



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

**SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE DULAC  
PARA CAMPOS VECTORIALES BIDIMENSIONALES**

TESIS

QUE PARA OBTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**M. C. GABRIEL VILLASEÑOR AGUILAR**

TUTOR PRINCIPAL:

**DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO**

INSTITUTO DE FISICA Y MATEMATICAS UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

COMITÉ TUTOR

**DR. ABDON E. CHOQUE RIVERO**

INSTITUTO DE FISICA Y MATEMATICAS UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

**DR. MANUEL JESÚS FALCONI MAGAÑA**

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNAM

MÉXICO, D.F. AGOSTO DEL 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicada a  
mi esposa,  
padres y hermanos*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que con su apoyo y cariño hicieron que la realización de esta tesis fuera posible.

Al Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro que me dirigió durante todo el proyecto, y que con mucha paciencia me fue guiando paso a paso resolviendo mis dudas y dedicándole tiempo extra a todas y cada una de las dificultades con que nos encontramos a lo largo de este trabajo.

A el Dr. Abdon E. Choque Rivero, el Dr. Baltazar Hernandez Aguirre, el Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova, el Dr. Pavel Naumkin y la Dra. Tatjana Vukasinav quienes junto el Dr. Osvaldo integraron mi mesa sinodal, y que con sus comentarios y observaciones hicieron posible una mejor edición de esta tesis.

A todos mis profesores y compañeros con los que compartí día a día el conocimiento que me llevo a lograr este objetivo.

A mi esposa por su apoyo y comprensión, a mis padres que me dieron la vida y que creyeron en mí dándome una carrera y brindándome todo su amor desde el inicio de mi educación escolar y hasta el día de hoy en que termino una etapa más, y a mis hermanos que me brindaron su apoyo incondicional y que juntos crecimos consolidando las bases necesarias para alcanzar esta meta.

A las instituciones que conforman el PCCM así como al CONACYT por el apoyo y facilidades brindadas para la realización de mi doctorado.

Gracias a Dios que me permitió vivir para realizar este trabajo rodeado de gente que me quiere y me estima como persona.

**A todos muchas Gracias**

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Campos vectoriales . . . . .	1
1.2. Criterios relativos a la existencia de órbitas periódicas . . . . .	3
1.2.1. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	3
1.2.2. Sistemas de Liénard . . . . .	4
1.2.3. Teoría de índices . . . . .	6
1.3. Algunos métodos de solución de E.D.P. . . . .	7
1.3.1. Método de las características . . . . .	7
1.3.2. Formas especiales de ecuaciones parciales . . . . .	13
<b>2. Funciones de Dulac</b>	<b>21</b>
2.1. Criterio de Bendixson-Dulac . . . . .	21
2.2. Método de construcción de funciones de Dulac . . . . .	23
2.3. Sistemas particulares . . . . .	27
2.3.1. Funciones de Dulac que dependen de una variable . . . . .	28
2.3.2. Sistemas que se escriben como producto o suma de funciones . . . . .	31
2.4. Otros casos especiales . . . . .	32
<b>3. Propiedades de las funciones de Dulac</b>	<b>37</b>
3.1. Propiedades . . . . .	37
3.1.1. Funciones de Dulac y perturbaciones . . . . .	41
3.1.2. Funciones de Dulac y sumas de campos vectoriales . . . . .	42

3.1.3. Campos vectoriales multiplicados por funciones escalares . . . . .	45
3.2. Sistemas transformados . . . . .	46
<b>4. Dominios múltiplemente conexos</b>	<b>50</b>
4.1. Teorema extendido de Bendixson-Dulac . . . . .	51
4.2. Método propuesto en dominios múltiplemente conexos . . . . .	54
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>62</b>
5.1. Modelos de dinámica poblacional . . . . .	62
5.1.1. Modelos poblacionales de Presa-Depredador . . . . .	64
5.1.2. Modelos poblacionales por competencias . . . . .	66
5.2. Modelos epidemiológicos . . . . .	69
5.3. Sistema de Van der Pol . . . . .	73
<b>6. Sistemas tipo Liénard</b>	<b>75</b>
6.1. Ecuación de Liénard . . . . .	75
6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard . . . . .	82
<b>7. Sistema tipo Kukles</b>	<b>91</b>
7.1. Criterios de no existencia de ciclos límite . . . . .	91
7.2. Criterios sobre existencia de un ciclo límite en sistemas tipo Kukles . . . . .	98
<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>

# Resumen

En la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, el criterio de Bendixson-Dulac es una herramienta muy útil para determinar si un campo vectorial de dimensión 2 tiene ausencia de órbitas periódicas en sus trayectorias, sin embargo, su implementación requiere de una función auxiliar, llamada *función de Dulac*, para cuya construcción, no hay procedimientos generales a fin de obtenerla. El interés principal de esta tesis es el estudio y construcción de estas funciones así como sus aplicaciones. Como primer paso desarrollamos un método eficaz para construir *funciones de Dulac* en el caso de dominios simplemente conexos usando ecuaciones diferenciales parciales. Luego estudiamos varias características importantes de estas funciones, por ejemplo, se introduce el conjunto de *funciones de Dulac*, también estudiamos algunas relaciones entre las *funciones de Dulac* de un campo vectorial con otro campo perturbado, consideramos también condiciones suficientes para que una suma de los campos de vectores admita *funciones de Dulac*. Además se estudia el comportamiento de tales funciones si transformamos un campo vectorial por un difeomorfismo, entre otros.

Posteriormente, se generaliza el método de construcción para el caso de los dominios múltiplemente conexos, en este contexto los criterios de Bendixson-Dulac dan cotas superiores para estimar el número de ciclos límite. Finalmente con el uso de nuestros métodos se estudian las condiciones suficientes para la existencia, unicidad y algunas cotas en el número de ciclos límite para ciertos sistemas especiales como: sistemas Liénard, sistemas Liénard generalizadas y los sistemas de tipo Kukles.

**Palabras clave:** Bendixson-Dulac, funciones de Dulac, órbitas periódicas, ciclos límite, sistemas tipo Kukles, sistemas tipo Liénard.



# Abstract

In the qualitative theory of differential equations, the Bendixson-Dulac criterion is a very useful tool for the study of limit cycles, however its implementation requires an auxiliary function, called *Dulac function*, for which, there are no general procedures to obtain it. The main interest of this thesis is the study of such functions and their applications. We first developed a method for constructing Dulac function in the case of simply connected domains using partial differential equations. Then we study several characteristics of these functions, for example, we introduce the set of functions of Dulac, we give some relations between the Dulac functions of a field and some perturbations, we consider sufficient conditions for a sum of vector fields admits Dulac functions. We also study the behavior of Dulac functions if we transform a vector field by a diffeomorphism, among others.

Subsequently, we generalize our construction method to the case of multiply connected domains in this context the Bendixson-Dulac criteria give upper bounds for the number of limit cycles. Finally using our methods we studied sufficient conditions for nonexistence, uniqueness and some bounds on the number of limit cycles for certain special systems like: Liénard systems, generalized Liénard systems and Kukles type systems.

**Key words:** Bendixson-Dulac, Dulac functions, periodic orbits, limit cycles, Kukles-type systems, Liénard-type systems.

# Introducción

Las ecuaciones diferenciales son una pieza clásica y central en las matemáticas modernas, han mostrado ser una herramienta poderosa para el desarrollo de las ciencias, así como una alta eficacia en la descripción de fenómenos en la naturaleza y por ende en el campo de las aplicaciones.

Después de su desarrollo inicial debido a I. Newton y Leibnitz, durante los siguientes dos siglos el interés en el área estuvo centrado principalmente en la búsqueda de métodos de integración explícitos para las ecuaciones diferenciales por medio de funciones elementales. Sin embargo como exhibió Liouville es imposible integrar ciertas ecuaciones diferenciales mediante funciones elementales, esto abrió la necesidad de encontrar nuevos enfoques de estudio.

Posteriormente H. Poincaré y A. Lyapunov en [1] y [6] respectivamente sentaron las bases de lo que hoy se conoce como la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. La meta ahora consiste en describir propiedades locales y globales de las soluciones en el conjunto de definición de la ecuación. En las matemáticas contemporáneas, la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es un área de amplio estudio pese a esto aún quedan muchas cuestiones básicas por responder, varias de ellas relativas a ciclos límite es decir, órbitas periódicas aisladas en el conjunto de trayectorias cerradas. Como sabemos hoy estas son piezas claves en el comportamiento global de las soluciones. Así muchos problemas de ecuaciones están relacionados con las órbitas periódicas del sistema, lo cual motiva su estudio, pero decidir si una ecuación diferencial tiene órbitas periódicas o no, así como la cantidad de estas es un problema difícil de resolver, de hecho estas cuestiones están conectadas a preguntas famosas en el medio matemático.

Aún en el caso bidimensional se está lejos de tener un entendimiento aceptable sobre las órbitas periódicas o ciclos límite, a pesar de que se han logrado resultados fuertes en el caso del plano, por ejemplo: el teorema de Poincaré-Bendixson, teoría de índice, criterio de Bendixson-Dulac, y algunos métodos aproximados para predecir la existencia o no existencia de órbitas periódicas (ver [9],[59], [60], [61], [62]).

Ivar Bendixson y Henri Dulac son los autores del famoso criterio de Bendixson-Dulac, recordemos que en [2] Bendixson, fue quien en 1901 enunció un caso particular y posteriormente en [4] Dulac propuso en el año 1923 una generalización de este criterio para descartar existencia de órbitas periódicas, esta versión clásica así como su extensión a anillos forman parte esencial de los cursos de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y se pueden consultar en [18], [19] y [25]. El criterio de Bendixson-Dulac nos da una condición suficiente para la no existencia de órbitas periódicas en regiones simplemente conexas del plano, siempre y cuando exista una función auxiliar, la cual denotaremos como  $h(x_1, x_2)$ , con la propiedad de que la divergencia del producto del campo vectorial por tal función  $h$ , sea distinta de cero y no cambie de signo, a esta función se le conoce como *función de Dulac*, sin embargo a pesar de la fuerza de dicho criterio sufre la desventaja de que no existen algoritmos generales para encontrar dicha función, por lo que algunas *funciones de Dulac* clásicas han sido propuestas en base a la intuición.

En [15] los autores adaptan un método debido a Krasovskii usado en la construcción de funciones de Liapunov, para encontrar algunas *funciones de Dulac* en el caso simplemente conexo, pero esta aplicación es limitada pues como es conocido el método de Krasovskii requiere la determinación de una matriz con propiedades específicas, lo cual complica mucho del proceso. Por otro lado en [33] y [43] se trabaja un procedimiento principalmente para el caso polinomial a fin de construir *funciones de Dulac*, en este método se propone una función de forma específica y mediante una estrategia tipo coeficientes indeterminados se ajustan las constantes de la función, para la obtención de una *función de Dulac*, a pesar de estos avances el sabor aún es de prueba y error.

En esta tesis nos ocuparán cuestiones relativas a las órbitas periódicas de ecuaciones diferenciales en el plano, en particular nos enfocaremos a la existencia y construcción de funciones de Dulac así como a sus generalizaciones.

Uno de nuestros objetivos es que ésta tesis sea lo más auto contenida posible, por lo que dedicamos el primer capítulo a la revisión de algunos resultados básicos sobre órbitas periódicas y ecuaciones diferenciales parciales que serán de utilidad para el desarrollo de nuestro trabajo. También presentamos los resultados preliminares que se han obtenido a lo largo de la historia y que son necesarios para la realización de la misma.

En el Capítulo 2 de esta tesis proponemos un método para la construcción de *funciones de Dulac* basado en asociarle una ecuación diferencial parcial al sistema. Así, establecemos el siguiente:

**Teorema I.** *Para la ecuación diferencial en el plano*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (0.0.1)$$

*Una solución  $h$  de la ecuación asociada*

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (0.0.2)$$

para alguna función  $c$  tal que  $c(x_1, x_2)h(x_1, x_2)$  no cambia de signo y que sólo se anula en un conjunto de medida cero es una función de Dulac sobre  $\Omega$ .

Además como una consecuencia inmediata de este teorema se obtiene el siguiente

**Corolario II.** *Para el sistema de ecuaciones diferenciales dado en el teorema anterior, si la ecuación asociada tiene una solución  $h$  que no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero sobre  $\Omega$  (para alguna función  $c$  que tampoco cambia de signo y que sólo se anula en un conjunto de medida cero), entonces  $h$  es una función de Dulac para el sistema de ecuaciones diferenciales sobre  $\Omega$ .*

El cual resulta útil para la existencia y construcción de funciones de Dulac.

También aplicamos dichos resultados para dar condiciones suficientes para la existencia de funciones de Dulac que dependen de una variable, para ello consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}_\Omega = \{f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) : f \text{ no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero}\}.$$

En particular obtenemos la siguiente

**Proposición III.** *Suponga que existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$ , tal que*

$$\mu_i := \frac{1}{f_i} \left( c - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \text{ depende sólo de } x_i, \text{ para algún } i \in \{1, 2\}$$

*y es continua, entonces el sistema admite una función de Dulac.*

Posteriormente generalizamos esta idea para dar condiciones suficientes para la existencia de funciones de Dulac que dependen de funciones especiales, como por ejemplo; productos de la forma  $g_1(x_1)g_2(x_2)$  o sumas  $k_1(x_1) + k_2(x_2)$ , entre otras, ver teorema 2.10 y corolario 2.11. Además en este capítulo construimos funciones de Dulac de algunos sistemas con formas específicas y presentamos varios ejemplos para ilustrar nuestros resultados.

En el capítulo 3, estudiamos algunos aspectos del conjunto de funciones de Dulac al que denotamos como  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}(F)$  y que está asociado a un campo vectorial  $F$  y a un dominio específico, en particular, para obtener una versión más débil del criterio de Bendixson-Dulac, se enuncia la siguiente

**Proposición IV.** *Sea  $\Omega$  una región abierta simplemente conexa y  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  un campo vectorial. Si para cada conjunto abierto simplemente conexo  $\Omega_0$  compactamente contenida en  $\Omega$  se tiene  $\mathcal{D}_{\Omega_0}(F) \neq \emptyset$ , entonces el sistema de ecuaciones no tiene órbitas periódicas en  $\Omega$ .*

Donde un conjunto abierto  $\Omega_0$  está compactamente contenido en otro conjunto abierto  $\Omega$  si se cumple que  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$  y  $\overline{\Omega_0}$  es compacto.

Damos también en este capítulo 3 algunos resultados de cuando es posible conservar la existencia de una *funciones de Dulac* para un campo vectorial cuando a éste se le provocan pequeñas perturbaciones. Además consideramos condiciones suficientes para que una suma de campos vectoriales admita *funciones de Dulac*. También estudiamos el comportamiento

de las *funciones de Dulac* si transformamos un campo vectorial mediante un difeomorfismo, (éste es el contenido de la proposición 3.17).

Por otro lado, el teorema de Bendixson-Dulac ha sido objeto de varias extensiones interesantes en diversas direcciones (ver por ejemplo [17], [22], [29], [33], [43] y las referencias en ellas), unas de estas generalizaciones que serán de nuestro particular interés son las que se refieren al dominios más generales en el plano. Así el teorema de Bendixson-Dulac en *dominios múltiplemente conexos* juegan un papel fundamental para encontrar cotas superiores para el número de ciclos límite que puede tener un campo vectorial ver [33], [43], [47]. En las versiones extendidas resulta que el estudio de las funciones

$$M_s := f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + s h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)$$

donde  $s$  es un real y  $h$  una función continua (a la que por uniformidad continuaremos llamándole *función de Dulac*), son de sumo interés para determinar el número de ciclos límite del sistema, sin embargo, el obtener una función  $h$  tal que la expresión anterior posea ciertas propiedades sigue siendo una tarea bastante complicada.

En el capítulo 4 extendemos el método de construcción usando ecuaciones parciales a este contexto, así en combinación con resultados en [47], obtenemos

**Proposición V.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto con frontera regular. Supongamos que existen  $s \in \mathbb{R}$  y una función  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\langle \nabla h, F \rangle + s h \operatorname{div}(F) = c h, \quad (0.0.3)$$

*admite una solución analítica  $h$ , con el producto  $ch$  definida en todo  $\Omega$  y que no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Entonces los ciclos límite del sistema de ecuaciones, o están completamente contenidos en  $Z(h)$ , o no interceptan a  $Z(h)$ . Más aún el número de ciclos límite contenidos en  $Z(h)$  es a lo más  $co(h)$  y el número  $N$  de ciclos límite que no interceptan a  $Z(h)$  satisface*

$$N \leq \begin{cases} l(\Omega) & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s = 0, \\ l(\Omega, h) & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

*Además para cualquier  $s \neq 0$  los ciclos límite de esta segunda forma son hiperbólicos.*

En el resto del capítulo presentamos varios ejemplos para ilustrar nuestros resultados.

En el capítulo 5 aplicamos los métodos desarrollados en los capítulos anteriores analizando algunos sistemas físicos o biológicos relevantes en la literatura. En particular, estudiamos algunos modelos matemáticos en dinámica de poblaciones o modelos epidemiológicos los cuales envuelven sistemas no lineales autónomos de dos dimensiones, también estudiamos

el famoso ejemplo debido a Van der Pol, obtenemos resultados relativos a la no existencia y unicidad de ciclos límite.

Continuando con la aplicación de los métodos previamente desarrollados, nos enfocamos sobre ecuaciones tipo Liénard, esta es sin duda una de las ecuaciones diferenciales más estudiadas dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1)x_2. \end{cases} \quad (0.0.4)$$

En el capítulo 6, presentamos varios criterios relativos a la no existencia o unicidad de ciclos límite por mencionar algunos probamos los siguientes resultados:

**Proposición VI.** Sea  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada por  $G(x_1) := \int g(x_1)dx_1$  con  $g$  analítica en  $\mathbb{R}$ . Si para algún  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto donde  $G + a$  es no positivo, tiene sólo una componente cerrada conexa y se satisface que  $f(x_1)(G(x_1) + a) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , entonces la ecuación de Liénard tiene a lo más un ciclo límite.

**Proposición VII.** Suponga que existe  $m$  tal que  $f(x_1)[2F(x_1) + m] - g(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  con  $F(x_1) = \int f(x_1)dx_1$ , entonces la ecuación de Liénard no tiene órbitas periódicas.

En la segunda parte de dicho capítulo, estudiamos sistemas de Liénard generalizados dados por el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2), \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1, x_2)k(x_2). \end{cases} \quad (0.0.5)$$

para los cuales damos varias condiciones de no existencia y algunas cotas del número de ciclos límite, por mencionar algunos obtenemos:

**Proposición VIII.** Si cualquiera de las siguientes funciones pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-$

i).-  $(rx_1f(x_1, x_2)k'(x_2))^2 + 4rx_1g(x_1)k'(x_2)$  para algún  $r \in \mathbb{R}$ ,

ii).-  $(f(x_1, x_2)k(x_2))^2 + 4g'(x_1)x_2k(x_2)$ ,

entonces el sistema anterior no admite ciclos límite.

**Proposición IX.** Sea  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente monótona tal que

$$f^2(x_1, x_2)\psi^2(x_1)k'^2(x_2) + 4\psi'(x_1)\psi(x_1)g(x_1)k'(x_2) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-, \quad (0.0.6)$$

entonces el sistema anterior no admite ciclos límite.

Capítulo 7, aquí estudiamos *sistemas tipo Kukles* de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = h_0(x_1) + h_1(x_1)x_2 + h_2(x_1)x_2^2 + h_3(x_1)x_2^3, \end{cases} \quad (0.0.7)$$

realizando su análisis mediante nuestros métodos se obtienen varias condiciones para la ausencia de ciclos límite por mencionar algunos obtenemos:

**Proposición X.** *Suponga que  $h_2 \in \mathbb{R}^2$  y  $h_1^2 \leq 3h_0h_2$  entonces el sistema de Kukles no tiene ciclos límite.*

**Proposición XI.** *Si cualquiera de las siguientes afirmaciones se cumple*

a)  $h_1 = 0$  y  $h_0 + h_2x_2^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,

b)  $h_1 + 3h_3x_2^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,

c)  $h_2 + h_3H_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , y  $(\frac{2}{3}h_1)^2 \leq (h_2 + h_3H_1)(\frac{1}{3}h_1H_1 + h_0)$ ,

*entonces el sistema de Kukles no tiene ciclos límite.*

Los resultados de los capítulos 2 y 4 han sido publicados en [50] y [52] respectivamente. El contenido del capítulo 3 aparecen en los artículos [51], [53] y [54]. Los resultados de los capítulos 6 y 7 forman parte de los trabajos [55], [56] y [58].

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo estableceremos nuestro entorno de trabajo, es decir, introduciremos notación y definiciones así como algunos resultados que nos serán de utilidad en el desarrollo de esta tesis.

### 1.1. Campos vectoriales

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos un campo vectorial de clase  $C^1$  en  $\Omega$  como una función  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ . Identificamos por  $x(t)$ , con  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  a las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.1.1)$$

A continuación enunciaremos el teorema de existencia y unicidad de soluciones, para una demostración de este resultado se puede consultar [25] pág. 74.

**Teorema 1.1. (Existencia y unicidad).** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz, entonces para cualquier  $x_0 \in \Omega$  existe  $a > 0$  y una única solución  $x : (-a, a) \rightarrow \Omega$  de la ecuación*

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

Del teorema de existencia y unicidad, tenemos que para cada  $x_0 \in \Omega$  existe un intervalo abierto maximal  $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$  que contiene al cero, sobre el cual existe una única solución (posiblemente el intervalo sea no acotado), más formalmente tenemos;

**Definición 1.2.** Sea  $x_0 \in \Omega$  y  $\varphi : I_{x_0} \rightarrow \Omega$  una solución del sistema (1.1.1) tal que  $\varphi(0) = x_0$ . La solución  $\varphi : I_{x_0} \rightarrow \Omega$  es llamada *maximal* si para cada solución  $\psi : J_{x_0} \rightarrow \Omega$



tal que  $I_{x_o} \subseteq J_{x_o}$  y  $\varphi = \psi|_I$ , entonces  $I_{x_o} = J_{x_o}$  y en consecuencia  $\varphi = \psi$ . El intervalo  $I_{x_o}$  es llamado *intervalo maximal*.

Dada una ecuación diferencial de la forma (1.1.1) pueden existir dos trayectorias especiales y de sumo interés (pues como se puede ver son fundamentales en el estudio del comportamiento global de las trayectorias de ecuaciones en el plano), estas son: puntos críticos y órbitas periódicas.

Comencemos por definir cada una de ellas, para esto denotamos como  $\varphi_p(t)$  a la curva solución del sistema que pasa por el punto  $p$ , y supondremos que en el tiempo  $t = 0$  se tiene  $\varphi_p(0) = p$ .

**Definición 1.3.** Para una ecuación como en (1.1.1)

- Decimos que un punto  $p \in \Omega$  es un *punto crítico* (*punto singular*), si  $\varphi_p(t) = p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- Decimos que una solución  $\varphi_p(t)$  es una *órbita periódica*, si  $p$  no es punto crítico y existe  $T > 0$ , tal que  $\varphi_p(T + t) = \varphi_p(t)$ .
- Un *ciclo límite* del sistema diferencial, es una órbita periódica aislada.

Recordemos tambien el siguiente resultado

**Proposición 1.4.** Si  $\varphi$  es una solución maximal del sistema diferencial (1.1.1), entonces una de las siguientes afirmaciones se cumple.

- $\varphi$  es una biyección sobre su imagen.
- $I = \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  es una función periódica de periodo mínimo  $\tau$  (es decir, existe un valor  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  si  $|t_1 - t_2| < \tau$ ,
- $I = \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  es una función constante y su trayectoria es un punto.

Por *retrato fase* de un campo vectorial  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  entendemos el conjunto de trayectorias (orientadas) de  $F$ . Además tenemos

**Definición 1.5.** Sea  $\varphi(t) = \varphi_p(t)$  la curva solución del sistema 1.1.1 que pasa por el punto  $p$ , definido sobre su intervalo máximo de solución  $I_p = (t_1, t_2)$ , entonces

- Si  $t_2 = \infty$  se define el conjunto
 
$$\omega(p) = \{q \in \Omega : \text{Existe } \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow \infty \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\};$$
- De igual forma, si  $t_1 = -\infty$  se define el conjunto
 
$$\alpha(p) = \{q \in \Omega : \text{Existe } \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Los conjuntos  $\omega(p)$  y  $\alpha(p)$  son llamados *conjunto  $\omega$ -límite* y *conjunto  $\alpha$ -límite* respectivamente.

□

## 1.2. Criterios relativos a la existencia de órbitas periódicas

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales nos interesa determinar si existen órbitas periódicas o no en su retrato fase. Para esto enunciaremos algunos resultados existentes sobre esta cuestión (excepto que digamos lo contrario nos restringimos al caso bidimensional).

### 1.2.1. Teorema de Poincaré-Bendixson

Un conjunto  $\Omega$  en el plano es positivamente (negativamente) invariante por el flujo  $\varphi_x(t)$  de un sistema diferencial, si  $\varphi_x(t) \in \Omega$  para todo  $x \in \Omega$  y para todo  $t > 0$  ( $t < 0$ ).

El siguiente es un resultado clásico para la existencia de órbitas periódicas, para su demostración consultar [1], [34].

**Teorema 1.6** (Poincaré-Bendixson). *Sea  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  una curva solución del campo vectorial  $F$  definido para todo  $t \geq 0$ , tal que  $\gamma_p^+$  está contenida en un conjunto compacto  $K \subset \Omega$ . Suponga que el campo vectorial  $F$  tiene a lo más una cantidad finita de singularidades en  $K$ . Entonces una de las siguientes afirmaciones se cumple.*

1. *Si  $\omega(p)$  contiene sólo puntos regulares, es decir, no contiene puntos críticos, entonces  $\omega(p)$  es una órbita periódica.*
2. *Si  $\omega(p)$  contiene tanto puntos singulares como regulares, entonces  $\omega(p)$  está formado por un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de los puntos singulares en  $\omega(p)$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .*
3. *Si  $\omega(p)$  no contiene puntos regulares, entonces  $\omega(p)$  es un único punto singular.*

Una consecuencia interesante de este teorema está reflejado en el siguiente corolario el cual se puede consultar en [34].

**Corolario 1.7.** *Un conjunto cerrado, acotado y no vacío  $K \subset \mathbb{R}^2$  que es positivamente (negativamente) invariante por el flujo  $\varphi_t$  de (1.1.1) contiene una órbita periódica o un punto crítico.*

**Ejemplo 1.1.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x(-x^2 - 2y^2 + 1) + y, \\ \dot{x}_2 &= y(-2x^2 - y^2 + 1) - x, \end{cases}$$

cuya gráfica se representa en la figura a), además consideremos la región marcada en la figura b) que es positivamente invariante (cualquier trayectoria dentro de la región se conserva dentro de la región para todo  $t > 0$ )

## 1.2. Criterios relativos a la existencia de órbitas periódicas

---

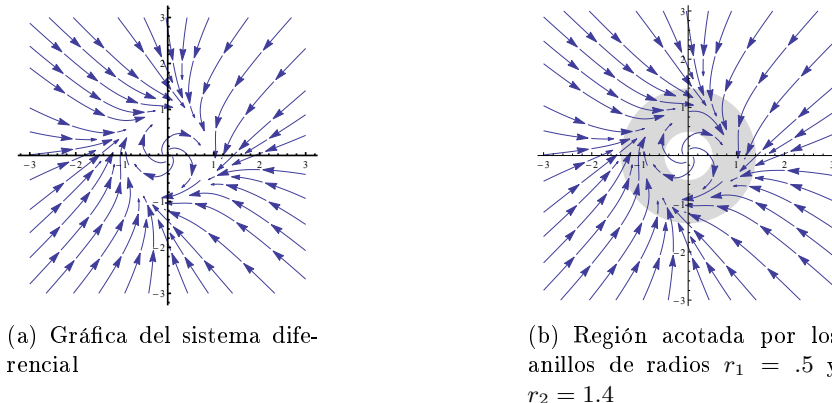


Figura 1.1: Región acotada que garantiza la existencia de órbitas periódicas

Dado que el sistema tiene un único punto crítico, el cual está ubicado en el origen (fuera de la región marcada) por el corolario anterior, podemos asegurar que en esta región existe al menos una órbita periódica, la cual podemos observar si acercamos un poco más la imagen, como lo muestra la siguiente gráfica.

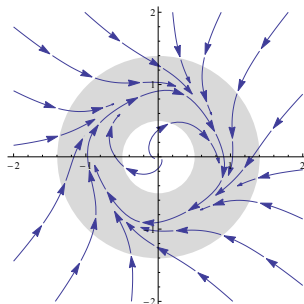


Figura 1.2: Órbita periódica del sistema

□

### 1.2.2. Sistemas de Liénard

Una ecuación diferencial se llama *ecuación de Liénard*, si es una ecuación de la forma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

Pasando al sistema asociado, para esto tomamos  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1$ , obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_1)x_2 - g(x_1). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

En este caso es posible dar condiciones relativamente generales sobre  $f, g$  para probar la existencia de una única órbita periódica; en forma más precisa se tiene, ver [24], página 404.

**Teorema 1.8.** Sean  $f, g$  funciones  $C^1$  tales que:

- (a).-  $g$  es una función impar y  $g(x_1) > 0$  si  $x_1 > 0$ ;
- (b).-  $f(x_1)$  es impar, y no cambia de signo en  $x_1 > 0$ ;
- (c).-  $g(x_1) > \alpha f(x_1)F(x_1)$  para  $x_1 > 0$ , donde  $F(x_1) = \int_0^{x_1} f(s)ds$ ,  $\alpha > 1$

entonces la ecuación de Liénard tiene exactamente una órbita periódica.

Un caso particular del sistema de Liénard es dado por la ecuación de Van der Pol, que resulta de tomar  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$  y  $g(x) = x$ , ver [20].

**Ejemplo 1.2.** La ecuación de Van der Pol

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

tiene un ciclo límite sobre el plano.

En efecto, podemos ver que satisface las condiciones del teorema 1.8 relativo a la ecuación de Liénard.

De hecho existen condiciones de algunas  $f$  más generales para obtener órbitas periódicas de sistemas tipo Liénard. Por ejemplo

**Teorema 1.9.** La ecuación de Liénard con  $f, g$  continuas, tiene una solución periódica bajo las siguientes condiciones:

- (a).- Existe  $a > 0$  tal que  $f(x_1) > 0$  cuando  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} > a$ ;
- (b).-  $f(0) < 0, (f(x_1) < 0$  (en una vecindad de el cero);
- (c).-  $g(0) = 0, g(x_1) > 0$  cuando  $x_1 > 0$ , y  $g(x_1) < 0$  cuando  $x_1 < 0$ ;
- (d).-  $G(x_1) = \int_0^x g(s)ds \rightarrow \infty$  cuando  $x_1 \rightarrow \infty$ .

## Sistema gradiente

Existen además familias de ecuaciones diferenciales para las que es posible probar resultados relativos a la existencia de órbitas periódicas, las cuales, a pesar de su particularidad son importantes en aplicaciones o para fines teóricos, por ejemplo tenemos:

## 1.2. Criterios relativos a la existencia de órbitas periódicas

---

**Definición 1.10.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto, un *sistema gradiente* es una ecuación de la forma

$$\dot{x} = -\text{grad}v(x),$$

donde  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2$  y  $\text{grad}v(x) = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$ .

**Proposición 1.11.** *Un sistema gradiente  $\dot{x} = -\text{grad}v(x)$  no posee órbitas periódicas.*

Es fácil ver que el valor de la función  $v(x)$  es decreciente a lo largo de trayectorias no triviales, por lo tanto, no puede haber soluciones periódicas.

### 1.2.3. Teoría de índices

Dada una órbita periódica  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ , nos interesa saber qué tipo de trayectorias hay en la región acotada por la curva, para esto, denotémosla por  $\text{int}(\gamma)$ , y recordemos la siguiente definición

**Definición 1.12.** Una curva de Jordán (en  $\mathbb{R}^2$ ) es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $S^1$ .

Consideremos ahora la ecuación (1.1.1) con  $F := (f_1, f_2)$  es decir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Sea  $\theta$  el ángulo que el campo vectorial  $F := (f_1, f_2)$  tiene con el eje  $x$  positivo, y  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordán orientada positivamente que no contiene puntos críticos de  $F = (f_1, f_2)$ . El *índice* de  $F$  con respecto a  $\gamma$  está dado por:

$$j_F(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}. \quad (1.2.2)$$

Note que  $j_F(\gamma)$  es un múltiplo entero de  $2\pi$  y representa el número de vueltas que  $F$ , da al recorrer  $\gamma$ , el ángulo que  $F$  tiene con respecto al eje  $X$  cambia conforme  $\gamma$  es recorrido una vez, en [19] se prueba el siguiente resultado.

**Lema 1.13.** *Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordán orientada positivamente que no contiene puntos críticos de  $F$ , Entonces:*

- a).- *Si  $\text{int}(\gamma)$  no contiene puntos críticos, entonces  $j_F(\gamma) = 0$ .*
- b).- *Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos curvas de Jordán con  $\gamma_1 \subset \text{int}(\gamma_2)$  y si no hay puntos críticos fuera de  $\gamma_1$  y dentro de  $\gamma_2$  entonces  $j_F(\gamma_1) = j_F(\gamma_2)$ .*

El resultado anterior nos motiva a definir el *índice* de un punto crítico  $x_0$  en la siguiente manera. Sea  $\gamma$  una curva de Jordán tal que  $x_0 \in \text{int}(\gamma)$  y que no contenga ningún otro punto crítico de  $F$ , entonces:

$$j_F(x_0) := j_F(\gamma).$$

Si  $\gamma$  encierra una cantidad finita de puntos críticos, una aplicación del lema anterior nos da:

**Lema 1.14.** *Sea  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordán orientada positivamente cuyo interior contiene los puntos críticos  $x_1, \dots, x_n$ . Entonces*

$$j_F(\gamma) = \sum_{k=1}^n j_F(x_k).$$

**Teorema 1.15.** *Si  $\gamma$  es una órbita periódica para el flujo de  $\dot{x} = f(x)$ , entonces.*

$$j_F(\gamma) = +1.$$

Esto produce una relación entre una órbita periódica y la naturaleza de los puntos que encierra.

Otro criterio importante en el estudio de las órbitas periódicas es debido a I. Bendixson y H. Dulac, sin embargo dado que es la base de esta tesis, este resultado lo analizaremos en el siguiente capítulo darle mayor seguimiento a la construcción de nuestros resultados.

## 1.3. Algunos métodos de solución de E.D.P.

### 1.3.1. Método de las características

El *método de las características* llamado así debido a que emplea ecuaciones características (ver definición 1.18), es una técnica clásica que resulta muy eficaz para resolver varios tipos de ecuaciones diferenciales parciales.

**Definición 1.16.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , abierto. Una Ecuación Diferencial Parcial de Primer Orden de la forma

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad P, Q, R \in C^1(\Omega), \quad (1.3.1)$$

se llama Ecuación Diferencial Parcial cuasilineal de Primer Orden, donde las funciones coeficientes  $P, Q$  no se anulan simultáneamente en  $\Omega$ .

### 1.3. Algunos métodos de solución de E.D.P.

---

La ecuación (1.3.1) se llama cuasilineal pues en general las funciones coeficientes  $P, Q, R$  no necesariamente son transformaciones lineales en la tercera coordenada.

Denotamos el vector  $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , entonces la ecuación (1.3.1) se escribe como

$$F \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right) = 0$$

Sea  $S$  una superficie en  $\Omega$  tal que representa la gráfica de una función diferenciable en dos variables  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  y tal que  $z = f(x, y)$ . Entonces si se define  $E(x, y, z) = z - f(x, y)$  tenemos que  $S$  coincide con la gráfica del conjunto

$$E^{-1}(0) = \{(x, y, z) | z - f(x, y) = 0\}$$

La superficie  $S$  se puede entonces considerar como la superficie de nivel cero de la función  $E$ . Si  $S$  es una superficie regular que es solución de (1.3.1) y consideramos el gradiente  $\nabla E = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)$  se tiene de inmediato la identidad

$$F \cdot \nabla E \equiv 0, \quad \text{dentro del conjunto } E^{-1}(0).$$

Si se interpreta geoméricamente la identidad anterior significa que la superficie solución  $S$ , también llamada *superficie integral*, es tangente al campo de vectores  $F$ .

Para encontrar superficies tangentes al campo de vectores  $F$  recordemos la definición de órbita o trayectoria de un campo de vectores.

**Definición 1.17.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de vectores. Una curva paramétrica  $\gamma : I \rightarrow \Omega$  donde  $I$  es un subintervalo de  $\mathbb{R}$  es una órbita del campo vectorial si y sólo si se satisface la identidad

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} \equiv F(\gamma(t)) \quad \text{en un intervalo } I \in \mathbb{R} \quad (1.3.2)$$

La definición anterior dice que una curva paramétrica tal que el vector tangente a la curva coincide con el campo de vectores en cada punto, es una órbita.

Nótese que si se tiene una superficie formada sólo por órbitas del campo de vectores entonces es inmediato que es una superficie tangente al campo de vectores y en consecuencia es una solución de la Ecuación Diferencial Parcial (1.3.1). El problema para encontrar superficies integrales se reduce a conseguir órbitas del campo de vectores.

La identidad (1.3.2), se puede escribir equivalentemente en término de las componentes de los vectores, de donde se tiene la identidad:

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) \equiv (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

o bien, simplemente igualando las componentes de los campos de vectores se tiene el sistema de tres ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y, z) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial t} = R(x, y, z). \end{cases} \quad (1.3.3)$$

**Observación:** El sistema en general no es lineal y se sabe que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales es difícil de resolver explícitamente. Una alternativa para conseguir una solución del sistema, consiste simplemente en eliminar el parámetro  $t$  (sólo se pierde la orientación inducida a las curvas por el parámetro) de las formas diferenciales y conseguir dos expresiones diferentes de tal suerte que sus respectivas superficies se intercepten transversalmente.

Al despejar  $\partial t$  de las tres ecuaciones del sistema anterior e igualar obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial P(x, y, z)} = \frac{\partial y}{\partial Q(x, y, z)} = \frac{\partial z}{\partial R(x, y, z)}. \quad (1.3.4)$$

Al resolver una igualdad de la expresión anterior (cualquier combinación, normalmente escogemos las formas más fáciles de resolver) obtenemos la solución general de esta igualdad en la forma

$$\phi_1(x, y, z) = c_1,$$

luego resolviendo otra igualdad obtenemos una segunda solución dada por

$$\phi_2(x, y, z) = c_2.$$

Notémos que en el caso de que la ecuación (1.3.1) sea homogénea, es decir,  $R(x, y, z) \equiv 0$ , basta con resolver la primera igualdad de la expresión (1.3.4), pues la segunda característica se obtiene de inmediato y es igual a  $z$ , es decir debemos resolvermos

$$\frac{\partial x}{\partial P(x, y, z)} = \frac{\partial y}{\partial Q(x, y, z)}.$$

para obtener la primera característica  $\phi_1(x, y, z) = c_1$  y en consecuencia la solución de la ecuación (1.3.1) con  $R \equiv 0$  estaría dada por

$$c_2 = \Phi(c_1)$$

o equivalentemente

$$z = \Phi(\phi_1(x, y, z)) \quad (1.3.5)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria,  $C^1$ .



**Definición 1.18.** Supongamos que,

$$\begin{cases} \phi_1(x, y, z) = c_1, \\ \phi_2(x, y, z) = c_2, \end{cases} \quad (1.3.6)$$

son un par de ecuaciones de superficies que se interceptan transversalmente. Estas superficies se llaman *características* de la ecuación cuasilineal.

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad P, Q, R \in C^1(\Omega)$$

La figura 1.3 muestra su interpretación gráfica como superficies de nivel, de donde las intersecciones de las superficies de nivel  $\varphi^{-1}(c_1) \cap \varphi^{-1}(c_2)$  son curvas que contienen soluciones del sistema (1.3.3) o de la ecuación (1.3.1).

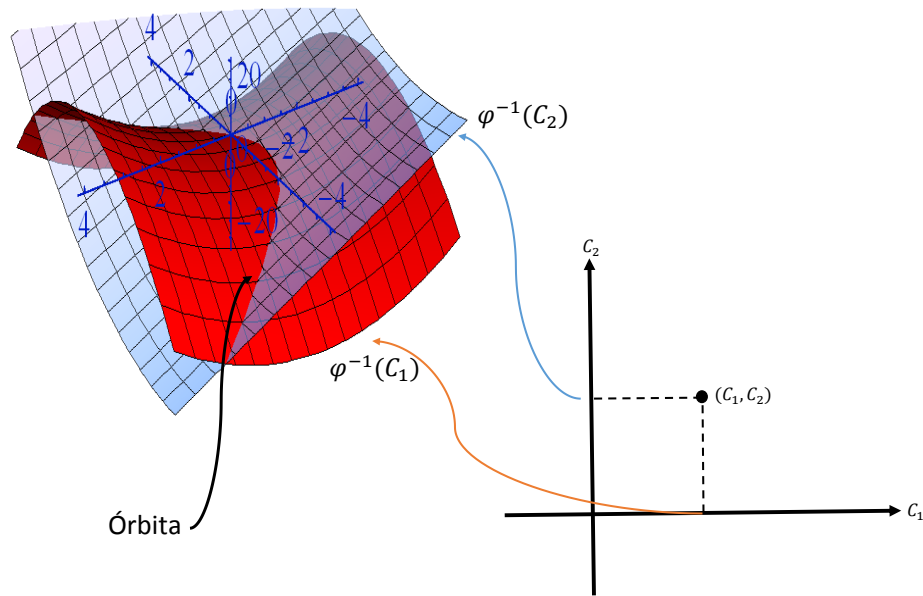


Figura 1.3: Intersecciones de las superficies de nivel  $\varphi^{-1}(c_1) \cap \varphi^{-1}(c_2)$

**Observación:** Nótese que si el punto  $(c_1, c_2)$  se mueve sobre una curva arbitraria en el plano  $c_1 c_2$ , la órbita en  $\mathbb{R}^3$ , adquiere una dinámica y genera una superficie de órbitas, es

decir, se tiene una superficie integral de la ecuación (1.3.1) como se muestra en la figura 1.4.

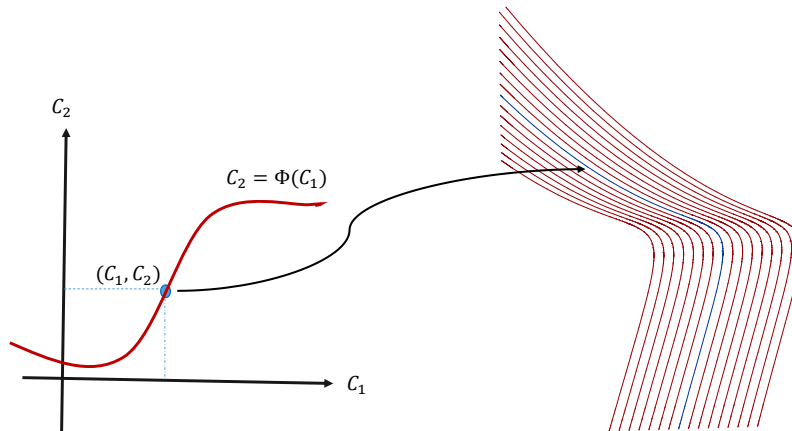


Figura 1.4: Superficie de órbitas.

Bajo esta observación, podemos entonces describir una curva en el plano formado por las características  $c_1, c_2$ , para formar una superficie integral en las siguientes dos formas;

**Primera forma.** Sea  $\Phi(c_1, c_2) = 0$  con  $\Phi \in C^1$ , la ecuación de una curva arbitraria diferenciable en el plano  $c_1 c_2$ . Entonces, por las ecuaciones características (1.3.6) reemplazando las constantes en la ecuación por las funciones  $\phi_1, \phi_2$  respectivamente, se obtiene la ecuación de una superficie integral en las variables  $x, y, z$  de la forma

$$\Phi(\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z)) = 0.$$

La expresión anterior es una ecuación de una familia de superficies integrales, llamada solución general por contener una función arbitraria.

**Segunda forma.** En el plano  $c_1 c_2$  se puede considerar una gráfica de una función

---

### 1.3. Algunos métodos de solución de E.D.P.

---

arbitraria, dada por una ecuación de la forma  $c_2 = \Phi(c_1)$  con  $\Phi \in C^1$  con lo que obtenemos

$$\phi_2(x, y, z) = \Phi(\phi_1(x, y, z)). \quad (1.3.7)$$

**Ejemplo 1.3.** Para encontrar la superficie solución de la Ecuación Diferencial Parcial

$$xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

formamos el sistema de formas diferenciales

$$\begin{cases} dx = xy^2 dt \\ dy = x^2 dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

Igualando las dos primeras ecuaciones se tiene  $x dx = y^2 dy$ , integrando se tiene la primera característica  $x^2/2 - y^3/3 = c_1$  donde  $c_1$  es una constante arbitraria. La segunda característica se deduce fácilmente de la tercera ecuación, pues integrando obtenemos  $z = c_2$ , con  $c_2$  una constante arbitraria y finalmente usando la ecuación (1.3.7) obtenemos

$$c_2 = \Phi(c_1)$$

es decir

$$z = \Phi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)$$

que es una solución general de la ecuación diferencial parcial.

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 y + y) \frac{\partial z}{\partial y} = 2zx^3 y$$

. al escribir la igualdad característica (ecuación (1.3.4)) se obtiene

$$\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial y}{(x^2 y + y)} = \frac{\partial z}{2zx^3 y},$$

al resolver la igualdad  $\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial y}{(x^2 y + y)}$  se obtiene la primer característica

$$\frac{x^3}{3} + x - y = c_1$$

4 luego resolviendo la igualdad  $\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial z}{2zx^3 y}$  obtenemos la segunda característica dada por

$$\frac{e^{1/2x^2}}{z} = c_2$$

así la solución general de acuerdo a (1.3.7), esta dada por  $c_2 = \Phi(c_1)$  o lo que es lo mismo

$$\frac{e^{1/2x^2}}{z} = \Phi\left(\frac{x^3}{3} + x - y\right)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria. Al despejar  $z$  se obtiene

$$z = \frac{e^{1/2x^2}}{\Phi\left(\frac{x^3}{3} + x - y\right)}$$

□

## 1.3.2. Formas especiales de ecuaciones parciales

Mostraremos ahora algunas de las formas más comúnmente usadas dentro de las ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden.

**Ecuaciones de la forma**  $f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$

Considérese la ecuación diferencial parcial homogénea lineal de primer orden con dos variables independientes de la forma:

$$f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 \quad (1.3.8)$$

con  $f, g \in C^1$ .

la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, que resulta usando el *método de las características*

$$\frac{dx_1}{f(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{g(x_1, x_2)} \quad (1.3.9)$$

es llamada *ecuación característica* correspondiente a la ecuación diferencial parcial (1.3.8). Denotando a la solución general de la ecuación característica (1.3.9) por

$$u(x_1, x_2) = c_1 \quad (1.3.10)$$

donde  $C$  es una constante arbitraria.

Entonces la solución general de la ecuación (1.3.8) tiene la forma

$$z = \Phi(u),$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria.

**Nota:** la igualdad (1.3.10) es conocida como *integral principal* de la ecuación diferencial parcial (1.3.8).

**Ejemplo 1.5.** Considere la ecuación

$$(1 - x_2^2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + ae^{x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$$

la ecuación característica está dada por

$$\frac{dx_1}{1 - x_2^2} = \frac{dx_2}{e^{x_1}}$$

y entonces la primera característica es  $x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 - ae^{x_1} = c_1$ . Por lo tanto, por (1.3.5), la solución general es

$$z = \Phi\left(x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 - ae^{x_1}\right).$$

□

**Nota:** Se puede consultar una lista de soluciones para este tipo de ecuaciones en [28], capítulo 2.

**Ecuaciones de la forma**  $f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = h(x_1, x_2)$

Consideremos ahora ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas, y comencemos por ecuaciones de la forma

1. **Usando una solución particular.** Considérese la ecuación diferencial parcial no homogénea lineal de primer orden con dos variables independientes de la forma:

$$f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = h(x_1, x_2) \tag{1.3.11}$$

con  $f, g, h \in C^1$ .

La solución general de la ecuación (1.3.11) puede ser representada como la suma

$$z = z_p + z_0,$$

donde  $z_p$  es una solución particular de esta ecuación y  $z_0$  es la correspondiente solución de la ecuación homogénea.

2. **Método de solución basado en un cambio de variable.** Sea  $u(x_1, x_2) = c_1$  una solución particular (integral principal) de la correspondiente ecuación homogénea en (1.3.11)

$$f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

realizando el cambio de variable  $x_2$  por  $u(x_1, x_2)$  (siempre y cuando sea posible expresar explícitamente  $x_2$  en función de  $x_1, u$ ), la ecuación (1.3.11) se reduce a

$$\bar{f}(x_1, u) \frac{\partial z}{\partial x_1} = \bar{h}(x_1, u), \tag{1.3.12}$$

donde  $\bar{f}(x_1, u) = f(x_1, x_2)$  y  $\bar{h}(x_1, u) = h(x_1, x_2)$  son los coeficientes de la ecuación original escrita en términos de  $x_1$  y  $u$ . La solución general de la ecuación (1.3.12) resolviendo por variables separables, tiene la forma

$$z = \int \frac{\bar{h}(x_1, u)}{\bar{f}(x_1, u)} dx_1 + \Phi(u), \quad (1.3.13)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria en la integración y  $u$  es considerado como un parámetro.

**Observación:** En ocasiones es más fácil expresar  $x_1$  en función de  $x_2$  y  $u$ , en esos casos realizamos el cambio  $x_1 \rightarrow u(x_1, x_2)$ , con lo cual obtendríamos la solución general en la forma

$$z = \int \frac{\bar{h}(x_2, u)}{\bar{g}(x_2, u)} dx_2 + \Phi(u).$$

3. **Método de solución usando el sistema característico.** Consiste en encontrar dos *características* diferentes (ver *método de las características* sección 1.3.1).

$$u_1(x_1, x_2, z) = c_1 \quad u_2(x_1, x_2, z) = c_2$$

del sistema característico

$$\frac{dx_1}{f(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{g(x_1, x_2)} = \frac{dz}{h(x_1, x_2)}$$

la solución general de la ecuación no homogénea (1.3.11) esta definida por

$$\Phi(u_1, u_2) = 0.$$

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la ecuación

$$ae^{x_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + b \frac{\partial z}{\partial x_2} = ce^{2x_2}y.$$

La solución general a la ecuación homogénea correspondiente

$$ae^{x_1} \frac{\partial z}{\partial x_1} + b \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

nos da

$$ax_2 + be^{-x_1} = c_1$$

---

### 1.3. Algunos métodos de solución de E.D.P.

---

por lo tanto si denotamos  $u(x_1, x_2) = ax_2 + be^{-x_1}$  y cambiando la ecuación original de las variables  $x_1$  y  $x_2$  a las nuevas variables  $x_1$  y  $u$ , tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{c}{a^2}(ue^{x_1} - b)$$

integrando esta ecuación se obtiene

$$z = \frac{c}{a^2}e^{x_1}x_2 - \frac{bc}{a^2}x_1 + \Phi(u)$$

tomando en cuenta el cambio realizado, la solución general de la ecuación original esta dada por

$$z = \frac{c}{a}e^{x_1}x_2 + \frac{bc}{a^2}(1 - x_1) + \Phi(ax_2 + be^{-x_1}).$$

□

**Nota:** Se puede consultar una lista de soluciones para este tipo de ecuaciones en [28], capítulo 3.

**Ecuaciones de la forma**  $f(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} = h(x_1, x_2)z$

Algunas de las formas para resolver este tipo de ecuaciones se muestran a continuación, para ver un listado de ecuaciones resueltas ver [28], capítulo 4.

1. **Usando una solución particular.** Considérese la ecuación diferencial parcial homogénea lineal de primer orden con dos variables independientes de la forma:

$$f(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} = h(x_1, x_2)z \quad (1.3.14)$$

con  $f, g, h \in C^1$ .

La solución general de la ecuación (1.3.14) puede ser representada como el producto

$$z = z_p z_0$$

donde  $z_p$  es una solución particular no trivial de esta ecuación y  $z_0$  es la correspondiente solución de la ecuación homogénea de (1.3.14) es decir cuando  $h \equiv 0$ .

2. **Método de solución basado en un cambio de variable.** Sea  $u(x_1, x_2)$  una solución particular (integral principal) de la correspondiente ecuación homogénea de (1.3.14)

$$f(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

tomando el cambio de variable  $x_2$  por  $u(x_1, x_2)$ , (siempre y cuando sea posible expresar explícitamente  $x_2$  en función de  $x_1, u$ ), la ecuación (1.3.14) se reduce a

$$\bar{f}(x_1, u) \frac{\partial z}{\partial x_1} = \bar{h}(x_1, u) z, \quad (1.3.15)$$

donde  $\bar{f}(x_1, u) = f(x_1, x_2)$  y  $\bar{h}(x_1, u) = h(x_1, x_2)$  son los coeficientes de la ecuación original escrita en términos de  $x_1$  y  $u$ . La solución general de la ecuación (1.3.15) resolviendo por variables separables, tiene la forma

$$z = \Phi(u) \exp \left[ \int \frac{\bar{h}(x_1, u)}{\bar{f}(x_1, u)} dx_1 \right], \quad (1.3.16)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria en la integración y  $u$  es considerado como un parámetro.

**Observación:** En ocasiones es más fácil expresar  $x_1$  en función de  $x_2$  y  $u$ , en esos casos realizamos el cambio  $x_1 \rightarrow u(x_1, x_2)$ , con lo cual obtendríamos la solución general en la forma

$$z = \Phi(u) \exp \left[ \int \frac{\bar{h}(x_2, u)}{\bar{g}(x_2, u)} dx_2 \right].$$

3. **Método de solución usando el sistema característico.** Consiste en encontrar dos *características* diferentes (ver *método de las características* sección 1.3.1).

$$u_1(x_1, x_2, z) = c_1 \quad u_2(x_1, x_2, z) = c_2$$

del sistema característico

$$\frac{dx_1}{f(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{g(x_1, x_2)} = \frac{dz}{h(x_1, x_2)z}$$

la solución general de la ecuación homogénea (1.3.14) esta definida por

$$\Phi(u_1, u_2) = 0.$$

4. **Reducción a una ecuación no homogénea.** Usando el cambio de variable  $\eta = \ln |z|$  obtenemos la ecuación de la forma

$$f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = h(x_1, x_2).$$



**Ejemplo 1.7.** Consideremos la ecuación

$$x_1^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + ax_2^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = (bx_1^2 + cx_1x_2 + dx_2^2)z. \quad (1.3.17)$$

Resolvemos primero la parte homogénea,

$$x_1^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + ax_2^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

para esto, primero escribimos la ecuación característica de acuerdo a el *método de las características* visto en la sección 1.3.1, la cual queda como

$$\frac{dx_1}{x_1^2} = \frac{dx_2}{ax_2^2},$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, al resolverla obtenemos

$$\frac{x_1 - ax_2}{ax_1x_2} = c_1$$

por lo tanto, si tomamos  $u(x_1, x_2) = \frac{x_1 - ax_2}{ax_1x_2}$  es decir  $x_2 = \frac{x_1}{a(1 + ux_1)}$  y hacemos el cambio de variable  $x_2 \rightarrow \frac{x_1}{a(1 + ux_1)}$ , la ecuación (1.3.17) queda

$$x_1^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} = \left( bx_1^2 + \frac{cx_1^2}{a(1 + ux_1)} + d \left( \frac{x_1}{a(1 + ux_1)} \right)^2 \right) z$$

Resolviendo esta ecuación por variables separables, (recordemos que  $u$  se considera un parámetro) se obtiene

$$z = \exp \left( bx_1 + \frac{c}{au} \ln(1 + ux_1) - \frac{d}{au(1 + ux_1)} \right) \Phi(u).$$

y en términos de las variables originales  $x_1, x_2$  queda

$$z = \exp \left( bx_1 + \frac{cx_1x_2}{x_1 - ax_2} \ln \left| \frac{x_1}{ax_2} \right| - \frac{adx_2^2}{x_1 - ax_2} \right) \Phi \left( \frac{x_1 - ax_2}{ax_1x_2} \right).$$

que esta bien definida para  $ax_2 - x_1 \neq 0$ ,  $x_1 \neq 0$  y  $x_2 \neq 0$ .

□

**Ecuaciones de la forma**  $f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = h_1(x_1, x_2)z + h_0(x_1, x_2)$

Algunas de las formas para resolver este tipo de ecuaciones se muestran a continuación, para ver un listado de ecuaciones resueltas ver [28], capítulo 5.

1. **Usando una solución particular.** Considérese la ecuación diferencial parcial no homogénea lineal de primer orden con dos variables independientes de la forma:

$$f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = h_1(x_1, x_2)z + h_0(x_1, x_2) \quad (1.3.18)$$

con  $f, g, h_1, h_0 \in C^1$ .

La solución general de la ecuación (1.3.18) puede ser representada como la suma

$$z = z_p + z_0$$

donde  $z_p$  es una solución particular no trivial de esta ecuación y  $z_0$  es la solución de la ecuación homogénea correspondiente es decir cuando  $h_0, h_1 \equiv 0$ .

2. **Método de solución basado en un cambio de variable.** Sea  $u(x_1, x_2) = C$  una solución particular (integral principal) de la correspondiente ecuación homogénea de (1.3.18)

$$f(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + g(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

tomando el cambio de variable  $x_2$  por  $u(x_1, x_2)$ , (siempre y cuando sea posible expresar explícitamente  $x_2$  en función de  $x_1, u$ ), la ecuación (1.3.18) se reduce a

$$\bar{f}(x_1, u) \frac{\partial z}{\partial x_1} = \bar{h}_1(x_1, u)z + \bar{h}_0(x_1, u), \quad (1.3.19)$$

donde  $\bar{f}(x_1, u) = f(x_1, x_2)$ ,  $\bar{h}_1(x_1, u) = h_1(x_1, x_2)$  y  $\bar{h}_0(x_1, u) = h_0(x_1, x_2)$  son los coeficientes de la ecuación original escrita en términos de  $x_1$  y  $u$ . La solución general de la ecuación (1.3.19) usando el factor integrante

$$E = \exp \left[ - \int \frac{\bar{h}_1(x_1, u)}{\bar{f}(x_1, u)} dx_1 \right]$$

tiene la forma

$$z = \frac{1}{E} \left[ \int \frac{E \bar{h}_0(x_1, u)}{\bar{f}(x_1, u)} dx_1 + \Phi(u) \right], \quad (1.3.20)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria en la integración y  $u$  es considerado como un parámetro.

**Observación:** En ocasiones es más fácil expresar  $x_1$  en función de  $x_2$  y  $u$ , en esos casos realizamos el cambio  $x_1 \rightarrow u(x_1, x_2)$ , con lo cual obtendríamos la solución general en la forma

$$z = E \left[ \int \frac{\bar{h}_0(x_2, u) dx_2}{\bar{g}(x_2, u)} \frac{1}{E} + \Phi(u) \right].$$

3. **Método de solución usando el sistema característico.** Consiste en encontrar dos *características* diferentes (ver *método de las características* sección 1.3.1).

$$u_1(x_1, x_2, z) = c_1 \quad u_2(x_1, x_2, z) = c_2$$

del sistema característico

$$\frac{dx_1}{f(x_1, x_2)} = \frac{dx_2}{g(x_1, x_2)} = \frac{dz}{h_1(x_1, x_2)z + h_0(x_1, x_2)}$$

la solución general de la ecuación no homogénea (1.3.18) esta definida por

$$\Phi(u_1, u_2) = 0.$$

**Ejemplo 1.8.** Consideremos la ecuación

$$x_1^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + ax_2^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = bx_1^2 z + x_1 \frac{x_1 - ax_2}{ax_2}. \quad (1.3.21)$$

La solución general a la ecuación homogénea correspondiente

$$x_1^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + ax_2^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

se obtuvo en el ejemplo anterior y es;

$$\frac{x_1 - ax_2}{ax_1 x_2} = c_1$$

por lo tanto, si tomamos  $u(x_1, x_2) = \frac{x_1 - ax_2}{ax_1 x_2}$  es decir  $x_2 = \frac{x_1}{a(1 + ux_1)}$  y hacemos el cambio de variable  $x_2 \rightarrow \frac{x_1}{a(1 + ux_1)}$ , la ecuación (1.3.21) queda

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = bz + u$$

resolvemos esta ecuación usando el factor integrante  $E = e^{-\int b dx_1} = e^{-bx_1}$  se obtiene

$$z = -\frac{u}{b} + e^{bx} \Phi(u).$$

es decir, en las variables  $x_1, x_2$ , la solución es

$$z = \frac{x_1 - ax_2}{bax_1 x_2} + e^{bx} \Phi \left( \frac{x_1 - ax_2}{ax_1 x_2} \right)$$

□

# Capítulo 2

## Funciones de Dulac

El criterio de *criterio de Bendixson-Dulac* es un resultado ampliamente usado para descartar órbitas periódicas, sin embargo en su aplicación se requiere de una función auxiliar para la cual en general no hay algoritmos a fin de determinarla. Nuestra meta en este capítulo es dar un método de construcción, comenzamos este capítulo revisando dicho criterio.

### 2.1. Criterio de Bendixson-Dulac

Antes de comenzar recordemos el siguiente resultado debido a George Green, donde estable la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada y simple, y una integral doble sobre la región plana limitada por la curva.

**Teorema 2.1. (Green, [31])** Sea  $F = (f_1, f_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^1$  es decir, funciones con primeras derivadas parciales continuas en un dominio simplemente conexo  $\Omega$  (es decir  $\Omega$  no posee hoyos), sea  $\gamma \subset D$  una curva de Jordán y  $\text{int}(\gamma)$  la región limitada por la curva, entonces se cumple

$$\oint_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_{\text{int}(\gamma)} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2.$$

Enunciamos ahora un criterio sumamente importante dentro del estudio de las órbitas periódicas publicado en 1901 por el matemático sueco Ivar Bendixson, este resultado ha sido de gran relevancia en la discusión de si un campo vectorial tiene trayectorias periódicas o no, y es pieza clave en este trabajo.

**Teorema 2.2. (Criterio de Bendixson)** Sean  $F = (f_1, f_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^1$  en un dominio simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tales que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  no cambia de signo en  $\Omega$  y sólo se anula

en un conjunto de medida cero. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no tiene órbitas periódicas en  $\Omega$ .

**Demostración.** Supongamos que el sistema tiene una órbita periódica  $\gamma$  con periodo  $T > 0$  en  $\Omega$ , entonces por el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\text{int}(\gamma)} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 &= \int_{\gamma} ((f_1)dx_2 - (f_2)dx_1) & (2.1.1) \\ &= \int_0^T ((f_1)\dot{x}_2 - (f_2)\dot{x}_1)dt = \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1)dt = 0. \end{aligned}$$

Pero como  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero, y no cambia de signo en el  $\text{int}(\gamma)$  esto no es posible.

□

Un resultado más general se encuentra el siguiente teorema debido a el matemático Francés Henry Dulac en 1923. La demostración es similar a la usada para el teorema de Bendixson.

**Teorema 2.3. (Criterio de Bendixson-Dulac)** Sean  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  y  $h(x_1, x_2)$  funciones  $C^1$  en un dominio simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo en  $\Omega$  y se anula sólo en un conjunto de medida cero. Entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega \end{cases} \quad (2.1.2)$$

no tiene órbitas periódicas en  $\Omega$ .

**Ejemplo 2.1.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1^2 + 5x_2^2 \\ \dot{x}_2 = e^{x_1} + x_2^3 x_1 \end{cases}$$

y sea  $h = x_1$  entonces

$$\frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(3x_1^2 + 5x_2^2)x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(e^{x_1} + x_2^3 x_1)x_1}{\partial x_2} = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_2^3 x_1^2 \geq 0,$$

y el sistema no contiene órbitas periódicas en el plano.

□

Así un argumento para descartar la existencia de órbitas periódicas de el sistema (2.1.2) en el plano en una región simplemente conexa  $\Omega$  es encontrar una función  $h(x_1, x_2)$  que satisfaga las condiciones del *teorema de Bendixson-Dulac*, tal función  $h$  es llamada *función de Dulac*. Generalmente no es fácil determinar tales funciones, aunque siempre es posible proponer algunas funciones candidatos, por ejemplo:  $h = 1, x_1^s, x_2^s, e^{x_1 x_2}, x_1^s x_2^t$ .

Cabe mencionar que la existencia de funciones de Dulac puede darnos en ciertos casos un dibujo general o completo acerca de la dinámica del espacio fase o relacionarse con cuestiones de estabilidad [12], [16] y [35].

Nuestro objetivo es obtener un método que nos permita encontrar funciones de Dulac, para esto usaremos una ecuación diferencial parcial asociada al sistema.

## 2.2. Método de construcción de funciones de Dulac

El proponer funciones  $h$  de la forma antes mencionada sirve sólo para un número muy limitado de sistemas de ecuaciones razón por la cual estudiaremos situaciones más generales y que resultan bastante interesantes.

1. Primero propondremos otra función arbitraria  $k(x_1, x_2)$  positiva o negativa tal que sólo se anule en un conjunto de medida cero. Y que además satisfaga

$$\frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} = k(x_1, x_2).$$

2. Ahora aprovechando la libertad que tenemos sobre  $k$ , en orden de obtener algunos resultados, tomamos  $k(x_1, x_2) := c(x_1, x_2)h(x_1, x_2)$ , tal que el producto  $ch$  sea positivo o negativo que sólo se anula en un conjunto de medida cero, entonces, consideramos la ecuación

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + h \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = c(x_1, x_2)h(x_1, x_2) \quad (2.2.1)$$

esto es

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = c(x_1, x_2)h(x_1, x_2)$$

podemos reescribir esta ecuación como

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \quad (2.2.2)$$

## 2.2. Método de construcción de funciones de Dulac

---

3. Resolver esta ecuación parcial cuasilineal de primer orden.
4. Comprobar que la función  $h$  obtenida es una *función de Dulac* para el sistema (2.1.2).

Hasta aquí hemos dado un algoritmo para producir funciones de Dulac para un sistema en el plano, en particular obtenemos el siguiente

**Teorema 2.4.** *Para el sistema de ecuaciones diferenciales en el plano*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

*Una solución  $h$  del sistema asociado (2.2.2), (tal que  $c(x_1, x_2)h(x_1, x_2)$  no cambia de signo y que sólo se anula en un conjunto de medida cero) es una función de Dulac en  $\Omega$ .*

**Demostración.** La validez de este resultado se sigue de la construcción en los pasos del (1) - (4). □

Como una consecuencia directa tenemos el siguiente

**Corolario 2.5.** *Para el sistema de ecuaciones diferenciales dado en el teorema anterior, si (2.2.2) tiene una solución  $h$  que no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero sobre  $\Omega$  (para alguna función  $c$  que tampoco cambia de signo y que sólo se anula en un conjunto de medida cero), entonces  $h$  es una función de Dulac para el sistema de ecuaciones diferenciales sobre  $\Omega$ .*

**Demostración.** Dada una función  $l : D \rightarrow \mathbb{R}$  denotamos por  $Z_l := \{(x_1, x_2) \in \Omega / l(x_1, x_2) = 0\}$ , tenemos  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  no cambia de signo y se anula a lo más en  $Z_c \cup Z_h$  el cual tiene medida cero. □

### Observaciones

- Con la elección de la función  $k$  en el paso 2 obtenemos una ecuación lineal (2.2.2), la cual es más simple de tratar, aunque algunas otras elecciones son posibles.
- La función  $c$  se usa para simplificar la ecuación (2.2.2).

A continuación presentamos algunos ejemplos que nos permiten observar la funcionalidad de este método.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \\ \dot{x}_2 = 3x_1^2 x_2. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.2.2) tenemos la expresión

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [c(x_1, x_2) - (2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2) + 3x_1^2)]$$

para simplificar la ecuación y dado que tenemos libertad de escoger la función  $c(x_1, x_2)$ , la tomamos como  $c = 3x_1^2$ , con lo cual la ecuación anterior quedaría

$$x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + 3x_1^2 x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [-2x_1 x_2^2 (1 - \cos x_2)].$$

La expresión anterior es una ecuación diferencial parcial cuasilineal de primer orden, aplicando el *método de las características* (ver sección 1.3.1) obtenemos la ecuación característica

$$\frac{dx_1}{x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)} = \frac{dx_2}{3x_1^2 x_2} = \frac{dh}{-2hx_1 x_2^2 (1 - \cos x_2)}$$

consideramos la primer igualdad

$$\frac{dx_1}{x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)} = \frac{dx_2}{3x_1^2 x_2}$$

y resolviéndola por separación de variables, obtenemos la primer característica

$$3x_1 + x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 = c_1$$

ahora consideramos la igualdad entre la primera y tercera expresión de la ecuación característica, es decir tenemos

$$\frac{dx_1}{x_1^2 x_2^2 (1 - \cos x_2)} = \frac{dh}{-2hx_1 x_2^2 (1 - \cos x_2)}$$

cuyo resultado nos da la segunda característica

$$hx_1^2 = c_2.$$

entonces la solución general de la ecuación esta dada por  $c_2 = \Phi(c_1)$ , es decir en terminos de  $x_1, x_2$

$$h = \frac{1}{x_1^2} \Phi(3x_1 + x_2 \sin x_2 + \cos x_2 - \frac{1}{2}x_2^2),$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria. Nótese que esta  $h$  es una *función de Dulac* para el sistema dado en la región del plano  $x_1 < 0$  o  $x_1 > 0$ .

□



**Ejemplo 2.3.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = e^{x_2} + 3x_2. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.2.2) para obtener la ecuación asociada tenemos

$$2x_1 \cos x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (e^{x_2} + 3x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [c(x_1, x_2) - (2 \cos x_1 - 2x_1 \cos x_1 + e^{x_2} + 3)]$$

Esta ecuación es de la forma (1.3.14) la cual nos sugiere tomar el cambio de variable  $h(x_1, x_2) = \exp[H(x_1, x_2)]$  con lo cual obtenemos la expresión

$$2x_1 \cos x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + (e^{x_2} + 3x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2} = c(x_1, x_2) - (2 \cos x_1 - 2x_1 \cos x_1 + e^{x_2} + 3)$$

si tomamos  $c = 3 + e^{x_2} + 2 \cos x_1$ , entonces la ecuación se reduce a

$$2x_1 \cos x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + (e^{x_2} + 3x_2) \frac{\partial H}{\partial x_2} = 2x_1 \cos x_1,$$

resolviendo esta ecuación diferencial por el método de las características, llegamos a las ecuaciones características asociadas

$$\frac{dx_1}{2x_1 \cos x_1} = \frac{dx_2}{e^{x_2} + 3x_2} = \frac{dH}{2x_1 \cos x_1}$$

de aquí resolviendo la igualdad entre la primera y segunda expresión, obtenemos la primer característica

$$\int \frac{dx_1}{2x_1 \cos x_1} - \int \frac{dx_2}{e^{x_2} + 3x_2} = c_1$$

luego, la segunda característica se obtiene de la igualdad entre la primera y tercera expresión

$$H - x_1 = c_2$$

finalmente la solución esta dada por  $c_2 = \Phi(c_1)$ , es decir despejando  $H$

$$H = x_1 + \Phi \left( \int \frac{dx_1}{2x_1 \cos x_1} - \int \frac{dx_2}{e^{x_2} + 3x_2} \right)$$

y por lo tanto, regresando el cambio de variable hecho al principio nos da

$$h = \exp \left[ x_1 + \Phi \left( \int \frac{dx_1}{2x_1 \cos x_1} - \int \frac{dx_2}{e^{x_2} + 3x_2} \right) \right]$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria. Esta función  $h$  es una función de Dulac cuando  $x_1 \cos x_1 \neq 0$ .

### 2.3. Sistemas particulares

Consideremos el campo vectorial  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ , como es usual la divergencia del campo vectorial  $F$  se define como

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(f_1, f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Consideremos  $C^0(\Omega, \mathbb{R})$  el conjunto de funciones continuas en  $\Omega$  y definamos el conjunto  $\mathcal{F}_\Omega = \{f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) : f \text{ no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero}\}$ .

También por simplicidad en una región simplemente conexa  $\Omega$ , introducimos los conjuntos

$$\mathcal{D}_\Omega^+(F) = \{h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : k := \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} \geq 0, k \in \mathcal{F}_\Omega\}$$

y

$$\mathcal{D}_\Omega^-(F) = \{h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : k := \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} \leq 0, k \in \mathcal{F}_\Omega\}.$$

Observese que una *función de Dulac* para el sistema (2.2.3) del teorema de Bendixson-Dulac es un elemento en el conjunto

$$\mathcal{D}_\Omega(F) := \mathcal{D}_\Omega^+(F) \cup \mathcal{D}_\Omega^-(F).$$

Una pregunta de interés es si cualquier *función de Dulac* debe satisfacer una ecuación diferencial parcial del tipo (2.2.2), en esta dirección se muestra la siguiente respuesta parcial.

**Proposición 2.6.** *Si existe una función de Dulac  $h \neq 0$ , entonces existe una función  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que  $h$  es solución de la ecuación*

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c(x_1, x_2) - \operatorname{div}(F)).$$

**Demostración.** Como  $h$  es una *función de Dulac*, entonces la función

$$r := \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2}$$

pertenece a  $\mathcal{F}_D$  y tomando  $c := \frac{r}{h}$ , tenemos que la función  $c \in \mathcal{F}_\Omega$ , además  $h$  es una solución de una ecuación de tipo (2.2.2). □

Note que si  $\operatorname{div}(F) \geq 0$ , y sólo se anula en un conjunto de medida cero, entonces nuestro algoritmo produce  $h = 1$ .

Consideremos ahora algunas situaciones especiales en las que es posible determinar si existen funciones de Dulac para el sistema de ecuaciones dado. El caso más sencillo es cuando la función  $h$  depende de una sola variable.

### 2.3.1. Funciones de Dulac que dependen de una variable

Ahora examinemos condiciones que implican que el conjunto de funciones de Dulac  $\mathcal{D}_\Omega^+(F) \neq \emptyset$ . Estos resultados son establecidos con la ayuda de técnicas propuestas en la sección 2.2, el caso más sencillo a considerar es cuando la solución depende únicamente de una variable. Así obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.7.** *Suponga que existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$ , tal que*

$$\mu_i := \frac{1}{f_i} \left( c - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) \text{ depende sólo de } x_i, \text{ para algún } i \in \{1, 2\}$$

*y es continua, entonces el conjunto  $\mathcal{D}_\Omega^+(F)$  es no vacío.*

**Demostración.** Consideraremos el caso  $\mu_1$  dependiendo sólo de  $x_1$ . Buscamos una *función de Dulac*, usando el teorema 2.5, de tal forma que la ecuación asociada es

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right),$$

suponga que  $h$  depende sólo de  $x_1$ . Entonces la ecuación anterior se reduce a

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} = h \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right),$$

que se puede escribir como

$$\frac{\partial \log h}{\partial x_1} = \frac{1}{f_1} \left( c(x_1, x_2) - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right) = \mu_1.$$

Como por hipótesis  $\mu_1$  depende sólo de  $x_1$ , entonces es fácil ver que  $h = \exp \left( \int \mu_1 dx_1 \right)$  es una solución de la ecuación y satisface la condición del teorema 2.5, por lo tanto el sistema tiene una *función de Dulac*. □

Análogamente obtendremos una expresión similar si suponemos que  $h$  depende de  $x_2$ .

**Ejemplo 2.4.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = (x_1 x_2)^2 \cos x_1 + 2x_2^3 + 5x_2, \end{cases}$$

calculando  $\mu_1$ , tenemos

$$\mu_1 = \frac{1}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right],$$

o reemplazando

$$\mu_1 = \frac{1}{x_1 x_2} [c(x_1, x_2) - x_2 - [2(x_1^2 x_2) \cos x_1 + 6x_2^2 + 5]]$$

y tomando

$$c = x_2 + 5 + 6x_2^2 > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2,$$

tenemos

$$\mu_1 = 2x_1 \cos x_1$$

y por lo tanto, por la proposición 2.7, el conjunto  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}^+(F)$  es no vacío, en consecuencia el sistema descrito no contiene órbitas periódicas.  $\diamond$

**Ejemplo 2.5.** Sea  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  y el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 - 5x_1^2 x_2 + g(x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_1 x_2^3, \end{cases}$$

entonces, sustituyendo en la ecuación de la proposición 2.7, tenemos

$$\mu_2 = \frac{1}{x_1 x_2 (1 + x_2^2)} [c(x_1, x_2) - (6x_1^2 - 10x_1 x_2) - 3x_1 x_2^2],$$

además si tomamos  $c(x_1, x_2) = 6x_1^2 \geq 0$ , obtenemos

$$\mu_2 = \frac{10 - 3x_2}{1 + x_2^2},$$

que sólo depende de  $x_2$ , entonces,  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}^+(F) \neq \emptyset$ , es decir existe una función en la forma  $h = \exp(\int \mu_2 dx_2)$  que es una función de Dulac para el sistema.  $\diamond$

**Ejemplo 2.6.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 + 1)^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1 + 1) x_2^2 \ln|x_1 + 1| + x_2^3 + 3x_2 x_1^2 \end{cases}$$

para encontrar una *función de Dulac*  $h$ , observemos la expresión

$$\mu_1 = \frac{1}{f_1} \left[ c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]$$

es decir tenemos

$$\frac{1}{(x_1 + 1)^2 x_2} [c(x_1, x_2) - 2(x_1 + 1)x_2 - [2(x_1 + 1)x_2 \ln|x_1 + 1| + 3x_2^2 + 3x_1^2]]$$

si tomamos

$$c = 3x_1^2 + 3x_2^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$$

obtenemos

$$\frac{[-2(x_1 + 1)][1 + \ln|x_1 + 1|]}{(x_1 + 1)^2}$$

que depende sólo de  $x_1$ , y por la proposición 2.7 una *función de Dulac* está dada por

$$h = \exp\left(\int \frac{-2[1 + \ln|x_1 + 1|]}{(x_1 + 1)} dx_1\right)$$

Integrando

$$h = \exp(-2\ln(x_1 + 1) - (\ln|x_1 + 1|)^2)$$

es decir

$$h = \frac{1}{(x_1 + 1)^2} \exp(-(\ln|x_1 + 1|)^2)$$

de aquí, tomando esta función  $h$ , podemos afirmar que el sistema no tiene órbitas periódicas contenidas completamente en las regiones del plano divididas por la recta  $x_1 = -1$ .

**Ejemplo 2.7.** Sea

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1x_2^2 + e^{x_1} + g(x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + 2 \end{cases}$$

como  $f_2$  sólo depende de  $x_2$ , podemos escribir para  $h$ .

$$h = \frac{1}{f_2} \exp\left(\int \frac{1}{f_2} \left[c(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right] dx_2\right),$$

así del sistema, tenemos

$$h = \frac{1}{x_2^3 + 2} \exp\left(\int \frac{1}{x_2^3 + 2} [c(x_1, x_2) - 3x_2^2 - e^x - g'(x_2)] dx_2\right)$$

de tal forma que si tomamos

$$c = e^x + 3x_2^2$$

que es positiva para todo  $x_1, x_2$ , tenemos

$$h = \frac{1}{x_2^3 + 2} \exp\left(-\int \frac{g'(x_2)}{x_2^3 + 2} dx_2\right)$$

que es una función que depende únicamente de  $x_2$ , así, si tomamos  $x_2^3 \neq -2$ , esta función  $h$  es de Dulac.

### 2.3.2. Sistemas que se escriben como producto o suma de funciones

Veamos ahora algunas condiciones para la existencia de funciones de Dulac para casos especiales usando el teorema 2.4. En primer lugar consideremos que las funciones  $f_1, f_2$  se escriben como un producto de funciones que dependen de una sola variable, en este caso tenemos el siguiente resultado

**Proposición 2.8.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  una región abierta simplemente conexa. Si  $r_2 s'_2 \in \mathcal{F}_\Omega$  y  $r_1 \neq 0$  (o  $r'_1 s_1 \in \mathcal{F}_\Omega$  y  $s_2 \neq 0$ ) entonces el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1(x_1)s_1(x_2), \\ \dot{x}_2 = r_2(x_1)s_2(x_2), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

*tiene una función de Dulac en  $\Omega$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $r_2 s'_2 \in \mathcal{F}_\Omega$  y  $r_1 \neq 0$ , como  $-\text{div}(F) = -r'_1 s_1 - r_2 s'_2$  aplicando teorema 2.4 con  $c = r_2 s'_2$ , la ecuación asociada (2.2.2) se puede escribir como

$$r_1 s_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + r_2 s_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(-r'_1 s_1), \quad (2.3.2)$$

tenemos que  $h(x_1, x_2) = \frac{1}{r_1(x_1)}$  es una solución, y por lo tanto una *función de Dulac* por el teorema 2.4.

□

**Ejemplo 2.8.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + x_1^2)(3x_2^6 + 2x_2 - 5), \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 - x_1^3 + 1)^4(x_2^3 + x_2 + 2), \end{cases}$$

este es un sistema de la forma (2.3.1), con  $r_1(x_1) = 1 + x_1^2 \neq 0$  y  $r_2(x_2)s'_2(x_2) = (x_1^2 - x_1^3 + 1)^4(3x_2^2 + 1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  de aquí por la proposición 2.8, el sistema contiene una *función de Dulac* en  $\mathbb{R}^2$ .

□

Si consideramos ahora que una de las funciones  $f_1, f_2$  se escribe como un producto de funciones de una sola variable y la otra como una suma de otras funciones que también dependen de una variable, obtenemos lo siguiente.

**Proposición 2.9.** *Sea  $\Omega$  una región abierta simplemente conexa. Suponga que  $r_1(x_1) > 0$  ( $< 0$ ) y  $s'_2(x_2) \in \mathcal{F}_\Omega$ , entonces el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1(x_1)r_2(x_2), \\ \dot{x}_2 = s_1(x_1) + s_2(x_2), \end{cases} \quad (2.3.3)$$

*tiene una función de Dulac en  $\Omega$ .*

**Demostración.** Procedemos análogamente a la prueba de la proposición 2.8, pero ahora, escogemos  $c := s'_2$ , entonces la ecuación (2.2.2) se escribe como

$$r_1 r_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (s_1 + s_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = - (r'_1 r_2) h, \quad (2.3.4)$$

resolviendo tenemos  $h = \frac{1}{r_1(x_1)}$  es una solución y por lo tanto una *función de Dulac* por el teorema 2.4. □

**Ejemplo 2.9.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + x_1^2)(x_2^5 + 2x_2 - 6), \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 - x_1^3 + 1)^4 + (x_2^3 + x_2 + 2), \end{cases}$$

aquí  $r_1(x_1) = 1 + x_1^2$  y  $s'_2(x_2) = 3x_2^2 + 1$ , por lo tanto cumplen con las condiciones de la proposición 2.9, en consecuencia  $h = \frac{1}{1+x_1^2}$  es una *función de Dulac* para el sistema en  $\mathbb{R}^2$ . □

## 2.4. Otros casos especiales

El siguiente teorema generaliza la proposición 2.7 dando una lista de funciones de Dulac que dependen de formas especiales.

**Teorema 2.10.** *Sea  $\Omega$  una región abierta, simplemente conexa. Supongamos que se tiene un campo vectorial*

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

*Si existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que cualquiera de las siguientes condiciones se cumplen, entonces  $\mathcal{D}_\Omega(F) \neq \emptyset$ :*

- a).- *La función  $\gamma := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 g_2 g'_1 + f_2 g_1 g'_2}$  que depende de  $z := g_1(x_1)g_2(x_2)$  y es continua;*
- b).- *La función  $\eta := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 g_1 + f_2 g_2}$  que depende de  $z := k_1(x_1) + k_2(x_2)$  (con  $k'_i(x_i) = g_i(x_i)$ , para  $i = 1, 2$ ) y es continua;*
- c).- *La función  $\sigma := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}}$  depende de  $z := z(x_1, x_2)$  y es continua.*

**Demostración.** Considérese el caso *a*). Se busca una *función de Dulac*, usando la ecuación asociada (2.2.2).

Primero suponga  $h$  depende sólo de  $z := g_1(x_1)g_2(x_2)$ . Entonces la ecuación (2.2.2) se reduce a

$$f_1(x_1, x_2)g_2(x_2)g_1'(x_1)\frac{\partial h}{\partial z} + f_2(x_1, x_2)g_1(x_1)g_2'(x_2)\frac{\partial h}{\partial z} = h(z)(c(x_1, x_2) - \operatorname{div}(F)),$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{\partial \log h}{\partial z} = \frac{c - \operatorname{div}(F)}{f_1g_2g_1' + f_2g_1g_2'} = \gamma(z),$$

por hipótesis  $h := \exp\left(\int^z \gamma(s)ds\right)$  es una solución de la ecuación previa. Ahora es fácil verifica que  $h = \exp\left(\int^z \gamma(s)ds\right)$  es de hecho una *función de Dulac*. □

El siguiente resultado muestra algunas formas específicas de la función  $z$  en el teorema 2.10.

**Corolario 2.11.** *Bajo las condiciones del teorema 2.10. Si existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que cualquiera de las siguientes condiciones se cumple, entonces  $\mathcal{D}_\Omega(F) \neq \emptyset$ :*

- i).- La función  $\alpha_i := \frac{c - \operatorname{div}(F)}{f_i}$  depende sólo de  $x_i$ , para algún  $i \in \{1, 2\}$  y es continua;*
- ii).- La función  $\beta := \frac{c - \operatorname{div}(F)}{x_2f_1 + x_1f_2}$  depende sólo de  $z := x_1x_2$  y es continua;*
- iii).- La función  $\delta := \frac{c - \operatorname{div}(F)}{f_1 + f_2}$  depende sólo de  $z := x_1 + x_2$  y es continua;*
- iv).- La función  $\epsilon := \frac{c - \operatorname{div}(F)}{c_1f_1 + c_2f_2}$  depende sólo de  $z := c_1x_1 + c_2x_2$  y es continua;*
- v).- La función  $\kappa := \frac{x_2[c(x_1, x_2) - \operatorname{div}(F)]}{f_1(x_1, x_2) - \frac{x_1}{x_2}f_2(x_1, x_2)}$  depende sólo de  $z := \frac{x_1}{x_2}$  y es continua.*

**Demostración.** *i)* se deduce del inciso *a)* del teorema anterior, tomando  $g(x_1) = 1$  y  $g(x_2) = x_2$  o  $g(x_1) = x_1$  y  $g(x_2) = 1$ .

*ii)* se deduce del inciso *a)* del teorema anterior, tomando  $g(x_1) = x_1$  y  $g(x_2) = x_2$ .

*iii)* Tomando  $k(x_1) = x_1$  y  $k(x_2) = x_2$  del inciso *b)* del teorema anterior.

*iv)* Tomando  $k(x_1) = c_1x_1$  y  $k(x_2) = c_2x_2$  del inciso *b)* del teorema anterior.

*v)* Del inciso *c)*, tomando  $z = \frac{x_1}{x_2}$ .



□

A continuación se presentan algunos ejemplos a fin de ilustrar los resultados previos.

**Ejemplo 2.10.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^3 - x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 x_2, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Tomando  $c := 2x_1^2 + x_2^4 \geq 0$  tenemos que la función

$$\beta = \frac{c(x_1, x_2) - \text{div}(F)}{x_2 f_1 + x_1 f_2} = \frac{c - 2x_1^2}{-x_2^4} = \frac{2x_1^2 + x_2^4 - 2x_1^2}{-x_2^4} = -1,$$

es una constante y de acuerdo al inciso *ii*) del corolario anterior tenemos que el sistema tiene una función de Dulac y por lo tanto no contiene órbitas periódicas.

□

**Ejemplo 2.11.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 1 + x_1 x_2 + x_1^3 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_1^3 + x_2^2, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Tomando  $c := 3x_1^2 \geq 0$  y usando el inciso *iii*) del corolario anterior tenemos

$$\gamma = \frac{c(x_1, x_2) - \text{div}(F)}{f_1 + f_2} = \frac{c - (x_2 + 3x_1^2 + x_1)}{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 1} = \frac{-(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2 + 1}$$

□

**Ejemplo 2.12.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_1 + \beta_2 x_2^n + \sigma_1 x_1^{2p+1}), \\ \dot{x}_2 &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\beta_3 + \beta_4 x_1^m + \sigma_2 x_2^{2q+1}), \end{cases}$$

donde  $\alpha_1 \alpha_2 > 0$  y  $\sigma_1 \sigma_2 \geq 0$  con  $\sigma_1, \sigma_2$  no son ambos cero. Si  $n, m, p$  y  $q$  son enteros no negativos. de aquí tenemos que

$$\begin{aligned} -\text{div}(F) &= -\alpha_1(\beta_1 + \beta_2 x_2^n + \sigma_1 x_1^{2p+1}) - \sigma_1(2p+1)x_1^{2p}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &\quad -\alpha_2(\beta_3 + \beta_4 x_1^m + \sigma_2 x_2^{2q+1}) - \sigma_2(2q+1)x_1^{2q}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \end{aligned}$$

tomando  $c(x_1, x_2) := (\sigma_1(2p+1)x_1^{2p} + \sigma_2(2q+1)x_1^{2q})(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$  podemos escribir

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \frac{c - \text{div}(F)}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}, \\ &= \frac{-\alpha_1(\beta_1 + \beta_2 x_2^n + \sigma_1 x_1^{2p+1}) - \alpha_2(\beta_3 + \beta_4 x_1^m + \sigma_2 x_2^{2q+1})}{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \left( \alpha_1(\beta_1 + \beta_2 x_2^n + \sigma_1 x_1^{2p+1}) + \alpha_2(\beta_3 + \beta_4 x_1^m + \sigma_2 x_2^{2q+1}) \right)}, \\ &= \frac{-1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}, \end{aligned}$$

## Capítulo 2 Funciones de Dulac

---

la cual es continua y depende de  $z := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  por lo tanto por el inciso *iv*) del corolario 2.11 tenemos que el conjunto de funciones de Dulac  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}(F) \neq \emptyset$ , es decir el sistema no contiene órbitas periódicas en  $\mathbb{R}^2$ . □

Ahora presentamos algunas consecuencias del teorema 2.10 y corolario 2.11.

**Proposición 2.12.** *Supongamos que  $\operatorname{div}(F) \geq 0$  or  $\operatorname{div}(F) \leq 0$ . Si cualquiera de las siguientes funciones pertenece a  $\mathcal{F}_\Omega$ , entonces  $\mathcal{D}_\Omega(F) \neq \emptyset$ :*

*i).*-  $f_i$  para algún  $i \in \{1, 2\}$ ;

*ii).*-  $x_2 f_1 + x_1 f_2$ ;

*iii).*-  $f_1 + f_2$ ;

*iv).*-  $f_1 g_2 g_1' + f_2 g_1 g_2'$ ;

*v).*-  $f_1 g_1 + f_2 g_2$ ,

con  $g_i$  dependiendo sólo de  $x_i$ , para  $i = 1, 2$ .

**Demostración.** Considere el caso *iii*). Por conveniencia suponga que  $\operatorname{div}(F) \leq 0$  y  $f_1 + f_2 \geq 0$ . Se busca una *función de Dulac* que depende de  $z = x_1 + x_2$ .

De *iii*) del corolario 2.11, necesitamos encontrar  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que  $\delta = \frac{c - \operatorname{div}(F)}{f_1 + f_2}$  es continua y depende sólo de  $z$ . Así considere  $\delta(z) := -(z^2 + 1)$  (o cualquier otra función  $\delta(z) < 0$  en  $\Omega$ ), se tiene  $(f_1 + f_2)\delta \leq 0$  y  $(f_1 + f_2)\delta \in \mathcal{F}_\Omega$  por lo tanto se puede tomar  $c := (f_1 + f_2)\delta + \operatorname{div}(F)$  que pertenece a  $\mathcal{F}_\Omega$ .

Ahora con esta elección de  $c$  se cumple completamente las condiciones de *iii*) del corolario 2.11 y el sistema admite una *función de Dulac*. Esto completa la prueba. □

**Ejemplo 2.13.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_1^2 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_1 x_2^2, \end{cases}$$

note que

$$\operatorname{div}(F) = 2x_2 x_1 - 2x_1 x_2 = 0 \text{ and } x_2 f_1 + x_1 f_2 = x_2^2 x_1^2 + x_2^4 + 2x_1^2 - x_1^2 x_2^2 = x_2^4 + 2x_1^2 \geq 0,$$

por lo tanto por *ii*) de la proposición 2.12,  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}(F) \neq \emptyset$ . □

**Corolario 2.13.** *Dado  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$ . Si existe una constante  $c_i \in \mathbb{R}$  tal que  $c_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \in \mathcal{F}_\Omega$ , entonces  $\mathcal{D}_\Omega(F) \neq \emptyset$ , para el Hamiltoniano  $F := (-\frac{\partial H}{\partial x_2}, \frac{\partial H}{\partial x_1})$ .*

**Demostración.** Bajo la hipótesis del corolario 2.11, el sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1}, \end{cases}$$

satisface la condición v) de la proposición 2.12 con  $g_1(x_1) = -c_2$  y  $g_2(x_2) = c_1$ .

□

## Propiedades de las funciones de Dulac

En el presente capítulo analizamos algunas características sobre las funciones de Dulac, consideramos ciertos aspectos del conjunto de funciones de Dulac. Damos algunas relaciones entre funciones de Dulac de un campo y algunas perturbaciones. Además consideramos condiciones suficientes para que una suma de campos vectoriales admita funciones de Dulac. También estudiamos el comportamiento de las funciones de Dulac si transformamos un campo vectorial mediante un difeomorfismo, finalmente damos aplicaciones y ejemplos para ilustrar nuestros resultados.

### 3.1. Propiedades

consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (3.1.1)$$

El conjunto de funciones de Dulac tiene características importantes que nos permiten estudiar de una manera global el comportamiento de ciertos campos vectoriales, a continuación listamos algunas de sus características, pero antes recordemos la definición de conjuntos de funciones de Dulac que se presentó en el capítulo 2.

Consideremos el campo vectorial  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ , como es usual la divergencia del campo vectorial  $F$  se define como

$$\operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(f_1, f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Consideremos  $C^0(\Omega, \mathbb{R})$  el conjunto de funciones continuas y definamos el conjunto

$\mathcal{F}_\Omega = \{f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) : f \text{ no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero}\}.$

También por simplicidad en una región simplemente conexa  $\Omega$ , introducimos los conjuntos

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{+}(F) = \{h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : k := \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} \geq 0, k \in \mathcal{F}_{\Omega}\}$$

y

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{-}(F) = \{h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : k := \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} \leq 0, k \in \mathcal{F}_{\Omega}\}.$$

Observese que una *función de Dulac* para el sistema (2.2.3) del teorema de Bendixson-Dulac es un elemento en el conjunto

$$\mathcal{D}_{\Omega}(F) := \mathcal{D}_{\Omega}^{+}(F) \cup \mathcal{D}_{\Omega}^{-}(F).$$

**Proposición 3.1.** *Sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, C^1, \Omega$  simplemente conexo, entonces*

- (a) *si  $\mathcal{D}_{\Omega}(F) \neq \emptyset$ , entonces (3.1.1) no tiene órbitas periódicas, completamente contenidas en  $\Omega$ ;*
- (b)  $\mathcal{D}_{\Omega}^{-}(F) = -\mathcal{D}_{\Omega}^{+}(F)$ ;
- (c)  $\mathcal{D}_{\Omega}(F) \neq \emptyset$  si y sólo si  $\mathcal{D}_{\Omega}^{+}(F) \neq \emptyset$ ;
- (d) *Si  $h_1, h_2 \in \mathcal{D}_{\Omega}^{+}(F)$  y  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ , entonces  $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \in \mathcal{D}_{\Omega}^{+}(F)$ .*
- (e) *Sea  $\Omega_1, \Omega_2$  conjuntos simplemente conexos tales que  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , si  $\mathcal{D}_{\Omega_2}^{+}(F) \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{D}_{\Omega_1}^{+}(F) \neq \emptyset$ , en particular  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}^{+}(F) \subset \mathcal{D}_{\Omega_2}^{+}(F) \subset \mathcal{D}_{\Omega_1}^{+}(F)$ .*
- (f) *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  simplemente conexo. Supongamos que para todo  $\Omega_1 \subset \Omega$  simplemente conexo y acotado,  $\mathcal{D}_{\Omega_1}^{+}(F) \neq \emptyset$ , entonces no hay órbitas periódicas contenidas en  $\Omega$ .*

**Demostración.** Incisos (a), (b) y (d) son directos de la definición.

- (c) se sigue de (b);
- (e) Si  $h \in \mathcal{D}_{\Omega_2}^{+}(F)$ , entonces podemos tomar  $h' \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R})$  donde  $h'$  es la restricción de  $h$  a el conjunto  $\Omega_1$ .
- (f) Supongamos que existe una órbita periódica  $\gamma$  en  $\Omega$ . Tomemos  $\Omega_1$  como la región acotada por  $\gamma$ , entonces por hipótesis, existe una función  $h \in \mathcal{D}_{\Omega_1}^{+}(F)$  y por lo tanto,  $\Omega_1$  no puede tener órbitas periódicas.

□

Otro resultado que nos ayuda a establecer condiciones para las cuales el conjunto de funciones de Dulac  $\mathcal{D}_{\Omega}^+(F) \neq \emptyset$  es el siguiente

**Proposición 3.2.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , suponga que existe una función  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$  que sólo se anula en un conjunto de medida cero y tal que*

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} > 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.1.2)$$

entonces para cualquier  $\Omega_1 \subset \Omega$  compacto, simplemente conexo, tenemos

$$\mathcal{D}_{\Omega_1}^+(F) \neq \emptyset.$$

**Demostración.** Note que  $h^{2k} \in \mathcal{F}_{\Omega}$  para todo  $k$  entero positivo. Sea  $\Omega_1$  una región simplemente conexa y compacta, tomemos

$$0 < r_0 := \min_{(x_1, x_2) \in \Omega_1} \left\{ f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right\}$$

y sea  $m_0 > 0$  tal que  $|h \cdot \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)| \leq m_0$  en  $\Omega_1$ . Ahora tomemos  $n := 2k + 1$  tal que  $nr_0 - m_0 > 0$  y considere

$$\begin{aligned} & f_1 \frac{\partial h^n}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h^n}{\partial x_2} + h^n \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = \\ & h^{n-1} \left[ n \left( f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) + h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \right] \in \mathcal{F}_{\Omega_1}, \end{aligned}$$

dado que se cumple que

$$h^{2k} [nr_0 - m_0] \in \mathcal{F}_{\Omega_1}.$$

□

**Ejemplo 3.1.** Considere

$$\begin{cases} x_1 = -x_1^2 + x_1x_2 + 1, \\ x_2 = -x_1x_2 + 2x_1^2 \end{cases}$$

y tomemos  $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ , entonces

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = f_1 + f_2 = 1 + x_1^2 > 0,$$

por lo tanto para cualquier región simplemente conexa y compacta  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , tenemos que  $\mathcal{D}_{\Omega}^+(F) \neq \emptyset$ .

□

**Ejemplo 3.2.** Considere

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1x_2^2 + 2x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2x_2 - 2x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Sea  $h = x_2^2 - x_1$ , entonces

$$(-4x_1x_2^2 + 2x_2 - 1)(-1) + (2x_1^2x_2 - 2x_1x_2 + 1)(2x_2) = 1 + 4x_1^2x_2^2 > 0$$

y  $\mathcal{D}_\Omega^+(F) \neq \emptyset$  para cualquier región simplemente conexa y compacta  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . ◇

□

Ahora usamos la proposición 2.7 para estudiar algunos sistemas especiales, consideremos nuevamente el sistema descrito en la sección 2.3.2, es decir un sistema que se escribe como el producto de funciones continuas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1(x_1)r_2(x_2), \\ \dot{x}_2 = s_1(x_1)s_2(x_2). \end{cases} \quad (3.1.3)$$

establecemos lo siguiente

**Proposición 3.3.** Sea  $\Omega_0 \subset \Omega$  un conjunto compacto, simplemente conexo. Si  $r_1 \neq 0$ ,  $r_2 \in \mathcal{F}_\Omega$  y  $s_1s_2' \geq 0$  entonces el conjunto  $\mathcal{D}_{\Omega_0}^+(F)$  es no vacío.

**Demostración.** De la proposición 2.7, es suficiente ver que podemos escoger  $\mu_1(x_1)$  una función continua, tal que

$$c := \mu_1 r_1 r_2 + \left( \frac{\partial r_1 r_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1 s_2}{\partial x_2} \right) \in \mathcal{F}_{\Omega_0}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos  $r_2 \geq 0$  y  $r_1 > 0$  en  $\Omega$ . Tomamos  $\mu_1(x_1) := nr_1(x_1)$  con  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu_1 r_1 + r_1' > 0$  en  $\Omega_0$ . Esto es posible porque  $r_1'$  es continua y  $\Omega_0$  es compacto. Así tenemos  $r_2(\mu_1 r_1 + r_1') \in \mathcal{F}_{\Omega_0}$ . Por lo tanto

$$c = r_2(\mu_1 r_1 + r_1') + s_1 s_2' \geq r_2(\mu_1 r_1 + r_1'),$$

esto es  $c \in \mathcal{F}_{\Omega_0}$ .

□

**Ejemplo 3.3.** Sea  $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ , y considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1x_2 + x_1 + 2x_2 - 2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2(x_2 - \cos x_2), \end{cases}$$

como  $-x_1x_2 + x_1 + 2x_2 - 2 = (2 - x_1)(x_2 - 1)$ , y  $(x_2 - \cos x_2)' = 1 + \sin x_2$ . se sigue de la última proposición que existe algún  $h \in \mathcal{D}_{\Omega_0}^+(F)$ .

□

**Ejemplo 3.4.** Sea  $D_0$  una región acotada por  $0 \leq x_1 \leq a$  y  $0 \leq x_2 \leq b$  en  $\mathbb{R}^2$  y considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2^2 + a x_2^2, \\ \dot{x}_2 = e^{x_1} (b + x_2), \end{cases}$$

ahora  $r_1 = x_1^2 + a \neq 0$  y  $r_2 = x_2^2 \in \mathcal{F}_\Omega$  y  $s_1 s_2' \geq 0$ , por lo tanto de la proposición 3.3,  $\mathcal{D}_{\Omega_0}^+(F) \neq \emptyset$ .

□

### 3.1.1. Funciones de Dulac y perturbaciones

Uno de los problemas al construir funciones de Dulac en el teorema de Bendixson-Dulac es la dificultad en hacer estimaciones a priori, por tal motivo nuestro primer paso será introducir un tipo de compacidad.

**Definición 3.4.** Un conjunto abierto no vacío  $\Omega_0$  está compactamente contenido en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , denotado como  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ , si  $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$  y  $\overline{\Omega_0}$  es compacto.

Note que de hecho si  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ , entonces existe un conjunto abierto  $V$  tal que  $\Omega_0 \subset\subset V \subset\subset \Omega$ .

El siguiente resultado debilita las condiciones del teorema de Bendixson-Dulac.

**Proposición 3.5.** Sea  $\Omega$  una región abierta simplemente conexa y  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  un campo vectorial. Si para cada conjunto abierto simplemente conexo  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  se tiene  $\mathcal{D}_{\Omega_0}(F) \neq \emptyset$ , entonces el sistema (3.1.1) no tiene órbitas periódicas en  $\Omega$ .

**Demostración.** Procederemos por contradicción, supongamos que el sistema admite una solución periódica  $\gamma$  en  $\Omega$ . Denotemos por  $\text{int}(\gamma)$  la región abierta acotada por  $\gamma$ , note que  $\text{int}(\gamma) \subset\subset \Omega$ , entonces existe un conjunto abierto (simplemente conexo)  $U$  tal que  $\text{int}(\gamma) \subset\subset U \subset\subset \Omega$ , por lo tanto tenemos  $\mathcal{D}_U(F) \neq \emptyset$  lo cual contradice que tal órbita periódica existiera.

□

Esta observación nos permitirá obtener funciones de Dulac sobre regiones compactamente contenidas en conjuntos abiertos para varias situaciones interesantes.

Ahora presentamos un resultado que da condiciones para la existencia de funciones de Dulac para sistemas con perturbaciones.



**Proposición 3.6.** Sea  $\Omega$  una región abierta simplemente conexa. Sea  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^1$  campos vectoriales, suponga que  $F$  admite una función de Dulac  $h$  tal que  $\text{div}(hF) \neq 0$ , entonces dada una región abierta simplemente conexa  $\Omega_0 \subset \subset \Omega$  existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{D}_{\Omega_0}(F + \epsilon G) \neq \emptyset, \forall \epsilon \text{ con } \epsilon_0 > \epsilon > 0.$$

**Demostración.** Por conveniencia supongamos que  $\text{div}(hF) > 0$ . Dada una región abierta simplemente conexa  $\Omega_0 \subset \subset \Omega$ , consideremos un conjunto abierto (compactamente contenido)  $V$  con  $\Omega_0 \subset V \subset \bar{V} \subset \Omega$ . Tomando  $m_0, m_1 > 0$  tal que  $\text{div}(hF) > m_0$  y  $|\text{div}(hG)| \leq m_1$  sobre  $\bar{V}$ . Por la linealidad de  $\text{div}(\cdot)$  tenemos

$$\text{div}(h(F + \epsilon G)) = \text{div}(hF + \epsilon hG) = \text{div}(hF) + \epsilon \text{div}(hG),$$

por lo tanto con  $\epsilon_0 > 0$  suficientemente pequeño tenemos  $\text{div}(h(F + \epsilon G)) > 0$  para  $\epsilon_0 > \epsilon > 0$ , es decir

$$\mathcal{D}_{\Omega_0}(F + \epsilon G) \neq \emptyset.$$

□

**Ejemplo 3.5.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2, \end{cases}$$

un cálculo directo nos da que  $h(x_1, x_2) = e^{-2x_1}$  es una *función de Dulac* y  $\text{div}(hF) = -1e^{-2x_1} \neq 0$ . Considere  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^1$  campo vectorial y un conjunto abierto simplemente conexo  $\Omega_0 \subset \subset \mathbb{R}^2$  y por la proposición anterior existe  $\epsilon_0$  tal que  $\mathcal{D}_{\Omega_0}(F + \epsilon G) \neq \emptyset$ ,  $\forall \epsilon_0 > \epsilon > 0$ .

□

### 3.1.2. Funciones de Dulac y sumas de campos vectoriales

Ahora estudiamos el problema de determinar que tipo de campos vectoriales se pueden sumar a uno dado (que contenga funciones de Dulac), de tal forma que el sistema resultante admita una *función de Dulac*.

El siguiente resultado nos da información sobre las funciones de Dulac para operaciones lineales entre campos vectoriales.

**Lema 3.7.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto simplemente conexo y sean  $X_i := p_i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + q_i(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$  para  $i = 1, 2$ , dos campos vectoriales  $C^1$  definidos sobre  $\Omega$  con  $X_1 \pm X_2$  no idénticamente cero en cualquier vecindad, lo siguiente se cumple

## Capítulo 3 Propiedades de las funciones de Dulac

---

- a) Si  $h \in \mathcal{D}_\Omega(X_i)$ , entonces  $h \in \mathcal{D}_\Omega(X_1 + X_2)$  o  $h \in \mathcal{D}_\Omega(X_1 - X_2)$ .
- b) Si  $h \in \mathcal{D}_\Omega^\pm(X_i)$ , entonces  $h \in \mathcal{D}_\Omega^\pm(X_1 + X_2)$ .
- c) Si  $h \in \mathcal{D}_\Omega(X_1)$ , entonces  $h \in \mathcal{D}_\Omega(cX_1)$  para  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Demostración.** Consideremos el caso a). Tenemos

$$\operatorname{div}(hX_1)\operatorname{div}(hX_2) \in \mathcal{F}_\Omega^+ \text{ o } \operatorname{div}(hX_1)\operatorname{div}(hX_2) \in \mathcal{F}_\Omega^-,$$

en el primer caso  $h \in \mathcal{D}_\Omega(X_1 + X_2)$  y en el segundo caso  $h \in \mathcal{D}_\Omega(X_1 - X_2)$ . □

Una función que es constante sobre las trayectorias de un campo vectorial se dice que es un factor integrante del campo, mas propiamente tenemos

**Definición 3.8.** Una función  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  es un *factor integrante* del campo vectorial  $X$  si  $\operatorname{div}(fX) = 0$ .

**Proposición 3.9.** Sea  $\Omega$  una región abierta simplemente conexa y  $F_1, F_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  campos vectoriales. Supongamos que  $h_i \in \mathcal{D}_\Omega^\pm(F_i)$  para  $i = 1, 2$  y  $h_i$  es un factor integrante de  $F_j$  para  $1 \leq i \neq j \leq 2$ , entonces  $h_1 + h_2 \in \mathcal{D}_\Omega^\pm(F_1 + F_2)$ , en particular, la suma  $F_1 + F_2$  no admite órbitas periódicas o ciclos límite enteramente contenidos en  $\Omega$ .

**Demostración.** Un cálculo directo da

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((h_1 + h_2)(F_1 + F_2)) &= \operatorname{div}(h_1F_1) + \operatorname{div}(h_2F_1) + \operatorname{div}(h_1F_2) + \operatorname{div}(h_2F_2) \\ &= \operatorname{div}(h_1F_1) + \operatorname{div}(h_2F_2), \end{aligned}$$

por lo tanto  $h_1 + h_2 \in \mathcal{D}_\Omega(F_1 + F_2)$ . □

**Proposición 3.10.** Suponga que  $h \in \mathcal{D}_\Omega^\pm(F)$ , entonces para cada campo vectorial  $G$ ,  $C^1$  con  $(\pm)\operatorname{div}(hG) \geq 0$  tenemos  $h \in \mathcal{D}_\Omega(F + G)$ , en particular, la suma  $F + G$  no admite órbitas periódicas o ciclos límite enteramente contenidos en  $\Omega$ .

**Demostración.** Supongamos por conveniencia que  $h \in \mathcal{D}_\Omega^+(F)$  y sea  $G$  tal que  $\operatorname{div}(hG) \geq 0$  de aquí por linealidad  $\operatorname{div}(h(F + G)) \in \mathcal{F}_\Omega^+$ , por lo tanto  $h \in \mathcal{D}_\Omega^+(F + G)$ . □

Notemos que la proposición 3.10 puede ser usado para simplificar la construcción de funciones de Dulac para algunos sistemas, en efecto, escribimos el campo vectorial como la suma de dos campos vectoriales con propiedades específicas.

**Ejemplo 3.6.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2, \end{cases}$$

si consideramos una *función de Dulac*  $h$  que depende sólo de  $x_1$  entonces  $\operatorname{div}(h_1(0, -x_1 - x_2 + x_1^2)) = -h(x_1)$ , por lo tanto necesitamos encontrar una función que no cambie de signo y tal que  $\operatorname{div}(h(x_2, x_2^2)) = 0$  es decir,  $0 = \frac{\partial h}{\partial x_1}x_2 + 2hx_2$ , pero esta ecuación admite la solución  $h(x_1) = \exp(-2x_1)$ , por la proposición 3.10 esta es una *función de Dulac* del sistema.

□

**Corolario 3.11.** *Suponga que  $h \in \mathcal{D}_\Omega(F)$  y  $h$  es un factor integrante de  $G$ , entonces*

$$\mathcal{D}_\Omega(F + G) \neq \emptyset.$$

**Ejemplo 3.7.** Sea  $h$  una *función de Dulac* para  $F$  en  $\Omega$  y  $X_h = (-\frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_1})$  el campo Hamiltoniano asociado a  $h$ , como  $h$  es un factor integrante de  $X_h$ , por el corolario 3.11 tenemos  $\mathcal{D}_\Omega(F + X_h) \neq \emptyset$ .

□

**Observación:** Diferentes funciones de Dulac pueden generar distintos campos vectoriales los cuales podemos sumar al campo original de tal forma que la suma contenga una función de Dulac. Esto justifica la construcción de varias funciones de Dulac a el mismo sistema diferencial.

Ahora analizaremos otras condiciones tales que la suma de campos vectoriales admita funciones de Dulac.

**Proposición 3.12.** *Suponga que  $0 \neq h \in \mathcal{D}_\Omega^+(F)$  and  $\Delta h \geq 0$ , es decir, una función armónica o subarmónica, entonces tenemos  $\mathcal{D}_\Omega(F + \nabla h) \neq \emptyset$ .*

**Demostración.** Un cálculo directo nos da

$$\operatorname{div}(h\nabla h) = (\nabla h)^2 + \Delta h \geq 0,$$

el resultado se sigue de la proposición 3.10.

□

**Ejemplo 3.8.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 + x_2^2, \end{cases}$$

del ejemplo 3.6 y la *función de Dulac* obtenida  $h(x_1, x_2) = \exp(-2x_1)$ , notemos además que es una función subarmónica, es decir,  $\Delta h \leq 0$ , por lo tanto si a el campo vectorial original le agregamos el gradiente  $\nabla h$ , entonces el nuevo campo vectorial no admite órbitas periódicas.

□

**Proposición 3.13.** *Sea  $\Omega$  una región simplemente conexa abierta y sean  $F, G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  campos vectoriales. Supongamos que existe  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nunca cero, tal que  $F \cdot \nabla h > 0$  y  $G \cdot \nabla h \geq 0$ , entonces  $\mathcal{D}_{\Omega_0}(F + G) \neq \emptyset$ , para todo  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ , en particular,  $F + G$  no admite órbitas periódicas enteramente contenidas en  $\Omega$ .*

**Demostración.** Tomemos un conjunto abierto  $\Omega_0$  compactamente contenido en  $\Omega$ . Escogemos un conjunto abierto  $V$  tal que  $\Omega_0 \subset\subset V \subset\subset \Omega$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  un número impar tal que

$$nF \cdot \nabla h > |h[\operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)]| \text{ sobre } \bar{V},$$

lo cual es posible por la compacidad de  $\bar{V}$ . Como  $n - 1$  es par entonces  $h^{n-1} > 0$  sobre  $\Omega$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(h^n(F + G)) &= \operatorname{div}(h^n F) + \operatorname{div}(h^n G) \\ &= h^{n-1}(nF \cdot \nabla h + nG \cdot \nabla h + h[\operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)]), \end{aligned}$$

por lo tanto  $\operatorname{div}(h^n(F + G)) > 0$  en  $\bar{V}$ , en particular,  $\operatorname{div}(h^n(F + G)) > 0$  en  $\Omega_0$  de aquí  $h^n \in \mathcal{D}_{\Omega_0}(F + G)$ , lo cual prueba el resultado.

□

### 3.1.3. Campos vectoriales multiplicados por funciones escalares

En lo que sigue analizaremos la existencia de funciones de Dulac para campos vectoriales obtenidos al multiplicar un campo vectorial por una función real.

**Proposición 3.14.** *Sea  $\Omega$  una región simplemente conexa y  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$ . Supongamos que existe  $h \in \mathcal{D}_{\Omega}(F)$  entonces las siguientes afirmaciones se cumplen*

- i) Si  $\frac{h}{g} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , entonces  $\mathcal{D}_{\Omega}(gF) \neq \emptyset$ .
- ii) Si  $\frac{f_i}{g} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , entonces  $\mathcal{D}_{\Omega}(\frac{1}{g}F) \neq \emptyset$ .

**Demostración.** Caso i). Como  $h$  es una *función de Dulac* para  $F$ , entonces  $\operatorname{div}(hF) \in \mathcal{F}_{\Omega}$ . Por lo tanto  $\operatorname{div}(\frac{h}{g}(gF)) \in \mathcal{F}_{\Omega}$ , que es  $\mathcal{D}_{\Omega}(gF) \neq \emptyset$ .

Caso ii). De forma similar se prueba que  $hg \in \mathcal{D}_{\Omega}(\frac{1}{g}F)$ . así la prueba queda completa.

□

**Ejemplo 3.9.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1x_2 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = (x_1x_2)^2 \cos(x_1) + (1 - x_2^2)x_2x_2^2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

un cálculo directo nos muestra que

$$h(x_1, x_2) = \exp \left[ - \int_1^x 2s \cos(s) ds \right] = \exp(-2x_1 \operatorname{sen}(x_1)) \exp(-\cos(x_1)),$$

es una *función de Dulac*, tomando  $g(x_1, x_2) = \exp(-\cos(x_1))$  obtenemos

$$\left( \frac{h(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} \right) = e^{-2x_1 \operatorname{sen}(x_1)},$$

la cual claramente es una función  $C^1$ , entonces por i) de la proposición 3.14 obtenemos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^2}(gF) \neq \emptyset$ .

□

Una consecuencia de la proposición 3.14 esta dada por lo siguiente

**Corolario 3.15.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  una región simplemente conexa,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  y  $G := gF = gf_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + gf_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$  un campo vectorial  $C^1$ . Si  $\mathcal{D}_\Omega(G) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{D}_\Omega(F) \neq \emptyset$ .*

Note que este resultado es bastante útil para determinar cuando un sistema no contiene funciones de Dulac.

## 3.2. Sistemas transformados

Un método clásico para el estudio de ecuaciones diferenciales es el cambio de variable, recordemos este resultado, suponga que tenemos una ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $C^1$  con  $\Omega$  un conjunto abierto. Si  $T$  es un difeomorfismo de  $\Omega$  a  $\Sigma$  entonces la ecuación diferencial (o campo vectorial) puede ser escrita como  $\dot{y} = g(y)$  sobre  $\Sigma$  y la bien conocida expresión

$$\dot{y} = DT(T^{-1}(y)) f(T^{-1}(y)), \quad y \in \Sigma,$$

es la nueva ecuación diferencial en  $\Sigma$ . Una pregunta natural es si hacer un cambio de coordenadas preserva ciertas propiedades, en particular si una *función de Dulac* se preserva después del cambio de variable. Contestaremos esta pregunta en el caso de un cambio de variable afín.

Sea  $(x_1, x_2) \in \Omega$  y  $(y_1, y_2) \in \Sigma$  las variables en los respectivos conjuntos abiertos. Sea

$$\begin{cases} y_1 &= ax_1 + bx_2 + \alpha, \\ y_2 &= cx_1 + dx_2 + \beta, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

con  $a, b, c, d$  constantes y

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

## Capítulo 3 Propiedades de las funciones de Dulac

---

por lo tanto

$$\begin{cases} x_1 = \frac{d(y_1 - \alpha) - b(y_2 - \beta)}{\det A}, \\ x_2 = \frac{a(y_2 - \beta) - c(y_1 - \alpha)}{\det A}, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

que también es afín, así tenemos

**Proposición 3.16.** *Si transformamos un sistema con un cambio de variable afín, entonces el sistema original contiene una función de Dulac si y sólo si el sistema transformado tiene al menos una función de Dulac.*

**Demostración.** Considere el sistema (3.1.1) y denote el nuevo sistema por

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = g_1(y_1, y_2) = af_1(x_1, x_2) + bf_2(x_1, x_2), \\ \dot{y}_2 = g_2(y_1, y_2) = cf_1(x_1, x_2) + df_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Suponga que  $\bar{h}(y_1, y_2)$  es una función de Dulac de (3.2.3), queremos mostrar que  $h(x_1, x_2) = \bar{h}(y_1, y_2)$  es una función de Dulac de (2.2.3). Dado que  $\bar{h}(y_1, y_2)$  es una función de Dulac de 3.2.3 entonces

$$\frac{\partial \bar{h} g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \bar{h} g_2}{\partial y_2} \in \mathcal{F}_\Sigma. \quad (3.2.4)$$

Ahora trasladando esta ecuación en términos de  $x_1$  y  $x_2$ . Primero note

$$\frac{\partial \bar{h} g_i}{\partial y_i} = g_i \frac{\partial \bar{h}}{\partial y_i} + \bar{h} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}, \text{ for } i = 1, 2. \quad (3.2.5)$$

Ahora

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} &= a \left( \frac{d}{\det A} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{c}{\det A} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) + b \left( \frac{d}{\det A} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{c}{\det A} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{1}{\det A} \left( ad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - ac \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + bd \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - bc \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

También

$$\frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \frac{1}{\det A} \left( -bc \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ac \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - bd \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + ad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right),$$

de aquí obtenemos

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial y_1} = \frac{1}{\det A} \left( d \frac{\partial h}{\partial x_1} - c \frac{\partial h}{\partial x_2} \right),$$

y

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial y_2} = \frac{1}{\det A} \left( -b \frac{\partial h}{\partial x_1} + a \frac{\partial h}{\partial x_2} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\bar{h}(g_1, g_2)) &= \frac{\partial \bar{h}g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \bar{h}g_2}{\partial y_2} = g_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial y_1} + g_2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial y_2} + \bar{h} \left( \frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \right) \\ &= (af_1 + bf_2) \left[ \frac{1}{\det A} \left( d \frac{\partial h}{\partial x_1} - c \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \right] \\ &\quad + (cf_1 + df_2) \left[ \frac{1}{\det A} \left( -b \frac{\partial h}{\partial x_1} + a \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \right] + \bar{h} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \\ &= f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial h f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h f_2}{\partial x_2} = \operatorname{div}(h(f_1, f_2)) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\operatorname{div}(\bar{h}(g_1, g_2))$  y  $\operatorname{div}(h(f_1, f_2))$  tienen el mismo signo, también como las transformaciones afín son bi-Lipschitz, entonces conjuntos de medida cero son preservados, en particular

$$\operatorname{div}(h(f_1, f_2)) \in \mathcal{F}_\Omega \text{ es decir } h \in \mathcal{D}_\Omega(F).$$

□

**Ejemplo 3.10.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 10x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2, \end{cases}$$

aplicando el cambio de variable afín

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + 1, \\ y_2 = x_1 + x_2, \end{cases}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -y_1 - y_2 + y_1^2 + y_2^2, \end{cases}$$

Además como  $\bar{h}(y_1, y_2) = e^{-2y_1}$  es una *función de Dulac* para el sistema, entonces el primer sistema tiene a  $h(x_1, x_2) = e^{(-4x_1 - 2x_2 - 2)}$  como *función de Dulac* por la proposición 3.16

□

El caso general de una *función de Dulac* para un cambio de variable esta dado por el siguiente resultado.

**Proposición 3.17.** *Consideremos el sistema (2.2.3) y un cambio de variable  $T : \Omega \rightarrow \Sigma$  con inversa  $S(y_1, y_2) = (S_1(y_1, y_2), S_2(y_1, y_2)) = (x_1, x_2)$ , denote por  $\dot{y} = g(y) = (g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2))$  la ecuación transformada. Sea*

$$J(y_1, y_2) := \left( \frac{\partial S_1}{\partial y_1} \frac{\partial S_2}{\partial y_2} - \frac{\partial S_1}{\partial y_2} \frac{\partial S_2}{\partial y_1} \right) (y_1, y_2)$$

el jacobiano de  $S$ . Dada  $\bar{h} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  y  $h(x_1, x_2) := \bar{h}(y_1, y_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \bar{h} g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \bar{h} g_2}{\partial y_2} \right) (y_1, y_2) &= \left( \frac{\partial h f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h f_2}{\partial x_2} \right) (S_1(y_1, y_2), S_2(y_1, y_2)) \\ &\quad - \frac{\bar{h}}{J} \left( \frac{\partial J}{\partial y_1} g_1 + \frac{\partial J}{\partial y_2} g_2 \right) (y_1, y_2) \end{aligned}$$

La prueba de este resultado es un argumento análogo a la realizada en la proposición 3.16. Note que en el caso de la transformaciones afín (3.2.2) tenemos  $J = 1$  por lo tanto  $\frac{\partial J}{\partial y_1} = \frac{\partial J}{\partial y_2} = 0$  y por el resultado anterior podemos recuperar la proposición 3.16.



# Capítulo 4

## Funciones de Dulac en dominios múltiplemente conexos

Como se menciona en la introducción, una de las metas principales de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es la descripción geométrica de sus soluciones, en particular esto requiere determinar la existencia y conocer la distribución de sus ciclos límite. Precisamente el problema 16 de Hilbert [3], [30] plantea determinar el número máximo  $H_n$  de ciclos límite que puedan tener los campos vectoriales polinomiales reales de un grado fijo  $\leq n$  y al menos uno de sus componentes de grado  $n$ , así como las posibles configuraciones relativas de ciclos límite que pueden originarse para un grado  $n$  fijo; posteriormente S. Smale [23] propuso variantes a dicho problema, en específico el restringió la pregunta anterior a ecuaciones de Liénard polinomiales como uno de los retos matemáticos para el siglo 21.

En las últimas décadas se ha incrementado considerablemente el estudio de ciclos límite, usando diferentes técnicas con el fin de encontrar cotas superiores e inferiores más precisas para el número de ciclos límite que contiene un sistema de ecuaciones diferenciales; una de tales técnicas es el uso de criterios de Bendixson-Dulac extendidos, ver por ejemplo [14], [43] y [44]. En este capítulo, nos enfocaremos en desarrollar un método para construir funciones de Dulac en *dominios múltiplemente conexos*.

Dado un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , simplemente conexo, consideremos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (4.0.1)$$

donde  $f_1, f_2$  son funciones  $C^1$  y sea  $F = (f_1, f_2)$ .

Como ya se ha comentado anteriormente, el teorema de Bendixson-Dulac da condiciones suficientes para la no existencia de órbitas periódicas en regiones simplemente conexas asociadas al sistema (4.0.1). El criterio de Bendixson-Dulac admite algunas generalizaciones muy importantes entre ellas algunas concernientes a *dominios múltiplemente conexos*,

siguiendo los trabajos de [21] y [47], se observa que es necesario estudiar expresiones de la forma

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + s h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right),$$

donde  $s \in \mathbb{R}$  y  $h$  son las incógnitas a determinar, continuaremos llamándole *función de Dulac* a  $h$ . Como anteriormente se ha observado no hay algoritmos generales para encontrar esta función  $h$ , aunque existen algunos procedimientos como en [21], [44] y [47] que aplican a ciertos sistemas; en general las funciones de Dulac hasta ahora se obtienen por intuición.

#### 4.1. Teorema extendido de Bendixson-Dulac

Un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  se dice que es *l-conexo* si tiene  $l$  agujeros, es decir si su grupo fundamental es un grupo libre con  $l$ -generadores, si no existe confusión sobre el dominio en adelante denotaremos la conexidad  $l(\Omega) = l$ .

Recordemos también que una órbita periódica  $\gamma$  es un *ciclo límite* si existe una vecindad  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  es la única órbita periódica contenida en  $V$ . clasificamos los *ciclos límite* de acuerdo a lo siguiente

**Definición 4.1.** Dado un ciclo límite  $\gamma$  y una vecindad  $V$  de  $\gamma$  decimos que;

- $\gamma$  es *estable* si el conjunto  $\omega(p) = \gamma$  para todo  $p \in V$ ;
- $\gamma$  es *inestable* si el conjunto  $\alpha(p) = \gamma$  para todo  $p \in V$ ;
- $\gamma$  es *semi-estable* si el conjunto  $\omega(p) = \gamma$  para todo  $p \in V \cap ext(\gamma)$  y también  $\alpha(p) = \gamma$  para todo  $p \in V \cap int(\gamma)$ , o inversamente.

**Definición 4.2.** Si a lo largo de una trayectoria cerrada  $\gamma$  del sistema 4.0.1, se cumple que

$$\int_0^T \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dt < 0 \quad (\text{respectivamente } > 0),$$

decimos que  $\gamma$  es un *ciclo límite hiperbólico*.

**Observación:** El uso del teorema de Green en la prueba del teorema de Bendixson (ver teorema 2.2), indica claramente que sobre cualquier región acotada por una órbita periódica, la integral de la divergencia como se definió en (2.1.1), es igual a cero.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el siguiente resultado, una demostración alterna se puede encontrar en [47].

**Teorema 4.3** (Teorema extendido de Bendixson-Dulac). *Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $l$ -conexo con frontera suave. Sea  $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  tal que*

$$M := div(DF) = \frac{\partial D}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial D}{\partial x_2} f_2 + D \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = \langle \nabla D, F \rangle + D div(F) \quad (4.1.1)$$

---

#### 4.1. Teorema extendido de Bendixson-Dulac

no cambia de signo en  $\Omega$  y sólo se anula en un conjunto de medida cero (medida de Lebesgue), tal que  $\{M = 0\} \cap \{D = 0\}$  no contiene órbitas periódicas de (4.0.1). Entonces el máximo número de trayectorias cerradas de (4.0.1) contenidos en  $\Omega$  es  $l$ . Más aún cada uno de ellos es un ciclo límite hiperbólico que no corta el conjunto  $\{D = 0\}$  y su estabilidad está dada por el signo del producto  $DM$ .

**Demostración.** Observemos que  $M|_{\{D=0\}} = \langle \nabla D, F \rangle|_{\{D=0\}} \geq 0$  no cambia de signo en  $\Omega$ . Como por hipótesis, no existen órbitas periódicas de (4.0.1) contenidas en  $\{M = 0\} \cap \{D = 0\}$ , tenemos que las órbitas periódicas de (4.0.1) no cortan  $\{D = 0\}$ .

De la prueba del teorema de Bendixson para regiones simplemente conexas, se deduce que si existe una órbita periódica  $\gamma$  del sistema (4.0.1) en  $\Omega$ , entonces  $\Omega$  debe contener al menos un agujero  $A$  en su interior, de no ser así contradice el teorema de Green. Más aún por la observación anterior, si el interior de  $\Omega$  contiene otras trayectorias cerradas  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , entonces la región en el interior de  $\gamma$  pero en el exterior de todas las trayectorias  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  también contiene al menos un agujero  $A$ . Si correspondemos cada agujero  $A$  con cada curva cerrada  $\gamma$ ; podemos ver que por cada  $\gamma$  distinto su correspondiente agujero  $A$  también es distinto. De aquí si el número de órbitas periódicas en  $\Omega$  es mayor que  $l$ , entonces la conexidad de la región  $\Omega$  debe ser mayor que  $l$ .

Probaremos ahora la hiperbolicidad. Fijemos una órbita periódica  $\gamma = \{(x_1(t), x_2(t)), t \in [0, T]\} \subset \Omega$ , Donde  $T$  es el periodo. Recordemos que  $\gamma \cap \{D = 0\} = \emptyset$ , a fin de estudiar su hiperbolicidad y estabilidad tenemos que calcular  $\int_0^T \text{div} F(x_1, x_2) dt$ , y probar que es distinto de cero. Esto último se obtiene al integrar la igualdad

$$\text{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\text{div}(DF)}{D} - \frac{\frac{\partial D}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial D}{\partial x_2} f_2}{D},$$

pues el ultimo término del lado derecho en la igualdad anterior coincide con  $\frac{d}{dt} \ln |D(x_1, x_2)|$ .

□

Para aplicar el teorema anterior, consideremos una función  $D(x_1, x_2)$  de la forma  $|h(x_1, x_2)|^m$  donde  $h$  es una función suave en dos variables en  $\mathbb{R}^2$  y  $m$  es un número real.

Antes de enunciar el resultado para esta particular elección introduciremos la siguiente notación.

Para  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, sea  $Z(h) := \{x \in \Omega : h(x) = 0\}$  el conjunto de ceros de  $h$ .

Siguiendo la notación introducida en [47], denotamos como  $l(\Omega, h)$  a la suma de las cantidades  $l(U)$  sobre todas las componentes conexas  $U$  de  $\Omega \setminus Z(h)$ , también denotamos como  $co(h)$  al número de trayectorias cerradas cerrados de  $Z(h)$  contenidos en  $\Omega$ . Veamos la figura 4.1 para ilustrar estas definiciones

Consideremos el conjunto abierto  $\Omega$  con  $l(\Omega) = 4$ . Los círculos grises son hoyos en  $\Omega$  y las líneas corresponden a las curvas en el conjunto de ceros de  $h$  ( $Z(h)$ ). Los números mostrados son los valores de  $l(U)$  para cada componente conexa  $U$  de  $\Omega \setminus Z(h)$ . Además tenemos que  $co(h) = 4$  y  $l(\Omega, h) = 8$ .

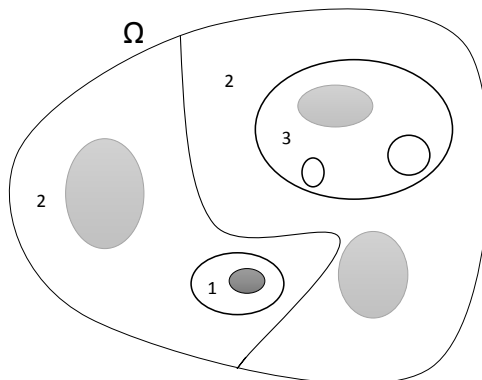


Figura 4.1:

El siguiente resultado establece una versión de el criterio de Bendixson-Dulac generalizado a regiones múltiplemente conexas.

**Teorema 4.4** ([47], cor. 1). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto con frontera regular. Supongamos que para una función analítica  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y un número real  $s$  se cumple que*

$$M_s := f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + s h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) = \langle \nabla h, F \rangle + s h \operatorname{div}(F) \quad (4.1.2)$$

*no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero. Entonces los ciclos límite del sistema (4.0.1), o están completamente contenidos en  $Z(h)$ , o no interceptan a  $Z(h)$ . más aún el número de ciclos límite contenidos en  $Z(h)$  es a lo más  $co(h)$  y el número  $N$  de ciclos límite que no interceptan a  $Z(h)$  satisface*

$$N \leq \begin{cases} l(\Omega) & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s = 0, \\ l(\Omega, h) & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

*más aún, para cualquier  $s \neq 0$  los ciclos límite de esta segunda forma son hiperbólicos.*

**Demostración.** Primero observemos que como  $M_s$  no cambia de signo, tenemos que sobre las curvas en  $Z(h)$ ,  $\langle \nabla h, F \rangle$  no cambia de signo. Por lo tanto estas curvas son, o soluciones de (4.0.1) o el campo vectorial de (4.0.1) cruza estas curvas en una sola dirección. De aquí todos los ciclos límite contenidos en  $\Omega$  o están completamente contenidos en las componentes conexas de  $\Omega \setminus Z(h)$ , o en  $Z(h)$ . Esto implica la primera parte del teorema. Para acotar el número de ciclos límite de (4.0.1) aplicamos el teorema extendido de Bendixson-Dulac

---

## 4.2. Método propuesto en dominios múltiplemente conexos

para cada una de las componentes conexas  $U$  de  $\Omega \setminus Z(h)$ , usando el hecho de que cuando  $D = |h|^m$ , se tiene que

$$\operatorname{div}(DF) = \langle \nabla D, F \rangle + D \operatorname{div}(F) = \operatorname{sign}(h) m |h|^{m-1} \left( \langle \nabla h, F \rangle + \frac{1}{m} h \operatorname{div}(F) \right),$$

cumple con las condiciones del teorema tomando  $m = 1/s$ . Además la diferencia entre los casos  $s < 0$  y  $s > 0$  es que en el segundo caso la función  $D$  está completamente definida, mientras que en el primer caso, debemos quitarle las curvas donde  $D = 0$ . Para el caso  $s = 0$  la prueba es sencilla considerando que  $M_0 = \frac{dh}{dt} = \langle \nabla h, F \rangle$ .

□

El teorema anterior muestra que el estudio de las funciones

$$M_s := f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + s h \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)$$

nos da una herramienta bastante útil para estimar el número de ciclos límite del sistema (4.0.1).

A la función  $h$  la seguiremos llamando *función de Dulac*. Notemos que este resultado da información también acerca de la hiperbolicidad de los ciclos límite, lo cual es de relevante interés cuando se trabaja con sistemas perturbados, sin embargo para el objetivo de este trabajo nos limitaremos a estudiar la existencia o no existencia de los ciclos límite. La importancia para nosotros de este resultado es que nos da una herramienta útil para delimitar el número de ciclos límite cuando se sabe que el sistema admite una función  $h$  de Dulac.

A continuación, siguiendo los resultados obtenidos para regiones simplemente conexas, presentamos un método para obtener funciones de Dulac asociándola como en el capítulo 2 con cierta ecuación diferencial parcial, cuya solución nos permite encontrar alguna *función de Dulac*.

## 4.2. Método propuesto en dominios múltiplemente conexos

**Proposición 4.5.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto con frontera regular. Supongamos que existen  $s \in \mathbb{R}$  y una función  $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\langle \nabla h, F \rangle + s h \operatorname{div}(F) = c h, \tag{4.2.1}$$

*admite una solución analítica  $h$ , con  $ch$  definida en todo  $\Omega$  y que no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero (medida de Lebesgue). Entonces los ciclos límite del sistema (4.0.1), o están completamente contenidos en  $Z(h)$ , o no interceptan a  $Z(h)$ . Más aún el número de ciclos límite contenidos en  $Z(h)$  es a lo más  $co(h)$  y el número  $N$  de ciclos límite que no interceptan a  $Z(h)$  satisface*

$$N \leq \begin{cases} l(\Omega) & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s = 0, \\ l(\Omega, h) & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

**Demostración.** La función  $ch$  es positiva o negativa y sólo se anula en un conjunto de medida cero. Proponemos a  $M_s$  con la forma específica  $M_s = ch$ , con lo cual sustituyendo esta igualdad en la ecuación (4.1.2), se obtiene la siguiente expresión

$$ch = \langle \nabla h, F \rangle + s h \operatorname{div}(F),$$

como  $ch$  no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero, entonces la hipótesis del teorema 4.4 se satisfacen. Por lo tanto se satisfacen todas las condiciones y la proposición queda demostrada. □

A continuación consideremos algunos ejemplos y aplicaciones para ilustrar esta técnica propuesta.

**Ejemplo 4.1.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

La ecuación asociada (4.2.1) es

$$(x_1 - x_2 - x_1^3) \frac{\partial h}{\partial x_1} + (x_1 + x_2 - x_2^3) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c - s(2 - 3x_1^2 - 3x_2^2)), \quad (4.2.2)$$

tomando

$$c = \frac{-4(x_1^4 + x_2^4) - \frac{5}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 6x_1^2 x_2^2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}},$$

observe que  $c \in \mathcal{F}_\Omega$ , donde  $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{2}{5}\}$ , aparte, si  $s = 1$  entonces

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2},$$

es una solución de la ecuación (4.2.2); más aún  $h$  es una *función de Dulac* en  $\Omega$ .

Además como el conjunto  $Z(h) = \emptyset$ , entonces  $Z(h)$  no contiene trayectorias cerradas. En particular,  $co(h) = 0$ . también como  $l(\Omega) = 1$  y  $s > 0$ , entonces por la proposición 4.5 el sistema tiene a lo más un ciclo límite en  $\Omega$ . □

---

## 4.2. Método propuesto en dominios múltiplemente conexos

**Ejemplo 4.2.** El siguiente sistema tiene exactamente un ciclo límite.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^3 + x_1x_2^2 - x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2^3 + x_2x_1^2 + x_1 - x_2. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

La ecuación asociada (4.2.1) es

$$(x_1^3 + x_1x_2^2 - x_1 - x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + (x_2^3 + x_2x_1^2 + x_1 - x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c - s(4x_1^2 + 4x_2^2 - 2)].$$

Supongamos que  $h = h(z)$ , depende de una función  $z = z(x_1, x_2)$ , de aquí tenemos

$$\left[ (x_1^3 + x_1x_2^2 - x_1 - x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2^3 + x_2x_1^2 + x_1 - x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \ln h}{dz} = c - s(4x_1^2 + 4x_2^2 - 2). \quad (4.2.4)$$

para simplificar la ecuación tomamos  $z$  tal que  $-x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ ; de aquí obtenemos  $z := x_1^2 + x_2^2$  y (4.2.4) se reduce a

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c - s(4x_1^2 + 4x_2^2 - 2)}{2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)}, \quad (4.2.5)$$

donde el lado derecho depende sólo de  $z$ , denotemos esta función como  $\eta$ ; y por simplicidad tomemos  $\eta(z) = \frac{1}{z}$ . Reescribiendo se obtiene

$$c = \frac{2z(z - 1) + s(4x_1^2 + 4x_2^2 - 2)z}{z}, \quad (4.2.6)$$

escogiendo  $s = -1$ , nos da  $c = -2(x_1^2 + x_2^2)$  y la ecuación (4.2.5) se puede escribir como

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{z},$$

cuya solución es

$$h(x_1, x_2) = z = x_1^2 + x_2^2,$$

notemos que  $ch = -2z^2$ , la cual es continua, no cambia de signo, y se anula sólo en un conjunto de medida cero; por lo tanto,  $h$  es una *función de Dulac*.

Además observemos que  $Z(h) = \{0\}$  no contiene trayectorias cerradas, en particular  $co(h) = 0$ .

Como  $s < 0$  y  $l(\mathbb{R}^2, h) = 1$ , entonces por la proposición 4.5, el sistema tiene a lo más un ciclo límite en  $\mathbb{R}^2$ .

Por otro lado, es fácil comprobar que  $z - 1 = 0$  es una solución periódica para este sistema.

□

Es bien conocido que, el sistema gradiente no posee órbitas periódicas. En este caso, la proposición 4.5 establece lo siguiente:

**Ejemplo 4.3.** Sea  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$ , la cual se anula a lo más en un conjunto de medida cero, entonces el sistema  $\dot{x} = -\text{grad}V(x)$  admite una *función de Dulac* y por lo tanto no contiene ciclos límite.

De hecho, la ecuación asociada (4.2.1) es

$$-\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c + s(\text{div}(\text{grad}V))). \quad (4.2.7)$$

Tomando  $c(x) = -\|\text{grad}V(x)\|$  y  $s = 0$ , entonces  $h(x) = \exp(V(x))$  es una solución de la ecuación (4.2.7); por lo tanto,  $h$  es una *función de Dulac* sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Dado que  $Z(h) = \emptyset$  y  $s = 0$ , entonces por la proposición 4.5 el sistema gradiente no admite ciclos límite.

□

**Ejemplo 4.4.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= (5x_1^2 - 1)x_2^3 - x_1^3. \end{cases}$$

La ecuación asociada (4.2.1) es

$$x_2^3 \frac{\partial h}{\partial x_1} + ((5x_1^2 - 1)x_2^3 - x_1^3) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c - s3x_2^2(5x_1^2 - 1)), \quad (4.2.8)$$

tomando  $z$  tal que  $x_2^3 \frac{\partial z}{\partial x_1} - x_1^3 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , entonces  $z = \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_1^4}{4} + a$  para alguna constante  $a$  y (4.2.8) se reescribe como

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c - s3x_2^2(5x_1^2 - 1)}{x_2^6(5x_1^2 - 1)}, \quad (4.2.9)$$

como el lado derecho depende sólo de  $z$ , denotandolo como la función  $\eta(z)$ , tenemos entonces

$$c = -\eta(z) (x_2^6(5x_1^2 - 1)) + s3x_2^2(5x_1^2 - 1), \quad (4.2.10)$$

considerando  $s = -\frac{4}{3}$ ,  $\eta(z) = \frac{1}{z}$  y simplificando obtenemos

$$c = -\frac{x_2^2(5x_1^2 - 1)(x_1^4 + 4a)}{z},$$

tomando  $a = -\frac{1}{100}$ , entonces

$$c = \frac{x_2^2(5x_1^2 - 1)^2(5x_1^2 + 1)}{25z}, \quad (4.2.11)$$



## 4.2. Método propuesto en dominios múltiplemente conexos

---

escogiendo  $c$  en esta forma, tenemos que la ecuación (4.2.9) se escribe como  $\frac{d \ln h}{dz} = z$  cuya solución es

$$h(x_1, x_2) = z = \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_1^4}{4} - \frac{1}{100}.$$

dado que  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , entonces  $h$  es una *función de Dulac*.

Notemos que el conjunto  $Z(h)$  de ceros de la función  $h$  es una trayectoria cerrada, entonces  $co(h) = 1$ ; aun así  $Z(h)$ , no contiene ciclos límite, debido a que el campo vectorial no es tangente a las curvas en  $Z(h)$ . También  $l(\mathbb{R}^2, h) = 1$ , por lo tanto de la proposición 4.5 el sistema tiene a lo más un ciclo límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

El siguiente resultado nos da información útil sobre la no existencia de ciclos límite para el sistema (4.0.1)

**Proposición 4.6.** *Si  $f_1 + f_2$ , no cambia de signo, y sólo se anula en un conjunto de medida cero, entonces el sistema (4.0.1) no admite ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .*

**Demostración.** La ecuación asociada de acuerdo a (4.2.1) es

$$f_1(x_1, x_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c - s(\operatorname{div}(f_1, f_2))]. \quad (4.2.12)$$

tomando  $z = x_1 + x_2$ , la ecuación (4.2.12) se convierte en

$$(f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)) \frac{d \ln h(z)}{dz} = c - s(\operatorname{div}(f_1, f_2)). \quad (4.2.13)$$

tomando  $c = f_1 + f_2$  y  $s = 0$ , tenemos que  $h(x_1, x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$  es una solución de la ecuación (4.2.13); por lo tanto,  $h$  es una *función de Dulac*.

Como  $Z(h) = \emptyset$  y  $s = 0$ , entonces por la proposición 4.5 el sistema (4.0.1) no admite ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Ejemplo 4.5.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + ax_2 - x_1x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_1^4 - ax_2 + x_1x_2^3. \end{cases}$$

Como  $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^4$ , entonces por la proposición 4.6, el sistema no contiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

Ahora consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2), \\ \dot{x}_2 = l(x_1) + m(x_1)x_2^r, \quad r \geq 1. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

con  $k, l, m$  funciones  $C^1$ . El siguiente resultado nos da condiciones con las cuales el sistema anterior no admite ciclos límite.

**Proposición 4.7.** *Si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple*

1.  $\frac{k(x_2)l(x_1)}{x_2^r} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,
2.  $m(x_1)x_2^r k(x_2) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,

entonces el sistema (4.2.14) no admite ciclos límite.

**Demostración.** En el primer caso; la ecuación asociada (4.2.1) es

$$k(x_2)\frac{\partial h}{\partial x_1} + (l(x_1) + m(x_1)x_2^r)\frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c - s(m(x_1)rx_2^{r-1})]. \quad (4.2.15)$$

Ahora supongamos que  $h$  es una función que depende de  $z = z(x_1, x_2)$ , de aquí la ecuación (4.2.15) se puede reescribir como

$$\left[ k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (l(x_1) + m(x_1)x_2^r)\frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \ln h}{dz} = c - sm(x_1)rx_2^{r-1},$$

tomando  $z$  tal que  $k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + m(x_1)x_2^r\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , es decir,  $z = \int \frac{k(x_2)}{(x_2)^r} dx_2 - \int m(x_1) dx_1$ .

Así llegamos a

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{x_2^r(c - s(m(x_1)rx_2^{r-1}))}{k(x_2)l(x_1)}, \quad (4.2.16)$$

por lo tanto tomando  $c = \frac{k(x_2)l(x_1)}{x_2^r}$  y  $s = 0$ , la ecuación (4.2.16) se escribe como  $\frac{d \ln h}{dz} = 1$ , cuya solución es  $h(x_1, x_2) = e^z = \exp \left[ \int \frac{k(x_2)}{(x_2)^r} dx_2 - \int m(x_1) dx_1 \right]$  la cual es una *función de Dulac*; además  $Z(h)$  no contiene trayectorias cerradas, y en particular  $co(h) = 0$ . En consecuencia por la proposición 4.5 el sistema (4.2.14) no admite ciclos límite.

□

Para el segundo caso: tomamos  $z = z(x_1, x_2)$  tal que

$$k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + l(x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0.$$

La demostración es similar a la anterior.

□

**Ejemplo 4.6.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + 3x_1^2)^4 + (1 + 2x_1 + 4x_1^5)x_2^3. \end{cases}$$

Por (1) en proposición 4.7, el sistema no contiene ciclos límite.

---

## 4.2. Método propuesto en dominios múltiplemente conexos

---

□

El siguiente resultado nos da información sobre la unicidad de ciclos límite para el sistema (4.2.14):

**Proposición 4.8.** *Si  $k(x_2) = x_2$  y  $m(x_1)L(x_1)x_2^{r-1} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , donde  $L(x_1) = \int l(x_1)dx_1$ . Entonces el sistema (4.2.14) tiene a lo más un ciclo límite.*

**Demostración.** la ecuación asociada (4.2.1) es

$$k(x_2)\frac{\partial h}{\partial x_1} + (l(x_1) + m(x_1)x_2^r)\frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c - s(m(x_1)rx_2^{r-1})]. \quad (4.2.17)$$

Ahora supongamos que  $h = h(z)$  depende de  $z = z(x_1, x_2)$ , por lo tanto (4.2.17) se escribe como

$$\left[ k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (l(x_1) + m(x_1)x_2^r)\frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \ln h}{dz} = c - sm(x_1)rx_2^{r-1},$$

tomando  $z$  tal que  $k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + l(x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , es decir,  $z = \int k(x_2)dx_2 - \int l(x_1)dx_1$ . Esto conduce a

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c - s(m(x_1)rx_2^{r-1})}{m(x_1)k(x_2)x_2^r}, \quad (4.2.18)$$

donde el lado derecho depende de  $z$ , el cual denotamos por  $\eta$ . Reescribiendo obtenemos

$$c = \eta(z)m(x_1)k(x_2)x_2^r + s(m(x_1)rx_2^{r-1}), \quad (4.2.19)$$

tomando  $\eta(z) = \frac{1}{z}$ , entonces

$$c = \frac{m(x_1)k(x_2)x_2^r + s(m(x_1)rx_2^{r-1})(\frac{x_2^2}{2} - L(x_1))}{z}, \quad (4.2.20)$$

de aquí escogemos  $s = -\frac{2}{r}$ , por lo tanto  $c = -\frac{2m(x_1)L(x_1)x_2^{r-1}}{z}$  y la ecuación (4.2.20) se reduce a

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{1}{z},$$

cuya solución es

$$h(x_1, x_2) = z = x_2^2 - L(x_1).$$

Dado que el producto  $ch = 2m(x_1)L(x_1)x_2^{r-1}$  el cual es continuo, no cambia de signo, y sólo se anula en un conjunto de medida cero; tenemos que  $h$  es una *función de Dulac*.

Además el conjunto  $Z(h)$  de ceros de  $h$ , tiene a lo más una trayectoria cerrada, es decir  $co(h) = 1$ ; sin embargo,  $Z(h)$  no contiene ciclos límite, de hecho, la condición  $k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} +$

---

$l(x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , implica que el campo vectorial  $(x_2, l(x_1) + m(x_1)x_2^r)$  no es tangente a las curvas  $z = x_2^2 - L(x_1) = 0$ .

Como  $s < 0$  y  $l(\mathbb{R}^2, h) = 1$ , entonces por la proposición 4.5 el sistema (4.2.14) tiene a lo más un ciclo límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

Además de esta generalización que aquí presentamos, el teorema de Bendixson-Dulac se ha extendido en varias otras direcciones: para probar la no existencia de órbitas periódicas en dimensiones superiores, ver [17], [29]; para determinar el número de soluciones periódicas aisladas para ecuaciones diferenciales no autónomas de Abel, véase por ejemplo [36], [45]; para demostrar la no existencia de órbitas periódicas para algunas ecuaciones diferenciales, ver [22].

# Capítulo 5

## Aplicaciones

En este capítulo ilustramos los métodos desarrollados en los capítulos anteriores analizando algunos sistemas físicos o biológicos relevantes en la literatura. Estudiamos algunos modelos biomatemáticos los cuales envuelven sistemas no lineales autónomos de dos dimensiones, también estudiamos el famoso ejemplo debido a Van der Pol.

### 5.1. Modelos de dinámica poblacional

La dinámica de poblaciones ha sido tradicionalmente el campo dominante de la biología matemática. El trabajo en esta área se remonta al siglo *XIX*. Las ecuaciones Lotka-Volterra son un famoso ejemplo. Hacia finales del siglo *XIX* y en la primera década del siglo *XX*, la dinámica de población ha sido complementada por la teoría evolutiva de juegos, desarrollada primero por John Maynard Smith. Bajo estas dinámicas, conceptos de la biología evolucionaria pueden tomar forma determinista y matemática.

Comenzaremos por discutir un sistema bastante útil en el área biológica, debido a que contiene algunos de los modelos más estudiados dentro de la dinámica poblacional.

**Proposición 5.1.** *Sea  $g_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones continuas y  $a_i \in \mathbb{R}^+$  para  $i = 1, 2$ , consideremos el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (a_1 - x_1 g_1(x_2)) - k(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2 (a_2 - x_2 g_2(x_1)), \end{cases}$$

con  $\frac{\partial k}{\partial x_1} \geq 0$  y  $a_2 \geq a_1$ , entonces este sistema contiene una función de Dulac en  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

**Demostración.** Como  $-\text{div}(F) = -a_1 + 2x_1 g_1(x_2) + \frac{\partial k}{\partial x_1} - a_2 + 2x_2 g_2(x_1)$  Aplicando el

corolario 2.5 con  $c := a_1 - a_2 - \frac{\partial k}{\partial x_1} - 2x_1g_1(x_2) < 0$ , la ecuación asociada se escribe como

$$[x_1(a_1 - x_1g_1(x_2)) - k] \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2(a_2 - x_2g_2(x_1)) \frac{\partial h}{\partial x_2} = -2(a_2 - x_2g_2(x_1))h, \quad (5.1.1)$$

considerando que  $h(x_1, x_2)$  depende de  $x_2$  entonces el sistema tiene una *función de Dulac* por el corolario 2.5. □

En el siguiente ejemplo mostramos un caso particular de este sistema

**Ejemplo 5.1.** Consideramos el siguiente modelo de dos especies que interactúan citado en [27], donde las variables  $x_1, x_2$  representan la cantidad de individuos presentes de cada especie.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1x_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1 + b_{12}x_2} \right] - bx_1, \\ \dot{x}_2 = r_2x_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2 + b_{21}x_1} \right], \end{cases}$$

notemos que se cumple la condición  $\frac{\partial k}{\partial x_1} \geq 0$  y  $a_2 \geq a_1$  de la proposición 5.1, por lo tanto el sistema no contiene órbitas periódicas en  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . □

Una variante de la proposición anterior la encontramos en la siguiente

**Proposición 5.2.** Sea  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función  $C^1$ , con  $\frac{\partial g}{\partial x_1} > 0$ , sean  $a, k_i, s_1$  constantes positivas,  $s_2 \geq 0$  y  $r_2 \in \mathbb{R}$  entonces el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \left( r_1 - \frac{x_1s_1}{k_1} - ax_2g(x_1) \right), \\ \dot{x}_2 = x_2 \left( r_2 - \frac{x_2s_2}{k_2} + g(x_1) \right), \end{cases} \quad (5.1.2)$$

contiene una *función de Dulac* en  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

**Demostración.** Como  $-\text{div}(F) = -r_1 + 2\frac{x_1s_1}{k_1} + ax_2g(x_1) + ax_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1} - r_1 + 2\frac{x_1s_2}{k_2} - eg(x_1)$  aplicando el corolario 2.5 con  $c := -\frac{x_1s_1}{k_1} - \frac{x_1s_2}{k_2} - ax_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1} < 0$ , la ecuación asociada se escribe como

$$x_1(u_1) \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2(u_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(-u_1 - u_2),$$

donde  $u_1 := r_1 - \frac{x_1s_1}{k_1} - ax_2g(x_1)$  y  $u_2 := r_2 - \frac{x_2s_2}{k_2} + g(x_1)$ , la solución de esta ecuación diferencial parcial es  $h = \frac{1}{x_1x_2}$ , entonces el sistema no tiene órbitas periódicas como parte de sus trayectorias. □

**Ejemplo 5.2.** Consideremos el siguiente modelo entre 2 especies citado en [27], donde las variables  $x_1, x_2$  representan la cantidad de individuos presentes de cada especie.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \left( r_1 - \frac{r_1 x_1}{k_1} - a x_2 (1 - e^{-b x_1}) \right), \\ \dot{x}_2 = x_2 (-d + f(1 - e^{-b x_1})), \end{cases} \quad (5.1.3)$$

donde  $k_1, a, r_1, f > 0$ . Observemos que cumple con las condiciones de la proposición anterior, por lo tanto el sistema no tiene órbitas periódicas como parte de sus trayectorias. □

### 5.1.1. Modelos poblacionales de Presa-Depredador

El sistema clásico para modelar poblaciones de individuos en los que una especie es depredadora y la otra es una presa de ésta, está descrito por el siguiente sistema mejor conocido como ecuaciones de Lotka-Volterra, donde las variables  $x_1, x_2$  representan la cantidad de depredadores y presas respectivamente.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a - b x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(-c + d x_1) \end{cases} \quad (5.1.4)$$

donde las constantes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ ,  $a$  y  $c$  miden la tasa de crecimiento de la presa y la mortalidad del depredador respectivamente, mientras que  $b$  y  $d$  son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies. La gráfica correspondiente a este sistema es

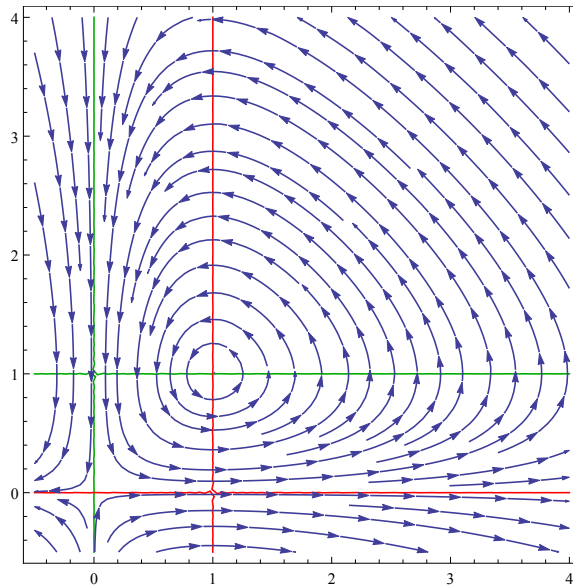


Figura 5.1: Plano fase de las ecuaciones de Lotka-Volterra

Todas las trayectorias de este sistema en la región  $x_1 > 0, x_2 > 0$  son curvas cerradas como se observa en la gráfica 5.1. Analíticamente se puede mostrar esto si se toma la función  $V(x_1, x_2) = dx_1 - c \ln(x_1) + bx_2 - a \ln(x_2)$ , como función de Lyapunov para el único punto crítico  $p = (c/d, a/b)$ .

sin embargo si se perturba un poco este sistema, es decir, si se le agregan algunas condiciones al modelo, éste deja de ser estable, como lo muestran los siguientes ejemplos

**Ejemplo 5.3.** Considere el modelo para la interacción presa-depredador de Lotka-Volterra entre dos especies, donde se le agregan constantes de inmigración  $(\mu, \epsilon)$  dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1x_2 - \mu x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1x_2 - \epsilon x_1 \end{cases}$$

este sistema lo podemos representar como la suma de campos  $F + G$  donde  $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_1x_2, -x_2 + x_1x_2)$  y  $G(x_1, x_2) = (-\mu x_2, -\epsilon x_1)$ . Note que si tomamos la función  $h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1x_2}$  entonces  $div(hF) = 0$  por otro lado  $div(hG) > 0$ , entonces aplicando la proposición 3.10 podemos afirmar que  $h$  es una *función de Dulac* sobre  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0; x_2 > 0\}$ , Véase la figura 5.2(a).

□

Otra variación de las ecuaciones de Lotka-Volterra está dada en el siguiente

**Ejemplo 5.4.** Consideremos el siguiente modelo presa-depredador debido a Leslie [7]

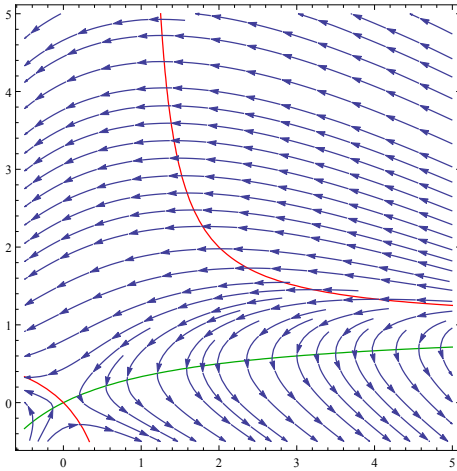
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= r_1x_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1} \right] - bx_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= r_2x_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2x_1} \right], \end{cases}$$

donde  $r_1, r_2, k_1, k_2, b$  son constantes positivas. Si suponemos que  $r_2 \geq r_1$  entonces, este sistema cumple con las condiciones de la proposición 5.1 donde  $k(x_1, x_2) = bx_1x_2$ , por lo tanto el sistema tiene una *función de Dulac* y en consecuencia no contiene órbitas periódicas en  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0; x_2 > 0\}$ , Véase la figura 5.2(b).

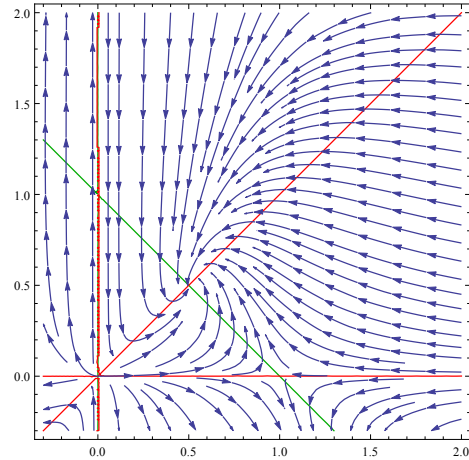
□

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento de las trayectorias para estos ejemplos.





(a) Retrato fase del ejemplo 5.3



(b) Retrato fase del ejemplo 5.4

### 5.1.2. Modelos poblacionales por competencias

**Ejemplo 5.5** (Modelos de competencias). Supongamos que dos especies de animales ocupan el mismo ecosistema, no como depredador y presa sino como competidores por los mismos recursos en el sistema. Además consideremos que cada especie en aislamiento crece de manera exponencial con tasas que indican que cada población crece en forma logística (es decir, en un tiempo largo la población se acota), y decrecen a razones proporcionales al número de interacciones. Este modelo está representado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k - ax_1 - bx_2) \\ \dot{x}_2 = x_2(m - ex_1 - dx_2) \end{cases} \quad (5.1.5)$$

donde se pide que el producto  $ad \geq 0$  y no se anulen simultáneamente, además debido a que  $x_1$  y  $x_2$  representan a los individuos de cada especie, estos son siempre positivos. La ecuación asociada de acuerdo a (2.2.2) queda

$$x_1(k - ax_1 - bx_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2(m - ex_1 - dx_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h [c - (k - ax_1 - bx_2) - (m - ex_1 - dx_2) + ax_1 + dx_2]$$

y como el producto  $ad \geq 0$ , podemos tomar  $c = -ax_1 - dx_2$ , por lo que tenemos

$$x_1(k - ax_1 - bx_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2(m - ex_1 - dx_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h (-(k - ax_1 - bx_2) - (m - ex_1 - dx_2))$$

y nuevamente escribiendo con  $r_1 = k - ax_1 - bx_2$  y  $r_2 = m - ex_1 - dx_2$

$$x_1 r_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 r_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(-r_1 - r_2)$$

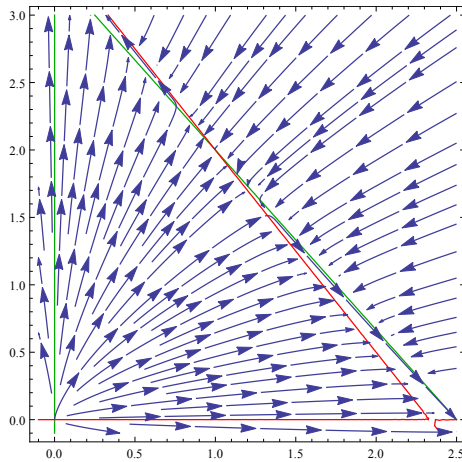
la solución de esta ecuación diferencial parcial es

$$h = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

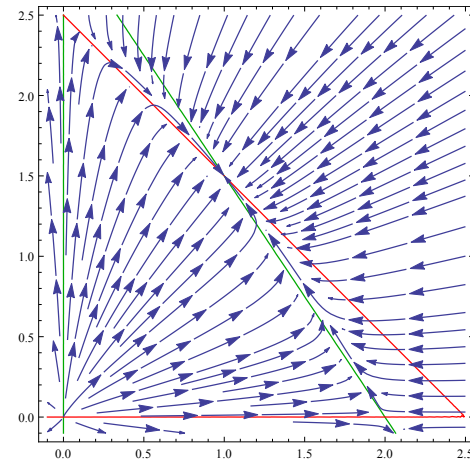
Se puede ver fácilmente que esta función  $h$  es una *función de Dulac* para el sistema 5.1.5 con  $x_1, x_2 > 0$ .

□

**Observación:** Este modelo general de competencia entre especies queda resumido de la siguiente manera: Cuando  $be > ad$ , no es posible la coexistencia de las dos especies y por lo tanto una de ellas debe desaparecer (ver la grafica 5.2(c)), mientras que si se verifica la relación  $be < ad$ , vemos que ambas especies pueden coexistir, véase la figura 5.2(d).



(c) Retrato fase del sistema 5.1.5 con  $be > ad$



(d) Retrato fase del sistema 5.1.5 con  $be < ad$

Las constantes  $a, d$  son una medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre su propia tasa de crecimiento mientras que las constantes  $b, e$  son una medida del efecto inhibitor que el desarrollo de cada especie tiene sobre la otra especie es decir es una medida de la competencia.

**Ejemplo 5.6** (Modelos de competencias). Consideremos ahora el sistema biológico en el cuales dos especies interactúan al igual que en el ejemplo anterior, pero agregamos términos adicionales  $h_1$  and  $h_2$  que indican que la cantidad de individuos de cada población se ve

## 5.1. Modelos de dinámica poblacional

---

afectada debido a su propio esfuerzo de supervivencia y este es proporcional a la cantidad poblacional, respectivamente.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 - k_1x_1 - b_{12}x_2) - h_1x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2(r_2 - k_2x_2 - b_{21}x_1) - h_2x_2, \end{cases}$$

Consideremos la región  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . Más aún tomemos  $k_1k_2 \geq 0$  con  $k_1, k_2$  no son ambas cero. Calculando la divergencia de este sistema obtenemos

$$\operatorname{div}(F) = r_1 - 2k_1x_1 - b_{12}x_2 - h_1 + r_2 - 2k_2x_2 - b_{21}x_1 - h_2,$$

tomando  $c(x_1, x_2) := -(k_1x_1 + k_2x_2)$  podemos escribir

$$\beta := \frac{c - \operatorname{div}(F)}{x_2f_1 + x_1f_2} = \frac{-(r_1 - k_1x_1 - b_{12}x_2 - h_1 + r_2 - k_2x_2 - b_{21}x_1 - h_2)}{(x_1x_2)(r_1 - k_1x_1 - b_{12}x_2 - h_1 + r_2 - k_2x_2 - b_{21}x_1 - h_2)} = \frac{-1}{x_1x_2}$$

la cual es continua y depende de  $z := x_1x_2$  por lo tanto por el inciso *ii*) del corolario 2.11 tenemos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+^2}(F) \neq \emptyset$ , es decir el sistema no contiene trayectorias cerradas.

□

**Ejemplo 5.7** (Modelos de competencias). Incorporemos ahora constantes de inmigración,  $e_1$  y  $e_2$ , a las dos poblaciones, respectivamente, la ecuación de modelado matemático queda ahora

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 - k_1x_1 - b_{12}x_2) + e_1 - h_1x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2(r_2 - k_2x_2 - b_{21}x_1) + e_2 - h_2x_2. \end{cases}$$

Veamos este campo vectorial como la suma de dos campos  $F + G$  donde el campo vectorial  $F$  está representado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 - k_1x_1 - b_{12}x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(r_2 - k_2x_2 - b_{21}x_1). \end{cases}$$

y el campo vectorial  $G$  es igual a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e_1 - h_1x_1, \\ \dot{x}_2 = e_2 - h_2x_2. \end{cases}$$

Del ejemplo 5.5 sabemos que  $h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1x_2}$  es una *función de Dulac* para el campo vectorial  $F = (f_1, f_2)$ , además

$$\operatorname{div}(hG) = -\frac{e_1x_2 + e_2x_1}{x_1^2x_2^2} < 0,$$

Por lo tanto por la proposición 3.10 tenemos  $\mathcal{D}_\Omega(F + G) \neq \emptyset$ , para  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

□

## 5.2. Modelos epidemiológicos

La dinámica de poblaciones está relacionada con otra área activa de investigación en biomatemática: epidemiología matemática, el estudio de las enfermedades infecciosas que afectan a las poblaciones. Se han propuesto diversos modelos de esparcimiento viral, que analizados, proveen resultados importantes que pueden ser aplicados a políticas de salud.

Dentro de los modelos determinísticos basados en estados hay una gran variedad de posibles modelos a utilizar. El acrónimo de un modelo suele indicar los diversos estados por los que pasan los individuos. Por ejemplo, un modelo SIR representa que los individuos pueden pasar de ser susceptibles, a infecciosos y de ahí a resistentes. Si el modelo fuese cíclico, se acaba el acrónimo con la misma letra que se inicia. Por ejemplo, un modelo SIS indica que los individuos pueden pasar de ser susceptibles a ser infecciosos y de ahí a ser susceptibles de nuevo.

El modelo a utilizar dependería de los agentes infecciosos por los que se transmita la enfermedad, ya que varían de una enfermedad a otra. Por ejemplo, las enfermedades cuyos agentes infecciosos son virus, provocan que aquellos individuos que se recuperan de la enfermedad pasen a un estado de resistencia en el que no pueden volver a ser infectados. Por lo tanto, serían estudiados mediante modelos SIR, SEIR, MSIR o MSEIR, según el caso y la complejidad del modelo. Por otro lado, en las enfermedades transmitidas mediante bacterias los individuos que se recuperan de la enfermedad vuelven a ser susceptibles, sin pasar por un estado de resistencia. En este caso, los modelos utilizados serían del tipo SIS, SEIS, MSIS o MSEIS.

En nuestro caso, nos centraremos en estudiar modelos determinísticos SIR (*susceptibles-infecciosos-resistentes*) que, como hemos visto anteriormente, suelen ser adecuados para enfermedades cuyos agentes infecciosos son virus.

**Ejemplo 5.8** (Modelo epidemiológico). Un modelo básico para describir la propagación del VIH se establece en términos del siguiente sistema, (basado en el sistema SIR propuesto por Kermack y Mckendrick en 1927) donde  $\beta$  es la probabilidad de infección por contacto sexual con un individuo infectado y  $\alpha$  es la razón a la que un individuo infectado desarrolla VIH. Para este modelo la variable  $x_1$  representa la cantidad de individuos sanos pero con posibilidades de ser infectados, mientras que  $x_2$  indica el número de personas infectadas.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 x_2 - \alpha x_2, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Si consideramos la ecuación asociada tenemos

$$-\beta x_1 x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (\beta x_1 x_2 - \alpha x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c - s(-\beta x_2 + \beta x_1 - \alpha))$$

consideramos que la función  $h := h(z)$  para una  $z$  por determinar. Entonces la ecuación

queda reescrita como

$$\left[ -\beta x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (\beta x_1 x_2 - \alpha x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - s(-\beta x_2 + \beta x_1 - \alpha))$$

buscamos una  $z$  tal que  $-\beta x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \beta x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ . Claramente se ve que  $z = x_1 + x_2$  es solución y por lo tanto, nuestra ecuación se convierte en

$$-\alpha x_2 \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - s(-\beta x_2 + \beta x_1 - \alpha))$$

es decir

$$\frac{dh}{h} = \frac{(c - s(-\beta x_2 + \beta x_1 - \alpha))}{-\alpha x_2} dz,$$

aquí el lado derecho debe depender de  $z = x_1 + x_2$ . Para esto tomemos  $s = 0$  y  $c = x_2$ . Con esto, una *función de Dulac* es  $h = e^{-z/\alpha}$ , y por la proposición 4.5 el sistema no tiene ciclos límite, ver figura 5.2(e)

□

**Ejemplo 5.9.** [Modelo epidemiológico SIS] Este modelo está determinado por el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda - \mu x_1 - \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \beta(x_1 - x_2)x_2 - (\alpha + \mu + \delta)x_2, \end{cases}$$

donde  $\beta$  =tasa de contagios,  $\alpha$  =la proporción de individuos que se recuperan por unidad de tiempo,  $\mu$  =tasa promedio de defunciones,  $\lambda$  =tasa promedio de nacimientos,  $\gamma$  =tiempo promedio de infección y  $\delta$  =tiempo promedio de inmunidad temporal.

Tomemos nuevamente la región  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . Calculando su divergencia obtenemos

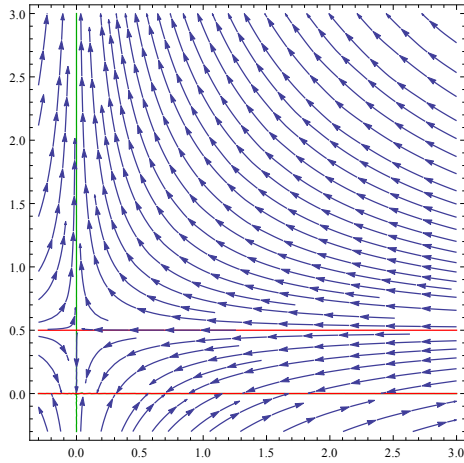
$$\operatorname{div}(F) = -\mu + \beta x_1 - 2\beta x_2 - (\alpha + \mu + \delta),$$

tomando  $c(x_1, x_2) := -(\mu + \beta x_2)$  podemos escribir

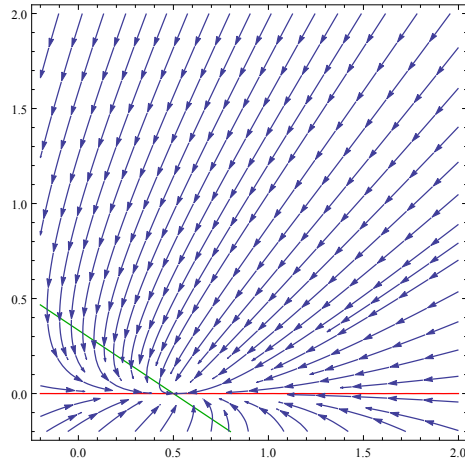
$$\alpha_2 := \frac{c - \operatorname{div}(F)}{f_2} = \frac{-\beta x_1 + \beta x_2 + (\alpha + \mu + \delta)}{(x_2)[\beta x_1 - \beta x_2 - (\alpha + \mu + \delta)]} = -\frac{1}{x_2}$$

la cual es continua y depende de  $z := x_2$  por lo tanto por *i*) del corolario 2.11 obtenemos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+^2}(F) \neq \emptyset$ , es decir el sistema contiene una función de Dulac y por lo tanto no puede contener trayectorias cerradas, ver figura 5.2(f).

□



(e) Retrato fase del ejemplo 5.8



(f) Retrato fase del ejemplo 5.9

**Ejemplo 5.10** (Modelo epidemiológico SIR). Consideremos ahora el clásico modelo epidemiológico (**suceptibles-infecciosos-muertos**), con los parámetros del ejemplo anterior.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \lambda - \beta x_1 x_2 - \mu x_1 + \delta x_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 x_2 - (\alpha + \mu + \delta) x_2, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

La estructura de este sistema sugiere el cambio de variable  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_2)$ , así el sistema se convierte en

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda - \mu y_1 - \alpha y_2, \\ \dot{y}_2 &= \beta(y_1 - y_2)y_2 - (\alpha + \mu + \delta)y_2, \end{cases} \quad (5.2.3)$$

El cual podemos considerar como una suma de dos campos vectoriales  $F + G$  donde el campo vectorial  $F$  está representado por

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda - \mu y_1, \\ \dot{y}_2 &= \beta(y_1 - y_2)y_2, \end{cases} \quad (5.2.4)$$

y el campo vectorial  $G$  es igual a

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -\alpha y_2, \\ \dot{y}_2 &= -(\alpha + \mu + \delta)y_2, \end{cases} \quad (5.2.5)$$

es claro que  $\bar{h}(y_1, y_2) = (y_2)^{-1}$  es una *función de Dulac* de del campo vectorial  $F$ .

Además  $\text{div}(hG) = 0$ , por lo tanto por el corolario 3.11  $\bar{h}(y_1, y_2) = (y_2)^{-1}$  es una *función de Dulac* de (5.2.3), por lo tanto por la proposición 3.16  $h(x_1, x_2) = (x_2)^{-1}$  es la correspondiente *función de Dulac* para (5.2.2) y en consecuencia el sistema no tiene órbitas periódicas, ver figura 5.2(g)

□

**Ejemplo 5.11** (Modelo epidemiológico SEIS). Consideremos ahora el clásico modelo *susceptible-expuesto-infectado-susceptible*, con constante de de población ( $\eta$ ).

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \mu\eta - \beta x_0 x_2 - \mu x_0 + \delta x_2, \\ \dot{x}_1 = \beta x_0 x_2 - (\epsilon + \mu)x_1, \\ \dot{x}_2 = \epsilon x_1 - (\delta + \mu)x_2, \end{cases}$$

donde  $x_0$  representa la cantidad de personas susceptibles a ser contagiadas,  $x_1$  las personas que han tenido contacto directo con una persona infectada y  $x_2$  indica la cantidad de individuos infectados, además consideremos los parámetros del ejemplo 5.9 y  $1/\epsilon =$  tiempo promedio de incubación, adicionalmente imponemos la restricción

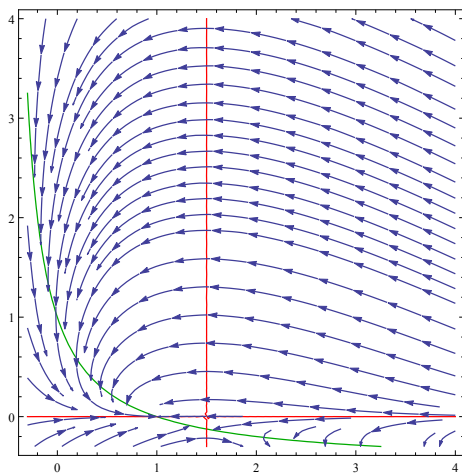
$$\Sigma = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_0 + x_1 + x_2 = \eta\}.$$

El sistema está sujeto a la ecuación  $x_0 + x_1 + x_2 = \eta$ , y usando  $x_0 = \eta - x_1 - x_2$  en el modelo, podemos eliminar  $x_0$  de las ecuaciones. Esta substitución nos da el modelo en dos ecuaciones

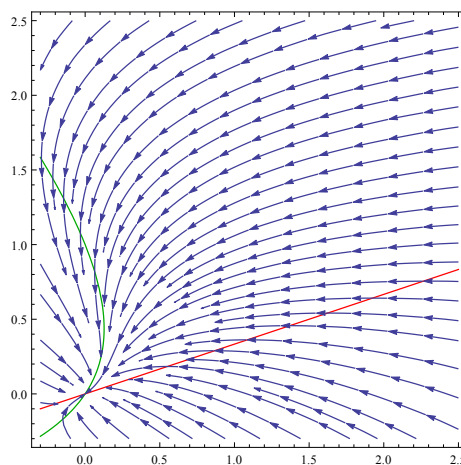
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta(\eta - x_1 - x_2)x_2 - (\epsilon + \mu)x_1, \\ \dot{x}_2 = \epsilon x_1 - (\delta + \mu)x_2, \end{cases} \quad (5.2.6)$$

tiene  $h(x_1, x_2) = x_1^{-1}$  como una *función de Dulac*, consideremos un termino de transmisión entre individuos expuestos y susceptibles  $G := (\kappa(\eta - x_1 - x_2)x_1, 0)$  y note que  $\text{div}(hG) = -\kappa < 0$ , entonces por la proposición 3.10 tenemos que  $h \in \mathcal{D}_\Sigma(F + G)$ , ver figura 5.2(h).

□



(g) Retrato fase del ejemplo 5.10



(h) Retrato fase del sistema 5.11

### 5.3. Sistema de Van der Pol

La *ecuación de Van der Pol* tiene una larga historia en la física y biología. Por ejemplo, en biología, Nagumo [10] y Fitzhugh [11] aplicaron la ecuación a un campo bidimensional en el modelo homónimo de *Fitzhugh-Nagumo*, para describir el potencial de acción de las neuronas a partir de la variaciones de potenciales de iones de potasio y sodio;  $K^+$ ,  $Na^+$ , en las neuronas. Es común en el campo de la ingeniería y de la física, que este tipo de sistemas modelen circuitos eléctricos, en Gonorovski [13] puede profundizarse el tema desde el punto de vista de estas aplicaciones. Un ejemplo clásico de este tipo de aplicaciones es el *oscilador de Van der Pol* cuya ecuación está descrita por

$$x_1'' - \epsilon(1 - x_1^2)x_1' + x_1 = 0, \quad \epsilon \neq 0.$$

En la siguiente proposición se establece un criterio de unicidad de ciclos límite para el sistema general de *Van der Pol*.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\epsilon(x_1^2 + r)x_2 - x_1. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Si bien es cierto este resultado es ampliamente conocido, lo presentamos aquí para dejar en claro como nuestra técnica trabaja a fin de producir una *función de Dulac*. este resultado se obtiene usando la proposición 4.5.

**Proposición 5.3.** *Para  $r < 0$ , la ecuación de Van der Pol (5.3.1) tiene a lo más un ciclo límite, mientras que si  $r \geq 0$  el sistema no admite ciclos límite.*

**Demostración.** En efecto, usando la ecuación asociada (4.2.1) tenemos que

$$x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (-\epsilon(x_1^2 + r)x_2 - x_1) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c + s(\epsilon(x_1^2 + r))). \quad (5.3.2)$$

Podemos asumir que  $r \neq 0$ , de otra manera el resultado se sigue directamente del teorema de Bendixson. Ahora tratamos de resolver (5.3.2) para alguna función  $c$  que satisfaga las condiciones de la proposición 4.5. Primero supongamos que  $h = h(z)$ , depende de una función  $z = z(x_1, x_2)$ , con esto tenemos

$$\left[ x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (-\epsilon(x_1^2 + r)x_2 - x_1) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c + s\epsilon(x_1^2 + r)), \quad (5.3.3)$$

para simplificar la ecuación tomamos  $z$  tal que  $x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ ; de aquí definimos  $z := x_1^2 + x_2^2 + a$  para alguna constante  $a$  y (5.3.3) se reduce a

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{c + s\epsilon(x_1^2 + r)}{-2\epsilon(x_1^2 + r)x_2^2}, \quad (5.3.4)$$



donde el lado derecho depende solamente de  $z$ , el cual denotaremos como  $\eta(z)$ . Reescribiendo la ecuación obtenemos

$$c = -2\epsilon\eta(z)(x_1^2 + r)x_2^2 - s\epsilon(x_1^2 + r) = -(x_1^2 + r)\epsilon[2\eta(z)x_2^2 + s], \quad (5.3.5)$$

por simplicidad tomamos  $\eta(z) = \frac{1}{z}$ , y veamos que

$$[2\eta(z)x_2^2 + s] = \frac{2x_2^2 + s(x_1^2 + x_2^2 + a)}{(x_1^2 + x_2^2 + a)},$$

de aquí, escogemos  $s = -2$  y  $a = r$ , entonces  $c = \frac{-2\epsilon(x_1^2 + r)^2}{x_1^2 + x_2^2 + r}$  y la ecuación (5.3.3) se escribe como

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{z},$$

cuya solución es

$$h(x_1, x_2) = z = x_1^2 + x_2^2 + r.$$

Notemos que  $ch = -2\epsilon(x_1^2 + r)^2$ , la cual es continua, no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero; por lo tanto,  $h$  es una *función de Dulac*.

Si  $r > 0$ ,  $Z(h)$  no contiene trayectorias cerradas, entonces  $co(h) = 0$ . También  $l(\mathbb{R}^2, h) = 0$ ; por lo tanto siguiendo la proposición 4.5, el sistema no admite ciclos límite.

Por otro lado, si  $r < 0$ ,  $Z(h)$  es un círculo, y por lo tanto  $co(h) = 1$ ; aun cuando,  $Z(h)$  no contiene ciclos límite debido a que el campo vectorial no es tangente con  $Z(h)$ . tenemos que  $l(\mathbb{R}^2, h) = 1$ , por lo tanto por la proposición 4.5 el sistema tiene a lo más 1 ciclo límite en  $\mathbb{R}^2$ .

Notemos que en particular, hemos obtenido la misma *función de Dulac* que obtuvo Cherkas con otros métodos.

□

# Capítulo 6

## Sistemas tipo Liénard

En este capítulo presentaremos algunos resultados interesantes que se pueden obtener usando nuestro método propuesto, al aplicarlo a ciertos sistemas particulares que presentan gran importancia dentro de las matemáticas; como el *sistema de Liénard*, caracterizado por la ecuación diferencial

$$\ddot{x}_1 + f(x_1)\dot{x}_1 + g(x_1) = 0$$

que fue y es intensamente estudiado como modelo de aplicación en distintas áreas de investigación entre ellas para circuitos eléctricos oscilatorios ver por ejemplo [5]. Es bien conocido que bajo ciertas condiciones el teorema de Liénard garantiza la unicidad y existencia de ciclos límite para tal sistema en regiones acotadas de el plano.

En este capítulo mostraremos algunos criterios que permitan descartar la existencia de ciclos límite para sistemas de este tipo en todo el plano, así como algunas condiciones necesarias que permitan determinar la existencia de a lo más un ciclo límite en las trayectorias del campo vectorial correspondiente, presentaremos también generalizaciones del *sistema de Liénard* en algunas direcciones así como nuevos criterios de existencia de ciclos límite para dichas generalizaciones.

### 6.1. Ecuación de Liénard

Consideremos el *sistema de Liénard* dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1)x_2, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (6.1.1)$$

donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones reales  $C^1$ .

Los *sistemas de Liénard* incluyen ecuaciones diferenciales muy importantes matemáticamente hablando, pues modelan entre otros diversos comportamientos oscilatorios. En la

literatura, existen numerosos resultados sobre la existencia y unicidad de órbitas periódicas (ciclos límite) para la *ecuación de Liénard*, ver por ejemplo [8], [26], [32], [40] y [41].

En esta sección presentamos algunas nuevas condiciones concernientes a la no existencia y unicidad de ciclos límite para los *sistemas de Liénard*. Algunos de estos resultados mejoran los ya obtenidos con anterioridad por otros autores, como los que se mencionan en la sección 1.2.2.

Recordemos que dado un sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (6.1.2)$$

donde  $f_1, f_2$  son funciones reales,  $C^1$  en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . En la proposición 4.5 se establece una ecuación diferencial a la que llamamos *ecuación asociada* al sistema, esta ecuación se escribe como

$$\langle \nabla h, F \rangle + s h \operatorname{div}(F) = c h,$$

es decir,

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c - s \operatorname{div}F], \quad (6.1.3)$$

con  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ . La solución de esta ecuación nos permite obtener funciones  $h$  a las que llamamos funciones de Dulac y en base a la existencia de dichas funciones podemos establecer una cota superior para la cantidad de ciclos límite en el sistema (6.1.2).

El primer resultado que presentamos da un criterio para la no existencia de ciclos límite en el sistema de Liénard.

**Proposición 6.1.** *Si existen  $c_1, c_2$  constantes, tales que  $c_1 g(x_1) + c_2 f(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , entonces el sistema de Liénard 6.1.1 no tiene ciclos límite.*

**Demostración.** La ecuación asociada de acuerdo a (6.1.3)

$$x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1)x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c + s f(x_1)], \quad (6.1.4)$$

suponiendo que  $h = h(z)$  depende de  $z = z(x_1, x_2)$ , obtenemos

$$\left[ x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1)x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \ln h}{dz} = c + s f(x_1),$$

tomando  $z$  tal que  $\frac{\partial z}{\partial x_1} - f(x_1) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , entonces de aquí  $z = \int f(x_1) dx_1 + x_2$  y

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c + s f(x_1)}{-g(x_1)}, \quad (6.1.5)$$

## Capítulo 6 Sistemas tipo Liénard

---

donde el lado derecho depende de  $z$ , si lo denotamos por  $\phi(z)$ , y tomamos

$$c = c_1 f(x_1) + c_2 g(x_1) \text{ and } s = -c_1,$$

entonces  $\phi(z) = -c_2$  y la ecuación (6.1.5) se puede escribir como  $\frac{d \ln h}{dz} = -c_2$ , cuya solución es  $h(x_1, x_2) = e^z = \exp[c_2(\int f(x_1) dx_1 + x_2)]$ , de la proposición 4.5, la *ecuación de Liénard* no tiene ciclos límite, pues  $Z(h) = \emptyset$  y no contiene trayectorias cerradas, en particular,  $co(h) = 0$  además  $l(\mathbb{R}^2, h) = 0$ .

□

**Ejemplo 6.1.** El sistema tipo Liénard de grado 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^4 - x_1^2 x_2 + x_2 + 1, \end{cases}$$

no tiene ciclos límite, pues tomando  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 1$  se cumplen las condiciones de la proposición 6.1.

□

**Corolario 6.2.** Si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple

1.  $g(x_1)$  o  $f(x_1)$  pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,
2.  $kf(x_1) > g(x_1)$ , para alguna  $k$  constante,

entonces el sistema de Liénard (6.1.1), no tiene ciclos límite.

**Demostración.** En efecto considerando  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  y viceversa en la proposición 6.1 para el primer inciso, y  $kf(x_1) - g(x_1) \in \mathbb{R}^+$  para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$  en el segundo inciso.

□

**Ejemplo 6.2.** El sistema tipo Liénard de orden cuadrático

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_1 - 3x_2 + 1, \end{cases}$$

no tiene ciclos límite, pues  $f(x_1) = 3 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ .

□

**Proposición 6.3.** Sea  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dada por  $G(x_1) := \int g(x_1) dx_1$  con  $g$  analítica en  $\mathbb{R}$ . Si para algún  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto donde  $G + a$  es no positivo, tiene sólo una componente cerrada conexa y se satisface que  $f(x_1)(G(x_1) + a) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , entonces la ecuación de Liénard (6.1.1), tiene a lo más un ciclo límite.

**Demostración.** La ecuación asociada de acuerdo al sistema (6.1.3) se escribe como

$$x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1)x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c + sf(x_1)). \quad (6.1.6)$$

Ahora suponga que  $h = h(z)$  depende de  $z = z(x_1, x_2)$ , por lo tanto tenemos que

$$\left[ x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - (g(x_1) + f(x_1)x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \ln h}{dz} = c + sf(x_1), \quad (6.1.7)$$

tomando  $z$  tal que  $x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - g(x_1) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , de aquí  $z = \frac{x_2^2}{2} + g(s)ds + a$  para algún  $a$  constante y (6.1.7) se convierte en

$$\int \frac{d \ln h}{dz} = \frac{c + sf(x_1)}{-f(x_1)x_2^2}, \quad (6.1.8)$$

donde el lado derecho depende de  $z$ , si lo denotamos como  $\eta$ , y despejamos la función  $c$  tenemos

$$c = -\eta(z) (f(x_1)x_2^2) - sf(x_1), \quad (6.1.9)$$

haciendo  $s = -2$ ,  $\eta(z) = \frac{1}{z}$  y simplificando se tiene

$$c = -f(x_1) \frac{2 \int g(x_1) dx_1 + a}{z}, \quad (6.1.10)$$

tomando  $c$  en esta forma, entonces la ecuación (6.1.8) se escribe como  $\frac{d \ln h}{dz} = \frac{d \ln z}{dz}$  cuya solución es  $h(x_1, x_2) = z = \frac{x_2^2}{2} + \int g(x_1) dx_1 + a$ , también por hipótesis la función  $ch = -2f(x_1)(\int g(x_1) dx_1 + a)$  es continua, no cambia de signo y sólo se anula en un conjunto de medida cero, note además que como el conjunto donde la función  $G + a$  es no positiva tiene sólo una componente cerrada conexa, por lo que el conjunto  $Z(h)$  no contiene trayectorias cerradas pues el campo vectorial del sistema (6.1.1) no es tangente a la curva  $z(x_1, x_2) = 0$ . Por lo tanto por la proposición 6.1 el sistema (6.1.1) tiene a lo más un ciclo límite. □

**Ejemplo 6.3.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + 3x_1^2) - (\frac{x_1}{2} + x_1^3)x_2, \end{cases}$$

aquí  $G(x_1) = 1 + 6x_1$  también  $f(x_1) = \frac{x_1}{2} + x_1^3$  por lo que  $f(x_1)(G(x_1) + a) = (\frac{x_1}{2} + x_1^3)(1 + 6x_1 + a) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  para  $a = -1$  y Por la proposición 6.3, el sistema contiene a lo más un ciclo límite. □

**Ejemplo 6.4.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(\cos^3(x_1)) - (x_1^2 + 5x_1^4)x_2, \end{cases}$$

En este caso  $G(x_1) = \frac{3\sin(x_1)}{4} + \frac{1}{12}\sin(3x_1)$  también  $f(x_1) = x_1^2 + 5x_1^4$  en consecuencia  $f(x_1)(G(x_1) + a) = (x_1^2 + 5x_1^4)(\frac{3\sin(x_1)}{4} + \frac{1}{12}\sin(3x_1) + a) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  para  $a > 2$  y por la proposición 6.3, el sistema contiene a lo más un ciclo límite.

□

Notemos que la proposición 6.3 cuando  $g(x_1) = x_1$ , recupera el siguiente resultado debido a Sansone [8]

**Teorema 6.4. Teorema de Sansone:** *Si  $g(x_1) = x_1$ , y existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x_1) < 0$  para  $x_1 \in (-\delta, \delta)$ ,  $f(x_1) > 0$  en  $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$  también  $\int_0^{\pm\infty} f(s)ds = \pm\infty$ , entonces el sistema (6.1.1) tiene a lo más un ciclo límite.*

**Demostración.** En efecto, tomando  $G(x_1) = \int g(x_1)dx_1 = \frac{x_1^2}{2}$  y  $a = -\frac{\delta^2}{2}$ , la hipótesis de la proposición 6.3 se cumple, por lo tanto el sistema (6.1.1) tiene a lo más un ciclo límite.

□

**Ejemplo 6.5.** El teorema de Poincaré-Bendixson aplicado a un anillo adecuado, cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , asegura la existencia de ciclos límite en el campo vectorial del sistema tipo Liénard de grado 5

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^4 x_2 - x_1^3 + x_2, \end{cases}$$

por otro lado tomando  $a = -1/4$  en la proposición 6.3 se muestra que este sistema tiene a lo mas un ciclo límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Proposición 6.5.** *Suponga que existe  $m$  tal que  $f(x_1)[2F(x_1) + m] - g(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  con  $F(x_1) = \int f(x_1)dx_1$ , entonces la ecuación de Liénard no tiene ciclos límite.*

**Demostración.** Considere el sistema (4.2.10) y tomando  $z$  tal que  $\frac{\partial z}{\partial x_1} - f(x_1)\frac{\partial z}{\partial x_2} = f(x_1)$ , de aquí  $z = x_2 + 2 \int f(x_1)dx_1 + a$  donde  $a$  es una constante y (4.2.10) se convierte

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c + sf(x_1)}{[x_2 f(x_1) - g(x_1)]}, \quad (6.1.11)$$

donde el lado derecho depende sólo de  $z$ , tomamos este, igual a  $\frac{1}{z}$ , por lo tanto

$$c = \frac{x_2 f(x_1) - g(x_1) + z s f(x_1)}{z}$$

entonces, sustituyendo  $z$  en el numerador y haciendo  $s = -1$ ,  $a = -m$ , obtenemos

$$c = \frac{-g(x_1) + f(x_1)[2F(x_1) + m]}{z}$$

tomando  $c$  en esta forma, la ecuación (6.1.5) se escribe como  $\frac{d \ln h}{dz} = \frac{1}{z}$ , cuya solución es  $h(x_1, x_2) = z = 2 \int f(x_1) dx_1 + x_2 - m$ . Ahora,  $Z(h)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfa a  $\mathbb{R}$  por lo tanto ningún ciclo límite está contenido en  $Z(h)$ , también tenemos que  $l(\mathbb{R}^2, h) = 0$ , y usando la proposición 4.5 el *sistema de Liénard* no tiene ciclos límite.

□

**Ejemplo 6.6.** El sistema tipo Liénard de grado 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^4 - x_2, \end{cases}$$

no tiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ , pues aquí  $f(x_1) = 1$ ,  $g(x_1) = x_1^4$  por lo que se tiene que  $f(x_1)[2F(x_1) + m] - g(x_1) = 2x_1 - 2 - x_1^4 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , es decir cumple la condición de la proposición anterior.

□

**Proposición 6.6.** Si existe una función  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  analítica y estrictamente monótona tal que  $\psi^2 f^2 + 4\psi\psi'g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}^-$ , entonces el sistema de Liénard (6.1.1), no tiene ciclos límite.

**Demostración.** Consideremos la ecuación asociada (6.1.3) a el *sistema de Liénard* y suponga que la función  $h$  tiene la forma  $h(x_1, x_2) = \psi(x_1)x_2$ . Entonces, tenemos

$$x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - (g(x_1) + f(x_1)x_2)\psi(x_1) - s f(x_1)h(x_1, x_2) = c(x_1, x_2)h(x_1, x_2),$$

tomando  $s = 0$  por las condiciones de la proposición 4.5 se sigue que

$$\psi'(x_1)x_2^2 - \psi(x_1)f(x_1)x_2 - \psi(x_1)g(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \quad (6.1.12)$$

Ahora esta desigualdad cuadrática sobre  $x_2$  cumple que  $\psi'(x_1)\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y el discriminante correspondiente

$$\psi^2(x_1)f^2(x_1) + 4\psi(x_1)\psi'(x_1)g(x_1) \leq 0 \quad (6.1.13)$$

(la igualdad se cumple, en este caso, sólo en puntos aislados de  $\mathbb{R}$ ), sin embargo sigue cumpliendo con la hipótesis.

**Observación** Como la función  $\psi$  es analítica, el lado izquierdo de las desigualdades previas son funciones  $C^1$ . Por lo tanto la desigualdad (6.1.13) implica (6.1.12) para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ . Más aún si  $\psi'(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $\psi(x_0) = 0$ . Por lo tanto este  $x_0$  es único y cumple la igualdad (6.1.13). □

**Corolario 6.7.** *Si  $f(x_1), g(x_1)$  son funciones del sistema de Liénard y satisfacen la desigualdad*

$$x_1 [x_1 f^2(x_1) + 4g(x_1)] \leq 0$$

para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ , entonces el correspondiente sistema (6.1.1) no tiene ciclos límite.

**Demostración.** Basta considerar  $\psi(x_1) = x_1$ . □

**Ejemplo 6.7.** El sistema de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= e^{-x_1}(x_1 e^{-x_1} - x_2), \end{cases}$$

no tiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ , pues aquí  $f(x_1) = e^{-x_1}$  y  $g(x_1) = x_1 e^{-2x_1}$  por lo que el corolario anterior nos garantiza la afirmación. □

**Corolario 6.8.** *Si  $f(x_1), g(x_1)$  son funciones del sistema de Liénard y satisfacen la desigualdad*

$$f^2(x_1) + 4g(x_1) \leq 0$$

para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ , entonces el correspondiente sistema de Liénard no tiene ciclos límite.

**Demostración.** Basta considerar  $\psi(x_1) = e^{x_1}$  en la proposición 6.6. □

**Ejemplo 6.8.** Tomando  $g = -f^2$ , el correspondiente sistema de Liénard no tiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ , como en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1(x_1 - x_2). \end{cases}$$

□

**Corolario 6.9.** *Si  $g(x_1)$  es estrictamente decreciente y satisface la desigualdad*

$$f^2(x_1) + 4g'(x_1) \leq 0$$

para todo  $x_1 \in \mathbb{R}$ , entonces el correspondiente sistema de Liénard no tiene ciclos límite.



## 6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

---

**Demostración.** De hecho, por hipótesis podemos considerar  $\psi = g$  en la proposición 6.6.

□

**Ejemplo 6.9.** El sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 - x_1 - 2x_1x_2, \end{cases}$$

satisface la condición  $f^2(x_1) + 4g'(x_1) = 4x_1^2 - 3x_1^2 + 1 \leq 0$  y por lo tanto no tiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$

□

**Ejemplo 6.10.** Sea  $g(x_1) = -x_1/4$  en el *sistema de Liénard*. Si  $-1 \leq f(x_1) \leq 1$  para todo  $x_1 \in \mathbb{R}^2$ , entonces el sistema no tiene ciclos límites, como en el siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{4} - \frac{2x_2}{\pi} \tan^{-1} x_1, \end{cases}$$

□

## 6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

En esta sección, nos enfocaremos al estudio de los ciclos límite presentes en los *sistemas de Liénard generalizados*. Mostraremos algunos criterios obtenidos para la no existencia de este tipo de trayectorias en tales sistemas. En adición a esto también analizaremos y daremos cotas superiores para el número de ciclos límite. En particular, se mostraran algunas condiciones suficientes para la unicidad de los ciclos límite presentes en ciertos sistemas, al mismo tiempo se presentaran algunos ejemplos que ilustren nuestros resultados.

como se comento en la sección anterior, uno de los sistemas de ecuaciones diferenciales más estudiado y de gran relevancia es el *sistema de Liénard* 6.1.1 el cual recordaremos a continuación,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1)x_2. \end{cases} \quad (6.2.1)$$

pues debido a su gran importancia en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, es natural considerar algunas generalizaciones. Existen algunos estudios en esta dirección, ver por ejemplo [40], [42] y [44].

En este trabajo se considerará una generalización de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2), \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1, x_2)k(x_2). \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Para el cual se obtendrán criterios de no existencia de ciclos límite, y en algunos casos más particulares se darán algunos criterios de no existencia y unicidad de los ciclos límite.

## Capítulo 6 Sistemas tipo Liénard

---

Para comenzar recordemos que en la proposición 2.12 se presentó una lista de condiciones bajo las cuales un sistema general

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (6.2.3)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto abierto simplemente conexo y  $f_1, f_2$  son funciones reales  $C^1$  en  $\Omega$ , no admite órbitas periódicas. Usando la proposición 4.5, podemos retomar este resultado considerando ahora únicamente la existencia de ciclos límite.

**Proposición 6.10.** *Si cualquiera de las siguientes condiciones pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,*

*i).-  $c_1 f_1 + c_2 f_2$ ;*

*ii).-  $x_2 f_1 + x_1 f_2$ ;*

*iii).-  $f_1 g_1 + f_2 g_2$ ;*

*iv).-  $f_1 g_2 g_1' + f_2 g_1 g_2'$ ;*

con  $g_i$  funciones  $C^1$  que dependen sólo de  $x_i$ , para  $i = 1, 2$ . Entonces el sistema (6.2.3) no admite ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .

**Demostración.** Consideraremos el caso *i*), pues los otros son análogos. para demostrarla buscamos una *función de Dulac*, usando la ecuación asociada (4.2.1).

Supongamos que  $h$  depende sólo de  $z := c_1 x_1 + c_2 x_2$ , por lo tanto la ecuación (4.2.1) se reduce a

$$c_1 f_1(x_1, x_2) \frac{dh}{dz} + c_2 f_2(x_1, x_2) \frac{dh}{dz} = h(z)(c(x_1, x_2) - \text{div}(F)),$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c - \text{div}(F)}{c_1 f_1 + c_2 f_2}.$$

si tomamos  $s = 0$  y  $c := c_1 f_1 + c_2 f_2$ , entonces  $h(z) := \exp(z)$  es una solución de la ecuación previa. Como  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  entonces  $h(x_1, x_2) = \exp(z)$  es una *función de Dulac*.

además observemos que  $Z(h) = \emptyset$  por lo tanto no contiene trayectorias cerradas. En particular,  $co(h) = 0$ . también  $s = 0$ , entonces por la proposición 4.5 el sistema (6.2.3) no admite ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

De acuerdo a este resultado podemos enunciar algunos ejemplos particulares del *sistema de Liénard generalizado* 6.2.2.

## 6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

---

**Ejemplo 6.11.** consideremos el *sistema de Liénard generalizado*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^5 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_1 x_2^3 (x_2^5 + x_2). \end{cases}$$

por *ii*) en la proposición anterior este sistema no puede contener ciclos límite.

□

Más aún, si damos algunas condiciones para la función  $f(x_1, x_2)$  en el *sistema de Liénard generalizado* y con la ayuda de la proposición previa se obtiene los siguientes resultados;

**Corolario 6.11.** *Si  $f(x_1, x_2) = r_1(x_1)r_2(x_2)$  con  $r_2 \neq 0$  y  $g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , entonces el sistema (6.2.2) no admite ciclos límite.*

**Demostración.** En efecto, tomemos  $g_1 = r_1$  y  $g_2 = \frac{1}{r_2}$  en *iii*) de la proposición 6.10.

□

**Corolario 6.12.** *Si  $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  y  $k$  se anula sólo en un conjunto de medida cero (por ejemplo, si  $k$  es polinomial), entonces el sistema (6.2.2) no admite ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .*

**Demostración.** Tomando  $g_1(x_1) = g(x_1)$  y  $g_2(x_2) = k(x_2)$  en *iii*) de la proposición 6.10, obtenemos  $k(x_2)g_1(x_1) + [-g(x_1) - f(x_1, x_2)k(x_2)]g_2(x_2) = -f(x_1, x_2)k(x_2)^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , por lo tanto de esta misma proposición el sistema (6.2.3) no admite ciclos límite.

□

antes de continuar con estos resultados, necesitamos enunciar una condición suficiente para garantizar que una función cuadrática en dos variables no cambie de signo.

**Lema 6.13.** *Dados  $g_0, g_1, g_2, w : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Si  $g_0 \in \mathcal{F}_U$  y además  $\Delta := g_1^2(u) - 4g_0(u)g_2(u) \leq 0$ , entonces*

$$Q(u) := g_0(u)w^2 + g_1(u)w + g_2(u) \geq 0 \text{ (or } \leq 0).$$

*en particular, si  $\Delta \in \mathcal{F}_U^-$ , entonces  $Q \in \mathcal{F}_U$ .*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad supongamos que  $g_0 \in \mathcal{F}_U^+$ . Si  $g_0 > 0$  escribimos  $Q(u)$  como

$$Q(u) = g_0 \left[ w^2 + \frac{g_1}{g_0}w + \frac{g_2}{g_0} \right]$$

es decir

$$Q(u) = g_0 \left[ w^2 + \frac{g_1}{g_0}w + \left( \frac{g_1}{2g_0} \right)^2 - \left( \frac{g_1}{2g_0} \right)^2 + \frac{g_2}{g_0} \right]$$

reagrupando tenemos

$$Q(u) = g_0 \left[ \left( w + \frac{g_1}{2g_0} \right)^2 - \frac{1}{4g_0^2} (g_1^2 - 4g_2g_0) \right]$$

de aquí  $Q(u) \geq 0$ . Ahora si  $g_0(u_0) = 0$  para algún  $u_0 \in U$ , entonces por hipótesis  $g_1(u_0) = 0$  por lo que tenemos  $Q(u_0) = g_2(u_0)$ . Afirmamos que  $g_2(u_0) \geq 0$  pues si  $g_2(u_0) < 0$  por continuidad de  $g_2$  existe una vecindad  $\nu$  de  $u_0$  tal que  $g_2(u) < 0$  para todo  $u \in \nu$ , pero esto contradice el hecho de que  $\Delta \leq 0$ .  $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente criterio que garantiza la ausencia de ciclos límite en el sistema (6.2.2).

**Proposición 6.14.** *Si cualquiera de las siguientes funciones pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-$*

*i).-  $[rx_1f(x_1, x_2)(k'(x_2))^2] + 4rx_1g(x_1)k'(x_2)$  para algún  $r \in \mathbb{R}$ ,*

*ii).-  $(f(x_1, x_2)k^2(x_2)) + 4g'(x_1)x_2k(x_2)$ ,*

*entonces el sistema (6.2.2) no admite ciclos límite.*

**Demostración.** *i)* Tomando  $g_1(x_1) = rx_1$  y  $g_2(x_2) = k(x_2)$  en *iv)* de la proposición 6.10, obtenemos

$$f_1g_2g_1' + f_2g_1g_2' = rk^2(x_2) - f(x_1, x_2)rx_1k'(x_2)k(x_2) - g(x_1)rx_1k'(x_2),$$

considerándolo como una ecuación cuadrática en  $k$ , por nuestra hipótesis y por el lema 6.13 que la función de arriba pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ .

*ii)* Se sigue de *iv)* en la proposición 6.10, tomando  $g_1(x_1) = g(x_1)$  y  $g_2(x_2) = x_2$ , por lo tanto, obtenemos

$$f_1g_2g_1' + f_2g_1g_2' = -g^2(x_1) - f(x_1, x_2)k(x_2)g(x_1) + x_2k(x_2)g'(x_1),$$

considerándola como una ecuación cuadrática en  $g$ , por hipótesis y con el resultado del lema 6.13 tenemos que la función pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ .  $\square$

Podemos ampliar el resultado del inciso *i)* en la proposición 6.14, pero antes enunciaremos el siguiente lema

**Lema 6.15.** *Sea  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente monótona y  $C^1$ , entonces el conjunto  $A := \{x \in \mathbb{R} : \psi'(x) = 0\}$  es numerable.*

## 6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

---

**Demostración.** De hecho, entre cualesquiera dos puntos  $x \neq y$  en  $A$  existe un conjunto abierto de puntos con  $\psi'(z) \neq 0$ , porque  $f$  es estrictamente monótona y  $\psi'$  es continua. Si  $A$  es no numerable, deberíamos tener un conjunto abierto con una cantidad no numerable de componentes conexas, lo cual es imposible. □

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente

**Proposición 6.16.** *Sea  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente monótona tal que*

$$f^2(x_1, x_2)\psi^2(x_1)k'^2(x_2) + 4\psi'(x_1)\psi(x_1)g(x_1)k'(x_2) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-, \quad (6.2.4)$$

entonces el sistema (6.2.2) no admite ciclos límite.

**Demostración.** La ecuación asociada de acuerdo a (4.2.1) se escribe como

$$k(x_2)\frac{\partial h}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1, x_2)k(x_2))\frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c + s(f_{x_2}(x_1, x_2)k(x_2) + f(x_1, x_2)k'(x_2))],$$

supongamos que  $h$  tiene la forma  $h = \psi(x_1)k(x_2)$ , y tomando  $s = 0$ , obtenemos

$$\frac{d\psi}{dx_1}k^2(x_2) - [g(x_1) + f(x_1, x_2)k(x_2)]\psi(x_1)k'(x_2) = ch.$$

Considerando el lado izquierdo como una ecuación cuadrática en la función  $k$ , observemos que  $\psi' > 0$  ( $< 0$ ) excepto quizá en un conjunto de medida cero por hipótesis y de acuerdo a el lema 6.15, entonces si escribimos su discriminante

$$\Delta = f^2(x_1, x_2)\psi^2(x_1)(k'(x_2))^2 + 4\psi'(x_1)\psi(x_1)g(x_1)k'(x_2),$$

pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-$ . En particular, si  $\psi'(x_1) = 0$ , entonces  $f^2(x_1, x_2)\psi^2(x_1)k'^2(x_2) = 0$  y por lo tanto  $ch(x_1, x_2) = 0$ , por esta observación y el lema 6.13  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ .

Notemos además que  $Z(h)$  no contiene trayectorias cerradas, y como  $s = 0$ , entonces por la proposición 4.5, el sistema (6.2.2) no admite ciclos límite. □

Consideremos ahora el caso en que la función  $f(x_1, x_2)$  del sistema de Liénard generalizado (6.2.2) se restringe a la función  $f(x_1)$ , con lo que obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2), \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1)k(x_2). \end{cases} \quad (6.2.5)$$

Con esta restricción obtenemos el siguiente resultado

**Proposición 6.17.** *Si existen constantes  $c_1, c_2$ , tales que*

$$c_1g(x_1) + c_2f(x_1, x_2)k'(x_2) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2},$$

*entonces el sistema (6.2.5) no tiene ciclos límite.*

**Demostración.** La ecuación asociada de acuerdo a (4.2.1) es

$$k(x_2)\frac{\partial h}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1)k(x_2))\frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c + sf(x_1)k'(x_2)],$$

supongamos que  $h = h(z)$ , depende de  $z = z(x_1, x_2)$ , la ecuación previa se convierte en

$$\left[ k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1)k(x_2))\frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \ln h}{dz} = c + sf(x_1)k'(x_2),$$

tomando  $z$  tal que  $k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} - f(x_1)k(x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ ; de aquí obtenemos  $z = \int f(x_1)dx_1 + x_2$  y

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c + sf(x_1)k'(x_2)}{-g(x_1)}, \quad (6.2.6)$$

donde el lado derecho depende sólo de  $z$ , igualando a una constante arbitraria  $b$ , obtenemos

$$c = -bg(x_1) - sf(x_1)k'(x_2);$$

así tomando  $b = -c_1$  y  $s = -c_2$ , entonces  $c \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  y la ecuación (6.2.6) se escribe como

$$\frac{d \ln h}{dz} = -c_1,$$

cuya solución es

$$h(x_1, x_2) = \exp[-c_1(\int f(x_1)dx_1 + x_2)].$$

Note que  $Z(h) = \emptyset$  por lo tanto no contiene trayectorias cerradas. En particular,  $co(h) = 0$ .

Como  $l(\mathbb{R}^2, h) = l(\mathbb{R}^2) = 0$ , entonces por la proposición 4.5, el sistema (6.2.5) no tiene ciclos límite, por lo tanto el resultado se sigue. □

Si ahora cambiamos la función  $k(x_2)$  por  $x_2$  en el *sistema de Liénard generalizado*, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1, x_2)x_2. \end{cases} \quad (6.2.7)$$

para el cual podemos enunciar el siguiente resultado

## 6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

---

**Proposición 6.18.** *Supongamos que  $\frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$  y*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}x_1 + 1\right)^2 - 4\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(fx_1 - g) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-,$$

*entonces el sistema (6.2.7) no contiene ciclos límite.*

**Demostración.** Buscamos una *función de Dulac*  $h$  dependiendo de  $z = x_1 + x_2$  usando la ecuación asociada (4.2.1), entonces esta ecuación se convierte en

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c + s(f + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2)}{x_2(1 - f) - g} =: \phi(z),$$

igualando el lado derecho a  $\phi(z) = \frac{1}{z}$  y  $s = -1$  obtenemos

$$c = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_2}x_2^2 + (1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_1)x_2 + fx_1 - g}{z},$$

tenemos que  $h(z) = z$  es una solución y por hipótesis  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ . Notemos que  $Z(h)$  es una línea recta, por lo tanto  $co(h) = 0$ ; más aún,  $l(\mathbb{R}, h) = 0$ ; en consecuencia el sistema no contiene ciclos límite.

□

Veamos ahora algunos resultados que surgen de aplicar la proposición 6.16 a el sistema (6.2.7).

**Corolario 6.19.** *Si  $f^2(x_1, x_2)x_1^2 + 4g(x_1)x_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^-$ , entonces el sistema (6.2.7) no contiene ciclos límite.*

**Demostración.** El resultado se sigue usando  $\psi(x_1) = x_1$  en la proposición 6.16.

□

**Corolario 6.20.** *Suponga que  $g$  es una función estrictamente monótona y  $f^2(x_1, x_2) \leq 4|g'(x_1)|$  igual a cero en a lo más un conjunto de medida cero, entonces el sistema (6.2.7) no contiene ciclos límite.*

**Demostración.** Aplicamos la proposición 6.16, con  $\psi = -g$ , si  $g' \geq 0$  y  $\psi = g$ , si  $g' \leq 0$ .

□

**Ejemplo 6.12.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sin(x_1x_2)x_2. \end{cases} \quad (6.2.8)$$

por el corolario 6.20 este sistema no admite ciclos límite.

□

Consideremos ahora el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{2n-1}, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - f(x_1)x_2^{2n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (6.2.9)$$

Antes de enunciar los siguientes resultados introduciremos algo de notación. Escribimos  $G(x_1) := \int g(x_1)dx_1$ . Para una función polinomial  $p$ , denotamos por  $r_m := \min\{r \in \mathbb{R} \mid p(r) = 0\}$ ,  $r_M := \max\{r \in \mathbb{R} \mid p(r) = 0\}$  y  $C_p$  el número de componentes conexas de el conjunto  $\{x \in [r_m, r_M] \mid p(x) \geq 0\}$ , tomamos  $C_p = 0$  si  $p$  no tiene raíces reales. Finalmente, en la siguiente proposición la función  $g$  será polinomial.

Con esta notación, presentamos el siguiente resultado

**Proposición 6.21.** *suponga que  $f(x_1)(G(x_1) + a) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  para alguna constante  $a$ , entonces el sistema (6.2.9) tiene a lo más  $C_{-(G+a)}$  ciclos límite. Más aún, cuando existan, serán ciclos límite hiperbólicos.*

**Demostración.** La ecuación asociada (4.2.1) es

$$x_2^{2n-1} \frac{\partial h}{\partial x_1} + (-g(x_1) - f(x_1)x_2^{2n-1}) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h[c + s(f(x_1)(2n-1)x_2^{2n-2})],$$

suponiendo que  $h = h(z)$  depende de  $z = z(x_1, x_2)$ , tal que  $x_2^{2n-1} \frac{\partial z}{\partial x_1} - g(x_1) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , es decir  $z = G(x_1) + \frac{x_2^{2n}}{2n} + a$ , la ecuación de arriba se escribe como

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c + s(f(x_1)(2n-1)x_2^{2n-2})}{-f(x_1)x_2^{4n-2}}, \quad (6.2.10)$$

donde el lado derecho depende de  $z$  denotamos esta ecuación por  $\phi(z)$ , suponga que  $\phi(z) = \frac{1}{z}$ , entonces

$$\frac{c + s(f(x_1)(2n-1)x_2^{2n-2})}{-f(x_1)x_2^{4n-2}} = \frac{1}{z},$$

así  $c(x_1, x_2)$  se expresa como

$$c(x_1, x_2) = \frac{-f(x_1)x_2^{4n-2} - zs(f(x_1)(2n-1)x_2^{2n-2})}{z},$$

tomando  $s = -\frac{2n}{2n-1}$ , un cálculo directo nos da

$$c(x_1, x_2) = \frac{2nx_2^{2n-2}f(x_1)[(G(x_1) + a)]}{z},$$



## 6.2. Generalizaciones de la ecuación de Liénard

---

tenemos que  $h(z) = z$  es una solución, y por hipótesis  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ .

Por un simple cálculo obtenemos  $\nabla h \cdot F|_{h=0} = -f(x_1)x_2^{4n-2}|_{h=0}$ ; entonces,  $Z(h)$  no contiene ciclos límite, pues el campo vectorial no es tangente a  $Z(h)$ . También  $l(\mathbb{R}^2, h) \leq C_{-(G+a)}$ , de hecho, resolviendo  $h = 0$ , tenemos

$$x_2 = \pm \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} (-G(x_1) - a)^{\frac{1}{2n}},$$

por lo tanto para obtener una perforación u óvalo en  $\mathbb{R}^2$  necesitamos una componente conexa de el conjunto  $\{x \in [r_m, r_M] \mid p(x) \geq 0\}$ . De aquí por la proposición 4.5 el sistema tiene a lo más  $C_{-(G+a)}$  ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Corolario 6.22.** *Supongamos que  $g_1(x_1) = x_1$  and  $f(x_1)(G(x_1) + a) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  para alguna constante  $a$ , entonces el sistema (6.2.9) tiene a lo más un ciclo límite.*

**Demostración.** Para la ecuación polinomial  $\frac{x_1^2}{2} + a$  tenemos  $C_{-\left(\frac{x_1^2}{2} + a\right)} \leq 1$ , el resultado se sigue de la proposición 4.5.

□

**Ejemplo 6.13.** El sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + (x_1^4 - 2)x_2^3, \end{cases}$$

tiene a lo más un ciclo límite.

de hecho, tomando  $a = -1/2$ , tenemos  $g(x_1) = x_1^3$  y  $f(G(x_1) + a) = \frac{1}{4}(x_1^4 - 2)^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^+$ . por lo tanto,  $C_{-\left(-x_2^4 + \frac{1}{2}\right)} \leq 1$  en efecto, la ecuación  $z = \frac{x_1^4}{4} + x_2^4 - \frac{1}{2} = 0$  tiene sólo una trayectoria cerrada y por la proposición 6.21 tiene a lo más un ciclo límite.

□

Debido a la importancia de las ecuaciones de Liénard se han trabajado con varias generalizaciones de las mismas a lo largo de la historia, aquí presentamos algunas de ellas junto con los resultados obtenidos al aplicar el método desarrollado en los primeros capítulos, este es un camino sugerido para determinar si un sistema de ecuaciones diferenciales tipo Liénard tiene ausencia de ciclos límite o existe alguna cota superior en el número de ellos.

## Sistema tipo Kukles

La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se ocupa de las propiedades locales y globales de las soluciones de un sistema plano de ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo principal de esta teoría es la descripción geométrica de las trayectorias en todo el plano o en la región en el que está definido. Una familia de ecuaciones relevante de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales están dadas por los *sistemas de Kukles*. En [16], I. Kukles da condiciones necesarias y suficientes para que un sistema cúbico tenga un centro en el origen. En este capítulo nos ocuparemos sobre los ciclos límite para los *sistemas de Kukles* con la siguiente forma

### 7.1. Criterios de no existencia de ciclos límite

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = h_0(x_1) + h_1(x_1)x_2 + h_2(x_1)x_2^2 + h_3(x_1)x_2^3, \end{cases} \quad (7.1.1)$$

En la literatura, existen numerosos estudios acerca de los ciclos límite para la *ecuación de Kukles*, ver por ejemplo [37], [38], [39], [46] y [49], también aplican los métodos expuestos en la sección 1.2.

Recordemos que en el lema 6.13 se dieron condiciones que aseguran que una ecuación cuadrática pertenezca a  $\mathcal{F}_U$ . El siguiente resultado sale como consecuencia de este lema.

**Corolario 7.1.** *Dados  $g_0(x_1), g_1(x_1), g_2(x_1)$  y  $w(x_2)$  funciones continuas. Si  $g_0 \in \mathcal{F}_U$  y  $\Delta := g_1(u)^2 - 4g_0(u)g_2(u) \leq 0$ , entonces*

$$Q(u) := g_0(u)w^2 + g_1(u)w + g_2(u) \in \mathcal{F}_U.$$

En los siguientes dos resultados mostraremos algunas condiciones suficientes que deben cumplir las funciones  $h_i$  para asegurar la ausencia de ciclos límite en este sistema.

---

## 7.1. Criterios de no existencia de ciclos límite

**Proposición 7.2.** *Suponga que  $h_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y  $h_1^2 \leq 3h_0h_2$  entonces el sistema (7.1.1) no tiene ciclos límite.*

**Demostración.** La ecuación asociada (4.2.1) se escribe como

$$x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \left( \sum_{i=0}^3 h_i(x_1)x_2^i \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c - \text{div}(F)), \quad (7.1.2)$$

suponga que la función  $h$  depende de  $z(x_1, x_2)$ , entonces la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{dh}{dz} = \frac{(c - \text{div}(F))}{x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \left( \sum_{i=0}^3 h_i(x_1)x_2^i \right) \frac{\partial z}{\partial x_2}} \quad (7.1.3)$$

donde el lado derecho depende de  $z$ , denotando éste por  $\phi(z)$  y tomando  $\phi(z) = \frac{1}{z}$ , obtenemos

$$c = \frac{x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \left( \sum_{i=0}^3 h_i(x_1)x_2^i \right) \frac{\partial z}{\partial x_2} + sz(h_1 + 2h_2x_2 + 3h_3x_2^2)}{z}, \quad (7.1.4)$$

tomando  $c$  en esta forma, la ecuación (7.1.3) se escribe como  $\frac{d \ln h}{dz} = \frac{1}{z}$  cuya solución es  $h(z) = z$ , entonces de acuerdo a la proposición 4.5, debemos asegurar que el producto  $ch$  no cambie de signo y sólo se anule en un conjunto de medida cero. Para esto tomamos  $z$  tal que

$$h_3x_2^3 \frac{\partial z}{\partial x_2} + 3szh_3x_2^2 = 0$$

de aquí  $z = x_2^{-3s}$ , como tenemos libertad de elegir el valor de  $s$ , tomemos  $s = -\frac{1}{3}$ , es decir  $z = x_2$ , por lo que simplificando (7.1.4) obtenemos

$$c = \frac{1}{3}h_2x_2^2 + \frac{2}{3}h_1x_2 + h_0,$$

que es una ecuación cuadrática en términos de  $x_2$ , además por hipótesis tenemos que  $h_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y también que  $h_1^2 \leq 3h_0h_2$ . Por el corolario 7.1 esta ecuación cuadrática pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ . Además como  $Z(h) = \emptyset$  no contiene trayectorias cerradas. En particular,  $co(h) = 0$ . También  $l(\mathbb{R}^2, h) = 0$  y por la proposición 4.5 el sistema (7.1.1) no admite ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$ . □

**Proposición 7.3.** *Supongamos que,  $h_3 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y que existen constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que*

$$12h_0(H_1 + a) = b^2h_1 \quad (7.1.5)$$

*y también*

$$|h_2 + (H_1 + a)h_3| \leq |bh_3|. \quad (7.1.6)$$

*entonces el sistema (7.1.1) no tiene ciclos límite.*

**Demostración.** La ecuación asociada (4.2.1) se escribe como

$$x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \left( \sum_{i=0}^3 h_i(x_1) x_2^i \right) \frac{\partial h}{\partial x_2} + s \operatorname{div}(F)h = ch,$$

supongamos que la función  $h$  depende de  $z(x_1, x_2)$ , con

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + h_1(x_1) \frac{\partial z}{\partial x_2} = -h_0(x_1) - 2sh_2(x_1).$$

de aquí obtenemos  $z = (x_2 H_1(x_1) - a)^2/2 - H_0(x_1) - 2sH_2(x_1)$  y además

$$c = -h_0 x_2 - 2sh_2 x_2 + (h_0 + h_2 x_2^2 + h_3 x_2^3)(x_2 - H_1 - a) + s[\operatorname{div}F]. \quad (7.1.7)$$

De acuerdo a (7.1.5), podemos simplificarlo con  $b^2/12$ . Entonces

$$c = (h_2(x_1)x_2^2 + h_3(x_1)x_2^3)(x_2 - H_1(x_1) - a) + b^2 h_3(x_1)x_2^2/4$$

se sigue que

$$h_3(x_1)x_2^2 + [h_2(x_1) - (H_1 + a)h_3(x_1)]x_2 - (H_1 + a)h_2(x_1) + \frac{b^2}{4}h_3(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2} \quad (7.1.8)$$

debe cumplirse. Esta desigualdad cuadrática sobre  $x_2$  se satisface si y sólo si  $h_3(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y

$$h_2^2(x_1) + 2(H_1(x_1) + a)h_2(x_1)h_3(x_1) + (H_1 + a)^2 h_3^2(x_1) - b^2 h_3^2(x_1) \leq 0 \quad (7.1.9)$$

se cumple. Además con

$$\beta(x_1) := (H_1(x_1) + a)h_3(x_1)$$

y también

$$\gamma(x_1) := (H_1(x_1) + a)^2 h_3^2(x_1) - b^2 h_3^2(x_1),$$

la desigualdad cuadrática (7.1.9) sobre  $h_2(x_1)$  tiene discriminante

$$4[\beta^2(x_1) - \gamma(x_1)] = 4b^2 h_3^2(x_1).$$

Por lo tanto (7.1.9) se satisface si y sólo si

$$-\beta(x_1) - |bh_3(x_1)| \leq h_2(x_1) \leq -\beta(x_1) + |bh_3(x_1)|$$

es decir si (7.1.6) se cumple. Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = e^{z(x_1, x_2)} = \exp \left[ \frac{(x_2 - H_1(x_1) - a)^2}{2} - H_0(x_1) - \frac{b^2 H_2(x_1)}{6} \right].$$

Observemos que  $Z(h) = \emptyset$  es decir, no puede contener trayectorias cerradas. En particular,  $\operatorname{co}(h) = 0$ .

Como  $l(\mathbb{R}^2, h) = l(\mathbb{R}^2) = 0$  por la proposición 4.5 el sistema de Kukles no tiene ciclos límite, de aquí los resultados se siguen.

□

**Ejemplo 7.1.** El sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{3x_1}{2x_1^2+1} + 4x_1x_2 - 2x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^3, \end{cases}$$

cuyo único punto crítico es el origen, no tiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$  (ver fig. 7.1, donde las líneas verdes y rojas indican los puntos donde  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  respectivamente). De hecho, consideremos  $a = 1$ ,  $b = 3$ , para verificar que se cumplen las condiciones de la proposición anterior.

□

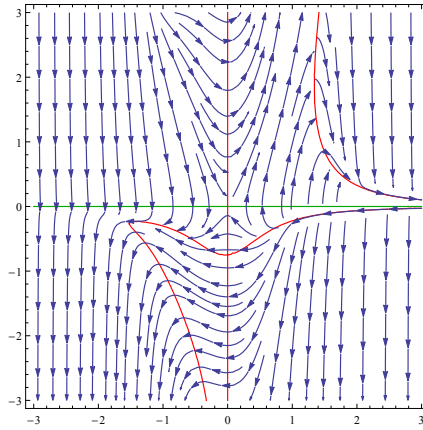


Figura 7.1: Retrato fase del sistema del ejemplo 7.1

**Corolario 7.4.** *Supongamos que  $h_3 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y existen constantes  $a \in \mathbb{R}$  y  $\varsigma \leq 0$  tal que*

$$h_2 + (H_1 + a)h_3 = 0, \tag{7.1.10}$$

$$h_0h_2 = \varsigma h_1h_3. \tag{7.1.11}$$

*Entonces el correspondiente sistema de Kukles (7.1.1) no tiene ciclos límite.*

**Demostración.** De hecho, la ecuación (7.1.10) implica (7.1.6) para cualquier  $b \in \mathbb{R}$ . Más aún, en este caso la ecuación (7.1.5) se cumple si y sólo si (7.1.11) se cumple (tomando  $\varsigma = -b^2/12$ ).

□

**Ejemplo 7.2.** El sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1^3}{x_1^4+1} + x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + \frac{4x_1^2}{x_1^4+1}x_2^3, \end{cases}$$

con un único punto crítico en el origen, no tiene ciclos límite en  $\mathbb{R}^2$  (ver Fig. 7.2, donde las líneas verdes y rojas indican los puntos donde  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  respectivamente). En este caso, consideremos  $a = 1/4, \zeta = -1/4$ , y apliquemos el corolario anterior. □

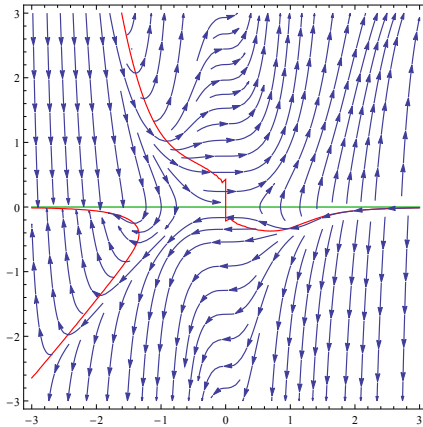


Figura 7.2: Retrato fase del sistema del ejemplo 7.2

**Proposición 7.5.** Si cualquiera de las siguientes afirmaciones se cumple

- a)  $h_1 = 0$  y  $h_0 + h_2x_2^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,
- b)  $h_1 + 3h_3x_2^2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ ,
- c)  $h_2 + h_3H_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , y  $(\frac{1}{3}h_1)^2 \leq 4(h_2 + h_3H_1)(\frac{1}{3}h_1H_1 + h_0)$ ,

entonces el sistema de Kukles no tiene ciclos límite.

**Demostración.** Consideremos la ecuación asociada (7.1.2) y supongamos que la función  $h$  depende de  $z(x_1, x_2)$ , bajo estos términos la ecuación se escribe como

$$\left[ x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (h_0 + h_1x_2 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{dh}{dz} = h[c - s(h_1 + 2h_2x_2 + 3h_3x_2^2)]. \quad (7.1.12)$$

Esto es

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c - s(h_1 + 2h_2x_2 + 3h_3x_2^2)}{x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (h_0 + h_1x_2 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3) \frac{\partial z}{\partial x_2}} \quad (7.1.13)$$

---

## 7.1. Criterios de no existencia de ciclos límite

Aquí el lado derecho debe ser una función que depende de  $z$ , digamos  $\psi(z)$ ; y supongamos que  $\psi(z) := \frac{1}{z}$ , entonces

$$\frac{c - s(h_1 + 2h_2x_2 + 3h_3x_2^2)}{x_2 \frac{dz}{dx_1} + (h_0 + h_1x_2 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3) \frac{dz}{dx_2}} = \frac{1}{z}.$$

En esta forma, la solución de la ecuación (7.1.13) es  $h(z) = z$ .

Por otro lado la función  $c(x_1, x_2)$  se expresa como

$$c(x_1, x_2) = \frac{x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (h_0 + h_1x_2 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3) \frac{\partial z}{\partial x_2} + zs(h_1 + 2h_2x_2 + 3h_3x_2^2)}{z}. \quad (7.1.14)$$

y busquemos una función  $z$  que satisfaga

$$x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + h_1x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = -sz2h_2x_2.$$

Resolviendo por el método de las características, encontramos que la solución general está dada por

$$z = \frac{\exp(-2sH_2)}{\Phi(x_2 - H_1)}, \quad (7.1.15)$$

donde  $\Phi$  es una función arbitraria.

Tomando  $\Phi = (x_2 - H_1)^{-1}$ , tenemos que  $z = (x_2 - H_1)(\exp(-2sH_2))$ ; con estas condiciones la ecuación (7.1.14) puede reescribirse como

$$c(x_1, x_2) = \frac{(\exp(-2sH_2)) [h_0 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3] + s(x_2 - H_1)(h_1 + 3h_3x_2^2)}{z},$$

como  $\exp(-2sH_2)$  es siempre positiva, necesitamos garantizar que  $h_0 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3 + s(x_2 - H_1)(h_1 + 3h_3x_2^2)$  no cambia de signo, para esto, tomamos  $s = -\frac{1}{3}$ , con esto reducimos la ecuación (7.1.14) a

$$c(x_1, x_2) = \frac{(\exp(\frac{2}{3}H_2)) [x_2^2(h_2 + h_3H_1) - \frac{1}{3}h_1x_2 + (h_0 + \frac{1}{3}h_1H_1)]}{z}. \quad (7.1.16)$$

Ahora bajo las hipótesis del inciso *a*) el producto  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ . Para el inciso *c*) notemos que la segunda condición implica que el discriminante de la expresión cuadrática (7.1.16) sea menor o igual a cero, y por lo tanto por el corolario 7.1 el producto  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ .

Para probar el inciso *b*) tomamos  $\Phi = 1$  en la ecuación (7.1.15) es decir,  $z = \exp(-2sH_2)$  y después de hacer el cálculo necesario se puede probar que la función  $c$  obtenida con esta elección pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ .

Finalmente como la función  $h = z$  no contiene ninguna trayectoria cerrada para ninguna de las dos elecciones de  $\Phi$ , entonces el sistema no contiene ciclos límite.

□

**Ejemplo 7.3.** El sistema de Kukles

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1 - \frac{1}{3}x_1 + x_2 + x_2^2 + x_1^3x_2^3 \end{cases}$$

no tiene ciclos límite.

de hecho aquí  $h_0 = 1 - \frac{1}{3}x_1$ ,  $h_1 = h_2 = 1$  y  $h_3 = x_1^3$  entonces  $h_2 + h_3H_1 = 1 + x_1^4 > 0$ , y  $(h_2 + h_3H_1)(\frac{1}{3}h_1H_1 + h_0) = 1 + x_1^4$  y por el inciso b) no contiene ciclos límite.

□

Una consecuencia directa de esta proposición la tenemos en los siguientes resultados.

**Corolario 7.6.** Si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple

a).-  $h_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^{\pm}$  and  $(\pm)h_3 \geq 0$ ,

b).-  $h_3 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^{\pm}$  and  $(\pm)h_1 \geq 0$ ,

entonces el sistema (7.1.1) no tiene ciclos límite.

**Demostración.** Supongamos que  $h_1(x_1) \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^+$  y  $h_3 \geq 0$ , entonces claramente  $h_1 + 3h_3x_2^2$  pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , por lo tanto el resultado se sigue del inciso b) en la proposición anterior.

□

**Corolario 7.7.** Supongamos que  $h_1h_3 > 0$ , entonces el sistema de Kukles no tiene ciclos límite.

En forma análoga tenemos

**Corolario 7.8.** Si  $h_1 = 0$  y cualquiera de las siguientes condiciones se cumple

a).-  $h_0 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^{\pm}$  and  $(\pm)h_2 \geq 0$ ,

b).-  $h_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^{\pm}$  and  $(\pm)h_0 \geq 0$ ,

entonces el sistema (7.1.1) no tiene ciclos límite.

Mostraremos algunos ejemplos donde aplican algunos de los resultados previos.

**Ejemplo 7.4.** Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + 2x_1^2x_2 + (5x_1^3 + 3x_1 + 1)x_2^2, \end{cases}$$

en este caso  $h_1 = 2x_1^2$  y  $h_3 = 0$  y del inciso a) del corolario 7.6, el sistema no tiene ciclos límite.

□



## 7.2. Criterios sobre existencia de un ciclo límite en sistemas tipo Kukles

Veamos ahora algunos resultados que nos permiten identificar cuando un sistema dado contiene a lo más un ciclo límite.

El sistema de Kukles con el que hemos trabajado desde el principio del capítulo está dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = h_0(x_1) + h_1(x_1)x_2 + h_2(x_1)x_2^2 + h_3(x_1)x_2^3, \end{cases} \quad (7.2.1)$$

si consideramos que la función  $h_2 = 0$  y  $h_0 = -x_1$  en este sistema, podemos enunciar la siguientes dos proposiciones

**Proposición 7.9.** *Dado el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + h_1(x_1)x_2 + h_3(x_1)x_2^3, \end{cases} \quad (7.2.2)$$

*Si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:*

- a).-  $(\pm)h_3 \geq 0$  y  $3h_3x_1^2 + h_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^\pm$ ,
- b).-  $h_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}^\pm$  y  $(\pm)(h_3x_1^2 - \frac{2}{3}h_1) \geq 0$ ,

*entonces el sistema tiene a lo mas un ciclo límite.*

**Demostración.** Consideremos la ecuación asociada de acuerdo a (6.1.3) y supongamos que la función  $h$  depende de  $z(x_1, x_2)$ , entonces la ecuación se escribe como

$$\left[ x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} + (-x_1 + h_1x_2 + h_3x_2^3) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{dh}{dz} = h[c - s(h_1 + 3h_3x_2^2)]. \quad (7.2.3)$$

Buscamos  $z$  tal que  $x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ , en particular tomando  $z = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$  obtenemos

$$\frac{d \ln h}{dz} = \frac{c - s(h_1 + 3h_3x_2^2)}{h_1x_2^2 + h_3x_2^4}. \quad (7.2.4)$$

Aquí el lado derecho debe depender de  $z$ ; supongamos que es de la forma  $\psi(z) := \frac{1}{z}$ , entonces la función  $c(x_1, x_2)$  se expresa como

$$c(x_1, x_2) = \frac{h_1x_2^2 + h_3x_2^4 + \frac{s}{2}(h_1x_1^2 + 3h_3x_2^2x_1^2 + h_1x_2^2 + 3h_3x_2^4)}{z}, \quad (7.2.5)$$

haciendo  $s = -2$ , obtenemos

$$c(x_1, x_2) = \frac{-(2h_3x_2^4 + 3h_3x_1^2x_2^2 + h_1x_1^2)}{z}, \quad (7.2.6)$$

si consideramos al numerador en términos de una ecuación cuadrática sobre  $x_2^2$ , entonces el discriminante es  $9h_3^2x_1^4 - 8h_3h_1x_1^2$ , y por hipótesis del inciso a) y el corolario 7.1, es fácil ver que éste pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  y por lo tanto, el producto  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , además note que el conjunto de ceros  $Z(h) = \{(0, 0)\}$ , por lo tanto la cantidad de trayectorias cerradas  $co(h) = 0$  en  $\mathbb{R}^2$ . Finalmente, como  $s < 0$  y  $l(\mathbb{R}^2, h) = 1$ , por la proposición 4.5 concluimos que el sistema (7.2.2) tiene a lo mas un ciclo límite.

Para el caso b), escogemos  $s = -\frac{2}{3}$ , en este caso la función  $c(x_1, x_2)$  está dada por

$$c(x_1, x_2) = \frac{-x_2^2(h_3x_1^2 - \frac{2}{3}h_1) - \frac{1}{3}h_1x_1^2}{z},$$

aquí por hipótesis el numerador pertenece a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ , en consecuencia el producto  $ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$  y por el mismo argumento del inciso anterior se concluye que el sistema no tiene ciclos límites.

□

Veamos ahora un ejemplo de como trabaja esta proposición

**Ejemplo 7.5.** Consideremos el siguiente modelo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 + x_1^4 + x_1^2)x_2 + (\frac{1}{3} + x_1^2)x_2^3, \end{cases}$$

notemos que  $h_3 = 1/3 + x_1^2$  y  $h_1 = 1 + x_1^4 + x_1^2$ , es fácil ver que cumple las condiciones del inciso a) de la proposición 7.9, por lo tanto tiene a lo más un ciclo límite.

□

Consideremos las siguientes funciones  $\alpha_r, \beta, \gamma_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $\alpha_r := 3(x_1^2 - r)h_3 - 2h_1$ ,  $\beta := 6(x_1 + h_0)$  y  $\gamma_r := 4(x_1^2 - r)h_1$ , donde  $r > 0$ .

**Proposición 7.10.** *Supongamos que existe  $r > 0$  tal que  $\alpha_r \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  y*

$$\beta^2 - 4\alpha_r\gamma_r \leq 0,$$

*entonces el sistema (7.2.2) tiene a lo más un ciclo límite.*

**Demostración.** Consideremos la ecuación asociada (6.1.3) y supongamos que la función  $h$  depende de  $z(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r$ , procediendo como en la demostración de la proposición anterior, la ecuación correspondiente (7.2.5) está dada por

$$cz = 2x_1x_2 + 2x_2(h_0 + h_1x_2 + h_3x_2^3) + s(x_1^2 + x_2^2 - r)(h_1 + 3h_3x_2^2),$$

la cual ordenándola de forma decreciente sobre las potencias de  $x_2$  se escribe como

$$cz = (3s + 2)h_3x_2^4 + [(s + 2)h_1 + 3s(x_1^2 - r)h_3]x_2^2 + 2(x_1 + h_0)x_2 + s(x_1^2 - r)h_1,$$

## 7.2. Criterios sobre existencia de un ciclo límite en sistemas tipo Kukles

tomando  $s = -\frac{2}{3}$ , obtenemos

$$cz = -\frac{2}{3}\alpha_r x_2^2 + \frac{1}{3}\beta_0 x_2 - \frac{1}{6}\gamma_r,$$

pero por hipótesis se tiene que  $cz = ch \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$ .

Note que  $Z(h)$  tiene una trayectoria cerrada, y por lo tanto  $c(h) = 1$ ; más aún, el conjunto  $Z(h)$  de ceros de  $h$ , no contiene ciclos límite, porque el campo vectorial no es tangente a las curvas  $z = x_1^2 + x_2^2 - r = 0$ .

Como  $s < 0$  y  $l(\mathbb{R}^2, h) = 1$  entonces por la proposición 4.5 el sistema (7.2.2) tiene a lo mas un ciclo límite.

**Ejemplo 7.6.** Consideremos el siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 + \frac{1}{3}(1 + x_1^2)x_2^3, \end{cases}$$

por la proposición anterior, tomando  $r = 1$ , el sistema tiene a lo mas un ciclo límite (ver figura 7.3). □

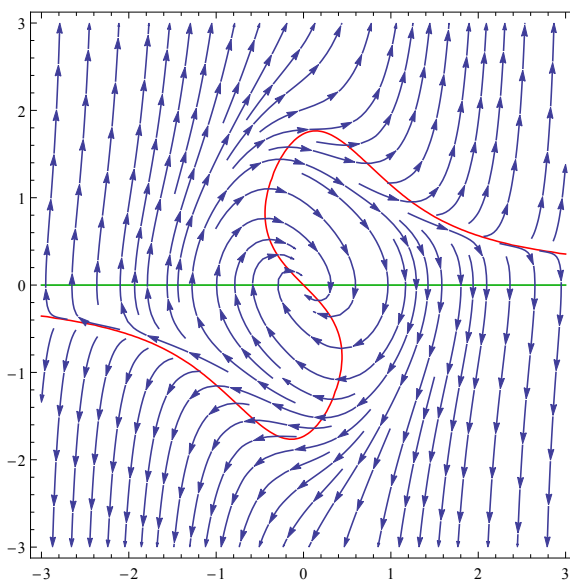


Figura 7.3: retrato fase del ejemplo 7.6

Los sistemas tipo Kukles tienen una gran importancia dentro del contexto matemático y de aplicación en las áreas de ingeniería desde el hecho que se pueden considerar como una generalización de las ecuaciones de Liénard al tomar  $h_0 = -g$  y  $h_1 = -f$  además de  $h_2, h_3 = 0$ .

Se puede trabajar con sistemas de Kukles más generales aún, para los cuales aplicando el método desarrollado a lo largo de este texto funciona bastante bien, tal es el caso de sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^k, \\ \dot{x}_2 = h_0(x_1) + h_1(x_1)x_2 + h_2(x_1)x_2^2 + h_3(x_1)x_2^n, \end{cases} \quad (7.2.7)$$

donde  $n, k$  son números enteros. Para este tipo de sistemas existen resultados que garantizan la ausencia de ciclos límite en el plano para profundizar mas en el tema ver [57].

# Bibliografía

- [1] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une equation diff.* I, II, J. Math. pures appl. 7, (1881), 375-422; 8 (1882), 251-296.
- [2] I. Bendixson, *Sur les curbes définies par des équations différentielles*, *Acta Math.*, 24 (1901), p. 1-88.
- [3] D. Hilbert, *Mathematical problems*. Bull. Amer. Math. Soc., 8 (1902), 437-479.
- [4] H. Dulac, *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. Fr., 51, (1923), 45-188.
- [5] Liénard, A. *Etude des oscillations entretenues*, Revue générale de l'électricité 23,(1928), pp. 901-912 and 946-954.
- [6] A. M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annals of Math. Princeton University Press, 17 (1947).
- [7] P.H. Leslie, *Some further notes on the use of matrices in population mathematics*, *Biometrika*, 35, (1948), 213-245.
- [8] G. Sansone, *Sopra lequazione di Liénard delle oscillazioni di rilassamento*, *Ann. Math. Pura Appl.* 28, (4), (1949), 153-181.
- [9] Andronov A. A., *Theory of oscillations*, (1949) Princeton Press and Chaikin, C.E.
- [10] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, *An active pulse transmission line simulating nerve axons*, Proc IRL 50 (1960), 2061-2070.
- [11] R. FitzHugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes*, 1 (1961), 445-466.
- [12] N. P. Bhatia, G. P. Szegö, *Stability theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, (1970).
- [13] I. S. Gonorovski, *Señales y Circuitos Radiotécnicos*, Mir Moscu, (1972).

- [14] Yan-Qian Ye, et al., *Theory of Limit Cycles*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 66, (1986).
- [15] E. Saéz, I. Szánto, On the construction of certain Dulac function, *Transactions on Automatic Control*, vol. 33, (1988).
- [16] Y. Kuang, Global stability of Gase-type predator-prey systems, *Journal of Mathematical Biology*, Vol. 28(4), (1990), 463-474.
- [17] Y. Li, J. S. Muldowney, On Bendixson's criterion, *Journal Differential equations*, 106, (1993), 27-39.
- [18] M. Farkas, *Periodic Motions*, Applied Mat. Sciences 104, Springer-Verlag, (1994).
- [19] Strogatz S. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, (1994).
- [20] Hirsch M.; Smale S, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press (1997).
- [21] L. A. Cherkas, Dulac functions for polynomial autonomous systems on a plane, *Diff. eqs.*, 33, (1997), 692-701.
- [22] McCluskey, J. S. Muldowney, Bendixson-Dulac criteria for diff. equations. *J. Dyn. Diff. Equations*, 10, (1998), 567-575.
- [23] S. Smale, Mathematical problems for the next century, *Math. Intelligencer*, 20, (1998), 7-15.
- [24] Jordan D. W.; P. Smith *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford, New York, (1999).
- [25] Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Texts in applied Math., 7, Springer-Verlag, (2001).
- [26] M. Hayashi, M. Tsukada, A uniqueness theorem on the Liénard system with a non-hyperbolic equilibrium point, *Dyn. Syst. Appl.*, 9, (2000), 99-108.
- [27] J. D. Murray, Math. Biology I. An introduction, *Interd. Applied Math.*, Springer, (2001).
- [28] Andrei D. Polyanin; Valentin F. Zaitsev; Alain Moussiaux *Handbook of First Order partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, (2001).
- [29] Feckan, A generalization of Bendixson's criterion, *Proc. Amer. Math. Soc.* 129, (2001), 3395-3399.
- [30] Yu Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bull. Amer. Math. Soc., 39 (2002), 301-354.
- [31] James Stewart,, *Cálculo multivariable*, Thomson-Learning 4.-a edición (2002).

- 
- [32] T. Carletti, G. Villari, *A note on the existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems*, J. Math. Anal. Appl., 307, (2005), 763-773.
- [33] A. Gasull, H. Giacomini, *Upper bounds for the number of limit cycles through linear differential equations*, Pacific J. Math., 226(2), (2006), 277-296.
- [34] Freddy Dumortier; Jaume Llibre; Joanm C. artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer-Verlag (2006).
- [35] M. Chamberland, A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas, *Characterizing Asymptotic Stability with Dulac Functions*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 17(1), (2007), 59-76.
- [36] M. J. Álvarez, A. Gasull, H. Giacomini, *A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations*, J. Differential Equations 234, 161-176 (2007).
- [37] J. Chavarriga, I. Garcia, E. Sáez, I. Szántó, *Limit cycles in Kukles system of arbitrary degree with invariant ellipse*, Nonlinear Analysis: theory, methods and appl., 67 (4), 2007, 1005-1014.
- [38] H. Zang, T Zhang, Y. Tian, M. Tadé, *limit cycles for the Kukles system*, J. of Dyn. and control syst. 14(2) (2008), 283-298.
- [39] E. Sáez, I. Szántó, *Coexistence of algebraic and nonalgebraic limit cycles in Kukles system*, Per. Math. Hungarica, 56 (1), (2008), 137-142.
- [40] D. Xiao, Z. Zhang, *On the existence and uniqueness of limit cycles for generalized Liénard systems*, J. Math. Anal. Appl., 343 (1), (2008), 299-309.
- [41] A. Gasull, H. Giacomini, Llibre J., *New criteria for the existence and non existence of limit cycles in Liénard differential systems*, Dynamical systems: An int. Journal, 24 (2), (2009), 171-185.
- [42] Ciambellotti L., *Uniqueness of limit cycles for Liénard systems. A generalization of Massera's theorem*, Qual. Th. Dyn. Syst., 7, (2009), 405-410.
- [43] L. A. Cherkas, Grin, *Bendixson-Dulac criterion and reduction to global uniqueness in the problem of estimating the number of limit cycles*, Diff. equations, Vol. 46(1), (2010), 61-69.
- [44] L. A. Cherkas, A. A Grin, K. R. Schneider, *Dulac-Cherkas functions for generalized Liénard Systems*, E. J. of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 35, (2011), 1-23.
- [45] L. A. Cherkas, A. A. Grin, *A function of limit cycles of the second kind for autonomous functions on a cylinder*, Differential Equations 47, 462-470 (2011).
- [46] J. Llibre, A. Mereu, *limit cycles for generalized Kukles polynomial diff. systems*, Nonlinear Analysis, 75 (4), (2011), 1261-1271.
-

- [47] A. Gasull, H. Giacomini, *Some applications of the extended Bendixson-Dulac theorem*, Progress and challenges in Dyn. syst. Springer, 54, (2013), 233-252.
- [48] Dennis G. Zill., *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, decima edición, CENGAGE Learning (2013), p-8 a p-11
- [49] R. Rabanal, *On the limit cycles of a class of Kukles type diff. systems*, Nonlinear Analysis, 95, (2014), 676-690.
- [50] Osuna O., Villaseñor-Aguilar G., *On the Dulac functions*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Vol. 10, Núm. 1, (2011), 43-49.
- [51] Osuna O., Villaseñor-Aguilar G., *Some properties of the Dulac functions set*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Núm. 72, (2011), 1-8.
- [52] Osuna O., Villaseñor-Aguilar G., *On the Dulac functions for multiply connected domains*, E. J. of Qualitative Theory of Differential Equations, 61, (2013), 1-11.
- [53] Osuna O., Rodríguez-Ceballos J., Vargas-De-León C., Villaseñor-Aguilar G., *On the existence and construction of Dulac function*, Preprint.
- [54] Osuna O., Vargas-De-León C., Villaseñor-Aguilar G., *A note on the Dulac functions for a sum of vector field*, Avanza de la UACJ, Vol. 3, (2013), pág. 17-23.
- [55] Osuna O., Rodríguez-Ceballos J., Villaseñor-Aguilar G., *On the number of limit cycles of Kukles system*, Preprint.
- [56] Osuna O., Rodríguez-Ceballos J., Villaseñor-Aguilar G., *Absence of limit cycles for Kukles-type systems*, Aceptado en Avanza de la UACJ, (2014).
- [57] Osuna O., Rodríguez-Ceballos J., Villaseñor-Aguilar G. *Absence of limit cycles of Kukles-type system*, Preprint.
- [58] Lahyane M., Osuna O., Rodríguez-Ceballos J., Villaseñor-Aguilar G., *A note on limit cycles for generalized Liénard systems*, Preprint.
- [59] Aguirre Baltazar, Alvarez-Ramírez José and Suárez Rodolfo, *Estimation of the region of attraction of the origin of closed-loop linear systems with saturated linear controllers: A first harmonic Approach*, Boletín de la Soc. Mat. Mexicana (3) vol. 6, 2000, 111-150.
- [60] Aguirre Baltazar, Alvarez-Ramírez José, Fernández guillermo and Suárez Rodolfo, *First harmonic analysis of linear control systems with high-gain saturated feedback*, Internat. J. Bifur. Chaos 7 (11)(1997), 2501-2510.



- [61] Aguirre Baltazar, Alvarez-Ramírez José and Suárez Rodolfo, *Symmetry breaking of periodic orbits in control systems: a harmonic balance approach*, Internat. J. Bifur. Chaos 8 (12) (1998), 2439-2448.
- [62] Suárez Rodolfo, Alvarez-Ramírez José and Aguirre Baltazar, *First harmonic analysis of planar linear systems with single saturated feedback*, Internat. J. Bifur. Chaos 6 (1996), 2605-2610.