Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Las Q-álgebras y algunas de sus generalizaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

LORENA MORALES CALLEJAS

TUTOR:
M. EN C. ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO

2014

1. Datos del alumno
   Morales
   Callejas
   Lorena
   62 77 42 05
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   308211887

2. Datos del tutor
   M en C
   Angel Manuel
   Carrillo
   Hoyo

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Hugo
   Arizmendi
   Peimbert

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   José
   Ríos
   Montes

5. Datos del sinodal 3
   Dra
   Carmen
   Martínez
   Adame Isais

6. Datos del sinodal 4
   Dra
   Alejandra
   García
   García

7. Datos del trabajo escrito
   Las Q-álgebras y algunas de sus generalizaciones
   143 p
   2014

Las Q-álgebras y algunas de sus generalizaciones

Lorena Morales Callejas

Prefacio

La teoría de álgebras topológicas y la de anillos topológicos comenzaron a desarrollarse simultáneamente durante la década de los cuarenta del siglo XX. Por una parte, I. Kaplansky estudió ampliamente los anillos topológicos en sus artículos *Topological Rings,* de 1947 y 1948, mientras que las álgebras topológicas empezaron a distinguirse de los anillos topológicos con la introducción del concepto de m-convexidad en el trabajo *The space L^ω and convex topological rings* de R. Arens, publicado en 1946.

Muchos espacios trabajados en el Análisis Funcional son álgebras con las operaciones lineales y la multiplicación usualmente definidas en ellos. Como ejemplos de esto tenemos a los espacios de funciones $C[0,1]$, $C(\mathbb{R})$ y $\mathcal{E}$, y los espacios de sucesiones c_0, c y ℓ^∞. Además, con topologías tales como la uniforme, compacto abierta o puntual se convierten en álgebras topológicas; es decir, sus tres operaciones básicas de álgebra son continuas. Dentro de estas últimas destacan las álgebras de Banach. Ellas son espacios de Banach con una multiplicación continua respecto a su norma. La teoría de álgebras de Banach se inició en 1939 con la publicación del artículo *On normed rings* del matemático ruso I.M. Gelfand. Fue en 1941 cuando aumentó particularmente el interés de la comunidad matemática por ella, gracias a la publicación de su artículo *Normierte Ringe,* en el que Gelfand hace uso de esta teoría para dar una prueba más simple de uno de los teoremas clásicos de N. Wiener que se refiere a la convergencia absoluta de la serie de Fourier del recíproco de una función y que había aparecido en su libro *The Fourier Integral and certain of its applications*, publicado en 1933.

Las álgebras de Banach con identidad tienen como una de sus características que la colección de sus elementos invertibles es un conjunto abierto del álgebra. Sin embargo, esto no las caracteriza dentro de la clase de las álgebras normadas, pues en ese ámbito el recíproco de este resultado no es cierto en general. Por otra parte, no en todas las álgebras topológicas se tiene la propiedad de que los elementos invertibles forman un abierto, pero por las importantes consecuencias que de ella se derivan hay en la clasificación de las mismas una categoría para las que sí la poseen. A los miembros de esta categoría se les llama Q-álgebras.

En las álgebras de Banach, y en general en las álgebras normadas, la noción del espectro de un elemento juega un papel muy importante. Por ejemplo, que todo elemento en un álgebra de Banach tenga espectro no vacío es una pieza clave en la teoría de Gelfand para las álgebras de Banach conmutativas y con identidad.

En la tesis se presentan algunas de las propiedades básicas, entre ellas las dos antes mencionadas, que poseen las álgebras de Banach y en general las álgebras m-convexas, especialmente con relación al espectro de sus elementos y la operación de inversión. Esto sirve como punto de partida para hacer un estudio de las Q-álgebras y algunas de sus generalizaciones, lo que constituye el objetivo de este trabajo que está dividido en siete capítulos.

En el primero aparecen conceptos y resultados fundamentales acerca de los espacios vectoriales topológicos, particularmente sobre espacios normados, *(p-)* seminormados y localmente convexos, los cuales serán necesarios para tratar, por ejemplo, las álgebras normadas y m-convexas. Las pruebas de los resultados se omiten por brevedad. Éstas pueden encontrarse en los libros [19], [18] y [16].

A partir del Capítulo 2 se buscó que la tesis fuera autocontenida. De hecho, el único resultado del que no se da la prueba completa, debido a su extensión, es el teorema tipo Gelfand-Mazur de W. $\dot{Z}$elazko [9] para las álgebras p-seminormadas y que aparece en el cuarto capítulo de este trabajo.

El segundo, está dedicado a conceptos puramente algebraicos. Se define el espectro y el radio espectral de un elemento. Se ve la acción de las funciones racionales en un álgebra y se da el mapeo espectral para funciones racionales. Ahí también aparecen caracterizaciones del radical de Jacobson de un álgebra, que serán usadas en el Capítulo 4. Por cierto, en el último capítulo, como parte de la construcción de un ejemplo, se exhibe un álgebra compleja normada, conmutativa y con identidad para la que este radical es distinto de otro que es frecuentemente usado en el área: el radical de Gelfand.

Un resultado de gran utilidad en la teoría de las álgebras m-convexas, es la descomposición de Arens-Michael que afirma que un álgebra m-convexa completa puede verse como el límite inverso de una familia de álgebras de Banach. La ventaja que nos da este resultado es poder traducir un problema de álgebras m-convexas a uno de álgebras de Banach. Consecuencia de esto es el Criterio de invertibilidad de Arens. Todo esto es una parte del Capítulo 3. Además, en él se presentan las definiciones principales del trabajo. Se introducen distintos tipos de álgebras topológicas y todo se ilustra con ejemplos. Aquí empiezan a conjugarse las propiedades algebraicas con las topológicas.

Muchas de las propiedades más importantes de las álgebras de Banach son compartidas por las Q-álgebras normadas. De hecho, algo sorprendente es que, algunas de estas propiedades distinguen a las Q-álgebras normadas del resto de las normadas. Esto se muestra en el resultado principal del artículo *Some characterizations of complex normed Q-algebras* de V. Mascioni [20], el cual es desarrollado en el Capítulo 4. Asimismo, en éste se dan algunas propiedades del espectro de un elemento en las Q-álgebras topológicas en general y, en particular, en las álgebras de Banach; por ejemplo, la compacidad del espectro y el hecho de que en las álgebras normadas y en las Q-álgebras m-convexas el espectro de un elemento es no vacío.

El teorema fundamental de la teoría de álgebras normadas es el teorema de Gelfand-Mazur, publicado por S. Mazur en *Sur les anneaux lineaires* en 1938, el cual establece que toda álgebra compleja, normada y con identidad en la que cada elemento no nulo es invertible, es isomorfa (algebraica y topológicamente) al campo de los números complejos. La primera prueba publicada de este teorema fue de Gelfand en su artículo *Normierte Ringe.*

En el Capítulo 4 se demuestra ese teorema siguiendo lo hecho por R. Arens en su trabajo *Linear topological division algebras,* de 1947, y se presenta también el teorema ya mencionado de W. Żelazko, correspondiente a las p-álgebras seminormadas.

El espectro algebraico y el espectro (continuo) de un álgebra topológica son las colecciones $\mathcal{M}^{\#}$ y $\mathcal{M}$ formadas por las funcionales lineales multiplicativas distintas de 0 definidas en el álgebra y por aquellas en $\mathcal{M}^{\#}$ que son además continuas, respectivamente. La invertibilidad de un elemento está relacionada con los valores que toman los miembros de uno y otro espectro en dicho elemento. Dos resultados importantes en este aspecto son la Condición y el Principio de Wiener.

En un álgebra de Banach conmutativa y con unidad el espectro de cualquier elemento coincide con cada una de las colecciones de esos valores y el radio espectral queda determinado entonces a través de cualquiera de ellas. Puesto que esto no siempre sucede en un álgebra topológica, resultó natural que se plantearan lo que aquí llamamos las condiciones m, las cuales relacionan el espectro y el radio espectral de un elemento con la colección de valores asociada a él por medio de $\mathcal{M}$. Esto se desarrolla en el Capítulo 5 y se dan caracterizaciones de las Q-álgebras topológicas en términos de las funciones espectro (conjunto valuada) y radio espectral. También se ven consecuencias de que un álgebra satisfaga alguna de las condiciones m; por ejemplo se ve que en presencia de la condición m_2 ser Q-álgebra equivale a la continuidad de la transformada de Gelfand.

La noción de invertibilidad en un álgebra se amplía a través de sus espectros y la densidad de ideales. Se define cuándo un elemento es $\mathcal{M}^{\#}$ o $\mathcal{M}$ invertible o bien, topológicamente invertible y entonces se obtienen tres generalizaciones del concepto de Q-álgebra: $Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-, $Q_{\mathcal{M}}$- y Q_t-álgebra. Las dos primeras fueron introducidas en el artículo *Some characterizations of Q-algebras* de H. Arizmendi y V. Valov y la última es trabajada, por ejemplo, en *On Q_t-algebras* de H. Arizmendi, A. Carrillo y L. Palacios. Los resultados de estos dos trabajos se incluyen en los capítulos 5 y 6. En el último de estos, por ejemplo, se caracteriza a las $Q_{\mathcal{M}}$ y $Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebras mediante propiedades similares a las vistas en los dos capítulos inmediato anteriores. Esto permite probar resultados parecidos a los que se tienen para las Q-álgebras topológicas. Con respecto a las Q_t-álgebras, se incluyen resultados sobre su caracterización y de comparación de esta clase de álgebras con las otras clases Q. También se ve que las nociones Q, $Q_{\mathcal{M}}$, $Q_{\mathcal{M}^\#}$ y Q_t-álgebra pueden ser todas coincidentes en cierto tipo de álgebras. Se prueba que toda álgebra normada es una Q_t-álgebra, lo que se asemeja a la propiedad de que toda álgebra de Banach es una Q-álgebra.

En general tenemos las siguientes implicaciones:

$$Q \Rightarrow Q_t \Rightarrow Q_{\mathcal{M}} \text{ y } Q \Rightarrow Q_{\mathcal{M}^\#} \Rightarrow Q_{\mathcal{M}}.$$

En el último capítulo se presentan familias de álgebras topológicas y álgebras topológicas particulares que son estudiadas en términos de lo antes visto y que nos permiten mostrar que las implicaciones anteriores son las más generales que pueden establecerse o bien que algunas generalizaciones a ciertos resultados que podrían conjeturarse no son posibles. Debemos señalar que no pudimos encontrar un ejemplo en que la implicación $Q_{\mathcal{M}} \Rightarrow Q_t$ sea falsa.

Se incluye un apéndice con un resultado técnico sobe matrices complejas, mismo que es usado en el Capítulo 7 en la construcción de una álgebra matricial muy semejante a un álgebra de Banach y que sin embargo, no es Q-álgebra.

NOTACIÓN Y ADVERTENCIAS

- $B_r(x)$ es la bola abierta con centro en x y radio r, en espacios pseudométricos.
- $B_r[x]$ es la bola cerrada con centro en x y radio r, en espacios pseudométricos.
- $D_r(x)$ es el disco abierto con centro en x y radio r en $\mathbb{C}$.
- $\overline{D_r(x)}$ es la disco cerrado con centro en x y radio r en $\mathbb{C}$.
- No se supone que los espacios y álgebras topológicas sean espacios de Hausdorff.
- En la definición de álgebra localmente m-convexa se exige que sea un espacio de Hausdorff.
- A partir del Capítulo 4 todas las álgebras se suponen complejas y al inicio de diversas secciones se establecen hipótesis sobre el álgebra X a la que se refieren los distintos resultados y en estos ya no se incluyen dichas hipótesis generales. Por ejemplo, se puede suponer que X es normada, de Banach, con identidad, etcétera.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios vectoriales topológicos

En este capítulo sólo consideraremos espacios vectoriales sobre el campo de escalares $\mathbb{F}$ de los números reales ($\mathbb{R}$) o de los complejos ($\mathbb{C}$). En el campo $\mathbb{F}$ consideramos la topología usual $\tau_{\mathbb{F}}$ dada por el módulo $|\cdot|$.

Ahora recordamos definiciones y resultados básicos sobre los espacios vectoriales y los vectoriales topológicos.

Para un espacio vectorial X, conjuntos $A, B \subset X$ no vacíos y $\lambda \in \mathbb{F}$, definimos:

$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio vectorial y $A \subset X$. Se dice que:

- A es *absorbente* si para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que si $|\beta| > r$ entonces $x \in \beta A$. Lo cual es equivalente a que exista $\lambda > 0$ tal que si $|\alpha| < \lambda$ entonces $\alpha x \in A$.

- A es *balanceado* si para cada $x \in A$ y $|\lambda| \leq 1$ se satisface que $\lambda x \in A$. O sea, $\lambda A \subset A$ si $|\lambda| \leq 1$.

- A es *convexo* si para cualesquiera $x, y \in A$ y $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ se cumple que $\alpha x + \beta y \in A$. O sea, $\alpha A + \beta A \subset A$ si $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$.

Definición 1.1.2. Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Definimos la *envolvente convexa* de A como

$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : n \geq 1, x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

La envolvente convexa de un conjunto es el convexo más pequeño que lo contiene.

Teorema 1.1.3. *Sean X un espacio vectorial y $Y \subset X$ un subespacio vectorial. Entonces*

$$X/Y = \{x + Y : x \in X\}$$

con las operaciones lineales definidas como: $(x+Y) + (y+Y) = x + y + Y$ y $\lambda(x+Y) = \lambda x + Y$ para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, es un espacio vectorial llamado el espacio cociente de X módulo Y. La transformación $\pi : X \to X/Y$ definida como $\pi(x) = x + Y$ es lineal, suprayectiva y es llamada la proyección o transformación canónica o cociente. Se acostumbra denotar por $\overline{x}$ a $x + Y$ y llamarle la clase de x respecto a Y.

Definición 1.1.4. Un *espacio vectorial topológico* (X, τ) es un espacio vectorial X con una topología τ tal que las operaciones suma y multiplicación por un escalar: $(x, y) \mapsto x + y \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ son continuas, cuando en $X \times X$ y $\mathbb{F} \times X$ se considera la topología producto.

A veces, cuando resulte adecuado, simplemente decimos X es un espacio vectorial topológico sin dar nombre a su topología.

Toda vecindad de 0 en un espacio vectorial topológico es absorbente. Esto se sigue de la continuidad del producto por un escalar.

Teorema 1.1.5. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Entonces existe una base local $\mathcal{B}$ de vecindades del 0 para τ que satisface que cada uno de sus miembros es absorbente, balanceado y tal que dado $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ que satisface $U + U \subset V$.*

Si $\mathcal{B}$ es una de tales bases locales de (X, τ), entonces dados $n \in \mathbb{N}$ y $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ que satisface $\overbrace{U + ... + U}^{n} \subset V$.

Definición 1.1.6. En un espacio vectorial topológico X, una sucesión de elementos $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X es llamada una *base topológica* si para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ de escalares tales que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k,$$

es decir, $x = \lim_{n\to\infty} s_n$ con $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$.

Teorema 1.1.7. *Sean X un espacio vectorial topológico y V un subespacio vectorial de X. Entonces la cerradura $\overline{V}$ de V es un subespacio vectorial de X.*

Definición 1.1.8. Sea X un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ es una *seminorma* en X, si cumple:

1. $\|0\| = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Si también cumple

4. $\|x\| = 0$ implica que $x = 0$, entonces se dice que $\|\cdot\|$ es una *norma* en X.

Si $\|\cdot\|$ cumple 1 y 3 y

5. $\|\lambda x\| = |\lambda|^p\|x\|$ para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, donde $0 < p \leq 1$ es fijo entonces $\|\cdot\|$ es llamada una *p-seminorma* en X. Si además, satisface 4, entonces es llamada una *p-norma.*

Un espacio vectorial seminormado (p-seminormado) $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio cuya topología está definida por la semidistancia d determinada por la seminorma (p-seminorma) $\|\cdot\|$ en X. Si $\|\cdot\|$ es una norma (p-norma), entonces decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado (p-normado) y en tal caso d es una distancia.

Notación: A veces para denotar a una seminorma se usarán otros símbolos distintos a $\|\cdot\|$, por ejemplo la letra ν.

Teorema 1.1.9. *Sean X un espacio vectorial topológico y $S : X \to \mathbb{F}$ una funcional lineal o una p-seminorma, entonces S es continua si y sólo si es continua en* 0. *En general, si $T : X \to Y$ es una transformación lineal entre dos espacios topológicos, entonces T es continua si y sólo si es continua en* 0.

Definición 1.1.10. Sea X un espacio vectorial. Una función $\|\cdot\| : X \to [0,\infty]$ es una *seminorma extendida* en X, si $\{x \in X : \|x\| < \infty\}$ es un subespacio vectorial de X y $\|\cdot\|$ es una seminorma en este subespacio.

Supongamos que X es un espacio vectorial y que $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de seminormas definidas en X. Para cada $\epsilon > 0$ y cada colección finita no vacía $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \Lambda$ definimos el conjunto

$$B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \epsilon) = \{x \in X : \|x\|_{\alpha_i} < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Este conjunto es absorbente, balanceado y convexo.

Sea $\tau(\mathcal{S})$ la topología que tiene como base a los conjuntos de la forma

$$x + B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \epsilon),$$

con $x \in X$.

Definición 1.1.11. Un espacio vectorial X con una topología τ es llamado *localmente convexo* si $\tau = \tau(\mathcal{S})$ para alguna familia $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas en X.

Teorema 1.1.12. *Todo espacio localmente convexo $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es un espacio vectorial topológico. Éste es un espacio de Hausdorff si y sólo si para cada $x \neq 0$ existe $\|\cdot\|$ en $\mathcal{S}$ tal que $\|x\| \neq 0$.*

Dado un espacio vectorial X, una familia de seminormas $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ en X y un subconjunto no vacío $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \Lambda$ se tiene que la función

$$x \mapsto \max_{i=1,\dots,n} \|x\|_{\alpha_i}$$

define una seminorma en X. Lo que da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.1.13. Sea $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas definidas en un espacio vectorial X. Decimos que $\mathcal{S}$ es una *familia saturada* si la seminorma $\max\limits_{i=1,\dots,n} \|\cdot\|_{\alpha_i} \in \mathcal{S}$ para toda familia no vacía $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset \Lambda$. La saturación de la familia $\mathcal{S}$ se define como

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \max_{i=1,\dots,n} \|\cdot\|_{\alpha_i} : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda, n \geq 1 \right\}.$$

Es fácil ver que $\tilde{\mathcal{S}}$ es una familia saturada de seminormas para cualquier familia $\mathcal{S}$ de seminormas y que $\tau(\mathcal{S}) = \tau(\tilde{\mathcal{S}})$. Así, podemos considerar que la topología de cualquier espacio localmente convexo está generada por una familia saturada de seminormas.

Al conjunto de todas las funcionales lineales en un espacio vectorial X, o sea transformaciones lineales de X en $\mathbb{F}$ se le llama el *dual algebraico* del X y se le denota como $X^\#$. En tanto, que si X es un espacio vectorial topológico X, entonces denotamos como X^* al subespacio de $X^\#$ formado por las funcionales lineales continuas. X^* es llamado el *dual (topológico)* de X.

Para cada elemento $x \in X$, definimos la seminorma en $X^\#$ dada por

$$\|\varphi\|_x = |\varphi(x)|$$

con $\varphi \in X^\#$. Entonces la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_x\}_{x\in X}$ genera un topología localmente convexa en $X^\#$, la cual se denota por ω^* y es llamada la *topología débil estrella*. Si X es un espacio vectorial topológico, la topología inducida por ω^* en X^* también es llamada la topología débil estrella (ω^*).

Definición 1.1.14. Sean X un espacio vectorial topológico, dado $A \subset X$ definimos el *conjunto polar* de A como

$$A^{\circ} = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}.$$

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Alaoglu-Bourbaki.

Teorema 1.1.15. *Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Si A es vecindad del cero entonces A° es compacto en X^* con la topología w^*.*

Teorema 1.1.16. *Sea $T : (X, \{\|\cdot\|_{\alpha}\}_{\alpha \in A}) \to (Y, \{\nu_{\beta}\}_{\beta \in B})$ una transformación (operador) lineal entre dos espacios localmente convexos y supongamos que $\{\|\cdot\|_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ es una familia saturada. T es continua si y sólo si para cada $\beta \in B$ existen $M > 0$ y $\alpha \in A$ para la que se satisface la siguiente desigualdad*

$$\nu_{\beta}\left(T\left(x\right)\right) \leq M\|x\|_{\alpha}$$

para todo $x \in X$.

Un resultado similar para espacios p-seminormados es el siguiente.

Teorema 1.1.17. *Sea $T : (X, \|\cdot\|_p) \to (Y, \|\cdot\|_q)$ una operador lineal entre un espacio p-seminormado en uno q-seminormado. T es continua si y sólo si existe $M > 0$ tal que se satisface la siguiente desigualdad*

$$\|T\left(x\right)\|_q \leq M\|x\|_p^{\frac{q}{p}}$$

para todo $x \in X$.

Teorema 1.1.18. *Sean X un espacio vectorial, $\|\cdot\|$ una seminorma en X y $Y \subset X$ un subespacio vectorial. Si*

$$\|\bar{x}\|_Y = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \operatorname{dist}\left(x, Y\right),$$

para cada $x \in X$, donde $\operatorname{dist}(x, Y)$ denota la semidistancia de x a Y, entonces $\|\cdot\|_Y$ es una seminorma en X/Y llamada la seminorma cociente asociada a $\|\cdot\|$. Así, $(X/Y, \|\cdot\|_Y)$ es un subespacio seminormado. Es más, si $\|\cdot\|$ no es nula, entonces $\|\cdot\|_Y$ es una norma en X/Y si y sólo si Y es cerrado en X. La proyección canónica

$$\pi : (X, \|\cdot\|) \to (X/Y, \|\cdot\|_Y)$$

es continua y abierta.

En una situación más general tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1.19. *Sea $(X, \tau(\mathcal{S}))$, con $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, un espacio localmente convexo y Y un subespacio vectorial de X . Entonces X/Y es un espacio localmente convexo con las seminormas cociente asociadas a las de la familia $\mathcal{S}$. La proyección canónica es continua y abierta.*

Teorema 1.1.20. *Una red (x_i) converge a x en un espacio localmente convexo $(X, \tau(\mathcal{S}))$, con $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, si y sólo si (x_i) converge a x en $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$; es decir, $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Si toda red de Cauchy en X converge a un punto de X, entonces se dice que este espacio es completo. Si X es metrizable basta que suceda lo anterior para las sucesiones de Cauchy.*

Teorema 1.1.21. *Sea $(X, \tau(\mathcal{S}))$, con $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, un espacio localmente convexo. Entonces la función*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|y - x\|_n}{1 + \|y - x\|_n}$$

es una pseudométrica que define la topología $\tau(\mathcal{S})$. Si $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es de Hausdorff, entonces d es una métrica.

La *compleción* de un espacio métrico (X, d) es un espacio métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{d})$ junto con una isometría $\varphi : X \to \tilde{X}$ tal que $\varphi(X)$ es denso en $\tilde{X}$. En el caso de un espacio vectorial normado $(X, |\cdot|)$, la compleción es nuevamente un espacio vectorial normado $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ en donde la norma está definida como

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} |x_n|$$

con (x_n) una sucesión en X que converge a x en $\tilde{X}$. Las operaciones suma y producto por un escalar en $\tilde{X}$ están dadas por

$$x + y = \lim_{n\to\infty} x_n + y_n, \qquad \lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n$$

donde (x_n) y (y_n) son sucesiones en X que convergen a x, y en $\tilde{X}$, respectivamente. Con estas operaciones X es un subespacio vectorial (bajo un isomorfismo lineal isométrico) de $\tilde{X}$. En lo sucesivo se usará el mismo símbolo para denotar a la norma de X y su compleción.

Capítulo 2

Álgebras

2.1. Álgebras con identidad

Definición 2.1.1. Un *álgebra* X sobre $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ junto con una operación binaria $(x, y) \mapsto xy$; $X \times X \to X$, llamada la multiplicación en X tal que para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple lo siguiente:

- $x\,(yz) = (xy)\,z$
- $x\,(y + z) = xy + xz$
- $(x + y)\,z = xz + yz$
- $\lambda\,(xy) = (\lambda x)\,y = x\,(\lambda y)$

Se dice que X es un *álgebra con identidad* o *idéntico* si existe un elemento (único) $e \in X$ tal que $ex = ex = x$ para todo $x \in X$. En tanto que X es llamada conmutativa si se cumple $xy = yx$ para $x, y \in X$.

Cuando en la definición anterior $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se dice que el álgebra X es real y cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces se dice que es compleja.

Definición 2.1.2. En un álgebra X con identidad e, un elemento $x \in X$ se dice que es una *unidad* o que es *invertible* si tiene inverso (bilateral) en X, es decir existe $y \in X$ que cumple que $yx = xy = e$. Dicho elemento y es llamado el inverso de x y se puede probar que es el único con las propiedades anteriores. Lo denotamos como x^{-1}. Cuando un elemento $z \in X$ satisface que $zx = e$, entonces es llamado inverso izquierdo de x. De modo análogo se define inverso derecho de x. Definimos

$$G(X) = \{x \in X : x \text{ es invertible}\}.$$

X es llamada un álgebra con división si todo elemento de X distinto de cero es unidad; o sea:

$$G(X) = X \setminus \{0\}\,.$$

Proposición 2.1.3. *Si X un álgebra con identidad y $x \in X$ es tal que tiene inverso izquierdo y derecho, entonces dichos inversos coinciden y $x \in G(X)$.*

Demostración. Sean $z, y \in X$ tales que $xy = e = zx$, entonces $z = z(xy) = (zx)y = y$, por lo que $xy = e = yx$. Así, $x \in G(X)$. □

Proposición 2.1.4. *En un álgebra con identidad X se tienen las siguientes propiedades:*

(a) Si $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $x \in G(X)$, entonces $\lambda x \in G(X)$.

(b) $G(X)$ es un grupo multiplicativo.

Demostración. (a) Tenemos

$$\left(\lambda^{-1}x^{-1}\right)(\lambda x) = (\lambda^{-1}\lambda)(x^{-1}x) = e = (\lambda\lambda^{-1})(xx^{-1}) = (\lambda x)\left(\lambda^{-1}x^{-1}\right).$$

(b) El idéntico e de X pertenece a $G(X)$, ya que $ee = e$. Sean $x, y \in G(X)$ entonces $xy \in G(X)$ puesto que $(y^{-1}x^{-1})(xy) = e = (xy)(y^{-1}x^{-1})$, es decir, $(xy)^{-1} = (y^{-1}x^{-1})$. Luego, como $x^{-1}x = e = xx^{-1}$, entonces $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, por lo que $x^{-1} \in G(X)$. □

2.2. Homomorfismos de álgebras

Definición 2.2.1. Si X es un álgebra y $Y \subset X$ lo es con las operaciones de X restringidas a Y, entonces Y es llamada una *subálgebra* de X . Lo anterior es equivalente a decir que Y es un subespacio vectorial de X y que para cualesquiera $x, y \in Y$ se tiene que $xy \in Y$.

Definición 2.2.2. Sean X y Y dos álgebras. La función $\varphi : X \to Y$ es un *homomorfismo* de álgebras si y sólo si φ es lineal y multiplicativa. Es decir:

$$\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$$

y

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

Un isomorfismo de álgebras es un homomorfismo biyectivo.

Observación 2.2.3. Si X y Y son álgebras y $\varphi : X \to Y$ un homomorfismo, entonces $\varphi(X)$ es una subálgebra de Y.

Definición 2.2.4. Si en la definición anterior $Y = \mathbb{F}$, entonces φ es llamada un *homomorfismo escalar*, *funcional lineal multiplicativa* o *carácter*. A la colección de todos las funcionales lineales multiplicativas no nulas se le conoce como el espectro algebraico de X y se le denota como $\mathcal{M}^{\#}(X)$.

El espectro $\mathcal{M}^{\#}(X)$ de un álgebra compleja con identidad puede ser vacío.

Ejemplo. Sea X el álgebra de matrices complejas de tamaño 2×2. Hagamos

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$M_{12}^2 = M_{21}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12}M_{21} + M_{21}M_{12} = I$$

Supongamos que $\varphi : X \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal multiplicativa. Entonces

$$\varphi(M_{12})^2 = \varphi\left(M_{12}^2\right) = 0 = \varphi\left(M_{21}^2\right) = \varphi(M_{12})^2;$$

de donde $\varphi(I) = 0$. Por tanto, $\varphi = 0$, pues en caso contrario $\varphi(I) = 1$. Así, $\mathcal{M}^{\#}(X) = \emptyset$.

Teorema 2.2.5. *Sea X un álgebra con división tal que $dim(X) = 1$. Entonces X es isomorfa al álgebra $\mathbb{F}$.*

Demostración. Sea e la identidad en X. Tenemos que $\{e\}$ es una base de X. De manera que la función $f : X \to \mathbb{F}$ dada como $x \mapsto \lambda_x$ si $x = \lambda_x e$, está bien definida. Además

$$\begin{aligned} x + y &= (\lambda_x e) + (\lambda_y e) = (\lambda_x + \lambda_y)e, \\ \mu x &= \mu(\lambda_x e) = (\mu\lambda_x)e, \\ xy &= (\lambda_x e)(\lambda_y e) = (\lambda_x \lambda_y)e \end{aligned}$$

implican que

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \lambda_x + \lambda_y = f(x) + f(y), \\ f(\mu x) &= \mu\lambda_x = \mu f(x), \\ f(xy) &= \lambda_x \lambda_y = f(x)f(y) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$ y $\mu \in \mathbb{F}$; es decir f es un homomorfismo de álgebras.

Por otra parte, si $x \in X$ es tal que $f(x) = 0$ entonces $x = 0e = 0$, y si $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces $f(\lambda e) = \lambda$. Por consiguiente, f es un homomorfismo biyectivo. $\square$

Sean X un álgebra compleja con identidad e y $\mathbb{C}[t]$ el álgebra de los polinomios con coeficientes complejos. Dados $p \in \mathbb{C}[t]$, con $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$ y $x \in X$ denotamos por $p(x)$ al elemento en X definido como $p(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$.

La asociación $p \mapsto p(x)$ de $\mathbb{C}[t]$ en X está bien definida ya que la expresión de un polinomio sólo puede variar por el orden de sus términos o por agregar términos con coeficientes cero y esto no altera el resultado $p(x)$.

Proposición 2.2.6. Sea X un álgebra compleja con identidad e. Dado $x \in X$, la asociación $p \mapsto p(x)$ de $\mathbb{C}[t]$ en X define un homomorfismo de álgebras y se cumple que

$$p(x)\, q(x) = q(x)\, p(x) \tag{2.2.1}$$

si $p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$.

Demostración. Es fácil ver que se trata de una transformación lineal. Probaremos que es multiplicativa. Se obtiene fácilmente que

$$\lambda x^n p(x) = q(x)$$

siempre que $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ y $q(t) = \lambda t^n p(t)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \geq 0$. De esto y la aditividad de la transformación se sigue que $p(x)\, q(x) = r(x)$ si $p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$ y $p(t)\, q(t) = r(t)$. La igualdad enunciada se tiene debido a que $\mathbb{C}[t]$ es conmutativa. $\square$

Corolario 2.2.7. Sean $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ no constante, y escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$p(t) = \alpha_0(t - \alpha_1) \ldots (t - \alpha_n).$$

Entonces

$$p(x) = \alpha_0(x - \alpha_1 e) \ldots (x - \alpha_n e).$$

2.3. El espectro de un elemento

En esta sección suponemos que X es un álgebra con identidad e.

Definición 2.3.1. Sea $x \in X$. El *espectro* $\sigma(x)$ de x está definido como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid x - \lambda e \notin G(X)\}.$$

El *radio espectral* de x es

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

si $\sigma(x) \neq \emptyset$, en caso contrario se define $r(x) = 0$.

Es claro que si $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces $\sigma(\lambda e) = \{\lambda\}$.
Puede suceder que $\sigma(x) = \emptyset$, como a continuación se muestra.

Ejemplo 2.3.2. (a) La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es un elemento del álgebra real con identidad $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de 2×2 y

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda I \,\text{no tiene inverso}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \det(A - \lambda I) = 0\} = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 + 1 = 0\right\} = \emptyset.\end{aligned}$$

(b) En el campo X de fracciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ se cumple que $\left(\frac{P(x)}{Q(x)} - \lambda\right)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tiene inverso, a menos que $\frac{P(x)}{Q(x)} = \lambda$. De donde, $\sigma\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) = \emptyset$, excepto si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.3.3. (**Mapeo espectral polinomial**) *Supongamos que X es un álgebra compleja. Para todo polinomio $p(t)$ no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ y cualquier $x \in X$*

$$\sigma(p(x)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}. \tag{2.3.1}$$

En particular, si p no es constante, entonces $\sigma(p(x)) = \emptyset$ si y sólo si $\sigma(x) = \emptyset$. Si $\sigma(x) \neq \emptyset$ la igualdad (2.3.1) es válida inclusive cuando p es constante.

Demostración. Sean $x \in X$ y $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ no constante.

Sea $\lambda \in \sigma(p(x))$. Existen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, con $\alpha_0 \neq 0$ y $n \geq 1$ tales que

$$p(t) - \lambda \;=\; \alpha_0(t - \alpha_1)\ldots(t - \alpha_n).$$

Entonces,

$$p(x) - \lambda e = \alpha_0(x - \alpha_1 e)\ldots(x - \alpha_n e).$$

Por hipótesis $p(x)-\lambda e \notin G(X)$ por lo que $x-\alpha_k e \notin G(X)$ para algún k, es decir, $\alpha_k \in \sigma(x)$ para algún k (Proposición 2.1.4). Además, $\lambda = p(\alpha_k)$ para cualquier k, ya que $p(\alpha_k) - \lambda = 0$. Entonces, $\lambda \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Ahora, sea $p(\lambda_0)$, con $\lambda_0 \in \sigma(x)$. Entonces, existen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, con $\alpha_0 \neq 0$ y $n \geq 1$, tales que

$$p(t) - p(\lambda_0) = \alpha_0(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_n)$$

para cada $t \in \mathbb{C}$. De donde,

$$p(x) - p(\lambda_0)e = \alpha_0(x-\alpha_1 e)\ldots(x-\alpha_n e).$$

Al ser λ_0 raíz del polinomio $p(t)-p(\lambda_0)$ tenemos que $\alpha_k = \lambda_0$ para algún k y por la igualdad (2.2.1) podemos suponer que $\lambda_0 = \alpha_n$. Tenemos que $p(x)-p(\lambda_0)e \notin G(X)$, ya que si $p(x)-p(\lambda_0)e \in G(X)$ entonces existe $y \in X$ tal que

$$e = y\,(p(x) - p(\lambda_0)e) = y\alpha_0(x-\alpha_1 e)\ldots(x-\alpha_n e)$$

y

$$e = (p(x) - p(\lambda_0)e)y = (x-\alpha_1 e)\ldots(x-\alpha_n e)y$$

lo que implica que $x - \alpha_n e = x - \lambda_0 e$ es invertible, lo que contradice la elección de λ_0. Así, $p(\lambda_0) \in \sigma(p(x))$.

Si $p \in \mathbb{C}\,[t]$ es constante y $\sigma(x) \neq \emptyset$, entonces es obvio que $\sigma(p(x)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Acción de las funciones racionales en un álgebra □

Sea X un álgebra compleja, $x \in X$ y supongamos que U es una vecindad abierta no vacía de $\sigma(x)$ que puede ser vacío. Si f una función racional definida en U, entonces $f\,(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con $p\,(z)$ y $q\,(z)$, funciones polinomiales. Además, $q\,(z)$ no tiene ceros en U. Entonces $q(x) \in G(X)$ si q es constante, y cuando no lo es se sigue del Teorema 2.3.3 que $0 \notin \{q(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\} = \sigma(q(x))$ por lo que también $q(x) \in G(X)$. Lo anterior nos permite definir el elemento $f(x) \in X$ como $f(x) = p(x)(q(x))^{-1}$. Denotaremos por $R(U)$ al espacio de funciones racionales definidas en U.

Teorema 2.3.4. (**Mapeo espectral**. **Funciones racionales**) *Sean $x \in X$ y U una vecindad abierta no vacía de $\sigma(x)$. Entonces para todo $f \in R(U)$ se cumple que $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo del espacio $R(U)$ de funciones racionales definidas en U al álgebra X y*

$$\sigma(f(x)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\} \tag{2.3.2}$$

para toda $f \in R(U)$ no constante. Si $\sigma(x) \neq \emptyset$ la igualdad anterior es válida inclusive cuando f es constante.

Demostración. Tomemos $x \in X$ y $f, g \in R(U)$, entonces $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $g(z) = \frac{r(z)}{s(z)}$, con $p(z), q(z), r(z), s(z)$ funciones polinomiales y $q(z)$ y $s(z)$ sin ceros en U, por lo que el polinomio $q(z)\,s(z)$ no tiene ceros en U. Es fácil ver que la asociación $f \mapsto f(x)$ determina un homomorfismo de $R(U)$ en X . Por ejemplo, tenemos que:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (p(x)s(x) + r(x)q(x))(q(x)s(x))^{-1} \\ &= p(x)q(x)^{-1} + r(x)s(x)^{-1} = f(x) + g(x).\end{aligned}$$

De manera análoga se prueban las demás propiedades de homomorfismo.

Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ está en $R(U)$, es no constante y $\lambda \in \sigma(f(x))$, entonces $p(x)q(x)^{-1} - \lambda e \notin G(X)$, es decir, $p(x) - \lambda q(x) = (p - \lambda q)(x)$ no es invertible en X. Esto implica que $0 \in \sigma((p - \lambda q)(x))$. Si el polinomio $p(z) - \lambda q(z)$ es una constante c, entonces $ce = (p - \lambda q)(x) \notin G(X)$ de modo que $c = 0$, y así, $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \lambda$ para todo $z \in U$, lo que contradice la elección de f. Por tanto, el polinomio $p(z) - \lambda q(z)$ no es constante y del Teorema 2.3.3, se concluye que $0 = p(\alpha) - \lambda q(\alpha)$ para algún $\alpha \in \sigma(x)$, por lo que $\lambda = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = f(\alpha)$. O sea, está probada la contención izquierda a derecha de (2.3.2).

Recíprocamente, sea $\lambda = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$, con $\alpha \in \sigma(x)$. Para el polinomio $r(z) = q(\alpha)p(z) - p(\alpha)q(z)$ tenemos, por el Teorema 2.3.3, que $0 \in \sigma(r(x))$. Es decir, $q(\alpha)p(x) - p(\alpha)q(x) \notin G(X)$; por tanto, $\lambda \in \sigma(f(x))$. Queda probada la igualdad (2.3.2).

Si $f \in R(U)$ es constante y $\sigma(x) \neq \emptyset$, entonces es obvio que $\sigma(f(x)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$. □

2.4. Ideales y álgebras cociente

Definición 2.4.1. Sea X un álgebra. Un subespacio vectorial I de X es llamado *ideal izquierdo* (*derecho*) de X si para $x \in X$ y $y \in I$ se tiene que $xy \in I$ ($yx \in I$). Y se dice que es *ideal bilateral* si es ideal izquierdo y derecho. Un ideal izquierdo (derecho, bilateral) M es un *ideal máximo* izquierdo (derecho, bilateral) si $M \neq X$ y no existe un ideal izquierdo (derecho, bilateral) I tal que $M \subsetneq I \subsetneq X$.

Del lema de Zorn se sigue que si X es un álgebra con identidad, entonces cada ideal izquierdo (derecho, bilateral) de I está contenido en algún ideal máximo izquierdo (derecho, bilateral).

Definición 2.4.2. Sea I un ideal bilateral de un álgebra X, entonces el espacio cociente X/I es un álgebra, donde el producto se define como $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ para todo $\bar{x}, \bar{y} \in X/I$.

Notamos que el producto en el cociente está bien definido, ya que si $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ y $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$, entonces $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in I$ y por ser I un ideal bilateral $(x_1 - x_2)y_2, x_1(y_1 - y_2) \in I$; de donde, $x_1y_1 - x_2y_2 = x_1(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)y_2 \in I$, lo que significa que $\overline{x_1y_1} = \overline{x_2y_2}$. Además, cuando X tiene identidad e, entonces $\bar{e}\bar{x} = \overline{ex} = \bar{x} = \overline{xe} = \bar{x}\bar{e}$, por lo que $\bar{e}$ es el neutro multiplicativo en X/I.

Proposición 2.4.3. *Si I es un ideal bilateral de un álgebra X, entonces la proyección canónica $\pi : X \to X/I$, $x \mapsto \bar{x}$ es un homomorfismo de álgebras.*

Demostración. Sabemos que π es una transformación lineal y es multiplicativa, ya que $\pi(xy) = \overline{xy} = \bar{x}\bar{y} = \pi(x)\pi(y)$ para todo $x, y \in X$ por la definición del producto en el cociente. □

Observación 2.4.4. Sean I un ideal bilateral de un álgebra con identidad X y $x \in G(X)$. En el álgebra cociente X/I se cumple $\bar{x}\overline{x^{-1}} = \overline{xx^{-1}} = \bar{e} = \overline{x^{-1}x} = \overline{x^{-1}}\bar{x}$, por tanto, $\bar{x} \in G(X/I)$ y además, $\bar{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$.

2.5. Radical de Jacobson

De aquí al final de la sección X denotará un álgebra con identidad e.

Definición 2.5.1. Sea X un álgebra definimos el *Radical de Jacobson* de X como

$$\operatorname{Rad}(X) = \bigcap \{M \subset X : M \text{ es ideal máximo izquierdo de } X\}.$$

Es claro que $\operatorname{Rad}(X)$ es un ideal izquierdo de X. De hecho, vamos a probar que es un ideal bilateral.

Lema 2.5.2. *Sean $x, y \in X$, si $e - xy$ tiene inverso izquierdo (derecho), entonces $e - yx$ tiene inverso izquierdo (derecho).*

Demostración. Supongamos que existe $z \in X$ tal que $e = z(e - xy) = z - zxy$. Hagamos $w = e + yzx$, entonces

$$w(e - yx) = e - yx + yzx - yzxyx = e - yx + y\,(z - zxy)\,x = e.$$

Por tanto, $e - yx$ tiene inverso izquierdo. Para el caso cuando $e - xy$ tiene inverso derecho se procede de manera similar. □

Lema 2.5.3. *Sea I un ideal izquierdo de X tal que $e - x$ tiene inverso izquierdo para todo $x \in I$, entonces $e - x$ es invertible para todo $x \in I$.*

Demostración. Sea $x \in I$. Por hipótesis, existe $y \in X$ tal que $e = y(e-x) = y - yx$. Entonces $e - y = -yx$ pertenece a I, lo que implica que $y = e - (e-y)$ tiene inverso izquierdo, digamos z. Por tanto, $z = (e-x)$ y entonces $e = (e-x)y$. Es decir, $e - x$ es invertible y $y = (e-x)^{-1}$. $\square$

Lema 2.5.4. $\mathrm{Rad}(X) \subset \{x \in X : e - x$ tiene inverso izquierdo$\}$.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{Rad}(X)$, si $e - x$ no tiene inverso izquierdo, entonces el ideal izquierdo generado por $e - x$ es propio, $X(e-x) \subsetneq X$. Entonces existe un ideal máximo izquierdo M de X, tal que $X(e-x) \subset M$. Si $x \in M$, entonces $e = x + (e-x) \in M$, lo que contradice que M es un ideal máximo izquierdo de X, por tanto, $x \notin M$. Así, $x \notin \mathrm{Rad}(X)$. $\square$

Corolario 2.5.5. $\mathrm{Rad}(X) \subset \{x \in X : e - x \in G(X)\}$.

Demostración. Por el Lema 2.5.4, $\mathrm{Rad}(X)$ es un ideal izquierdo que cumple las hipótesis del Lema 2.5.3, y así, se tiene el resultado. $\square$

Lema 2.5.6. $\mathrm{Rad}(X) = \{x \in X : e - yx \in G(X)$ para todo $y \in X\}$.

Demostración. Sean $x \in \mathrm{Rad}(X)$ y $y \in X$, entonces $yx \in \mathrm{Rad}(X)$. Del Corolario 2.5.5 se sigue que $e - yx \in G(X)$.

Recíprocamente, sean $x \in X$ tal que $e - yx \in G(X)$ para todo $y \in X$. Supongamos que $x \notin \mathrm{Rad}(X)$, entonces existe un ideal máximo izquierdo M tal que $x \notin M$, lo cual implica que $Xx + M = X$, de donde $yx + m = e$ para algún $y \in X$, $m \in M$; pero por hipótesis, $m = e - yx$ pertenece a $G(X)$, lo que contradice que M es un ideal máximo izquierdo de X. Por tanto, $x \in \mathrm{Rad}(X)$. $\square$

Lema 2.5.7. $\mathrm{Rad}(X) = \{x \in X : e - xy \in G(X)$ para todo $y \in X\}$.

Demostración. Por el lema anterior, $x \in \mathrm{Rad}(X)$ si y sólo si $e - yx \in G(X)$ para todo $y \in X$. Debido al Lema 2.5.2, esto es equivalente a que $e - xy \in G(X)$ para todo $y \in X$. $\square$

De los Lemas 2.5.6 y 2.5.7 obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.5.8. $\mathrm{Rad}(X) = \{x \in X : e - xy,\ e - yx \in G(X)$ para todo $y \in X\}$.

Proposición 2.5.9. $\mathrm{Rad}(X)$ *es un ideal bilateral.*

Demostración. Si definimos

$$\mathrm{Rad}(X)_R = \bigcap \{M : M \text{ ideal máximo derecho de } X\},$$

entonces $\mathrm{Rad}(X)_R$ es un ideal derecho de X, y además podemos obtener para $\mathrm{Rad}(X)_R$ los resultados correspondientes a los obtenidos para $\mathrm{Rad}(X)$, simplemente cambiando la palabra izquierdo por derecho. De modo que por el Lema 2.5.8,

$$\mathrm{Rad}(X) = \mathrm{Rad}(X)_R.$$

Esto nos dice que $\mathrm{Rad}(X)$ es un ideal bilateral. □

Capítulo 3

Álgebras topológicas

3.1. Álgebras normadas, localmente convexas, m-convexas y p-normadas

Definición 3.1.1. Un *álgebra topológica* (X, τ) es un álgebra X con una topología τ con la cual (X, τ) es un espacio vectorial topológico y la multiplicación es continua.

Teorema 3.1.2. *Sea X un álgebra. Si (X, τ) un espacio vectorial topológico y para cada vecindad U del cero, existe una vecindad V del cero tal que $V^2 \subset U$. Es decir, la multiplicación es continua en $(0,0)$. Entonces la multiplicación es continua en $X \times X$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base local del 0 para la topología τ que tiene las propiedades indicadas en el Teorema 1.1.5. Sean $x_0, y_0 \in X$ y $U \in \mathcal{B}$. Existe $W_0 \in \mathcal{B}$ tal que

$$W_0 + W_0 + W_0 \subset U,$$

por hipótesis existe W_1 vecindad del cero tal que

$$W_1^2 \subset W_0.$$

Además, como W_1 es absorbente, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\alpha x_0, \alpha y_0 \in W_1$$

si $|\alpha| < \lambda$.

Sean $|\alpha| < \lambda$ y $V = W_1 \cap \alpha W_1$. Veremos que para todo $v_1, v_2 \in V$,

$$(x_0 + v_1)(y_0 + v_2) \in x_0 y_0 + W_0 + W_0 + W_0. \tag{3.1.1}$$

Tomemos $x_0 + v_1 \in x_0 + V$ y $y_0 + v_2 \in y_0 + V$, entonces

$$(x_0 + v_1)(y_0 + v_2) = x_0 y_0 + x_0 v_2 + v_1 y_0 + v_1 v_2.$$

Por un lado, $v_1 v_2 \in V^2 \subset W_1^2$, luego como $v_1, v_2 \in V$ y $V \subset \alpha W_1$, tenemos que $v_1 = \alpha w_1$ y $v_2 = \alpha w_2$ con $w_1, w_2 \in W_1$, por lo que $x_0 v_2 = x_0(\alpha w_2) = (\alpha x_0) w_2$ pertenece a W_1^2 y $v_1 y_0 = (\alpha w_1) y_0 = w_1(\alpha y_0)$ pertenece a W_1^2. De donde, (3.1.1) se cumple. Así

$$(x_0 + V)(y_0 + V) \subset x_0 y_0 + U.$$

y se sigue que la multiplicación es continua en $X \times X$. □

Definición 3.1.3. Un álgebra es llamada p-seminormada, con $0 < p \leq 1$, si se le da la topología inducida por una $p-$seminorma ν tal que tiene la siguiente propiedad: existe $C > 0$ tal que

$$\nu(x \cdot y) \leq C\nu(x)\nu(y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$. En este caso decimos que (X, ν) es un *álgebra p-seminormada*.

Observación 3.1.4. Si en un álgebra p-seminormada (X, ν) definimos $\| x \| = C\nu(x)$ para todo $x \in X$, entonces $\| \cdot \|$ es una p-seminorma en X que define la misma topología que ν y es además submultiplicativa, es decir, tiene la siguiente propiedad:

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Por consiguiente, siempre podemos suponer que la topología de un álgebra p-seminormada está determina por una p-seminorma submultiplicativa.

Cuando $p = 1$ entonces X es llamada *seminormada* y la seminorma $\| \cdot \|$ que define su topología puede suponerse submultiplicativa, por lo antes dicho.

Observación 3.1.5. Si $(X, \| \cdot \|)$ es un álgebra p-seminormada con idéntico y la p-seminorma $\| \cdot \|$ no es idénticamente cero, entonces $\|e\| \neq 0$ y además $\|e\| \geq 1$ pues $\|e\| \leq \|e\|\|e\|$. Más aún, se puede definir una seminorma $|||\cdot|||$ equivalente a la original, es decir que define la misma topología que $\| \cdot \|$, y tal que $|||e||| = 1$.

Casos particulares de la definición anterior se incluyen en la siguiente definición, que ya toma en cuenta la observación anterior, y que se da explícitamente en vista de la importancia de los casos.

Definición 3.1.6. Un álgebra es *normada* si tiene la topología inducida por alguna norma submultiplicativa $\|\cdot\|$. Más en general, un álgebra es llamada $p-$*normada* si tiene la topología inducida por una $p-$norma submultiplicativa $\|\cdot\|$. En cualquier caso escribimos $(X, \|\cdot\|)$.

Ejemplo 3.1.7. El espacio de sucesiones complejas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

($0 < p \leq 1$ fijo) es denotado como $\ell^p = \ell^p(\mathbb{C})$ y forma un álgebra compleja p-normada conmutativa con las operaciones puntuales y la p-norma definida como

$$\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, la compleción $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ de $(X, \|\cdot\|)$, como espacio vectorial topológico, es también un álgebra normada en donde el producto está definido como

$$x \cdot y = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$$

donde (x_n), (y_n) son sucesiones en X que convergen a x y y, respectivamente, ya que es fácil ver que el producto está bien definido y es continuo.

Definición 3.1.8. Un *álgebra localmente convexa* (a.l.c.) es un álgebra X con una topología $\tau(\mathcal{S})$ inducida por una familia de seminormas $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tales que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Lambda$ tal que

$$\|x \cdot y\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta$$

para todo $x, y \in X$. Podemos suponer que la topología de un álgebra localmente convexa está generada por una familia saturada de seminormas que satisface la desigualdad anterior, pues podemos tomar la saturación de la familia $\mathcal{S}$.

Casos particulares de álgebras localmente convexas son las que a continuación definimos.

Definición 3.1.9. Se dice que X es un *álgebra localmente $m-$convexa* (por brevedad $m-$*convexa*) si su topología es de Hausdorff y está dada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$cada una de las cuales es submultiplicativa. La saturación de una familia de seminormas submultiplicativas está compuesta por seminormas submultiplicativas; por tanto, la topología de toda álgebra $m-$convexa se puede definir por una familia saturada de seminormas submultiplicativas.

Definición 3.1.10. Una seminorma extendida $\|\cdot\| : X \to [0,\infty]$ definida en el álgebra X es llamada submultiplicativa si es submultiplicativa en el subespacio $\{x \in X : \|x\| < \infty\}$.

Proposición 3.1.11. *En un a.l.c X la multiplicación es continua. Es decir, toda a.l.c es álgebra topológica. En particular, las m-convexas y las normadas lo son.*

Demostración. Sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de seminormas que definen la topología de X. Sólo falta probar que la multiplicación es continua. Si U es una vecindad del cero, entonces existe $\epsilon > 0$ y $\|\cdot\|_\alpha$, con $\alpha \in \Lambda$, tal que $B(\alpha,\epsilon) \subset U$. Sabemos que existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\|x \cdot y\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta$ para todo $x, y \in X$. Por tanto, $V = B(\beta,\sqrt{\epsilon})$ es una vecindad del cero tal que $V^2 \subset U$. El resultado se sigue del Teorema 3.1.2. $\square$

Observación 3.1.12. Notemos que la prueba de la Proposición 3.1.11 sigue funcionando para demostrar que la multiplicación es continua en un álgebra p-seminormada.

Teorema 3.1.13. *Si X es un álgebra m-convexa con identidad e, entonces la función inversión $x \mapsto x^{-1}$, del grupo $G(X)$ de los elementos invertibles en sí mismo, es un homeomorfismo. En particular, esto es válido para álgebras normadas.*

Demostración. Sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de seminormas submultiplicativas que definen la topología de X.

Como la función inversa de la inversión es ella misma, basta probar que la inversión es continua. Primero veamos que es continua en e; es decir que si $(x_i)_{i\in I}$ es una red en $G(X)$ tal que $x_i \to e$, entonces $x_i^{-1} \to e$. Sean $\alpha \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$. Para todo $x \in G(X)$ se cumple que

$$\|x^{-1}\|_\alpha - \|e\|_\alpha \leq \|x^{-1} - e\|_\alpha = \|(e-x)x^{-1}\|_\alpha \leq \|e - x\|_\alpha \|x^{-1}\|_\alpha,$$

por ser $\|\cdot\|_\alpha$ submultiplicativa. Por otra parte, existe $i_0 > 0$ tal que para todo $i > i_0$ sucede que $\|x_i - e\|_\alpha < \text{mín}\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2\|e\|_\alpha + 1}\right)$. Entonces, $i > i_0$ implica que

$$\|x_i^{-1}\|_\alpha - \|e\|_\alpha \leq \|e - x_i\|_\alpha \|x_i^{-1}\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|x_i^{-1}\|_\alpha,$$

de donde $\frac{1}{2}\|x_i^{-1}\|_\alpha \leq \|e\|_\alpha$ y además,

$$\|x_i^{-1} - e\|_\alpha \leq \|e - x_i\|_\alpha \|x_i^{-1}\|_\alpha \leq \left(\frac{\epsilon}{2\|e\|_\alpha + 1}\right)(2\|e\|_\alpha) < \epsilon;$$

es decir, $x_i^{-1} \to e$ en $(X, \|\cdot\|_\alpha)$. De acuerdo al Teorema 1.1.20, $x_i^{-1} \to e$ en el espacio localmente convexo X.

Ahora, si $x_0 \in G(X)$ y $(x_i)_{i\in I}^{\infty}$ es una red en $G(X)$ que converge a x_0, entonces por la continuidad de la multiplicación se tiene que $x_i x_0^{-1} \to e$ en X y por lo ya probado, $\left(x_0 x_i^{-1}\right) = \left(x_i x_0^{-1}\right)^{-1} \to e$. Entonces $x_i^{-1} \to x_0^{-1}$. □

Observación 3.1.14. El teorema anterior también es válido cuando X es un álgebra p-normada. La demostración anterior sirve para probarlo, ya que no se usó la homogeneidad de la seminorma.

Definición 3.1.15. Un álgebra topológica X es completa si lo es como espacio vectorial topológico; es decir, si toda red de Cauchy es convergente. Si X es metrizable, entonces es completa si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Casos particulares de estas álgebras se presentan a continuación.

Definición 3.1.16. Un álgebra es llamada B_0-*álgebra* si es localmente convexa, metrizable y completa.

Ejemplo 3.1.17. Sea s el espacio de la sucesiones complejas. Definimos $\|(x_m)\|_n = |x_n|$ para cada $n \geq 1$ y $(x_m) \in s$. Entonces $\left(s, \{\|\cdot\|_n\}_{n\geq 1}\right)$ es un álgebra m-convexa con las operaciones usuales. De hecho es completa y, por el Teorema 1.1.21, metrizable.

Definición 3.1.18. Un álgebra p-normada $(X, \|\cdot\|)$ es llamada *p-álgebra de Banach* si es completa. Si $p = 1$, es llamada simplemente *álgebra de Banach*. En general, si un álgebra p-seminormada $(X, \|\cdot\|)$ es completa, entonces la llamamos un *álgebra p-seminormada de Banach*.

Ejemplo 3.1.19. Sea S cualquier conjunto no vacío. El espacio $\mathbb{C}^S$ de las funciones definidas en S con valores complejos es un álgebra compleja conmutativa con unidad con las operaciones puntuales. Sea $s_0 \in S$ y $0 < p \leq 1$, definimos $\rho(f) = |f(s_0)|^p$. Es fácil observar que $\left(\mathbb{C}^S, \rho\right)$ es un álgebra p-seminormada. Veamos que es de Banach.

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\left(\mathbb{C}^S, \rho\right)$, esto quiere decir $\rho(f_n - f_m) = |f_n(s_0) - f_m(s_0)|^p \to 0$ cuando $m, n \to \infty$. Por lo que $(f_n(s_0))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, entonces existe $x_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f_n(s_0) \to x_0$. Por tanto, la función constante $f = x_0 \in \mathbb{C}$ cumple que $\rho(f_n - f) = |f_n(s_0) - x_0| \to 0$ cuando $n \to \infty$, o sea, (f_n) converge a f en $\left(\mathbb{C}^S, \rho\right)$.

Un ejemplo de una p-álgebra de Banach es el siguiente:

Ejemplo 3.1.20. El espacio de las funciones complejas y acotadas definidas en S, que denotamos como $B(S)$, es un álgebra de Banach conmutativa con las operaciones puntuales y la norma del supremo $\|f\|_\infty = \sup_{s\in S} |f(s)|$. Su topología también puede darse a través de una p-seminorma con $p < 1$. De hecho, dado $0 < p < 1$ definimos

$$\|f\|_{\infty,p} = (\|f\|_\infty)^p = \left(\sup_{s\in S} |f(s)|\right)^p.$$

Entonces $(B, \|\cdot\|_{\infty,p})$ es un álgebra p-normada, ya que si $f, g \in B$, entonces

$$\|f+g\|_{\infty,p} \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)^p \leq \|f\|_{\infty,p} + \|g\|_{\infty,p}$$

pues $p \leq 1$, y además,

$$\|fg\|_{\infty,p} \leq (\|f\|_\infty \|g\|_\infty)^p = \|f\|_{\infty,p}\|g\|_{\infty,p}.$$

Finalmente, es claro que $\|f_n - f\|_{\infty,p} = (\|f_n - f\|_\infty)^p \to 0$ si y sólo si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, lo cual implica que la topología definida por $\|\cdot\|_{\infty,p}$ es equivalente a la definida por $\|\cdot\|_\infty$. De esto se sigue que $(B, \|\cdot\|_\infty^p)$ es una p-álgebra de Banach.

3.2. Álgebras topológicas cociente

Proposición 3.2.1. *Sea X un álgebra topológica, entonces la cerradura de todo ideal izquierdo (derecho, bilateral) de X es un ideal izquierdo (derecho, bilateral) de X.*

Demostración. Sea I un ideal izquierdo de X. Sabemos que $\bar{I}$ es un subespacio vectorial de X. Supongamos que $y \in \bar{I}$ y $x \in X$. Sea U una vecindad de xy en X. Probaremos que $U \cap I \neq \emptyset$; con lo que quedará probado que $xy \in \bar{I}$. Por la continuidad del producto existe W vecindad de y tal que $xW \subset U$. Como $y \in \bar{I}$, se tiene que existe $w \in W \cap I \neq \emptyset$. Entonces $xw \in U$ y $xw \in I$. Por consiguiente, $xw \in U \cap I$. □

Lema 3.2.2. *Si $\|\cdot\|$ es una seminorma submultiplicativa y continua en un álgebra topológica X, entonces $\ker\|\cdot\| = \{z \in X : \|z\| = 0\}$ es un ideal bilateral de X y es cerrado.*

Demostración. Claramente $0 \in \ker\|\cdot\|$. Sean $x, y \in \ker\|\cdot\|$, $z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| = 0$; $\|\lambda x\| = 0$; $\|xz\| \leq \|x\|\|z\| = 0$ y $\|zx\| \leq \|z\|\|x\| = 0$. De donde, $\ker\|\cdot\|$ es ideal bilateral y es cerrado por ser la imagen inversa del cerrado $\{0\}$ bajo la función continua $\|\cdot\|$. □

Teorema 3.2.3. *Si $\|\cdot\|$ es una seminorma submultiplicativa en un álgebra X e I es un ideal bilateral de X, entonces la seminorma cociente $\|\cdot\|_I$ en X/I es submultiplicativa y si I es cerrado en $(X,\|\cdot\|)$ y $\|\cdot\|$ no es nula, entonces $\|\cdot\|_I$ es una norma en X/I. Por tanto, $(X/I,\|\cdot\|_I)$ es un álgebra seminormada en el primer caso y es normada en el segundo. Si $(X,\|\cdot\|)$ es un álgebra p-normada e I es un ideal bilateral cerrado en X, entonces $(X/I,\|\cdot\|_I)$ es un álgebra p-normada. En todos los casos, el homomorfismo cociente*

$$\pi : (X,\|\cdot\|) \to (X/I,\|\cdot\|_I)$$

es continuo y abierto.

Demostración. El ideal I es un subespacio vectorial de X. Por el Teorema 1.1.18 basta probar que $\|\bar{x}\bar{y}\|_I \leq \|\bar{x}\|_I\|\bar{y}\|_I$. Para esto veremos que $\|\bar{x}\bar{y}\|_I \leq \|x+z\|\|y+w\|$ si $z,w \in I$, pues entonces se sigue el resultado al tomar ínfimos. Para $z,w \in I$ tenemos que:

$$\|x+z\|\|y+w\| \geq \|xy+xw+zy+zw\| \geq \operatorname*{ínf}_{u\in I}\|xy+u\| = \|\bar{x}\bar{y}\|_I,$$

puesto que I es un ideal bilateral.

Si suponemos que I es un ideal cerrado y que $\|\cdot\|$ no es nula, entonces, por el Teorema 1.1.18, entonces $\|\cdot\|_I$ es una norma en X/I y $(X/I,\|\cdot\|_I)$ es un álgebra normada.

Finalmente, si $(X,\|\cdot\|)$ es un álgebra p-normada e I es un ideal bilateral cerrado en X, $(X/I,\|\cdot\|_I)$ es un álgebra p-normada, ya que vale la primera parte de la prueba y si $x \in X$, y $\lambda = 0$ claramente $\|\lambda\bar{x}\|_I = |\lambda|^p\|\bar{x}\|_I$; y si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\|\lambda\bar{x}\|_I = \operatorname*{ínf}_{y\in I}\|\lambda x+y\| = \operatorname*{ínf}_{y\in I}\|\lambda(x+\lambda^{-1}y)\| = |\lambda|^p \operatorname*{ínf}_{y\in I}\|(x+\lambda^{-1}y)\| = |\lambda|^p\|\bar{x}\|_I.$$

□

Observación 3.2.4. Si $(X,\|\cdot\|)$ es un álgebra seminormada, podemos concluir, a partir de los lemas 3.2.2 y 3.2.3, que $X/\ker(\|\cdot\|)$ es una álgebra normada con la norma cociente.

De modo similar se puede probar la primera parte del siguiente resultado. El resto es consecuencia del teorema anterior y los teoremas 1.1.19 y 1.1.18.

Teorema 3.2.5. *Sea $(X,\tau(\mathcal{S}))$, con $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, un álgebra localmente convexa e I un ideal bilateral de X, entonces el álgebra cociente X/I es un álgebra localmente* *convexa con la familia $\mathcal{S}_I$ de seminormas cocientes determinadas por los elementos de $\mathcal{S}$. Cuando $(X, \tau(\mathcal{S}))$ es m-convexo, entonces $(X/I, \tau(\mathcal{S}_\mathcal{I}))$ también lo es. El homomorfismo cociente*

$$\pi : (X, \tau(\mathcal{S})) \to (X/I, \tau(\mathcal{S}_\mathcal{I}))$$

es continuo y abierto.

Ejemplo. Sea n un número natural y $\mathcal{L}^n[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones complejas Lebesgue medibles en $[0,1]$, con las operaciones usuales entre funciones y tales que $\int_{[0,1]} |f(x)|^n \, d\lambda < \infty$. En él está definida la seminorma $\|f\|_n = \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^n \, d\lambda\right)^{\frac{1}{n}}$.

El espacio vectorial

$$\mathcal{L}^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^n[0,1]$$

es localmente convexo con la topología determinada por la familia de seminormas $\mathcal{S} = \{\|\cdot\|_n : \ n \geq 1\}$. Más aún, con el producto usual de funciones es un álgebra conmutativa, con unidad y locamente convexa, como ahora comprobamos.

Si $f, g \in \mathcal{L}^\omega$ y $n \geq 1$, entonces $\int_{[0,1]} |f(x)|^{2n} \, d\lambda < \infty$ y $\int_{[0,1]} |g(x)|^{2n} \, d\lambda < \infty$. De la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$\int_{[0,1]} |fg|^n \, d\lambda \leq \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^{2n} \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^{2n} \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \qquad (3.2.1)$$

y así $f \cdot g \in \mathcal{L}^\omega$ y

$$\|fg\|_n \leq \|f\|_{2n} \|g\|_{2n}$$

si $n \geq 1$ y $f, g \in \mathcal{L}^\omega$.

Por el Teorema 1.1.21 ésta es un álgebra pseudometrizable.

Si (f_m) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\omega$, entonces lo es en cada espacio $\mathcal{L}^n[0,1]$ y como éste es completo, la sucesión converge a una función $g_n \in \mathcal{L}^n[0,1]$ que es única a.e. Sabemos que $\mathcal{L}^n[0,1] \subset \mathcal{L}^{n'}[0,1]$ si $n \geq n'$ por tanto, $g_n = g_{n'}$ a.e. en $[0,1]$ para cualesquiera $n, n' \geq 1$.

Sea $I = \{f \in \mathcal{L}^\omega : \ f = 0 \,\text{a.e. en } [0,1]\}$. Entonces I es un ideal cerrado de $\mathcal{L}^\omega$ y $L^\omega = \mathcal{L}^\omega \diagup I$ es una B_0-álgebra.

3.3. Descomposición de Arens-Michael

Sea $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de álgebras topológicas. El álgebra producto de esta familia es el conjunto

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} : x_\alpha \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Lambda\}$$

con las operaciones puntuales y la topología producto τ. Entonces $\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \tau\right)$ es un álgebra topológica puesto que al componer las operaciones definidas en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ con cada proyección $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ se obtiene la operación definida en X_α la cual es continua.

Lo que se logra en los siguientes resultados es ver a un álgebra m-convexa completa como una subálgebra topológica de un producto de álgebras de Banach.

Definición 3.3.1. Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido y $(X_i)_{i\in\Lambda}$ una familia de álgebras topológicas. Supongamos que para cada par de índices $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \leq \beta$ se tiene un homomorfismo continuo $f_{\alpha\beta} : X_\beta \to X_\alpha$ de manera que se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $f_{\alpha\alpha}$ es la función identidad para cada $\alpha \in \Lambda$.
2. $f_{\alpha\beta} = f_{\alpha\gamma} \circ f_{\gamma\beta}$ para cada $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

Definimos el límite inverso del sistema inverso $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ como

$$\varprojlim X_\alpha = \left\{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod X_\alpha : f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha, \text{ siempre que } \alpha \leq \beta\right\}.$$

El límite inverso es entonces una subálgebra topológica del álgebra producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

Teorema 3.3.2. *Sea $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un álgebra compleja, m-convexa, completa y con identidad e, donde $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia saturada de seminormas submultiplicativas. Entonces existe un isomorfismo de álgebras topológicas, de X en el límite inverso de una familia de álgebras de Banach, complejas y con identidad.*

Demostración. Dirigimos el conjunto Λ con el orden

$$\alpha \preccurlyeq \beta \text{ si } \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \tag{3.3.1}$$

para cada $x \in X$.

Para cada seminorma $\|\cdot\|_\alpha$ tomamos su núcleo $\ker\|\cdot\|_\alpha$ y consideramos el álgebra cociente

$$X\diagup\ker\|\cdot\|_\alpha,$$

la cual es un álgebra normada con la norma cociente (Observación 3.2.4).

Se cumple que

$$\|\,[x]_\alpha\,\|_\alpha=\|x\|_\alpha. \tag{3.3.2}$$

para cada $x\in X$ y $\alpha\in\Lambda$, donde $[x]_\alpha$ es la clase de x en $X\diagup\ker\|\cdot\|_\alpha$.

En efecto, $\|\,[x]_\alpha\,\|_\alpha\leq\|x\|_\alpha$, por definición y por otro lado, existe una sucesión (y_n) en $\ker\|\cdot\|_\alpha$, tal que $\|x+y_n\|_\alpha\to\|\,[x]_\alpha\,\|_\alpha$. Como

$$|\|x+y_n\|_\alpha-\|x\|_\alpha|\leq\|x+y_n-x\|_\alpha=\|y_n\|_\alpha$$

para todo n, se sigue que $\|x+y_n\|_\alpha\to\|x\|_\alpha$ y por tanto se cumple (3.3.2).

Sea $(X_\alpha,\|\cdot\|_\alpha^c)$la compleción de $(X\diagup\ker\|\cdot\|_\alpha,\|\,[\cdot]\,\|_\alpha)$. Entonces $\{X_\alpha,\|\cdot\|_\alpha^c\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de álgebras de Banach, complejas y con identidad $[e]_\alpha$. Tenemos que $\|\,[x]_\alpha\,\|_\alpha^c=\|\,[x]_\alpha\,\|_\alpha$ siempre que $x\in X$ y $\alpha\in\Lambda$.

Para $\alpha\preccurlyeq\beta$ definamos

$$i_\alpha^\beta:\underset{[x]_\beta}{X\diagup\ker}\|\cdot\|_\beta\underset{\rightarrow}{\rightarrow}\underset{[x]_\alpha}{X\diagup\ker}\|\cdot\|_\alpha.$$

Esta función está bien definida ya que $[x]_\beta=[y]_\beta$ implica que $y-x\in\ker\|\cdot\|_\beta$ y por (3.3.1), $y-x\in\ker\|\cdot\|_\alpha$; o sea $[x]_\alpha=[y]_\alpha$.

La función i_α^β es un homomorfismo continuo y suprayectivo de álgebras por la definición de las operaciones en los cocientes y ya que

$$\|i_\alpha^\beta\,[x]_\beta\,\|_\alpha=\|\,[x]_\alpha\,\|_\alpha=\|x\|_\alpha\leq\|x\|_\beta=\|\,[x]_\beta\,\|_\beta.$$

Entonces i_α^β puede extenderse de manera única a un homomorfismo continuo entre las compleciones de los cocientes. A dicha extensión también la denotamos como

$$i_\alpha^\beta:X_\beta\to X_\alpha.$$

Tomemos el límite inverso $B=\underset{\leftarrow}{\lim}X_\alpha$ del sistema $\left(X_\alpha,i_\alpha^\beta\right)$. La topología producto en $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ es la generada por la familia de seminormas $(v_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ definidas de la siguiente forma

$$v_{\alpha_0}\left((x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\right)=\|x_{\alpha_0}\|_{\alpha_0}^c$$

para cada $\alpha_0\in\Lambda$ y $(x_\alpha)_\alpha\in\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$.

Tomemos el homomorfismo

$$\begin{array}{c} T : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \, . \\ x \mapsto \left\{[x]_\alpha\right\}_\alpha \end{array}$$

Es claro que la imagen de T está contenida en B debido a la definición de los homomorfismos i_α^β. Además, T es inyectiva porque X es de Hausdorff, y es continua porque la composición con cada proyección del producto es el homomorfismo canónico de X en uno de los cocientes $X \diagup \ker \|\cdot\|_\alpha \subset X_\alpha$.

Probaremos:

(i) $T^{-1} : T(X) \to X$ es continua. Es decir, T es un isomorfismo de álgebras topológicas de X en su imagen.

(ii)$T(X)$ es un conjunto cerrado y denso en B y por tanto, $T(X) = B$.

(i) Sea $\|\cdot\|_{\alpha_0}$ una seminorma en X. Entonces

$$\left\|T^{-1}\left(\left([x]_\alpha\right)_\alpha\right)\right\|_{\alpha_0} = \|x\|_{\alpha_0} = \left\|[x]_{\alpha_0}\right\|_{\alpha_0} = v_{\alpha_0}\left(\left([x]_\alpha\right)_{\alpha\in}\right),$$

para todo $\left([x]_\alpha\right)_\alpha \in T(X)$. Así, T^{-1} es continua.

(ii) $T(X)$ es cerrado en B, ya que de acuerdo al inciso anterior, T es un homeomorfismo lineal de X en su imagen y X es completo.

Resta demostrar que $T(X)$ es denso en B, para ello tomemos un vecindad básica V en B de un punto $(x_\alpha)_\alpha \in B$, digamos

$$V = \left\{(y_\alpha)_\alpha \in B : \, v_{\alpha_i}\left((y_\alpha)_\alpha - (x_\alpha)_\alpha\right) < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\}$$

Demostraremos que $V \cap T(X) \neq \emptyset$.

Como $X \diagup \ker \|\cdot\|_{\alpha_i}$ es denso en su compleción, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $x_i \in X$ tal que

$$\left\|[x_i]_{\alpha_i} - x_{\alpha_i}\right\|_{\alpha_i}^c < \epsilon.$$

Sea $\beta \succcurlyeq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Como $(x_\alpha)_\alpha \in B$ se sigue que $i_{\alpha_i}^\beta(x_\beta) = x_{\alpha_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Por ser

$$i_{\alpha_i}^\beta : X_\beta \to X_{\alpha_i}$$

continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|i_{\alpha_i}^\beta(y) - x_{\alpha_i}\right\|_{\alpha_i}^c = \left\|i_{\alpha_i}^\beta(y) - i_{\alpha_i}^\beta(x_\beta)\right\|_{\alpha_i}^c < \epsilon$$

siempre que

$$\|y - x_\beta\|_\beta^c < \delta.$$

Como $X \diagup \ker \|\cdot\|_\beta$ es denso es su compleción X_β, entonces existe $x \in X$ tal que

$$\left\| [x]_\beta - x_\beta \right\|_\beta^c < \delta$$

y por tanto,

$$\left\| [x]_{\alpha_i} - x_{\alpha_i} \right\|_{\alpha_i}^c < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$. O sea,

$$v_{\alpha_i}\left(T\left(x\right) - \left(x_\alpha\right)\right) < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$ y entonces $V \cap T\left(X\right) \neq \emptyset$. □

Si $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ es un álgebra compleja m-convexa, con identidad y completa, donde $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia saturada de seminormas submultiplicativas, entonces la familia de álgebras de Banach $\left\{X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ a la que se refiere el teorema anterior es llamada una *descomposición de Arens-Michael* de X correspondiente a la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Corolario 3.3.3. (**Criterio de divisibilidad de Arens**). *Sea* $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ *como en el teorema anterior. Un elemento* $x \in X$ *es invertible si y sólo si* $[x]_\alpha$ *es invertible en* X_α *para todo* $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. La parte "sólo si" es obvia: el inverso de $[x]_\alpha$ es $[x^{-1}]_\alpha$ para cada α.

Recíprocamente. Supongamos que $x_\alpha \in X_\alpha$ es el inverso de $[x]_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Sea $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\beta \succcurlyeq \alpha$ entonces

$$\begin{aligned} i_{\alpha\beta}\left(x_\beta\right) \cdot [x]_\alpha &= i_{\alpha\beta}\left(x_\beta\right) \cdot i_{\alpha\beta}\left([x]_\beta\right) \\ &= i_{\alpha\beta}\left(x_\beta\, [x]_\beta\right) = e_\alpha. \end{aligned}$$

Del mismo modo se sigue que $[x]_\alpha\, i_{\alpha\beta}\left(x_\beta\right) = e_\alpha$. Así, $i_{\alpha\beta}\left(x_\beta\right) = x_\alpha$ y por tanto, $(x_\alpha) \in B$. De donde, existe $z \in X$ tal que $T(z) = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, es decir, $x_\alpha = [z]_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Entonces $[z]_\alpha [x]_\alpha = [x]_\alpha [z]_\alpha = [e]_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ o lo que es lo mismo $zx - e, xz - e \in \ker\|\cdot\|_\alpha$ para todo α y por tanto, $zx = xz = e$, por ser X de Hausdorff. □

Capítulo 4

Q-álgebras

Supondremos en este capítulo, a menos que se diga lo contrario, que las álgebras son complejas.

4.1. Q-álgebras topológicas

Definición 4.1.1. Se dice que un álgebra topológica X con identidad es una *Q-álgebra* si $G(X)$ es un abierto de X.

Proposición 4.1.2. *Sea X un álgebra topológica con identidad e. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) X es una Q-álgebra

(b) e es punto interior de $G(X)$

(c) $\mathrm{Int}G(X) \neq \emptyset$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Si X es una Q-álgebra, entonces $G(X)$ es abierto y el resultado se sigue de que $e \in G(X)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ es obvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Si $x_0 \in \mathrm{Int}G(X)$, entonces existe una vecindad abierta U de x_0 en X tal que $U \subset G(X)$. Sea $x \in G(X)$, como la multiplicación es continua y $(x, x^{-1}x_0) \mapsto x_0$. Existen dos abiertos V y W en X tales que

$$x \in V,\ x^{-1}x_0 \in W \text{ y } VW \subset U.$$

En particular,

$$Vx^{-1}x_0 \subset U \subset G(X).$$

Si $y \in V$, se tiene que $yx^{-1}x_0 \in G(X)$. Como $x, x_0^{-1} \in G(X)$ y $G(X)$ es un grupo multiplicativo, entonces $y \in G(X)$. Así, $V \subset G(X)$ y $G(X)$ es abierto; es decir, X es una Q-álgebra. □

Proposición 4.1.3. *Sean X, Y álgebras topológicas con identidad y $h : X \to Y$ un homomorfismo suprayectivo y abierto. Si X es una Q-álgebra, entonces Y también lo es.*

Demostración. Afirmamos que $h(e_X) = e_Y$. Por la suprayectividad de h se tiene que si $y \in Y$, entonces $y = h(x)$ para algún $x \in X$, y por ser h un homomorfismo se cumple que

$$y = h(xe_X) = h(x)h(e_X) = yh(e_X)$$

y

$$y = h(e_X x) = h(e_X)h(x) = h(e_X)y.$$

Esto prueba nuestra afirmación. De ella y de que h es un homomorfismo obtenemos que

$$h(G(X)) \subset G(Y).$$

Al ser X una Q-álgebra, existe un abierto V en X tal que $e_X \in V \subset G(X)$. Por tanto, la vecindad abierta $h(V)$ de e_Y está contenida en $G(Y)$. De donde, Y es una Q-álgebra. □

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que si X es una Q-álgebra e I es un ideal bilateral de X, entonces X/I con la topología cociente es una Q-álgebra, ya que la proyección canónica $\pi : X \to X/I$ es un homomorfismo suprayectivo y abierto.

Observación 4.1.4. Sea $(X_i, \tau_i)_{i=1}^n$ una familia finita de álgebras topológicas. Entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es una Q-álgebra si y sólo si X_i es Q-álgebra para cada $1 \leq i \leq n$. Esta observación se sigue de la siguiente igualdad

$$G\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} G(X_i).$$

Proposición 4.1.5. *Si X es una Q-álgebra, entonces para todo $x \in X$ el espectro $\sigma(x)$ de x es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Dado $x \in X$, consideremos la función $f : \mathbb{C} \to X$ definida como $f(\lambda) = x - \lambda e$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Notemos que f es una función continua y que $\lambda \in f^{-1}(G(X))$ si y sólo si $\lambda \notin \sigma(x)$, es decir, $f^{-1}(G(X)) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Como $G(X)$ es abierto en X, entonces $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ lo es en $\mathbb{C}$; de donde, $\sigma(x)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. □

Teorema 4.1.6. *Si X es una Q-álgebra, entonces $\sigma(x)$ es compacto para todo $x \in X$. Si $\sigma(x) \neq \emptyset$, entonces existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $|\lambda| = r(x)$.*

Demostración. Por el Lema 4.1.5, $\sigma(x)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Sólo falta probar que es acotado. Supongamos lo contrario, entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\sigma(x)$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\{|\lambda_n|\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Como $x - \lambda_n e \in X \setminus G(X)$, entonces $e - \frac{1}{\lambda_n} x \in X \setminus G(X)$ para cada $n \geq 1$. Además, $e - \frac{1}{\lambda_n} x \to e$, por la continuidad del producto por un escalar y porque $\frac{1}{|\lambda_n|} \to 0$, lo que lleva, ya que $X \setminus G(X)$ es cerrado, a la contradicción de que $e \in X \setminus G(X)$. Por tanto, $\sigma(x)$ es acotado. $\square$

En el siguiente ejemplo mostraremos que el recíproco del teorema anterior no es válido en general.

Ejemplo. Sea $X = C([0,1])$ el espacio de funciones complejas continuas en el intervalo $[0,1]$, con la topología de la convergencia puntual, es decir, la generada por las seminormas $\|f\|_t = |f(t)|$, con $t \in [0,1]$. Entonces $(X, \{\|\cdot\|_t\}_{t \in [0,1]})$ es un álgebra m-convexa. Tenemos que

$$G(X) = \{f \in X : f(t) \neq 0, \text{ si } t \in [0,1]\}$$

y

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = f(t) \text{ para algún } t \in [0,1]\} = f([0,1])$$

para toda $f \in X$. Así, $\sigma(f)$ es compacto, ya que f es continua. Sin embargo, dado un abierto básico V en X tal que $e \in V$, digamos

$$V = \{g \in X : |g(t_i) - 1| < \epsilon, \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

con $\epsilon > 0$ y $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, existe una función continua $h \in C([0,1])$ tal que $h(t_i) = 1$, para $i = 1, \ldots, n$, y $h(t) = 0$ para algún $t \in [0,1]$ diferente de los puntos t_i. Por tanto, $V \nsubseteq G(x)$ y así, $e \notin \operatorname{Int} G(X)$. Esto dice que X no es una Q-álgebra.

4.2. Álgebras de Banach

En esta sección se supone, a menos que se diga algo distinto, que X es un álgebra compleja de Banach y si tiene identidad, ésta se denota como e.

Lema 4.2.1. *Supongamos que $x \in X$ es tal que $\|x\| < 1$. Entonces existe $y \in X$ tal que $xy = x + y$.*

Demostración. Como $\|x\| < 1$ y $\|x^k\| \leq \|x\|^k$ para todo $k \geq 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ converge y por ser X álgebra de Banach se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} -x^k$ converge. Tomemos $y = \sum_{k=1}^{\infty} -x^k$, entonces

$$xy = x\sum_{k=1}^{\infty} - x^k = \sum_{k=2}^{\infty} - x^k = x + y.$$

□

Teorema 4.2.2. *Si $f : X \to \mathbb{C}$ es un carácter. Entonces $|f(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Es decir, todo carácter en un álgebra de Banach compleja y con identidad es continuo.*

Demostración. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $|f(x_0)| > \|x_0\|$. Entonces $f(x_0) \neq 0$ y para $x = \frac{x_0}{f(x_0)}$ se cumple que $f(x) = 1$ y $\|x\| < 1$. Por esto último, existe $y \in X$ tal que $xy = x + y$. Por ser f un carácter, tenemos:

$$f(y) = f(x)f(y) = f(xy) = f(x + y) = f(x) + f(y) = 1 + f(y)$$

lo cual es una contradicción. □

Teorema 4.2.3. *Si X tiene identidad y $x \in X$ es tal que $\|e - x\| < 1$, entonces $x \in G(X)$ y por tanto, X es una Q-álgebra. O sea, toda álgebra compleja, de Banach y con identidad es una Q-álgebra.*

Demostración. Como $\|e - x\| < 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|(e - x)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\|e - x\|^k < \infty.$$

De donde, $\sum_{k=0}^{\infty}(e - x)^k$ converge y $(e - x)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
x\left(\sum_{k=0}^{n}(e-x)^k\right) &= (e-(e-x))\left(\sum_{k=0}^{n}(e-x)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e-x)^k - (e-x)\sum_{k=0}^{n}(e-x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(e-x)^k - \sum_{k=1}^{n+1}(e-x)^k = e - (e-x)^{n+1}
\end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$. Por lo que

$$x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(e-x)^k\right)=e.$$

Análogamente $\left(\sum_{k=0}^{\infty}(e-x)^k\right)x=e$. Por tanto, $x \in G(X)$ y $x^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(e-x)^k$.

Así, $B_1(e) \subset G(X)$. Por (b) de la Proposición 4.1.2 X es Q -álgebra. □

Observación 4.2.4. El teorema anterior también es válido si suponemos que X es una p-álgebra de Banach. La prueba dada arriba sigue funcionando en este caso.

Corolario 4.2.5. *Si X tiene identidad, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$ y $|\lambda| > \|x\|$, entonces $x-\lambda e \in G(X)$. Es decir,*

$$\sigma(x) \subset \overline{D_{\|x\|}(0)}.$$

Demostración. Como $|\lambda| > \|x\|$, entonces $\lambda \neq 0$ y $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$, de modo que

$$\left\|e-\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)\right\|<1.$$

Por el Teorema 4.2.3, $\left(e-\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda}(x-\lambda e)$ es invertible. De donde, $x-\lambda e \in G(X)$. □

Corolario 4.2.6. *Si X tiene identidad, entonces para cada $x \in X$, el espectro $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. O sea, en toda álgebra compleja de Banach y con identidad el espectro de cualquiera de sus elementos es compacto.*

Demostración. El resultado se sigue del teorema anterior y el Teorema 4.1.6. □

Lema 4.2.7. *Si X tiene identidad y $x \in X$, entonces la función f_x:$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to X$ dada como $f_x(\lambda) = (x-\lambda e)^{-1}$ es analítica, es decir,*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_x(\lambda)-f_x(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}$$

existe para todo $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Demostración. Sea $x \in X$, si $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ entonces

$$\begin{aligned} f_x(\lambda_0)-f_x(\lambda) &= f_x(\lambda_0)\left((x-\lambda e)-(x-\lambda_0 e)\right)f_x(\lambda) \\ &= (\lambda_0-\lambda)\, f_x(\lambda_0)\, f_x(\lambda). \end{aligned}$$

Por la continuidad de $x \to x^{-1}$ (Teorema 3.1.13) y las operaciones lineales, se tiene que $\lim_{\lambda \to \lambda_0} f_x(\lambda) = f_x(\lambda_0)$. Entonces,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_x(\lambda) - f_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f_x(\lambda) f_x(\lambda_0) = (f_x(\lambda_0))^2 .$$

□

Teorema 4.2.8. *Para cada $x \in X$, $\sigma(x) \neq \emptyset$. O sea, en toda álgebra compleja de Banach y con identidad el espectro de cualquiera de sus elementos es no vacío.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $\sigma(x) = \emptyset$. De manera que la función f_x vista en el lema anterior está definida en $\mathbb{C}$ y es analítica. Es decir, f_x es entera.

Si $|\lambda| > 2\|x\|$, entonces $\frac{1}{2} > \|e - \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)\|$ así

$$\begin{aligned} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| &= \left\| e + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k \right\| \\ &\leq \|e\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|^k < \|e\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \|e\| + 1. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \|f_x(\lambda)\| &= \left\|(x - \lambda e)^{-1}\right\| = \left\| -\frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| < \frac{1}{|\lambda|} (\|e\| + 1) . \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\|f_x(\lambda)\| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$. Entonces, f_x es acotada y analítica en $\mathbb{C}$. Del teorema de Liouville $f_x(\lambda) = f_x(0)$ en $\mathbb{C}$ y como $f_x(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$, entonces $f_x(0) = 0$. De modo que $x^{-1} = f_x(0) = 0$, lo cual es un absurdo. □

Corolario 4.2.9. *Si Y es un álgebra compleja, normada y con identidad, entonces $\sigma(y) \neq \emptyset$ para cada $y \in Y$.*

Demostración. Sea X la compleción de Y, entonces $\emptyset \neq \sigma_X(y) \subset \sigma_Y(y)$ para cada $y \in Y$. □

4.3. El espectro $\sigma(x)$ en álgebras m-convexas

Varios resultados vistos en la sección anterior se generalizan aquí. En particular veremos que en las álgebras m-convexas y con identidad el espectro de cada elemento es no vacío.

La demostración dada para el Lema 4.2.7 funciona para la siguiente generalización.

Lema 4.3.1. *Si X es un álgebra topológica con identidad e inversión continua, $x \in X$ y $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto, entonces la función $f_x:\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to X$, dada como $f_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ es analítica y*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_x(\lambda) - f_x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = (f_x(\lambda_0))^2 .$$

Corolario 4.3.2. *Si X es un álgebra m-convexa con identidad $x \in X$ y $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto. Para cada g en el dual X^* de X, la función $g \circ f_x:\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to \mathbb{C}$ es analítica.*

Demostración. Por la continuidad de g, el Teorema 3.1.13 y el lema anterior

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(f_x(\lambda)) - g(f_x(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} = g\left((f_x(\lambda_0))^2\right) .$$

$\square$

Recordemos que una característica importante de todo espacio vectorial localmente convexo y Hausdorff X es que su dual X^* separa los puntos de X (Hahn-Banach), esto es, si $x \in X$ con $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$. Este hecho será de gran utilidad para la demostración del siguiente teorema.

Teorema 4.3.3. *Si X es un álgebra m-convexa con identidad, entonces $\sigma(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Si $x = 0$, entonces $\sigma(x) = \{0\}$. Sea $x \neq 0$ y supongamos que $\sigma(x) = \emptyset$. Entonces $\mathbb{C} \setminus \sigma(x) = \mathbb{C}$ es abierto y por el Lema 4.3.1, $g \circ f_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica; es decir, $g \circ f_x$ es entera para toda $g \in X^*$.

Por nuestra suposición sobre x tenemos $x - \lambda e \in G(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. En particular, si $|\lambda| > 0$, entonces $(x - \lambda e)^{-1} \in X$. Por la continuidad de la función inversión y producto tenemos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_x(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} x - e \right)^{-1} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{\lambda\to\infty} g \circ f_x(\lambda) = 0 \tag{4.3.1}$$

para toda $g \in X^*$. Así, $g \circ f_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es acotada y entera, entonces aplicando el teorema de Liouville, resulta que $g \circ f_x$ es constante para cada $g \in X^*$. Por lo que $g(x^{-1}) = g\circ f_x(0) = g\circ f_x(\lambda)$ en $\mathbb{C}$ para toda $g \in X^*$. De la igualdad 4.3.1, concluimos que $g(x^{-1}) = 0$ para toda $g \in X^*$. Por tanto $x^{-1} = 0$, lo cual es absurdo. □

Observación 4.3.4. El teorema anterior es válido si en lugar de pedir que X sea m-convexa se pide que sea localmente convexa, Hausdorff y con inversión continua. La prueba dada para el teorema se aplica a este caso más general.

Teorema 4.3.5. *Sea $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un álgebra m-convexa con identidad tal que $G(X) = X \setminus \{0\}$. Entonces X es topológicamente isomorfo a $\mathbb{C}$. En particular, esto sucede cuando X es un álgebra de Banach.*

Demostración. Sea $x \in X$, por el Teorema 4.3.3 $\sigma(x) \neq \emptyset$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda e - x \notin G(X)$, por lo que $\lambda e - x = 0$. Además $\mu \in \mathbb{C}$ y $\mu e = \lambda e$ implica que $\lambda = \mu$. Por tanto, para cada $x \in X$ existe una única $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda_x e$.

De que $x + y = (\lambda_x + \lambda_y)e$, $\alpha x = (\alpha\lambda_x)e$ y $xy = (\lambda_x\lambda_y)e$ para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se sigue que la función $\phi : X \to \mathbb{C}$, dada como $x \mapsto \lambda_x$, es un homomorfismo, y es inmediato ver que es un isomorfismo algebraico.

Por otra parte, si $x = \lambda_x e$, entonces

$$|\phi(x)| = |\lambda_x| \leq |\lambda_x|\|e\|_\alpha = \|\lambda_x e\|_\alpha = \|x\|_\alpha$$

para alguna $\alpha \in \Lambda$, por tanto, ϕ es continua. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces

$$\|\phi^{-1}(\lambda)\|_\alpha = \|\lambda e\|_\alpha = \|e\||\lambda|,$$

esto nos dice que ϕ^{-1} es continua, por lo que ϕ es un isomorfismo topológico entre X y $\mathbb{C}$. □

4.4. Q-álgebras normadas

En esta sección X denota un álgebra (compleja) normada, a menos que otra cosa se indique.

En la sección anterior probamos que cualquier álgebra compleja de Banach con identidad es una Q-álgebra. Sin embargo, no es cierto que cualquier Q-álgebra compleja normada con identidad es necesariamente de Banach.

Ejemplo. Consideremos el álgebra $R(D)$ que consiste de todas las funciones racionales complejas definidas en D, el disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$, con la norma del supremo $\|q\| = \sup\{|q(z)| : z \in D\}$. En este espacio la convergencia de sucesiones es la convergencia uniforme en D.

Observemos que $q \in R(D)$ es invertible si y sólo si q no tiene ceros en D. Sea $q_0 \in G(R(D))$, por ser D compacto y q_0 continua y sin ceros en D, existe $z_0 \in D$ tal que $0 < |q_0(z_0)| \leq |q_0(z)|$ para todo $z \in D$. Si $q \in R(D)$ es tal que $\|q - q_0\| < \frac{1}{2}|q_0(z_0)|$, tenemos que

$$\begin{aligned} |q_0(z_0)| - |q(z)| &\leq ||q_0(z)| - |q(z)|| \\ &\leq |q_0(z) - q(z)| \\ &< \frac{1}{2}|q_0(z_0)| \end{aligned}$$

para todo $z \in D$. Así, $0 < \frac{1}{2}|q_0(z_0)| < |q(z)|$ para todo $z \in D$, por lo que q no tiene ceros en D; es decir, $q \in G(R(D))$. Por tanto, $G(R(D))$ es abierto en $R(D)$.

Un corolario del teorema de Runge establece que si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, y si f es una función analítica en una vecindad de K, entonces existe una sucesión de funciones polinomiales que converge uniformemente a f en K. En nuestro caso, podemos considerar $K = D$ y f igual a la función entera e^z. Entonces, existe una sucesión de polinomios, que es también una sucesión en $R(D)$, que converge uniformemente a e^z en D. Esta función no es una racional por ser entera, no constante y sin ceros en $\mathbb{C}$. Por consiguiente $R(D)$ no es un álgebra de Banach.

Lo que buscamos ahora, es probar que muchas de las propiedades fundamentales de las álgebras de Banach con identidad las comparten también las Q-álgebras normadas con identidad. De hecho, algo sorprendente, es que estas propiedades distinguen a las Q-álgebras normadas entre las álgebras normadas con identidad.

Lema 4.4.1. *Para todo $x \in X$ se cumple que*

$$\inf\{\|x^n\|^{1/n} : n = 1, 2, \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $\rho = \rho(x) = \inf\{\|x^n\|^{1/n} : n = 1, 2, \ldots\}$. Es obvio que $\rho \geq 0$ y que la afirmación es cierta si $x = 0$.

Supongamos que $x \neq 0$ y sea $\epsilon > 0$. Sabemos existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k\|^{1/k} < \rho + \epsilon$. Por el Algoritmo de la división, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n, q_n \geq 0$ con $q_n \leq k - 1$ tales que $n = p_n k + q_n$.

Como $|\frac{1}{n}q_n| \leq \frac{1}{n}|k-1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{1}{n}q_n \to 0$, cuando $n \to \infty$; por lo que $\frac{1}{n}p_n k = 1 - \frac{1}{n}q_n \to 1$, y $\frac{1}{n}p_n \to \frac{1}{k}$, cuando $n \to \infty$. De donde

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^k\|^{\frac{1}{n}p_n} \|x\|^{\frac{1}{n}q_n} = \|x^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho + \epsilon.$$

Existe $N > 0$ tal que

$$\|x^n\|^{1/n} < \rho + \epsilon$$

para todo $n \geq N$; es decir, $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n = 1, 2, \ldots\}$. □

Observación 4.4.2. El lema anterior se cumple para cuando X es un álgebra p-normada, la demostración es la misma.

Lema 4.4.3. *Si* $x \in X$ *e* $\text{ínf}\{\|x^n\|^{1/n} : n \geq 1\} = 1$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lambda^n} x^n = 0$ *siempre que* $|\lambda| > 1$.

Demostración. Sea $|\lambda| > 1$, entonces existe $k \geq 1$ tal que $|\lambda| > \|x^k\|^{1/k} \geq 1$; o sea, $1 > \frac{1}{|\lambda|^k}\|x^k\|$. Por otro lado, para cada $n \geq 1$ existen $q_n, r_n \geq 0$ tales $n = kq_n + r_n$ con $0 \leq r_n \leq k-1$. Sea $M_1 = \text{máx}\{|\lambda|^{-r} : 0 \leq r \leq k-1\}$ y $M_2 = \text{máx}\{\|x\|^r : 0 \leq r \leq k-1\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda^{-n}x^n\| &= \|\lambda^{-kq_n - r_n} x^{kq_n + r_n}\| \\
&\leq |\lambda|^{-r_n} \|\lambda^{-kq_n} x^{kq_n}\| \|x\|^{r_n} \\
&\leq M_1 M_2 (|\lambda|^{-k} \|x^k\|)^{q_n}.
\end{aligned}$$

Como $q_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y $1 > \frac{1}{|\lambda|^k}\|x^k\|$, entonces $\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\|x^k\|\right)^{q_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Concluimos que $\|\frac{1}{\lambda^n}x^n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. □

Teorema 4.4.4. *Supongamos que X tiene identidad. Entonces para cada $x \in X$ existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $|\lambda| \geq \rho(x)$, donde*

$$\rho(x) = \text{ínf}\{\|x^n\|^{1/n} : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Por lo que el radio espectral $r(x)$ satisface la siguiente desigualdad

$$r(x) \geq \text{ínf}\{\|x^n\|^{1/n} : n = 1, 2, \ldots\}.$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Sea $x \in X$ y hagamos $\rho = \rho(x)$. Probaremos primero los casos particulares $\rho = 0$ y $\rho = 1$.

Si $0 \notin \sigma(x)$, entonces $x \in G(X)$ y $x^n(x^{-1})^n = e$, por lo que $\|x^n\|\|x^{-1}\|^n \geq \|e\| > 0$ y así

$$\|x^n\|^{1/n}\|x^{-1}\| \geq \|e\|^{1/n} > 0,$$

entonces $\|x^n\|^{1/n} \geq \|x^{-1}\|^{-1}\|e\|^{1/n} > 0$ para todo n. Por tanto, $\rho \geq \|x^{-1}\|^{-1}\|e\|^{1/n} > 0$.

De lo anterior tenemos que si $\rho = 0$, entonces $0 \in \sigma(x)$ y el teorema está probado en este caso.

Supongamos que $\rho = 1$. Basta probar que dado $R > 1$ se tiene que el anillo

$$E = \{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \leq |\lambda| \leq R\}$$

interseca a $\sigma(x)$ porque entonces se tiene en particular que existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $|\lambda| \geq 1 = \rho$.

Supongamos lo contrario; es decir, que existe $R_0 > 1$ tal que el anillo

$$E = \{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \leq |\lambda| \leq R_0\}$$

es ajeno a $\sigma(x)$; o sea,

$$\sigma(x) \subset \mathbb{C}\backslash E$$

Tenemos que $\lambda e - x \in G(X)$ para todo $\lambda \in E$, por lo que la función de E en X definida vía la asociación $\lambda \mapsto \lambda(\lambda e - x)^{-1}$ está bien definida y es continua; más aún, la función es uniformemente continua por ser E compacto. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\lambda(\lambda e - x)^{-1} - \mu(\mu e - x)^{-1}\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.4.1}$$

siempre que $\lambda, \mu \in E$ y $|\lambda - \mu| \leq \delta$.

Por otra parte, para cualquier natural n se tiene que la n raíces de la unidad $w_1, \ldots, w_n$ satisfacen la siguiente igualdad

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - w_k^{-1}z} = \frac{1}{1 - z^n}$$

para todo complejo $z \neq w_k$, $k = 1, ..., n$.

Sea $\lambda \in E$ y $z \in \mathbb{C}\backslash E$, entonces $1 \leq |\lambda| = |\lambda w_k| \leq R_0$, lo que implica que $\lambda w_k \in E$ para todo $k = 1, \ldots, n$, entonces $z \neq \lambda w_k$ o lo que es lo mismo $\lambda^{-1}z \neq w_k$. Se cumple que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - w_k^{-1}\lambda^{-1}z} = \frac{1}{1 - \lambda^{-n}z^n}.$$

Tomemos $U = \mathbb{C}\backslash E$, entonces U es una vecindad abierta no vacía de $\sigma(x)$. Por la acción de las funciones racionales en X tenemos que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e - w_k^{-1}\lambda^{-1}x)^{-1} = (e - \lambda^{-n}x^n)^{-1} \tag{4.4.2}$$

para cada $\lambda \in E$.

Para cada $n \geq 1$ y $\lambda \in E$ definimos

$$c_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e - \lambda^{-1}w_k^{-1}x)^{-1}.$$

Si $\lambda, \mu \in E$ son tales que $|\lambda - \mu| < \delta$, entonces se cumple, por una parte, que $\lambda w_k, \mu w_k \in E$ y por otra, $|\lambda w_k - \mu w_k| < \delta$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Así, por (4.4.1) se tiene que

$$\|\lambda w_k(\lambda w_k e - x)^{-1} - \mu w_k(\mu w_k e - x)^{-1}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$. Observemos que

$$\lambda w_k(\lambda w_k e - x)^{-1} = (e - \lambda^{-1}w_k^{-1}x)^{-1}.$$

Por tanto,

$$\|c_n(\lambda) - c_n(\mu)\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}(e - w_k^{-1}\lambda^{-1}x)^{-1} - (e - w_k^{-1}\mu^{-1}x)^{-1}\right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n \geq 1$.

Sea $|\lambda| > 1$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} e - \lambda^{-n}x^n = e$, por el Lema 4.4.3, y

$$\lim_{n\to\infty} c_n(\lambda) = \lim_{n\to\infty}(e - \lambda^{-n}x^n)^{-1} = e$$

por la igualdad (4.4.2) y la continuidad de la inversión.

Entonces, para $\lambda \in E$, con $|\lambda| > 1$ y $|1 - \lambda| < \delta$, existe $N > 0$ tal que

$$\|c_n(\lambda) - e\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n \geq N$. Así,

$$\|e - c_n(1)\| \leq \|e - c_n(\lambda)\| + \|c_n(\lambda) - c_n(1)\| < \epsilon$$

siempre que $n \geq N$. Lo que implica que $\text{lím}_{n\to\infty} c_n(1) = e$; es decir, $\text{lím}_{n\to\infty}(e - x^n)^{-1} = e$.

Tenemos entonces que $\text{lím}_{n\to\infty} e - x^n = e$ y así, $\text{lím}_{n\to\infty} x^n = 0$, lo cual contradice el hecho de que $1 = \rho^n \leq \|x^n\|$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, no puede existir $R > 1$ tal que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \leq |\lambda| \leq R\} \cap \sigma(x) = \emptyset$$

y queda probado el caso en que $\rho = 1$.

Finalmente, para $\rho > 0$ tenemos que $\tilde{\rho} = \text{ínf}\{\|\rho^{-n}x^n\|^{1/n} : n \geq 1\} = 1$. De lo anterior se sigue que existe $\mu \in \sigma(\rho^{-1}x)$ tal que $|\mu| \geq 1$. Por el Teorema 2.3.3, $\sigma(\rho^{-1}x) = \rho^{-1}\sigma(x)$. Por tanto, existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $\mu = \rho^{-1}\lambda$, y así, $|\lambda| \geq \rho$. □

Corolario 4.4.5. (**Teorema de Gelfand – Mazur**) *Si X tiene identidad y $G(X) = X \setminus \{0\}$. Entonces existe un isomorfismo topológico entre X y $\mathbb{C}$.*

Demostración. Por el Teorema 4.2.9, $\sigma(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. A partir de aquí se aplica la prueba dada para el Teorema 4.3.5 □

El siguiente resultado generaliza el teorema de Gelfand-Mazur para álgebras p-normadas. No se da la prueba completa debido a su extensión. Ésta puede encontrarse en [9].

Teorema 4.4.6. (**Żelazko**) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un álgebra p-seminormada con $\|\cdot\|$ no idénticamente nula y tal que $G(X) = X \setminus \{0\}$. Entonces existe un isomorfismo topológico entre X y $\mathbb{C}$.*

Demostración. En [9] se demuestra que para cada $x \in X$ existe una única $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda_x e$. Entonces se puede probar que $\phi : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \lambda_x$ es isomorfismo algebraico del mismo modo que se hizo en la prueba del Teorema 4.3.5. La continuidad de ϕ y ϕ^{-1} se sigue en este caso de que $|\phi(\lambda_x e)| = \|\lambda_x e\|^{\frac{1}{p}}$ y $\|\phi^{-1}(\lambda)\| = \|e\| \, |\lambda|^p$ para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ por el Teorema 1.1.17. □

Lema 4.4.7. *Sea X una Q-álgebra, entonces todo ideal máximo izquierdo (derecho) de X es cerrado.*

Demostración. Sea M un ideal máximo izquierdo (derecho) de X, entonces $M \subset X \backslash G(X)$, pues en caso contrario $M = X$.

Por ser X una Q-álgebra, $X \backslash G(X)$ es cerrado, entonces $\overline{M} \subset X \backslash G(X)$ y así $e \notin \overline{M}$, es decir, $M \subset \overline{M} \subsetneq X$. Por el Lema 3.2.1 $\overline{M}$ es un ideal izquierdo (derecho) de X. Por tanto, $M = \overline{M}$, por ser M ideal máximo izquierdo (derecho). □

Proposición 4.4.8. *Para cada $x \in X$, se cumple que $\sigma(x) = \sigma(\bar{x})$ donde $\bar{x}$ es la clase de x en $X/\mathrm{Rad}(X)$. De donde, $r(x) = r(\bar{x})$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, entonces $\lambda e - x \in G(X)$. De donde, $\lambda\bar{e} - \bar{x} \in G(X/\mathrm{Rad}(X))$, por lo que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\bar{x})$. O sea, $\sigma(\bar{x}) \subset \sigma(x)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\bar{x})$, entonces $\lambda\bar{e} - \bar{x} \in G(X/\mathrm{Rad}(X))$. Por tanto, existe $y \in X$ tal que $\overline{y}(\lambda\bar{e} - \overline{x}) = \bar{e} = (\lambda\bar{e} - \overline{x})\overline{y}$, es decir,

$$e - y(\lambda e - x), e - (\lambda e - x)y \in \mathrm{Rad}(X).$$

Entonces, $y(\lambda e - x), (\lambda e - x)y \in G(X)$, gracias al Lema 2.5.8. Es decir, existen $z, w \in X$ tales que $(zy)(\lambda e - x) = e = (\lambda e - x)(yw)$; de donde $\lambda e - x \in G(X)$, y entonces $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Por tanto, $\sigma(x) \subset \sigma(\bar{x})$. $\square$

En el siguiente teorema se dan varias caracterizaciones de las Q-álgebras normadas. Para una de ellas requerimos de la siguiente noción.

Definición 4.4.9. Sea X un álgebra normada, decimos que $x \in X$ es un *divisor topológico de cero* en X si existe una sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\|w_n\| = 1$ para todo $n \geq 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n x = \lim\limits_{n\to\infty} x w_n = 0$. Definimos

$$\mathrm{TDZ}(X) = \{x \in X : x \text{ es un divisor topológico de cero en } X\}.$$

Lo anterior es equivalente a que exista una sucesión $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que no converge a 0 en X y que satisface que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n x = \lim\limits_{n\to\infty} x w_n = 0$.

Teorema 4.4.10. *Supongamos que X tiene identidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(Q) X es Q-álgebra.

(Q_1) Existe $\delta \in (0, 1]$ tal que si $x \in X$ y $\|e - x\| < \delta$, entonces $x \in G(X)$.

(Q_2) Existe $\delta \in (0, 1]$ tal que si $x \in X$ y $\|x\| < \delta$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en X.

(Q_3) Si $x \in X$ y $\|e - x\| < 1$, entonces $x \in G(X)$.

(Q_4) Si $x \in X$ y $\|x\| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en X.

(Q_5) $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ para todo $x \in X$.

(Q_6) $\sup\limits_{\|x\|=1} r(x) < \infty$.

(Q_7) $r(x) \leqslant \|x\|$ para todo $x \in X$.

(Q_8) $\mathrm{Fr}(G(X)) \subset \mathrm{TDZ}(X)$, donde Fr es el operador frontera.

(Q_9) $\mathrm{Rad}(X)$ es cerrado y $X/\mathrm{Rad}(X)$ es una Q-álgebra.

(Q_{10}) $\sigma : X \to 2^{\mathbb{C}}$, $x \mapsto \sigma(x)$ es semicontinua superiormente, es decir, para cada $x \in X$ y cada abierto U en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(x) \subset U$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|y - x\| < \delta$ entonces $\sigma(y) \subset U$.

(Q_{11}) σ es semicontinua superiormente en $0 \in X$.

(Q_{12}) $D : X \to [0, \infty]$, $x \mapsto \mathrm{diam}(\sigma(x))$ es semicontinua superiormente, es decir, para cada $x \in X$, con $\mathrm{diam}\,(\sigma(x)) < \infty$ se cumple que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{diam}(\sigma(y)) < \mathrm{diam}(\sigma(x)) + \epsilon$ siempre que $\|y - x\| < \delta$. Donde $\mathrm{diam}(\sigma(x)) = \sup_{\lambda,\mu \in \sigma(x)} |\lambda - \mu|$.

(Q_{13}) D es continua en $0 \in X$.

(Q_{14}) X es cerrado bajo inversos en su compleción. Esto es, $G(\tilde{X}) \cap X \subset G(X)$, donde $\tilde{X}$ es la compleción de X.

Demostración.
$(Q) \implies (Q_1)$ Como $G(X)$ es abierto y $e \in G(X)$ entonces existe $\delta \in (0, 1]$ tal que $\{x \in X : \|e - x\| < \delta\} \subset G(X)$.

$(Q_1) \implies (Q_6)$ Sea $x \in X$, con $\|x\| = 1$. Tomemos $\delta \in (0, 1]$ que cumpla (Q_1) y $\lambda \in \sigma(x)$ distinto de 0. Como $\lambda e - x \notin G(X)$, entonces $e - \frac{1}{\lambda} x \notin G(X)$, por lo que

$$\frac{1}{|\lambda|}\|x\| = \left\| e - \left(e - \frac{1}{\lambda} x \right) \right\| \geq \delta$$

y entonces $\lambda \leq \frac{\|x\|}{\delta} = \frac{1}{\delta}$. Esta desigualdad obviamente también es válida para $\lambda = 0$. Por consiguiente, $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} < \frac{1}{\delta}$ y así $\sup_{\|x\|=1} r(x) < \infty$.

$(Q_6) \implies (Q_5)$ Sea $x \in X$. Por los Lemas 4.4.4 y 4.4.1,

$$r(x) \geq \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Sólo falta probar que $r(x) \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.

Sabemos por el Teorema 2.3.3 que $r(x)^n = r(x^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\|x^n\| = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^n = 0$ por lo que $0 = \sup\{|\lambda| : x^n - \lambda e \notin G(X)\} = r(x^n) = r(x)^n$ y así, $r(x) = 0 \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.

Supongamos ahora que $\|x^n\| \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente, por el Teorema 2.3.3

$$\frac{1}{\|x^n\|} r(x^n) = r\left(\frac{1}{\|x^n\|} x^n\right)$$

y por (Q_6), tenemos que $r\left(\frac{1}{\|x^n\|}x^n\right) \leq \sup_{\|y\|=1} r(y)$. Por tanto, si $M > \sup_{\|y\|=1} r(y)$, se cumple que $r(x)^n = r(x^n) \leq M\|x^n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De modo que

$$r(x) \leq M^{1/n}\|x^n\|^{1/n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. De donde,

$$r(x) \leq \lim_{n\to\infty} M^{1/n}\|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

$(Q_5) \implies (Q_7)$ Sea $x \in X$, por (Q_5) $r(x) = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|$.

$(Q_7) \implies (Q_3)$ Sea $x \in X$ tal que $\|e - x\| < 1$, entonces por (Q_7),

$$r(e - x) \leq \|e - x\| < 1;$$

es decir, $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(e - x)\} < 1$. Así, $1 \notin \sigma(e - x)$ y $x = 1e - (e - x) \in G(X)$.

$(Q_3) \implies (Q_4)$ Sea $x \in X$ tal que $\|x\| < 1$, lo que es equivalente a que $\|e - (e - x)\| < 1$. De (Q_3) obtenemos que $e - x \in G(X)$. Si $y = (e - x)^{-1}$ y definimos

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$$

para cada $N \geq 0$, donde $x^0 = e$, entonces

$$\begin{aligned} \|S_N - y\| &= \|y(e - x)S_N - y\| \\ &\leq \|y\|\|(e - x)S_N - e\| \\ &= \|y\|\|x^{N+1}\| \leq \|y\|\|x\|^{N+1}. \end{aligned}$$

De que $\|x\| < 1$ se sigue que $\lim_{N\to\infty} \|x\|^{N+1} = 0$. Así, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = y$.

$(Q_4) \implies (Q_3)$ Sea $x \in X$ tal que $\|e - x\| < 1$. Por (Q_4), $\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n = y$ para algún $y \in X$. Para cualquier natural N se cumple que

$$\begin{aligned} \left\| e - x\left(\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n\right)\right\| &= \left\| e + (e-x)\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n - \sum_{n=0}^{N}(e-x)^n \right\| \\ &= \left\| e + \sum_{n=0}^{N}(e-x)^{n+1} - \sum_{n=0}^{N}(e-x)^n \right\| \\ &= \left\|(e-x)^{N+1}\right\| \leq \|(e-x)\|^{N+1} \end{aligned}$$

y como $\|e - x\| < 1$, entonces

$$e = \lim_{N\to\infty} x\left(\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n\right) = xy.$$

Análogamente, se puede ver que $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}(e-x)^n\right)x = yx = e$. Por tanto, $x \in G(X)$.

$(Q_1) \iff (Q_2)$ La prueba es análoga a la de $(Q_3) \iff (Q_4)$, pues en cada afirmación $0 < \delta \leq 1$.

$(Q_3) \implies (Q)$ Sea $x \in G(X)$, entonces $x \neq 0$. Veamos que

$$\left\{ y \in X : \|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|} \right\} \subset G(X)$$

y así, $G(X)$ es abierto y X es una Q-álgebra.

Sea $y \in X$ tal que $\|x - y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$, entonces

$$\|e - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\|\|(x-y)\| < 1.$$

Por (Q_3) se tiene que $x^{-1}y \in G(X)$ y como $G(X)$ es un grupo multiplicativo, obtenemos que $y \in G(X)$.

$(Q) \implies (Q_{14})$ Si $x \notin G(X)$, entonces x no tiene inverso izquierdo o derecho. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x no tiene inverso izquierdo y tomemos el ideal izquierdo Xx. Observemos que $Xx \subsetneq X$, pues en caso contrario $e = yx$ para algún $y \in X$. Existe un ideal izquierdo máximo M en X tal que $Xx \subset M \subsetneq X$.

Es claro que la cerradura $\overline{M}^{\tilde{X}}$ de M en la compleción de X es un ideal izquierdo en $\tilde{X}$. Si $e \in \overline{M}^{\tilde{X}}$ entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en M tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$, pero al ser M cerrado en X, por el Lema 4.4.7, y tenerse que $e \in X$, concluimos que $e \in M$. Esto contradice que M es ideal máximo en X. Por consiguiente, $e \notin \overline{M}^{\tilde{X}}$ y $\overline{M}^{\tilde{X}} \subsetneq \tilde{X}$. No existe $y \in \tilde{X}$ tal que $yx = e$. Es decir, $x \notin G(\tilde{X})$ y se sigue que $X \cap G(\tilde{X}) \subset G(X)$.

$(Q_{14}) \implies (Q_3)$ Sea $x \in X$ tal que $\|e-x\| < 1$. Por ser $\tilde{X}$ un álgebra de Banach, es una $Q-$álgebra y así, $x \in G(\tilde{X})$. Entonces, $x \in X \cap G(\tilde{X})$ y de la hipótesis se sigue que $x \in G(X)$.

$(Q) \implies (Q_8)$ Sea $x \in \mathrm{Fr}(G(X))$. Existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $G(X)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Afirmamos que

$$\sup_{n\geq 1} \|x_n^{-1}\| = \infty.$$

Supongamos lo contrario, es decir, que existe $N > 0$ tal que $\|x_n^{-1}\| \leq N$ para todo $n \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\|x_n^{-1} - x_m^{-1}\right\| &= \left\|x_n^{-1}(x_m - x_n)x_m^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|x_n^{-1}\right\| \|x_m - x_n\| \left\|x_m^{-1}\right\| \\ &\leq N^2 \|x_m - x_n\| \end{aligned}$$

para cualesquiera $m, n \geq 1$. De este modo, la sucesión $(x_n^{-1})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por lo que converge en $\tilde{X}$, digamos a $y \in \tilde{X}$. Por la continuidad del producto

$$xy = \lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1} = 1$$

y análogamente $yx = 1$, lo que implica que $x \in G(\tilde{X})$, pero por la implicación $Q \implies Q_{14}$ ya probada, tenemos que $x \in G(X)$. Es decir,

$$x \in \mathrm{Fr}(G(X)) \cap G(X)$$

lo que contradice que X es Q-álgebra. Por tanto, $\sup\limits_{n\geq 1} \|x_n^{-1}\| = \infty$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|x_n^{-1}\| \geq n$ para todo $n \geq 1$.

Definimos $w_n = \frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|}$. Para cada $n \geq 1$ sucede que $\|w_n\| = 1$ y

$$\begin{aligned} \|xw_n\| &= \left\| x\frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|} \right\| = \left\| (x - x_n)\frac{x_n^{-1}}{\|x_n^{-1}\|} + \frac{e}{\|x_n^{-1}\|} \right\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \frac{\|e\|}{n}. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} xw_n = 0$. Análogamente se puede probar que $\lim_{n\to\infty} w_n x = 0$. De donde, $x \in \mathrm{TDZ}(X)$.

$(Q_8) \implies (Q)$ Supongamos que X no es una Q-álgebra. Existe $x \in G(X)$ tal que para todo abierto U de X que contiene a x se cumple $U \cap (X \backslash G(X)) \neq \emptyset$; es decir, $x \in G(X) \cap \mathrm{Fr}(G(X))$. Por otro lado, si $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} xw_n = 0$, entonces

$$0 = x^{-1} \lim_{n\to\infty} xw_n = \lim_{n\to\infty} w_n,$$

lo que implica que $x \notin \mathrm{TDZ}(X)$. Así, $\mathrm{Fr}(G(X)) \nsubseteq \mathrm{TDZ}(X)$ y esto que contradice a (Q_8).

Antes de continuar con la demostración del teorema, notemos que hasta ahora ya hemos probado: $(Q) \Rightarrow (Q_1) \Leftrightarrow (Q_2) \Rightarrow (Q_6) \Rightarrow (Q_5) \Rightarrow (Q_7) \Rightarrow (Q_3) \Rightarrow (Q_4) \Rightarrow (Q_3) \Rightarrow (Q)$, $\quad (Q) \Rightarrow (Q_{14}) \Rightarrow (Q_3) \Rightarrow (Q)$ *y* $(Q) \Leftrightarrow (Q_8)$.

$(Q) \implies (Q_9)$ Por el Lema 4.4.7 todo ideal máximo izquierdo de X es cerrado. Entonces $\mathrm{Rad}(X)$ es cerrado.

Para ver que $X/\mathrm{Rad}(X)$ es una Q-álgebra, probemos que para esta álgebra se cumple (Q_3), pues sabemos ya que $Q \Leftrightarrow Q_3$. Supongamos que $\bar{x} \in X/\mathrm{Rad}(X)$ es tal que $\|\bar{e}-\bar{x}\| < 1$. Existe $z_0 \in \mathrm{Rad}(X)$ tal que $\|e-x-z_0\| < 1$; por tanto, $x+z_0 \in G(X)$ y por la observación 2.4.4 se tiene que $\overline{x} = \overline{x + z_0}$ pertenece a $G(X/\mathrm{Rad}(X))$.

$(Q_9) \implies (Q_5)$ Sea $x \in X$. Por la Proposición 4.4.8 $r(x) = r(\bar{x})$. Por hipótesis $X/\mathrm{Rad}(X)$ es una Q-álgebra, entonces $r(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \|\bar{x}^n\|^{1/n}$, pues ya sabemos que $Q \Leftrightarrow Q_5$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x) = r(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \|\bar{x}^n\|^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

La primera desigualdad se da por los Lemas 4.4.4 y 4.4.1. Por tanto,

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n},$$

nuevamente por el Lema 4.4.1.

$(Q) \implies (Q_{10})$ Supongamos que σ no es semicontinua superiormente en algún $x_0 \in X$. Entonces existe un abierto U en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(x_0) \subset U$ y sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X y $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\alpha_n \in \sigma(x_n) \setminus U$.

Como ya sabemos que $Q \Leftrightarrow Q_4 \Leftrightarrow Q_7$, entonces

$$\sup_{n\geq 1} |\alpha_n| \leq \sup_{n\geq 1} r(x_n) \leq \sup_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty;$$

es decir, la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Sea $(\alpha_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ que converja, digamos a α. Como $\alpha_n \notin U$ para todo $n \geq 1$, entonces $\alpha \notin U$; de donde, $\alpha \notin \sigma(x_0)$.

Por otra parte, $\alpha_n \in \sigma(x_n)$ para todo $n \geq 1$, por lo que $x_n - \alpha_n e \in X \setminus G(X)$ para todo $n \geq 1$, y como $X \setminus G(X)$ es cerrado, por ser X una Q-álgebra, entonces

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \alpha_{n_k} e = x_0 - \alpha e$$

pertenece a $X \setminus G(X)$. Así, $\alpha \in \sigma(x_0)$, lo cual es una contradicción a lo probado en el párrafo anterior. Por consiguiente, σ es semicontinua superiormente.

$(Q_{10}) \implies (Q_{11})$ Es obvia.

$(Q_{11}) \implies (Q_{13})$ Es claro que $D(0) = \operatorname{diam}(\sigma(0)) = 0$. Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x) \subset B_{\frac{\epsilon}{4}}(0)$ si $\|x\| < \delta$. Supongamos que $\|x\| < \delta$ y $\lambda, \mu \in \sigma(x)$, entonces $|\lambda - \mu| < |\lambda| + |\mu| < \frac{\epsilon}{2}$. De donde, $D(x) = \operatorname{diam}(\sigma(x)) = \sup\limits_{\lambda,\mu\in\sigma(x)} |\lambda - \mu| < \epsilon$. Es decir, D es continua en $0 \in X$.

$(Q_{13}) \implies (Q_6)$ Tomemos $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Por ser $\tilde{X}$ un álgebra de Banach, se tiene que $\sigma_{\tilde{X}}(x)$ es compacto. Por esto y por (Q_6) para $\tilde{X}$, ya que ésta es una Q-álgebra, existe $\lambda_0 \in \sigma_{\tilde{X}}(x)$ tal que

$$|\lambda_0| = r_{\tilde{X}}(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Como $\|x^n\|^{1/n} \leq 1$, se sigue que $|\lambda_0| \leq 1$. Por cumplirse que $G(X) \subset G(\tilde{X})$, tenemos que $\sigma_{\tilde{X}}(x) \subset \sigma(x)$, y así, $\lambda_0 \in \sigma(x)$.

Por la continuidad de D en 0, existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{diam}(\sigma(y)) < 1$ siempre que $y \in X$ y $\|y\| \leq \delta$. De donde, $\operatorname{diam}(\sigma(\delta x)) < 1$, y por el Teorema 2.3.3 esto equivale a que $\delta(\operatorname{diam}\sigma(x)) < 1$. Para $\lambda \in \sigma(x)$ tenemos que

$$|\delta\lambda| \leq |\delta\lambda - \delta\lambda_0| + |\delta\lambda_0| \leq 1 + \delta.$$

O sea, $|\lambda| \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ para todo $\lambda \in \sigma(x)$. Por tanto, $r(x) \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ y así, $\sup_{\|x\|=1} r(x) < \infty$.

$(Q_{10}) \implies (Q_{12})$ Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Observemos que

$$\sigma(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma(x)} B_{\epsilon/2}(\lambda).$$

Por la semicontinuidad de σ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $\|x-y\| < \delta$, entonces

$$\sigma(y) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma(x)} B_{\epsilon/2}(\lambda).$$

Sea $y \in X$ tal que $\|x-y\| < \delta$. Si $\lambda, \mu \in \sigma(y)$, entonces, existen $\lambda_0, \mu_0 \in \sigma(x)$ tales que $\|\lambda - \lambda_0\| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|\mu - \mu_0\| < \frac{\epsilon}{2}$, por lo que

$$\|\lambda - \mu\| \leq \|\lambda - \lambda_0\| + \|\lambda_0 - \mu_0\| + \|\mu_0 - \mu\| < \epsilon + \operatorname{diam}(\sigma(x)).$$

Entonces $\operatorname{diam}(\sigma(y)) \leq \epsilon + \operatorname{diam}(\sigma(x))$, lo que implica que D es semicontinua superiormente.

$(Q_{12}) \implies (Q_{13})$ Es obvia.

De esta forma, tenemos probadas las siguientes equivalencias, $(Q) \Rightarrow (Q_9) \Rightarrow (Q_5) \Rightarrow (Q)$, $(Q) \Rightarrow (Q_{10}) \Rightarrow (Q_{11}) \Rightarrow (Q_{13}) \Rightarrow (Q_6) \Rightarrow (Q)$ y $(Q) \Rightarrow (Q_{10}) \Rightarrow (Q_{12}) \Rightarrow (Q_{13}) \Rightarrow (Q)$. Lo que concluye la prueba. □

Corolario 4.4.11. *Si X tiene identidad y es de Banach, entonces*

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Sabemos que toda álgebra de Banach con identidad es una Q-álgebra. El corolario se sigue entonces del teorema anterior. □

Capítulo 5

Las Q-álgebras y las condiciones m

En este capítulo suponemos que X y Y son álgebras complejas con identidad, a menos que se diga otra cosa.

5.1. Los espectros algebraico y topológico de un álgebra

Recordamos que el espectro algebraico de X, denotado como $\mathcal{M}^{\#}(X)$, es la colección de todas las funcionales en X que son lineales, multiplicativas y no nulas.

Definición 5.1.1. Sea X un álgebra topológica definimos el *espectro* (*topológico*) $\mathcal{M}(X)$ de X, como $\mathcal{M}(X) = \{\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X) : \varphi \text{ es continua}\}$. Tanto $\mathcal{M}^{\#}(X)$ como $\mathcal{M}(X)$ son subconjuntos del dual algebraico $X^{\#}$ de X y a ambos se les dotará de la topología inducida por topología débil estrella (ω^*). Ésta se define en el dual algebraico $X^{\#}$ de X como la topología localmente convexa determinada por las seminormas $\|f\|_x = |f(x)|$ con $x \in X$ y $f \in X^{\#}$.

Observación. Si X es un álgebra de Banach entonces $\mathcal{M}^{\#}(X) = \mathcal{M}(X)$ por el Teorema 4.2.2. Cuando para un álgebra topológica X sucede lo anterior se dice que X es *funcionalmente continua.*

Proposición 5.1.2. *Si X, Y son álgebras topológicas. Entonces*

$$\mathcal{M}(X \times Y) = \{\psi \circ \pi_X : \psi \in \mathcal{M}(X)\} \cup \{\phi \circ \pi_Y : \phi \in \mathcal{M}(Y)\}$$

donde π_X y π_Y son las proyecciones de $X \times Y$ en los factores respectivos.

Demostración. Es claro que

$$\mathcal{M}(X \times Y) \supset \{\psi \circ \pi_X : \psi \in \mathcal{M}(X)\} \cup \{\phi \circ \pi_Y : \phi \in \mathcal{M}(Y)\}.$$

Para probar la inclusión contraria tomemos $\Phi \in \mathcal{M}(X \times Y)$, entonces $\Phi(x, y) = \Phi(x, 0) + \Phi(0, y)$ para todo $x \in X, y \in Y$. Así,

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1)\Phi(x_2, y_2) &= (\Phi(x_1, 0) + \Phi(0, y_1))(\Phi(x_2, 0) + \Phi(0, y_2)) \\ &= \Phi(x_1, 0)\Phi(x_2, 0) + \Phi(x_1, 0)\Phi(0, y_2) \\ &+ \Phi(0, y_1)\Phi(x_2, 0) + \Phi(0, y_1)\Phi(0, y_2) \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\Phi(x_1x_2, y_1y_2) = \Phi(x_1x_2, 0) + \Phi(0, y_1y_2) = \Phi(x_1, 0)\Phi(x_2, 0) + \Phi(0, y_1)\Phi(0, y_2).$$

Por lo que

$$\Phi(x_1, 0)\Phi(0, y_2) + \Phi(0, y_1)\Phi(x_2, 0) = 0$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ y $y_1y_2 \in Y$. De donde,

$$\Phi(x, 0)\Phi(0, y) = -\Phi(x, 0)\Phi(0, y)$$

para cualesquiera $x \in X, y \in Y$. En particular $\Phi(e_X, 0)\Phi(0, e_Y) = 0$.

Tenemos dos casos, $\Phi(e_X, 0) = 0$ o $\Phi(0, e_Y) = 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\Phi(e_X, 0) = 0$. Por consiguiente, $\Phi(x, 0) = \Phi(x, 0)\Phi(e_x, 0) = 0$ para todo $x \in X$. Así,

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, 0) + \Phi(0, y) = \Phi(0, y)$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$, lo cual implica que $\Phi(0, e_Y) \neq 0$ pues $\Phi \neq 0$. Ahora, la funcional $\phi : Y \to \mathbb{C}$ definida como $\phi(y) = \Phi(0, y)$, es lineal, multiplicativa y no nula, ya que Φ lo es, y además $\phi \circ \pi_Y(x, y) = \Phi(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. La continuidad de ϕ es clara dado que es una composición de funciones continuas. Por tanto, $\Phi = \phi \circ \pi_Y$ con $\phi \in \mathcal{M}(Y)$. □

Observación 5.1.3. De la misma manera se prueba que

$$\mathcal{M}^{\#}(X \times Y) = \left\{\psi \circ \pi_X, \phi \circ \pi_Y : \psi \in \mathcal{M}^{\#}(X), \phi \in \mathcal{M}^{\#}(Y)\right\}.$$

Proposición 5.1.4. *Para toda $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$, $\varphi(e) = 1$ y si $x \in G(X)$, entonces $\varphi(x) \neq 0$ y $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$, si $\varphi(e) = 0$, entonces $\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(e) = 0$ para todo $x \in X$, lo que contradice que $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$. Por tanto $\varphi(e) \neq 0$ y como $\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(e)$, entonces $\varphi(e) = 1$.

Si $x \in G(X)$, $1 = \varphi(e) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1})$, de donde $\varphi(x) \neq 0$ y $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. □

Corolario 5.1.5. *Si $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ y $x \in X$, entonces $x - \varphi(x)e \notin G(X)$. Es decir, $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para cada $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$.*

Demostración. Como $\varphi(x - \varphi(x)e) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$ entonces por la Proposición 5.1.4, $x - \varphi(x)e \notin G(X)$. □

Lema 5.1.6. *Si $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$, entonces* $\ker(\varphi)$ *es un ideal bilateral máximo de X.*

Demostración. Claramente $\ker(\varphi)$ es un ideal bilateral de X. Para ver que es máximo, supongamos que $\ker(\varphi) \subsetneq I \subsetneq X$, para algún ideal I de X. Entonces existe $x \in I$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. Como $x - \varphi(x)e \in \ker(\varphi) \subset I$, entonces

$$e = \varphi(x)^{-1}x - \varphi(x)^{-1}(x - \varphi(x)e)$$

pertenece a I, lo que contradice que $I \subsetneq X$. □

Proposición 5.1.7. *Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ y $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$, entonces $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Demostración. Como $x - \varphi_1(x)e \in \ker(\varphi_1)$ para cualquier $x \in X$, entonces $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$ para todo x. □

Definición 5.1.8. Para cada $x \in X$, con $\mathcal{M}^{\#}(X) \neq \emptyset$, definimos su *transformada de Gelfand* $\hat{x}$ como $\hat{x} : \mathcal{M}^{\#}(X) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

para cada $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$.

Por el Corolario 5.1.5, $\{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)\} \subset \sigma(x)$; o sea,

$$\hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(X)) \subset \sigma(x)$$

para todo $x \in X$.

5.2. La invertibilidad y su relación con $\mathcal{M}(X)$

Supondremos en esta sección que X tiene identidad e.

Proposición 5.2.1. *Sea X una Q-álgebra m-convexa conmutativa, si M es un ideal máximo de X, entonces existe un elemento $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\ker(\varphi) = M$. En particular, vale el resultado para las Q-álgebras normadas conmutativas; por ejemplo, en las álgebras de Banach conmutativas con identidad.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.5, X/M es una álgebra m-convexa con las seminormas cocientes. También es un espacio Hausdorff, ya que M es cerrado por el Lema 4.4.7. Como la proyección canónica $\pi : X \to X/M$ es un homomorfismo suprayectivo y abierto, entonces X/M es una Q-álgebra por la Proposición 4.1.3.

Por otra parte, X/M es un campo por ser M un ideal máximo. De manera que todo elemento no cero de X/M es invertible, es decir, $G(X/M) = (X/M) \setminus \{0\}$. Del Teorema 4.3.5 se sigue que existe un isomorfismo topológico $\phi : X/M \to \mathbb{C}$. Finalmente, de la continuidad de $\pi : X \to X/M$, se tienen que $\phi \circ \pi : X \to \mathbb{C}$ es un elemento en $\mathcal{M}(X)$ y $\ker(\phi \circ \pi) = M$. □

Proposición 5.2.2. *Si X es una Q-álgebra conmutativa, p-normada y M es un ideal máximo de X, entonces existe un elemento $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\ker(\varphi) = M$.*

Demostración. El ideal M es cerrado por el Lema 4.4.7. Del Teorema 3.2.3 se obtiene que X/M es un álgebra p-normada, la cual es conmutativa por serlo X. Como M es un ideal máximo, entonces X/M es un campo. Todo elemento no cero de X/M es invertible. Del Teorema 4.4.6, se sigue que existe un isomorfismo topológico $\phi : X/M \to \mathbb{C}$. Si consideramos la proyección canónica $\pi : X \to X/M$ la cual es continua, entonces $\phi \circ \pi \in \mathcal{M}(X)$ y $\ker(\phi \circ \pi) = M$. □

Teorema 5.2.3. *Sea X una Q-álgebra m-convexa (p-normada) conmutativa. Si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\varphi(x) = \lambda$ si y sólo si $\lambda \in \sigma(x)$, es decir,*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \varphi(x) \text{ para algún } \varphi \in \mathcal{M}(X)\}$$

o lo que es lo mismo $\sigma(x) = \hat{x}(\mathcal{M}(X))$. En particular, esto es válido para las Q-álgebras normadas conmutativas; por ejemplo, en las álgebras de Banach conmutativas con identidad.

Demostración. Supongamos que existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\varphi(x) = \lambda$, entonces $\lambda \in \sigma(x)$ por el Corolario 5.1.5.

Si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda e - x \notin G(X)$. Consideremos el ideal I generado por $\lambda e - x$, el cual es propio, ya que en caso contrario existe $y \in X$ tal que

$$y(\lambda e - x) = (\lambda e - x)y = 1,$$

lo que contradice que $\lambda e - x \notin G(X)$. Por tanto, $I \subset M \subsetneq X$ para algún ideal máximo M de X. Por la Proposición 5.2.1 existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\ker(\varphi) = M$, por lo que $\varphi(\lambda e - x) = \lambda - \varphi(x) = 0$. O sea, $\lambda = \varphi(x)$. $\square$

Corolario 5.2.4. *Sea X es una Q-álgebra m-convexa (p-normada) conmutativa, entonces $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$. En particular, esto es válido para las Q-álgebras normadas conmutativas, por ejemplo las álgebras de Banach conmutativas con identidad.*

Demostración. Como $0 \in \sigma(0)$, entonces por el Teorema 5.2.3 existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\varphi(0) = 0$. $\square$

Corolario 5.2.5. (**Principio de Wiener**) *Si X es una Q-álgebra m-convexa (p-normada) conmutativa, entonces $x \in G(X)$ si y sólo si $\varphi(x) \neq 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{M}(X)$. En particular, esto es cierto para las Q-álgebras normadas conmutativas; por ejemplo, en las álgebras de Banach conmutativas con identidad.*

Demostración. Si $x \in G(X)$ se tiene el resultado por la Proposición 5.1.4. Recíprocamente, si $x \notin G(X)$, entonces $0 \in \sigma(x)$ por lo que existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\varphi(x) = 0$, de acuerdo al Teorema 5.2.3. $\square$

Teorema 5.2.6. (**Condición de Wiener**) *Si X es un álgebra m-convexa y completa, entonces $x \in X$ es invertible si y sólo si $\varphi(x) \neq 0$ para toda $\varphi \in M(X)$. En particular, esto es cierto para las álgebras de Banach con identidad.*

Demostración. Sean $\{X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una descomposición de Arens-Michael de X, $Y = \varprojlim X_\alpha$ y $T : X \to \varprojlim X_\alpha$ el isomorfismo construido en el Teorema 3.3.2. Para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos, por el Corolario 5.2.4, que $\mathcal{M}(X_\alpha) \neq \emptyset$.

Supongamos que $x \in X$ y $\varphi(x) \neq 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{M}(X)$. Para cada $\beta \in \Lambda$, consideremos la siguiente composición

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\pi_\beta} X_\beta \xrightarrow{\varsigma} \mathbb{C},$$

donde π_β es la β-proyección del producto $\prod X_\alpha$ y $\varsigma \in \mathcal{M}(X_\beta)$. Si $\varphi = \varsigma \circ \pi_\beta \circ T$, entonces $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ y por hipótesis $\varphi(x) \neq 0$. O sea,

$$0 \neq (\varsigma \circ \pi_\beta \circ T)(x) = \varsigma(\pi_\beta([x]_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}) = \varsigma([x]_\beta),$$

Por el Corolario 5.2.5, $[x]_\beta \in G(X_\beta)$ y por el Corolario 3.3.3, x es invertible en X. $\square$

5.3. Las condiciones m

Los Teoremas 5.2.3 y 5.2.6 sugieren el estudio que se hace en esta sección. Consideremos las siguientes condiciones para un álgebra topológica X compleja, con identidad y tal que $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$.

(m) $\hat{x}(\mathcal{M}(X)) = \sigma(x)$ para todo $x \in X$.

(m_1) $\hat{x}(\mathcal{M}(X))$ es denso en $\sigma(x)$ para todo $x \in X$.

(m_2) $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(X))\}$ para todo $x \in X$, donde $r(x)$ es el radio espectral de x.

Observación 5.3.1. Por el Corolario 5.1.5, en general se cumple que

$$r(x) \geq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(X))\} \tag{5.3.1}$$

para todo $x \in X$. Por otra parte, $(m) \Rightarrow (m_1) \Rightarrow (m_2)$.

Las Q-álgebras m-convexas (p-normadas) conmutativas o bien las álgebras m-convexas y completas son ejemplos de álgebras que satisfacen estas condiciones de acuerdo a los teoremas mencionados al inicio de esta sección.

Proposición 5.3.2. *Si X es un álgebra topológica y $\sigma(x)$ está contenido en la cerradura de la envolvente convexa de $\hat{x}(\mathcal{M}(X))$ para cada $x \in X$, entonces se satisface (m_2).*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un elemento de la envolvente convexa de $\hat{x}(\mathcal{M}(X))$. Entonces

$$\lambda = \alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n$$

con $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in [0,1]$ y $\lambda_i \in \hat{x}(\mathcal{M}(X))$ para $1 \leq i \leq n$. De donde, $|\lambda| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(X))\}$. Si $\mu \in \sigma(x)$, entonces por hipótesis existe una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ en la envolvente convexa de $\hat{x}(\mathcal{M}(X))$ tal que $\mu_n \to \mu$, y así $|\mu| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(X))\}$, por tanto

$$r(x) \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \hat{x}(\mathcal{M}(X))\}.$$

Con (5.3.1) obtenemos la igualdad. □

Lema 5.3.3. *Si X satisface (m_2), entonces la función radio espectral r es una seminorma extendida submultiplicativa que es semicontinua inferiormente en X.*

Demostración. Por (m_2) se tiene que r es una seminorma submultiplicativa en

$$\{x \in X : r(x) < \infty\}.$$

Para ver que r es i.s.c. en X, tomemos $x_0 \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $r(x_0) > s > t$. Por (m_2) existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ que satisface $|\varphi(x_0)| > s$, como φ es continua, entonces existe una vecindad V de x_0 en X tal que $|\varphi(y)| > s$ para todo $y \in V$, por tanto $r(y) > t$ para todo $y \in V$, y así r es i.s.c. $\square$

Lema 5.3.4. *Si X es satisface (m_1), entonces la función espectral $\sigma : X \to 2^{\mathbb{C}}$; definida como $x \mapsto \sigma(x)$ es semicontinua inferiormente; es decir, para cada $x_0 \in X$ y cada abierto U en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(x_0) \bigcap U \neq \emptyset$, existe una vecindad V de x_0 en X tal que si $x \in V$, entonces $\sigma(x) \bigcap U \neq \emptyset$.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y un abierto U en $\mathbb{C}$ tales que $\sigma(x_0) \bigcap U \neq \emptyset$. Por la propiedad (m_1), existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\varphi(x_0) \in U$ y por ser φ una función continua existe una vecindad V de x_0 en X tal que $\varphi(x) \in U$ para cada $x \in V$. Sabemos por el Corolario 5.1.5 que $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para cualquier $x \in X$. Por tanto, $\sigma(x) \cap U \neq \emptyset$ para cada $x \in V$ y así, σ es semicontinua inferiormente. $\square$

Teorema 5.3.5. *Sea X un álgebra topológica. Para las propiedades que aparecen abajo se tiene: $(a) - (d)$ son equivalentes; si X satisface (m_2), entonces $(a) - (e')$ son equivalentes, y si X satisface (m_1), entonces los propiedades $(a) - (f')$ son equivalentes.*

(a) X es una Q-álgebra.

(b) La función espectral $\sigma : X \to 2^{\mathbb{C}}$; dada como $x \mapsto \sigma(x)$ es semicontinua superiormente y toma valores compactos (s.c.s.o.); es decir, para cada $x_0 \in X$, se cumple que $\sigma(x_0)$ es compacto y si U es un abierto en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(x_0) \subset U$, entonces existe una vecindad $V(x_0)$ de x_0 tal que $\sigma(x) \subset U$ si $x \in V(x_0)$.

(c) La función radio espectral r es real y semicontinua superiormente (s.c.s).

(d) La función radio espectral r es real y es continua en 0.

(e) La función radio espectral r es real y es una seminorma submultiplicativa y continua en X.

(e') La función radio espectral $r : X \to [0, \infty]$ es continua.

(f) $\sigma : X \to 2^{\mathbb{C}}$ es una función continua con valores compactos.

(f') $\sigma : X \to 2^{\mathbb{C}}$ es continua (no necesariamente toma valores compactos).

Demostración.

$(a) \implies (b)$ Tomemos $x_0 \in X$, por el Teorema 4.1.6 $\sigma(x_0)$ es compacto. Para ver que σ es s.c.s en x_0, consideremos un abierto U en $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(x_0) \subset U$. Como $\sigma(x_0)$ es compacto, podemos suponer que U es acotado. Sea $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la compactación de $\mathbb{C}$ por un punto. El conjunto $H = \bar{\mathbb{C}} \setminus U$ es compacto, pues U es también abierto en $\bar{\mathbb{C}}$, además $H \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \sigma(x_0)$. Hagamos

$$K_1 = \{\lambda \in H : |\lambda| \leq 1\} \quad \text{y} \quad K_2 = \{\lambda \in H : |\lambda| \geq 1\},$$

entonces $H = K_1 \cup K_2$.

Si $K_1 \neq \emptyset$, definimos $g_1 : X \times K_1 \to X$ como

$$g_1(x, \lambda) = \lambda e - (x_0 + x).$$

Claramente g_1 es continua.

La función $g_2 : X \times K_2 \to X$ se define como

$$g_2(x, \lambda) = \begin{cases} e - \frac{1}{\lambda}(x_0 + x) & si\ \lambda \neq \infty \\ e & si\ \lambda = \infty \end{cases}$$

Afirmamos que esta función también es continua. Esto es inmediato para los puntos (x, λ) con $\lambda \neq \infty$, mientras que dados un punto (x, ∞) y una vecindad balanceada V de 0 en X, existen un real $k > 1$ y vecindades W_1 y W de 0 en X tales que

$$W_1 + W_1 \subset V, \qquad \frac{1}{\lambda}(x_0 + x) \in W_1$$

y

$$\frac{1}{\lambda} z \in W_1 \text{ si } |\lambda| > k, z \in W.$$

Entonces, $k < |\lambda| < \infty$ y $y \in x + W$ implica que

$$-\frac{1}{\lambda}(x_0 + x + y - x) \in -(W_1 + W_1) \subset V$$

y

$$g_2(y, \lambda) - g_2(x, \infty) = -\frac{1}{\lambda}(x_0 + y) = -\frac{1}{\lambda}(x_0 + x - (x - y)).$$

De donde, $g_2(y,\lambda) \in g_2(x,\infty) + V$ si $|\lambda| > k$ y $y \in x + W$. Por consiguiente, está probada nuestra afirmación.

Para $\lambda \in K_2$, con $\lambda \neq \infty$, tenemos que $g_2(0,\lambda) = e - \frac{1}{\lambda}x_0$ es invertible, pues $H \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus \sigma(x_0)$. Obviamente, $g_2(0,\infty) = e$ es también invertible. Como $G(X)$ es abierto en X y g_2 es continua, entonces para cada $\lambda \in K_2$ existen vecindades Z_λ de λ en K_2 y V_λ de 0 en X, tales que para todo $\mu \in Z_\lambda$ y $x \in V_\lambda$ se cumple que $g_2(x,\mu) \in G(X)$. Por ser K_2 compacto, existen $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K_2$ tales que

$$K_2 = \bigcup_{i=1}^{n} Z_{\lambda_i}.$$

Hagamos

$$W_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\lambda_i},$$

entonces para $\lambda \in K_2,\ y \in W_1$, tenemos que $g_2(y,\lambda) \in G(X)$; es decir $\lambda e - (x_0 + y) \in G(X)$ si además $\lambda \neq \infty$.

De la misma manera, si $K_1 \neq \emptyset$, entonces $g_1(0,\lambda) = \lambda e - x_0$ es invertible para todo $\lambda \in K_1$. Como g_1 es continua y K_1 es compacto, existe una vecindad W_2 del 0 en X tal que

$$g_1(y,\lambda) = \lambda e - (x_0 + y) \in G(X)$$

si $y \in W_2$ y $\lambda \in K_1$.

Por tanto para $W = W_1 \cap W_2$ se tiene que

$$\lambda e - (x_0 + y) \in G(X)$$

si $\lambda \in \mathbb{C} \bigcap H$ y $y \in W$. De donde, $\sigma(x_0 + y) \subset U$ si $y \in W$. Así, $\sigma(z) \subset U$ para todo $z \in x_0 + W$, lo que implica que σ es s.c.s en x_0 y por ser x_0 arbitrario, σ es s.c.s. en X.

$(b) \implies (c)$ Por (b), $\sigma(x)$ es compacto, por tanto $r(x) < \infty$ para todo $x \in X$. Para ver que r es s.c.s tomemos $x_0 \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $r(x_0) < s < t$ y el abierto

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < s\}$$

de $\mathbb{C}$. Como $\sigma(x_0) \subset U$ y σ es s.c.s, entonces existe una vecindad $V(x_0)$ de x_0 en X tal que para todo $y \in V(x_0)$ se cumple que $\sigma(y) \subset U$. Esto implica que $r(y) \leq s < t$ para cada $y \in V$. Por tanto, r es una función s.c.s.

$(c) \implies (d)$ Toda función s.c.s no negativa $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $h(0) = 0$ es continua en 0.

$(d) \implies (a)$ Sea $V = \{x \in X : r(x) < 1\}$, entonces $0 \in V = r^{-1}(-\infty, 1)$ y V es un abierto de X por ser r continua en 0. Hacemos $U = \{x \in X : r(e-x) < 1\}$. Por consiguiente, $U = e - V$ y U es una vecindad de e en X.

Observemos que si $x \in U$, entonces $\lambda \in \sigma(e-x)$ implica que $|\lambda| < 1$, por tanto $1 \notin \sigma(e-x)$ y entonces $x = e - (e-x) \in G(X)$, es decir, $U \subset G(X)$. O sea, $e \in IntG(X)$ y por la Proposición 4.1.2 se tiene el resultado.

En las siguientes tres pruebas supongamos que X satisface (m_2):

$(c) \implies (e)$ La función r es real y por (m_2) y el Lema 5.3.3 se cumple que r es una seminorma submultiplicativa en X y por (d) esa seminorma es continua.

$(e) \implies (e')$ Es obvio.

$(e') \implies (a)$ La prueba dada para la implicación $(d) \Rightarrow (a)$ sigue funcionando para hacer ver que $G(X)$ es abierto.

En lo que sigue suponemos que X satisface (m_1) y por tanto, se cumple también (m_2):

$(b) \implies (f)$ Por el Lema 5.3.4 se cumple (f).

$(f) \implies (f')$ Es claro.

$(f') \implies (e')$ Como X satisface (m_2), se tiene del Lema 5.3.3 que la función $r : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es semicontinua inferiormente. Si $r(x) = \infty$, entonces r es s.c.s. en x. Si $r(x) < \infty$ podemos seguir la demostración de $(b) \Rightarrow (c)$ para obtener que r es s.c.s. en x. Por tanto r es continua en X. □

Corolario 5.3.6. *Para cualquier álgebra X que sea m-convexa y completa las propiedades $(a) - (f')$ del Teorema 5.3.5 son equivalentes. Si X es Q-álgebra m-convexa y conmutativa entonces tiene todas esas propiedades.*

Demostración. En el primer caso, X tiene la propiedad (m) por la Condición de Wiener (Teorema 5.2.6) y en el segundo la tiene por el Teorema 5.2.3. El corolario se sigue entonces del teorema anterior. □

Definición 5.3.7. Un *barril* en un espacio vectorial topológico Y es un un subconjunto $H \subset Y$ que es cerrado, absorbente, balanceado y convexo. Se dice que Y es *un espacio barrilado* si cada barril es una vecindad del cero. Un m-barril en un álgebra topológica Y es un barril $H \subset Y$ tal que $H^2 \subset H$. Se dice que Y es un álgebra m-barrilada si cada m-barril es una vecindad del cero.

Claramente toda álgebra barrilada es un álgebra m-barrilada.

Corolario 5.3.8. *Si X es un álgebra m-barrilada que satisface la propiedad (m_2) y para la que $r(x)$ es finito para todo $x \in X$, entonces es una Q-álgebra.*

Demostración. Por el Teorema 5.3.5 basta probar que r es continua, y para esto es suficiente ver que $V = \{x \in X : r(x) < 1\}$ es una vecindad del cero, ya que por el Lema 5.3.3 y la hipótesis, la función r es una seminorma submultiplicativa en X. Consideremos $H = \{x \in X : r(x) \leq q\}$, donde $0 < q < 1$. Entonces H es absorbente, balanceado, convexo y además, $H^2 \subset H$ puesto que $q < 1$. Por el Lema 5.3.3, r es semicontinua inferiormente, de donde $X \setminus H$ es abierto. Por tanto, H es un m-barril en X, y de la hipótesis se tiene que H es una vecindad del cero, lo que implica que V también lo es porque $H \subset V$. □

5.3.1. Funciones cuyos valores son conjuntos.

La función $\sigma(x)$ está definida en un álgebra y toma valores en $2^{\mathbb{C}}$. Aquí estudiaremos parte del comportamiento de funciones de este tipo, pero cuyos valores están en 2^Y.

Definición 5.3.9. Sean X y Y dos espacios topológicos, con Y compacto, y

$$\phi : X \to 2^Y$$

una función que toma valores compactos, la *regularización superior* de ϕ es la función $\bar{\phi} : X \to 2^Y$ definida como

$$\bar{\phi}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \overline{\bigcup_{z \in U} \phi(z)}$$

donde $\mathcal{N}(x)$ denota la familia de vecindades de x en X. Por tanto, $\bar{\phi}$ también toma valores compactos.

Lema 5.3.10. *Sea $\phi : X \to 2^Y$ una función con valores compactos, donde X, Y son espacios topológicos, con Y compacto. Si $\bar{\phi}(x_0) \subset \phi(x_0)$, entonces ϕ es semicontinua superiormente en x_0.*

Demostración. Supongamos que ϕ no es semicontinua superiormente en x_0. Entonces existe un abierto $V_0 \subset Y$ tal que $\phi(x_0) \subset V_0$ y para todo $U \in \mathcal{N}(x_0)$ existe $y_U \in U$ tal que

$$\phi(y_U) \not\subset V_0.$$

Existe $z_U \in \phi(y_U)$ tal que $z_U \in Y \setminus V_0$. Consideremos la red $\{z_U\}_{U \in \mathcal{N}(x_0)}$ donde el orden en $\mathcal{N}(x_0)$ es el usual. Como $Y \setminus V_0$ es cerrado en Y, entonces es compacto. Se sigue que existe una subred $\{z_{\alpha(\gamma)}\}_{\gamma \in (\Lambda, \succ)}$ de $\{z_U\}_{U \in \mathcal{N}(x_0)}$ tal que $z_{\alpha(\gamma)} \to z$ para algún $z \in Y \setminus V_0$. Por definición de subred, para cada $U \in \mathcal{N}(x_0)$ y γ_0 existe $\gamma \succ \gamma_0$ tal que $\alpha(\gamma) \subset U$.

Probaremos que $z \in \bar{\phi}(x_0) \setminus \phi(x_0)$ lo cual es una contradicción a la hipótesis $\bar{\phi}(x_0) \subset \phi(x_0)$. Tomemos $U_0 \in \mathcal{N}(x_0)$, y $V \in \mathcal{N}(z)$. Existen $\gamma_0, \gamma \in \Lambda$ tales que $z_{\alpha(\gamma')} \in V$ para todo $\gamma' \succ \gamma_0$, $\gamma \succ \gamma_0$ y $\alpha(\gamma) \subset U_0$. Entonces $y_{\alpha(\gamma)} \in \alpha(\gamma)$ y $z_{\alpha(\gamma)} \in \phi(y_{\alpha(\gamma)}) \cap V$, lo cual implica que

$$V \bigcap \left(\bigcup_{y \in U_0} \phi(y) \right) \neq \emptyset.$$

De donde, $z \in \overline{\bigcup_{y \in U_0} \phi(y)}$. Como $U_0 \in \mathcal{N}(x_0)$ se escogió arbitrariamente, tenemos que

$$z \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x_0)} \overline{\bigcup_{y \in U} \phi(y)} = \bar{\phi}(x_0).$$

Sabemos que $z \in Y \setminus V_0$ y $Y \setminus V_0 \subset Y \setminus \phi(x_0)$. Así, $z \in \bar{\phi}(x_0) \setminus \phi(x_0)$ como afirmamos. $\square$

Lema 5.3.11. *Sea $\phi : X \to 2^Y$ una función con valores compactos, donde X, Y son espacios topológicos, con Y compacto. Entonces su regularización superior $\bar{\phi} : X \to 2^Y$ es semicontinua superiormente.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $U_0 \in \mathcal{N}(x_0)$. Se cumple que

$$\bar{\phi}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \overline{\bigcup_{z \in U} \phi(z)} \subset \overline{\bigcup_{z \in U_0} \phi(z)},$$

para cada $x \in U_0$. Por consiguiente,

$$\bigcup_{x \in U_0} \bar{\phi}(x) \subset \overline{\bigcup_{z \in U_0} \phi(z)},$$

y entonces

$$\overline{\bigcup_{x \in U_0} \bar{\phi}(x)} \subset \overline{\bigcup_{z \in U_0} \phi(z)}.$$

Como la igualdad anterior es válida para todo abierto $U_0 \in \mathcal{N}(x_0)$ se cumple que

$$\bar{\bar{\phi}}(x_0) = \bigcap_{U_0 \in \mathcal{N}(x_0)} \overline{\bigcup_{x \in U_0} \bar{\phi}(x)} \subset \bigcap_{U_0 \in \mathcal{N}(x_0)} \overline{\bigcup_{z \in U_0} \phi(z)} = \bar{\phi}(x_0).$$

Por el Lema 5.3.10, $\bar{\phi}$ es semicontinua superiormente en x_0. Como x_0 fue escogido arbitrariamente, entonces $\bar{\phi}$ es semicontinua superiormente en X. $\square$

Lema 5.3.12. *Supongamos que X contiene una Q-álgebra Y. Si $\overline{\mathbb{C}}$ es la compactación por un punto de $\mathbb{C}$ y $\phi : X \to 2^{\bar{\mathbb{C}}}$ se define como*

$$\phi(x) = \begin{cases} \sigma_Y(x) & si\ x \in Y \\ \emptyset & si\ x \in X \setminus Y, \end{cases}$$

entonces ϕ toma valores compactos y su regularización superior $\bar{\phi} : X \to 2^{\bar{\mathbb{C}}}$ satisface que $\bar{\phi}(y) = \sigma_Y(y)$ siempre que $y \in Y$.

Demostración. Recordamos que

$$\bar{\phi}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \overline{\bigcup_{z \in U} \phi(z)} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(x)} \overline{\bigcup_{z \in U \cap Y} \sigma_Y(z)},$$

donde $\mathcal{N}(x)$ denota la familia de vecindades de x en X y la cerradura se toma en $\overline{\mathbb{C}}$. Por ser Y una Q-álgebra, la función ϕ toma valores compactos. Para $y \in Y$ tenemos que

$$\sigma_Y(y) \subset \bigcup_{z \in U \cap Y} \sigma_Y(z)$$

para todo $U \in \mathcal{N}(y)$, por lo que $\sigma_Y(y) \subset \bar{\phi}(y)$. Por otra parte, si $\lambda \notin \sigma_Y(y)$, entonces $\lambda e - y \in G(Y)$. Como Y es una Q-álgebra existen, por la continuidad de las operaciones en Y, $D(\lambda) \subset \mathbb{C}$ y $V \subset Y$ vecindades abiertas de λ y y, respectivamente, tales que $D(\lambda)\, e - V \subset G(Y)$. O sea,

$$D(\lambda) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_Y(z)$$

para todo $z \in V$. Como $V = U \cap Y$ para alguna vecindad abierta U de x en X, se tiene que

$$D(\lambda) \cap \left(\bigcup_{z \in U \cap Y} \sigma_Y(z) \right) = \emptyset,$$

por lo que $\lambda \notin \overline{\bigcup_{z \in U \cap Y} \sigma_Y(z)}$ y entonces, $\lambda \notin \bar{\phi}(y)$. □

Proposición 5.3.13. *Si X satisface (m_2) y contiene una Q-álgebra densa en X. Entonces X es también una Q-álgebra.*

Demostración. Supongamos que Y es una Q-subálgebra densa en X. Como $\sigma_X(y) \subset \sigma_Y(y)$ para cada $y \in Y$, entonces

$$r_X(y) \leq r_Y(y) \tag{5.3.2}$$

para todo $y \in Y$.

Definimos $\phi : X \to 2^{\bar{\mathbb{C}}}$ como en el lema anterior. Por éste, ϕ toma valores compactos y su regularización superior $\bar{\phi} : X \to 2^{\bar{\mathbb{C}}}$, que es semicontinua superiormente por el Lema 5.3.11, cumple que

$$\bar{\phi}(y) = \sigma_Y(y)$$

si $y \in Y$.

Hagamos

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \bar{\phi}(x)\}$$

para cada $x \in X$. Tenemos que $\rho(y) = r_Y(y)$ si $y \in Y$. Como $\bar{\phi}$ es semicontinua superiormente y toma valores compactos, entonces $\rho(x)$ es una función real y semicontinua superiormente, la prueba de esta última afirmación es análoga a la de la implicación $(b) \Rightarrow (c)$ vista en el Teorema 5.3.5.

Afirmamos que

$$r_X(x) \leq \rho(x)$$

para todo $x \in X$, por lo que, en particular, $r_X(x)$ es una función real. Supongamos lo contrario y tomemos $x_0 \in X$ y un real t tales que $\rho(x_0) < t < r_X(x_0)$. Como X cumple la condición (m_2) se sigue del Lema 5.3.3 que r_X es semicontinua inferiormente, por tanto, existe una vecindad U_1 de x_0 en X tal que $t < r_X(x)$ para todo $x \in U_1$. Similarmente, usando la semicontinuidad superior de ρ tenemos que existe U_2 vecindad de x_0 en X tal que $\rho(x) < t$ para todo $x \in U_2$. Por consiguiente, si $U = U_1 \cap U_2$, entonces

$$\rho(x) < t < r_X(x)$$

para todo $x \in U$. Como Y es densa en X, existe $y \in Y \cap U$ y entonces $r_Y(y) = \rho(y) < r_X(y)$ lo que contradice la desigualdad (5.3.2). Queda probada nuestra afirmación.

Por ser ρ una función semicontinua superiormente en X y debido a que $0 \leq r_X(x) \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$, se tiene que r_X es continua en 0. Dado que r_X es una función real, del Teorema 5.3.5 inciso (d) concluimos que X es una Q-álgebra. $\square$

Como la compleción de cualquier álgebra localmente m-convexa conmutativa ($CLMC$-álgebra) es nuevamente una $CLMC$-álgebra con la propiedad (m), entonces, por la Proposición 5.3.13, la compleción de cualquier $CLMCQ$-álgebra es una $CLMCQ$-álgebra .

Observemos también que en la Proposición 5.3.13 la hipótesis que X satisfaga la condición (m_2) puede ser sustituida por la más débil de que $r_X\,(x)$ sea semicontinua inferiormente.

5.4. Las Q-álgebras y la continuidad de la transformada de Gelfand

En esta sección suponemos que X es un álgebra topológica compleja y con identidad tal que $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$.

Recordamos que para $x \in X$ se definió su transformada de Gelfand $\hat{x}$ como

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$.

Es claro que $\hat{x}$ es una función compleja continua en $(\mathcal{M}(X), \omega^*)$.

Definición 5.4.1. Denotamos por $C(\mathcal{M}(X))$ al espacio vectorial de las funciones continuas en $\mathcal{M}(X)$ con valores en $\mathbb{C}$ y por $C^*(\mathcal{M}(X))$ al subespacio de $C(\mathcal{M}(X))$ formado por las funciones que son además acotadas.

La transformada de Gelfand en X es el homomorfismo definido como

$$\Psi : X \to C(\mathcal{M}(X)), \text{ con } \Psi(x) = \hat{x} \restriction_{\mathcal{M}(X)},$$

Por definición $\Psi(x) \in C^*(\mathcal{M}(X))$ si y sólo si $\hat{x}(\mathcal{M}(X))$ es acotado en $\mathbb{C}$, es decir, $\{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}(X)\}$ es acotado en $\mathbb{C}$. Además, si X satisface (m_2), lo anterior es equivalente a pedir que $r(x) < \infty$.

Proposición 5.4.2. *Si para cada $x \in X$ se cumple que $\sigma(x)$ es compacto, entonces $\mathcal{M}^{\#}(X)$ es compacto.*

Demostración. $\mathcal{M}^{\#}(X) \subset \prod_{x\in X} \sigma(x)$, ya que si $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$, por el Corolario 5.1.5 $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para todo $x \in X$. Notemos que la topología débil en $\mathcal{M}^{\#}(X)$ coincide con la topología producto heredada del compacto $\prod_{x\in X} \sigma(x)$ (la topología de la convergencia por coordenadas), por lo que basta mostrar que $\mathcal{M}^{\#}(X)$ es cerrado en $\prod_{x\in X} \sigma(x)$. Sean $\varphi_0 \in \overline{\mathcal{M}^{\#}(X)}$, $y, z \in X$ y $\epsilon > 0$. Al ser $\sigma(y)$ y $\sigma(z)$ acotados, existe $M > 0$ tal que $|\lambda| < M$ para todo $\lambda \in \sigma(y) \cup \sigma(z)$. Existe $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ tal que

$$|\varphi(y) - \varphi_0(y)| < \frac{\epsilon}{3M+1}, \qquad |\varphi(z) - \varphi_0(z)| < \frac{\epsilon}{3M+1}$$

y

$$|\varphi(yz) - \varphi_0(yz)| < \frac{\epsilon}{3},$$

por tanto

$$\begin{aligned} |\varphi_0(y)\varphi_0(z) - \varphi_0(yz)| &\leq |\varphi_0(y)||\varphi_0(z) - \varphi(z)| \\ &+ |\varphi(z)||\varphi_0(y) - \varphi(y)| \\ &+ |\varphi(yz) - \varphi_0(yz)| < \epsilon. \end{aligned}$$

O sea, φ_0 es multiplicativa. La prueba de que φ_0 es lineal es similar. Finalmente $\varphi_0 \neq 0$ porque si $\varphi_0(e) = 0$, entonces $0 \in \sigma(e)$, lo que contradice que e es invertible. Entonces, $\varphi_0 \in \mathcal{M}^{\#}(X)$. $\square$

Definición 5.4.3. $C_u(\mathcal{M}(X))$ representa a $C(\mathcal{M}(X))$ con la topología de la convergencia uniforme. Similarmente $C_u^*(\mathcal{M}(X))$ representa a $C^*(\mathcal{M}(X))$ con la topología de la convergencia uniforme. Dicha topología está dada por la norma uniforme extendida,

$$\|f\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(X)} |f(\varphi)|,$$

para la que es posible que $\|f\| = \infty$ en alguna $f \in C(\mathcal{M}(X))$.

Sabemos que $C_u^*(\mathcal{M}(X))$ es un álgebra de Banach, mientras que, en general, $C_u(\mathcal{M}(X))$ no es siquiera un espacio vectorial topológico, pues el producto por un escalar no siempre es continuo. Sin embargo, $C_u(\mathcal{M}(X))$ siempre es un grupo aditivo topológico.

En el siguiente resultado caracterizaremos a las Q-álgebras mediante la continuidad de la función de Gelfand Ψ.

Proposición 5.4.4. *Si X satisface la condición (m_2). Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) X es una Q-álgebra.

(b) $\Psi(X) \subset C_u^*(\mathcal{M}(X))$ y $\Psi : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$ es continua.

(c) $\Psi : X \to C_u(\mathcal{M}(X))$ es continua en x si $\|\Psi(x)\| < \infty$.

Demostración. Como X satisface (m_2),

$$\|\Psi(x)\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(X)} |\varphi(x)| = r(x) \tag{5.4.1}$$

$(a) \Rightarrow (b)$ Por ser X un Q-álgebra, $\sigma(x)$ es compacto; por tanto, $r(x) < \infty$ para todo $x \in X$. Por (d) del Teorema 5.3.5 se tiene que r es una función continua en 0, lo que implica la continuidad de Ψ, ya que es lineal.

$(b) \Rightarrow (c)$ Es obvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Por (e') del Teorema 5.3.5 y el Lema 5.3.3 basta con que r sea semicontinua superiormente, lo cual se tiene por la continuidad de Ψ en los puntos x con imágenes de norma finita y la igualdad (5.4.1). $\square$

Proposición 5.4.5. *Si X es una Q-álgebra, m-convexa conmutativa, entonces $\Psi : X \to C(\mathcal{M}(X))$ es una función continua donde en $C(\mathcal{M}(X))$ se toma la topología compacto-abierto.*

Demostración. Por los Teoremas 5.2.3 y (4.1.6) en X se cumple la propiedad (m) y $r(x) = \|\Psi(x)\| < \infty$ para todo $x \in X$. En particular se satisface la propiedad (m_2). Del apartado (c) del Corolario 5.4.4, tenemos que $\Psi : X \to C_u(\mathcal{M}(X))$ es una función continua y como la topología uniforme es más fuerte la topología compacto-abierto, entonces $\Psi : X \to C(\mathcal{M}(X))$ es continua cuando en $C(\mathcal{M}(X))$ se considera la topología compacto-abierto. $\square$

En el Capítulo 7 (Ejemplo 7.4) se exhibe un álgebra donde el recíproco de esta proposición es falso.

Capítulo 6

Generalizaciones del concepto de Q-álgebra

En este capítulo supondremos que X es un álgebra topológica compleja con identidad, a menos que se diga otra cosa.

6.1. $Q_{\mathcal{M}}$-álgebras y $Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebras

Existen álgebras topológicas que no poseen la propiedad (m) (ver el ejemplo de la Sección 7.4). Para tales álgebras existe un elemento $x \in X$ tal que $\hat{x}(\mathcal{M}(X)) \subsetneq \sigma_X(x)$. En esta sección consideraremos por separado $\hat{x}(\mathcal{M}(X))$ y $\hat{x}(\mathcal{M}^{\#}(X))$ que son llamadas *partes lineales del espectro* $\sigma_X(x)$.

Definición 6.1.1. Definimos el $\mathcal{M}$-*espectro* de x como

$$\sigma_{\mathcal{M}(X)}(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}(X)\},$$

para cada $x \in X$, donde $\sigma_{\mathcal{M}(X)}(x) = \emptyset$ si $\mathcal{M}(X) = \emptyset$. El $\mathcal{M}$-*radio espectral* de x se define como

$$r_{\mathcal{M}(X)}(x) = \begin{cases} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{M}(X)}(x)\} & \text{si } \sigma_{\mathcal{M}(X)}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \sigma_{\mathcal{M}(X)}(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Usualmente se escribe $\sigma_{\mathcal{M}}(x)$ en lugar de $\sigma_{\mathcal{M}(X)}(x)$ y $r_{\mathcal{M}}(x)$ en lugar de $r_{\mathcal{M}(X)}(x)$.

Definición 6.1.2. Un elemento $x \in X$ es $\mathcal{M}$-*invertible* si $0 \notin \sigma_{\mathcal{M}}(x)$. El conjunto de los elementos $\mathcal{M}$-invertibles de X se denota por $G_{\mathcal{M}}(X)$. Es obvio que

$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{M}}(x) \text{ si y sólo si } x - \lambda e \notin G_{\mathcal{M}}(X).$$

Si $\sigma_{\mathcal{M}}(y) = \emptyset$ para algún $y \in X$, entonces $\mathcal{M}(X) = \emptyset$, lo que implica que $\sigma_{\mathcal{M}}(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$. En tal caso sucede que $G_{\mathcal{M}}(X) = X$.

De igual forma, usando $\mathcal{M}^{\#}(X)$ en vez de $\mathcal{M}(X)$, se define el $\mathcal{M}^{\#}$-*espectro* $\sigma_{M^{\#}}$, el $\mathcal{M}^{\#}$-*radio espectral* $r_{\mathcal{M}^{\#}}$ y el conjunto $G_{\mathcal{M}^{\#}}(X)$ de elementos $\mathcal{M}^{\#}$-invertibles. Similarmente a lo antes dicho, se tiene que

$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(x) \text{ si y sólo si } x - \lambda e \notin G_{\mathcal{M}^{\#}}(X).$$

De que $\sigma_{\mathcal{M}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(x) \subset \sigma(x)$ (Corolario 5.1.5) se obtiene:

1. $r_{\mathcal{M}}(x) \leq r_{\mathcal{M}^{\#}}(x) \leq r(x)$.

2. $G(X) \subset G_{\mathcal{M}^{\#}}(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X)$.

Definición 6.1.3. Decimos que X es una $Q_{\mathcal{M}}$-*álgebra* si $G_{\mathcal{M}}(X)$ es abierto en X. Análogamente, X es una $Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-*álgebra* si $G_{\mathcal{M}^{\#}}(X)$ es abierto en X.

Lema 6.1.4. *Si X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra ($Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebra), entonces $\sigma_{\mathcal{M}}(x)$ ($\sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(x)$) es compacto para todo $x \in X$.*

Demostración. Las demostraciones de que $\sigma_{\mathcal{M}}(x)$ ($\sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(x)$) es cerrado y acotado, en el caso en que $\mathcal{M}(X)$ $\left(\mathcal{M}^{\#}(X)\right)$ es no vacío, son las mismas a las dadas en las Proposiciones 4.1.5 y 4.1.6, una vez que se sustituye $G(X)$ por $G_{\mathcal{M}}(x)$ ($G_{\mathcal{M}^{\#}}(x)$). □

Denotaremos por $\Psi_{\mathcal{M}^{\#}} : X \to C(\mathcal{M}^{\#}(X))$, con $\mathcal{M}^{\#}(X) \neq \emptyset$, a la transformada de Gelfand para $\mathcal{M}^{\#}(X)$; es decir el homomorfismo definido como $\Psi_{\mathcal{M}^{\#}}(x) = \hat{x}$, es decir,

$$\Psi_{\mathcal{M}^{\#}}(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

para $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ y $x \in X$. Es claro que $\Psi_{\mathcal{M}^{\#}}(x)$ es acotado en $\mathcal{M}^{\#}(X)$ si y sólo si $r_{\mathcal{M}^{\#}}(x) < \infty$. Por definición $\Psi_{\mathcal{M}}(x) = \Psi_{\mathcal{M}^{\#}}(x) \upharpoonright_{\mathcal{M}(X)} = \Psi(x)$.

Lema 6.1.5. *La función $\sigma_{\mathcal{M}}$ es semicontinua inferiormente en X.*

Demostración. Supongamos $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$. Sean $x_0 \in X$ y un abierto U en $\mathbb{C}$ tales que $\sigma_{\mathcal{M}}(x_0) \bigcap U \neq \emptyset$. Existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\varphi(x_0) \in U$ y por ser φ una función continua existe una vecindad V de x_0 en X tal que $\varphi(x) \in U$ para cada $x \in V$. Por tanto, $\sigma_{\mathcal{M}}(x) \cap U \neq \emptyset$ para cada $x \in V$; o sea, $\sigma_{\mathcal{M}}$ es semicontinua inferiormente. El caso $\mathcal{M}(X) = \emptyset$ es obvio. □

Lema 6.1.6. *La función $r_{\mathcal{M}}$ es una seminorma extendida submultiplicativa que es semicontinua inferiormente en X.*

Demostración. Es claro que $r_{\mathcal{M}}$ es una seminorma submultiplicativa en el subespacio $\{x \in X : r_{\mathcal{M}}(x) < \infty\}$. Para ver que $r_{\mathcal{M}}$ es i.s.c. en X cuando no es idénticamente 0, tomemos $x_0 \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $r_{\mathcal{M}}(x_0) > s > t$. Existe $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ que satisface que $|\varphi(x_0)| > s$, como φ es continua, entonces existe una vecindad V de x_0 en X tal que $|\varphi(y)| > s$ para todo $y \in V$, por tanto $r_{\mathcal{M}}(y) > t$ para todo $y \in V$, y así r es i.s.c. □

Teorema 6.1.7. *Si $\mathcal{M}(X)$ $\left(\mathcal{M}^{\#}(X)\right)$ es no vacío, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra ($Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebra).

(b) $\sigma_{\mathcal{M}} : X \to 2^{\mathbb{C}}$ ($\sigma_{\mathcal{M}^{\#}} : X \to 2^{\mathbb{C}}$) es semicontinua superiormente con valores compactos.

(c) $r_{\mathcal{M}}$ ($r_{\mathcal{M}^{\#}}$) es una función real y semicontinua superiormente.

(d) $r_{\mathcal{M}}$ ($r_{\mathcal{M}^{\#}}$) es una función real y continua en 0.

(e) $r_{\mathcal{M}}$ ($r_{\mathcal{M}^{\#}}$) es una seminorma submultiplicativa continua en X.

(f) $\Psi(X) \subset C_u^*(\mathcal{M}(X))$ $\left(\Psi_{\mathcal{M}^{\#}}(X) \subset C_u^*(\mathcal{M}^{\#}(X))\right)$ y$\Psi : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$ ($\Psi_{\mathcal{M}^{\#}} : X \to C_u^*(\mathcal{M}^{\#}(X))$) es continua.

(g) $\sigma_{\mathcal{M}} : X \to 2^{\mathbb{C}}$ ($\sigma_{\mathcal{M}^{\#}} : X \to 2^{\mathbb{C}}$) es continua y con valores compactos.

Demostración. Las pruebas de las implicaciones $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$, son la mismas que las dadas en el Teorema 5.3.5 una vez que se sustituye σ y r por $\sigma_{\mathcal{M}}(\sigma_{\mathcal{M}^{\#}})$ y $r_{\mathcal{M}}$ $(r_{\mathcal{M}^{\#}})$, respectivamente.

Para las demás pruebas sólo trataremos el caso correspondiente a $\mathcal{M}$, las pruebas para $\mathcal{M}^{\#}$ son del todo similares.

$(d) \Rightarrow (e)$ Por la definición de $\sigma_{\mathcal{M}}(x)$ es muy fácil ver que $r_{\mathcal{M}}$ es una seminorma submultiplicativa. La continuidad en X se tiene por la continuidad en 0.

$(e) \Rightarrow (f)$ Tenemos que

$$\|\Psi_{\mathcal{M}}(x)\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(X)} |\varphi(x)| = r_{\mathcal{M}}(x)$$

y $r_{\mathcal{M}}(x) < \infty$ para todo $x \in X$. Como $r_{\mathcal{M}}$ es, en particular, una función continua en 0 y Ψ es lineal, entonces Ψ es continua.

$(f) \Rightarrow (a)$ Dado que $C_u^*(\mathcal{M}(X))$ es un álgebra de Banach, entonces $G(C_u^*(\mathcal{M}(X)))$ es abierto en $C_u^*(\mathcal{M}(X))$. Afirmamos que

$$G_{\mathcal{M}}(X) = \Psi^{-1}(G(C_u^*(\mathcal{M}(X)))).$$

Sean $x \in G_{\mathcal{M}}(X)$ y $\varsigma \in \mathcal{M}(C_u^*(\mathcal{M}(X)))$. Definimos la funcional lineal multiplicativa $\bar{\varsigma} = \varsigma \circ \Psi$, la cual pertenece a $\mathcal{M}(X)$ por ser Ψ un homomorfismo continuo. Entonces $0 \neq \bar{\varsigma}(x) = \varsigma(\Psi(x))$. Por el Corolario 5.2.5

$$\Psi(x) \in G(C_u^*(\mathcal{M}(X)));$$

o sea, $x \in \Psi^{-1}(G(C_u^*(\mathcal{M}(X))))$.

Recíprocamente, si $\Psi(x) \in G(C_u^*(\mathcal{M}(X)))$, entonces existe $h \in C_u^*(\mathcal{M}(X))$ tal que $\Psi(x)h = 1$, la función constante 1, lo que implica que $\varphi(x) = \Psi(x)(\varphi) \neq 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{M}(X)$, es decir, $0 \notin \sigma_{\mathcal{M}}(x)$, por tanto $x \in G_{\mathcal{M}}(X)$. Con lo cual concluimos la prueba de nuestra afirmación, misma que implica que X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.

$(g) \Rightarrow (b)$ Es obvio.

$(b) \Rightarrow (g)$ Se sigue del Lema 6.1.5. □

Corolario 6.1.8. *Para las afirmaciones*

(i) X es una Q-álgebra.

(ii) X es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra.

(iii) X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.

Se cumple que

(a) $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

(b) Si $r_{\mathcal{M}} = r_{\mathcal{M}^\#}$, entonces $(iii) \Rightarrow (ii)$. Si $r_{\mathcal{M}^\#} = r$, entonces $(ii) \Rightarrow (i)$. En particular, si X satisface (m_2), entonces $(i) - (iii)$ son equivalentes.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si X es una Q-álgebra, entonces por el Teorema 5.3.5 se tiene que la función r es real y continua. Como $r_{\mathcal{M}^\#} \leq r$ en X, entonces $r_{\mathcal{M}^\#}$ es también real y continua en 0. Del Teorema 6.1.7 concluimos que X es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra.

Por el Teorema 6.1.7 y la desigualdad $r_{\mathcal{M}} \leq r_{\mathcal{M}^\#}$ es cierta la implicación $(ii) \Rightarrow (iii)$ y por ese mismo teorema, $(iii) \Rightarrow (ii)$ cuando $r_{\mathcal{M}} = r_{\mathcal{M}^\#}$.

Por los dos teoremas antes mencionados tenemos que $(ii) \Rightarrow (i)$ si $r_{\mathcal{M}^\#} = r$. Si X satisface (m_2), entonces $r = r_{\mathcal{M}}$, lo cual implica que $r_{\mathcal{M}} = r_{\mathcal{M}^\#} = r$ y se tiene el resultado por esos mismos teoremas. □

Corolario 6.1.9. *Si X es un álgebra m-barrilada, entonces es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra siempre que $r_{\mathcal{M}}$ sea una función real.*

Demostración. Por el Teorema 6.1.7 basta probar que $r_{\mathcal{M}}$ es continua. Por el Lema 6.1.6, se puede seguir la demostración del Corolario 5.3.8 para probar que así es. □

Corolario 6.1.10. *La propiedad de $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra ($Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebra) se conserva bajo cualquier homomorfismo suprayectivo, continuo y abierto.*

Demostración. Sólo probaremos el caso correspondiente a $\mathcal{M}$. Sea $h : X \to Y$ un homomorfismo continuo y abierto, donde X y Y son álgebras complejas topológicas con unidad y X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. Si $\mathcal{M}(Y)$ es vacío el resultado se sigue inmediatamente. Supongamos que $\mathcal{M}(Y) \neq \emptyset$. Definimos $H = \{\varphi \circ h : \varphi \in \mathcal{M}(Y)\} \subset \mathcal{M}(X)$. Mostraremos que

$$\gamma : \mathcal{M}(Y) \to H, \text{ definida como } \varphi \mapsto \varphi \circ h$$

es un homeomorfismo. Claramente γ es suprayectiva y por serlo también h, se cumple que si $\varphi \circ h = \varphi' \circ h$, entonces $\varphi = \varphi'$. Esto muestra la inyectividad de γ. Sea V un abierto básico de H que contiene a $\varphi_0 \circ h$, digamos que

$$V = \{\varphi \circ h \in H : |\varphi \circ h(x_i) - \varphi_0 \circ h(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

con $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$, entonces

$$\gamma^{-1}(V) = \{\varphi \in \mathcal{M}(Y) : |\varphi(h(x_i)) - \varphi_0(h(x_i))| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

que es un abierto de $\mathcal{M}(Y)$, por lo que γ es continua.

Tomemos $\varphi_0 \in \mathcal{M}(Y)$ y un abierto básico U de $\mathcal{M}(Y)$, digamos

$$U = \{\varphi \in \mathcal{M}(Y) : |\varphi(y_i) - \varphi_0(y_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

con $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Por la suprayectividad de h existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $h(x_i) = y_i,\ i = 1, \ldots, n$. Así,

$$\gamma(U) = \{g \circ h \in H : |g \circ h(x_i) - \varphi_0 \circ h(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$$

el cual es un abierto en H. Por tanto, γ es un homeomorfismo.

Por el Teorema 6.1.7, $\Psi_{\mathcal{M}(X)}(X) \subset C_u^*(\mathcal{M}(X))$ y

$$\Psi_{\mathcal{M}(X)} : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$$

es continua.

Sea $T : C_u^*(\mathcal{M}(X)) \to C_u^*(H)$ la función definida como $f \mapsto f\restriction_H$. Obviamente T es continua. La función $\hat{\gamma}:C_u^*(H) \to C_u^*(\mathcal{M}(Y))$, definida como $f \mapsto f \circ \gamma$ es lineal y es continua ya que

$$\|f \circ \gamma\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(Y)} |f \circ \gamma(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(Y)} |f(\varphi \circ h)| \leq \sup_{\varsigma \in H} |f(\varsigma)| = \|f\|.$$

Notemos que

$$\Psi_{\mathcal{M}(Y)} \circ h = \hat{\gamma} \circ T \circ \Psi_{\mathcal{M}(X)} \text{ en } X,$$

pues si $x \in X$ y $\varphi \in \mathcal{M}(Y)$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(T(\Psi_{\mathcal{M}(X)}(x)))(\varphi) &= \hat{\gamma}(\hat{x}|_H)(\varphi) = (\hat{x} \circ \gamma)(\varphi) \\ &= \hat{x}(\varphi \circ h) = \varphi(h(x)) = \Psi_{\mathcal{M}(Y)}(h(x))(\varphi).\end{aligned}$$

Como $\hat{\gamma}, T$ y $\Psi_{\mathcal{M}(X)}$ son continuas, entonces $\Psi_{\mathcal{M}(Y)} \circ h$ es continua. De donde, si W un abierto de $C_u^*(\mathcal{M}(Y))$, entonces $h^{-1}\left(\Psi^{-1}_{\mathcal{M}(Y)}(W)\right)$ es un abierto de X y como la función h es suprayectiva y abierta, entonces $\Psi^{-1}_{\mathcal{M}(Y)}(W)$ es abierto en Y. Por tanto, $\Psi_{\mathcal{M}(Y)}$ es continua, y por el Teorema 6.1.7 Y es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. □

Corolario 6.1.11. *Si X contiene una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra densa, entonces X también es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.*

Demostración. Si $\mathcal{M}(X)$ es vacío el resultado se sigue inmediatamente. Supongamos que $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$. Sea $x \in X$, por la densidad de Y, existe una red $\{y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ en Y que converge a x. Por ser Y una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra, entonces $r_{\mathcal{M}(Y)}$ es una seminorma en Y continua en 0, por lo que existe un abierto U del 0 en Y tal que $|r_{\mathcal{M}(Y)}(y)| < 1$ para todo $y \in U$.

Sabemos que $U = Y \bigcap V$ con V abierto en X. Sea W un vecindad balanceada del 0 en X tal que $W + W \subset V$. Como $y_\alpha \to x$, entonces existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $y_\alpha - x \in W$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por lo que

$$y_\alpha - y_{\alpha_0} = (y_\alpha - x) - (y_{\alpha_0} - x) \in W + W \subset V$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. De donde,

$$|r_{\mathcal{M}(Y)}(y_\alpha) - r_{\mathcal{M}(Y)}(y_{\alpha_0})| \leq r_{\mathcal{M}(Y)}(y_\alpha - y_{\alpha_0}) < 1$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Lo cual implica que $|r_{\mathcal{M}(Y)}(y_\alpha)| < 1 + r_{\mathcal{M}(Y)}(y_{\alpha_0})$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Si $\varphi \in \mathcal{M}(X)$, entonces $\varphi(y_\alpha) \to \varphi(x)$; por lo que existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y_\alpha)| < 1$ para todo $\alpha \geq \alpha_1$. Por consiguiente,

$$|\varphi(x)| < 1 + |\varphi(y_{\alpha_1})| < 2 + r_{\mathcal{M}(Y)}(y_{\alpha_0}).$$

Por tanto, $r_{\mathcal{M}(X)}(x) < 2 + r_{\mathcal{M}(Y)}(y_{\alpha_0}) < \infty$. Lo que implica que $r_{\mathcal{M}(X)}$ es una seminorma submultiplicativa en X con valores reales y continua en cero. Del Teorema 6.1.7 inciso (d), se tiene que X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. $\square$

Proposición 6.1.12. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\sigma_{\mathcal{M}^\#}(x)$ es compacto para todo $x \in X$.

(b) $\sigma_{\mathcal{M}^\#}(x)$ es acotado para todo $x \in X$.

(c) $\mathcal{M}^\#(X)$ es compacto.

(d) X es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra bajo alguna topología.

Demostración. Observemos que si $\mathcal{M}^\#(X) = \emptyset$, entonces $\sigma_{\mathcal{M}^\#}(x) = \emptyset$ para todo $x \in X$ por lo que X es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra con la topología original y se cumplen (a)-(d). Supongamos que $\mathcal{M}^\#(X) \neq \emptyset$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Es obvio.

$(b) \Rightarrow (c)$ Para $x \in X$ hagamos

$$S(x) = \overline{\sigma_{\mathcal{M}^\#}(x)}.$$

Siguiendo la demostración de la Proposición 5.4.2 se obtiene que $\mathcal{M}^\#(X)$ es cerrado en $\prod_{x\in X} S(x)$, por lo que $\mathcal{M}^\#(X)$ es compacto.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea τ la topología original de X. Como $\mathcal{M}^\#(X)$ es compacto, entonces

$$Y = C_u(\mathcal{M}^\#(X)) = C_u^*(\mathcal{M}^\#(X))$$

es un álgebra de Banach y $\Psi_{\mathcal{M}^\#} : X \to Y$ es una función, no necesariamente continua. El producto $P = X \times Y$ es un álgebra topológica con las operaciones por coordenadas y la topología producto. El álgebra X está identificado con una subálgebra de P bajo el isomorfismo algebraico $i(x) = (x, \Psi_{\mathcal{M}^\#}(x))$. Sea τ^* la topología en X heredada de P a través de i, es decir, $U \in \tau^*$ si y sólo si $U = i^{-1}(V)$ para algún abierto V en P. En particular, $i : (X, \tau^*) \to P$ es continua por lo que la función componente

$$\Psi_{\mathcal{M}^\#} : (X, \tau^*) \to Y = C_u^*(\mathcal{M}^\#(X))$$

es continua. Como además, es claro que (X, τ^*) es un álgebra topológica, se sigue del apartado (f) del Teorema 6.1.7 que (X, τ^*) es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea τ una topología en X con la cual es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra, por el Lema 6.1.4 concluimos que $\sigma_{\mathcal{M}^\#}(x)$ es compacto para todo $x \in X$. $\square$

6.2. Q_t-álgebras

Recordamos que estamos suponiendo que X es un álgebra topológica compleja con identidad e.

Definición 6.2.1. Un elemento $x \in X$ es *topológicamente invertible* en X si $\overline{xX} = \overline{Xx} = X$. El subconjunto de los elementos topológicamente invertibles en X es denotado como $G_t(X)$. En caso de que $G_t(X)$ sea abierto en X, decimos que X es un *álgebra topológicamente Q (Q_t-álgebra).*

Afirmamos que $a \in X$ sea topológicamente invertible en X equivale a la existencia de un par de redes $\tilde{a} = (a_\lambda)$ y $\tilde{b} = (b_\lambda)$ en X tales que $aa_\lambda \to e$ y $b_\lambda a \to e$. De la definición es claro que si a es topológicamente invertible, entonces existen dichas redes. Para ver el recíproco, supongamos que existen redes $\tilde{a} = (a_\lambda)$ y $\tilde{b} = (b_\lambda)$ en X tales que $aa_\lambda \to e$ y $b_\lambda a \to e$, entonces $e \in \overline{aX}$ y $e \in \overline{Xa}$, por la Proposición 3.2.1 se sigue que $X \subset \overline{aX}$, y $X \subset \overline{Xa}$, por lo que $\overline{aX} = \overline{Xa} = X$; es decir, a es topológicamente invertible. A estas redes $\tilde{a} = (a_\lambda)$ y $\tilde{b} = (b_\lambda)$ se les llama inverso topológico derecho e izquierdo de a, respectivamente.

Se cumple que

$$G(X) \subset G_t(X).$$

El siguiente resultado es similar a la Proposición 4.1.2 que da caracterizaciones de una Q-álgebra.

Teorema 6.2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es una Q_t-álgebra.

(b) e es un punto interior de $G_t(X)$.

(c) $\mathrm{Int}(G_t(X))$ es no vacío.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ Es obvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea $a \in \mathrm{Int}(G_t(X))$, entonces existen en X vecindades U, V y W del 0 tales que

$$a + U \subset G_t(X),\ V + V \subset U,\ aW \subset V \text{ y } Wa \subset V.$$

Sea $x \in G_t(X)$, entonces existen $z, y \in X$ tales que $zx, xy \in e + W$. Sea $\tilde{U}$ una vecindad del 0 tal que $z\tilde{U} \subset W$ y $\tilde{U}y \subset W$. Afirmamos que $x + \tilde{U} \subset G_t(X)$.

Si $u \in \tilde{U}$, entonces $az(x+u) \in a(e+W) + aW$ y

$$a(e+W) + aW \subset a + aW + aW \subset a + V + V \subset a + U \subset G_t(X);$$

o sea, $az(x+u) \in G_t(X)$

Por otro lado, $(x+u)ya \in (e+W)a + Wa$ y

$$(e+W)a + Wa \subset a + Wa + Wa \subset a + V + V \subset a + U \subset G_t(X);$$

o sea, $(x+u)ya \in G_t(X)$.

Entonces, existen un par de redes (b_λ), (c_λ) en X tales que $b_\lambda az(x+u) \to e$ y $(x+u)yac_\lambda \to e$, por lo cual $x+u \in G_t(X)$, es decir, $x + \tilde{U} \subset G_t(X)$. Por tanto, X es una Q_t-álgebra. $\square$

Lema 6.2.3. *Si $x, y \in G_t(X)$, entonces $xy \in G_t(X)$.*

Demostración. Veamos que $\overline{xyX} = X$. Basta probar que $e \in \overline{xyX}$, ya que por la Proposición 3.2.1 $\overline{xyX}$ es un ideal izquierdo. Para esto hay que ver que si U es una vecindad abierta del 0, entonces

$$(e+U) \cap (xyX) \neq \emptyset.$$

Tomemos vecindades balanceadas del cero V y W tales que $V + V \subset U$ y $xW \subset V$.

Como $(e+V) \cap xX \neq \emptyset$, pues x es topológicamente invertible, entonces existen $v \in V$, $a \in X$ tales que $e + v = xa$. Ahora, $a \in X = \overline{yX}$ por hipótesis, entonces $(a+W) \cap yX \neq \emptyset$, por lo que existen $w \in W$ y $b \in X$ tales que $a + w = yb$. Entonces,

$$e + v = x(yb - w) = xyb - xw.$$

O sea, $e + v + xw = xyb$. Tenemos $xyb \in xyX$, $v + xw \in V + xW$ y

$$V + xW \subset V + V \subset U;$$

De donde, $(e+U) \cap (xyX) \neq \emptyset$. De manera similar se prueba que $\overline{Xxy} = X$. Por tanto, $xy \in G_t(x)$. $\square$

Proposición 6.2.4. *En toda Q-álgebra X se cumple que $G(X) = G_t(X)$. Toda Q-álgebra es Q_t-álgebra. En particular esto sucede cuando X es un álgebra de Banach.*

Demostración. Sea X una Q-álgebra. Basta probar que todo elemento topológicamente invertible es invertible. Si $x \in X$ es un elemento topológicamente invertible, entonces existen $\tilde{a} = (a_\lambda)$, $\tilde{b} = (b_\lambda)$ redes en X tales que $a_\lambda x \to e$ y $xb_\lambda \to e$. Como $e \in G(X)$, el cual es abierto por hipótesis, entonces existe λ_0 tal que $a_{\lambda_0}x$, $xb_{\lambda_0} \in G(X)$. Por lo que existen $a, b \in X$ tales que

$$(aa_{\lambda_0})x = a(a_{\lambda_0}x) = e = (xb_{\lambda_0})b = x(b_{\lambda_0}b);$$

por tanto, x es invertible. $\square$

Proposición 6.2.5. *Si X es m-convexa y completa se cumple que $G(X) = G_t(X)$.*

Demostración. Sea $T : X \to \lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha$ el isomorfismo de X en el límite inverso de una familia de Arens-Michael de X, construido en la prueba del Teorema 3.3.2 y dado por la asociación

$$x \mapsto ([x]_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}.$$

Sea $x \in X$ un elemento topológicamente invertible, por el Corolario 3.3.3 basta probar que $[x]_\alpha$ es invertible en X_α para cada $\alpha \in \Lambda$. Sabemos que existen dos redes (a_λ) y (b_λ) en X tales que $a_\lambda x \to e$ y $x b_\lambda \to e$. Por ser T un homomorfismo continuo, tenemos que

$$[a_\lambda]_\alpha \cdot [x]_\alpha \to [e]_\alpha$$

y

$$[x]_\alpha \cdot [b_\lambda]_\alpha \to [e]_\alpha$$

para cada α. Como $[e]_\alpha$ es el neutro multiplicativo en X_α, entonces $[x]_\alpha$ es topológicamente invertible en X_α. Por la Proposición 6.2.4, $[x]_\alpha$ es invertible, ya que cada X_α es una Q-álgebra al ser de Banach. Por tanto, x es un elemento invertible en X. □

Corolario 6.2.6. *Si X es m-convexa y completa, entonces se cumple que $G(X) = G_t(X) = G_{\mathcal{M}}(X) = G_{\mathcal{M}^\#}(X)$. Así, en este caso todos los tipos de álgebras Q son equivalentes.*

Demostración. Esto es consecuencia de la condición de Wiener (es el Teorema 5.2.6), la proposición anterior y las contenciones $G(X) \subset G_{\mathcal{M}^\#}(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X)$. □

Ejemplo. Sea c el álgebra de las sucesiones complejas convergentes con las operaciones por coordenadas y la topología dada por las seminormas

$$\|(x_i)\|_n = |x_n|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $(x_i) \in c$. Entonces c es un álgebra compleja, m-convexa, con identidad y completa. Para ver esto último sea $\left(x^{(k)}\right)$ una sucesión de Cauchy en c, con $x^{(k)} = \left(x_i^{(k)}\right)$ para cada $k \geq 1$. Entonces $\left(x_i^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{C}$ para cada $i \geq 1$, digamos que a x_i. Entonces, $x^{(k)} \to (x_i)$ cuando $k \to \infty$.

Afirmamos que esta álgebra no tiene ninguna de las 4 propiedades Q. Basta ver que no es una Q-álgebra. No lo es pues la funcional φ que asocia a cada $(x_i) \in c$ el límite de (x_i) pertenece a $\mathcal{M}^\#(X)$, pero no es continua. Entonces $\ker\varphi$ es un ideal máximo en c que no es cerrado. Por el Lema 4.4.7, c no es Q-álgebra.

Definición 6.2.7. Para cada $x \in X$, el conjunto

$$\sigma_t(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \notin G_t(X)\}$$

es llamado el *espectro topológico* de x. También se define el *radio espectral topológico* de x como

$$r_t(x) = \begin{cases} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_t(x)\} & \text{si } \sigma_t(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \sigma_t(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Si $x \in X$ es topológicamente invertible con inverso topológico derecho $\tilde{a} = (a_\lambda)$ y $f \in \mathcal{M}(X)$, entonces $f(xa_\lambda) = f(x)f(a_\lambda) \to f(e) = 1$, lo que implica que $f(x) \neq 0$. Por tanto, x es $\mathcal{M}$-invertible.

Así,

$$G(X) \subset G_t(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X),$$

por lo que

$$\sigma_{\mathcal{M}}(x) \subset \sigma_t(x) \subset \sigma(x)$$

y como ya sabíamos, $\sigma_{\mathcal{M}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{M}^\#}(x) \subset \sigma(x)$, lo cual implica que

$$G\,(X) \subset G_{\mathcal{M}^\#}(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X),$$

$$r_{\mathcal{M}}(x) \leq r_t(x) \leq r(x)$$

y

$$r_{\mathcal{M}}(x) \leq r_{\mathcal{M}^\#}(x) \leq r(x)$$

para todo $x \in X$.

Por otra parte, una red $\tilde{a} = (a_\lambda)$ en X es llamada *advertiblemente convergente* (o advertible) si existe $a \in X$ tal que $aa_\lambda \to e$ y $a_\lambda a \to e$. En tal caso también se dice que es advertible respecto a a.

Supongamos que (a_λ) es advertible respecto a y X es de Hausdorff. Entonces (a_λ) converge en X si y sólo si a es invertible en X y $a_\lambda \to a^{-1}$. En efecto, supongamos que $a_\lambda \to a_0$. Por la continuidad del producto se sigue que $aa_\lambda \to aa_0$, de donde $aa_0 = e$, pues X es un espacio de Hausdorff. Inversamente si a es invertible y $aa_\lambda \to e$. Entonces $a_\lambda \to a^{-1}e$.

Definición 6.2.8. Para X definimos

$$\mathcal{S}(X) = \{x \in X : r(x) \leq 1\}.$$

Se definen de manera análoga $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$ y $\mathcal{S}_t(X)$ haciendo uso de los radios espectrales $r_{\mathcal{M}}$ y r_t respectivamente.

Es fácil observar que $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{S}_t(X) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$, ya que $r_{\mathcal{M}}(x) \leq r_t(x) \leq r(x)$.

Lema 6.2.9. *$\mathcal{M}(X)$ es cerrado en X^*con la topología ω^*.*

Demostración. Si $\mathcal{M}(X) = \emptyset$ la afirmación es obvia. Supongamos que $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$ y sea $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en $\mathcal{M}(X)$ que converge en la topología w^* a $f \in X^*$. Entonces

$$f_\alpha(e) \to f(e),$$

por lo que $f(e) = 1$, en particular, f es no nula. Ahora, para $x, y \in X$ tenemos que $f_\alpha(xy) \to f(xy)$, $f_\alpha(x) \to f(x)$ y $f_\alpha(y) \to f(y)$, por lo que

$$f_\alpha(x)f_\alpha(y) \to f(x)f(y),$$

pero $f_\alpha(xy) = f_\alpha(x)f_\alpha(y)$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por tanto, $f(xy) = f(x)f(y)$, así $f \in \mathcal{M}(X)$. □

Teorema 6.2.10. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.

(b) e es un punto interior de $G_{\mathcal{M}}(X)$.

(c) $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$ es una vecindad del 0.

(d) $\mathrm{Int}(G_{\mathcal{M}}(X))$ es no vacío.

Demostración.
(a) $\Rightarrow$ *(b)* y *(b)* $\Rightarrow$ *(d)* Son obvias.

(b) $\Rightarrow$ *(c)* Como $e \in \mathrm{Int}(G_{\mathcal{M}}(X))$ existe una vecindad balanceada U del cero, tal que $e + U \subset G_{\mathcal{M}}(X)$. Probaremos que $U \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$. Para esto supongamos lo contrario, es decir, existe $u \in U$ tal que $r_{\mathcal{M}}(u) > 1$, entonces existe $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $|f(u)| > 1$. Dado que U es balanceado, se tiene que

$$e - \frac{1}{f(u)}U \subset e + U.$$

Por lo que

$$e - \frac{1}{f(u)}u \in G_{\mathcal{M}}(X),$$

pero $f\left(e - \frac{1}{f(u)}u\right) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $U \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Por el Teorema 1.1.15 se tiene que $S_{\mathcal{M}}(X)^{\circ}$ es w^{*}-compacto. Debido a que

$$\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)^{\circ}$$

y $\mathcal{M}(X)$ es ω^{*}-cerrado en X^{*} tenemos que $\mathcal{M}(X)$ es w^{*}-compacto por el Lema 6.2.9. Para $x \in G_{\mathcal{M}}(X)$, tomemos

$$0 < m < \min\{|f(x)| : f \in \mathcal{M}(X)\}.$$

Probaremos que

$$x + m\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X).$$

Sea $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$, si $f(x+my) = 0$ para alguna $f \in \mathcal{M}(X)$, entonces $|f(x)| \leq m$ lo cual contradice la elección de m. Así, $f(x+ms) \neq 0$ para toda $f \in \mathcal{M}(X)$, es decir,

$$x + ms \in G_{\mathcal{M}}(X).$$

Por tanto, X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.

$(d) \Rightarrow (b)$ Por hipótesis existen $x \in X$ y una vecindad U del 0 en X, tales que

$$x + U \subset G_{\mathcal{M}}(X).$$

Sea V una vecindad del 0 tal que $xV \subset U$. Entonces,

$$x(e+V) \subset x + xV \subset x + U \subset G_{\mathcal{M}}(X).$$

Lo que implica que $e + V \subset G_{\mathcal{M}}(X)$, es decir, $e \in \mathrm{Int}(G_{\mathcal{M}}(X))$. □

En el siguiente teorema relacionamos el Teorema 6.2.2 con $\mathcal{S}_t(X)$ como sigue.

Teorema 6.2.11. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es una Q_t-álgebra.

(b) e es punto interior de $G_t(X)$.

(c) $\mathcal{S}_t(X)$ es una vecindad del cero.

(d) $\mathrm{Int}(G_t(X))$ es no vacío.

Demostración. En el Teorema 6.2.2 se probó $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Como $e \in \mathrm{Int}(G_t(X))$, entonces existe una vecindad balanceada del cero V en X tal que

$$e + V \subset G_t(X).$$

Probaremos que $V \subset \mathcal{S}_t(X)$. Para esto, supongamos lo contrario y tomemos $x \in V$ tal que $r_t(x) > 1$, entonces para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$ se cumple que $x - \lambda e \notin G_t(X)$. Así

$$e - \frac{1}{\lambda} x \notin G_t(X).$$

Sin embargo, como $|\lambda| > 1$ y V es balanceado, entonces

$$e - \frac{1}{\lambda} V \subset e + V \subset G_t(X),$$

lo cual contradice lo anterior. Por tanto, $V \subset \mathcal{S}_t(X)$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Como $\mathcal{S}_t(X)$ es una vecindad del cero en X, basta probar que

$$e + \frac{1}{2}\mathcal{S}_t(X) \subset G_t(X).$$

Supongamos que no es así, y tomemos $x \in \mathcal{S}_t(X)$ tal que

$$e + \frac{1}{2} x \notin G_t(X),$$

por lo que $2e + x \notin G_t(X)$. Esto implica que $-2 \in \sigma_t(x)$, lo que contradice que $x \in \mathcal{S}_t(X)$. Esto prueba la afirmación. □

Corolario 6.2.12. *Toda Q_t-álgebra es $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.*

Demostración. El resultado se obtiene de que $G_t(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X)$ y los Teoremas 6.2.10 y 6.2.11. □

Corolario 6.2.13. *Si X una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra o una Q_t-álgebra, entonces $r_{\mathcal{M}}(x) < \infty$ para todo $x \in X$ y si $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$, entonces la transformada de Gelfand $\Psi : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$ es continua. De modo recíproco, si $r_{\mathcal{M}}(x) < \infty$ para todo $x \in X$ y $\Psi : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$ es continua, entonces X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.*

Demostración. Como toda Q_t-álgebra es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra, entonces es suficiente probar el resultado para cuando X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. Por otra parte, la demostración de este resultado es una sencilla consecuencia del Teorema 6.1.7. Sin embargo, daremos una prueba de este resultado haciendo uso del conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$ y del Teorema 6.2.10.

Supongamos que X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra, entonces $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$ es una vecindad del cero en X, por el Teorema 6.2.10. Sea $x \in X$, entonces por la continuidad del producto por un escalar, existe $M > 0$ tal que $\frac{1}{\lambda}x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)$ siempre que $|\lambda| \geq M$.

Para todo $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ tenemos que

$$|\varphi(x)| = M \left|\varphi\left(\frac{1}{M}x\right)\right| \leq M,$$

lo que implica que $r_{\mathcal{M}}(x) < \infty$. El homomorfismo $\Psi : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$ es continuo en 0, ya que

$$\Psi(\epsilon\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X)) \subset B_\epsilon[0]$$

para todo $\epsilon > 0$, donde $B_\epsilon[0]$ es la bola cerrada en $C_u^*(\mathcal{M}(X))$ centrada en 0 y radio ϵ.

Recíprocamente, si $r_{\mathcal{M}}(x) < \infty$ para todo $x \in X$ y la transformación

$$\Psi : X \to C_u^*(\mathcal{M}(X))$$

es continua, entonces

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}(X) = \Psi^{-1}\left(\{f \in C_u^*(\mathcal{M}(X)) : \|f\|_\infty \leq 1\}\right)$$

es una vecindad del cero y por tanto, X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. □

Corolario 6.2.14. *Para las propiedades siguientes*

(a) X es una Q-álgebra.

(b) X es una Q_t-álgebra.

(c) X es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra.

(d) X es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.

se satisface

(i) $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d)$ y $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$

(ii) Si $r_t = r_{\mathcal{M}}$, entonces $(d) \Rightarrow (b)$; si $r_{\mathcal{M}} = r_{\mathcal{M}^\#}$, entonces $(d) \Rightarrow (c)$ y si $r_{\mathcal{M}^\#} = r$, entonces $(c) \Rightarrow (a)$.

Demostración. Las implicaciones $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d)$ se siguen de que $G(X) \subset G_t(X) \subset G_{\mathcal{M}}(X)$, de la Proposición 4.1.2 y los Teoremas 6.2.11 y 6.2.10.

Si $r_t = r_{\mathcal{M}}$, entonces $S_t(X) = S_{\mathcal{M}}(X)$. Del Teorema 6.2.11 se cumple $(d) \Rightarrow (b)$. Las demás afirmaciones son parte del Corolario 6.1.8. □

El siguiente resultado es el correspondiente para las Q_t-álgebras al resultado clásico en Q-álgebras: toda álgebra de Banach es una Q-álgebra.

Proposición 6.2.15. *Si X un álgebra normada, entonces X es una Q_t-álgebra.*

Demostración. Por el Teorema 6.2.2 basta probar que $\mathrm{Int}(G_t(X)) \neq \emptyset$. Para esto veamos que

$$U = \{x \in X : \|x + e\| < 1\} \subset G_t(X),$$

ya que entonces $-e \in \mathrm{Int}(G_t(X))$.

Sea $x \in U$ y definamos $y = x + e$, así $\|y\| \leq 1$. La sucesión

$$\left(\sum_{k=0}^{n} -y^k \right)_{n=1}^{\infty},$$

es tal que

$$\left\| (y - e) \left(\sum_{k=0}^{n} -y^k \right) - e \right\| = \|y^{n+1}\| \leq \|y\|^{n+1}.$$

Por tanto,

$$\left\| (y - e) \left(\sum_{k=0}^{n} -y^k \right) - e \right\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Por lo que, $x = y - e$ es topológicamente invertible. □

En cualquier álgebra topológica Y con unidad, definimos

$$G_t^l(Y) = \left\{ a \in Y : \overline{Ya} = Y \right\}$$

o sea, el conjunto de los elementos topológicamente invertibles por la izquierda, y

$$G_t^r(Y) = \left\{ a \in X : \overline{aY} = Y \right\}$$

que es el conjunto de los elementos topológicamente invertibles por la derecha.

Si X es un álgebra topológica metrizable definimos

$$g_l(x) = \inf_{y \in X} d\,(yx, e) \qquad \text{y} \qquad g_r(x) = \inf_{y \in X} d\,(xy, e)\,.$$

para cada Y,

Entonces,

$$G_t^l(X) = \{x \in Y : \, g_l(x) = 0\} \qquad \text{y} \qquad G_t^r(X) = \{x \in Y : \, g_r(x) = 0\}\,.$$

Además

$$G_t(X) = G_t^l(x) \cap G_t^r(X). \tag{6.2.1}$$

Lema 6.2.16. *Los conjuntos*

$$S_{l,\lambda} = \{x \in X : g_l(x) < \lambda\} \qquad y \qquad S_{r,\lambda} = \{x \in X : g_r(x) < \lambda\}$$

son abiertos para cada $\lambda > 0$ si X es un álgebra topológica metrizable.

Demostración. Sea $\lambda > 0$ y supongamos que $x \in S_{l,\lambda}$, entonces $g_l(x) < \lambda$. Por lo que existe $v \in X$ tal que $d(vx, e) < \lambda$ y existe $\epsilon > 0$ tal que

$$d(vx, e) < \lambda - \epsilon.$$

Luego, por la continuidad de la multiplicación tenemos que existe $\delta > 0$ que cumple que para cada $y \in X$, si $d(y - x) < \delta$, entonces $d(vy, vx) < \epsilon$. De donde

$$d(vy, e) \leq d(vy - vx) + d(vx - e) < \lambda$$

para todo $y \in X$ con $d(y, x) < \delta$. Es decir, $B_\delta(x) \subset S_{l,\lambda}$. Ver que $S_{r,\lambda}$ es abierto es análogo. □

Vimos en la Proposición6.2.15 que en toda álgebra compleja normada con identidad el conjunto de los elementos topológicamente invertibles es abierto. Para un álgebra topológica compleja, con identidad y metrizable, inclusive si es conmutativa, localmente convexa y completa, esto no es necesariamente válido. A continuación exhibimos un ejemplo de una B_0-álgebra donde los topológicamente invertibles no forman un conjunto abierto; o sea, no es Q_t-álgebra.

Ejemplo. Sea $\mathcal{E}$ el álgebra de la funciones enteras con las operaciones usuales de funciones y la topología dada por las seminormas

$$\|f\|_n = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|$$

para $f \in \mathcal{E}$, $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 1$. Es decir, en $\mathcal{E}$ se considera la topología compacto-abierto. Como la familia (saturada) de seminormas (de hecho, normas) es numerable, entonces esta álgebra topológica compleja, conmutativa y con identidad, además es localmente convexa, de hecho, m-convexa y metrizable. También es completa, ya que si (f_i) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}$, entonces para cada $n \geq 1$ existe una única función g_n holomorfa en el disco abierto $D_n = D_n(0)$ y continua en el cerrado $\overline{D_n}$ tal que $\|f_i \restriction_{D_n} - g_n\|_n \to 0$ cuando $i \to \infty$. La función g definida en $\mathbb{C}$ como $g(z) = g_n(z)$ si $|z| \leq n$ está bien definida, es entera y (f_i) converge a g en $\mathcal{E}$. Esto prueba nuestra afirmación, por lo que $\mathcal{E}$ es una B_0-álgebra conmutativa y con identidad.

Dados $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$ tenemos que la función $f(z) = \frac{\epsilon}{2n} z + 1$ satisface que $\|f(z) - 1\|_n < \epsilon$ y $f(z)$ no es invertible en $\mathcal{E}$. Por la Proposición 4.1.2, $\mathcal{E}$ no es una Q-álgebra. Y por el Corolario 6.2.6, $\mathcal{E}$ tampoco es Q_t-álgebra.

Sin embargo, para cualquier álgebra topológica, compleja, con identidad y metrizable tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2.17. *Si X es una álgebra topológica metrizable, entonces $G_t(X)$ es un conjunto G_δ. Esto vale en particular cuando X es una B_0-álgebra.*

Demostración. Como

$$G_t^l(X) = \{x \in X : g_l(x) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : g_l(x) < 1/n\}$$

y

$$G_t^r(X) = \{x \in X : g_r(x) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : g_r(x) < 1/n\},$$

del Lema 6.2.16 y (6.2.1) obtenemos el resultado. □

Ahora, supongamos que X es un álgebra topológica conmutativa. Probaremos el mapeo espectral polinomial para el espectro topológico, similar al Lema 2.3.3. Para esto, haremos uso del siguiente resultado.

Lema 6.2.18. *Si X es conmutativa y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Entonces, $x_1 \cdots x_n \in G_t(X)$ si y sólo si $x_i \in G_t(X)$ para cada $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Supongamos que $x = x_1 \cdots x_n \in G_t(X)$. Entonces existe una red $(z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X tal que $xz_\alpha \to e$. Por tanto, si definimos

$$w_\alpha^i = \prod_{j\neq i} x_j z_\alpha$$

para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $x_i w_\alpha^i \to e$. De donde, $x_i \in G_t(X)$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Para el recíproco, probemos que si $x_1, x_2 \in G_t(X)$, entonces $x_1x_2 \in G_t(X)$. Existen redes $(z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (v_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ en X tales que $x_1 z_\alpha \to e$ y $x_2 v_\beta \to e$. Por tanto, si consideramos

$$w_{(\alpha,\beta)} = (z_\alpha v_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Gamma}$$

con $(\alpha, \beta) \leq (\alpha_0, \beta_0)$ si y sólo si $\alpha \leq \alpha_0$, $\beta \leq \beta_0$, entonces $x_1x_2w_{(\alpha,\beta)} \to e$, por la continuidad del producto. Esto implica que, $x_1x_2 \in G_t(X)$. A partir de esto, es fácil terminar la prueba usando inducción. □

Teorema 6.2.19. (**Mapeo espectral polinomial para σ_t**)*Si X es conmutativa, entonces $\sigma_t(p(x)) = p(\sigma_t(x))$ para todo polinomio complejo no constante p y todo $x \in X$.*

Demostración. Sean p un polinomio de grado $n > 0$ y $x \in X$. Si $\lambda \in \sigma_t(x)$, entonces $x - \lambda e \notin G_t(X)$. Tenemos que

$$p(x) - p(\lambda)e = (x - \lambda e)q(x)$$

para algún polinomio q. Por el Lema 6.2.18 obtenemos que $p(x) - p(\lambda)e \notin G_t(X)$. Por tanto $p(\lambda) \in \sigma_t(p(x))$.

Para la contención contraria, sea $\mu \in \sigma_t(p(x))$, entonces $p(x) - \mu e \notin G_t(X)$. Consideremos el polinomio $g(t) = p(t) - \mu$,

$$g(t) = \alpha(t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n)$$

con $n \geq 1$,$\alpha, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ y $\alpha \neq 0$, pues $g(t)$ no es constante. Entonces,

$$\alpha(x - \mu_1 e) \cdots (x - \mu_n e) \notin G_t(X)$$

y del Lema 6.2.18 concluimos que $x - \mu_i e \notin G_t(X)$ para alguna i. Por lo que $\mu_i \in \sigma_t(x)$ y además $p(\mu_i) = \mu$, por tanto, $\mu \in p(\sigma_t(x))$. $\square$

Capítulo 7

Tipos particulares de álgebras. Ejemplos

En este capítulo aplicaremos lo antes visto para estudiar ciertas álgebras y haremos ver con ejemplos que los conceptos de Q-álgebras y su generalizaciones son independientes y que hipótesis en resultados antes vistos no son superfluas.

7.1. Álgebras de funciones continuas

7.1.1. El álgebra normada $(C^*(T), \sigma)$ y el álgebra m-convexa $(C^*(T), \mathcal{S})$

En la sección T denota un espacio topológico de Hausdorff y $C^*(T)$ las funciones continuas y acotadas de T en $\mathbb{C}$, $C^*(T)$ es un álgebra con las operaciones puntuales. Dado $x \in T$, la transformación $\varphi_x : C^*(T) \to \mathbb{C}$; $\varphi_x(f) = f(x)$ es lineal, multiplicativa y no cero. Por lo que $\ker\varphi_x = \{f \in C^*(T) : \varphi_x(f) = 0\} = \{f \in C^*(T) : f(x) = 0\}$ es un ideal máximo de $C^*(T)$ (Lema 5.1.6). Observemos que si T es compacto, entonces $C^*(T) = C(T)$.

En $C^*(T)$ podemos definir dos topologías: la uniforme (σ o u), llamada también de la convergencia uniforme, dada por la norma $\|f\| = \sup_{x \in T} |f(x)|$ para $f \in C^*(T)$ y la puntual ($\mathcal{S}$) definida por las seminormas $\|f\|_x = |f(x)|$ para $x \in T$ y $f \in C^*(T)$, ésta es una topología m-convexa.

Teorema 7.1.1. *Sea K un espacio compacto. Un ideal $M \subset C(K)$ es máximo si y sólo si existe $x \in K$ tal que $M = M_x$, donde $M_x = \{f \in C(K) : f(x) = 0\}$.*

Demostración. Supongamos que M es un ideal máximo. Para cada $f \in M$ definimos $C_f = f^{-1}(\{0\})$. Claramente C_f es cerrado en K para cada $f \in M$, por tanto, $K \setminus C_f$ es un subconjunto abierto de K para cada $f \in M$. Consideremos ahora,

$$C = \bigcap_{f \in M} C_f.$$

Supongamos $C = \emptyset$, entonces

$$K = K \setminus C = K \setminus \bigcap_{f \in M} C_f = \bigcup_{f \in M} K \setminus C_f.$$

Por la compacidad de K existen $f_1, \ldots, f_n \in M$ tales que

$$K = \bigcup_{1 \leq i \leq n} K \setminus C_{f_i} = K \setminus \bigcap_{1 \leq i \leq n} C_{f_i},$$

lo que implica que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} C_{f_i} = \emptyset$. Por lo anterior, la función $g : T \to \mathbb{C}$ definida como $g = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$ es invertible, ya que g no se anula en K, y además g pertenece a M, lo que contradice que M es un ideal máximo. Por tanto, $C \neq \emptyset$; es decir, existe $x \in K$ tal que $f(x) = 0$ para cada $f \in M$, por lo que $M \subset M_x$, y de la maximalidad de M se sigue que $M = M_x$.

Inversamente, supongamos que existe $x \in K$ tal que $M = M_x$, entonces $M = \ker \varphi_x$ que ya vimos que es un ideal máximo. $\square$

Teorema 7.1.2. *Sea K un espacio compacto y Hausdorff. Entonces*

$$(\mathcal{M}(C(K), \sigma), \omega^*) = K.$$

Es decir, existe un homeomorfismo entre esos dos espacios

Demostración. Afirmamos que la función $\Phi(x) = \varphi_x$ para cada $x \in K$ es un homeomorfismo. Es claro que $\varphi_x \in \mathcal{M}(C(K), \sigma)$. Supongamos $x, y \in K$, con $x \neq y$, entonces, por ser K un espacio compacto y Hausdorff, existe $f \in C(K)$ tal que $f(x) \neq f(y)$, es decir, $\varphi_x(f) \neq \varphi_y(f)$. O sea, la función Φ es inyectiva.

Ahora, si $\varphi \in \mathcal{M}(C(K), \sigma)$, por el Lema 5.1.6 y el Teorema 7.1.1 existe $y \in K$ tal que $\ker(\varphi) = M_y$. Entonces, $\ker(\varphi_y) = \ker(\varphi)$ y por la Proposición 5.1.7 $\varphi_y = \varphi$. De esta manera, Φ es también sobre.

Dados $x \in K$, $f_1, ..., f_n \in C(K)$ y $\epsilon > 0$, existe una vecindad V de x en K tal que $y \in V$ implica que $|f_i(y) - f_i(x)| < \epsilon$ para $i = 1, ..., n$. O dicho de otra forma, $|\Phi(y)(f_i) - \Phi(x)(f_i)| < \epsilon$ para $i = 1, ..., n$, así, la función Φ es continua. Ya que es Φ es biyectiva, K es compacto y $(\mathcal{M}(C(K), \sigma), \omega^*)$ es Hausdorff, entonces es un homeomorfismo. $\square$

Cuando T es completamente regular y Hausdorff denotaremos por βT a la compactación de Stone-Čech de T. Recordemos que si $f \in C^*(T)$, entonces existe una única función $\tilde{f} \in C(\beta T)$ tal que $\tilde{f} \restriction_T = f$. Si $f, g \in C^*(T)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\widetilde{f+\lambda g} \restriction_T = f + \lambda g = \tilde{f} \restriction_T + \lambda \tilde{g} \restriction_T$$

$$\widetilde{fg} \restriction_T = fg = \tilde{f} \restriction_T \tilde{g} \restriction_T .$$

Por la unicidad de la extensión $\widetilde{f+\lambda g} = \tilde{f} + \lambda \tilde{g}$ y $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$.

Es decir, el operador $\tilde{}: C^*(T) \to C(\beta T)$ es lineal y multiplicativo.

Además,

$$\sup_{x \in \beta T} |\tilde{f}(x)| = \sup_{x \in T} |f(x)|$$

para cada $f \in C^*(T)$, por la densidad de T en βT.

Teorema 7.1.3. *Sea T completamente regular. Entonces*

$$\mathcal{M}(C^*(T), \sigma) = \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma).$$

Donde la igualdad significa que son espacios homeomorfos cuando en cada espacio se considera la topología w^*.

Demostración. Definimos

$$\Gamma : \mathcal{M}(C^*(T), \sigma) \to \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma)$$

como $\Gamma(\varphi)(\tilde{f}) = \varphi(\tilde{f} \restriction_T)$ para cada $\varphi \in \mathcal{M}(C^*(T), \sigma)$ y $\tilde{f} \in C(\beta T)$. Verifiquemos que

$$\Gamma(\varphi) \in \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma).$$

Es claro que $\Gamma(\varphi)$ es lineal multiplicativa y diferente de cero. Por la continuidad de φ existe $M > 0$ tal que $|\varphi(f)| \leq M \sup_{x \in T} |f(x)|$ para cada $f \in C^*(T)$. Si $\tilde{f} \in C(\beta T)$, entonces

$$|\Gamma(\varphi)(\tilde{f})| = |\varphi(\tilde{f}\,|_T)| \leq M \sup_{x \in T} |\tilde{f}(x)| = M \sup_{x \in \beta T} |\tilde{f}(x)|,$$

por lo que $\Gamma(\varphi)$ es continua, y así $\Gamma(\varphi) \in \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma)$.

Ahora, definimos

$$\Gamma^{-1} : \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma) \to \mathcal{M}(C^*(T), \sigma)$$

como $\Gamma^{-1}(\varphi)(f) = \varphi(\tilde{f})$ para cada $\varphi \in \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma)$, y $f \in C^*(T)$, donde $\tilde{f}$ es la extensión de f a βT.

Tenemos que $\Gamma^{-1}(\varphi)$ es lineal y multiplicativa por serlo el operador $\tilde{}$ y la funcional φ.

Si $f \in C^*(T)$, entonces existe $M > 0$ tal que

$$|\Gamma^{-1}(\varphi)(f)| = |\varphi(\tilde{f})| \leq M \sup_{x \in \beta T} |\tilde{f}(x)| = M \sup_{x \in T} |f(x)|,$$

por lo que $\Gamma^{-1}(\varphi)$ es continua, y así $\Gamma^{-1}(\varphi) \in \mathcal{M}(C(T), \sigma)$.

Es fácil comprobar que $\Gamma\Gamma^{-1} = Id_{\mathcal{M}(C(\beta T))}$ y $\Gamma^{-1}\Gamma = Id_{\mathcal{M}(C^*(T))}$; es decir, Γ es una biyección.

Como

$$\|\Gamma(\varphi)\|_{\tilde{f}} = |\Gamma(\varphi)(\tilde{f})| = |\varphi(\tilde{f}\,|_T)| = \|\varphi\|_{\tilde{f}\,|T}$$

si $\tilde{f} \in C(\beta T)$ y $\varphi \in \mathcal{M}(C^*(T), \sigma)$, entonces Γ es bicontinuo. $\square$

Proposición 7.1.4. *Sean T completamente regular y τ una topología en $C^*(T)$ tal que $A = (C^*(T), \tau)$ es una álgebra topológica bajo las operaciones puntuales y τ es más fuerte que la topología de la convergencia puntual $\mathcal{S}$ y más débil que la topología de la convergencia uniforme σ, entonces:*

(a) $\varphi_x \in \mathcal{M}(A)$ para todo $x \in T$ y la transformación $x \to \varphi_x$ define una inmersión

$$E : T \to \mathcal{M}(A).$$

(b) $\mathcal{M}^{\#}(A) = \mathcal{M}(C^*(T), \sigma)$, y la función $S : \beta T \to \mathcal{M}(C^*(T), \sigma)$ dada como $S(\overline{x})(f) = \tilde{f}(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in \beta T$ y $f \in C^*(T)$ es un homeomorfismo. Esto lo resumimos escribiendo

$$T \subset \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}^{\#}(A) = \beta T.$$

(c) la función de

$$S : (C^*(T), \sigma) \to (C^*(\mathcal{M}(A)), \sigma)$$

dada por la asociación $f \to \hat{\tilde{f}}$ es un isomorfismo topológico de álgebras.

Demostración. (a) Como $\mathcal{S} \subset \tau$, entonces la funcional lineal multiplicativa y no nula $\varphi_x : A \to \mathbb{C}$ es continua para cada $x \in T$. Además, la función E dada por la asociación $x \to \varphi_x$ de T en $\mathcal{M}(A)$ es inyectiva, ya que dados $x, y \in T$, con $x \neq y$, existe, por ser T un espacio completamente regular y Hausdorff, una función continua $f \in C^*(T)$ tal que $f(x) \neq f(y)$, es decir, $\varphi_x(f) \neq \varphi_y(f)$. La función E es continua, pues dados $x \in T$, $f_1, ..., f_n \in C(T)$ y $\epsilon > 0$, existe una vecindad V de x en T tal que $y \in V$ implica que $|f_i(y) - f_i(x)| < \epsilon$ para $i = 1, ..., n$. O dicho de otra forma,

$$|E(y)(f_i) - E(x)(f_i)| < \epsilon$$

para $i = 1, ..., n$. si $y \in V$. Finalmente, dados $x \in T$ una vecindad V de x en T, existe $f \in A$ tal que $f(x) = 0$ y $f(T \setminus V) = 1$. Entonces $|E(y)(f) - E(x)(f)| < 1$ implica que $y \in V$; o sea, $E^{-1} : E(T) \to T$ es continua.

(b) Se cumple que $\mathcal{M}^{\#}(C^*(T), \sigma) = \mathcal{M}(C^*(T), \sigma)$, por ser $(C^*(T), \sigma)$ un álgebra de Banach, y como

$$\mathcal{M}^{\#}(C^*(T), \sigma) = \mathcal{M}^{\#}(\overbrace{C^*(T), \tau}^{A}),$$

ya que esta propiedad no depende de la topología en $C^*(T)$. Finalmente, por el Teorema 7.1.3 y el Teorema 7.1.2 tenemos $\mathcal{M}(C^*(T), \sigma) = \mathcal{M}(C(\beta T), \sigma) = \beta T$. Los homeomorfismos construidos en esos resultado tienen a S como su composición.

(c) Por el apartado (b) tenemos que todo elemento de $\mathcal{M}(A)$ es de la forma $\varphi(f) = \varphi_{\overline{x}}\left(\tilde{f}\right) = \tilde{f}(\overline{x})$ para un único $\overline{x} \in \beta T$ y todo $f \in A$. Es fácil ver que S es un homomorfismo inyectivo. Para ver que es sobre tomemos $F \in C^*(\mathcal{M}(A))$ y definamos $f(x) = F(\varphi_x)$ para cada $x \in T$. Esta función pertenece a $C^*(T)$, pues para $x \in T$ y $\epsilon > 0$ existen $f_1, ..., f_n \in C^*(T)$ y $\delta > 0$ tales que, si

$$|\varphi_y(f_i) - \varphi_x(f_i)| < \delta$$

para $i = 1, ..., n$, entonces

$$|F(\varphi_y) - F(\varphi_x)| < \epsilon,$$

y existe una vecindad V de x en T para la que $|\varphi_y(f_i) - \varphi_x(f_i)| < \delta$ si $y \in V$. Es decir, $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ si $y \in V$.

Afirmamos que $\hat{\tilde{f}} = F$. Tenemos que $\hat{\tilde{f}}(\varphi_{\overline{x}}) = \tilde{f}(\overline{x})$ para todo $\varphi_{\overline{x}} \in \mathcal{M}(A)$. Existe una red (x_j) en T que converge a $\overline{x}$ en βT. Entonces, $\tilde{f}(\overline{x}) = \lim f(x_j) = \lim F\left(\varphi_{x_j}\right) = F(\varphi_{\overline{x}})$, donde la última igualdad se sigue del apartado (b). Queda probada nuestra afirmación.

La continuidad de S se tiene porque es lineal y se cumple que $\left\|\hat{\tilde{f}}\right\| \leq \|f\|$ para todo $f \in C^*(T)$. Y como $(C^*(T), \sigma)$, $(C^*(\mathcal{M}(A)), \sigma)$ son espacios vectoriales de Banach, S es lineal, continua y biyectiva, entonces por el teorema de la función abierta obtenemos que S^{-1} es continua. $\square$

Teorema 7.1.5. *Sean T completamente regular y Hausdorff y τ una topología en $C^*(T)$ tal que $A = (C^*(T), \tau)$ es una álgebra topológica bajo las operaciones puntuales* *y tal que τ es más fuerte que la topología de la convergencia puntual $\mathcal{S}$ y más débil que la topología de la convergencia uniforme σ, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(C^*(T), \tau)$ es una Q-álgebra.

(b) $(C^*(T), \tau)$ es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra.

(c) $(C^*(T), \tau)$ es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra.

(d) $\tau = \sigma$.

Demostración. Sea $A = (C^*(T), \tau)$. Como $f(x) = \varphi_x(f)$ para $x \in T$ y $f \in A$, tenemos que $f(T) \subset \sigma(f)$. Afirmamos que

$$\sigma(f) = \overline{f(T)}$$

para cada $f \in A$. Sea $\lambda \in \overline{f(T)}$ y supongamos que $\lambda \notin f(T)$, entonces para cada $M > 0$ existe $f(x) \in f(T)$ tal que

$$|\lambda - f(x)| < 1/M,$$

es decir, $|(\lambda - f(x))^{-1}| > M$, por lo que la función $(\lambda - f)^{-1}$ no es acotada en T y así, $\lambda \in \sigma(f)$.

Ahora, sea $\lambda \in \sigma(f)$, entonces se tienen dos casos, $\lambda = f(x)$ para algún $x \in T$ o $(\lambda - f)^{-1}$ no es acotada en T. Si $\lambda = f(x)$, para algún $x \in T$, obviamente $\lambda \in \overline{f(T)}$. Si $(\lambda - f)^{-1}$ no es acotada en T, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in T$ tal que $|(\lambda - f(x_n))^{-1}| > n$, por lo que

$$|\lambda - f(x_n)| < 1/n$$

para cada $n \geq 1$, es decir, $f(x_n) \to \lambda$; por tanto, $\lambda \in \overline{f(T)}$. Con lo cual queda probada la afirmación.

Como

$$f(T) \subset \left\{\tilde{f}(\bar{x}) : \bar{x} \in \beta T\right\} = \hat{f}(\mathcal{M}(A)),$$

entonces $\hat{f}(\mathcal{M}(A))$ es denso en $\sigma(f)$ para cada $f \in A$, así se tiene que A cumple la propiedad (m_1), la cual implica la propiedad (m_2). Por tanto, del Corolario 6.1.8 tenemos que $(a), (b)$ y (c) son equivalentes.

Si $\tau = \sigma$, entonces $(C^*(T), \tau)$ es un álgebra de Banach y por tanto una Q-álgebra. Esto es $(d) \Rightarrow (a)$.

Supongamos finalmente que se tiene el inciso (a) y probemos que sucede (d). Arriba vimos que en A se satisface (m_2) y entonces obtenemos del Corolario 5.4.4 que la transformada de Gelfand

$$\Psi : (C^*(T), \tau) \to (C^*(\mathcal{M}(A), \sigma))$$

es continua. Por esto y el apartado (c) de la Proposición 7.1.4 la composición

$$(C^*(T), \tau) \xrightarrow{\Psi} (C^*(\mathcal{M}(A), \sigma)) \xrightarrow{S^{-1}} (C^*(T), \sigma)$$

es continua y como ésta es la identidad, entonces $\sigma \subset \tau$. Por hipótesis $\tau \subset \sigma$, por tanto $\tau = \sigma$. $\square$

7.1.2. Un álgebra $C^*(T)$ que no es una Q-álgebra

Damos un ejemplo en que $C^*(T)$ no es una Q-álgebra. Sea $T = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Entonces $C^*(T) = \ell^\infty$. La topología estricta β en $C^*(T)$ es la generada por la familia de seminormas

$$\|x\|_y = \sup_{n \geq 1} |x_n y_n|$$

para $x = (x_i) \in \ell^\infty(\mathbb{C})$, $y = (y_i) \in c_0^+$, donde c_0^+ es el conjunto de las sucesiones reales convergentes a cero, no nulas, con cada uno de sus términos mayor o igual que cero; $(C^*(T), \beta)$ no es una Q-álgebra.

Es fácil ver que $(C^*(T), \beta)$ es un álgebra topológica. La topología β es más fuerte que la de la convergencia puntual $\mathcal{S}$ ya que las seminormas $\|x\|_{e_n}$ con $e_n = (\overbrace{0, \ldots 0, 1}^{n}, 0, ., \ldots)$ y $n \geq 1$ generan la topología $\mathcal{S}$.

Veremos que la topología β es estrictamente más débil que la uniforme σ. Tenemos que $\|x\|_y \leq \|y\|_\infty \|x\|_\infty$ si $x \in \ell^\infty$ y $y \in c_0^+$. Por tanto, β es más débil que σ. Para ver que esto se da de manera estricta, probaremos que la bola unitaria abierta $B_1(0)$ en ℓ^∞ no es vecindad de 0 en la topología β. Sea V una vecindad básica de 0 en la topología β. Entonces existen $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)} \in c_0^+$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$V = \left\{ z \in \ell^\infty : \|z\|_{y^j} < \epsilon, \text{ para } j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Afirmamos que $V \nsubseteq B_1(0)$. Sea $N > 1$ tal que $|y_n^{(j)}| < \epsilon/2$ para $n \geq N$ y $j = 1, \ldots, m$ y hagamos

$$x = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{N-1}, 1, 1, \ldots).$$

Entonces $x \in V$, porque

$$\|x\|_{y^j} = \sup_{n\geq 1} |x_n y_n^{(j)}| = \sup_{n\geq N} |y_n^{(j)}| < \epsilon$$

para $j = 1, \ldots, m$. Sin embargo, $\sup_{n\geq 1} |x_n| = 1$, $x \notin B_1(0)$.

Entonces del Teorema 7.1.5, concluimos que (ℓ^∞, β) no es una Q-álgebra. De hecho, (ℓ^∞, β) tienen la siguiente propiedad, la cual es radicalmente opuesta a la de ser Q-álgebra:

El conjunto de elementos no invertibles de ℓ^∞ es denso en (ℓ^∞, β).

Primero probamos que cualquier vecindad de la identidad contiene un elemento no invertible. Sea V una vecindad básica de 0 en la topología β. Entonces existen $\epsilon > 0$, y $a^{(1)} = (a_i^{(1)})_{i=1}^\infty, \ldots, a^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i=1}^\infty$ en c_0^+ tales que

$$V = \{z \in \ell^\infty : \|z\|_{a^j} < \epsilon, \text{ para } \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Definimos $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$ como $x_i = 1$ si existe $1 \leq k \leq n$ tal que $|a_i^k| \geq \epsilon/2$ y $x_i = 0$ en otro caso. Como $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in c_0^+$, existe $N > 0$ tal que $x_N = 0$, entonces $x \in \ell^\infty \setminus G(\ell^\infty)$. Además,

$$\|x - 1\|_{a^k} = \sup_{n\geq 1} |(x_n - 1)a_n^{(k)}| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

esto quiere decir que $x \in e + V$.

Ahora sean $y \in \ell^\infty$invertible y V una vecindad de 0. Existen una vecindad W de 0 y $z \in W$ tales que $yW \subset V$ y $x = e + z$ no es invertible. Entonces, $yx = y + yz$ es no invertible y pertenece a $y + V$.

7.2. Álgebras matriciales

Recordamos que un álgebra localmente convexa, metrizable y completa es llamada una B_0-álgebra.

Definición 7.2.1. Ya hemos visto ejemplos de B_0-álgebras: el álgebra de sucesiones s, y las de funciones L^ω y $\mathcal{E}$.

Toda una familia de B_0-álgebras es la formada por las álgebras matriciales que ahora presentamos.

Sea $(a_{p,n})$, $p \geq 1$, $n \geq 0$, una matriz infinita de números reales positivos la cual satisface las siguientes dos condiciones:

1. $a_{p,n} \leq a_{p+1,n}$
2. $a_{p,n+m} \leq a_{p+1,n}a_{p+1,m}$

para cada $p \geq 1$, y $n \geq 0$.

En el siguiente conjunto de series formales de potencias con coeficientes en $\mathbb{C}$

$$A(a_{p,n}) = \left\{ x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| a_{p,n} \leq \infty \text{ para todo } p \geq 1 \right\}$$

las operaciones de álgebra usuales para las series de potencias son cerradas. En efecto, la suma y el producto por un escalar están dadas como

$$x + y = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) z^n, \qquad \lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda x_n z^n,$$

y la multiplicación (de Cauchy) como

$$x \cdot y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n| a_{p,n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| a_{p,n} + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| a_{p,n} < \infty \tag{7.2.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda x_n| a_{p,n} = |\lambda| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| a_{p,n} < \infty \tag{7.2.2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| a_{p,n} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{n-k}| \right) (a_{p+1,k} a_{p+1,n-k}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k| a_{p+1,k} \cdot |y_{n-k}| a_{p+1,n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| a_{p+1,n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| a_{p+1,n} < \infty. \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Por tanto, $A(a_{p,n})$ es un álgebra compleja conmutativa y con idéntico.

Definimos

$$\|x\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| a_{p,n}$$

para $p = 1, 2, \ldots$ y $x \in A(a_{p,n})$.

De que $\|\cdot\|_p$ es no negativa, de las desigualdades (7.2.1) y (7.2.2) y de que sólo se anula en $x = 0$ se sigue que $\|\cdot\|_p$ es una norma. Además por (7.2.3)

$$\|xy\|_p \leq \|x\|_{p+1} \|y\|_{p+1}$$

para cada $x, y \in A(a_{p,n})$.

Entonces $A(a_{p,n})$ con la topología dada por las seminormas $\|\cdot\|_p$ es un álgebra localmente convexa que es llamada *el álgebra matricial asociada a la matriz* $(a_{p,n})$.

Por la propiedad 1. de $(a_{p,n})$, tenemos que

$$\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p+1}$$

La topología generada por la métrica definida en $A(a_{p,n})$ como

$$d(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\|x - y\|_p}{\|x - y\|_p + 1}$$

es equivalente a la generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_p\}_{p=1}^{\infty}$. Por tanto, si $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $A(a_{p,n})$ y $x_0 \in A(a_{p,n})$, entonces:

$$\lim_{i \to \infty} d(x_i, x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i \to \infty} \|x_i - x_0\|_p = 0 \text{ para todo } p \geq 1 \tag{7.2.4}$$

y

$$\lim_{i,j \to \infty} d(x_i, x_j) = 0 \Leftrightarrow \lim_{i,j \to \infty} \|x_i - x_j\|_p = 0 \text{ para todo } p \geq 1 \tag{7.2.5}$$

Proposición 7.2.2. *$A(a_{p,n})$ es una B_o-álgebra.*

Demostración. Solo resta probar que es completa. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $A(a_{p,n})$, donde cada $x_i = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(i)} z^n$. Por (7.2.5), dados $p \geq 1$, $m \geq 0$ y $\epsilon > 0$ existe $N_m > 0$ tal que

$$\|x_i - x_j\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}| a_{p,n} < \epsilon a_{p,m}$$

si $i, j \geq N_m$, por lo que $|x_m^{(i)} - x_m^j| a_{p,m} < \epsilon a_{p,m}$, o sea

$$|x_m^{(i)} - x_m^j| < \epsilon$$

si $i, j \geq N_m$. Esto implica que la sucesión $(x_m^{(i)})_{i=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Por tanto, existe $x_m^{(0)} \in \mathbb{C}$ tal que $x_m^{(i)} \to x_m^{(0)}$ cuando $i \to \infty$. Definimos $x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(0)} z^n$.

Sean $p \geq 1$ y $\epsilon > 0$, existe $K_p > 0$ tal que tal que

$$\sum_{n=0}^{m} |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}| a_{p,n} \leq \|x_i - x_j\|_p < \epsilon$$

si $i, j \geq K_p$ y para todo $m \geq 1$. Al fijar $i \geq K_p$ y tomar límites, primero cuando $j \to \infty$ y después cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(i)} - x_n^{(0)}| a_{p,n} \leq \epsilon. \tag{7.2.6}$$

De esto y de que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(i)}| a_{p,n} < \infty$ para cualquier i se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^{(0)}| a_{p,n} < \infty.$$

Al ser $p \geq 1$ arbitraria se tiene que $x^{(0)} \in A(a_{p,n})$. A partir de (7.2.6) tenemos que $\lim_{i\to\infty} \|x_i - x_0\|_p = 0$ para cada $p \geq 1$. Por (7.2.4) concluimos que

$$\lim_{i\to\infty} d(x_i, x_0) = 0.$$

Con lo que queda probado que prueba que $(A(a_{p,n}), d)$ es completo. $\square$

Observemos que la prueba anterior nos sirve para ver que $(A(a_{p,n}), \|x\|_p)$ es un álgebra de Banach para cada $p \geq 1$.

Si $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ pertenece a $A(a_{p,n})$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ converge a x.

Definición 7.2.3. En cualquier álgebra matricial $A(a_{p,n})$ se definen los siguientes reales extendidos:

$$\begin{gathered} r_1(z) = \inf\{0 < q \leq \infty : \text{ existe una sucesión } (\alpha_n) \text{ en } \mathbb{C} \\ \text{tal que el radio de convergencia de} \\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \text{ es } q \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \text{ converge en } A(a_{p,n})\} \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered}\tilde{r}_1(z) = \text{ínf}\{0 < q \leq \infty : \text{ existe una sucesión } (\alpha_n) \text{ en } \mathbb{C} \\ \text{tal que el radio de convergencia de} \\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \text{ es } q \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \text{ converge absolutamente en } A(a_{p,n})\}.\end{gathered}$$

Lema 7.2.4. *Sea* $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ *un espacio localmente convexo, metrizable y completo. Si* $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_\alpha < \infty$ *para todo* $\alpha \in \Lambda$*, entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge en* X*.*

Demostración. Veamos que las sumas parciales $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$, $k \geq 1$ forman una sucesión de Cauchy en X y por tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es convergente en X. Sean $\alpha \in \Lambda$, $\epsilon > 0$, como $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_\alpha < \infty$, entonces

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|x_n\|_\alpha \to 0, \text{ cuando } k \to \infty,$$

por lo que existe $N > 0$ tal que para todo $k \geq N$ y $m \geq k$ se cumple que

$$\sum_{n=k}^{m} \|x_n\|_\alpha \leq \sum_{n=k}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon,$$

lo que implica que

$$\|s_m - s_k\|_\alpha = \|\sum_{n=k}^{m} x_n\|_\alpha \leq \sum_{n=k}^{m} \|x_n\|_\alpha < \epsilon,$$

es decir, (s_k) es una sucesión de Cauchy en X y por ser completo se tiene el resultado. □

Proposición 7.2.5. *Sea* $r = \sup_{p\geq 1}(\liminf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|z^n\|_p})$*. Se cumple que*

$$\tilde{r}_1(z) = r_1(z) = r.$$

Demostración. Del Lema 7.2.4 obtenemos que $\tilde{r}_1(z) \geq r_1(z)$. Probemos primero que $r_1(z) \geq r$. Esto es obvio si $r_1(z) = \infty$. Supongamos que $r_1(z) < \infty$ y sea q un real positivo para el que existe una sucesión (β_n) en $\mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$ y el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \lambda^n$ es q, esto es,

$$1/q = \limsup_{n} \sqrt[n]{|\beta_n|}.$$

Entonces, $1 \geq \limsup_n \sqrt[n]{\|\beta_n z^n\|_p}$, para $p = 1, 2, \ldots$, ya que de otra manera $(\beta_n z^n)$ no converge a 0 en $A(a_{p,n})$ y por consiguiente, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ no converge en $A(a_{p,n})$.

Por otra parte, existe una subsucesión (β_{n_k}) de (β_n) tal que $\sqrt[n_k]{\beta_{n_k}} \to (1/q)$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &\geq \limsup_n \sqrt[n]{\|\beta_n z^n\|_p} \geq \limsup_k \sqrt[n_k]{\|\beta_{n_k} z^{n_k}\|_p} \\ &= (1/q) \limsup_k \sqrt[n_k]{\|z^{n_k}\|_p} \geq (1/q) \liminf_k \sqrt[n_k]{\|z^{n_k}\|_p} \\ &\geq (1/q) \liminf_n \sqrt[n]{\|z^n\|_p} \end{aligned}$$

para $p = 1, 2, \ldots$ Por lo que $q \geq \liminf_n \sqrt[n]{\|z^n\|_p}$ para todo $p = 1, 2, \ldots$ Entonces $q \geq r$ y por lo tanto, $r_1(z) \geq r$.

Ahora probaremos que $r \geq \tilde{r}_1(z)$. Es obvio si $r = \infty$. Supongamos que $r < \infty$. Para cada $p = 1, 2, \ldots$ definimos

$$R_p = \liminf_n \sqrt[n]{\|z^n\|_p}.$$

Como $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p+1}$, entonces $(R_p)_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente que converge a r. Existe una sucesión estrictamente creciente (p_k) de naturales tal que para cada entero positivo k se cumple que

$$r - \frac{1}{k} < R_{p_k} \leq r,$$

lo que implica que existe una sucesión creciente de naturales (n_k) tal que

$$r - \frac{1}{k} < \sqrt[n_k]{\|z^{n_k}\|_{p_k}} < r + \frac{1}{k}. \tag{7.2.7}$$

Por consiguiente, las sucesiones crecientes de naturales $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ son tales que

$$\left(\sqrt[n_k]{\|z^{n_k}\|_{p_k}} \right)_{k=1}^{\infty}$$

converge a r. De donde, el radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$, con $\alpha_n = \|z^{n_k}\|_{p_k}$ si $n = n_k$ y $\alpha_n = 0$ en otro caso, es $\frac{1}{r}$.

Sea $0 < \beta < \frac{1}{r}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta^n = \sum_{k=1}^{\infty} \|z^{n_k}\|_{p_k} \beta^{n_k} < \infty$.

Como (p_k) y $(\|\cdot\|_p)$ son sucesiones crecientes, entonces dado p, existe k_0 tal que $p \leq p_{k_0} \leq p_k$ si $k \geq k_0$, así

$$\|z^{n_k}\|_p \leq \|z^{n_k}\|_{p_k}$$

para $k \geq k_0$, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|z^{n_k}\|_p \beta^{n_k} &< \sum_{k=1}^{k_0} \|z^{n_k}\|_p \beta^{n_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|z^{n_k}\|_p \beta^{n_k} \\ &< \sum_{k=1}^{k_0} \|z^{n_k}\|_p \beta^{n_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|z^{n_k}\|_{p_k} \beta^{n_k} < \infty.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta^n = \sum_{k=1}^{\infty} \|z^{n_k}\|_p \beta^{n_k}$$

converge para todo $p = 1, 2, \ldots$

Definimos $\beta_n = \beta^{n_k}$ si $n = n_k$ y$\beta_n = 0$ en otro caso. El radio de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \lambda^n$ es es $(\frac{1}{\beta})$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \|z^n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta^n$$

converge, entonces $(\frac{1}{\beta}) \geq \tilde{r}_1(z)$. Al hacer tender β a $\frac{1}{r}$, obtenemos que $r \geq \tilde{r}_1(z)$. Así, $\tilde{r}_1(z) \geq r_1(z) \geq r \geq \tilde{r}_1(z)$. □

Definición 7.2.6. Para un álgebra topológica X, con base topológica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ definimos el siguiente espectro para el generador z,

$$\sigma_1(z) = \left\{ \lambda : \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \lambda^n \text{ converge en } \mathbb{C} \text{ para todo } x \in X \right\},$$

donde $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) z^n$.

La sucesión $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base topológica de $A(a_{p,n})$. Para cualquier funcional lineal multiplicativa y continua f en $A(a_{p,n})$, se cumple que

$$f(x) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) f(z)^n, \tag{7.2.8}$$

El recíproco de esta afirmación está en el siguiente resultado de R. Arsove [8].

Teorema de Arsove. *Sea* $\{z_n : n \geq 1\}$ *una base en un F- espacio (es decir, localmente convexo, metrizable y completo)* U. *Si* $\{w_n : n \geq 1\}$ *es un subconjunto de un* $F-$*espacio* V *(por ejemplo* $\mathbb{C}$*) para la cual se cumple que; para toda sucesión de escalares* $\{a_n\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k$ *es convergente siempre que* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ *converge. Entonces existe una única transformación lineal continua* $T : U \to V$ *tal que* $T(z_n) = w_n$ *para cada* n.

Por tanto, toda funcional lineal multiplicativa, continua y distinta de 0 en $A(a_{p,n})$ tiene la forma

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\,\lambda^n, \tag{7.2.9}$$

para un $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, donde $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\, z^n$ en $A(a_{p,n})$.

Lema 7.2.7. *En* $A(a_{p,n})$ *se cumple que*

$$\sigma_1(z) = \sigma_{\mathcal{M}}(z)$$

Demostración. Si $f \in \mathcal{M}(A(a_{p,n}))$, claramente $f(z) \in \sigma_1(z)$ por 7.2.8. Si $\lambda \in \sigma_1(z)$, consideramos la funcional $f_\lambda : A(a_{p,n}) \to \mathbb{C}$ definida como

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n,$$

para cada $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) z^n$ en $A(a_{p,n})$. La funcional f_λ está bien definida y es un homomorfismo puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n$ converge para todo $x \in A(a_{p,n})$, además de que $\{z^n\}$ es una base de $A(a_{p,n})$ y la convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\lambda^n$ y su producto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(xy)\lambda^n$, donde

$$\alpha_n(xy) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_n(x)\alpha_{n-k}(y),$$

implica que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\lambda^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\lambda^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(xy)\lambda^n.$$

La continuidad de f_λ se tiene por el Teorema de R. Arsove, ya que f_λ satisface que $f_\lambda(z^n) = \lambda^n$. Así, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{M}}(z)$. $\square$

Proposición 7.2.8. *En $A(a_{p,n})$, se tiene que*

$$D_r(0) \subset \sigma_{\mathcal{M}}(z) \subset \overline{D_r(0)},$$

donde $D_r(0)$ es el disco abierto en $\mathbb{C}$ con centro en 0 y radio

$$r = \sup_{p\geq 1}(\liminf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|z^n\|_p}) = \sup_{p\geq 1}(\liminf_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_{p,n}}).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{M}}(z)$, por el Lema 7.2.7 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_1(z)$, por lo que existe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n \in A(a_{p,n})$$

tal que $\sum_{n=0}^{\infty} y_n \lambda^n$ no converge en $\mathbb{C}$. Sea r_y el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \lambda^n,$$

entonces $r_y \leq |\lambda|$. Además, por la definición de $r_1(z)$ (Definición 7.2.3), tenemos que $r_1(z) \leq r_y$, y por la Proposición 7.2.5 $r \leq |\lambda|$. Por lo tanto $\lambda \notin D_r(0)$.

Ahora, sea $f(z) \in \sigma_{\mathcal{M}}(z)$, supongamos que $|f(z)| > r = r_1(z)$, entonces existe $0 < q \leq \infty$ tal que $r < q < |f(z)|$ y q es el radio de convergencia de una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $A(a_{p,n})$.

Tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f(z)^n = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) < \infty$$

por estar f en $\mathcal{M}\left(A(a_{p,n})\right)$, pero $|f(z)| > q$ lo que contradice que q es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$. Por lo tanto $|f(z)| \leq r$, esto es $\sigma_{\mathcal{M}}(z) \subset \overline{D_r(0)}$. □

Proposición 7.2.9. *En $A(a_{p,n})$ se cumple que*

$$D_R(0) \subset \sigma(z) \subset \overline{D_R(0)},$$

donde $D_R(0)$ es el disco abierto en $\mathbb{C}$ con centro en 0 y radio

$$R = \sup_{p\geq 1}(\limsup_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|z^n\|_p}) = \sup_{p\geq 1}(\limsup_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_{p,n}}).$$

Demostración. Sea $|\lambda| > R \geq 0$, entonces $|\lambda| > \operatorname{lím\,sup}_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|z^n\|_p}$ para todo $p \geq 1$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 1 &= |\lambda| \lim_{n\to\infty} |\lambda|^{-1-\frac{1}{n}} \\ &> \limsup_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|z^n\|_p} \lim_{n\to\infty} |\lambda|^{\frac{-n-1}{n}} \\ &\geq \limsup_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|z^n/\lambda^{n+1}\|_p} \end{aligned}$$

para todo $p \geq 1$. Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \|z^n/\lambda^{n+1}\|_p < \infty$ para todo $p \geq 1$.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\lambda^{n+1}$$

converge en $A(a_{p,n})$, por el Lema 7.2.4. Además

$$(z-\lambda e)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\lambda^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}/\lambda^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\lambda^n = -e, \tag{7.2.10}$$

lo cual implica que $z - \lambda e \in G(A(a_{p,n}))$, es decir, $\lambda \notin \sigma(z)$. Por lo tanto, $\sigma(z) \subset \overline{D_R(0)}$.

Ahora, si $R = 0$, $D_R(0) \subset \sigma(z)$, ya que $z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \neq e$ para cualquier sucesión compleja (a_n) ,debido a la unicidad de la representación. Cuando $R > 0$, dada $|\lambda| < R$ existe $p \geq 1$ tal que $|\lambda| < \operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{\|z^n\|_p}$. Supongamos que $\lambda \notin \sigma(z)$, entonces

$$(z-\lambda e)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

para una única sucesión compleja (α_n); de donde,

$$\begin{aligned} e &= (z-\lambda e)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\alpha_n z^n \\ &= -\lambda\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n-1} - \lambda\alpha_n z^n) \end{aligned}$$

y por la unicidad de la representación se tiene que $\alpha_0 = -\lambda^{-1}$ y $\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{\lambda}$ si $n \geq 1$. Así,

$$(z - \lambda e)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n / \lambda^{n+1}$$

Sin embargo, de que $|\lambda| < \limsup \sqrt[n]{\|z^n\|_p}$, obtenemos $1 < \limsup \sqrt[n]{\|z^n/\lambda^{n+1}\|_p}$, de modo similar a como lo hicimos antes en la dirección opuesta. Entonces $z^n/\lambda^{n+1} \not\to 0$, lo que contradice la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\lambda^{n+1}$. Por tanto, $\lambda \in \sigma(z)$, y así $D_R(0) \subset \sigma(z)$. $\square$

7.2.1. Ejemplo de una B_0-álgebra conmutativa que es $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra, pero no Q-álgebra.

En el apéndice se prueba el siguiente resultado

Lema 7.2.10. *Existe una matriz $(b_{p,n})$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$b_{p,n} \leq b_{p+1,n} \tag{7.2.11}$$

$$b_{p,n+m} \leq b_{p+1,n} b_{p+1,m} \tag{7.2.12}$$

$$b_{p,n} \leq b_{p,n+1} \tag{7.2.13}$$

$$b_{p,0} = 1 \tag{7.2.14}$$

$$\liminf_{n \geq 1} \sqrt[n]{b_{p,n}} = 1, \quad p = 1, 2, \dots \tag{7.2.15}$$

$$\limsup_{n \geq 1} \sqrt[n]{b_{p,n}} = \infty, \quad p = 1, 2, \dots \tag{7.2.16}$$

para $p = 1, 2, \dots$ y $n = 0, 1, \dots$

Mostraremos que la B_0- álgebra $A(b_{p,n})$ es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra, pero no es Q-álgebra.

Para el álgebra $A(b_{p,n})$ tenemos que

$$r = 1 \;\text{ y }\; R = \infty, \tag{7.2.17}$$

ya que

$$r = \sup_{p \geq 1} \left(\liminf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|z^n\|_p} \right) = \sup_{p \geq 1} \left(\liminf_{n \geq 1} \sqrt[n]{b_{p,n}} \right)$$

y

$$R = \sup_{p\geq 1}\left(\text{lím sup}_{n\geq 1}\sqrt[n]{\|z^n\|_p}\right) = \sup_{p\geq 1}\left(\text{lím sup}_{n\geq 1}\sqrt[n]{b_{p,n}}\right).$$

Observemos que

$$b_{p,n} \geq 1 \tag{7.2.18}$$

para $p = 1, 2, \ldots$ y $n = 0, 1, \ldots$.

Por la Proposición 7.2.8 tenemos que toda funcional lineal multiplicativa y continua en $A(b_{p,n})$ es de la forma $f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\lambda^n$, con $|\lambda|\,(= |f_\lambda(z)|) \leq 1$, si $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$. De hecho, para cualquier $|\lambda| < 1$ se tiene, por esa misma proposición, que $f_\lambda \in \mathcal{M}\,(A(b_{p,n}))$ es una funcional lineal multiplicativa no cero y continua. Si $|\lambda| = 1$, entonces

$$|f_\lambda(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|x_n| b_{p,n} = \|x\|_p, \tag{7.2.19}$$

para todo $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ y $p = 1, 2, \ldots$ Por tanto, $f_\lambda \in \mathcal{M}\,(A(b_{p,n}))$. Lo que implica que $\sigma_{\mathcal{M}}(x) = \{f_\lambda(x) : |\lambda| \leq 1\}$ para todo $x \in A(b_{p,n})$.

Para cada $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ en $\in A(b_{p,n})$ definimos la función

$$\phi_x : \overline{D_1(0)} \to \mathbb{C}$$

como $\phi_x(\lambda) = f_\lambda(x)$. La función ϕ_x es continua: supongamos que $\lambda_0 \in \overline{D_1(0)}$ y $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\overline{D_1(0)}$ tal que $\lambda_m \to \lambda_0$, como $|x_n\lambda_m^n| \leq |x_n|$ para todo $m \geq 1$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|x_n| b_{p,n} < \infty,$$

entonces por el teorema de Tannery se sigue que

$$\lim_{m\to\infty}\phi_x(\lambda_m) = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_n\lambda_m^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty} x_n\lambda_m^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\lambda_0^n = \phi_x(\lambda_0).$$

Por tanto, $\phi_x(\overline{D_1(0)}) = \{f_\lambda(x) : |\lambda| \leq 1\} = \sigma_{\mathcal{M}}(x)$ es compacto para cada $x \in A(b_{p,n})$.

Veamos que $A(b_{p,n})$ es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. Sea $V=\{x\in A(b_{p,n}):\|x-e\|_1<1/2\}$, V es una vecindad de la identidad. Si $x\in V$, $|\lambda|\leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} ||f_\lambda(e)|-|f_\lambda(x)|| &= \left|e-x_0+\sum_{n=1}^{\infty}x_n\lambda^n\right| \\ &\leq |e-x_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|b_{1,n} \\ &= \|e-x\|_1<\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Puesto que $f_\lambda(e)=1$, entonces $1/2<|f_\lambda(x)|$ para todo $\lambda\in\overline{D_1(0)}$, es decir, $0\notin\sigma_{\mathcal{M}}(x)$ para cada $x\in V$. Por lo tanto $V\subset G_{\mathcal{M}}(A(b_{p,n}))$ y $A(b_{p,n})$ es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. Sin embargo, $A(b_{p,n})$ no es Q-álgebra dado que, de la Proposición 7.2.9 y (7.2.17), $\sigma(z)$ no es acotado.

7.3. El operador multiplicación

Si a es un elemento invertible de un álgebra topológica X, entonces el operador lineal

$$L_a:X\to X;\ x\mapsto ax\ \ (R_a:X\to X;\ x\mapsto xa)$$

multiplicación por a por la izquierda (derecha), es un isomorfismo topológico. Sin embargo, que un elemento $a\in X$ sea topológicamente invertible no es una condición suficiente para que L_a (R_a) sea un isomorfismo topológico sobre su imagen. Hay la observación correspondiente con relación a la $\mathcal{M}$-invertibilidad.

Cuando X es conmutativa, simplemente hablaremos del operador multiplicación por a y lo denotamos como

$$m_a:X\to X;\ x\mapsto ax.$$

Con ejemplos haremos ver que $m_a:X\to m_a(X)$ es en ocasiones homeomorfismo sobre su imagen y otras no, para elementos a topológicamente invertibles ($\mathcal{M}$-invertibles), pero no invertibles.

7.3.1. Ejemplo en que $m_a:X\to m_a(X)$, con $a\in G_t(X)\setminus G(X)$, es un homeomorfismo sobre su imagen

Consideremos el álgebra conmutativa $C^*(0,1)$ de funciones complejas continuas y acotadas en el intervalo $(0,1)$, con la topología dada por la convergencia puntual

$(C^*(0,1), \mathcal{S})$; es decir la topología S está definida por las seminormas $\|f\|_x = |f(x)|$ para $x \in X$ y $f \in C^*(0,1)$.

La función $I(x) = x$ es un elemento de $C^*(0,1)$ no invertible y es topológicamente invertible, ya que si para cada $n \geq 1$ definimos las funciones $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{cases}.$$

Entonces, $f_n I = I f_n$ convergen puntualmente a la función constante 1 en $(0,1)$.

En este caso el operador multiplicación $m_I : \mathcal{C}^*(0,1) \to \mathcal{C}^*(0,1)$ es continuo puesto que

$$\|If\|_x = |xf(x)| = |x||f(x)| \leq |f(x)| = \|f\|_x$$

para todo $x \in (0,1)$ y $f \in \mathcal{C}^*(0,1)$. La inyectividad se tiene porque si $f, g \in \mathcal{C}^*(0,1)$ y $xf(x) = xg(x)$ con $x \in (0,1)$, entonces $f(x) = g(x)$, es decir, $f = g$. Además la función inversa $m_I^{-1} : m_I(\mathcal{C}^*(0,1)) \to \mathcal{C}^*(0,1)$ también es continua, ya que

$$\|f\|_x = |f(x)| = \frac{1}{x}|xf(x)| = \frac{1}{x}\|If\|_x$$

para cada $x \in X$ y todo $f \in \mathcal{C}^*(0,1)$. Por tanto, $m_I : \mathcal{C}^*(0,1) \to \mathcal{C}^*(0,1)$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

7.3.2. Ejemplo en que $m_a : X \to m_a(X)$, con $a \in G_t(X) \setminus G(X)$, no es un homeomorfismo sobre su imagen

Consideremos el álgebra conmutativa ℓ^∞ con la topología estricta β (Subsección (7.1.2)). Sea $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_y : y \in c_0^+\}$ la familia de seminormas que define dicha topología. En esta álgebra el elemento

$$a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \in \ell^\infty$$

no es invertible pero, como veremos ahora es topológicamente invertible. Se cumple que

$$aa_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$$

para los elementos de la forma $a_n = (1, 2, \ldots, n, 0, \ldots) \in \ell^\infty$, por lo que $aa_n - 1 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, -1, -1, \ldots)$ y

$$\|aa_n - 1\|_y = \sup_{i>n} |-y_i|$$

si $y = (y_i) \in c_0^+$. De manera que $aa_n \to 1$, cuando $n \to \infty$.

El operador $m_a : \ell^\infty \to \ell^\infty$ es continuo porque el producto es continuo en (ℓ^∞, β) y es inyectivo por que no hay divisores de 0.

La función inversa $m_a^{-1} : m_a(\ell^\infty) \to \ell^\infty;\ ax \to x$ no es continua. Observemos que $a \in c_0^+$. Veremos que dados $M > 0,\ y_1, \ldots, y_k \in c_0^+$, existe un elemento $x = (x_i) \in \ell^\infty$ tal que

$$\|x\|_a > M \max(\|ax\|_{y_1}, \ldots, \|ax\|_{y_k}).$$

Sea $N > 0$ tal que $|My_i^{(j)}| < 1/2$ para todo $i \geq N$ y $1 \leq j \leq k$ donde $y_j = (y_i^{(j)})$ para cada j. Definimos

$$x_i = \begin{cases} (\max_{1\leq j\leq k}(My_i^{(j)}) + 1)^{-1} & \text{si } 1 \leq i < N \\ 2N & i = N \\ 0 & i \geq N. \end{cases}$$

Es claro que

$$\begin{aligned} \max M|y_i^{(j)} i^{-1} x_i| &= \max |My_i^{(j)} (\max_{1\leq j\leq k}(My_i^{(j)}) + 1)^{-1} i^{-1}| \\ &\leq \max |i^{-1}| = 1 \end{aligned}$$

si $1 \leq i < N$ y $1 \leq j \leq k$, y

$$M|y_N^{(j)} N^{-1} x_N| = |2My_N^{(j)}| < 1,$$

por lo que $M \max(\|ax\|_{y_1}, \ldots, \|ax\|_{y_k}) \leq 1$, pero por otro lado

$$|a_N x_N| = |N^{-1}(2N)| = 2,$$

lo que que $\|x\|_a = \sup_{i\geq 1} |i^{-1} x_i| \geq 2$, de donde

$$\|x\|_a > M \max(\|ax\|_{y_1}, \ldots, \|ax\|_{y_k}).$$

Por tanto, m_a no es un isomorfismo topológico sobre su imagen.

En los ejemplos anteriores tenemos álgebras topológicas X y Y y elementos $x \in G_t(X) \setminus G(X)$ y $, y \in G_t(Y) \setminus G(Y)$ tales que m_x es un homeomorfismo sobre su imagen, mientras que m_y no lo es. Como siempre $G_t(Z) \subset G_{\mathcal{M}}(Z)$ para toda álgebra topológica Z, entonces existen $x \in G_{\mathcal{M}}(X) \setminus G(X)$, $y \in G_{\mathcal{M}}(Y) \setminus G(Y)$ tales que L_x es un homeomorfismo sobre su imagen, mientras que L_y no.

7.4. Un álgebra m-convexa conmutativa que no tiene la propiedad (m)

Sea $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de sucesiones complejas acotadas con la norma del supremo. Tomemos el siguiente subconjunto de $(\ell^\infty)^*$,

$$\Phi = \{\phi_n : n \geq 1\},$$

donde $\phi_n : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ es la evaluación en la n-ésima entrada de cada $(x_i) \in \ell^\infty$; o sea, $\phi_n((x_i)) = x_n$.

Como cada ϕ_n es una funcional multiplicativa, entonces $(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi))$ es un álgebra m-convexa, donde $\sigma(\ell^\infty, \Phi)$ es la topología débil dada por las seminormas $\|(x_i)\|_{\phi_n} = |\phi_n((x_i))| = |x_n|$. O sea, $\sigma(\ell^\infty, \Phi)$ es la topología de la convergencia puntual en ℓ^∞.

Afirmamos que el álgebra m-convexa $X = (\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi))$ tiene las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{M}(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi)) = \Phi$

(b) X no satisface la propiedad (m).

(c) X no es una Q-álgebra.

(d) *$\sigma(\ell^\infty, \Phi) \subsetneq u$; donde u es la topología uniforme en ℓ^∞.*

(e) $\sigma(\ell^\infty, \Phi) \subset \beta$, donde β es la topología estricta definida en la Subsección 7.1.2.

(f) $G(X) \subsetneq G_{\mathcal{M}}(X)$ y $G(X) \subsetneq G_t(X)$.

(g) El operador multiplicación por $m_{x_0} : X \to m_{x_0}(X)$, con $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, es un isomorfismo topológico sobre su imagen. Esto contrasta con lo probado antes cuando en ℓ^∞se considera la topología estricta.

(h) $\Psi : X \to C_u(\mathcal{M}(X))$ no es continua. Sin embargo, si consideramos a $C(\mathcal{M}(X))$ con la topología compacto-abierto, entonces Ψ sí es continua.

Pruebas de las afirmaciones.

(a) Tenemos que

$$(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi))^* = \langle \Phi \rangle \tag{7.4.1}$$

donde $\langle \Phi \rangle$ es el subespacio vectorial generado por Φ. Esto implica que

$$\Phi \subset \mathcal{M}(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi)).$$

Para probar la contención en el otro sentido tomemos $\varphi \in \mathcal{M}(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi))$, entonces, por la igualdad 7.4.1, $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, para un natural n y ciertos escalares α_i. Veremos que a lo más uno de estos es distinto de cero y, en su caso, su valor es uno.

Para cada i, hagamos $e_i = (\overbrace{0, ..., 0, 1}^{i}, 0, ..)$. Supongamos que existen $\alpha_i \neq 0, \alpha_j \neq 0$ con $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e $i \neq j$. Por ser φ una funcional multiplicativa, entonces

$$0 = \varphi(e_i e_j) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \phi_n(e_i) \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \phi_n(e_j) = \alpha_i \alpha_j$$

lo cual es una contradicción. Por lo que si $\varphi \neq 0$, entonces $\varphi = \alpha \phi_i$ para alguna i, con $\alpha \neq 0$. Así $\alpha = \varphi(e_i) = \varphi(e_i e_i) = \varphi(e_i)\varphi(e_i) = \alpha\alpha$; o sea, $\alpha = 1$. Entonces, $\varphi = \phi_i \in \Phi$. Por tanto, $\mathcal{M}(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi)) \subset \Phi$ y (a) está probado.

(b) Para $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ tenemos que $x_0 \notin G(\ell^\infty)$, lo cual implica que $0 \in \sigma(x_0)$; sin embargo, para cada $n \geq 1$,

$$\phi_n(x_0) = \frac{1}{n} \neq 0.$$

Por (a), $0 \notin \hat{x_0}(\mathcal{M}(X))$. Entonces, $\hat{x_0}(\mathcal{M}(X)) \subsetneq \sigma(x_0)$; o sea no se cumple la propiedad (m).

(c) Se sigue del apartado (b) y el Teorema 5.2.3.

(d) Este apartado puede probarse directamente, pero haremos uso de resultados aquí vistos, pero también se obtiene del Teorema 7.1.5.

(e) Esto se tiene porque la función identidad

$$Id : (\ell^\infty, \beta) \to (\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \Phi))$$

es continua, ya que si $\phi_n \in \Phi$ y $(x_i) \in \ell^\infty$, entonces $\|Id((x_i))\|_{\phi_n} = |x_n| = \|(x_i)\|_{e_n}$, con $e_n \in c_0^+$.

(f) Como vimos en la prueba de *(b)* x_0 no pertenece a $G(\ell^\infty)$, pero como $0 \notin \hat{x_0}(\mathcal{M}(X))$, entonces $x_0 \in G_{\mathcal{M}}(\ell^\infty)$; es decir, $G(X) \subsetneq G_{\mathcal{M}}(X)$.

El propio elemento $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ pertenece a $G_t(X)$, puesto que como vimos en el Ejemplo 7.3.2, los elementos de la forma $a_n = (1, 2, \ldots, n, 0, \ldots) \in \ell^\infty$ son tales que $x_0 a_n = a_n x_0 \to 1$ en la topología β y por lo tanto, la convergencia también se da para la topología $\sigma(\ell^\infty, \Phi)$, pues ésta es más débil que β.

(g) La continuidad de la inversa $m_{x_0}^{-1}$ se sigue de que para $\phi_n \in \Phi$ y $(x_i) \in \ell^\infty$, se cumple que

$$n\|x_0(x_i)\|_{\phi_n} = n\|\frac{1}{i}x_i\|_{\phi_n} = n|\frac{1}{n}x_n| = \|(x_i)\|_{\phi_n}.$$

Recordemos que este mismo operador es discontinuo cuando en ℓ^∞ se considera la topología estricta (Subsección 7.3.2)

(h) Del Teorema 7.1.5 se tiene que X no es una $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra, por (c); por tanto, del Teorema 6.1.7 se sigue la primera afirmación. Consideremos ahora a $C(\mathcal{M}(X))$ con la topología compacto-abierto. Tenemos que si $K \subset \mathcal{M}(X) = \Phi$ es un subconjunto compacto y $(x_i) \in \ell^\infty$, entonces existe $\phi_{n_0} \in K$ tal que

$$\|\Psi((x_i))\|_K = |\hat{(x_i)}(\phi_{n_0})| = \|(x_i)\|_{\phi_{n_0}}$$

para algún $n_0 \geq 1$ y todo $(x_i) \in \ell^\infty$, lo que implica la continuidad de Ψ.

7.5. Álgebra m-convexa metrizable en la que todo ideal máximo es cerrado, pero no es $Q_t(Q)$-álgebra

Sea X el álgebra de fracciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con coeficientes complejos y tales que $Q(n) \neq 0$ para todo natural n.

Ésta es un álgebra compleja, conmutativa, con identidad y de ideales principales. Para ver esto último seguiremos los pasos de cuando se prueba que el anillo de polinomios con coeficientes en un anillo euclidiano es de ideales principales.

Basta analizar el caso en que I es un ideal propio y no nulo de X. Sea $\partial(P(x))$ el grado del polinomio $P(x)$, y

$$m = \text{mín}\left\{\partial(P(x)) : \frac{P(x)}{Q(x)} \in I \diagdown \{0\}\right\}.$$

Supongamos que $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)} \in I$ y $\partial(P_0(x)) = m$. Entonces, $P_0 \in I$ y $m \geq 1$.

Si $\frac{P(x)}{Q(x)} \in I$, entonces existen polinomios $P_1(x)$ y $R_1(x)$ tales que

$$P(x) = P_1(x) P_0(x) + R_1(x)$$

donde $R_1(x) = 0$ o bien $\partial(R_1(x)) < m$. Como

$$\frac{P(x)}{Q(x) Q_0(x)} - \frac{P_1(x) P_0(x)}{Q(x) Q_0(x)} = \frac{R_1(x)}{Q(x) Q_0(x)}$$

pertenece a I, entonces $R_1(x) = 0$. De donde, $I = P_0(x) X$.

Veremos que los ideales máximos de X son los ideales de la forma $(x-n) X$ con n en los naturales. Sea M un ideal máximo de X, entonces $M = P_0(x) X$ para algún polinomio de grado positivo y con coeficiente principal 1. Si ningún natural es raíz de $P_0(x)$, entonces $P_0(x) X = X$, así que hay un natural n que es una raíz de $P_0(x)$. De donde, $M \subset (x-n) X$ y como $X \neq (x-n) X$, entonces $M = (x-n) X$.

Inversamente todo ideal de la forma $(x-n)\,X$, con n natural, es máximo, pues por lo anterior $(x-n) \in (x-m)\,X$ para algún natural m, lo que sólo es posible si $n=m$.

En X consideramos la topología m-convexa determinada por la seminormas

$$\left\| \frac{P\,(x)}{Q\,(x)} \right\|_n = \left| \frac{P\,(n)}{Q\,(n)} \right|$$

con n natural. Así, el ideal máximo $(x-n)\,X$ es el núcleo de $\|\cdot\|_n$ y por tanto es cerrado. Y está álgebra X no es Q-álgebra, pues $\sigma\,(x) = \mathbb{N}$, no es acotado (Teorema 4.1.6).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que la evaluación en n, φ_n, pertenece a $\mathcal{M}(X)$; de donde, $\mathbb{N} \subset \sigma_{\mathcal{M}}(x)$ y X no es $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra (Lema 6.1.4), lo cual implica que X tampoco es Q_t-álgebra.

Observamos que si $\tilde{X}$ es la compleción de X, entonces $\tilde{X}$ es completa m-convexa y metrizable, es decir, una B_0-álgebra m-convexa. Dado que cada $\varphi_n \in \mathcal{M}(X)$ se puede extender a $\tilde{X}$, entonces $\mathbb{N} \subset \sigma_{\mathcal{M}(\tilde{X})} \subset \sigma_{\tilde{X}}(x)$. Por tanto, $\tilde{X}$ tampoco es Q-álgebra. Por el Corolario 6.2.6 no es ningún tipo de Q.

7.6. $Q_t(Q_{\mathcal{M}})$-álgebra que no es $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra

Ejemplo 7.6.1. Sea X el álgebra $P(t)$ de los polinomios complejos en una variable con las operaciones usuales y la topología de la convergencia uniforme en el intervalo cerrado $[0,1]$, es decir, la dada por la norma

$$\|p(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|.$$

Entonces X tiene las siguientes propiedades

(a) X es una $Q_t\,(Q_{\mathcal{M}})$-álgebra normada conmutativa, que no es de Banach.

(b) $\mathcal{M}^\#(X) = \mathbb{C}$.

(c) $\mathcal{M}(X) = [0,1]$.

(d) X no es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra. X no es una Q-álgebra.

(e) Un polinomio $p\,(t)$ no nulo es topológicamente invertible en X si y sólo si no tiene ninguna raíz en $[0,1]$.

(f) No todo ideal máximo es cerrado

(g) No todo ideal máximo en X es el núcleo de un elemento en $\mathcal{M}(X)$.

(h) X no tiene la propiedad (m).

Los apartados (f), (g) y (h) muestran, respectivamente, que la hipótesis de ser Q-álgebra no es superflua en el Lema 4.4.7, la Proposición 5.2.2 y el Teorema 5.2.3.

Prueba de las afirmaciones.

(a) Como X es un álgebra normada, de la Proposición 6.2.15 se sigue que X es una Q_t-álgebra y por tanto $Q_{\mathcal{M}}$-álgebra. Es claro que es conmutativa y no es de Banach por el Teorema de Weierstrass.

(b) Debemos ver que cada funcional lineal multiplicativa no cero es de la forma

$$\varphi_\lambda : X \to \mathbb{C};\ \text{con}\ \ \varphi_\lambda(p(t)) = p(\lambda)$$

para un único $\lambda \in \mathbb{C}$. Claramente $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}^{\#}(X)$. Para ver la inclusión contraria, sea $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$, entonces $\varphi(t) = \lambda \in \mathbb{C}$. Dado $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in P(t)$, se tiene que

$$\varphi(p(t)) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n = p(\lambda) = \varphi_\lambda(p(t))$$

La unicidad de $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene, ya que si $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda'}$, entonces $\lambda = \varphi_\lambda(t) = \varphi_{\lambda'}(t) = \lambda'$.

(c) Sea $\varphi_a \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ con $a \in [0,1]$, entonces

$$|\varphi_a(p(t))| = |p(a)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |p(t)| = \|p(t)\|,$$

por lo que $\varphi_a \in \mathcal{M}(X)$.

Recíprocamente, tomemos $\varphi_a \in \mathcal{M}(X)$. Notemos que $X = \big(P(t), \sup_{t\in[0,1]} |\cdot|\big)$ es denso en $Y = (C([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, pues satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass en su versión compleja, es decir, $P(t)$ es una subálgebra que separa los puntos de $[0,1]$, contiene a las constantes y es autoconjugada puesto que $\overline{p(t)} = q(t)$ para $t \in [0,1]$ donde $p(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i$ y $q(t) = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} t^i$. De esta manera, si consideramos la extensión continua φ de $\varphi_a \in \mathcal{M}(X)$ al espacio de Banach Y, entonces φ es una funcional lineal multiplicativa en Y no nula, por lo que $\varphi = \varphi_c$ para alguna $c \in [0,1]$ (Teorema 7.1.2). Y como $a = \varphi_a(t) = \varphi(t) = \varphi_c(t)$=c, entonces $a = c \in [0,1]$. O sea, $\mathcal{M}(X) \subset [0,1]$.

(d) Por lo anterior, $\sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(t) = \{\varphi_c(t) : c \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$ y entonces $\sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(t)$ no es compacto. Por el Lema 6.1.4 concluimos que X no es una $Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebra. Y por tanto, tampoco es una Q-álgebra por el Corolario 6.1.8.

(e) Sea $p(t) = t - a$ con $a \notin [0,1]$. Por (c), $\varphi_a \notin \mathcal{M}(X)$, por tanto $\ker\varphi_a$ es un ideal máximo denso en X. Es decir, el ideal principal $(t-a)X = \ker\varphi_a$ es denso en X, lo que significa que $p(t) = t - a$ es topológicamente invertible en X.

Sea $p\,(t)$ un polinomio no nulo. Entonces

$$p(t) = a(t - a_1)\cdots(t - a_m)$$

con $a \neq 0$. Si $m \geq 1$ y $a_1, \ldots, a_m \notin [0,1]$, de la Proposición 6.2.3 se tiene que $p(t) \in G_t(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $p(t) \in G_t(X)$. Entonces, $q_n(t)\,p(t) \to 1$ para alguna sucesión $(q_n(t))$ y por consiguiente,

$$\varphi_a(q_n(t)\,p(t)) \to 1$$

si $a \in [0,1]$. En particular, $\varphi_a(p(t)) = p(a) \neq 0$ para todo $a \in [0,1]$.

(f) Por (e) el polinomio $t-2$ es topológicamente invertible. Así

$$1 \in \overline{(t-2)\,P(t)}$$

y entonces el ideal máximo $(t-2)\,P(t)$ no es cerrado.

(g) Por (f) el ideal máximo $(t-2)\,P(t)$ no puede ser el núcleo de ningún elemento de $\mathcal{M}(P(t))$.

(h) Como, cada $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ es la evaluación en algún $c \in [0,1]$, tenemos que

$$\{\varphi(t-2) : \varphi \in \mathcal{M}(X)\} \subset [-2,-1]$$

y por otra parte, todo real está en el espectro del polinomio $t-2$. De donde, X no tiene la propiedad (m).

7.7. Una Q_t-álgebra de polinomios que no es Q-álgebra, $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra ni normable

En el álgebra de los polinomios complejos en una variable $P(t)$, hay una topología τ_c para cada $c \geq 1$, tal que $(P(t),\tau_c)$ es un álgebra con las siguientes propiedades:

(a) Es un álgebra localmente convexa completa.

(b) No es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra. No es Q-álgebra.

(c) $\overline{D} \subset M((P(t),\tau_c))$, donde $\overline{D}$ es el disco unitario cerrado de $\mathbb{C}$.

(d) $\mathcal{M}((P(t),\tau_c)) \subset \overline{D}$.

(e) Un polinomio $p(t) \neq 0$ es topológicamente invertible en X si y sólo si no tiene ninguna raíz en $\overline{D}$.

(f) Es una Q_t-álgebra.

(g) $(P(t),\tau_c)$ no es normable.

Definición de $\tau(c)$. Sea $c \geq 1$, consideramos la colección $Q(c)$ de todas las sucesiones crecientes $q = (q_i)_{i=1}^{\infty}$ de números naturales que satisfacen $\frac{q_{n+1}}{q_n} > 2^{n^c}$ para todo n suficientemente grande, digamos para cada $n \geq n(q)$.

Sea $I_0 = \{1\}$ y para $n \geq 1$, $I_n = \{2^{n-1}+1, \ldots, 2^n\}$. Estos conjuntos forman una partición de los números naturales. Para cada $q \in Q(c)$, denotamos por $R_q(c)$

a la familia de todas las sucesiones $r = (r_i)_{i=0}^{\infty}$ que satisfacen $r_i \geq 1$ para todo $i \geq 0$, $r_0 = 1$ y $r_i = 1$, excepto cuando $i \in I_{q_m}$ para algún natural $m \geq n(q)$ o $1 \leq i \leq 2^{q_{n(q)}-1}$. Definimos

$$R(c) = \bigcup_{q \in Q(c)} R_q(c).$$

Para $x \in P(t)$, con $x = \sum_{i=0}^{n(x)} a_i(x)\, t^i$, y $r = (r_i)_{i=0}^{\infty} \in R(c)$, definimos la norma

$$|x|_r = \sum_{i=0}^{n(x)} |a_i(x)|\, r_i.$$

La topología τ_c se define como la generada por estas normas.

Prueba de las afirmaciones.

No damos aquí la prueba de *(a),* éstas puede consultarse en [23].

(b) En el Ejemplo 7.6.1 se vio que $\mathcal{M}^{\#}(P(t)) = \mathbb{C}$. Entonces,

$$\sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(t) = \{\varphi_\lambda(t) : \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C},$$

por lo que $(P(t), \tau_c)$ no es una $Q_{\mathcal{M}^{\#}}$-álgebra, ya que $\sigma_{\mathcal{M}^{\#}}(t)$ no es compacto (Lema 6.1.4) y en consecuencia no es una Q-álgebra (Corolario 6.1.8).

(c) Tomemos $\varphi_\lambda \in \mathcal{M}^{\#}(P(t))$ con $\lambda \in \overline{D}$ y $p(t) \in P(t)$, donde $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, t^i$. Dado $q = (q_i)_{i=1}^{\infty} \in Q(c)$ definimos $r_0 = 1$, $r_i = 2$ cuando $i \in I_{q_m}$ para algún natural $m \geq n(q)$ o $1 \leq i \leq 2^{q_{n(q)}-1}$ y $r_i = 1$ en otro caso. Entonces $r \in R_q(c)$ y además

$$|\varphi_c(p(t))| = |p(\lambda)| = \left| \sum_{i=0}^{n} a_i\, \lambda^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|\, r_i = |p(t)|_r,$$

por lo que $\varphi_\lambda \in \mathcal{M}(P(t))$. Es decir.

$$\overline{D} \subset \mathcal{M}(P((t)).$$

La demostración del apartado (d) es larga, pues se usarán los siguientes resultados.

Lema 7.7.1. *Si en un conjunto de* $4k$ *naturales consecutivos, con* $k \geq 1$*, se suprimen a lo más* k *elementos, entonces al menos quedan dos naturales consecutivos en el conjunto.*

Demostración. Supongamos $k = 1$. El conjunto es de la forma $\{n+1, n+2, n+3, n+4\}$, con $n \geq 0$. Es claro que si suprimimos a lo más un elemento de dicho conjunto, quedan al menos dos naturales consecutivos.

Supongamos, cierto el resultado para algún $k \geq 1$ y tomemos un conjunto con $4(k+1)$ naturales consecutivos: $\{n+1, n+2, \ldots, n+4k, n+4k+1, n+4k+2, n+4k+3, n+4k+4\}$. De este conjunto eliminemos $k+1$ naturales. Si eliminamos k o menos de los primeros $4k$ elementos, entonces en el segmento de los primeros $4k$ naturales del conjunto quedan al menos dos consecutivos, por la hipótesis de inducción. De modo que si eliminemos $k+1$ naturales en ese segmento tenemos que en $\{n+4k+1, n+4k+2, n+4k+3, n+4k+4\}$ hay dos consecutivos. $\square$

Lema 7.7.2. *Sean $c \geq 1$, $k \geq 1$, $r^{(1)}, \ldots, r^{(k)} \in R(c)$, con $r^{(j)} = (r_i^{(j)})_{i=0}^\infty$, y $q^{(j)} \in Q(c)$, con $q^{(j)} = (q_i^{(j)})_{i=1}^\infty$, tal que $r^{(j)} \in R_{q^{(j)}}(c)$. Hagamos*

$$A = \bigcup_{j=1}^{k} \left\{ q_i^{(j)} : i \geq 1 \right\}.$$

Entonces, existe una infinidad de naturales n tales que $n > n(q^{(1)}), \ldots, n(q^{(k)})$ y $n, n+1 \in \mathbb{N} \setminus A$.

Más aún, si

$$\begin{aligned} I_{q^{(j)}} &= \left\{1, ..., 2^{q^{(j)}_{n\left(q^{(j)}\right)}-1}\right\} \\ I_{q_m^{(j)}} &= \left\{2^{q_m^{(j)}-1}+1, ..., 2^{q_m^{(j)}}\right\} \quad \textit{para cada } m \geq n\left(q^{(j)}\right) \\ S\left(q^{(j)}\right) &= \bigcup_{m \geq n\left(q_m^{(j)}\right)} I_{q_m^{(j)}} \\ S &= \textstyle\bigcup_{j=1}^k S\left(q^{(j)}\right), \end{aligned}$$

entonces hay una infinidad de naturales en $\mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k I_{q^{(j)}} \cup S \right)$.

Demostración. Por la definición de $n(q^{(j)})$ tenemos que

$$q_{m+1}^{(j)} > 2^{m^c} q_m^{(j)} \text{ si } m \geq n\left(q^{(j)}\right)$$

Así,

$$q_{m+1}^{(j)} > 2^{m} q_m^{(j)} \text{ si } m \geq n\left(q^{(j)}\right). \tag{7.7.1}$$

Sea $N > \text{máx}\{n(q^{(1)}), \ldots, n(q^{(k)}), 4k+1\}$ y tomemos $m > N$. Entonces

$$q_{m+1}^{(j)} > 2^m q_m^{(j)} > 2^{4k+1} q_m^{(j)} > (4k+1) q_m^{(j)} = q_m^{(j)} + 4k q_m^{(j)} > q_m^{(j)} + 4k \tag{7.7.2}$$

para cada $j = 1, \ldots, k$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$q_m^{(k)} = \text{máx}\{q_m^{(1)}, \ldots, q_m^{(k)}\}.$$

Como $q_m^{(k)} + 4k < q_{m+1}^{(k)}$ por (7.7.2), entonces

$$q_m^{(k)} < q_m^{(k)} + 1 < \ldots < q_m^{(k)} + 4k < q_{m+1}^{(k)} \tag{7.7.3}$$

y como $q_m^{(k)} = \text{máx}\{q_m^{(1)}, \ldots, q_m^{(k)}\}$, se sigue que

$$q_i^{(j)} < q_m^{(k)} + 1 < \ldots < q_m^{(k)} + 4k$$

para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, k$, por ser creciente cada sucesión $q^{(j)}$. De donde, los únicos elementos de los rangos de las sucesiones $q^{(1)}, \ldots, q^{(k-1)}$ que pueden estar en el conjunto $\{q_m^{(k)} + 1, \ldots, q_m^{(k)} + 4k\}$ son los de la forma $q_i^{(j)}$ con $j = 1, \ldots, k-1$ e $i \geq m+1$.

Para cada $1 \leq j \leq k$ existe a lo más un natural $i \geq m+1$ tal que

$$q_i^{(j)} \in \{q_m^{(k)} + 1, \ldots, q_m^{(k)} + 4k\},$$

pues si suponemos que para algún $1 \leq j \leq k$ hay dos naturales i, i' con $i' > i \geq m+1$ tales que

$$q_i^{(j)}, q_{i'}^{(j)} \in \{q_m^{(k)} + 1, \ldots, q_m^{(k)} + 4k\},$$

entonces, por la desigualdad (7.7.2) aplicada a i que es mayor que N, tenemos que

$$q_{i'}^{(j)} \geq q_{i+1}^{(j)} > q_i^{(j)} + 4k \geq q_m^{(k)} + 4k + 1$$

que contradice la elección de $q_{i'}^{(j)}$.

Por consiguiente, si suprimimos del conjunto $\{q_m^{(k)} + 1, \ldots, q_m^{(k)} + 4k\}$ aquellos que pertenezcan a los rangos de la sucesiones $q^{(1)}, \ldots, q^{(k-1)}$, entonces por el Lema 7.7.1 subsisten al menos dos elementos consecutivos en $\{q_m^{(k)} + 1, \ldots, q_m^{(k)} + 4k\}$, que llamaremos n_m, n_m+1; es decir, estos que no pertenecen a los rangos de las sucesiones $q^{(1)}, \ldots, q^{(k-1)}$.

Además, por (7.7.3) y ser $q^{(k)}$ una sucesión creciente, entonces, $n_m, n_m+1 \in \mathbb{N} \setminus A$. Tenemos que

$$n_m + 1 \leq q_m^{(k)} + 4k < q_{m+1}^{(k)} \leq \text{máx}\{q_{m+1}^{(1)}, \ldots, q_{m+1}^{(k)}\}$$

por (7.7.2) y

$$\text{máx}\{q_{m+1}^{(1)}, \ldots, q_{m+1}^{(k)}\} < n_{m+1}$$

al aplicar la construcción anterior al natural $m+1$ para obtener n_{m+1}. De donde, $n_m < n_m + 1 < n_{m+1}$ para cada $m > N$. Por tanto, tenemos una cantidad infinita de naturales n tales que $n, n+1 \in \mathbb{N} \setminus A$ y entonces también hay una infinidad de naturales $n > n(q^{(1)}), \ldots, n(q^{(k)})$ que cumplen lo anterior. Queda probada la primera afirmación del lema.

Sea $q \in Q(c)$. Recordamos que $I_{q_m} = \{2^{q_m - 1} + 1, \ldots, 2^{q_m}\}$ para cada $m \geq n(q)$. Definimos el segmento $I_q = \{1, \ldots, 2^{q_{n(q)} - 1}\}$ y $S(q) = \bigcup_{m \geq n(q)} I_{q_m}$.

Con $a_n \ldots a_{0 \cdot 2}$ denotamos la expresión binaria del natural $a_0 + a_1 2 + \ldots + a_n 2^n$ donde $a_i = 0, 1$. Entonces

$$I_q = \left\{ a_{q_{n(q)}-1} \ldots a_{0 \cdot 2} : \text{variando libremente las } a_i \text{ en } \{0,1\} \right\}$$

$$I_{q_m} = \left\{ \underbrace{1}_{q_m - 1} ... a_{0 \cdot 2} : \text{al menos otra cifra } a_i \text{es } 1 \right\} \cup \left\{ \underbrace{1}_{q_m} 0 \ldots 0_{\cdot 2} \right\}$$

para cada $m \geq n(q)$.

Así,

$$S(q) = \bigcup_{m=n(q)}^{\infty} \left\{ \underbrace{1}_{q_m - 1} ... a_{0 \cdot 2} : \text{al menos otra cifra } a_i \text{es } 1 \right\} \cup \left\{ \underbrace{1}_{q_m} 0 \ldots 0_{\cdot 2} \right\}.$$

Ya vimos que existen una infinidad de naturales n tales que $n > n(q^{(1)}), \ldots, n(q^{(k)})$ y $n, n+1 \in \mathbb{N} \setminus A$, es decir, que no están en los rangos de las sucesiones $q^{(1)}, \ldots, q^{(k)}$. Por tanto,

$$\underbrace{1}_{n} 0 \ldots 0_{\cdot 2} \neq \underbrace{1}_{q_m^{(j)} - 1} \ldots a_{0 \cdot 2}$$

y

$$\underbrace{1}_{n} 0 \ldots 0_{(2)} \neq \underbrace{1}_{q_m^{(j)}} ... a_{0 \cdot 2}$$

para todo $m \geq 1$ y para cada $j = 1, \ldots, k$. Lo cual implica que hay una infinidad de naturales en $\mathbb{N} \setminus S$, y como $\bigcup_{j=1}^{k} I_{q^{(j)}}$ es finito, entonces hay una infinidad de naturales en $\mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} I_{q^{(j)}} \cup S \right)$. $\square$

(d) Supongamos que $c \geq 1$, $|\lambda| > 1$. Para cualesquiera $M > 0$, $k \geq 1$, y $r^{(1)}, \ldots, r^{(k)} \in R(c)$, tenemos que $r^{(j)} \in R_{q^{(j)}}(c)$ con $q^{(j)} \in Q\,(c)$ para $1 \leq j \leq k$.

Por el Lema anterior, existe un natural n tal que $|\lambda|^n > M$ y que además

$$n \in \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} I_{q(j)} \cup S \right),$$

por lo que $r_n^{(j)} = 1$ para $j = 1, \ldots, k$. Por tanto,

$$|\varphi_\lambda(t^n))| = |\lambda^n| > M = M \max_{1 \le j \le k} \{|t^n|_{r(j)}\}.$$

lo que implica que φ_λ no es continua, es decir, $\varphi_\lambda \notin \mathcal{M}(P(t))$. Por tanto, $\mathcal{M}(P(t)) \subset \overline{D}$.

(e) Sea $|\lambda| > 1$, entonces φ_λ no es continua por *(d)*. Entonces,

$$\ker \varphi_\lambda = (t - \lambda)P(t)$$

es un ideal máximo denso en $(P(t), \tau_c)$. Por tanto, $(t - \lambda)$ es un elemento topológicamente invertible en $(P(t), \tau_c)$ si $|\lambda| > 1$.

Sea $p\,(t)$ un polinomio no nulo. Entonces $p(t) = a(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_m)$ con $a \neq 0$ y $m \geq 0$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \notin \overline{D}$, se tiene que $p(t) \in G_t(X)$, por el Lema 6.2.3.

Recíprocamente, supongamos que $p(t) \in G_t(X)$. Entonces,

$$q_\alpha\,(t)\,p\,(t) \to 1$$

para alguna red $(q_\alpha\,(t))$ y por consiguiente, $\varphi_\lambda\,(q_\alpha\,(t)\,p\,(t)) \to 1$ si $\lambda \in \overline{D}$. En particular, $\varphi_\lambda\,(p\,(t)) = p\,(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \overline{D}$.

(f) Probemos ahora que $(P(t), \tau_c)$ es una Q_t-álgebra. Para esto, sean $r = (r_i)_{i=0}^{\infty} \in R(c)$ y $p(t) \in P(t)$, con $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$, tal que

$$|p(t) - 1|_r < \frac{1}{2}.$$

Entonces para todo $|t| \leq 1$ se cumple que

$$|p(t) - 1| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0 - 1| \leq |p(t) - 1|_r < \frac{1}{2},$$

puesto que $r_i \geq 1$ para todo $i \geq 0$. Por tanto $p(t) \neq 0$ para todo $|t| \leq 1$, lo cual implica que si

$$p(t) = a(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_m),$$

entonces $|\lambda_{11}|, \ldots, |\lambda_{1m}| > 1$ y $a \neq 0$. Y aplicando (e), $p(t)$ es topológicamente invertible. Así, hemos probado que existe una vecindad alrededor del polinomio 1 contenida en $G_t(P(t))$; por tanto, del Teorema 6.2.2, tenemos que $(P(t), \tau_c)$ es una Q_t-álgebra.

(g) Si X fuera normable, entonces sería un álgebra de Banach por el apartado (a), y por consiguiente una Q-álgebra, lo que no es posible por el inciso (b).

7.8. Álgebras normadas con $\mathcal{M}(X)=\mathcal{M}^{\#}(X)$ que no son Q-álgebras

Daremos dos ejemplos de lo señalado en el título de la sección. El primero tal que $\mathcal{M}(X)$ consta de sólo un punto y el segundo donde es infinito. El primer ejemplo nos permitirá exhibir un $Q_{\mathcal{M}^{\#}}-$álgebra que no es Q-álgebra.

Para construir los ejemplo damos la siguiente definición y resultados.

Definición 7.8.1. Sea X un álgebra compleja, definimos el *radical de Gelfand* como

$$\mathrm{Gel}\,(X)=\bigcap\left\{\ker f:\ f\in\mathcal{M}^{\#}(X)\right\}.$$

Proposición 7.8.2. *Sea A un álgebra compleja entera (conmutativa y $a,b\in A$, $ab=0\Rightarrow a=0$ o $b=0$) con unidad e. Para el álgebra $A[x]$ de polinomios con coeficientes en A se cumple que* $\mathrm{Rad}(A[x])=0$.

Demostración. El álgebra $A[x]$ es también entera. Sea $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ un elemento de $A[x]$. Supongamos que $p(x)\in\mathrm{Rad}(A[x])$, entonces

$$e+p(x)\in G(A[x])$$

por el Lema 2.5.7, lo cual implica que $a_1=\ldots=a_n=0$, ya que A es entera. Por tanto, $p(x)=a_0$ y entonces

$$e+p(x)ex=e+a_0x\in G(A[x]),$$

debido al lema ya mencionado. Por lo que $a_0=0$; así, $p(x)=0$ y por tanto, $\mathrm{Rad}(A[x])=0$. □

Proposición 7.8.3. *Existe un álgebra compleja de Banach, conmutativa, con unidad y entera tal que su radical de Jacobson es distinto de* 0.

Demostración. Dada una sucesión $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ decreciente de reales positivos, con $w_0=1$, $w_{n+m}\leq w_nw_m$, definimos el álgebra normada $\ell^1(w)$ como un espacio de series formales de potencias con coeficientes en $\mathbb{C}$, donde

$$\ell^1(w)=\left\{f=\sum_{n=0}^{\infty}x_nz^n:\ \|f\|=\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|w_n<\infty\right\}.$$

Observemos que $\ell^1(w)$ se puede considerar como un álgebra matricial $A(w_{p,n})$, donde $w_n=w_{p,n}=w_{p+1,n}$ para todo $p\geq 1$ y $n\geq 0$. Por ejemplo, se puede tomar $w_n=\frac{1}{e^n}$.

Por lo visto en la Sección 7.2, $\ell^1(w) = A(w_{p,n})$ es un álgebra conmutativa entera con unidad y es de Banach, pues en este caso su topología está determinada por una sola norma y sabemos que las álgebras matriciales son completas.

Definimos $\varphi : \ell^1(w) \to \mathbb{C}$ como

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = a_0.$$

Es fácil ver que φ es una funcional lineal multiplicativa no nula, es decir $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(\ell^1(w))$, por lo que $M_1 = \ker\varphi$ es un ideal máximo de $\ell^1(w)$. Afirmamos que de hecho M_1 es el único ideal máximo de $\ell^1(w)$. Para probarlo supongamos que $M \subset \ell^1(w)$ es un ideal máximo tal que $M_1 \neq M$, entonces $M_1 \nsubseteq M$ y $M \nsubseteq M_1$. Entonces existe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en M tal que $a_0 \neq 0$, lo que implica que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es invertible, ya que si $b_0 = a_0^{-1}$ y

$$b_n = a_o^{-1}\left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} b_{n-k-1}\right)$$

para cada $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1.$$

Entonces $M = \ell^1(w)$, que es una contradicción. Por tanto, M_1 es el único ideal máximo de $\ell^1(w)$. Esto implica que $\mathrm{Rad}(\ell^1(w)) = M_1 \neq 0$. □

Proposición 7.8.4. *Existe un álgebra compleja normada, conmutativa y con identidad B tal que* $\mathrm{Rad}(B) = 0$*, pero* $\mathrm{Gel}\,(B) \neq 0$*.*

Demostración. Por la proposición anterior existe un álgebra $(A, \|\cdot\|)$ de Banach, con identidad, conmutativa y entera tal que $\mathrm{Rad}(A) \neq 0$.

Dotamos a $B = A[x]$ de la siguiente norma

$$\|p(x)\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right\| = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|.$$

Entonces, B es un álgebra normada conmutativa con identidad, en la que además $\mathrm{Rad}(B) = 0$, por la Proposición 7.8.2. Por ser A un álgebra de Banach conmutativa con identidad, se cumple, por la Proposición 5.2.1 que

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(A) &= \bigcap \{M : M \text{ es ideal máximo de } A\} = \bigcap \{\ker\varphi : \varphi \in \mathcal{M}(A)\} \\ &= \bigcap \left\{\ker\varphi : \varphi \in \mathcal{M}^{\#}(A)\right\} = \mathrm{Gel}\,(A)\,.\end{aligned}$$

El espectro $\mathcal{M}^{\#}(B)$ es no vació, ya que $\varphi \circ \phi_a \in \mathcal{M}^{\#}(B)$ para cualquier evaluación ϕ_a, con $a \in A$, y todo $\varphi \in \mathcal{M}(A)$.

Sabemos que existe $a \in \mathrm{Gel}\,(A)$, con $a \neq 0$. Para ver que $a \in \mathrm{Gel}\,(B)$, tomemos $\phi \in \mathcal{M}^{\#}(B)$, entonces $\phi \restriction_A \in \mathcal{M}^{\#}(A)$, por lo que $0 = \phi \restriction_A (a) = \phi(a)$. De donde, $a \in \ker \phi$ y por tanto, $a \in \mathrm{Gel}\,(B)$. Así, $\mathrm{Gel}\,(B) \neq 0$. □

Primer ejemplo.

Sea B un álgebra como en la proposición anterior; o sea, B es normada, conmutativa, con identidad e y satisface que $0 = \mathrm{Rad}(B) \subsetneq \mathrm{Gel}\,(B)$. Consideremos el álgebra normada, conmutativa y con identidad

$$X = \mathrm{Gel}\,(B) \bigoplus \mathbb{C}e$$

y la funcional $\chi_0 : X \to \mathbb{C}$ definida como $\chi_0(a + \lambda e) = \lambda$. Entonces $\chi_0 \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ y $\ker \chi_0 = \mathrm{Gel}\,(B)$. Afirmamos que

$$\mathcal{M}^{\#}(X) = \{\chi_0\}. \tag{7.8.1}$$

Supongamos lo contrario, es decir, que existe $\chi \in \mathcal{M}^{\#}(X)$ tal que $\chi \neq \chi_0$. Entonces, $\chi(a + \lambda e) = \chi(a) + \lambda \neq \lambda$ para algún $a + \lambda e \in X$ y así, $\chi(a) \neq 0$. Para el elemento $\tilde{a} = \chi(a)^{-1}a$, tenemos que $\chi(\tilde{a}) = 1$ y que $\tilde{a} \in \mathrm{Gel}\,(B)$, por ser éste un ideal.

Definimos

$$\tilde{\chi} : B \to \mathbb{C}$$

como $\tilde{\chi}(b) = \chi(\tilde{a}b)$, lo que tiene sentido puesto que $\mathrm{Gel}\,(B)$ es un ideal. Es fácil ver que $\tilde{\chi}$ es lineal; para ver que es multiplicativa, tomemos $x, y \in B$, entonces

$$\tilde{\chi}(xy) = \chi(\tilde{a}xy) \cdot 1 = \chi(\tilde{a}xy)\chi(\tilde{a}) = \chi(\tilde{a}x\tilde{a}y) = \chi(\tilde{a}x)\chi(\tilde{a}y) = \tilde{\chi}(x)\tilde{\chi}(y)$$

y además

$$\tilde{\chi}(\tilde{a}) = \chi(\tilde{a}\tilde{a}) = 1.$$

O sea, $\tilde{\chi} \in \mathcal{M}^{\#}(B)$ y es tal que $\tilde{\chi}(\tilde{a}) \neq 0$, lo que contradice que $\tilde{a} \in \mathrm{Gel}\,(B)$. Queda probada la igualdad (7.8.1).

Ahora, consideremos la compleción $\tilde{X}$ de X. Si $\varphi \in \mathcal{M}(\tilde{X}) \left(= \mathcal{M}^{\#}(\tilde{X})\right)$, entonces $\varphi \restriction_X \in \mathcal{M}^{\#}(X)$, por lo que $\varphi \restriction_X = \chi_0$, y tenemos la continuidad de χ_0. Por tanto,

$$\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}^{\#}(X) = \{\chi_0\}.$$

Para acabar, mostraremos que X no es una Q-álgebra. Supongamos lo contrario. De la Proposición 5.2.1 tenemos que si M es un ideal máximo de X, entonces existe

$\chi \in \mathcal{M}(X)$ tal que $M = \ker \chi$. Por lo que el único ideal máximo de X es $\ker \chi_0$. Entonces

$$\mathrm{Rad}(X) = \ker \chi_0 = \mathrm{Gel}\,(B)\,. \tag{7.8.2}$$

Afirmamos que

$$\mathrm{Gel}\,(B)\,(= \mathrm{Rad}(X)) = \mathrm{Gel}\,(B) \cap \mathrm{Rad}(B). \tag{7.8.3}$$

Si $x \in \mathrm{Rad}(X)\,(= \mathrm{Gel}\,(B))$ y $y \in B$, entonces $xy \in \mathrm{Gel}\,(B)$, por ser éste un ideal, o sea, $xy \in \mathrm{Rad}(X)$ y tenemos que $e - xy \in G(X)$. Como $G(X) \subset G(B)$, se sigue que $x \in \mathrm{Gel}\,(B) \cap \mathrm{Rad}(B)$.

Para probar la inclusión contraria, sean $x \in \mathrm{Gel}\,(B) \cap \mathrm{Rad}(B)$ y $y \in X$ arbitrario, entonces $y = z + \lambda e$, con $z \in \mathrm{Gel}\,(B)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Debido a que $x \in \mathrm{Rad}(B)$, tenemos que $e - xy \in G(B)$, es decir, existe $b \in B$ tal que

$$e = (e - xy)b = b - x(z + \lambda e)b = b - xzb - \lambda xb,$$

de donde $b = xzb + \lambda xb + e$ pertenece a $G_B \oplus \mathbb{C}e$. Por consiguiente, $b \in X$ y así $e - xy \in G(X)$; de donde $x \in \mathrm{Rad}(X)$. Queda probada la igualdad (7.8.3) y de ella se sigue que

$$\mathrm{Rad}(X) = \mathrm{Gel}\,(B) \cap \mathrm{Rad}(B) = 0.$$

Esto contradice la igualdad (7.8.2). Por tanto, X no es una Q-álgebra.

El álgebra $X = \mathrm{Gel}\,(B) \bigoplus \mathbb{C}e$ es una $Q_{\mathcal{M}^\#}$-álgebra, pues $G_{\mathcal{M}^\#}\,(X) = \chi_0^{-1}\,(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ y éste es un conjunto abierto por ser χ_0 continua.

Segundo ejemplo.

Consideremos el álgebra $X \times C([0,1])$, donde X es el álgebra del ejemplo anterior y en $C([0,1])$ se toma la norma uniforme, entonces por la Proposición 5.1.2 y la Observación 5.1.3

$$\mathcal{M}(X \times C([0,1])) = \mathcal{M}^\#(X \times C([0,1])).$$

Sin embargo, $X \times C([0,1])$ no es Q-álgebra debido a la Observación 4.1.4 y a que como vimos en el ejemplo anterior X no es una Q-álgebra. Por la Proposición 5.1.2

$$\mathcal{M}\,(X \times C([0,1])) = \{\chi_0 \circ \pi_X, \phi \circ \pi_Y : \psi \in \mathcal{M}(X), \phi \in \mathcal{M}(C([0,1]))\}$$

por lo que este conjunto es infinito.

Apéndice A

Prueba del Lema 7.2.10

A.1. Dos resultados auxiliares

Lema A.1.1. *Sea* $(a_s)_{s=0}^{\infty}$ *una sucesión creciente de números reales tal que* $a_0 = 1$ *y* $\limsup_s (a_s)^{1/s} = \infty$. *Entonces existe una sucesión* $(b_s)_{s=0}^{\infty}$ *de números reales con estas mismas propiedades y tal que:*

(a) $b_s \geq a_s$ *para todo* $s \geq 0$*.*

(b) $a_{s+t} \leq b_s b_t$ *para* $s, t \geq 0$*.*

Demostración. Observamos que $a_s \geq 1$ para todo $s \geq 1$. Tomamos $b_0 = 1$ y $b_s = \max\{a_{2s-1}, \sqrt{a_{2s}}\}$ si $s \geq 1$.

El apartado (a) se sigue inmediatamente de la definición de la sucesión $(b_s)_{s=0}^{\infty}$. Por tanto, $\limsup_s (b_s)^{1/s} = \infty$.

Por otra parte, $b_0 = 1 \leq a_t \leq b_t$ para cualquier t y si $0 < s < t$, entonces $b_s = a_{2s-1}$ o bien $b_s = \sqrt{a_{2s}}$. En el primer caso, $b_s = a_{2t-1} \leq b_t$ y en el segundo, $b_s = \sqrt{a_{2t}} \leq b_t$. De donde, $(b_s)_{s=0}^{\infty}$ es creciente.

(b) Si $s = t$, entonces

$$b_s b_t = b_s b_s \geq (a_{2s})^{1/2} (a_{2s})^{1/2} = a_{s+s} = a_{s+t}.$$

Supongamos ahora que $s > t$, entonces $2s > s + t$, por lo que $2s - 1 \geq s + t$ y

$$b_s = \max\{a_{2s-1}, (a_{2s})^{1/2}\} \geq a_{s+t}$$

y como $b_t \geq 1$, entonces $b_s b_t \geq a_{s+t}$. □

Lema A.1.2. *La sucesión* $(a_s)_{s=0}^{\infty}$ *definida como* $a_0 = 1$ *y* $a_s = n^{n^n}$ *si* $n^n \leq s < (n+1)^{(n+1)}$*, para* $s \geq 1$ *tiene las siguientes propiedades:*

(a) La sucesión $(a_s)_{s=0}^{\infty}$ es creciente.
(b) $\limsup_s (a_s)^{1/s} = \infty$
(c) $\liminf_s (a_s)^{1/s} = 1.$

Demostración. (a) Tenemos que $a_0 = 1 \leq a_t$ para cualquier $t \geq 0$. Si $0 < s < t$, entonces existe un único natural n tal que $n^n \leq s < (n+1)^{(n+1)}$ y $a_s = a_t$ cuando $t < (n+1)^{(n+1)}$ o bien, $a_s < a_t$ cuando $(n+1)^{(n+1)} \leq t$.

(b) Por definición, $a_{n^n} = n^{n^n}$. Entonces para la subsucesión $\left((a_{n^n})^{\frac{1}{n^n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ de $\left((a_s)^{\frac{1}{s}}\right)_{n=1}^{\infty}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n^n})^{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

De donde, $\limsup_s (a_s)^{1/s} = \infty$.

(c) Afirmamos que para la subsucesión $\left(a_{(n+1)^{n+1}-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ de $(a_s)_{n=1}^{\infty}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_{(n+1)^{n+1}-1}\right)^{1/(n+1)^{n+1}-1} = 1. \tag{A.1.1}$$

En efecto, por definición, $a_{(n+1)^{n+1}-1} = n^{n^n}$, por lo que

$$\left(a_{(n+1)^{n+1}-1}\right)^{1/(n+1)^{n+1}-1} = n^{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}-1}}$$

y la afirmación equivale a que

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(n^{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}-1} \log n = 0. \tag{A.1.2}$$

Probaremos que esto es así. Como

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}-1} \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}-(n+1)^n} = \frac{n^n}{n(n+1)^n},$$

tenemos que

$$0 \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}-1} \log n \leq \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{\log n}{n}.$$

El lado derecho tiende a $\frac{1}{e} \times 0$. Con esto queda probado (A.1.2).

Por otra parte, como $a_s \geq 1$ para $s \geq 0$, entonces $(a_s)^{1/s} \geq 1$ para $s \geq 1$. Por lo que si $\liminf_{s\geq 1}(a_s)^{1/s} \geq 1$. Por el límite (A.1.1) y por ser $\liminf_{s\geq 1}(a_s)^{1/s}$ el ínfimo de los límites de subsucesiones de $(a_s)^{1/s}$, tenemos que

$$\liminf_{s\geq 1}(a_s)^{1/s} = 1. \tag{A.1.3}$$

□

A.2. La Prueba

Lema A.2.1. *Existe una matriz $(b_{p,s})$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$b_{p,s} \leq b_{p+1,s} \tag{A.2.1}$$

$$b_{p,s+t} \leq b_{p+1,s} b_{p+1,t} \tag{A.2.2}$$

$$b_{p,s} \leq b_{p,s+1} \tag{A.2.3}$$

$$b_{p,0} = 1 \tag{A.2.4}$$

$$\limsup_{s} \sqrt[s]{b_{p,s}} = \infty \tag{A.2.5}$$

para cualesquiera $p = 1, 2, ...$ y $s, t = 0, 1, ...$

Demostración. Construiremos la matriz de manera inductiva. Tomamos como primer renglón $(b_{1,s})$ a la sucesión $(a_s)_{s=0}^{\infty}$ definida en el lema anterior. Entonces para $p = 1$ se satisfacen las tres últimas condiciones.

Según el Lema A.1.1 aplicado a la sucesión $(a_s)_{s=0}^{\infty}$, obtenemos una sucesión creciente $(b_s)_{s=0}^{\infty}$, con $b_0 = 1$, y que satisface $1 \leq a_s \leq b_s$ para todo $s \geq 0$, $a_{s+t} \leq b_s b_t$ para $s, t \geq 0$ y $\limsup_{n \geq 1} \sqrt[n]{b_s} = \infty$.

Definimos el segundo renglón $(a_{2,s}) = (b_s)$. Entonces, las condiciones establecidas en lema se cumple para $p = 1, 2$ y $n \geq 0$.

Supongamos que hemos definido hasta el renglón $p-1$, con $p \geq 3$, de manera que se cumplen las condiciones. A la sucesión $(b_{p-1,s})$ le podemos aplicar el Lema A.1.1 y obtenemos una sucesión $(b_{p+1,s})$ que satisface todas las condiciones. $\square$

Lema A.2.2. *Los elementos de la matriz $(b_{p,s})$ del lema anterior tienen la siguiente propiedad:*

Para cualesquiera enteros $p, s \geq 1$ se cumple que si $n^n < 2^p s \leq (n+1)^{(n+1)} - 1$, entonces $b_{p+1,s} = n^{n^n}$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre p. En el caso $p = 1$, tenemos que la hipótesis es:

$$n^n < 2s \leq (n+1)^{(n+1)} - 1. \tag{A.2.6}$$

Como $b_{2,s} = \max\{b_{1,2s-1}, (b_{1,2s})^{\frac{1}{2}}\}$ tenemos que $b_{2,s} = b_{1,2s-1} = a_{2s-1}$ o $b_{2,s} = (b_{1,2s})^{\frac{1}{2}} = (a_{2s})^{\frac{1}{2}}$. Debido (A.2.6), $(a_{2s})^{1/2} = (n^{n^n})^{1/2}$. Luego, como $n^n < 2s$, entonces $n^n \leq 2s - 1 < (n+1)^{(n+1)}$, por lo que $a_{2s-1} = n^{n^n} \geq (n^{n^n})^{\frac{1}{2}} = (a_{2s})^{\frac{1}{2}}$. Por tanto, $b_{2,s} = a_{2s-1} = n^{n^n}$. Queda probada el resultado para $p = 1$.

Supongamos cierta la afirmación para $p-1$, con $p>1$ y que

$$n^n < 2^p s \leq (n+1)^{(n+1)} - 1$$

con $s \geq 1$.

Por definición

$$a_{p+1,s} = \text{máx}\{a_{p,2s-1}, (a_{p,2s})^{\frac{1}{2}}\}.$$

Por otra parte

$$n^n < 2^{p-1}(2s) \leq (n+1)^{(n+1)} - 1.$$

Por tanto, de la hipótesis de inducción se sigue que

$$a_{p,2s} = n^{n^n}.$$

Afirmamos que

$$n^n < 2^{p-1}(2s-1) \leq (n+1)^{(n+1)} - 1$$

Puesto que $\frac{n^n}{2^p} < s$, entonces $\frac{n^n}{2^p} + 1 \leq s$, por lo que $n^n + 2^p \leq 2^p s$, lo que implica que $n^n \leq 2^p s - 2^p < 2^p s - 2^{p-1}$; por tanto, $n^n < 2^{p-1}(2s-1) \leq (n+1)^{(n+1)} - 1$. Queda probada la afirmación.

Por la hipótesis de inducción, $a_{p,2s-1} = n^{n^n}$ y como $a_{p+1,s} = max\left(a_{p,2s-1}, \sqrt{a_{p,2s}}\right)$, entonces $a_{p+1,s} = n^{n^n}$. □

Lema A.2.3. *La matriz $(b_{p,s})$ del Lema A.2.1 satisface*

$$\liminf_{n\geq 1} \sqrt[s]{b_{p,s}} = 1 \tag{A.2.7}$$

para todo $p \geq 1$.

Demostración. En el caso $p=1$ se sigue de lo que fue probado para la sucesión $(a_s)_{s=0}^{\infty}$.

Para $p>1$ probaremos que $\liminf_{n\geq 1} \sqrt[s_k]{b_{p,s_k}} = 1$ para una subsucesión de $(b_{p,s})$. Con esto y debido a que $\liminf_{n\geq 1} \sqrt[s]{b_{p,s}} \geq 1$, estará probado el lema.

Sea $p>1$ fijo, para cada $k=1,2,\ldots$ sea $n_k = 2^{p-1}k$. Afirmamos que 2^{p-1}divide a $(n_k+1)^{(n_k+1)} - 1$.

$$(n_k+1)^{(n_k+1)} = \sum_{r=0}^{n_k+1} \binom{n_k+1}{r} n_k^{n_k+1-r} = \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k+1}{r} n_k^{n_k+1-r} + 1,$$

entonces

$$(n_k+1)^{(n_k+1)} - 1 = \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k+1}{r} n_k^{n_k+1-r} = n_k \sum_{r=0}^{n_k} \binom{n_k+1}{r} n_k^{n_k-r} =$$

$$= 2^{p-1}\left(k\sum_{r=0}^{n_k}\left(\begin{array}{c} n_k+1 \\ r \end{array}\right) n_k^{n_k-r}\right)$$

Definimos los naturales $s_k = \frac{(n_k+1)^{(n_k+1)}-1}{2^{p-1}}$ para cada $k = 1, 2, \ldots,$

Por otra parte, $n_k^{n_k} < 2^{p-1}s_k = (n_k+1)^{(n_k+1)} - 1$. Por el lema anterior $a_{p,s_k} = n_k^{n_k^{n_k}}$ y así $(a_{p,s_k})^{1/s_k} = (n_k)^{\frac{n_k^{n_k}}{s_k}}$.

Afirmamos que,

$$\lim_{k\to\infty}(a_{p,s_k})^{1/s_k} = \lim_{k\to\infty}(n_k^{n_k^{n_k}})^{1/s_k} = \lim_{k\to\infty} n_k^{(\frac{n_k^{n_k}}{s_k})} = 1.$$

Basta probar que

$$\lim_{k\to\infty}\log(n_k^{(\frac{n_k^{n_k}}{s_k})}) = \lim_{k\to\infty}\frac{n_k^{n_k}}{s_k}\log(n_k) = 0.$$

Lo cual es cierto, puesto que

$$\frac{n_k^{n_k}}{s_k}\log(n_k) \leq 2^{p-1}\frac{n_k^{n_k}}{(n_k+1)^{n_k}}\frac{\log(n_k)}{n_k}.$$

Por consiguiente, $\lim_{k\to\infty}(a_{p,s_k})^{1/s_k} = 1.$ □

La prueba del Lema 7.2.10 se sigue de los Lemas A.2.1 y A.2.3.

Bibliografía

[1] M. Abel and W. Żelazko, *Topologically invertible elements and topological spectrum*, Bull. Pol. Acad. of Sci. Math. **54** (2006), 257–271.

[2] H. Arizmendi, *On the spectral radius of a matrix algebra*, Funct. Approx. Comment. Math. **19** (1990), 77–81.

[3] H. Arizmendi and A. Carrillo, *On the extended spectral radius in B_0-algebras*, Funct. Approx. Comment. Math. **19** (1990), 167–176.

[4] ______, *On locally convex algebras with cyclic bases*, Function spaces, The second conference. Marcel Decker. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **172** (1995), 11–17.

[5] H. Arizmendi, A. Carrillo, and L. Palacios, *On Q_t-algebras*, Contemp. Math. **427** (2007), 49–55.

[6] H. Arizmendi, A. Carrillo, and V. Valov, *On Q, $Q_{\mathcal{M}}$ and $Q_{\mathcal{M}^\#}$-algebras*, Comment. Math. Prace Mat. **42** (2002), 137–143.

[7] H. Arizmendi and V. Valov, *Some characterizations of Q-algebras*, Comment. Math. Prace Mat. **39** (1999), 11–21.

[8] M. G. Arsove, *Similar bases and isomorphisms in Fréchet spaces*, Math. Ann. **135** (1958), 283–293.

[9] V.K. Balachandran, *Topological algebras*, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science, 2000.

[10] E. Beckenstein, L. Narici, and C. Suffel, *Topological algebras*, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science, 1977.

[11] A. Beddaa, *Sur l'expression du radical et du spectre dans une algèbre normée non complète*, Extracta Math. **11** (1996), 261–267.

[12] F. F. Bonsall, *A survey of a Banach algebra theory*, Bull. London Math. Soc. **6** (1970).

[13] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 80, Springer-Verlag, 1973.

[14] R. Choukri, *Sur certaines questions concernant les Q-algèbres*, Extracta Math. **16** (2001), 79–82.

[15] J.B. Conway, *Functions of one complex variable I*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Science & Business Media, 1978.

[16] ______, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Science & Business Media, 1990.

[17] M. de la Rosa Penilla, *Topologías estrictas*, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2004.

[18] J. Horvath, *Topological vector spaces and distributions*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[19] I.J. Maddox, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, 1988.

[20] V. Mascioni, *Some characterizations of complex normed Q-algebras*, Elem. Math. **42** (1987), 10–14.

[21] H.H. Sohrab, *Basic real analysis*, Birkhäuser Boston, 2003.

[22] M. P. Thomas, *Closed ideals in the Banach algebra $\ell^1(\omega)$ when ω is ϵ-star shaped*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **41** (1998), 161–176.

[23] M. Wojciechowski and W. Żelazko, *Non-uniqueness of topology for algebras of polynomials*, Colloq. Math. **72** (1997), 111–121.

[24] W. Żelazko, *On the locally bounded and m-convex topological algebras*, Studia Math. **19** (1960), 333–356.

Índice alfabético