nueva York, NY, 1998.
- [49] J. C. Simo, J. Oliver, y F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain–softening in rate–independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12:277–296, 1993.
- [50] R. L. Taylor. FEAP: A Finite Element Analysis Program, theory manual. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 2008.
- [51] J. M. Yang, J. H. Lee, Y. S. Yoon, W. D. Cook, y D. Mitchell. Influence of steel fibers and headed bars on the serviceability of high–strength concrete corbels. *ASCE Journal of Structural Division*, 123–129, 2012.
- [52] O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor. *The finite element method. Volume 1: The Basis*. Butterworth–Heinemann, Oxford, Inglaterra, 2000.