UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

FUNCIONES DE EMPACAMIENTO EN SECTORES ENTEROS MULTIDIMENSIONALES

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JUAN CARLOS GARCÍA ALTAMIRANO

DIRECTOR DE LA TESINA

LUIS B. MORALES MENDOZA
IIMAS

MÉXICO, D. F. 8 DE AGOSTO DEL 2014.

Índice general

Introducción

En este trabajo denotaremos por $\mathbb{R}$ a los números reales y por $\mathbb{N}$ a los números enteros no negativos. Una *función de empacamiento* sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es una correspondencia biyectiva entre el conjunto Ω y el conjunto $\mathbb{N}$. Un *polinomio de empacamiento* en Ω es una función de empacamiento que es un polinomio. Las funciones de empacamiento son usadas en computación para almacenar y recuperar arreglos arbitrariamente grandes multidimensionales en una memoria lineal (ver [1]).

Sea $n > 1$, para cualesquiera números reales positivos $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$, definimos el *sector real multidimensional* (en $\mathbb{R}^n$)

$$I(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid 0 \leq x_{i+1} \leq \alpha_i x_i, \ i = 1, \ldots, n-1\} \tag{1}$$

Un sector multidimensional es llamado *entero*, *racional* o *irracional*, si $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ son enteros, racionales o irracionales, respectivamente.

Posteriormente, sólo nos referiremos como sector (real, entero,...) en vez de sector multidimensional.

De manera análoga se define el sector

$$I(\infty, \ldots, \infty) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\} = \mathbb{N}^n. \tag{2}$$

El presente trabajo pretende ser el primer paso de una investigación más profunda sobre polinomios de empacamiento sobre algunas regiones multidimensionales. El primer capítulo es un compendio de los resultados más relevantes sobre los polinomios de empacamiento sobre algunos sectores en $\mathbb{R}^2$. En el capítulo 2 construiremos una función de empacamiento para cualquier sector entero multidimensional (en $\mathbb{R}^n$). Después, en el capítulo 3 expresaremos a la función del capítulo 2 como un polinomio de n variables.

Capítulo 1

Polinómios de empacamiento en $\mathbb{R}^2$

Las funciones de empacamiento fueron introducidas por primera vez por Cauchy en 1821 [4]. Mas tarde, Cantor [2, 3], probó que el sector $I(\infty)$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$ construyendo dos polinomios de empacamiento explícitos sobre $I(\infty)$:

$$F(x, y) = \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{x + 3y}{2}$$

y

$$G(x, y) = \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{3x + y}{2}$$

Estos polinomios son llamados los *polinomios de Cantor*.

Fueter y Pólya [5] probaron que los polinomios de Cantor son los únicos polinomios de empacamiento cuadráticos en $I(\infty)$. A partir de este resultado, se ha conjeturado que, de hecho, los polinomios de Cantor son los únicos polinomios de empacamiento sobre $I(\infty)$, es decir, que cualquier polinomio de empacamiento sobre $I(\infty)$ es cuadrático. Alentando esta conjetura, en 1978 Lew y Rosenberg [6] probaron que no existe un polinomio de empacamiento cúbico o cuártico sobre $I(\infty)$.

Recientemente, Nathanson [7] probó el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea r un entero positivo. Los polinomios*

$$F_r(x, y) = \frac{rx(x - 1)}{2} + x + y$$

y

$$G_r(x, y) = \frac{rx(x + 1)}{2} + x - y.$$

son polinomios de empacamiento sobre el sector entero $I(r)$.

Similarmente, obtuvo polinomios de empacamiento sobre ciertos sectores racionales:

Teorema 2 *Sean r y s dos enteros positivos tales que $1 \leq r < s$ y r divide a $s-1$. Sea $d = (s-1)/r$. Los polinomios*

$$F_{r/s}(x,y) = \frac{r(x-dy)^2}{2} + \frac{(2-r)x + (dr-2d+2)y}{2}$$

y

$$G_{r/s}(x,y) = \frac{r(x-dy)^2}{2} + \frac{(r+2)x - (2d+s+1)y}{2}.$$

son polinomios de empacamiento cuadráticos sobre el sector $I(r/s)$.

Aún más, Nathanson probó que para cualquier entero positivo $s \geq 2$ con $r = 1$, los polinomios del teorema anterior son los únicos polinomios de empacamiento cuadráticos sobre el sector $I(1/s)$.

En general, estos son los resultados más relevantes que se conocen, por el momento, de polinomios de empacamiento sobre sectores de $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 2

Una función de empacamiento sobre sectores enteros multidimensionales

Definición 1 *Para* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ *definimos el mapeo* $s(x) := x_1 + \ldots + x_n$*. Si* f *es una función de empacamiento sobre* $I(\infty, \ldots, \infty)$*, decimos que* f *es una* función diagonal *si* $f(x) < f(y)$ *cuando* $s(x) < s(y)$*. Mientras que, si* f *es una función de empacamiento sobre el sector entero* $I(r_1, \ldots, r_{n-1})$*, es llamada* función diagonal *si* $f(x) < f(y)$ *cuando* $x_1 < y_1$*. Así mismo, definimos para cada* $n > 0$*,* $DF_{r_1,\ldots,r_{n-1}}(n)$ *como el conjunto de funciones diagonales* $I(r_1, \ldots, r_{n-1})$ *y* $DP_{r_1,\ldots,r_{n-1}}(n)$ *como el conjunto de polinomios diagonales* $I(r_1, \ldots, r_{n-1})$*.*

Dada cualquier permutación π de $\{1, \ldots, n\}$ y cualquier vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Entonces, diremos que las funciones f y g en $\mathbb{R}^n$ son *equivalentes* si existe una permutación π tal que para toda $(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\pi(x_1, \ldots, x_n))$.

En particular tenemos que los polinomios de Cantor son equivalentes.

Skolem [11, 12] construyó una clase de equivalencia de polinomios de empacamiento sobre $I(\infty, \ldots, \infty)$ para cada $n > 0$. Morales y Lew [8] construyeron 2^{n-2} polinomios de empacamiento no equivalentes de dimensión n para cada $n > 1$. Morales [9] produjo una familia de polinomios de empacamiento, la cual incluia los polinomios de Morales-Lew. Finalmente, Sanchez [10] obtuvo una familia con $(n-1)!$ polinomios de empacamiento no equivalentes sobre $I(\infty, \ldots, \infty)$, la cual incluye la anterior familia. Todos estos polinomios son funciones diagonales.

Por nuestra parte, en este capítulo, nos conformaremos con encontrar una función de empacamiento sobre el sector $I(r_1, \ldots, r_{n-1})$.

Para describir nuestros resultados es necesario introducir una definición recursiva que a primera vista parece un poco complicada.

Definición 2 *Sea* $n > 1$. *Sean* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ *cualesquiera enteros positivos y sea* $x \in \mathbb{N}$, *definimos*

$$E_{r_n,r_{n-1}}(1,x) := E(1,x) := \{x\}$$

y para $0 < i < n$ *definimos*

$$\begin{aligned} E_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,x) := \{(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^{n-i+1} | \quad x_i = x \quad \text{y} \\ (x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_{r_{i+1},r_{i+2},\ldots,r_{n-1}}(n-i, x_{i+1}),\ 0 \leq x_{i+1} \leq r_i x_i\}, \end{aligned}$$

en particular

$$\begin{aligned} E_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(n,x) := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n | \quad x_1 = x \quad \text{y} \\ (x_2, \ldots, x_n) \in E_{r_2,r_3,\ldots,r_n}(n-1, x_2),\ 0 \leq x_2 \leq r_1 x_1\}. \end{aligned}$$

Notese que, aun cuando r_n no está definida, nuestra notación es congruente con la definicioń recursiva.

Por otro lado, dado que todos los elementos de $E_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,x)$ tienen en la primera entrada a x es evidente que

$$\text{si } x \neq y \text{ entonces } E_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,x) \cap E_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,y) = \emptyset. \quad (2.1)$$

Una vez que fijemos los enteros positivos $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, para $0 < i \leq n$, consideremos el conjunto

$$D_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,x) = \bigcup_{k=0}^{x} E_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,k), \quad (2.2)$$

y definimos las siguientes funciones

$$T_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x) := |E_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,x)|$$

y

$$Q_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x) := |D_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(n-i+1,x)| = \sum_{k=0}^{x} T_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(k). \quad (2.3)$$

Observemos que si $x < y$ entonces $Q_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x) < Q_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(y)$, es decir, es una función creciente.

Caso especial: si $i = n$ tenemos que $D_{r_n,r_{n-1}}(1,x) = \bigcup_{k=0}^{x} E_{r_n,r_{n-1}}(1,k)$, entonces
$T_{r_n,r_{n-1}}(x) := |E_{r_n,r_{n-1}}(1,x)| = |E(1,x)| = 1$
y
$Q_{r_n,r_{n-1}}(x) := |D_{r_n,r_{n-1}}(1,x)| = \sum_{k=0}^{x} |T_{r_n,r_{n-1}}(1,k)| = x + 1.$

Lema 1 *Si $x, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ son enteros positivos, entonces*

$$
\begin{aligned}
T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= \sum_{i_2=0}^{r_1 x} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_{n-1} i_{n-1}} 1, && (2.4)\\
Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= \sum_{i_1=0}^{x} \sum_{i_2=0}^{r_1 i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_{n-1} i_{n-1}} 1, && (2.5)\\
Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x-1) + Q_{r_2,\ldots,r_{n-1}}(r_1 x). && (2.6)
\end{aligned}
$$

Demostración. Claramente, $|E(1,x)| = 1$. Para $n > 1$, la definición 2, la relación (2.1) y la hipótesis de inducción implican que

$$T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) = \sum_{j=0}^{r_1 x} T_{r_2,\ldots,r_{n-1}}(j) = \sum_{j=0}^{r_1 x} \sum_{i_3=0}^{r_2 j} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_{n-1} i_{n-1}} 1.$$

la igualdad (2.5) se sigue de (2.1), (2.2) y (2.4). Para (2.6) tenemos que

$$
\begin{aligned}
Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= \sum_{i_1=0}^{x} \sum_{i_2=0}^{r_1 i_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-2} i_{n-2}} = \sum_{i_1=0}^{x-1} \sum_{i_2=0}^{r_1 i_1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-2} i_{n-2}} 1 + \sum_{i_2=0}^{r_1 x} \sum_{i_3=0}^{r_2 i_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{r_{n-1} i_{n-1}} 1\\
&= Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x-1) + Q_{r_2,\ldots,r_{n-1}}(r_1 x).
\end{aligned}
$$

esto completa la prueba. □

Lema 2 *Si $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ son enteros positivos, entonces*

$$I(r_1,\ldots,r_{n-1}) = \bigcup_{x\in\mathbb{N}} E_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(n,x).$$

Demostración. La prueba se sigue de (1) y la definición 2. □

Lema 3 *Sean* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ *enteros positivos. Consideremos* $(x_1, \ldots, x_n) \in I(r_1, \ldots, r_{n-1})$, *si para alguna* $0 < i \leq n-1$ *sucede que* $x_i = 0$*, entonces* $x_j = 0$ *para toda* $j = i+1, \ldots, n$.

Demostración. La prueba es inmediata de (1). □

En este sentido, para que nuestra notación sea consisitente, si $x = 0$ definimos $Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x-1) = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Una demostración similar a la que se utilizó en (2.6) sirve para demostrar que se cumple

$$Q_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x) = Q_{r_i,r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x-1) + Q_{r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(r_i x), \tag{2.7}$$

cuando $i = 1, \ldots, n-1$, tomando en cuenta que ahora x puede valer 0.

Lema 4 *Sean* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ *enteros positivos. Si* $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in I(r_i, \ldots, r_{n-1})$, *entonces*

$$Q_{r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x_{i+1}) \leq Q_{r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(r_i x_i), \tag{2.8}$$

para $0 < i < n$.

Demostración. Por definición sabemos que $x_{i+1} \leq r_i x_i$ y por la observación que hicimos en (2.3) se tiene el resultado. □

Lema 5 *Sean* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ *enteros positivos. Si* $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in I(r_i, \ldots, r_{n-1})$, *entonces*

$$\sum_{k=i}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) < Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x_i). \tag{2.9}$$

para $0 < i \leq n$.

Demostración.

La prueba es por inducción (recursiva) sobre i. Hagamos el paso inductivo:

Sea $i = n$.

Si $x_n = 0$, entonces $Q_{r_n,r_{n-1}}(x_n - 1) = 0$ y $Q_{r_n,r_{n-1}}(x_n) = x_n + 1 = 1$.

Si $x_n > 0$, por un lado tenemos que $Q_{r_n,r_{n-1}}(x_n - 1) = (x_n - 1) + 1 = x_n$ y por otro lado $Q_{r_n,r_{n-1}}(x_n) = x_n + 1$.

Ahora, supongamos que la desigualdad es válida para $k = i + 1$ y demostremos que se vale para $k = i$.

De (2.7) tenemos que

$$Q_{r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_i) = Q_{r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_i - 1) + Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(r_i x_i),$$

dado que $x_{i+1} \leq r_i x_i$,

$$Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_{i+1}) \leq Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(r_i x_i)$$

y por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=i+1}^{n} Q_{r_k, \ldots, r_{n-1}}(x_k - 1) < Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_{i+1}).$$

Por transitividad en las tres últimas ecuaciones obtenemos el resultado. $\square$

Lema 6 *Sean $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ enteros positivos. Sea $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in I(r_i, \ldots, r_{n-1})$, si existe $0 < i < n$ tal que $x_{j+1} = r_j x_j$ para toda $j = i, \ldots, n$, entonces*

$$\sum_{k=i}^{n} Q_{r_k, \ldots, r_{n-1}}(x_k - 1) + 1 = Q_{r_i, \ldots, r_{n-1}}(x_i).$$

Demostración. Por inducción sobre i:

Sea $i = n - 1$ con $x_n = r_{n-1} x_{n-1}$. Por ambos casos de la base inductiva del lema anterior tenemos que $Q_{r_n, r_{n-1}}(x_n) = Q_{r_n, r_{n-1}}(x_n - 1) + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
Q_{r_{n-1}}(x_{n-1}) &= Q_{r_{n-1}}(x_{n-1} - 1) + Q_{r_n, r_{n-1}}(r_{n-1} x_{n-1}) \qquad \text{(por (2.7))} \\
&= Q_{r_{n-1}}(x_{n-1} - 1) + Q_{r_n, r_{n-1}}(x_n) = Q_{r_{n-1}}(x_{n-1} - 1) + Q_{r_n, r_{n-1}}(x_n - 1) + 1.
\end{aligned}$$

Supongamos que la desigualdad se cumple para $k = i + 1$.

Otra vez por (2.7) tenemos que

$$Q_{r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_i) = Q_{r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_i - 1) + Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(r_i x_i),$$

dado que $x_{i+1} = r_i x_i$

$$Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(x_{i+1}) = Q_{r_{i+1}, \ldots, r_{n-1}}(r_i x_i)$$

y por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=i+1}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1)+1 = Q_{r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x_{i+1}).$$

Sustituyendo se tiene el resultado. $\square$

Ahora, definamos la función que va del sector entero $I(r_1,\ldots,r_{n-1})$ a $\mathbb{N}$ como:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \sum_{k=1}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1).$$

Lema 7 *La función f es inyectiva.*

Demostración. Sean $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in I(r_1,\ldots,r_{n-1})$ diferentes. Sea i el mínimo índice tal que $x_i \neq y_i$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_i < y_i$. entonces

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1)\\
&= \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x_i-1) + \sum_{k=i+1}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1)\\
&< \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x_i-1) + Q_{r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(x_{i+1}) \qquad \text{(por (2.9))}\\
&\leq \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x_i-1) + Q_{r_{i+1},\ldots,r_{n-1}}(r_i x_i)\\
&= \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k-1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x_i) \qquad \text{(por (2.7))}\\
&\leq \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(y_k-1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(y_i-1) \text{ por ser } x_i < y_i\\
&\leq \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(y_k-1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(y_i-1) + \sum_{k=i+1}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(y_k-1)\\
&= f(y_1,\ldots,y_n).
\end{aligned}$$

$\square$

En seguida, de la demostración anterior, se desprende el

Corolario 1 *Sean $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\in I(r_1,\ldots,r_{n-1})$, entonces*

$f(x_1,\ldots,x_n) < f(y_1,\ldots,y_n)$ si y sólo si existe $0<i<n$ tal que $x_i<y_i$ y $x_j=y_j$ para $j<i$.

Lema 8 *La función f es suprayectiva.*

Demostración. Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in I(r_1, \ldots, r_{n-1})$.

Por un lado tenemos

(a) si $0 \leq x_n < r_{n-1}x_{n-1}$, entonces

$$f(x_1 \ldots, x_n + 1) = f(x_1, \ldots, x_n) + 1.$$

Esto es cierto ya que

$f(x_1, \ldots, x_n + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + Q_{r_n,r_{n-1}}((x_n + 1) - 1)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + ((x_n - 1) + 1) + 1$

$= \sum_{k=1}^{n-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + Q_{r_n,r_{n-1}}(x_n - 1) + 1$

$= f(x_1, \ldots, x_n) + 1.$

Así mismo tenemos

(b) si $x_n = r_{n-1}x_{n-1}$ y $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, entonces

$$f(x_1, \ldots, x_i + 1, 0, \ldots, 0) = f(x_1, \ldots, x_n) + 1$$

donde i es tal que $x_i < r_{i-1}x_{i-1}$ con $x_j = r_j x_j$ para $j = i + 1, \ldots, n - 1$.

Comprobémoslo:

$f(x_1, \ldots, x_i + 1, 0, \ldots, 0) = \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}((x_i + 1) - 1)$

$= \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + Q_{r_i,\ldots,r_{n-1}}(x_i)$

$= \sum_{k=1}^{i-1} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + \sum_{k=i}^{n} Q_{r_k,\ldots,r_{n-1}}(x_k - 1) + 1$ por el lema 6

$= f(x_1, \ldots, x_n) + 1.$

Ahora bien, sea $\lambda \in \mathbb{N}$, puesto que $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, se utilizan (a) y (b) para encontrar un $(x_1, \ldots, x_n) \in I(r_1, \ldots, r_{n-1})$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda$.

$\square$

Por lo tanto, tenemos que f es una función de empacamiento y por el corolario 1, tenemos que $f \in DF_{r_1,\ldots,r_{n-1}}(n)$.

Resumimos este capítulo con el próximo resultado:

Teorema 3 *Sean* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ *enteros positivos, consideremos el sector entero multidimensional* $I(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ *en* $\mathbb{N}^n$*, entonces la función*

$$f : I(r_1, \ldots, r_{n-1}) \longmapsto \mathbb{N}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{k=1}^{n} Q_{r_k, \ldots, r_{n-1}}(x_k - 1),$$

es una función de empacamiento diagonal.

Capítulo 3

Fórmula polinomial

En este capítulo expresaremos a las funciones $T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x)$ y $Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x)$ como polinomios de variable x. Para probar esto, para cualquier entero positivo r se requiere construir una familia recursiva de polinomios de variable i,

$$\{P_{r,k}(i) = \sum_{s=1}^{k} c_{k,s}^{(r)} \binom{i}{s} \mid k = 1, \ldots, n\},$$

cuyos coeficientes $c_{k,j}^{(r)}$ (cuando no haya confusión omitiremos el super índice (r)) satisfacen

$$c_{k,j} = \sum_{s=1}^{k-j+1} \binom{r}{s} c_{k-s,j-1} \text{ para } k > j \geq 2 \text{ con } c_{k,1} = \binom{r+1}{k} \;\; k \geq 2 \text{ y } c_{1,1} = r. \tag{3.1}$$

Debido a que $c_{1,1} = r$ y $c_{k,k} = rc_{k-1,k-1}$ para $k \geq 2$, se sigue que $c_{k,k} = r^k$ for $k \geq 1$.
Ejemplo 1. Para $n = 3$, tenemos

$$P_{r,1}(i) = ri, \quad P_{r,2}(i) = r^2\binom{i}{2} + \binom{r+1}{2}i, \quad P_{r,3}(i) = r^3\binom{i}{3} + r^3\binom{i}{2} + \binom{r+1}{3}i.$$

Sea r, i dos enteros positivos y cualquier entero $0 \leq t < r$. No es difícil probar que para cualquier entero positivo k,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{r}\binom{j}{k} &= \binom{r+1}{k+1}, && (3.2)\\
\sum_{j=0}^{ri+t}\binom{j}{k} &= \sum_{j=0}^{ri}\binom{j}{k}+\sum_{j=1}^{t}\binom{ir+j}{k}, && (3.3)\\
\sum_{j=0}^{ri}\binom{j}{k} &= \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\ell=0}^{r}\binom{rj+\ell}{k}=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{s=0}^{rj+\ell-1}\binom{s}{k-1}. && (3.4)
\end{aligned}$$

Estas identidades de los coeficientes binomiales serán utilizados en la prueba del siguiente lema.

Lema 9 *Sea* r *un entero positivo. Entonces, para cualquier entero positivo* i *y cualquier entero* $0 \le t < r$,

$$\sum_{j=0}^{ri+t}\binom{j}{k} = P_{r,k+1}(i)+\sum_{h=1}^{k}\binom{t}{h}P_{r,k+1-h}(i)+\binom{t+1}{k+1}.$$

Demostración. Damos una prueba inductiva sobre k. Cuando $k = 1$, por (3.2)-(3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{ri+t}\binom{j}{1} &= \sum_{j=0}^{ri}\binom{j}{1}+\sum_{j=1}^{t}\binom{ri+j}{1}=\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{s=1}^{r}[rj+s]+\sum_{j=1}^{t}[ri+j]\\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left[r^2j+\binom{r+1}{2}\right]+tri+\binom{t+1}{2}\\
&= \binom{i}{2}r^2+\binom{r+1}{2}i+tri+\binom{t+1}{2}.
\end{aligned}$$

Dado que $\binom{i}{2}r^2+\binom{r+1}{2}i = P_{r,2}(i)$ y $ir = P_{r,1}(i)$, la fórmula es válida para $k = 1$. Para $k \ge 2$, utilizaremos (3.3) para dar la prueba en dos partes:
Parte A. Por (3.2), (3.4) e hipótesis de inducción obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{ri}\binom{j}{k} &= \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{r}\binom{rj+\ell}{k} = \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{m=0}^{rj+\ell-1}\binom{m}{k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\ell=1}^{r}\left[P_{r,k}(j)+\sum_{h=1}^{k-1}\binom{\ell-1}{h}P_{r,k-h}(j)+\binom{\ell}{k}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left[rP_{r,k}(j)+\sum_{h=1}^{k-1}\binom{r}{h+1}P_{r,k-h}(j)+\binom{r+1}{k+1}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left[\sum_{s=1}^{k}\binom{r}{1}c_{k,s}\binom{j}{s}+\sum_{h=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{k-h}\binom{r}{h+1}c_{k-h,s}\binom{j}{s}+\binom{r+1}{k+1}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left[\sum_{h=1}^{k}\binom{r}{h}c_{k+1-h,1}\binom{j}{1}+\sum_{h=1}^{k-1}\binom{r}{h}c_{k+1-h,2}\binom{j}{2}+\cdots+\binom{r}{1}c_{k,k}\binom{j}{k}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left[\sum_{s=1}^{k}\sum_{h=1}^{k+1-s}\binom{r}{h}c_{k+1-h,s}\binom{j}{s}+\binom{r+1}{k+1}\right] \\
&= \sum_{s=1}^{k}\sum_{h=1}^{k+1-s}\binom{r}{h}c_{k+1-h,s}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{j}{s}+\sum_{j=0}^{i-1}\binom{r+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{k}\sum_{h=1}^{k+1-s}\binom{r}{h}c_{k+1-h,s}\binom{i}{s+1}+\binom{r+1}{k+1}i \\
&= \sum_{s=2}^{k+1}\sum_{h=1}^{k+1-s+1}\binom{r}{h}c_{k+1-h,s-1}\binom{i}{s}+\binom{r+1}{k+1}i.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, de (3.1) obtenemos $c_{k+1,s} = \displaystyle\sum_{h=1}^{k+1-s+1}\binom{r}{h}c_{k+1-h,s-1}$ para $k+1 > s \geq 2$.

Parte B. También de (3.2), (3.4), parte A, e hipótesis de inducción tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{t}\binom{ir+j}{k} &= \sum_{j=1}^{t}\sum_{s=1}^{ir+j-1}\binom{s}{k-1}\\
&= \sum_{j=1}^{t}\left[P_{r,k}(i)+\sum_{h=1}^{k-1}\binom{j-1}{h}P_{r,k-h}(i)+\binom{j}{k}\right]\\
&= tP_{r,k}(i)+\sum_{h=1}^{k-1}\binom{t}{h+1}P_{r,k-h}(i)+\binom{t+1}{k+1}\\
&= \sum_{h=1}^{k}\binom{t}{h}P_{r,k+1-h}(i)+\binom{t+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, las partes A, B y (3.3) implican el lema.

□

En el siguiente teorema mostraremos que las funciones $T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x)$ y $Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x)$ pueden ser extendidos a polinomios de variable x.

Para simplificar la notación, denotamos los coeficientes $c_{k,s}^{(r_j)}$ por $c_{k,s}^{(j)}$. Recordemos que $T_{r_n,r_{n-1}}(x)=1$ y $Q_{r_n,r_{n-1}}(x)=x+1$.

Teorema 4 *Sean $r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}$ enteros positivos. Entonces*

$$\begin{aligned}
T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= c_{1,1}^{(n-1)}\sum_{i_2=1}^{2}c_{2,i_2}^{(n-2)}\sum_{i_3=1}^{i_2+1}c_{i_2+1,i_3}^{(n-3)}\cdots\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}+1}c_{i_{n-2}+1,i_{n-1}}^{(1)}\binom{x}{i_{n-1}} \qquad (3.5)\\
&\quad +T_{r_1,\ldots,r_{n-2}}(x),\\
Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= c_{1,1}^{(n-1)}\sum_{i_2=1}^{2}c_{2,i_2}^{(n-2)}\sum_{i_3=1}^{i_2+1}c_{i_2+1,i_3}^{(n-3)}\cdots\sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}+1}c_{i_{n-2}+1,i_{n-1}}^{(1)}\binom{x+1}{i_{n-1}+1} \qquad (3.6)\\
&\quad +Q_{r_1,\ldots,r_{n-2}}(x).
\end{aligned}$$

Además, ambas funciones $T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x)$ y $Q_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x)$ son polinomios de variable x de grado $n-1$ y n respectivamente.

Demostración. Por el lema 1 tenemos

$$T_{r_1}(x)=|E_r(2,x)|=\sum_{i_1=0}^{r_1x}1=r_1x+1=c_{1,1}^{(1)}\binom{x}{1}+T^1(x),\quad Q_{r_1}(x)=c_{1,1}^{(1)}\binom{x+1}{2}+x+1.$$

Así el teorema se cumple para $n = 2$. Supongamos que $n > 2$. Del lema 1 y la hipótesis de inducción se sigue que

$$\begin{aligned}
T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}}(x) &= \sum_{j_2=0}^{r_1 x}\sum_{j_3=0}^{r_2 j_2}\cdots\sum_{j_n=0}^{r_{n-1}j_{n-1}} 1 = \sum_{j_2=0}^{r_1 x} T_{r_2,\ldots,r_{n-1}}(j_2) \\
&= \sum_{j_2=0}^{r_1 x} c_{1,1}^{(n-1)} \sum_{i_2=1}^{2} c_{2,i_2}^{(n-2)} \sum_{i_3=1}^{i_2+1} c_{i_2+1,i_3}^{(n-3)} \cdots \sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-3}+1} c_{i_{n-3}+1,i_{n-2}}^{(2)} \binom{j_2}{i_{n-2}} \\
&\quad + \sum_{j_2=0}^{r_1 x} T_{r_2,\ldots,r_{n-2}}(j_2) \\
&= c_{1,1}^{(n-1)} \sum_{i_2=1}^{2} c_{2,i_2}^{(n-2)} \sum_{i_3=1}^{i_2+1} c_{i_2+1,i_3}^{(n-3)} \cdots \sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-3}+1} c_{i_{n-3}+1,i_{n-2}}^{(2)} \sum_{j_2=0}^{r_1 x} \binom{j_2}{i_{n-2}} \\
&\quad + \sum_{j_2=0}^{r_1 x} T_{r_2,\ldots,r_{n-2}}(j_2). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Sin embargo, del lema 9 obtenemos

$$\sum_{j_2=0}^{r_1 x} \binom{j_2}{i_{n-2}} = P_{r_1,i_{n-2}+1}(x) = \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}+1} c_{i_{n-2}+1,i_{n-1}}^{(r_1)} \binom{x}{i_{n-1}}.$$

Usando la anterior identidad (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
c_{1,1}^{(n-1)} & \sum_{i_2=1}^{2} c_{2,i_2}^{(n-2)} \sum_{i_3=1}^{i_2+1} c_{i_2+1,i_3}^{(n-3)} \cdots \sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-3}+1} c_{i_{n-3}+1,i_{n-2}}^{(2)} \sum_{j_2=0}^{r_1 x} \binom{j_2}{i_{n-2}} \\
= & \quad c_{1,1}^{(n-1)} \sum_{i_2=1}^{2} c_{2,i_2}^{(n-2)} \sum_{i_3=1}^{i_2+1} c_{i_2+1,i_3}^{(n-3)} \cdots \sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-3}+1} c_{i_{n-3}+1,i_{n-2}}^{(2)} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}+1} c_{i_{n-2}+1,i_{n-1}}^{(r_1)} \binom{x}{i_{n-1}} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (2.4) tenemos

$$\sum_{j_2=0}^{r_1 x} T_{r_2,\ldots,r_{n-2}}(j_2). = \sum_{j_2=0}^{r_1 x}\sum_{i_3=0}^{r_2 j_2}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-2} i_{n-2}} 1 = T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-2}}(x). \qquad (3.9)$$

Entonces (3.7), (3.8) y (3.9) impican la relación (3.5). Es evidente que (3.8) resulta ser un polinomio de variable x. Además, por hipótesis de inducción $T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-2}}(x)$ es también un polinomio de variable x. Por lo tanto $T_{r_1,r_2,\ldots,r_{n-2}}(x)$ es un polinomio de variable x. Por (3.5) es claro que $i_{n-1} \leq n-1$; por lo que el grado de este polinomio es $n-1$.

Ahora mostramos (3.6). Usando (3.5), podemos ver que

$$T_{r_1,\ldots,r_{n-1}}(y) = \sum_{j=1}^{n} d_{n,j}\binom{y}{j} + \sum_{j=1}^{n-1} d_{n-1,j}\binom{y}{j} + \cdots + 1,$$

donde las $d_{i,j}$'s no dependen de y. Por el lema 1 obtenemos $Q_{r_1,\ldots,r_{m-1}}(x) = \sum_{y=1}^{x} T_{r_1,\ldots,r_{m-1}}(y)$, para $1 \leq m \leq n-1$. Usando estas dos identidades y (3.2) se prueba el resto del teorema.

$\square$

Como corolario del teorema anterior se desprende que la función de que definimos en el Capítulo 2, es un polinomio de n variables.

Futuras direcciones

En estre trabajo hemos construído un polinomio de empacamiento para cualquier sector entero multidimensional. Ahora la tarea siguiente será construir más polinomios de empacamiento sobre sectores enteros multidimensionales. Más aun, utizando métodos similares a los que utilizó Nathanson en $\mathbb{R}^2$ se debería poder encontrar una correspondencia entre los polinomios de empacamiento sobre el sector $I(\infty, \ldots, \infty)$ y los polinomios de empacamiento sobre ciertos sectores enteros multidimensionales.

La definición de sector puede ser generalizada aun más; por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, sean $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$ definimos el sector

$$I_\alpha^\beta := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | \alpha x \leq y \leq \beta x\},$$

en los cuales para ciertos α y β racionales se pueden conseguir resultados análogos a los del Capítulo 1.

Por último, juntando los resultados anteriores ya podremos hablar de *polinomios de empacamiento sobre sectores racionales multidimensionales generalizados*.

Bibliografía

[1] A. L. Rosenberg, Storage mappings for extendible arrays, R. T. Yeh (ed.), Current Trends in Programming Methodology, Vol. IV, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978, pp. 263–311.

[2] G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal) 84, 1878, pp. 242–258.

[3] G. Cantor, Beitrage zur Begrundung der Transfiniter Mengenlehre, Math. Ann. 46, 1885, pp. 481–512; translated as Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, New York, 1952.

[4] A.L. Cauchy, Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, 1re partie: Analyse algébrique, 1'Imprimerie Royale, Paris, 1821, reprinted by WissenschFftliche BuchgesellschFft, Darmstadt, 1968, pp. 140–158.

[5] R. Fueter, G. Polya, Rationale Abzählung der Gitterpunkte, Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich 58, 1923, pp. 280–386.

[6] J. S. Lew, A. L. Rosenberg, Polynomial indexing of integer lattice-points. I. General concepts and quadratic polynomials, J. Number Theory 10, 1978, no. 2, pp. 192–214.

[7] M.B. Nathanson, Cantor polynomials for semigroup sectors, J. Algebra Appl. 13, 2014, 1350165 (14 páginas).

[8] L.B. Morales, J.S. Lew, An Enlarged of Packing Polynomials on Multidimensional Lattices, Math. Systems Theory 29, 1996, pp. 293–303.

[9] L.B. Morales, Diagonal Polynomials and Diagonal Orders on Multidimensional Lattices, Theory of Comput. Systems 30, 1997, pp. 367–382.

[10] A. Sanchez, A family of $(n-1)!$ diagonal polynomials orders on N^n, Order 12, 1997, pp. 173–187.

[11] T. Skolem, Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf 'Arithmetische', 1937, T. Skolem (ed.), Selected Works in Logic, Universitetsforlaget, Oslo, 1970.

[12] T. Skolem, The Development of Recursive Arithmetic, 1947, T. Skolem (ed.), Selected Works in Logic, Universitetsforlaget, Oslo, 1970.