



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

CLASES CARACTERÍSTICAS Y TRANSVERSALIDAD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
MARÍA DE LOS ÁNGELES TORRES GARCÍA

DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D.F MAYO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Clases características y transversalidad

María de los Ángeles Torres García
Instituto de Matemáticas UNAM-Cuernavaca

UNAM

<http://www.unam.mx>

Título: Clases características y transversalidad.

Autor: María de los Ángeles Torres García.

Figuras: María de los Ángeles Torres García.

Compilador: \LaTeX (Editor adecuado para textos científicos.).

Edición en \LaTeX María de los Ángeles Torres García.

Última compilación: Mayo de 2014.

Número de páginas: 84.

Lugar: Cuernavaca Morelos, México.

A Helena

Agradecimientos

La realización de esta tesis hubiese sido imposible sin la participación de personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término. Por ello, es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justa y consecuente con ellas, expresándoles mis agradecimientos. En primer lugar doy infinitamente gracias a Dios, por haberme dado fuerza y valor para culminar esta etapa de mi vida.

Debo agradecer de manera especial y sincera al Dr. José Luis Cisneros por permitirme realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mí y su capacidad para guiarme ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación académica y como ser humano. Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a los siguientes: Dr. Carlos Cabrera, Dr. Ángel Cano, Dr. Timothy Gendron, Dr. Adolfo Guillot, Dr. Max Neumann y al Dr. Gregor Weintgar quienes fueron de gran ayuda en el transcurso de toda la maestría y de los cuales debo destacar, por encima de todo, su disponibilidad y paciencia. No cabe duda que su participación ha enriquecido el trabajo realizado. Al personal administrativo del Instituto de Matemáticas de la Unidad Cuernavaca los cuales me brindaron su apoyo en cualquier momento.

No puedo dejar de mencionar a mis compañeros, a muchos de los cuales no solo llamo amigos sino hermanos: Carolina, Marisol, Toño, Marina, Cristina, Haremy, Gonzalo, Diego, por las risas, las comidas y las pláticas de todo tipo. Sobre todo agradezco sincera y profundamente a Agustín, por los sabios consejos, la ayuda incondicional y la paciencia, no imaginas la profunda admiración y cariño que te tengo, eres todo un ejemplo a seguir no solo por ser un gran matemático sino por ser un gran ser humano, ¡gracias hermanol!. A Berenice quien en los momentos de angustia siempre tuvo una palabra de aliento la cual motivaba a no darme por vencida en este proyecto.

Agradezco también a mi familia, a mis hermanos Alecia, Omar y Juventino y a mi bicho (mi padre). A mi madre, quien me ha enseñado a no desfallecer ni rendirme ante nada ni nadie y siempre perseverar. A mi amiga y hermana Eunice es infinita toda la ayuda que tú me has brindado en toda mi vida y aún me sigues brindando te quiero profundamente. Por último pero no menos importante agradezco enteramente a Isaac, gracias amor por acompañarme durante todo este arduo camino y compartir conmigo alegrías y fracasos, has sido el mejor compañero. No puedo esperar para recoger los frutos de nuestro esfuerzo juntos, te amo demasiado.

Gracias a todas las personas que ayudaron directa e indirectamente en la realización de este proyecto. Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN106614 “Singularidades y Teoría K”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	5
Índice general	7
Introducción	9
1. Topología diferencial	11
1.1. Variedades diferenciables	11
1.1.1. Definiciones	11
1.1.2. Espacio tangente	14
1.2. Transversalidad	19
1.2.1. Valores regulares	19
1.2.2. Transversalidad	20
2. Haces vectoriales	23
2.1. Definición y construcción	23
2.1.1. Secciones de haces vectoriales	26
2.1.2. Funciones de transición	27
2.2. Operaciones en haces vectoriales	30
2.2.1. Restricción y subhaz	30
2.2.2. Haz dual E^*	30
2.2.3. Suma directa (Suma de Whitney)	31
2.2.4. Producto tensorial	32
2.2.5. Potencia exterior	32
2.2.6. Haz de morfismos	32
2.2.7. Producto interno	33
2.3. Clasificación de haces vectoriales	34
2.3.1. El haz inducido (pull-back)	35
2.3.2. Funciones de pegado	38
2.3.3. Variedades de Grassmann y haces universales	40
3. Grupos de homología y cohomología singular	43
3.1. Homología y cohomología singular	43
3.1.1. Definiciones básicas	43
3.1.2. Relación entre homología y cohomología	46
3.2. Homología de complejos CW	48
3.3. Operaciones	49
3.3.1. Producto cup	50

3.3.2. Producto cap	51
3.3.3. Producto slant	51
3.4. Orientación	52
3.4.1. Orientación en variedades	52
3.4.2. La clase fundamental de una variedad	54
3.5. Teorema de dualidad Poincaré	55
3.6. El isomorfismo de Thom	57
4. Clases características y transversalidad	61
4.1. Preliminares	61
4.2. Morfismos de haces vectoriales genéricos	63
4.3. La variedad $\tilde{Z}(h)$	65
4.4. Clases características	67
4.4.1. Axiomas de clases características	67
4.4.2. Definición de las clases $Cl_i(\xi)$	68
4.4.3. Generalización	73
4.4.4. Unicidad	75
Bibliografía	79
Índice alfabético	81
Índice de figuras	83

Introducción.

Dado un haz vectorial suave ξ de rango n sobre una variedad diferenciable M es posible definir invariantes los cuales son obstrucciones para poder construir r secciones linealmente independientes con $1 \leq r \leq n$, dichas obstrucciones son clases de cohomología llamadas *clases características* de ξ . La teoría de clases características inicio en el año de 1935 con los trabajos de Hassler Whitney y Eduard Stiefel siguiendo con Lev Pontrjagin en 1942 y Shing-Shen Chern en 1946. Las construcciones clásicas de las clases características son de carácter algebraico para ver estas construcciones consultar [11],[16]. El objetivo de la presente tesis es exponer la construcción geométrica de las clases características de un haz vectorial basada en el concepto de transversalidad dada en [1].

De manera más general nos podemos preguntar, sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n$ ¿es posible construir r secciones de ξ que sean linealmente independientes en todo punto $p \in M$? Por ejemplo ξ es un haz vectorial trivial si y sólo si admite n secciones linealmente independientes, entonces tenemos que la existencia de $n - i + 1$ secciones linealmente independientes de ξ es equivalente a la existencia de un morfismo de haces $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi$ del haz producto ε^{n-i+1} a ξ tal que h es inyectivo en cada fibra. Pues así tendríamos un subhaz trivial de rango $n - i + 1$ de ξ . Con esta formulación, la obstrucción a la existencia de $n - i + 1$ secciones linealmente independientes está representada por el subconjunto de puntos $\bar{Z}(h)$ de M donde h no es inyectiva. En general este conjunto no es una variedad, pero si h es “genérico”, es una variedad estratificada. Definiremos una variedad diferenciable cerrada $\tilde{Z}(h)$ y una aplicación $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$ cuya imagen es $\bar{Z}(h)$. La imagen de la clase fundamental de $\tilde{Z}(h)$ bajo el homomorfismo inducido en homología por ϕ nos da un elemento en la homología de M y definimos la i -ésima clase característica de ξ denotada $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ como el dual de Poincaré de este elemento. El resultado principal de este trabajo (Teorema 4.13) muestra que tales clases características satisfacen axiomas equivalentes a los axiomas dados por Hirzbruch los cuales definen las clases de Stiefel-Whitney o Chern.

Para llegar a este resultado este trabajo consta de cuatro capítulos, en el primer capítulo introduciremos el concepto de variedad diferenciable el cual es un tipo especial de variedad topológica en la cual podemos extender nociones del cálculo diferencial que usamos en \mathbb{R}^n , una propiedad importante de una variedad diferenciable M es que sobre cada punto $p \in M$ se tiene un espacio tangente denotado como T_pM el cual es un espacio vectorial. También introduciremos el concepto de transversalidad el cual es un concepto importante en el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo definiremos haces vectoriales los cuales son estructuras que en cada fibra definen un espacio vectorial, daremos algunos ejemplos de haces vectoriales para de esta manera familiarizarnos con el tipo de objetos con los cuales trabajaremos. Usando operaciones de espacios vectoriales podremos realizar operaciones entre ellos para así for-

mar nuevos haces vectoriales, veremos cuando podemos definir un producto interno en los haces vectoriales y finalmente llegaremos a una clasificación de haces vectoriales mediante el estudio de variedades de Grassmann y el haz universal.

El tercer capítulo está dedicado a explicar qué es la homología y cohomología de un espacio topológico y algunas de sus propiedades más importantes así también proporcionar las herramientas necesarias para enunciar el teorema de dualidad de Poincaré.

Finalmente en el cuarto capítulo motivados por nuestra pregunta inicial definiremos la variedad $\tilde{Z}(h)$, definiremos la aplicación $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$, enunciaremos los axiomas de las clases características dados por Hirzbruch y brindaremos axiomas equivalentes para finalmente definir las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$.

1

Topología diferencial

Este capítulo forma un pequeño conjunto de notas básicas en topología diferencial, el cual pretende introducir algunos conceptos y terminología importantes. El primer tópico que vamos a tratar es el de variedad diferenciable el cual es un tipo especial de variedad topológica en la cual podemos extender nociones del cálculo diferencial que usamos en \mathbb{R}^n . El segundo tópico a tratar es el concepto de transversalidad, el cual nos resulta muy importante en el desarrollo de este trabajo.

1.1. Variedades diferenciables

1.1.1. Definiciones

Definición 1.1. Sea M un espacio topológico Hausdorff con una base numerable de su topología (segundo numerable). Un *atlas* de M es una colección $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que:

- 1) $U_\alpha \subset M$ es abierto,
- 2) $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ con $\phi_\alpha(U_\alpha)$ abierto, es un homeomorfismo,
- 3) $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

A las $\phi_\alpha = (\phi_\alpha^1 \cdots \phi_\alpha^m)$ se le llaman *cartas coordenadas* locales del atlas, si existe un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ entonces el espacio topológico M se llama *variedad topológica*.

Si todos los U_α , $\alpha \in A$ son disjuntos la variedad topológica M es esencialmente un abierto en \mathbb{R}^m . Ahora si los U_α se intersectan tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama: sean $\alpha, \beta \in A$

$$\begin{array}{ccc} & \emptyset \neq U_\alpha \cap U_\beta \subset M & \\ \phi_\alpha \swarrow & & \searrow \phi_\beta \\ \mathbb{R}^m \supset \phi_\alpha(U_\alpha) \supset \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} & \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \phi_\beta(U_\beta) \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

Definición 1.2. Un atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de una variedad topológica M se dice *diferenciable* si y solo si para todo $\alpha, \beta \in A$ con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ la aplicación $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es diferenciable.

Recordemos que diferenciable (suave) es que todas las derivadas parciales iteradas existen y son continuas hasta cualquier orden.

Definición 1.3. Sea $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un atlas diferenciable de una variedad topológica M entonces un homomorfismo $\varphi: V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$ con $V \subset M$ abierto se llama *compatible* con $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ si y sólo si las aplicaciones $\varphi \circ \phi_\alpha^{-1}$ y $\phi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables.

Definición 1.4. Dada una variedad topológica M decimos que un *atlas maximal* es un atlas tal que cualquier atlas compatible está contenido en el.

Definición 1.5. Una *estructura diferenciable* en una variedad topológica es un atlas maximal. Una *variedad diferenciable* (suave) es una variedad topológica con un estructura diferenciable.

Veamos algunos ejemplos clásicos de variedades diferenciables.

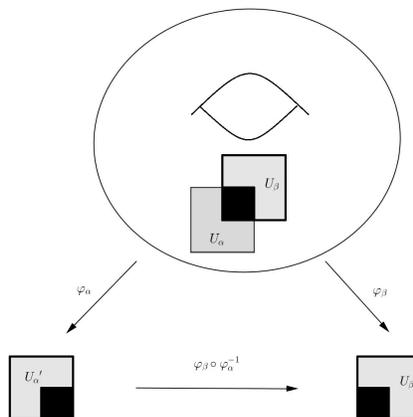


Figura 1.1: Cartas coordenadas

Ejemplo 1.6. Todo abierto $U \in \mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable pues tiene un atlas con una carta $(U, Id_{\mathbb{R}^m}|_U)$.

Ejemplo 1.7. La esfera $S^m \in \mathbb{R}^{m+1}$ no posee un atlas con una carta ya que es compacto pero tiene un atlas con dos cartas: Sea $U_1 = S^m \setminus (1, 0, \dots, 0)$ y $U_2 = S^m \setminus (-1, 0, \dots, 0)$ definimos las aplicaciones $\phi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\phi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ mediante:

$$\phi_1(y_1, \dots, y_{m+1}) = \frac{1}{1 - y_1}(y_2, \dots, y_{m+1})$$

$$\phi_2(y_1, \dots, y_{m+1}) = \frac{1}{1 + y_1}(y_2, \dots, y_{m+1})$$

con inversas $\phi_1^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow U_1$ y $\phi_2^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow U_2$ dadas por:

$$\phi_1^{-1}(x_1, \dots, x_{m+1}) = \frac{-1 + \|x_i\|^2}{1 + \|x_i\|^2}, \frac{2x_1}{1 + \|x_i\|^2}, \dots, \frac{2x_m}{1 + \|x_i\|^2}$$

$$\phi_2^{-1}(x_1, \dots, x_{m+1}) = \frac{1 - \|x_i\|^2}{1 + \|x_i\|^2}, \frac{2x_1}{1 + \|x_i\|^2}, \dots, \frac{2x_m}{1 + \|x_i\|^2}.$$

Entonces $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ es un atlas diferenciable con dos cartas de S^m . Tenemos que

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

dadas por $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \frac{1}{\|x_i\|^2}(x_1, \dots, x_m)$, la cual es diferenciable ya que es el cociente de dos aplicaciones suaves tal que el denominador es distinto de cero.

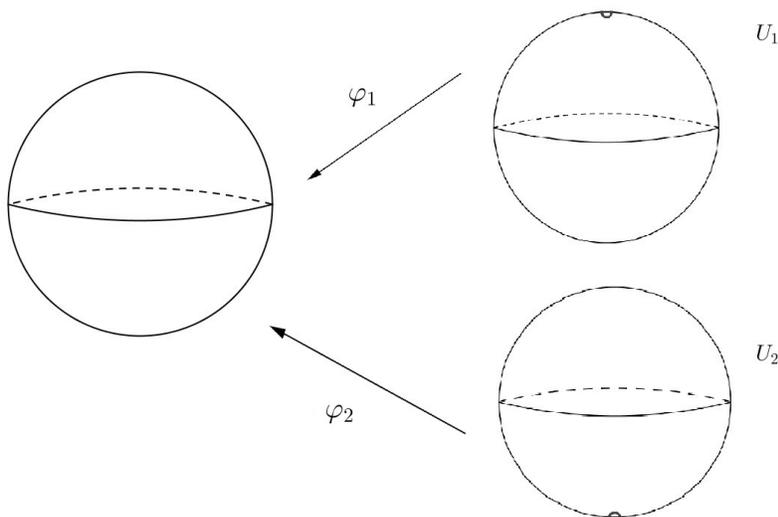


Figura 1.2: Parametrizaciones de S^2

Proposición 1.8. *Un subconjunto abierto de una variedad diferenciable M de dimensión m es una variedad de dimensión m .*

Demostración. Supongamos que $U \subset M$ es un subconjunto abierto de M , si (V, ϕ) es una carta diferenciable para M entonces $(U \cap V, \phi|_{U \cap V})$ es una carta diferenciable para U . \square

Ejemplo 1.9. $GL_n(\mathbb{R}) = \{\text{matrices no singulares } n \times n\}$ es una variedad de dimensión n^2 . Consideremos la aplicación determinante $\det: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es una aplicación continua, tomemos $\mathbb{R} - \{0\}$ abierto entonces tenemos $\det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} = GL_n(\mathbb{R})$ es un abierto en $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Definición 1.10. Sean M y N variedades suaves con atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ y $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta \in B}$ respectivamente. Una aplicación $f: M \rightarrow N$ se dice *diferenciable* si para toda $\alpha \in A$ y $\beta \in B$

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) & \xrightarrow{f} & V_\beta \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow \phi_\beta \\ \mathbb{R}^n \supset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) & \xrightarrow{\phi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \phi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

la aplicación $\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es diferenciable.

Definición 1.11. Sea $N \subset M^{n+k}$ diremos que es una *subvariedad* diferenciable de dimensión n si para todo punto $p \in N$ existe una carta alrededor de p , $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ tal que $\varphi(N \cap U) = U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. Consideremos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

El número $k = \dim M - \dim N$ es llamada la *codimensión* de la subvariedad.

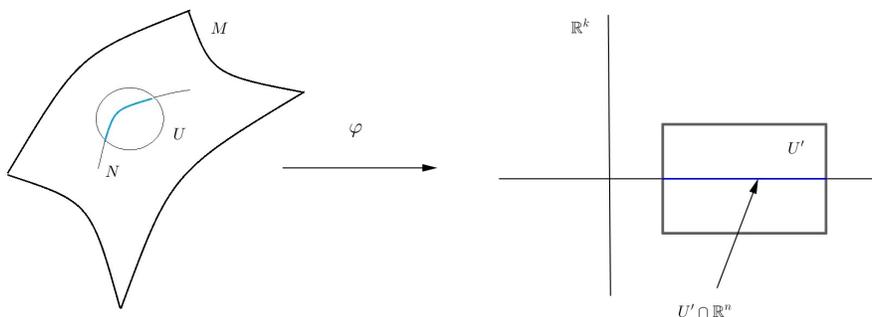


Figura 1.3: Subvariedad

1.1.2. Espacio tangente

Una propiedad importante de una variedad diferenciable M es que sobre cada punto $p \in M$ se tiene un espacio tangente denotado como $T_p M$ el cual es un espacio vectorial. El concepto de espacio tangente puede ser descrito de varias formas equivalentes como se puede ver en [4, cap.2].

Dada M una variedad diferenciable de dimensión m , sea $p \in M$ una función definida localmente en p es un par (U, f) donde U es un subconjunto abierto de M que contiene a p y f esta definida en U . Consideremos el conjunto $\{(U, f) | p \in U \subset M, U \text{ abierto y } f: U \rightarrow \mathbb{R}\}$. Definimos una relación de equivalencia $(U, f) \sim (V, g)$ si existe un abierto $W \subset U \cap V$ con $p \in W$ tal que $f|_W = g|_W$.

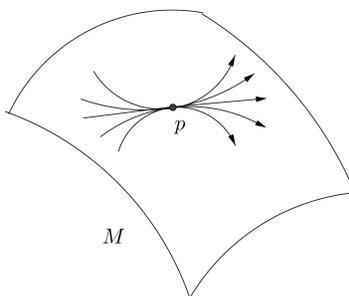
Definición 1.12. La clase de equivalencia de funciones localmente definidas dada por la relación anterior es llamada *germen de función* en p y la denotamos \tilde{f} , si además $f(p) = q$ tenemos $\tilde{f}: (M, p) \rightarrow (N, q)$. El conjunto de todos los gérmenes de funciones alrededor de $p \in M$ se denota como $\mathcal{E}(p)$.

Sean \tilde{f} y \tilde{g} dos gérmenes de funciones en p y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widetilde{f + g} &= \tilde{f} + \tilde{g} \\ \widetilde{f \cdot g} &= \tilde{f} \cdot \tilde{g} \\ \lambda \tilde{f} &= \widetilde{\lambda f} \end{aligned}$$

por lo cual forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Además dados los gérmenes $\tilde{f}: (M, p) \rightarrow (N, q)$ y $\tilde{g}: (N, q) \rightarrow (L, r)$ obtenemos la composición $\tilde{g} \circ \tilde{f}: (M, p) \rightarrow (L, r)$.

Definición 1.13. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Una *curva* parametrizada en M que pasa por p es una aplicación diferenciable $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$.

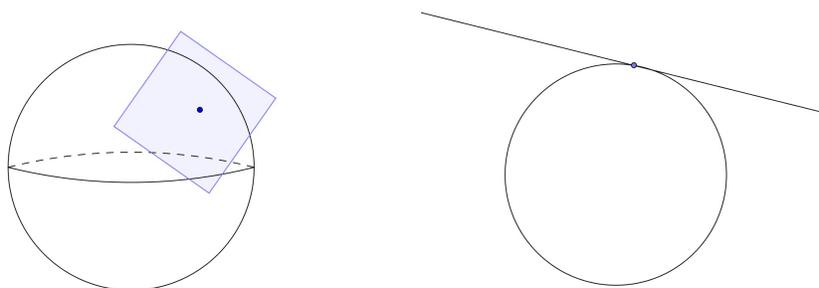
Figura 1.4: Vectores tangentes a p

Definición 1.14. Sean $\gamma_1, \gamma_2: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, p)$ en el conjunto de gérmenes diferenciables en p denotado como \mathcal{W}_p . Definimos una relación de equivalencia $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ si y sólo si para toda $\tilde{f} \in \mathcal{E}(p)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \gamma_1)|_0 = \frac{d}{dt}(\tilde{f} \circ \gamma_2)|_0.$$

Una clase de equivalencia $[\gamma]$ bajo esta relación es un vector tangente a $p \in M$. Ver Figura 1.4.

Definición 1.15. El espacio tangente a M en p denotado $T_p M$ es el conjunto de clases de equivalencia de gérmenes de curvas en M que pasan por p .

Figura 1.5: Plano tangente a S^2 y recta tangente a S^1

Proposición 1.16. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y sea $x \in M$ entonces $T_x M$ es un espacio vectorial de dimensión m .

Demostración. Sea $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$ y (U, ϕ) una carta de M definimos

$$\begin{aligned} T_p M &\rightarrow T_0 \mathbb{R}^m \\ [\gamma] &\mapsto [\phi \circ \gamma] \end{aligned}$$

veamos que este es un isomorfismo. Esta bien definida, sean γ y γ' tal que

$$\frac{d}{dt} \tilde{f} \circ \gamma|_0 = \frac{d}{dt} \tilde{f} \circ \gamma'|_0$$

para toda \tilde{f} entonces $\frac{d}{dt}\tilde{f} \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma|_0 = \frac{d}{dt}\tilde{f} \circ \phi^{-1} \phi \gamma'|_0$. Tiene inversa, puesto que ϕ es un isomorfismo podemos definir

$$\begin{aligned} T_0\mathbb{R}^m &\rightarrow T_pM \\ [\alpha] &\mapsto [\phi^{-1} \circ \alpha] \end{aligned}$$

Afirmación $T_0\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ bajo el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} T_0\mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ [\gamma] &\mapsto \frac{d}{dt}\gamma|_0 \end{aligned}$$

tomemos dos curvas equivalentes γ y $\tilde{\gamma}$ es decir

$$\frac{d}{dt}\tilde{g} \circ \gamma|_0 = \frac{d}{dt}\tilde{g} \circ \tilde{\gamma}$$

entonces

$$D_0\tilde{g}\left(\frac{d}{dt}\gamma|_0\right) = D_0\tilde{g}\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}$$

en particular si tomamos \tilde{g} como la i -proyección entonces coordenada a coordenada tenemos

$$\frac{d}{dt}\gamma|_0 = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}|_0$$

por lo cual esta bien definida. Y definimos la inversa como

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\rightarrow T_0\mathbb{R}^m \\ v &\mapsto [tv] \end{aligned}$$

□

Dada una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables podemos definir para $p \in M$ la *diferencial* de f en p denotada como df_x la cual podemos definir como sigue

$$\begin{aligned} df_p: T_pM &\rightarrow T_{f(p)}N \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

La diferencial satisface las siguientes propiedades:

- 1) **Regla de la cadena.** Si $f: M \rightarrow N$ y $g: N \rightarrow P$ son aplicaciones diferenciables con $g(p) = q$, entonces

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p.$$

- 2) Si I es la aplicación identidad de U , entonces dI_p es la aplicación identidad de \mathbb{R}^k . De manera mas general, si $U \subseteq U'$ son conjuntos abiertos e $\iota: U \rightarrow U'$ es la inclusión, entonces $d\iota_p$ es nuevamente la aplicación identidad en \mathbb{R}^l .

- 3) Si $L: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ es una aplicación lineal, entonces $dL_p = L$.

Proposición 1.17. Si $f: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entonces $df_p: T_pM \rightarrow T_pN$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, en particular la dimensión de M es igual a la dimensión de N .

Demostración. Sea $g: N \rightarrow M$ la inversa de f entonces $g \circ f = id_M$ aplicando la diferencial tenemos $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p = d(id_M)_p = id_{T_pM}$ y análogamente $df_p \circ dg_{f(p)} = id_{T_{f(p)}N}$. □

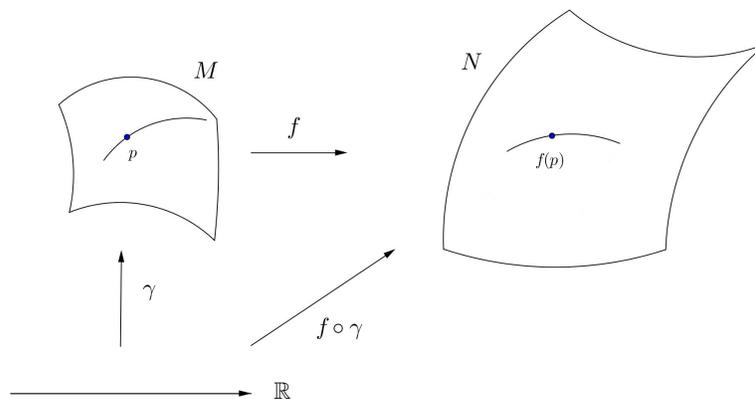


Figura 1.6: Diferencial

Definición 1.18. Dada una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables, diremos que f es un *difeomorfismo local* en p si existe un abierto U de $p \in M$ tal que $f(U)$ es abierto en N y $f|_U$ es un difeomorfismo.

Definición 1.19. Sea $f: N \rightarrow M$ una aplicación diferenciable decimos que es un *encaje* si $f(N) \subset M$ es una subvariedad diferenciable y $f: N \rightarrow f(N)$ es un difeomorfismo. Si N y M son de la misma dimensión entonces $f(N)$ es abierto en M .

Teorema 1.20 (de la función inversa para variedades). *Sean M y N variedades diferenciables y sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ellas, $p \in M$, si la diferencial de f , $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo, entonces f es un difeomorfismo local en p .*

La demostración se puede encontrar en [14, cap. 2.5]

Definición 1.21. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente

- i) Sea $m < n$ si para $x \in M$ la función df_x es inyectiva decimos que f es una *inmersión* en x .
- ii) Sea $n \leq m$ si para $x \in M$ la función df_x es sobreyectiva decimos que f es una *submersión* en x .

Teorema 1.22 (de la inmersión local). *Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable con M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Si $m < n$ y f es una inmersión para algún $x \in M$ y si $y = f(x)$, entonces existen coordenadas locales alrededor de x y y tales que $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 U' & \xrightarrow{g} & V'
 \end{array}$$

con $\phi(x) = 0$ y $\psi(y) = 0$, donde (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas alrededor de x en M y de $f(x)$ en N respectivamente, y con $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Como Df_x es inyectiva y ϕ y ψ son ambos difeomorfismos, entonces Dg_0 es inyectiva y mediante cambios de base podemos suponer que tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m . Ahora podemos definir $G: U' \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $G(x, z) = g(x) + (0, z)$, entonces se tiene que $DG_0 = I_n$, donde I_n es la identidad de orden n . Por el Teorema 1.20, G es un difeomorfismo local en 0. Sea $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inmersión canónica dada por $h(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, entonces $G \circ h = g$.

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{g} & V' \\ & \searrow h & \uparrow G \\ & & U' \times \mathbb{R}^{n-m} \end{array}$$

Como ψ y G son difeomorfismos locales, entonces $G^{-1} \circ \psi$ es un difeomorfismo local en y . Podemos usar a $G^{-1} \circ \psi$ como una carta local de N alrededor de y . \square

Teorema 1.23 (de la submersión local). *Sea $f: M \rightarrow N$ una función diferenciable con M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Si $n < m$ y f es una submersión para algún $x \in M$ y si $y = f(x)$, entonces existen coordenadas locales alrededor de x y y tales que $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{g} & V' \end{array}$$

con $\phi(x) = 0$ y $\psi(y) = 0$, donde (U, ϕ) y (V, ψ) son cartas alrededor de x en M y $f(x)$ en N respectivamente, y con $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Como Df_x es sobreyectiva y ϕ, ψ son ambos difeomorfismos, entonces Dg_0 es sobreyectiva y mediante cambios de base podemos suponer que tiene como matriz

$$(I_n \mid 0)$$

donde I_n es la identidad de orden n . Ahora podemos definir $G: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $G(a) = (g(a), a_{n+1}, \dots, a_m)$ si $a = (a_1, \dots, a_m)$ y por lo tanto se tiene que $DG_0 = I_m$, donde I_m es la identidad de orden m . Por el Teorema 1.20 tenemos que G es un difeomorfismo local en 0. Sea $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la submersión canónica dada por $h(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$, entonces

$h \circ G = g$.

$$\begin{array}{ccc}
 U \subset M & \xrightarrow{f} & V \subset N \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 U' & \xrightarrow{g} & V' \\
 G \downarrow & \nearrow h & \\
 \mathbb{R}^m & &
 \end{array}$$

Como ϕ y G son difeomorfismos locales, entonces $G \circ \phi$ es un difeomorfismo local en x . Podemos usar a $\phi^{-1} \circ G^{-1}$ como una parametrización local de M alrededor de x . \square

1.2. Transversalidad

En esta sección mostraremos que la imagen inversa de un valor regular de una aplicación diferenciable es una variedad diferenciable. Para generalizar este resultado introduciremos el concepto de transversalidad, por ultimo definiremos el concepto de grado y mostramos las propiedades mas importantes, las cuales nos serán de utilidad.

1.2.1. Valores regulares

Definición 1.24. Sea $f: M \rightarrow N$ con M de dimensión m y N de dimensión n . Sea $C = \{p \in M \mid df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ tiene rango } < n \text{ (es decir no es sobre)}\}$ entonces decimos que C es el conjunto de *puntos críticos* y a su complemento $M - C$ el conjunto de *puntos regulares* de f . Llamamos a $f(C)$ el conjunto de *valores críticos* de f y a su complemento $N - f(C)$ el conjunto de *valores regulares*.

Teorema 1.25 (de la preimagen). *Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente con $m \geq n$. Si $q \in N$ es un valor regular, entonces el conjunto $f^{-1}(q) \subset M$ es una subvariedad diferenciable de dimensión $m - n$.*

Demostración. Sea $p \in f^{-1}(q)$ puesto que q es valor regular de f tenemos que la diferencial Df_p es sobreyectiva, así pues por el teorema de la submersión local existen cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ tales que $\phi(p) = 0, \psi(q) = 0$ y $\bar{f}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$. Ahora sea $z \in U \cap f^{-1}(q)$ tenemos que $f(z) = q$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
 f(\phi^{-1}(U')) &= \psi^{-1}\bar{f}(U') \\
 &= \psi^{-1}(0) \\
 &= p
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(\phi(z)) &= \psi(f(z)) \\
 &= \psi(q) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

por lo tanto $\phi(U \cap f^{-1}(q)) = \{0\}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. \square

Ejemplo 1.26. Como un ejemplo podemos dar una demostración de que la esfera unitaria S^{m-1} es una variedad diferenciable. Considérese la función $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

cualquier $y \neq 0$ es un valor regular, y la variedad diferenciable $f^{-1}(1)$ es la esfera unitaria.

Sea L una subvariedad de M , donde la $\dim M = m$ y $\dim L = l$ entonces $T_p L$ es un subespacio de $T_p M$ para $p \in M$. El complemento ortogonal de $T_p L$ en $T_p M$ es entonces, un espacio vectorial de dimensión $m - l$ llamado *espacio de vectores normales* a L en M en el punto p definido $N_p L = T_p M / T_p L$.

Lema 1.27. *El kernel de $df_p: T_p M \rightarrow T_q N$ es igual al espacio tangente $T_p M' \subset T_p M$ de la subvariedad $M' = f^{-1}(q)$. Por lo tanto df_p manda el complemento ortogonal de $T_p M'$ de manera isomorfa sobre $T_q N$.*

Demostración. Del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ y & \xrightarrow{i} & N \end{array}$$

vemos que df_p manda el subespacio $T_p M' \subset T_p M$ al cero. Contando las dimensiones vemos que df_p manda el espacio de vectores normales a M' de manera isomorfa a $T_q N$. \square

1.2.2. Transversalidad

Definición 1.28. Sean M y N variedades diferenciables y sea $L \subset N$ una subvariedad diferenciable de dimensión k . Diremos que una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$ es *transversal* a L si la condición de transversalidad

$$Df_p(T_p M) + T_{f(p)} L = T_{f(p)} N \quad (1.1)$$

con $f(p) \in L$, se satisface para todo $p \in f^{-1}(L)$.

El caso en que M también es subvariedad de N y la aplicación f es la inclusión se ilustra en la Figura 1.7.

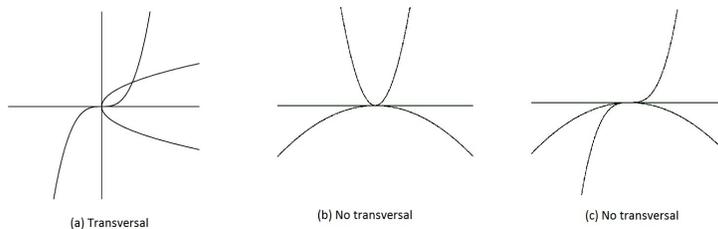


Figura 1.7: Transversalidad

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 1.25 y para verlo necesitamos de la definición anterior.

Teorema 1.29. *Si $f: M \rightarrow N$ es transversal a la subvariedad $L \subset N$ de codimensión k y $f^{-1}(L) \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(L)$ es una subvariedad de M de codimensión k .*

Demostración. Sea $f(p) = q$ y sea V una vecindad. Si existe una carta (V, ϕ) tal que ϕ es un difeomorfismo entre V y una vecindad V' de $\phi(q)$ con $V' \subset \mathbb{R}^n$, entonces como L es una subvariedad de codimensión k , se tiene que $\phi(L \cap V) = \mathbb{R}^{n-k} \cap V'$ donde $\mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ está dado haciendo cero las últimas k coordenadas. Por otro lado, sea $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección en esas últimas coordenadas; entonces $\Pi(\phi(L \cap V)) = 0$, es decir, sea U vecindad de p ; entonces:

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{\phi} & V' & \xrightarrow{\Pi} & \mathbb{R}^k \\ & & & & p \mapsto q & \mapsto 0 & \mapsto 0 \end{array} \quad (1.2)$$

Ahora queremos ver que el cero es un valor regular de la composición $\Pi \circ \phi \circ f$ (ya que con el Teorema 1.25, tendríamos que la diferencial es suprayectiva para todos aquellos puntos que van a dar al cero). Como M y L son transversales tenemos que

$$df_p(T_p M) + T_q L \cong T_q N \quad (1.3)$$

Entonces, tomando las diferenciales correspondientes a (1.2), obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} T_p M & \xrightarrow{df_p} & T_q M & \xrightarrow{d\phi_q} & T_0 V & \xrightarrow{d\Pi_0} & T_0 \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \cong & & & & \\ & & df_p(T_p M) + T_q L & \longrightarrow & d\phi_q(df_p(T_p M)) + \mathbb{R}^{n-k} & & \end{array}$$

Hay que aclarar que $T_q V \cong df_p(T_p M) + T_q L$ porque un abierto en una variedad siempre es una subvariedad de la misma dimensión que la variedad; entonces $T_q V \cong T_q N$ y tenemos la igualdad (1.3). Ahora la diferencial de una transformación lineal es ella misma y la proyección Π es una transformación lineal; entonces, bajo $d\Pi_0$, $D\phi_q(df_p(T_p M)) \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ va a dar a $D\phi_q(df_p(T_p M))$. Además, en $d\phi_q(df_p(T_p M))$ el único vector cuya imagen bajo $d\Pi_0$ es el vector cero, por lo que $d\Pi_0$ es inyectiva restringida a $d\phi_q(df_p(T_p M))$ y como la dimensión de $d\phi_q(df_p(T_p M))$ es k y la dimensión de $T_0 \mathbb{R}^k$ es también k , se tiene que $d\Pi_0$ es suprayectiva; de donde, el cero es un valor regular. Aplicamos entonces el Teorema 1.25 y obtenemos que $f^{-1}(L) = (\Pi \circ \phi \circ f)^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión M de dimensión igual a $\dim M - \dim \mathbb{R}^k = m - k$; es decir, tiene codimensión k . \square

El Teorema 1.29 generaliza al Teorema 1.25 en el sentido de que dada una aplicación diferenciable $f: M \rightarrow N$, el que $q \in N$ sea un valor regular, es equivalente a decir que la aplicación f es transversal a la subvariedad de N de dimensión cero dada por el punto q .

2

Haces vectoriales

Empezaremos este capítulo dando la definición del concepto de haz vectorial y brindaremos algunos ejemplos los cuales nos permitirán familiarizarnos con el tipo de objetos con los cuales trabajaremos, más adelante en este mismo capítulo veremos la necesidad de introducir otros elementos característicos como lo son las funciones de transición, también trataremos las operaciones entre haces vectoriales hasta llegar finalmente a dar una clasificación de haces mediante el estudio de variedades de Grassman y el haz universal.

2.1. Definición y construcción

Definición 2.1. Un *haz vectorial* ζ de rango n sobre un campo \mathbb{F} real o complejo consiste en:

1. Una variedad $E = E(\zeta)$ llamada espacio total,
2. Una aplicación $p: E \rightarrow B$ continua llamada proyección,
3. Para toda $b \in B$ la fibra $p^{-1}(b)$ tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n .
Dado $b \in B$ denotaremos a la fibra como E_b ó ζ_b

Además p satisface el *axioma de trivialidad local* en el sentido de que para toda $b \in B$ existe una vecindad U de b y un difeomorfismo

$$\varphi_U: U \times \mathbb{F}^n \rightarrow p^{-1}(U)$$

que es \mathbb{F} -lineal en toda fibra. Y $p \circ \varphi_U(b, v) = v$ esto es que mande fibras en fibras .

Si además la proyección es diferenciable decimos que el haz vectorial es *diferenciable* ó suave.

A continuación veremos algunos ejemplos de haces vectoriales:

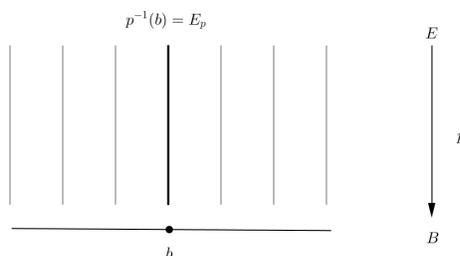


Figura 2.1: Haz vectorial

Ejemplo 2.2. El haz producto sea $B \times \mathbb{R}^n$ con la proyección sobre el primer factor $p: B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$.

Ejemplo 2.3. Sea E el espacio cociente $I \times \mathbb{R}$ bajo las identificaciones $(0, t) \sim (1, -t)$ entonces la proyección $I \times \mathbb{R} \rightarrow I$ induce una aplicación $p: E \rightarrow S^1$ donde E es la banda de Möbius sin frontera, la imagen inversa de cualquier punto $p \in S^1$ será un intervalo abierto, el cual es homeomorfo a \mathbb{R} . Este haz es llamado *haz de Möbius*.

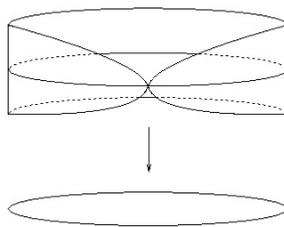
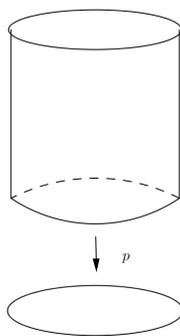


Figura 2.2: Haz de Möbius

Ejemplo 2.4. El haz tangente de la esfera unitaria $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el haz vectorial $p: E \rightarrow S^n$ donde $E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \perp v\}$ pensamos a v como un vector tangente a S^n trasladado al punto $x \in S^n$, la proyección $p: E \rightarrow S^n$ envía $(x, v) \mapsto x$.

Figura 2.3: Haz tangente a S^1

Ejemplo 2.5. El haz tangente a una variedad M es el haz vectorial $\pi: TM \rightarrow M$ donde $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ entonces si $v \in TM$, v esta en algún $T_p M$ y la proyección esta dada como $\pi(v) = p$ y $\pi^{-1}(p) = T_p M$. En particular si $M \subset \mathbb{R}^k$ tenemos que $TM = \{(p, u) \in M \times \mathbb{R}^k \mid p \in M, u \in T_p M\}$, la proyección $\pi: TM \rightarrow M$ envía $(p, u) \mapsto p$ es decir, $\pi^{-1}(p) = T_p M$. La imagen inversa de un punto $p \in M$ bajo π es el espacio vectorial $T_p M$.

Ejemplo 2.6. El haz normal de $S^n \in \mathbb{R}^{n+1}$, sea $E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v = tx, t \in \mathbb{R}\}$ y $p: E \rightarrow S^n$ la proyección dada por $p(x, v) = x$.

Ejemplo 2.7. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} y sea $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ el \mathbb{F} -espacio proyectivo de dimensión n que consiste de las \mathbb{F} -líneas en \mathbb{F}^{n+1} que pasan por el origen, es decir, de los \mathbb{F} -subespacios lineales de dimensión 1. Existe un haz vectorial γ^n de rango 1 sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ llamado el *haz tautológico* sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ tal que el espacio total está dado por

$$E = \{(\ell, v) \in \mathbb{F}\mathbb{P}^n \times \mathbb{F}^{n+1} \mid v \in \ell\}$$

y la proyección esta definida como

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{p} \mathbb{F}\mathbb{P}^n \\ (\ell, v) &\mapsto \ell \end{aligned}$$

es llamado haz tautológico por que dado $\ell \in \mathbb{F}\mathbb{P}^n$, es decir, ℓ corresponde a una linea en \mathbb{F}^{n+1} , tenemos que $p^{-1}(\ell)$, la fibra sobre ℓ , es precisamente ℓ .

En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $n = 1$ tenemos que $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ es isomorfo al círculo unitario S^1 y el haz dado por la proyección de la banda de Möbius sobre S^1 mostrado en la figura anterior es precisamente el haz tautológico.

Una generalización natural de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es llamada variedad Grassmaniana $G_k(\mathbb{R}^n)$ el cual es el espacio de todos los k -planos que pasan por el origen en \mathbb{R}^n , el cual veremos mas adelante.

Definición 2.8. Sean $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B'$ dos \mathbb{F} haces vectoriales. Un *morfismo de haces vectoriales* es un par de aplicaciones continuas ó en su caso diferenciables para haces vectoriales suaves $u: E \rightarrow E'$ y $f: B \rightarrow B'$ tal que $p'u = fp$ es decir el siguiente diagrama conmuta y la restricción $u|_{p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(f(b))$ es lineal para cada $b \in B$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Ejemplo 2.9. Dada $f: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, su diferencial

$$\begin{aligned} df: TM &\rightarrow TN \\ (p, u) &\mapsto (f(p), df_p(u)) \end{aligned}$$

es un morfismo de haces vectoriales.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Los haces vectoriales sobre un espacio fijo B forman de modo natural los objetos de una categoría. Donde los “morfismos” correspondientes son los homomorfismos de haces vectoriales, que definiremos a continuación.

Definición 2.10. Sean $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B$ dos haces vectoriales sobre el mismo espacio base B , un morfismo de haces $h: E \rightarrow E'$ dado por la identidad $Id_B: B \rightarrow B$ es un *isomorfismo*, si la aplicación h es un homeomorfismo tal que para toda $b \in B$ la restricción $h_b: E_b \rightarrow E'_b$ es un isomorfismo lineal, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Para haces vectoriales suaves tenemos que h es difeomorfismo.

Definición 2.11. Un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ es trivial si es isomorfo al haz producto.

Ejemplo 2.12. El haz normal de $S^n \in \mathbb{R}^n$ es isomorfo al haz producto $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ con la aplicación $(x, tx) \mapsto (x, t)$.

Ejemplo 2.13. El haz tangente a S^1 es isomorfo al haz trivial $S^1 \times \mathbb{R}$ con la aplicación $(e^{i\theta}, ite^{i\theta}) \mapsto (e^{i\theta}, t)$.

Lema 2.14. Una aplicación continua $h: E_1 \rightarrow E_2$ entre dos haces vectoriales $p_1: E_1 \rightarrow B$, $p_2: E_2 \rightarrow B$, es un isomorfismo si manda cada fibra $p_1^{-1}(b)$ a la fibra $p_2^{-1}(b)$ por isomorfismos lineales.

Demostración. Como h manda fibras en fibras por isomorfismos lineales, entonces tenemos que h es biyectiva, por lo cual basta ver que h^{-1} es continua. Como la continuidad es una pregunta local, podemos restringirnos a un conjunto abierto $U \subset B$ en el cual E_1 y E_2 sean triviales (es decir existan trivializaciones $h_1: p_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{F}^n$ y $h_2: p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{F}^n$). Usando estas trivializaciones podemos definir h como $h := h_1 \circ h_2^{-1}: U \times \mathbb{F}^n \rightarrow U \times \mathbb{F}^n$, como $h(x, v) = (x, g(x)(v))$, donde $g(x)$ es un elemento del grupo $GL_n(\mathbb{F})$ de transformaciones lineales invertibles de \mathbb{F}^n , por lo cual podemos ver a $g(x)$ como una matriz $n \times n$ cuyas entradas dependen continuamente de x , y entonces $g(x)$ tiene una matriz inversa $(g(x))^{-1}$ dada por, $(g(x))^{-1} = \frac{1}{\det(g(x))} \text{adj}(g(x))$, donde $\text{adj}(g(x))$ es la matriz adjunta de la matriz $g(x)$. Por lo tanto definimos $h^{-1} = (x, (g(x))^{-1}(v))$, la cual es continua. \square

2.1.1. Secciones de haces vectoriales

Definición 2.15. Una *sección* de un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ es una aplicación continua $s: B \rightarrow E$ tal que a cada $b \in B$ le asigna un vector $s(b)$ en la fibra $p^{-1}(b)$. La condición $s(b) \in p^{-1}(b)$ puede ser descrita como $p \circ s = 1$ es decir la aplicación identidad en B . La *sección cero* ó *sección nula* es la sección que a cada punto $b \in B$ le asigna el vector cero en $p^{-1}(b)$.

Lema 2.16. El haz de Möbius $p: E \rightarrow S^1$ definido en el ejemplo 2.3 no es isomorfo al haz trivial $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$.

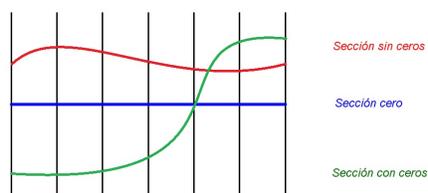


Figura 2.4: Secciones de un haz vectorial

Demostración. En efecto no existe un isomorfismo $h: E \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, puesto que

$$S^1 \times \mathbb{R} - s_0(S^1) \cong S^1 \times \mathbb{R} - S^1 \times 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}^- \sqcup S^1 \times \mathbb{R}^+$$

notemos que el espacio $S^1 \times \mathbb{R} - S^1 \times 0$ es disconexo, por otro lado $E - s_0(S^1)$ es conexo. \square

Proposición 2.17. *Un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ de rango n es trivial si y sólo si admite n secciones linealmente independientes*

Demostración. Sean $s_i: B \rightarrow E$ $i = 1, \dots, n$ las secciones linealmente independientes del haz, sea $v \in E$ tal que $p(v) = b \in B$ entonces podemos escribir a v como combinación única $v = \alpha_1 s_1(b) + \dots + \alpha_n s_n(b)$, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base para \mathbb{F}^n entonces la aplicación

$$\begin{aligned} h: E &\rightarrow B \times \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto (b, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) \end{aligned}$$

define un isomorfismo lineal en cada fibra, entonces usando el Lema 2.14 h es un isomorfismo de haces vectoriales.

Ahora sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de \mathbb{F}^n veamos que el haz producto $B \times \mathbb{F}^n$ tiene n secciones linealmente independiente, en efecto definimos las n secciones $s_i: B \rightarrow E$ $i = 1, \dots, n$ por $s_i(b) = h(b, e_i)$ las cuales son linealmente independientes en todo punto puesto que $\{e_1, \dots, e_n\}$ lo son. Si p es trivial entonces existe un isomorfismo lineal $h': B \times \mathbb{F}^n \rightarrow E$ entre el haz y el haz producto el cual manda las secciones linealmente independientes del haz producto en secciones linealmente independientes del haz trivial. \square

2.1.2. Funciones de transición

Supongamos que $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial de rango k , por definición existe una colección $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ de trivializaciones para E tal que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = B$ entonces como (U_α, h_α) es una trivialización para E , $h_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ es un homeomorfismo tal que $p_1 \circ h_\alpha^{-1} = p$ es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{h_\alpha} & p^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p \\ & U_\alpha & \end{array}$$

y para todo punto $b \in B$ tal que $b \in U_\alpha$

$$\begin{array}{ccc} \{p\} \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{h_\alpha} & p^{-1}(b) \subset p^{-1}(U_\alpha) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p \\ & \{p\} & \end{array}$$

es lineal para todo $b \in U_\alpha$.

Entonces para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$

$$h_{\alpha\beta} \cong h_\alpha^{-1}h_\beta: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

es un difeomorfismo tal que $p_1 \circ h_{\alpha\beta} = p_1$, es decir $h_{\alpha\beta}$ manda $x \times \mathbb{R}^k \mapsto x \times \mathbb{R}^k$, entonces este homeomorfismo esta dado por

$$(x, v) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^k,$$

donde $g_{\alpha\beta}(x) \in GL_k(\mathbb{R})$, ($GL_k(\mathbb{R})$ denota al grupo general lineal de matrices invertibles de $k \times k$ con coeficientes en \mathbb{R}).Entonces para un elemento $g_{\alpha\beta}(x) \in GL_k(\mathbb{R})$ la aplicación $h_{\alpha\beta}$ está dada por

$$h_{\alpha\beta}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \text{ para toda } (x, v) \in U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k$$

y esta completamente determinada por la aplicación $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_k(\mathbb{R})$.

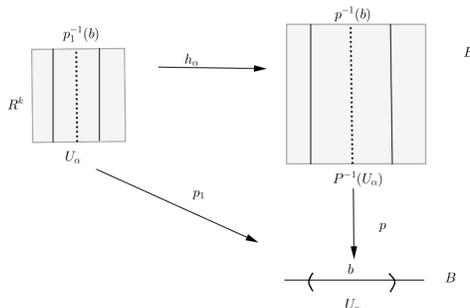


Figura 2.5: Trivialización de un haz vectorial

Entonces por lo anterior si tenemos un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ podemos obtener una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de B y una colección de funciones de transición $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_k(\mathbb{R})\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}}$.

Ahora si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ podemos afirmar que la funciones de transición satisfacen la siguiente condición:

$$g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \mathbb{I}_k$$

Llamada la condición de cociclo (Čech).

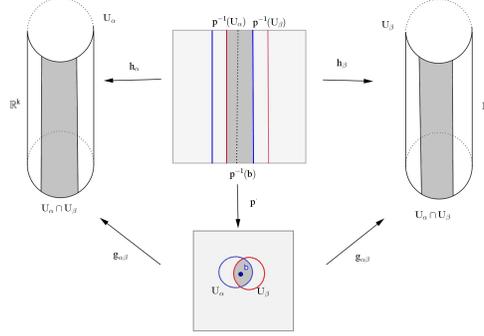


Figura 2.6: Trivializaciones

Demostración. De la afirmación.

Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ entonces $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$ por otro lado $h_\beta \circ h_\gamma^{-1}(x, v) = (x, g_{\beta\gamma}(x)v)$ y entonces

$$\begin{aligned} h_\alpha \circ h_\gamma^{-1} &= h_\alpha \circ h_\beta^{-1} \circ h_\beta \circ h_\gamma^{-1}(x, v) \\ &= h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x, g_{\beta\gamma}(x)v) \\ &= (x, g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(v)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h_\alpha \circ h_\gamma^{-1} = (x, g_{\alpha\gamma}(x)v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(v))$. \square

Además funciones de transición satisfacen las siguientes propiedades, las cuales surgen de la condición de cociclo.

1. $g_{\alpha\alpha} = \mathbb{I}_k$ puesto que $h_{\alpha\alpha} \cong h_\alpha \circ h_\alpha^{-1} = id$
2. $g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = \mathbb{I}_k$ puesto que $h_{\alpha\beta}h_{\beta\alpha} \cong h_\alpha \circ h_\beta^{-1}h_\beta \circ h_\alpha^{-1} = id$

Donde \mathbb{I}_k es el elemento identidad en $GL_k(\mathbb{R})$.

Recíprocamente dada una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_\alpha \in \mathcal{A}$ de B tal que para cada $U_\alpha, U_\beta \in \{U_\alpha\}$ existe una colección de aplicaciones

$$\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_k(\mathbb{R})\}$$

que satisfacen la propiedad de cociclo, entonces podemos reconstruir el haz vectorial como

$$\left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \times \mathbb{R}^k \right) / \sim$$

bajo las identificaciones $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ con $(x, g_{\alpha\beta}(x)v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k$, esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva por las propiedades (1) y (2), además la condición de cociclo nos garantiza que el espacio cociente $E = \left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \times \mathbb{R}^k \right) / \sim$ bajo las identificaciones es el espacio total y esta bien definido, con la aplicación cociente

$$q: U_\alpha \times \mathbb{R}^k \times \{\alpha\} \rightarrow E$$

entonces podemos definir la proyección

$$\begin{aligned} p: E &\rightarrow B \\ [x, v] &\mapsto x \end{aligned}$$

el cual es llamado el haz vectorial determinado por la familia de cociclos $\{g_{\alpha\beta}\}$.

2.2. Operaciones en haces vectoriales

Hemos visto que los haces vectoriales son estructuras que definen un espacio vectorial en cada fibra, por lo cual todas las operaciones naturales en espacios vectoriales como lo son el espacio dual, la suma directa, el producto tensorial y el producto exterior se pueden extender a haces vectoriales, en esta sección no definiremos las operaciones en espacios vectoriales, para una definición ver el apéndice ??.

2.2.1. Restricción y subhaz

Definición 2.18. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial y $A \subset B$ entonces $p|_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \rightarrow A$ es un haz vectorial sobre A y lo llamamos la *restricción* de E sobre A .

Sean $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ una colección de trivializaciones locales para $p: E \rightarrow B$, entonces podemos decir que $\{(U_\alpha \cap A, h_\alpha|_{p^{-1}(U_\alpha \cap A)})\}$ es una colección de trivializaciones para el haz $p|_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \rightarrow A$.

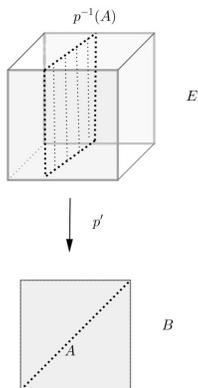


Figura 2.7: Haz restricción

Definición 2.19. Un subespacio $F \subset E$ de un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ es llamado un *subhaz* si la restricción $p_1 = p|_F: F \rightarrow B$ es un haz vectorial y para cada punto $b \in B$ $F \cap p_1^{-1}(b) \subset p^{-1}(b)$ es un subespacio vectorial de $p_1^{-1}(b)$.

2.2.2. Haz dual E^*

Recordemos que si V es un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} el espacio vectorial dual es el espacio de homeomorfismos lineales al campo, es decir $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F})$ entonces una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales $g: V \rightarrow W$ induce una aplicación dual, en la dirección “opuesta” $g^*: W^* \rightarrow V^*$ tal que, $g^*(L)v \mapsto L(g(v))$ para todo $L \in W^*$ y $v \in V$. Si $V = \mathbb{R}^k$ y $W = \mathbb{R}^n$ g esta dada por una matriz $n \times k$ y su dual por la transpuesta $k \times n$.

Ahora dado un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ induce el haz dual $p^*: E^* \rightarrow B$ donde la fibra de E^* sobre cada punto $b \in B$ es el espacio vectorial dual de la fibra de E . Si $\{g_{\alpha\beta}\}$ son las funciones de transición de $p: E \rightarrow E$ entonces el cambio entre las cartas está dado por

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

$(m, n) \mapsto (m, g_{\alpha\beta}(v))$. Así la transición dual esta dada por

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

$(m, n) \mapsto (m, (g_{\alpha\beta}^t)^{-1}(v))$. Entonces la funciones de transición para p^* están dadas por $\{(g_{\alpha\beta}^t)^{-1}\}$.

2.2.3. Suma directa (Suma de Whitney)

Ahora dados dos haces vectoriales $p_1: E_1 \rightarrow B$ y $p_2: E_2 \rightarrow B$, sobre el mismo espacio base B , nos gustaría formar un nuevo haz sobre B cuya fibra sobre cada punto en B sea la suma directa de las fibras de E_1 y E_2 sobre este punto.

Definición 2.20. Definimos la *suma directa* de $p_1: E_1 \rightarrow B$ y $p_2: E_2 \rightarrow B$ como $E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$ entonces existe una proyección $\oplus: E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$ tal que $(v_1, v_2) \mapsto p_1(v_1) = p_2(v_2)$, la fibra de esta proyección es la suma directa de las fibras de E_1 y E_2 .

Supongamos que $\{g_{\alpha\beta}^1\}$ y $\{g_{\alpha\beta}^2\}$ son las funciones de transición de E^1 y E^2 respectivamente entonces las podemos ver como matrices $g_{\alpha\beta}^1$ y $g_{\alpha\beta}^2$ en $GL_n(\mathbb{F})$ entonces las funciones de transición para $E_1 \oplus E_2$ estan dadas por

$$g_{\alpha\beta}^1 \oplus g_{\alpha\beta}^2(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}^1(x) & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta}^2(x) \end{pmatrix}$$

Definición 2.21. Dados dos haces vectoriales $p_1: E_1 \rightarrow B_1$ y $p_2: E_2 \rightarrow B_2$ definimos el *haz producto* $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ donde la fibra está dada por el producto de las fibras $p_1^{-1}(b_1) \times p_2^{-1}(b_2)$ y con trivializaciones locales $h_\alpha: p_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ y $h_\beta: p_2^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^n$ para E_1 y E_2 entonces $h_\alpha \times h_\beta$ es una trivialización local.

Nota 2.22. Si E_1 y E_2 son haces vectoriales sobre el mismo espacio base B la restricción del haz producto $E_1 \times E_2$ sobre la diagonal $\Delta = \{(b, b) \in B \times B\}$ es exactamente $E_1 \oplus E_2$. esto probaría que $E_1 \oplus E_2$ es localmente trivial.

La suma directa de haces vectoriales cumple con las siguientes propiedades:

1. $E_1 \oplus E_2 \cong E_2 \oplus E_1$
2. Si $E_1 \cong E_2$ y $F_1 \cong F_2$ entonces $E_1 \oplus F_1 \cong E_2 \oplus F_2$
3. $E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) \cong (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3$
4. $E \oplus Id \cong E$ donde Id es un haz vectorial trivial de rango cero.

Nota 2.23. La suma directa de dos haces vectoriales triviales es un haz trivial, pero, la suma directa de haces no triviales no necesariamente es un haz no trivial.

Ejemplo 2.24. Sea $p_1: E_1 \rightarrow S^n$ el haz normal, donde $E_1 = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v = tv\}$ y $p_2: E_2 \rightarrow S^n$ el haz tangente a S^n donde $E_2 = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$, notemos que si $n = 2$ no es trivial, entonces

$$E_1 \oplus E_2 = \{(x, v, tx) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$$

el cual es trivial bajo el isomorfismo $h: E_1 \oplus E_2 \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $(x, v, tx) \mapsto (x, v+tx)$.

2.2.4. Producto tensorial

Dados $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B$ haces vectoriales sobre la misma base, entonces podemos definir su *producto tensorial* $p \otimes p': E \otimes E' \rightarrow B$ tal que en fibras $(E \otimes E')_b = E_b \otimes E'_b$ para $b \in B$. Supongamos que $\{g_{\alpha\beta}\}$ y $\{g'_{\alpha\beta}\}$ son las funciones de transición de E y E' entonces las podemos ver como matrices $g_{\alpha\beta}(x) = (a_{ij})$ en $GL_m(\mathbb{F})$ y $g'_{\alpha\beta}(x) = (b_{kl})$ en $GL_n(\mathbb{F})$ por lo cual las funciones de transición de $E \otimes E'$ esta dada por $\{g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta}\}$ es decir construimos una matriz cuyas entradas son el producto de las entradas de $g_{\alpha\beta}$ por la matriz $g'_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}g'_{\alpha\beta}(x) & \cdots & a_{1n}g'_{\alpha\beta}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}g'_{\alpha\beta}(x) & \cdots & a_{nn}g'_{\alpha\beta}(x) \end{pmatrix} \in GL_{mn}(\mathbb{F})$$

El producto tensorial de haces vectoriales cumple con las siguientes propiedades:

1. $E_1 \otimes E_2 \cong E_2 \otimes E_1$
2. Si $E_1 \cong E_2$ y $F_1 \cong F_2$ entonces $E_1 \otimes F_1 \cong E_2 \otimes F_2$
3. $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \cong (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$

2.2.5. Potencia exterior

Para un haz vectorial en general $p: E \rightarrow B$ podemos formar la k -ésima potencia exterior $\Lambda^k p: \Lambda^k E \rightarrow B$ tal que en fibras $(\Lambda^k E)_b = \Lambda^k E_b$ para $b \in B$. Supongamos $\{g_{\alpha\beta}\}$ son las funciones de transición de E donde cada transformación $g_{\alpha\beta}$ la podemos ver como una matriz en $GL_n(\mathbb{F})$, entonces las funciones de transición para $\Lambda^k E$ esta dado por $\Lambda^k g_{\alpha\beta}$, es decir construimos la matriz $\Lambda^k g_{\alpha\beta}$ evaluada en cada matriz $g_{\alpha\beta}$.

Nota 2.25. Si $p: E \rightarrow B$ es de rango k , entonces las funciones de transición para el haz de líneas $\Lambda^k E$ son $\{\det g_{\alpha\beta}\}$ y es llamada la potencia exterior superior de E y se denota $\Lambda^{top} E$.

Se sigue de la definición que si $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial y $p: F \rightarrow E$ es un haz de líneas (haz vectorial de rango uno), entonces

$$\Lambda^{top}(E \oplus F) \cong \Lambda^{k+1}(E \oplus F) \cong \Lambda^k E \otimes L \cong \Lambda^{top} E \otimes F.$$

Mas generalmente si $p: E \rightarrow B$ y $p: F \rightarrow B$ son dos haces vectoriales entonces

$$\Lambda^{top}(E \oplus F) = (\Lambda^{top} E) \otimes (\Lambda^{top} F) \quad \text{y} \quad \Lambda^k(E \oplus F) = \bigoplus_{i+j=k} (\Lambda^i E) \otimes (\Lambda^j F).$$

2.2.6. Haz de morfismos

Dados dos haces vectoriales $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B$ de rango k y n respectivamente podemos construir un nuevo haz vectorial $\omega: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(E, E') \rightarrow B$ llamado el *haz de morfismos*. Dado $b \in B$ la fibra $\omega^{-1}(b)$ es el espacio vectorial de dimension kn de todas las transformaciones lineales de la fibra $p^{-1}(b)$ a la fibra $(p')^{-1}(b)$, por lo tanto las fibras de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(E, E')$ se pueden identificar con el espacio vectorial de matrices $n \times k$.

Supongamos que $\{g_{\alpha\beta}\}$ y $\{g'_{\alpha\beta}\}$ son las funciones de transición de E y E' entonces las podemos ver como matrices $g_{\alpha\beta}(x)$ en $GL_n(\mathbb{F})$ y $g'_{\alpha\beta}(x)$ en $GL_{n'}(\mathbb{F})$ por lo cual las funciones de transición para $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(E, E')$ están dada por

$$\text{Hom}((g_{\alpha\beta}(x))^{-1}, g'_{\alpha\beta}(x)) := (\text{adj } g_{\alpha\beta}(x))^{-1} \otimes g'_{\alpha\beta}(x).$$

Un morfismo de haces suave $h: E \rightarrow E'$ es equivalente a una sección suave S_h de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(E, E')$ la cual esta dada por $S_h(b) = h_b$ donde h_b es el elemento en la fibra de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(E, E')$ sobre b que corresponde a la restricción $h_p: p^{-1}(b) \rightarrow (p')^{-1}(b)$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(E, E') \\ \begin{array}{c} \uparrow s_h \\ \downarrow \omega \\ B \end{array} \end{array}$$

2.2.7. Producto interno

Definición 2.26. Un producto interno en un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$ que restringido a cada fibra nos da una forma bilineal simétrica y definida positiva.

Proposición 2.27. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial, el producto interno existe si B es Hausdorff compacto (ó paracompacto)

Nota 2.28. X es paracompacto si admite una partición de la unidad, es decir para cada cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ existe una colección de funciones continuas $\mu_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ tal que

- para toda μ_α existe $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$ tal que el soporte de μ_α esta contenido U_α . El soporte de una aplicación es el conjunto de puntos donde la aplicación es distinta de cero.
- para todo $x \in X$ existe una vecindad de x tal que solo una cantidad finita de μ_α son distintos de cero y $\sum \mu_\alpha(x) = 1$.

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta trivializada de B , sea $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ la trivialización local para todo $\alpha \in A$ usando el producto escalar en \mathbb{R}^n , definimos un producto interno en cada fibra

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{U_\alpha}: (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \times (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, u), (x, v)) &\mapsto \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

usando las trivializaciones h_α y el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_\alpha}$ definimos un producto en cada fibra. Sean $U', V' \in p^{-1} \subset p^{-1}(U - \alpha)$ definimos

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha: p^{-1}(x) \times p^{-1}(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u', v') &\mapsto \langle h_\alpha(u'), h_\alpha(v') \rangle_{U_\alpha} \end{aligned}$$

Como B es paracompacto existe una partición de la unidad $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}$, es decir $\mu_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ con $\sum \mu_\alpha(x) = 1$ con soporte de μ_α contenido en algún $U_{\beta(\alpha)}$ entonces definimos el producto interno deseado $\langle v_1, v_2 \rangle = \sum \mu_\alpha(x) \langle v_1, v_2 \rangle_\alpha$ con $v_1, v_2 \in p^{-1}(x) \subset E$. \square

Proposición 2.29. Si $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial con B paracompacto y $E_0 \subset E$ es un subhaz vectorial, entonces existe un subhaz vectorial $E_0^\perp \subset E$ tal que $E_0 \oplus E_0^\perp \cong E$.

Demostración. Escojamos un producto interno en E , sea E_0^\perp el subespacio de E en el que cada fibra consiste de todos los vectores ortogonales a vectores en E_0 , afirmamos que la proyección natural $E_0^\perp \rightarrow B$ es un haz vectorial ya que de ser así entonces $E_0 \oplus E_0^\perp$ es isomorfo a E via la siguiente aplicación $(v, m) \mapsto v + m$. Entonces solo basta ver que $E_0^\perp \rightarrow B$ es un haz vectorial, para ver esto supongamos que $E = B \times \mathbb{R}^n$ y entonces E_0 tiene dimensión m entonces existen m secciones linealmente independientes con $m < n$ y las denotamos como $\{s_1, \dots, s_m\}$, completamos las s_{m+1}, \dots, s_n secciones faltantes con la fibra $p^{-1}(b)$ entonces a las s_1, \dots, s_n secciones les aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener s'_1, \dots, s'_n secciones linealmente independientes ortogonales, entonces podemos escribir a $v \in p^{-1}(b) \subset E_0^\perp$ como combinación lineal de s'_1, \dots, s'_n es decir $v = \sum \alpha_i s'_i$ entonces podemos definir trivializaciones locales

$$\begin{aligned} h: p^{-1}(U) &\rightarrow u \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (p(v), \sum \alpha_i e_i) \end{aligned}$$

con e_i la i -ésima base estándar de \mathbb{R}^n □

Proposición 2.30. *Para cada haz vectorial $p: E \rightarrow B$ con B hausdorff compacto, existe un haz $p': E' \rightarrow B$ tal que $E \oplus E'$ es el haz trivial.*

Demostración. Por la demostración anterior es suficiente mostrar que E es isomorfo a un subhaz del producto $B \times \mathbb{R}^N$ para algún N .

Cada punto $x \in B$ tiene una vecindad $U_x \subset B$ en el cual E es trivial, por el Lema de Urysohn tenemos que existe una aplicación $\varphi_x: B \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi \equiv 0$ fuera de U_x y distinto de 0 en x . Dejando variar $x \in B$ tenemos que el conjunto $\{\varphi_x^{-1}([0, 1])\}_{x \in B}$ forma una cubierta abierta de B , como B es compacto entonces existe una subcubierta finita que cubre B entonces podemos enumerar U_i y φ_i para $i = 1, \dots, m$. Definamos $g_i: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $g_i(v) = \varphi_i(p(v))[\pi_i \circ h_i(v)]$ donde $h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ y $\pi_i: U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección a \mathbb{R}^n , entonces g_i es una inyección lineal en cada fibra bajo $\varphi_i^{-1}([0, 1])$. Así consideremos la aplicación $g: E \rightarrow \mathbb{R}^N$ dado por $v \mapsto (g_1(v), \dots, g_m(v))$ donde $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (m -copias) entonces g es una inyección lineal en cada fibra. Sea $f: E \rightarrow B \times \mathbb{R}^N$ definido por $v \mapsto (p(v), g(v))$, notemos que la imagen es un subhaz del producto $B \times \mathbb{R}^N$, la proyección de \mathbb{R}^N sobre el i -ésimo factor de \mathbb{R}^n da la segunda coordenada de una trivialización bajo $\varphi_i^{-1}([0, 1])$ por lo tanto E es isomorfo a un subhaz de $B \times \mathbb{R}^N$ entonces por la proposición anterior existe un subhaz E' con $E \oplus E' \cong B \times \mathbb{R}^N$ □

2.3. Clasificación de haces vectoriales

Usualmente un problema complicado es el de clasificar diferentes haces vectoriales sobre un mismo espacio base, el objetivo de esta sección es relacionar este problema con clases de homotopía de ciertas aplicaciones a las variedades de Grassmann, así como otros conceptos de topología algebraica.

2.3.1. El haz inducido (pull-back)

A partir de un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ de rango n y una aplicación continua $f: A \rightarrow B$, se puede “inducir un nuevo haz vectorial colocando en cada $x \in A$ la fibra $E_{f(x)}$.”

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Proposición 2.31. *Dada una aplicación continua $f: A \rightarrow B$ y un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ existe un haz vectorial $p': E' \rightarrow A$ con una aplicación $f': E' \rightarrow E$ tal que $p \circ f' = f \circ p'$. Además E' tiene la siguiente propiedad universal. Si $g: E'' \rightarrow B$ es un haz vectorial tal que $p \circ \tilde{f} = f \circ g$ entonces existe un único morfismo de haces $h: E'' \rightarrow E'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc} E'' & & \tilde{f} & & E \\ & \searrow h & & \searrow f' & \\ & & E' & \xrightarrow{f'} & E \\ & \searrow g & \downarrow p' & & \downarrow p \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Mas aún, $p': E' \rightarrow A$ es único respecto a esta propiedad

Demostración. Consideremos un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ y definamos el siguiente conjunto $E' = \{(a, v) \in A \times E | f(a) = p(v)\} \subset A \times E$ y la proyección $p': E' \rightarrow A$ definida como $p'(a, v) = a$. Sea $a \in A$ notemos que la fibra esta dada por el siguiente conjunto $(p')^{-1}(a) = \{(a, v) \in A \times E | v \in p^{-1}(f(a))\}$. Entonces existe una aplicación natural $f': E' \rightarrow E$ definida como $f'(a, v) = v$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ahora veamos que el nuevo haz es localmente trivial, dado que $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial entonces para cada $b \in B$ existe una vecindad U_b y un homeomorfismo $\phi_{U_b}: U_b \times \mathbb{F}^n \rightarrow p^{-1}(U_b)$, sea $p': E \rightarrow A$ tomemos $a \in A$ y $V_a = f^{-1}(U_{f(a)})$ abierto en A entonces construimos

$$\phi_{V_a}: (p')^{-1}(V_a) \rightarrow V_a \times \mathbb{F}^n$$

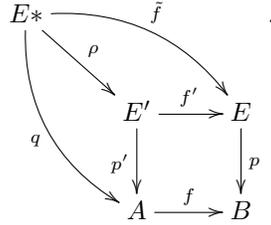
donde la fibra esta dada por $(p')^{-1}(V_a) = \{(a', v) \in V_a \times E | f(a) = p(v)\}$ usamos la aplicación natural $f': E' \rightarrow E$ entonces $f'(a', v) = v \in p^{-1}(U_{f(a)})$, ahora usando el homeomorfismo $\phi_{U_{f(a)}}^{-1}: p^{-1}(U_{f(a)}) \rightarrow U_{f(a)} \times \mathbb{F}^n$ tenemos que $\phi^{-1}(v) = (f(a), v')$ para algún $v' \in \mathbb{F}^n$ por lo tanto definimos

$$\phi_{V_a}(a', v) = (a', pr_2 \circ \phi_{U_{f(a)}} \circ f'(a', v))$$

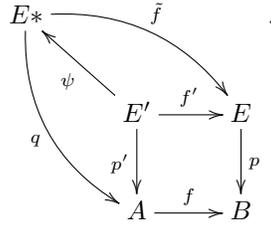
donde pr_2 es la proyección sobre la segunda coordenada y entonces se cumple que $pr_1 \circ \phi_{U_b}(a', v) = pr_1(a', v) = a' = p'(a', v)$, por lo cual p' es localmente trivial.

Definamos el morfismo de haces $h: E'' \rightarrow E'$ como $h(e'') = (g(e''), \tilde{f}(e''))$ y veamos que h manda la fibra $g^{-1}(a)$ a la fibra $p'^{-1}(a)$ para toda $a \in A$. En efecto si $e'' \in g^{-1}(a)$ entonces $h(e'') = (g(e''), \tilde{f}(e'')) = (a, \tilde{f}(e''))$ y por definición $\tilde{f}(e'') \subset p^{-1}(f(a))$, lo cual implica que $h(e'') \in p'^{-1}(a)$. Notemos que h es único por construcción.

Mostremos que $p': E' \rightarrow A$ es único respecto a esta propiedad, así que supongamos que existe otro haz vectorial $q: E^* \rightarrow A$ que cumple con la propiedad universal, entonces por la propiedad universal de E' existe un único morfismo de haces $\rho: E^* \rightarrow E'$ que hace conmutar el siguiente diagrama:



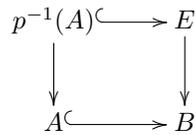
Por otro lado por la propiedad universal de E^* existe un único morfismo de haces $\psi: E' \rightarrow E^*$ que hace conmutar el siguiente diagrama:



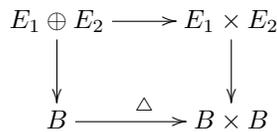
Entonces por la unicidad de ρ y de ψ tenemos que $\rho \circ \psi = id_{E'}$ y $\psi \circ \rho = id_{E^*}$ lo cual implica que $\rho: E^* \rightarrow E'$ es un isomorfismo de haces. \square

Definición 2.32. El haz vectorial $p': E' \rightarrow A$ definido arriba se le conoce como haz inducido (pull-back) por la aplicación f , el cual también se denota como $E' = f^*E$.

Ejemplo 2.33. Sea $p: E \rightarrow B$ y $A \subset B$ un subespacio, entonces la restricción $p|_{p^{-1}(A)}: p^{-1}(A) \rightarrow A$ es un haz vectorial y puede ser visto como el inducido por la inclusión $i: A \hookrightarrow B$



Ejemplo 2.34. Sean $p_1: E_1 \rightarrow B$, $p_2: E_2 \rightarrow B$ y $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B \times B$ entonces la suma directa es el inducido del producto restringido bajo la diagonal.



Aquí algunas propiedades importantes del haz inducido:

- $(fg)^*(E) \approx g^*(f^*(E))$.
- $\mathbb{I}^*(E) \approx E$ donde $\mathbb{I}^*(E)$ es el inducido por la aplicación identidad .
- $f^*(E_1 \oplus E_2) \approx f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$.
- $f^*(E_1 \otimes E_2) \approx f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$

Proposición 2.35. Sea $p: E \rightarrow X \times I$ un haz vectorial, las restricciones sobre $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ son isomorfos si X es paracompacto.

Demostración. Para demostrar esta proposición necesitamos dos hechos.

1. Sea $p: E \rightarrow X \times I$ un haz vectorial veamos que este es trivial si sus restricciones sobre $X \times [a, c]$ y $X \times [c, b]$ son triviales con $c \in (a, b)$.

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(X \times [a, c]) & \xrightarrow{h_1} & X \times [a, c] \times \mathbb{R}^n \\
 \searrow p|_{X \times [a, c]} & & \swarrow pr \\
 & X \times [a, c] & \\
 \\
 p^{-1}(X \times [c, b]) & \xrightarrow{h_2} & X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n \\
 \searrow p|_{X \times [c, b]} & & \swarrow pr \\
 & X \times [c, b] &
 \end{array}$$

En un principio h_1 y h_2 no tienen porque coincidir en $p^{-1}(X \times \{c\})$, pero podemos hacer que esto suceda si componemos h_2 con el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & X \times [c, b] \times \mathbb{R}^n \\
 X \times \{t\} \times \mathbb{R}^n & \mapsto & X \times \{c\} \times \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Entonces h_1 y h_2 coinciden en $p^{-1}(X \times [a, c]) \cap p^{-1}(X \times [c, b])$ y así tenemos que $h_1 h_2^{-1}: X \times \{c\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow X \times \{c\} \times \mathbb{R}^n$ nos definen una trivialización local para p .

2. Sea un haz vectorial $p: E \rightarrow X \times I$ existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X tal que cada restricción $p^{-1}(U_\alpha \times I) \rightarrow U_\alpha \times I$ es trivial, esto es puesto que si tomamos $x \in X$ podemos escoger un número finito de vecindades U_{x_1}, \dots, U_{x_k} y una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de $[0, 1]$ tal que el haz es trivial sobre $U_{x_i} \times [t_{i-1}, t_i]$ usando la compacidad de $[0, 1]$ y el haz trivial sobre $U_\alpha \times I$ donde $U_\alpha = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$

Ahora demostraremos la proposición para X compacto y Hausdorff, por 2) podemos tomar $\{U_\alpha\}$ cubierta abierta de X trivializadora, por la compacidad de X existe un número finito de U_α 's que cubren a X digamos $\{U_i\}$ para $i = 1, \dots, m$, además existe una correspondiente partición de la unidad por funciones φ_i con soporte $\varphi_i \subset U_i$ para $i > 0$. Sea $\psi_i = \varphi_1 + \dots + \varphi_i$ en particular $\psi_0 = 0$ y $\psi_m = 1$, sea X_i la gráfica de ψ_i es decir $(x, \psi_i(x)) \in X \times I$ y sea $p_i: E_i \rightarrow X_i$ el haz restricción de $E|_{X_i}$: Como E es trivial sobre $U_i \times I$ la proyección natural $X_i \rightarrow X_{i-1}$ induce un isomorfismo $h_i: E_i \rightarrow E_{i-1}$

$$\begin{array}{ccc}
 E_i & \longrightarrow & X_i \times \mathbb{R}^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_{i-1} & \longrightarrow & X_{i-1} \times \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

estas dos mitades de TS^2 con $D^2 \pm \times \mathbb{R}^2$. Podemos reconstruir TS^2 como el cociente de la unión disjunta de $D_+^2 \times \mathbb{R}^2$ y $D_-^2 \times \mathbb{R}^2$ mediante la identificación a lo largo de $S^1 \times \mathbb{R}^2$ usando la función de pegado f , donde f rota $(v_+, w_+) \mapsto (v_-, w_-)$

Una propiedad básica en la construcción de haces mediante funciones de pegado esta dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.40. *Sea $p: E_f \rightarrow S^k$ un haz vectorial construido mediante una función de pegado $f: S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ entonces $E_f \approx E_g$ si f y g son homotópicas.*

Demostración. Sea $F: S^{k-1} \times I \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ una homotopía entre f y g . Notemos que $S^k \times I = (D_+ \sqcup D_-) \times I = (D_+ \times I) \sqcup (D_- \times I)$ entonces construimos el haz inducido con la función F , $E_F \rightarrow S^k \times I$ donde

$$E_F = \{D_+ \times I \times \mathbb{R}^n \sqcup D_- \times I \times \mathbb{R}^n / (x, t, v) \sim (x, t, F(x, t)(v))\}$$

cuyas restricciones

$$\begin{aligned} E_F|_{S^k \times \{0\}} &\rightarrow S^k \times \{0\} \equiv E_f \\ E_F|_{S^k \times \{1\}} &\rightarrow S^k \times \{1\} \equiv E_g \end{aligned}$$

entonces por la Proposición 2.35 $E_f \approx E_g$. \square

Ahora si denotamos $[X, Y]$ como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $f: X \rightarrow Y$ entonces la asociación $f \mapsto E_f$ que manda una función de pegado a un haz vectorial, define una aplicación $\Phi: [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{R})] \rightarrow Vect^n(S^k)$. Existe una aplicación análoga a Φ para haces vectoriales complejos. Probaremos el siguiente resultado sobre la forma compleja de Φ .

Proposición 2.41. *La aplicación $\Phi: [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})] \rightarrow Vect^n(S^k)$ es una biyección.*

Demostración. Construiremos la inversa ψ de Φ , tomemos $p: E \rightarrow S^k$ un haz vectorial y sean E_+, E_- las restricciones sobre D_+^k y D_-^k respectivamente, notemos que como estos son contraíbles, entonces los haces son triviales. Sean $h_{\pm}: E_{\pm} \rightarrow D_{\pm}^k \times GL_n(\mathbb{C}^n)$ trivializaciones entonces $h_+ h_-^{-1}: S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ cuya clase de homotopía es $\psi(E) \in [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})]$. Veamos que $\psi(E)$ esta bien definida, tomemos $h_{1\pm}$ y $h_{2\pm}$ distintas, entonces $h_{1\pm}$ y $h_{2\pm}$ difieren por una aplicación $g: D^k \pm \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h_1^{-1}} & E|_{S^{k-1}} & \xrightarrow{h_1^+} & S^{k-1} \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow f_1 \\ S^{k-1} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h_2^{-1}} & E|_{S^{k-1}} & \xrightarrow{h_2^+} & S^{k-1} \times \mathbb{C}^n \end{array}$$

donde h_1^{-1} manda $(x, v) \mapsto (x, f_1(x)(v))$ y g manda $(x, v) \mapsto (x, g(x)(v))$, $h_2^{-1} h_2^+$ manda $(x, v) \mapsto (x, f_2(x)(v))$ por lo tanto $f_2(x) = g(x) f_1(x)$. Sea $H: D \pm \times I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ donde $H(x, 0) = g$ y $H(x, 1) = Id$ y definimos

$$\hat{H}: S^{k-1} \times I \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{H}(x, t) &= H(x, t) f_1(x) \\ \hat{H}(x, 0) &= H(x, 0) f_1(x) = g(x) f_1(x) = f_2(x) \\ \hat{H}(x, 1) &= H(x, 1) f_1(x) = Id f_1(x) = f_1(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto f_1 y f_2 están en la misma clase de homotopía. \square

Ejemplo 2.42. Todo haz vectorial complejo sobre S^1 es trivial, ya que por la proposición esto equivale a decir que $[S^0, GL_n(\mathbb{C})]$ tiene un solo elemento.

2.3.3. Variedades de Grassmann y haces universales

Las variedades de Grassmann que ahora introduciremos, permiten clasificar haces. Estos espacios topológicos tienen estructura de un complejo CW la cual presentaremos en la siguiente subsección, así como también tienen estructura de variedad diferenciable, al igual que las variedades de Stiefel la cual también definiremos. Con las variedades de Grassmann como espacio base construiremos haces vectoriales para cada número natural k los cuales llamaremos k -haces universales, con la propiedad de que cada k -haz se puede expresar como el inducido por el haz universal a través de una aplicación continua adecuada.

Definición 2.43. Definimos la variedad de Stiefel de k -marcos ortonormales en \mathbb{F} como $V_k(\mathbb{F}) = \{(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{F} \times \dots \times \mathbb{F} \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathbb{F}^n y δ_{ij} la delta de Kronecker

Definición 2.44. Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} definimos la variedad de Grassmann como $G_k(V) = \{W \subset V \mid W \text{ es el subespacio lineal y } \dim W = k\}$. Demos a $G_k(V)$ la topología cociente bajo la proyección $V_k(\mathbb{F}^k) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^k)$.

Lema 2.45. La variedad Grassmanniana $G_n(\mathbb{F}^{n+k})$ es una variedad topológica compacta de dimensión nk .

Demostración. Ver [16, Lema 5.1] □

Definición 2.46. Definimos el espacio $\gamma^k(\mathbb{F}^n) = \{(\ell, v) \in G_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in \ell\}$.

Lema 2.47. La proyección $p: \gamma^k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$ dada por $p(\ell, v) = \ell$, es un haz vectorial para n finita o infinita.

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} V_k(\mathbb{F}^n) & \xrightarrow{f} & \gamma^k(\mathbb{F}^n) \\ & \searrow p' & \swarrow p' \\ & G_k(\mathbb{F}^n) & \end{array}$$

Supongamos n finita, sea $\ell \in G_k(\mathbb{F}^n)$ existe una proyección ortogonal $\pi_\ell: \mathbb{F}^n \rightarrow \ell$, sea $U_\ell = \{\ell' \in G_k(\mathbb{F}^n) \mid \dim(\pi_\ell(\ell')) = k\}$ en particular $\ell \in U_\ell$. Queremos ver que U_ℓ es abierto en $G_k(\mathbb{F}^n)$ y que la aplicación $h: p^{-1}(U_\ell) \rightarrow U_\ell \times \ell$ definida por $h(\ell', v) = (\ell', \pi_\ell(v))$ es una trivialización local. Notemos que $p^{-1}(U_\ell)$ consiste de todos los marcos ortonormales v_1, \dots, v_k tal que $\pi_\ell(v_1), \dots, \pi_\ell(v_k)$ sean linealmente independientes. Sea A la matriz de π_ℓ con respecto a la base estándar en \mathbb{F}^n y una base fija ℓ , la condición sobre v_1, \dots, v_k es equivalente a tener $\det(A) \neq 0$ esto nos da una aplicación $\varphi: V_k(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $U_\ell = \varphi^{-1}(\mathbb{F} \setminus \{0\})$ el cual es abierto. Sea $h: p^{-1}(U_\ell) \rightarrow U_\ell \times \ell$ veamos que h y h^{-1} son continuas, puesto que $h(\ell', v) = (\ell', \pi_\ell(v))$ con inversa $h^{-1}(\ell', w) = (\ell', (\pi_\ell|_\ell)^{-1}(w))$ son continuas ya que π_ℓ es continua y un isomorfismo local □

Nota 2.48. El haz vectorial $p: \gamma^k(\mathbb{F}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^n)$ se conoce como *haz vectorial universal*.

Denotemos $G_n = G_n(\mathbb{F}^\infty)$, $\gamma^n = \gamma^n(\mathbb{F}^\infty)$ y $[X, Y]$ las clases de homotopía de aplicaciones que van de X a Y entonces tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.49. *Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial de rango n entonces existe un isomorfismo $E \cong f^*(\gamma^n)$ para alguna $f: X \rightarrow G_n$ si y solo si existe $g: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ lineal e inyectiva en cada fibra.*

Demostración. Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial y sea $f: X \rightarrow G_n$ una aplicación, consideremos un isomorfismo $\varphi: E \rightarrow f^*(\gamma^n)$ entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\varphi} & f^*(\gamma^n) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \gamma^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^\infty \\ & \searrow p & \downarrow & & \downarrow p' & & \\ & & X & \xrightarrow{f} & G_n & & \end{array}$$

donde $\pi(\ell, v) = v$ entonces podemos definir $g = \pi \circ \tilde{f} \circ \varphi$ lineal e inyectiva en cada fibra. Ahora sea $g: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ lineal e inyectiva en cada fibra, $p: E \rightarrow X$ y alguna aplicación $f: X \rightarrow G_n$ definida por $x \mapsto g \circ p^{-1}(x)$, puesto que $p^{-1}(x)$ es un subespacio lineal de dimensión n y g inyectiva en cada fibra entonces $g(p^{-1}(x)) \subset \mathbb{F}^\infty$ es un subespacio de dimensión n . Sea $p': \gamma^n \rightarrow G_n$ dada por $(\ell, v) \mapsto \ell$ y consideremos el haz inducido por f el cual denotamos como $p: f^*(\gamma^n) \rightarrow X$ dado por $(w, (\ell, v)) \mapsto w$, donde $f^*(E) = \{(w, (\ell, v)) \in X \times \gamma^n \mid \pi_2(\ell, v) = f(w)\}$. Entonces definimos un isomorfismo $\varphi: E \rightarrow f^*(\gamma^n)$ dado por $e \mapsto (p(e), (f \circ g(e)))$. \square

Proposición 2.50. *Sea X paracompacto entonces la aplicación $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}^n(X)$ dada por $[f] \mapsto f^*(\gamma^n)$ es una biyección.*

Demostración. Veamos que es sobreyectiva, construyamos una aplicación $E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$, sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial de rango n como X es paracompacto existe una partición de la unidad ψ_α para una cubierta abierta trivializadora $\{U_\alpha\}$ de X y $\{\psi_\alpha\}$ con soporte en U_α . Sea la trivialización $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ definimos $g_t: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{F}^n$ como la composición $\pi \circ h_\alpha = g_\alpha$ donde π es la proyección $\pi: U_\alpha \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$. Sea

$$\begin{aligned} (\psi \circ p)g_\alpha: E &\rightarrow \mathbb{F} \\ v &\mapsto \psi_\alpha(p(v))g_\alpha(v) \end{aligned}$$

$(\psi_\alpha \circ p)g_\alpha$ es cero fuera de $p^{-1}(U_\alpha)$ y cerca de un punto x existe un número finito de $\psi_\alpha \neq 0$. Entonces decimos que las $(\psi_\alpha \circ p)g_\alpha$ son las coordenadas de la función $E \rightarrow \mathbb{F}^\infty = \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \dots$ esta es inyectiva en cada fibra puesto que g_α es inyectiva, por lo tanto E es sobre. Veamos ahora la inyectividad, sean $E \cong f_0^*(\gamma^n)$ y $E \cong f_1^*(\gamma^n)$ entonces $f_0, f_1: X \rightarrow G_n$ inducen aplicaciones $g_0, g_1: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ inyectivas en cada fibra definimos la homotopía entre g_0 y g_1 como $g_t = (1-t)g_0 + tg_1$ y definimos la homotopía entre f_0 y f_1 como $f_t(x) = g_t(p^{-1}(x))$ y puesto que g_0 y g_1 son inyectivas en cada fibra entonces $f_t(x)$ nos da un subespacio de dimensión n en \mathbb{F}^∞

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\quad} & f^*(\gamma^n) & \xrightarrow{\quad} & \gamma^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{F}^\infty \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & X & \xrightarrow{\quad} & G_n & & \end{array}$$

\square

Éste teorema nos permite clasificar haces vectoriales sobre una base fija, por lo cual al espacio G_n se le conoce como espacio clasificante de haces vectoriales de rango n y a la aplicación $f: X \rightarrow G_n$ se le conoce como aplicación clasificante.

3

Grupos de homología y cohomología singular

La teoría de homología empieza como una rama de la topología, siendo Poincaré el primero en dar una definición de este concepto en su “Analysis Situs” en 1895. Esencialmente se tiene un espacio topológico complicado y se desea obtener información relacionada al proceso de contar agujeros de cualquier dimensión, obteniendo ciertos invariantes lineales. Así pues se puede pensar en la homología como en una construcción de invariantes lineales asociados a una situación no lineal.

Por otro lado la cohomología para espacios topológicos no fue reconocida en el desarrollo de la topología algebraica sino hasta 1930 cuando Lefschetz formulo los teoremas de dualidad para variedades. En esta sección veremos definiciones importantes y desarrollaremos las herramientas necesarias para enunciar el teorema de dualidad de Poincaré el cual nos será de utilidad en el desarrollo de este trabajo. Para ver más resultados importantes sobre homología y/o cohomología ver [7],[10].

3.1. Homología y cohomología singular

3.1.1. Definiciones básicas

Iniciemos con algunas definiciones básicas importantes.

Definición 3.1. El n -simplejo estándar es el conjunto convexo $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que consiste de todos las $(n+1)$ -adas, $(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$t_i \geq 0, \quad t_0 + \dots + t_n = 1$$

Sea X un espacio topológico un n -simplejo singular en X es una aplicación continua $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$.

Ahora si $\phi_i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ $0 \leq i \leq n$ definido como

$$(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

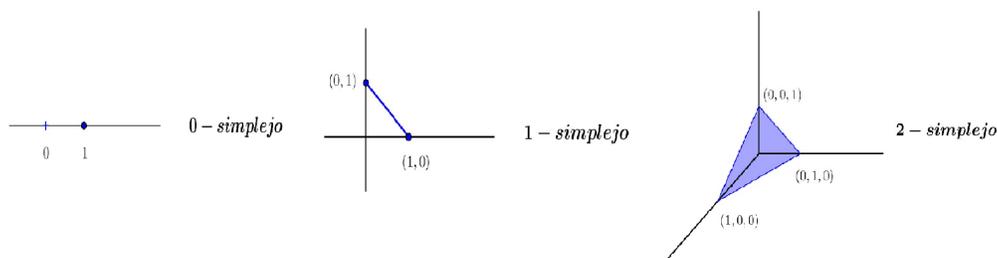
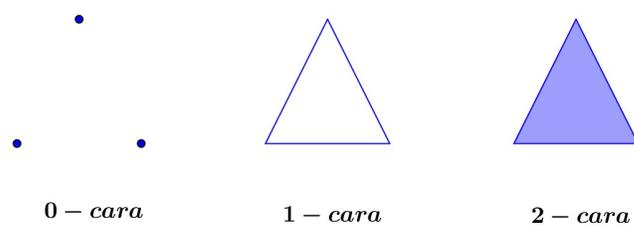


Figura 3.1: Simplejos de dimensión 0,1 y 2 respectivamente

ϕ_i se llama i -ésimo operador cara. Para un n -simplejo singular σ arbitrario en X definimos la i -ésima cara del simplejo σ como $\sigma \circ \phi_i$.

Figura 3.2: i -ésima cara de dimensión 0,1 y 2

Definición 3.2. Sea Λ un anillo conmutativo, $n \geq 0$ definimos el grupo de n -cadenas singulares como el Λ -módulo libre con generadores los n -simplejos singulares en X y los denotamos por $C_n(X; \Lambda)$, definimos también para $n > 0$ el *operador frontera* $\partial: C_n(X; \Lambda) \rightarrow C_{n-1}(X; \Lambda)$ definido como

$$\partial(\sigma) = [\sigma \circ \phi_0] - [\sigma \circ \phi_1] + \cdots + (-1)^n [\sigma \circ \phi_n]$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_n(X; \Lambda) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X; \Lambda) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(X; \Lambda)$$

Teorema 3.3. *El operador frontera cumple $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$*

Demostración. El operador frontera es un operador lineal, sea $r = 0$ entonces $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$ dado que ∂_0 es el operador cero. Asumamos pues que $n > 0$ y tomemos σ un n -simplejo singular

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = \partial_n \left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [\sigma \circ \phi_i] \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (\partial_n [\sigma \circ \phi_i]) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j [\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j] \right) \\
&\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} [\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j] = \sum_{j<i}^{n+1} (-1)^{i+j} [\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j] + \sum_{i \leq j}^n (-1)^{i+j} [\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j] \\
&= \sum_{i'<j}^n (-1)(-1)^{i'+j'+1} [\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j] - \sum_{i \neq j}^n (-1)^{i+j} [\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j] = 0
\end{aligned}$$

con $i' = j$, $j' = i - 1$ □

Una n -cadena γ tal que $\partial(\gamma) = 0$ la llamamos n -ciclo, denotamos $Z_n(X; \Lambda)$ al kernel de $\partial: C_n(X, \Lambda) \rightarrow C_{n-1}(X; \Lambda)$ es decir el Λ -submódulo de todos los n -ciclos. Si existe $\gamma' \in C_{n+1}(X)$ tal que $\partial(\gamma') = \gamma$ decimos que γ es una n -frontera, y denotamos por $B_n(X; \Lambda)$ a la imagen de $\delta: C_{n+1}(X; \Lambda) \rightarrow C_n(X; \Lambda)$ esto es el Λ -submódulo de todas las n -fronteras.

Definición 3.4. Definimos el n -ésimo grupo de homología

$$H_n(X; \Lambda) = \frac{Z_n(X; \Lambda)}{B_n(X; \Lambda)}$$

Definición 3.5. Dada una sucesión

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & C_n(X, \Lambda) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, \Lambda) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-2}(X, \Lambda) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \Lambda & & \Lambda & & \Lambda & &
\end{array}$$

Definimos el grupo de cocadenas como el módulo dual $\text{Hom}_\Lambda(C_n(X, \Lambda), \Lambda)$ a los elementos del grupo les llamamos cocadenas, al valor de una cocadena c en γ lo denotamos por $\langle c, \gamma \rangle = c(\gamma)$ y tenemos las siguientes identidades:

$$\langle c, z_1 + z_2 \rangle = \langle c, z_1 \rangle + \langle c, z_2 \rangle$$

$$\langle c_1 + c_2, z \rangle = \langle c_1, z \rangle + \langle c_2, z \rangle$$

$$\langle c, vz \rangle = v \langle c, z \rangle = \langle vc, z \rangle$$

$v \in \Lambda$ entonces \langle, \rangle es un par bilinear. Denotamos al grupo de cocadenas como $C^n(X; \Lambda)$.

Definición 3.6. Definimos el operador cofrontera

$$\begin{aligned}
\delta: C^n(X, \Lambda) &\rightarrow C^{n+1}(X, \Lambda) \\
c &\mapsto \delta c = c \circ \partial
\end{aligned}$$

tal que $\langle \delta c, a \rangle + (-1)^n \langle c, \delta a \rangle = 0$ con $a \in C_n(X, \Lambda)$.

Entonces tenemos una sucesión

$$C^0(X, \Lambda) \xrightarrow{\delta} C^1(X, \Lambda) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^n(X, \Lambda) \xrightarrow{\delta}$$

Teorema 3.7. $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$

Demostración. Tenemos que $\delta^n \circ \delta^{n-1}(c) = \delta^n(c \circ \partial_n) = c \circ \partial_{n+1} \circ \partial_n$ por lo tanto $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ \square

Diremos que $c \in C^n(X, \Lambda)$ es un n -cociclo si $\delta(c) = 0$ y un n -cofrontera si $c \in \text{im}(\delta^{n-1})$. Denotamos como $Z^n(X, \Lambda) = \ker \delta: C^n(X, \Lambda) \rightarrow C^{n+1}(X, \Lambda)$ y a $B^n(X, \Lambda) = \text{im}: C^{n-1}(X, \Lambda) \rightarrow C^n(X, \Lambda)$.

Definición 3.8. Definimos el n -ésimo grupo de cohomología $H^n(X, \Lambda) = \frac{Z^n(X, \Lambda)}{B^n(X, \Lambda)}$

Los grupos de cohomología singular cumplen la propiedad de contrafunctorialidad, esto es que si tenemos $f: X \rightarrow Y$ una aplicación entonces esta induce una aplicación $H^q(f): H^q(Y) \rightarrow H^q(X)$ tal que $H^q(fg) = H^q(g)H^q(f)$. Esto hace a H^q un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos a la categoría de Λ -módulos.

3.1.2. Relación entre homología y cohomología

Cabe mencionar que si tenemos X espacio topológico y $A \subset X$, para toda $n \geq 0$ se puede introducir $C_n(A, \Lambda)$ el cual es un submódulo de $C_n(X, \Lambda)$ que consiste en las combinaciones lineales de n -simplejos singulares con imagen en A y denotamos el complejo de cadenas de la pareja $C_n(X, A) = \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$.

Entonces tenemos una sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_n(X, A; \Lambda) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, A; \Lambda) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \Lambda & & \end{array}$$

Y podemos definir $C^n(X, A; \Lambda) = \text{Hom}_\Lambda(C_n(X, A), \Lambda)$. Así pues se pueden definir los grupos de homología relativa $H_n(X, A; \Lambda)$ como

$$H_n(X, A, \Lambda) = \frac{\ker \left(\frac{C_n(X)}{C_n(A)} \rightarrow \frac{C_{n-1}(X)}{C_{n-1}(A)} \right)}{\text{im} \left(\frac{C_{n+1}(X)}{C_{n+1}(A)} \rightarrow \frac{C_n(X)}{C_n(A)} \right)}$$

Y análogamente podemos definir los grupos de cohomología relativa.

De aquí en adelante asumiremos que Λ es un dominio de ideales principales, para simplificar notación omitiremos Λ , escribiremos $H_n(X)$ en lugar de $H_n(X, \Lambda)$.

Teorema 3.9. *Supongamos $H_{n-1}(X) = 0$ ó Λ -módulo libre entonces $H^n(X) \cong \text{Hom}_\Lambda(H_n(X), \Lambda)$*

Demostración. Sea $H_{n-1}(X)$ libre veamos que $H^n(X) \cong \text{Hom}_\Lambda(H_n(X), \Lambda)$. Sea $\bar{x} \in H^n(X) = \frac{Z^n(X)}{B^n(X)}$ recordemos que $Z^n(X), B^n(X) \in C^n(X) = \text{Hom}_\Lambda(C_n(X), \Lambda)$. Definimos un homomorfismo

$$K: H^n(X) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(H_n(X), \Lambda)$$

$$\bar{x} \mapsto x$$

donde $x: C_n(X) \rightarrow \Lambda$ y es un cociclo $x \circ \partial = 0$.

1. K está bien definido:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow x & \swarrow h & \\ & & & & \Lambda & & \end{array}$$

Sean $x' \sim x$, $x - x' = h \circ \partial$ y sean $y, y' \in \ker \partial$ tal que $y - y' \in \text{im } \partial$ entonces $x(y) - x'(y) = h \circ \partial(y) = h(0) = 0$, por otro lado $x(y) - x'(y) = x(y - y') = 0$ por lo cual el homomorfismo está bien definido.

2. K es sobreyectiva:

Primero notemos que el submódulo $Z_n(X) \subset B_n(X)$ es sumando directo, esto se sigue del hecho de que el módulo cociente

$$C_n(X)/Z_n(X) \cong B_{n-1}(X) \subset C_{n-1}(X)$$

es un submódulo libre de un módulo libre entonces $B_{n-1}(X)$ es libre por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow Z_n(X) \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow \frac{C_n(X)}{Z_n(X)} \cong B_{n-1}(X) \longrightarrow 0$$

se escinde, entonces $C_n(X) \cong \frac{C_n(X)}{Z_n(X)} \oplus Z_n(X)$.

Sea $f \in \text{Hom}_\Lambda(H_n(X), \Lambda)$ arbitrario, entonces $f: H_n(X) \rightarrow \Lambda$ el cual se extiende a un homomorfismo F

$$\begin{array}{ccc} Z_n(X) & \longrightarrow & \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \xrightarrow{f} \Lambda \\ & \nearrow F & \\ C_n(X) & & \end{array}$$

Puesto que F no está definido en la frontera se sigue que

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_n(X) \\ & \searrow 0 & \downarrow F \\ & & \Lambda \end{array}$$

Sea $x \in H^n(X)$ la clase de cohomología del cociclo F , entonces para cualquier $y \in H_n(X)$ con $\bar{F} \in Z^n(X)$ tenemos que $K(\bar{F}) \cong f$ por lo cual $K(\bar{F})(y) = f(y)$.

3. K es inyectiva:

Sea $Z_0 \in Z^n(X)$ entonces $K(Z_0) = 0$, veamos que $Z_0 \in \text{im } \delta = B^n(X)$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_n(X) & \longrightarrow & \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \longrightarrow \Lambda \\ & & \uparrow & & \nearrow \\ B_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial^{-1}} & C_n(X) & & \end{array}$$

$\frac{Z_{n-1}(X)}{B_{n-1}(X)} = H_{n-1}(X)$ es libre entonces $B_{n-1}(X)$ es sumando directo de $Z_{n-1}(X)$ y de $C_{n-1}(X)$ por lo tanto $Z_0\partial^{-1}$ se extiende a $C_{n-1}(X)$, si f es la extensión $f: C_{n-1}(X) \rightarrow \Lambda$ entonces

$$\langle \delta f, [\sigma] \rangle = \pm \langle f, \partial[\sigma] \rangle = \pm \langle Z_0\partial^{-1}(\partial[\sigma]) \rangle = \pm \langle Z_0, [\sigma] \rangle$$

entonces Z_0 es igual a la cofrontera de f .

□

3.2. Homología de complejos CW

Sea K un complejo CW y K^n su n -esqueleto.

Definición 3.10. Un subcomplejo A de un complejo CW X es un subespacio cerrado $A \subset X$ que es unión de celdas en X , una pareja (X, A) con A subcomplejo se llama pareja CW.

Lema 3.11. Sea K un complejo CW, K^n su n -esqueleto $K^n \subset K$. La homología relativa $H_i(K^n, K^{n-1})$ con coeficientes en Λ es cero para todo $i \neq n$ y es un módulo libre para $i = n$ con un generador para cada n -celda de K .

Demostración. Sea $S = \{S_E | E \text{ es } n\text{-celda}\}$ un conjunto discreto de puntos y S_E tal que $S_E \in E$ para cada E n -celda abierta, K^{n-1} es retracts por deformación de $K^n - S$. usando la sucesión larga de homología para la terna $(K^n, K^n - S, K^{n-1})$

$$H_q(K^n - S, K^{n-1}) \longrightarrow H_q(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow H_q(K^n, K^n - S) \longrightarrow H_{q-1}(K^n - S, K^{n-1})$$

tenemos que $H_i(K^n, K^{n-1}) \cong H_i(K^n, K^n - S)$ por escisión (escindiendo K^{n-1}) tenemos

$$\begin{aligned} H_i(K^n, K^{n-1}) &\cong H_i\left(\bigcup E, \bigcup (E - S_E)\right) \\ &\cong \bigoplus H_i(E, E - S_E) \\ &\cong \bigoplus H_i(D, S^{n-1}) \\ &\cong \bigoplus H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) = \begin{cases} \Lambda, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{si } i \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.12. El grupo $H_i(K^n) = 0$ para todo $i > n$ y es isomorfo a $H_i(K)$ para $i < n$. Análogamente en cohomología.

Definición 3.13. El módulo libre $H_n(K^n, K^{n-1})$ lo llamamos el n -ésimo grupo de cadenas del complejo CW, K y denotamos $\mathcal{C}_n(K) = \mathcal{C}_n(K, \Lambda)$. De manera similar definimos el n -ésimo grupo de co-cadenas

$$H^n(K^n, K^{n-1}) \cong \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{C}_n(K), \Lambda).$$

Definimos los morfismos $\partial_n: \mathcal{C}_{n+1}(K) \rightarrow \mathcal{C}_n(K)$ usando la sucesión larga en homología de la terna (K^{n+1}, K^n, K^{n-1})

$$H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) \longrightarrow H_n(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^{n+1}, K^{n-1}) \longrightarrow H_n(K^{n+1}, K^n) \longrightarrow$$

y $\delta^n: \mathcal{C}^n(K) \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}(K)$ se define análogamente

Lema 3.14. $\partial_n \partial_{n-1} = 0$

Teorema 3.15. *El grupo de homología $Z_n(K)/B_n(K)$ del complejo de cadenas C_*K es isomorfo a $H_n K$. Análogamente $Z^n(K)/B^n(K)$ es isomorfo a $H^n(K)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) = C_{n+1}(K) & \longrightarrow & H_n(K^n, K^{n-2}) & \longrightarrow & H_n(K^{K+1}, K^{n-2}) & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow^{\partial_{n+1}} & \downarrow & & & & \\
 & & C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1}) & & & & \\
 & & \downarrow^{\partial_n} & & & & \\
 & & C_{n-1}(K) = H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & & & &
 \end{array}$$

notemos que estas son sucesiones exactas de las ternas (K^n, K^{n-1}, K^{n-2}) y (K^{n+1}, K^n, K^{n-2}) por lo tanto $\ker \partial_n = Z_n(K) \cong H_n(K^n, K^{n-2})$ entonces $Z_n(K)/B_n(K) \cong H_n(K^{n+1}, K^{n-2})$,

$$H_n(K^{n-2}) \longrightarrow H_n(K^{n+1}) \longrightarrow H_n(K^{n+1}, K^{n-2}) \longrightarrow H_{n-1}(K^{n-2})$$

entonces tenemos

$$0 \longrightarrow H_n(K^{n+1}) \cong H_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(K^{n+1}, K^{n-2}) \longrightarrow 0$$

por lo tanto $Z_n(K) \cong H_n(K^n, K^{n-1})$.

Para cohomología consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \uparrow & & & \\
 C^{n+1}(K) & \longleftarrow & H^n(K^n, K^{n-2}) & \longleftarrow & H^n(K^{K+1}, K^{n-2}) & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & C^n(K) = H^n(K^n, K^{n-1}) & & & & \\
 & & \uparrow^{\delta} & & & & \\
 & & C^{n-1}(K) = H^{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & & & &
 \end{array}$$

y análogamente tenemos que $Z^n(K)/B^n(K) \cong H^n(K^{n+1}, K^{n-2})$ □

3.3. Operaciones

Una propiedad de la cohomología que la distingue de la homología es la existencia de un producto natural llamado *producto cup* el cual definiremos en esta sección. Así también

definiremos el *producto cap* por el cual el anillo de cohomología opera sobre la homología, otra operación útil que definiremos sera el *producto slant* (división por cadenas), estas últimas operaciones nos serán esenciales para enunciar los teoremas de dualidad.

3.3.1. Producto cup

Dadas $c \in C^m(X)$ y $c' \in C^n(X)$ cocadenas, definimos $c \cup c' \in C^{m+n}(X) = \text{Hom}(C_{n+m}(X), \Lambda)$ como sigue; sea $c \in \text{Hom}(C_m X, \Lambda)$ y $c' \in \text{Hom}(C_n X, \Lambda)$ primero definimos $\alpha_m: \Delta^m \rightarrow \Delta^{m+n}$ como

$$\alpha_m(t_0, \dots, t_m) = (t_0, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$$

y $\beta_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^{m+n}$ como

$$\beta_n(t_m, \dots, t_{m+n}) = (0, \dots, 0, t_m, \dots, t_{m+n})$$

entonces definimos $\alpha_m^*: C_{m+n}(X) \rightarrow C_m(X)$ tal que $\sigma \mapsto \sigma \circ \alpha_m$. Ahora definimos el *producto cup* $c \cup c'$ mediante

$$c \cup c'[\sigma] = (-1)^{mn} [c, \sigma \circ \alpha_m] \cdot [c', \sigma \circ \beta_n].$$

Esta operación es bilineal y asociativa, pero no es conmutativa. El cociclo constante $1 \in C^0(X)$ funciona como el elemento identidad. La cofrontera del producto cup de los cociclos c y c' esta dada por

$$\delta(c \cup c') = (\delta c)c' + (-1)^m c(\delta c')$$

La operación producto cup induce una operación análoga en cohomología $H^m(X) \otimes H^n(X) \rightarrow H^{m+n}(X)$.

Ahora para parejas, sea $A \subset X$ si la cocadena $c \in C^n(X, A) \subset C^n(X)$ esto es si $c[\sigma] = 0$ para toda $\sigma: \Delta^m \rightarrow A$ y si $c' \in C^m(X)$ entonces $cc' \in C^{m+n}(X, A)$, por lo tanto tenemos una operación producto en

$$H^m(X, A) \otimes H^n(X) \rightarrow H^{m+n}(X, A)$$

Mas aún si A y B son abiertos relativos en $A \cup B$, entonces podemos definir la operación producto

$$H^m(X, A) \otimes H^n(X, B) \rightarrow H^{m+n}(X, A \cup B)$$

como sigue, sea $\hat{C}^i(X, A, B) \subset C^i(X)$ donde $\hat{C}^i(X, A, B) = C^i(X, A) \cap C^i(X, B)$. Dadas dos cocadenas $c \in C^m(X, A)$ y $c' \in C^n(X, B)$ entonces el producto $cc' \in \hat{C}^{m+n}(X; A, B) = \hat{C}^{m+n}(X, A) \cap \hat{C}^{m+n}(X, B)$. Entonces tenemos una sucesión exacta del complejo de cadenas

$$0 \longrightarrow C^*(X, A \cup B) \longrightarrow \hat{C}^*(X; A, B) \longrightarrow \hat{C}^*(A \cup B; A, B) \longrightarrow 0$$

notemos que $\hat{C}^*(A \cup B; A, B) = C^*(A \cup B, A) \cap C^*(A \cup B, B)$ y que $C^*(A \cup B, A) = \sigma \in \text{Hom}(C_*(A \cup B, A), \Lambda)$, como $\text{im}(\sigma)cA$ entonces $c[\sigma] = 0$ es decir el complejo de co-cadena es acíclico, por lo tanto la inclusión

$$C^*(X, A \cup B) \rightarrow \hat{C}^*(X; A, B)$$

induce un isomorfismo en cohomología. Por lo tanto obtenemos una operación producto cup con valores en el grupo de cohomología $H^{m+n}(X, A \cup B)$.

3.3.2. Producto cap

Para cualquier espacio X y cualesquiera coeficientes Λ (dominio) existe una operación bilineal

$$\cap: C^i(X) \times C_n(X) \rightarrow C_{n-i}(X)$$

donde si $b \in C^i(X)$ y $\xi \in C_n(X)$ entonces el *producto cap* $b \cap \xi$ es el único elemento de $C_{n-i}(X)$ tal que $a(b \cap \xi) = (a \cup b)(\xi)$ para toda $a \in C^{n-i}$. Más explícitamente si un simplejo singular $[\sigma]$ es un generador de $C_n(X)$ el producto cap

$$\begin{aligned} b \cap [\sigma] &= (-1)^{i(n-i)} b(\sigma \cup \beta_i) \cdot (\sigma \circ \alpha_{n-1}) \\ a(b \cap [\sigma]) &= (-1)^{i(n-i)} b(\sigma \circ \beta_i) a(\sigma \circ \alpha_{n-1}) = ab(\sigma). \end{aligned}$$

Algunas propiedades del producto cap son las siguientes:

- $(bc) \cap \xi = b \cap (c \cap \xi)$
- $1 \cap \xi = \xi$
- $\partial(b \cap \xi) = (\delta b) \cap \xi + (-1)^{\dim b} b \cap \partial \xi$

La última propiedad nos permite definir una operación en

$$H^i(X) \otimes H_n(X) \longrightarrow H_{n-i}(X)$$

3.3.3. Producto slant

Una operación muy útil en $X \times Y$ es el *producto slant*. Sea $c \in C^p(X) \times C^q(Y)$ y $w \in C_p(X)$ definimos c/w como la q -cocadena en Y dada por

$$[\delta(c/w), z] = [c/w, w \oplus z]$$

para toda $z \in C_q(Y)$ entonces

$$\begin{aligned} [\delta(c/w), z] &= [c/w, \partial z] \\ &= [c, w \oplus \partial z] \\ &= (-1)^p [c, \partial(w \oplus z) - \partial w \oplus z] \\ &= (-1)^p [\delta c/w - c/\partial w, z] \end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\delta(c/w) = (-1)^p (\delta c/w - c/\partial w)$$

La cual induce una operación análoga en

$$\begin{aligned} /: H^{p+q}(X \times Y) \otimes H_p(X) &\longrightarrow H^q(Y) \\ (\gamma, \alpha) &\longmapsto \gamma/\alpha \end{aligned}$$

que satisface $[\beta, \gamma/\alpha] = [\alpha \times \beta, \gamma]$ donde $\beta \in H_q(Y)$ y tiene las siguientes propiedades

- $((\varepsilon \times \eta) \cup \gamma)/\alpha = (-1)^{r(s-q)} \eta \cup (\gamma/(\alpha \cap \varepsilon))$
- $(\beta, \eta \cup (\gamma/(\alpha \cap \varepsilon))) = (-1)^{r(s-q)} (\beta, ((\varepsilon \times \eta) \cup \gamma)/\alpha)$
- Si $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ y $f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ entonces

$$H^{p+q}(f \times g)(\gamma')/\alpha = H^q(f)(\gamma')/H_p(g)(\alpha)$$

donde $\gamma \in H^{p+q}(X \times Y)$, $\eta \in H^r(Y)$, $\beta \in H_{p+q+r-s}(Y)$, $\varepsilon \in H^q(X)$, $\alpha \in H_s(X)$.

3.4. Orientación

3.4.1. Orientación en variedades

Sea M una variedad topológica fija de dimensión n no necesariamente compacta, primeramente estudiaremos los grupos $H_i(M, M - K)$ con K compacto, si $K \subset L \subset M$ entonces existe un homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \rho_K: H_i(M, M - L) &\longrightarrow H_i(M, M - K) \\ a &\longmapsto \rho_K(a) \end{aligned}$$

Lema 3.16. *Los grupos $H_i(M, M - K)$ son cero si $i > n$. Una clase de homología es cero si y sólo si $\rho_x(a) = 0$ para todo $x \in K$ donde $\rho_x: H_n(M, M - K) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$*

Demostración. Partiremos la demostración en seis casos:

Caso 1. Sea $M = \mathbb{R}^n$ y K compacto y convexo, sea $x \in K$ y S una esfera de dimensión $(n - 1)$ con centro en x tal que $K \subset S$, entonces S es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^n - x$ y de $\mathbb{R}^n - K$ entonces $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$.

Caso 2. Supongamos $K = K_1 \cup K_2$ y que el lema se cumple para K_1, K_2 usando la sucesión de Mayer-Vietoris relativa

$$\rightarrow H_{i+1}(M, M - (K_1 \cap K_2)) \xrightarrow{\delta} H_i(M, M - K) \xrightarrow{s} H_i(M, M - K_1) \oplus H_i(M, M - K_2) \rightarrow$$

donde el homomorfismo s está definido como $s(a) = \rho_{K_1}(a) \oplus \rho_{K_2}(a)$ si $i > n$ los grupos son cero, ahora si $i = n$ por demostrar $a = 0 \Leftrightarrow \rho_x(a) = 0$. Notemos que si $a = 0$ esto se cumple trivialmente, ahora supongamos que para todo $x \in K = K_1 \cup K_2$, $\rho_x(a) = 0 = \rho_x \circ \rho_{K_i}(a)$ entonces $\rho_{K_i}(a) = 0$ por lo cual $a \in \ker S = \text{im } \delta$ entonces existe h tal que $\delta(h) = a$ por lo cual si $i = n$ tenemos $\rho_x(h) = 0$ por lo tanto $H_{i+1}(M, M - (K_1 \cap K_2)) = 0$ por lo cual el lema se cumple.

Caso 3 Sea $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$, $M = \mathbb{R}^n$, notemos que usando los casos anteriores y usando inducción en r el lema es cierto.

Caso 4. Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , dado $a \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$ tomamos una vecindad compacta N de K y $a' \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - N)$ tal que $\rho_x(a') = a$. Tomamos una cadena $\gamma \in C_i \mathbb{R}^n$ cuya imagen módulo $\mathbb{R}^n - K$ es un representante de a , la frontera de γ está “soportada” por un conjunto ajeno a K compacto, basta que tomemos un N suficientemente pequeño para que sea ajeno a este soporte. Cubriremos K por un número finito de bolas cerradas B_1, \dots, B_r tal que $B_i \subset N$ y $B_i \cap K \neq \emptyset$ si $i > n$ entonces $\rho_{B_1 \cup \dots \cup B_r}(a') = 0$ y por el caso tres tenemos que $a = 0$ por que $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_j) = 0$ entonces

$$\begin{array}{ccc} & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \bigcup B_j) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \longleftarrow & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - N) \end{array}$$

Si $i = n$ supongamos $\rho_x(a) = 0$ para todo $x \in K$ entonces $\rho_x(a') = 0$ para todo $x \in B_1 \cup \dots \cup B_r$, $B_j \cap K \neq \emptyset$ para todo $x \in B_j$ entonces $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_j) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X)$.

Caso 5. Sea K suficientemente pequeño para estar en una vecindad U homeomorfa a \mathbb{R}^n entonces escindiendo $M - U$ tenemos $H_*(M, M - K) \cong H_*(U, U - K)$ y se reduce al caso anterior.

Caso 6. Sea $K \subset M$ arbitrario, a K lo podemos ver como $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r$ entonces se reduce al caso anterior. \square

Ahora si tomamos la homología con coeficientes en \mathbb{Z} , la idea ahora es mirar las dos posibles elecciones de generadores en $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$. Puesto que para cada $x \in M$, M variedad de dimensión n , tenemos que:

$$H_n(M, M - x; \mathbb{Z}) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n; \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

Lema 3.17 (De continuación). *Dado un elemento $\alpha_x \in H_n(M, M - x)$ entonces existe una vecindad abierta U de x y $\alpha \in H_n(M, M - U)$ tal que $\rho_x: H_n(M, M - U) \rightarrow H_n(M, M - \{x\})$ es un isomorfismo inducido por la inclusión.*

Para una demostración ver [7, pag. 158]. Este lema nos dice que podemos obtener elementos $\alpha_y \in H_n(M, M - y,)$ para cada y cerca de x es decir $y \in U$ a partir de λ_x mediante $\alpha_x = \rho_x(\lambda)$ y llamamos a α la continuación de α_x en U .

Lema 3.18 (Localmente constante). *Sea M una variedad de dimensión n y $x \in M$ toda vecindad W de x contiene una vecindad U de x tal que para cada $y \in U$, $\rho_y(U)$ es un isomorfismo. Es decir α_x tiene una única continuación en U .*

Para una demostración ver [7, pag. 158]

Definición 3.19. Sea M una variedad de dimensión n y $x \in M$, la elección de un generador del Λ -módulo $H_n(M, M - x; \Lambda)$ es llamada una Λ -orientación local μ_x para M en x .

Notemos que cada μ_x determina una orientación local, para ser mas precisos si B es homeomorfo a una bola alrededor de x y sea $y \in B$ los isomorfismos

$$H_n(M, M - x) \xleftarrow{\rho_x} H_n(M, M - B) \xrightarrow{\rho_y} H_n(M, M - y)$$

permite n definir orientaciones en los otros dos grupos de homología.

Ahora definamos una Λ -orientación global para M .

Definición 3.20. Sea M una variedad de dimensión n y una familia de subespacios $\{U_i\}$ que cubren a M y para toda i , sea $\alpha \in H_n(M, M - U_i)$ una Λ -orientación local de M en U_i . Al sistema $\{U_i, \alpha\}_{i \in I}$ se llama un *sistema de Λ -orientación local* de M .

Definición 3.21. Se dice que un sistema es *coherente* si dados i, j y $x \in U_i \cap U_j$, se tienes que $\alpha_x^{U_i} = \alpha_x^{U_j}$

Entonces diremos que M es Λ -orientable, si admite al menos un sistema de orientación local coherente. Dada otro sistema de Λ -orientación V_k, β_k decimos que define la misma Λ -orientación si $\lambda_x = \beta_x$ para toda $x \in M$. Entonces tenemos la siguiente definición.

Definición 3.22. Una Λ -orientación para M es una clase de equivalencia de sistemas locales Λ -orientados coherentes de M . Una variedad se dice Λ -orientada si se ha fijado una Λ -orientación en M . Se dice orientada si es Λ -orientada y $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Proposición 3.23. *Sea M una variedad Λ -orientable se cumplen las siguientes:*

1. *Una subvariedad abierta N de M es Λ -orientable;*
2. *M es Λ -orientable si y sólo si todas sus componentes conexas lo son.*

Para una demostración ver [7, 161]

Proposición 3.24. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Toda variedad tiene una única \mathbb{Z}_2 -orientación;*
2. *Dos Λ -orientaciones de una variedad topológica conexa son iguales si y sólo si coinciden en un punto.*

Demostración. 1. Para cada x tenemos que λ_x es el único elemento de $H_n(M, M - x; \mathbb{Z}_2)$ distinto de cero, así que podemos escoger una vecindad abierta U_x con λ_x la única continuación.

2. Sea A el conjunto de puntos donde las orientaciones coinciden entonces por Lema 3.18 tanto A como $M - A$ son abiertos, por lo tanto $A = M$.

□

Ejemplo 3.25. Sea $M = \mathbb{R}^n$ la cual es homeomorfa a $S^n - \{x\}$ entonces por la proposición 3.23 M es Λ -orientable.

3.4.2. La clase fundamental de una variedad

Teorema 3.26. *Para cualquier variedad orientada M y cualquier compacto $K \subset M$ existe una única clase $\mu_K \in H_n(M, M - K)$ tal que $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$.*

En particular si M es compacta existe $\mu_M \in H_n(M)$ con la propiedad requerida, a esta μ_M se le llama la *clase fundamental* de homología de M .

Demostración. La unicidad se sigue de que si μ_K y μ'_K cumplen la propiedad entonces $\rho_x(\mu_K - \mu'_K) = 0$ para todo $x \in K$ entonces $\mu_K = \mu'_K$. El resto de la demostración lo partiremos en casos.

- **Caso 1.** Sea $K \subset V$, V una vecindad suficientemente pequeña para que se cumpla.
- **Caso 2.** Supongamos $K = K_1 \cup K_2$ tal que existe μ_{K_1} y μ_{K_2} usando la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\rightarrow H_n(M, M - K) \xrightarrow{s} H_n(M, M - K) \oplus H_n(M, M - K_2) \xrightarrow{t} H_n(M, M - (K_1 \cap K_2)) \rightarrow$$

donde $s = \rho_{K_1}(a) \oplus \rho_{K_2}(a)$

$$t(\beta, \gamma) = \rho_{K_1 \cap K_2}(\beta) - \rho_{K_1 \cap K_2}(\gamma)$$

notemos que $t(\mu_{K_1}, \mu_{K_1}) = 0$ entonces (μ_{K_1}, μ_{K_2}) están en $\ker t = \text{im } s$, entonces existe a tal que $s(a) = (\mu_{K_1}, \mu_{K_2})$.

- **Caso 3.** Sea K arbitrario $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r$, entonces por los casos anteriores el teorema se cumple.

□

Ejemplo 3.27. Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que S^n posee clase fundamental. Sin embargo \mathbb{R}^n no posee clase fundamental, pues $H_n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = \{0\}$ y $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - x; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Nota 3.28. Para cada dominio de coeficientes Λ , el único homomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda$ que da lugar a una clase en $H_n(M, M - K; \Lambda)$ lo denotaremos por μ_K . El caso $\Lambda = \mathbb{Z}_2$ es importante ya que la clase de homología

$$\mu_K \in H_n(M, M - K; \mathbb{Z}/2)$$

puede ser construida de una variedad arbitraria sin hacer ninguna suposición de orientabilidad.

Nota 3.29. Consideraciones similares aplicamos en variedades orientadas con frontera M . Sea $K \subset M$ compacto, existe una única clase $\mu_K \in H_n(M, M - (K) \cap \partial M)$ con la propiedad que queremos $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$ para cada $x \in K \cap (M - \partial M)$. Si en particular M es compacto entonces existe una clase $\mu_K \in H_n(M, \partial M)$ entonces el homomorfismo natural

$$\partial: H_n(M, \partial M) \rightarrow H_{n-1}(\partial M)$$

manda μ_M a $\mu_{\partial M}$.

Corolario 3.30. Sea M una variedad de dimensión n , entonces:

1. Si M posee una clase fundamental, M es orientable;
2. Si M es compacta y orientable, posee una clase fundamental;
3. Si M es compacta y orientable, existe una correspondencia uno a uno entre las clases fundamentales de M y las orientaciones de M

[7, cap. 26]

3.5. Teorema de dualidad Poincaré

Empecemos esta sección enunciando el teorema de dualidad de Poincaré para variedades topológicas compactas.

Teorema 3.31. Sea M compacta de dimensión n y \mathbb{Z} -orientada, entonces $H^i(M)$ es isomorfo a $H_{n-i}(M)$ con la correspondencia $a \mapsto a \cap \mu_M$

Notemos que para una variedad no orientable el teorema sigue siendo valido si usamos el dominio de coeficientes $\mathbb{Z}/2$. La demostración de este teorema es consecuencia de un teorema más general, el teorema de dualidad de Poincaré para variedades arbitrarias.

Primero notemos que para cualquier pareja (X, A) podemos considerar el producto cap de la siguiente manera:

$$C^i(X, A) \otimes C_n(X, A) \rightarrow C_{n-i}(X)$$

por lo tanto

$$\cap: H^i(X, A) \otimes H_n(X, A) \rightarrow H_{n-i}(X)$$

Y aquí viene la generalidad, ya que podemos definir

$$\cap: H^i(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \rightarrow H_{n-i}(X, B)$$

Si A y B son abiertos en $A \cup B$.

Ahora M es orientada pero no necesariamente compacta, entonces definimos

$$H_{\text{comp}}^i M = \text{colim}_{K \subset M} H^i(M, M - K)$$

En particular si M es compacta $H_{\text{comp}}^i(M) = H^i(M,) = H^i(M)$ y definimos la *aplicación dualidad*

$$\begin{aligned} D: H_{\text{comp}}^i M &\longrightarrow H_{n-i} M \\ a &\longmapsto a' \cap \mu_{M-K} \end{aligned}$$

a' es un representante, $a \in H^i(M, M - K)$. Para ver que está bien definido, sea $K \subset L$ entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^i(M, M - K) & \longrightarrow & H^i(M, M - L) \\ & \searrow \cap_{\mu_K} & \swarrow \cap_{\mu_L} \\ & & H_{n-i} M \end{array}$$

es conmutativo, en el caso especial cuando M es compacto, notemos que $D(a) = a \cap \mu_M$.

Teorema 3.32 (Dualidad). *El homomorfismo D es un isomorfismo.*

A continuación realizaremos un esbozo de la demostración en casos. Ver demostración en [7, pag. 217].

Caso 1. Sea $M = \mathbb{R}^n$, dada cualquier bola B , tenemos $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) = \Lambda$ con generador μ_B entonces por Lema 3.16 $\langle a, \mu_B \rangle = 1$. Por lo tanto $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \cong \Lambda$ con generador a tal que $\langle a, \mu_B \rangle = 1$, entonces la identidad $\langle 1a, \mu_B \rangle = \langle 1, a \cap \mu_B \rangle$ muestra que $a \cap \mu_B$ es un generador de $H_0 \mathbb{R}^n \cong \Lambda$, por lo tanto $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$.

Caso 2. Supongamos que $M = U \cup V$ y el teorema es cierto para U , V , $U \cap V$ y construimos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{comp}}^i(U \cap V) & \longrightarrow & H_{\text{comp}}^i U \oplus H_{\text{comp}}^i V & \longrightarrow & H_{\text{comp}}^i M \xrightarrow{\delta} \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & H_{n-i}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-i} U \oplus H_{n-i} V & \longrightarrow & H_{n-i} M \xrightarrow{\partial} \cdots \end{array}$$

entonces por el lema del cinco se cumple.

Caso 3. Sea M la unión de una familia de abiertos anidados U_α donde el teorema es cierto para U_α $H_{\text{comp}}^i M = \text{colim} H_{\text{comp}}^i U_\alpha$ y $H_{n-i} M = \text{colim} H_{n-i} U_\alpha$. Ambas afirmaciones se siguen del hecho de que todo subconjunto compacto de M está contenido en algún U_α . Puesto que el isomorfismo de límites directos es un isomorfismo.

Caso 4. Si M es abierto de \mathbb{R}^n entonces se sigue del caso 1. Más generalmente escojamos una cubierta abierta V_n de M numerable y consideramos $V_i, V_2 \cup V_1, \dots, V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ estos son abiertos anidados y por el caso 3, tenemos el resultado.

Caso 5. M arbitrario, cubrimos M con abiertos V_α entonces por inducción transfinita, tomando un buen orden en los índices tenemos el resultado.

3.6. El isomorfismo de Thom

Definición 3.33. Sea $p: E \rightarrow M$ un haz vectorial de dimensión real k y sea E_0 el complemento de la sección cero en E definimos la *clase de Thom* de E , como la clase de cohomología $u \in H^k(E, E_0)$ tal que para todo $x \in M$ la inclusión $i_F: (F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0)$ induce un isomorfismo

$$i_F^*: H^k(E, E_0) \rightarrow H^k(F, F_0)$$

que manda u a un generador. Donde $F = p^{-1}(x)$ y F_0 los elementos en la fibra distintos de cero.

Entonces podemos definir el *isomorfismo de Thom* usando la siguiente sucesión

$$H^i(M) \xrightarrow{p^*} H^i(E) \xrightarrow{\cup u} H^k(E, E_0)$$

Definición 3.34. Definimos el isomorfismo de Thom Φ

$$\begin{aligned} \Phi: H^i(M) &\rightarrow H^{i+k}(E, E_0) \\ b &\mapsto p^*(b) \cup u \end{aligned}$$

Teorema 3.35. Φ es un isomorfismo.

Para una demostración ver [2, pag. 358].

Corolario 3.36. Sea A subvariedad cerrada en M y sea E el haz normal a A en M y E_0 los puntos en E distintos de cero entonces $H^n(E, E_0; \Lambda) \cong H^n(M, M - A; \Lambda)$.

Para una demostración ver [16, Cor 11.2].

Para tratar los casos real y complejo de manera simultánea definimos para haces reales

$$b = 1 \qquad K_1 = \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

Y para haces complejos definimos

$$b = 2 \qquad K_2 = \mathbb{Z} \qquad \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

Lema 3.37. Sean M y M' variedades diferenciables, cerradas, K_b -orientadas y sea $Z \subset M$ subvariedad, K_b -orientada. Sea $f: M' \rightarrow M$ aplicación diferenciable transversal a Z y sea $Z' = f^{-1}(Z)$. Denotamos como $i: Z \hookrightarrow M$ $j: Z' \hookrightarrow M'$ las inclusiones y sean $[Z]$ y $[Z']$ las clases fundamentales de Z y Z' entonces

$$J_*([Z']) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ i_*([Z])$$

donde $D_{M'}$ y D_M sons los isomorfismos de dualidad de Poincaré en M y M'

Demostración. Sea $m = \dim M$, $m' = \dim M'$, $r = \dim Z$ y $r' = \dim Z'$ puesto que Z y Z' tienen la misma codimensión entonces $q = m - r = m' - r'$. Además $f \pitchfork Z$, dado que M , M' y Z son K_b -orientadas entonces podemos dar a Z' una orientación como subvariedad de M' con la orientación de la preimagen. Sea ν el haz normal de Z en M este es orientado, $\nu \oplus TZ = TM$ es una orientación que se preserva en la restricción de TM a Z . Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*\nu & \longrightarrow & \nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z' & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

entonces tenemos que $\nu' = f^*\nu$ es el haz normal de Z' en M' de esta manera ν' toma su orientación de la orientación de ν . Sea $E(\nu)$ el espacio total de ν y $E(\nu)_0$ el conjunto de elementos en $E(\nu)$ distintos de cero, análogamente $E(\nu')$ y $E(\nu')_0$, entonces tenemos los siguientes isomorfismos canónicos en cohomología

$$H^*(E(\nu), E(\nu)_0; K_b) \cong H^*(M, M - Z; K_b),$$

$$H^*(E(\nu'), E(\nu')_0; K_b) \cong H^*(M', M' - Z'; K_b).$$

Entonces las clases de Thom de ν y ν' corresponden a las clases canónicas

$$U_\nu \in H^q(M, M - Z; K_b)$$

$$U_{\nu'} \in H^q(M', M' - Z'; K_b)$$

y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(M, M - Z; K_b) & \xrightarrow{l} & H^q(M; K_b) & \xrightarrow{D_M} & H_r(M; K_b) & \xleftarrow{i_*} & H_r(Z; K_b) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & & & \\ H^q(M', M' - Z'; K_b) & \xrightarrow{l'} & H^q(M'; K_b) & \xrightarrow{D_{M'}} & H_{r'}(M'; K_b) & \xleftarrow{j_*} & H_{r'}(Z'; K_b) \end{array} \quad (3.1)$$

entonces tenemos que (ver [16] Problema 11.C)

$$l(U_\nu) = D_M^{-1} i_*([Z])$$

$$l'(U_{\nu'}) = D_{M'}^{-1} j_*([Z])$$

entonces por la conmutatividad del diagrama (3.1) y el hecho de que $U_{\nu'} = f^*(U_\nu)$ tenemos que $J_*([Z']) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1}([Z])$. \square

Proposición 3.38. Sean M , M' y P variedades cerradas K_b -orientadas, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\pi_2} & P \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

con f y g aplicaciones diferenciables y Q es el producto fibrado definido como

$$Q = \{(y, p) \in M' \times P \mid f(y) = g(p)\},$$

π_1, π_2 son proyecciones. Supongamos $f \pitchfork g$ y $[P]$ y sean $[Q]$ las clases fundamentales de Q y P , entonces

$$(-1)^{(m-r)m} \pi_{1*}([Q]) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ g_*([P])$$

Donde D_M y $D_{M'}$ denota los isomorfismos de dualidad de Poincaré en M y M' respectivamente y la $\dim M = m$, $\dim P = r$.

Demostración. Sea $m = \dim M$, $m' = \dim M'$ y $r = \dim P$, consideremos

$$\Delta = \{(y, p) \in M \times M \mid f(y) = g(p)\}$$

y sea $i: \Delta \rightarrow M \times M$ tenemos que $f \pitchfork g$ si y sólo si $(f \times g) \pitchfork \Delta$ donde $f \times g: M' \times P \rightarrow M \times M$ y observemos que

$$(f \times g)^{-1}(\Delta) = \{(y, p) \in M \times P \mid f(y) = g(p) = x\} = Q$$

entonces Q es una subvariedad de $M' \times P$, K_b -orientada de dimensión $r' = r + m' - m$. Sea $[\Delta]$ la clase fundamental de Δ y llamemos $U_\Delta = D_{M \times M}^{-1}(i_*([\Delta]))$ y si $j: Q \rightarrow M' \times P$ es la inclusión entonces por el Lema 3.37 tenemos

$$j_*([Q]) = D_{M' \times P} \circ (f \times g)^* \circ U_\Delta$$

se sigue del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^*(M \times M) & \xrightarrow{D_{M \times M}} & H_*(M \times M) \xleftarrow{i_*} H_*(\Delta) \\ \downarrow (f \times g)^* & & \\ H^*(M' \times P) & \xrightarrow{D_{M' \times P}} & H_*(M' \times P) \xleftarrow{j_*} H_*(Q) \end{array}$$

que $D_{M' \times P} \circ (f \times g)^* \circ U_\Delta = (f \times g)^*(U_\Delta) \cap [M' \times P]$ donde $[M' \times P]$ es la clase fundamental de $M' \times P$. Sea $\pi_1: M' \times P \rightarrow M'$ la proyección sobre el primer factor y puesto que $\pi_1 = \bar{\pi}_1 \circ j$ tenemos que

$$\bar{\pi}_{1*}(j_*[Q]) = \pi_{1*}(f \times g)^*(U_\Delta) \cap [M' \times P], \quad \pi_{1*}([Q]) = ((f \times g)^*(U_\Delta)/[P]) \cap [M'] \quad (3.2)$$

donde $[M']$ y $[P]$ son las clases fundamentales de M' y P , tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_r(M; K_b) & \xrightarrow{U_\Delta /} & H^{m-r}(M; K_b) & & \\ \uparrow g_* & & \downarrow f^* & & \\ H_r(P; K_b) & \xrightarrow{(g \times f)^*(U_\Delta) /} & H^{m-r}(M'; K_b) & \xrightarrow{\cap [M']} & H_{r'}(M'; K_b) \end{array}$$

aplicando las dos composiciones a $(-1)^{(m-r)m}[P] \in H_r(P; K_b)$ y usando (3.2) tenemos

$$(-1)^{(m-r)m}((g \times f)^*(u_\Delta)/[P]) \cap [M'] = f^*((-1)^{(m-r)m}U_\Delta/g_*([P])) \cap [M'],$$

entonces

$$(-1)^{(m-r)m} \pi_{1*}([Q]) = D_{M'} \circ f^*((-1)^{(m-r)m}U_\Delta/g_*([P]))$$

y como $(-1)^{(m-r)m}U_\Delta / = D_m^{-1}$ tenemos que

$$(-1)^{(m-r)m} \pi_{1*}([Q]) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ g_*([P])$$

□

Nota 3.39. Dada una aplicación $f: M' \rightarrow M$ el homomorfismo $f!$ definido como $f! = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1}$ es llamado el *Umkehrhomomorfismo de Hopf*.

4

Clases características y transversalidad

Nuestro objetivo en este capítulo es definir invariantes de haces vectoriales, los cuales son las obstrucciones para poder construir r secciones linealmente independientes de un haz vectorial $\xi = (p, E, M)$ de rango $n \geq r$ dichas obstrucciones son clases de cohomología llamadas clases características de ξ .

4.1. Preliminares

Recordemos algunas convenciones de notación para poder tratar los casos real y complejo de manera simultánea. Para haces reales definimos

$$b = 1 \quad K_1 = \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

Para haces complejos definimos

$$b = 2 \quad K_2 = \mathbb{Z} \quad \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

Recordemos que $G_n(\mathbb{F}^{n+k}) = \{\mathbb{F} - \text{subespacios de dimensión } n \text{ en } \mathbb{F}^{n+k}\}$ es la variedad de Grassmann suave de dimension bnk . Particularmente tenemos que $\mathbb{F}\mathbb{P}^n = G_1(\mathbb{F})$ es el \mathbb{F} -espacio proyectivo de dimensión n es decir las \mathbb{F} -líneas en \mathbb{F}^{n+1} que pasan por el origen.

Llamemos $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+k}) = \{(\ell, v) \in G_n(\mathbb{F}^{n+k}) \times \mathbb{F}^{n+k} | v \in \ell\}$ el haz canónico de dimensión n ó haz tautológico y denotamos γ_n^1 el haz de líneas canónico sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ es decir $\gamma_n^1 = \gamma^1(\mathbb{F}^{n+1})$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ definimos $v(n) = bn - 1$ y sea $S^{v(n)} = \{x \in \mathbb{F}^n | \|x\| = 1\}$ la $v(n)$ -esfera. Consideremos la acción

$$\begin{aligned} S^{v(1)} \times S^{v(n+1)} &\longrightarrow S^{v(n+1)} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1}) \end{aligned}$$

y denotamos $\mathbb{F}\mathbb{P}^n \cong S^{v(n+1)}/S^{v(1)}$.

Ahora consideremos $S^{v(1)}$ actuando sobre $S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n$ con la acción dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S^{v(1)} \times S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n &\longrightarrow S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n \\ (\lambda, x, v) &\longmapsto (\lambda x, \lambda v) \end{aligned}$$

y definimos el haz vectorial $\varepsilon^n \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^n$

$$\begin{aligned} S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n / S^{v(1)} &\longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^n \\ [x, v] &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

El haz de líneas $\gamma_n^1 \cong (S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}) / S^{v(1)}$ lo podemos describir de manera análoga donde la acción está dada por $(\lambda, x, v) \mapsto (\lambda x, \lambda v)$.

$$\begin{aligned} (S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}) / S^{v(1)} &\longrightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^n \\ [x, v] &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.

$$S^1 \times \mathbb{R} / S^0$$

Lema 4.2. *El haz ζ^n es isomorfo a la suma de Whitney de n copias del haz de líneas canónico γ_n^1 sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$.*

Demostración. Consideremos la aplicación diagonal $\Delta[x] = ([x], \dots, [x])$ y consideremos el siguiente mapeo de haces

$$\tilde{\Delta}[x, (v_1, \dots, v_n)] = ([x, v_1], [x, v_2], \dots, [x, v_n])$$

el cual está bien definido puesto que

$$\tilde{\Delta}[\lambda x, \lambda(v_1, \dots, v_n)] = ([\lambda(x, v_1)], \dots, [\lambda(x, v_n)])$$

veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} S^{v(n+1)} \times \mathbb{F}^n / S^{v(1)} & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \gamma_n^1 \times \gamma_n^1 \cdots \times \gamma_n^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \mathbb{F}\mathbb{P}^n & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{F}\mathbb{P}^n \times \cdots \times \mathbb{F}\mathbb{P}^n \end{array}$$

Notemos que

$$\Delta \circ \pi([x, (v_1, \dots, v_n)]) = \Delta([x]) = ([x], \dots, [x])$$

y que

$$\tilde{\pi} \circ \tilde{\Delta}([x, (v_1, \dots, v_n)]) = \tilde{\pi}([x, v_1], \dots, [x, v_n]) = ([x], \dots, [x])$$

Ahora

$$\begin{array}{ccc} \Delta^*(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1) & \longrightarrow & \gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \mathbb{F}\mathbb{P}^n & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{F}\mathbb{P}^n \times \cdots \times \mathbb{F}\mathbb{P}^n \end{array}$$

y $\Delta^*(\gamma_n^1 \times \gamma_n^1) \cong \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$ como $\pi^{-1}([X]) = \{[x, v] \in \zeta^n \mid \pi([x], v) = [x]\} \cong \mathbb{F}^n$ y como $\tilde{\pi}^{-1}([x], \dots, [x]) = \{([x, v_1], [x, v_2], \dots, [x, v_n])\} = \mathbb{F}^n$ por lo tanto es el pull-back restringido a la diagonal, entonces

$$\zeta^n \cong \Delta^*(\gamma_n^1 \times \cdots \times \gamma_n^1) \cong \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$$

□

4.2. Morfismos de haces vectoriales genéricos

Sea ξ y ζ dos haces vectoriales suaves sobre una variedad diferenciable M .

$$\begin{array}{ccc} \zeta & & \xi \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & M & \end{array}$$

Recordemos que el haz de morfismos $\varpi: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) \rightarrow M$ donde la fibra es $\varpi^{-1}(v) = \{h_v: \zeta_v \rightarrow \xi_v | v \in M\}$ es decir $\varpi^{-1}(v) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_v, \xi_v)$.

Consideremos los siguientes haces inducidos por la aplicación ϖ

$$\begin{array}{ccc} \varpi^*(\zeta) & \longrightarrow & \zeta \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) & \xrightarrow{\varpi} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varpi^*(\xi) & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) & \xrightarrow{\varpi} & M \end{array}$$

entonces definimos el morfismo de haces tautológico

$$\begin{array}{ccc} \varpi^*(\zeta) & \xrightarrow{\tau} & \varpi^*(\xi) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) & \end{array}$$

como $\tau: \varpi^*\zeta \rightarrow \varpi^*\xi$

$$\begin{array}{ccccc} & & \varpi^*\xi & \longrightarrow & \xi \\ & \nearrow \tau & & & \downarrow \pi' \\ \varpi^*\zeta & \longrightarrow & \zeta & & \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) & \xrightarrow{\varpi} & M & & \end{array}$$

entonces en fibras

$$\begin{array}{ccc} \tau_v: \varpi^*\zeta_v & \longrightarrow & \varpi^*\xi_v \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \zeta_{\varpi(v)} & \longrightarrow & \xi_{\varpi(v)} \end{array}$$

esto es que la restricción a la fibra sobre $v \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ es v misma vista como una transformación lineal de $\zeta_{\varpi(v)} \rightarrow \xi_{\varpi(v)}$ es decir $\tau_v = v$.

Un morfismo de haces $h: \zeta \rightarrow \xi$ induce una partición de M dado por conjuntos “singulares”

$$Z_j(h) = \{x \in M | \dim_{\mathbb{F}} \ker h_x = j\} \quad \text{donde } 0 \leq j \leq \text{rango } \zeta$$

consideremos también $Z_j(\tau) = \{v \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi) | \dim_{\mathbb{F}} \ker \tau_v = j\}$. Entonces $Z_j(\tau)$ es un subhaz fibrado de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ con fibra

$$Z_j(\tau)_x = \{v \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x) | \dim \ker v = j\}.$$

Lema 4.3. Sea $\mathbb{F}(k, n)$ el espacio vectorial de matrices $k \times n$ con entradas en \mathbb{F} y $\mathbb{F}_r(k, n)$ el subconjunto de matrices $k \times n$ de rango r con $r \leq \min\{n, k\}$ entonces $\mathbb{F}_r(k, n)$ es una subvariedad de $\mathbb{F}(k, n)$ de codimensión $(k - r)(n - r)$.

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{F}_r(k, n)$, intercalando columnas y renglones podemos asumir que la submatriz $r \times r$ superior izquierda de α tiene determinante cero. Una carta $U \subset \mathbb{F}(k, n)$ alrededor de α está dada por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & AB \\ C & CB + D \end{pmatrix}$$

con $A \in \mathbb{F}(r, r)$ y con $\det(A) \neq 0$, $B \in \mathbb{F}(r, n - r)$, $C \in \mathbb{F}(k - r, r)$, $D \in \mathbb{F}(k - r, n - r)$ haciendo operaciones básicas que no cambien el rango podemos reducir la matriz en forma escalonada y así tenemos que la matriz anterior tiene el mismo rango que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

la cual tiene rango r , entonces una carta $v \in \mathbb{F}_r(k, n)$ alrededor de α está dada por matrices con $D = 0$. La carta v tiene dimensión $r^2 + (k - r)r + r(n - k)$ entonces v tiene codimensión $(k - r)(n - r)$ \square

Corolario 4.4. Sean ζ y ξ haces vectoriales sobre una variedad M de rango k y n respectivamente entonces $Z_j(\tau)_x$ es una subvariedad de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta_x, \xi_x)$ de codimensión $\mathbb{F} j(n - k + j)$.

La demostración se sigue del lema anterior. Puesto que $Z_j(\tau)_x$ es invariante bajo la acción del grupo estructural de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ tenemos que $Z_j(\tau)$ es una subvariedad de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ con codimensión real $\text{codim}_{\mathbb{R}} Z_j(\tau) = bj(n - k + j)$. Esto fue probado por Thom [21, Teorema 2] y generalizado después por Boardman [3, Teorema (6.1)]

Notemos que $Z_l(\tau)$ y $Z_j(\tau)$ con $l \neq j$ entonces el rango de $v \in Z_j(\tau)$ es menor que el rango de $v' \in Z_l(\tau)$, entonces $Z_l(\tau)$ pertenece a la adherencia de $Z_j(\tau)$ puesto que para cualquier elemento $v' \in Z_l(\tau)$ existen $n - j$ columnas independientes y estas columnas podemos hacerlas variar continuamente para reducirlas a $n - l$ columnas linealmente independientes. Por lo tanto $\bar{Z}_j(\tau) = \bigcup_{l \geq j} Z_l(\tau)$. De hecho los subconjuntos $Z_l(\tau)$ con $l \geq j$ dan una estratificación de Whitney de $Z_j(\tau)$.

Definición 4.5. Un morfismo de haces vectoriales $h: \zeta \rightarrow \xi$ se dice *genérico* si la sección correspondiente s_h de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ es transversal a todas las subvariedades $Z_j(\tau)$.

Los morfismos genéricos de haces vectoriales forman un subconjunto abierto denso en el espacio de todos los morfismos de haces vectoriales, con la topología de Whitney C^∞ . Esto se sigue de [4, 14.6]

Proposición 4.6. Sean ζ, ξ haces vectoriales sobre una variedad M de rangos k y n respectivamente si $h: \zeta \rightarrow \xi$ es genérico entonces $Z_j(h)$ es una subvariedad de M de codimensión real $bj(n - k + j)$.

Demostración. Sea s_h la sección de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\zeta, \xi)$ correspondiente a $h: \zeta \rightarrow \xi$ genérico tal que $s_h \pitchfork Z_j(\tau)$ y notemos que

$$s_h^{-1}(Z_j(\tau)) = \{x \in M \mid \dim_{\mathbb{F}} \ker s_{h(x)=j}\} = \{x \in M \mid \dim_{\mathbb{F}} \ker h_x = j\}$$

por lo tanto $s_h^{-1}(Z_j(\tau)) = Z_j(h)$ y por el Teorema 1.29 $Z_j(h)$ es una subvariedad de M de codimensión $bj(n - k + j)$. \square

4.3. La variedad $\tilde{Z}(h)$

Sea ξ un haz vectorial suave de rango n sobre una variedad M cerrada, K_b -orientada de dimensión m y sea $h: \varepsilon^k \rightarrow \xi$ un morfismo de haces, entonces definimos los siguientes conjuntos:

$$\tilde{Z}(h) = \{(x, L) \in M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \mid (x, L) \subset \ker h_x\}$$

$$\tilde{Z}^\circ(h) = \{(x, L) \in \tilde{Z}(h) \mid (x, L) = \ker h_x\}.$$

Sea τ el morfismo de haces tautológico sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ entonces tenemos

$$\tilde{Z}(\tau) = \{(f, L) \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \mid (\varpi(f), L) \subset \ker f_{\varpi(f)}\}$$

Proposición 4.7. Sea $\hat{\phi}: \tilde{Z}(\tau) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ la proyección sobre el primer factor, entonces:

1. $\hat{\phi}(\tilde{Z}(\tau)) = \bar{Z}_1(\tau)$
2. $\tilde{Z}(\tau)$ es una subvariedad de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ de codimensión real bn

Demostración. (1) Sea $(f, L) \in \tilde{Z}(\tau)$, $(\varpi(f), L) \subset \ker f_{\varpi(f)}$ entonces $\dim \ker f_{\varpi(f)} \geq 1$ como $\hat{\phi}(f, L) = f \in \bar{Z}_1(\tau) = \cup_{l \geq 1} Z_l(\tau)$. Por otro lado si $f \in \bar{Z}_1(\tau)$ la $\dim \ker f_{\varpi(f)}$ es al menos 1 y contiene una línea, entonces $(f, L) \in \tilde{Z}(\tau)$ y $\phi(f, \hat{L}) = f$.

(2) Sea $\varpi: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \rightarrow M$ consideremos el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \hat{\phi}^* \varpi^*(\xi) & \longrightarrow & \varpi^* \xi & \longrightarrow & \xi \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 \hat{\phi}(\varpi^*(\varepsilon^k)) & \longrightarrow & \varpi^* \varepsilon^k & \longrightarrow & \varepsilon^k & \longrightarrow & \xi \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) & \xrightarrow{\varpi} & M & &
 \end{array}$$

entonces definimos $\varepsilon' = \hat{\phi}^* \varpi^*(\varepsilon^k) = \text{Hom}(\varepsilon, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \times \mathbb{F}^k$ y $\xi' = \hat{\phi}^* \varpi^*(\xi)$. Definimos un subhaz ε_1 de ε' como

$$\varepsilon_1 = \{(f, L, v) \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \times \mathbb{F}^k \mid v \in L\}$$

sea $\varpi': \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ y definimos la sección $\psi(f, L) = f|_L$

$$\begin{array}{c}
 \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi') \\
 \varpi' \downarrow \left. \vphantom{\varpi'} \right) \psi \\
 \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}
 \end{array}$$

donde $f|_L$ es la restricción de f a la línea L y notemos que $\psi^{-1}(\psi_0) = \{(f, L) \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \mid f|_L = 0\} = \tilde{Z}(\tau)$ donde ψ_0 es la sección cero, es decir que $\tilde{Z}(\tau)$ es el conjunto de ceros de la sección ψ . Es fácil ver que $\psi \pitchfork \psi_0$ lo cual implica que $\tilde{Z}(\tau)$ es una subvariedad compacta de $M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$, además puesto que la sección cero ψ_0 es una subvariedad de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ de codimensión real bn entonces $\tilde{Z}(\tau)$ tiene codimensión bn en $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$. \square

Proposición 4.8. *Sea $h: \varepsilon \rightarrow \xi$ un morfismo genérico de haces, entonces $\tilde{Z}(h)$ es una subvariedad compacta de $M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ de dimensión $m + b(k - n - 1)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \\ \tilde{s}_h \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \varpi \times id \\ \searrow \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{c} \searrow \\ \downarrow \varpi \\ \nearrow s_h \end{array} \right) \\ M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

donde $\varpi: \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \rightarrow M$ es el haz de morfismos, ϕ y $\hat{\phi}$ las proyecciones correspondientes, s_h la sección de ϖ correspondiente a h y \tilde{s}_h dada como $\tilde{s}_h = s_h \times id$, sea τ el haz de morfismos tautológico sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \rightarrow M$. Notemos que $\tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau)) = \{(x, L) \in M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \mid (s_h(x), L) \in \tilde{Z}(\tau)\}$ es decir $L \subset \ker h_x = \tilde{Z}(h)$ entonces es suficiente ver que $\tilde{s}_h \pitchfork \tilde{Z}(\tau)$. Sea $(x, L) \in \tilde{Z}(h)$ entonces $\tilde{s}_h(x, L) = (h_x, L) \in \tilde{Z}(\tau)$, puesto que h es genérico s_{h_x} es transversal a $Z_j(\tau)$ esto es

$$d(s_h)_x(T_x M) \oplus T_{h_x} Z_j(\tau) = T_{h_x} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi),$$

por otro lado notemos que

$$\begin{aligned} & d(\tilde{s}_h)_{x,L}(T_x M \oplus T_L \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}) \oplus T_{(h_x, L)} \tilde{Z}(\tau) \\ & \cong d(s_h)_x(T_x M) \oplus d(id)_L(T_L \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}) \oplus T_{(h_x, L)} \\ & \cong d(s_h)_x(T_x M) \oplus T_L \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \oplus T(h_x, L) \tilde{Z}(\tau) \\ & \supseteq T_{h_x} \mathrm{Hom}(\varepsilon^k, \xi) \times T_L \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \end{aligned}$$

esta contención se da de manera trivial, ahora si tomamos $w \in T_L(\mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1})$ tal que $w = u_{fp} - v_{fp}$ con $u_{fp} \in T_L(\mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1})$ y $v_{fp} \in T_l \tilde{Z}(\tau)$ tenemos la otra contención por lo tanto

$$d(s_h)_x(T_x M) \oplus T_L \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \oplus T(h_x, L) \tilde{Z}(\tau) \cong T_{h_x} \mathrm{Hom}(\varepsilon^k, \xi) \oplus T_L \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$$

Y puesto que $\tilde{Z}(\tau)$ es cerrado en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ entonces $\tilde{Z}(h)$ es cerrado en el espacio $M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ el cual es compacto por lo tanto $\tilde{Z}(h)$ es compacto y por la Proposición 4.7 tenemos que $\tilde{Z}(h)$ tiene codimensión bn en $M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ por lo cual tiene dimensión real $m + b(k - n - 1)$. \square

Proposición 4.9. *sea $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$ la proyección sobre el primer factor entonces ϕ es propia y manda $\tilde{Z}^\circ(h)$ de manera difeomorfa a $Z_1(h)$.*

Demostración. Notemos que $\phi(\tilde{Z}(h)) = \bar{Z}_1(h) = \cup_{l \geq 1} Z_l(h)$. Sea $(x, L) \in \tilde{Z}$, es decir $(x, L) \subset \ker h_x$ entonces $\dim(\ker h_x)$ es al menos uno, por lo tanto $x \in \cup_{l \neq 1} Z_l(h)$, por otro lado si $x \in \cup Z_l(h)$, entonces $x \in Z_l(h)$ para algún j , por lo cual $\dim \ker H_x = j$ entonces contiene una línea L , por lo tanto $(x, L) \subset \ker H_x$ entonces $(X, L) \in \tilde{Z}(h)$ y $\phi(x, L) = x$. Puesto que M y $M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ son compactos y los subespacios $\tilde{Z}(h)$ y $\bar{Z}(h)$ son cerrados en M y $M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ respectivamente entonces

$$\phi: M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1} \Big|_{\tilde{Z}(h)} \rightarrow M$$

es propia. Tenemos que

$$\phi^{-1}(Z_1(h)) = \{(X, L \in \tilde{Z}(h) \mid \ker H_x = L)\} = \tilde{Z}^\circ(H).$$

Para cada $x \in Z_1(h)$ tenemos que la $\dim \ker H_x = 1$ entonces tiene una sola preimagen en \tilde{Z}° , puesto que \tilde{Z}° es abierto en $\tilde{Z}(h)$ entonces \tilde{Z}° es una subvariedad, por lo cual ϕ restringida a $\tilde{Z}^\circ(h)$ es un difeomorfismo. \square

Proposición 4.10. *La variedad $\tilde{Z}(h)$ es K_b -orientada, entonces tiene clase fundamental $[\tilde{Z}(h)] \in H_d(\tilde{Z}(h); K_b)$ donde $d = \dim \tilde{Z}(h)$.*

Demostración. Consideremos dos casos.

Primero cuando $b = 1$ y $k_b = \mathbb{Z}_2$ en este caso toda variedad tiene una única \mathbb{Z}_2 -orientación y como $\tilde{Z}(h)$ es compacta de dimensión $d = m + b(k - n - 1)$ entonces $[\tilde{Z}(h)] \in H_d(\tilde{Z}(h); \mathbb{Z}_2)$. Ahora si $b = 2$, $k_b = \mathbb{Z}$ y $\tilde{Z}(h)$ es orientada, tomemos ε^k y ξ haces vectoriales complejos, entonces estos tienen orientación canónica por lo cual $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ tiene una orientación canónica definida por $(\varepsilon^k)^* \otimes \xi$. M es \mathbb{Z} -orientable, entonces $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi)$ es \mathbb{Z} -orientable. Puesto que $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ es un haz complejo sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ entonces tiene orientación canónica, además como $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$ es \mathbb{Z} -orientable, entonces $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ es \mathbb{Z} -orientable, tomemos ψ_0 la sección cero en $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_1, \xi')$ la cual es una subvariedad \mathbb{Z} -orientada al ser una copia de la base es decir ψ_0 es difeomorfa a $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^k, \xi) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{k-1}$. Puesto que $\tilde{Z}(\tau) = \psi^{-1}(\psi_0)$ entonces $\tilde{Z}(\tau)$ es \mathbb{Z} -orientada. Por otro lado puesto que $h: \varepsilon^k \rightarrow \xi$ es un morfismo genérico entonces por la Proposición 4.8 tenemos $\tilde{s}_h \pitchfork \tilde{Z}(\tau)$. Finalmente puesto que $\tilde{s}_h^{-1}(\tilde{Z}(\tau)) = \tilde{Z}(h)$ entonces tenemos que $\tilde{Z}(h)$ es \mathbb{Z} -orientable por lo tanto $[\tilde{Z}(h)] \in H_d(\tilde{Z}(h), \mathbb{Z})$. \square

4.4. Clases características

4.4.1. Axiomas de clases características

Sea ξ un haz vectorial sobre B sobre un campo \mathbb{F} , consideremos las clases características asociadas, como clases de cohomología en $H^*(B, K_b)$ las cuales satisfacen los siguientes axiomas (Hirzebruch) que las caracterizan.

Axioma 1. Para cada haz vectorial ξ de rango n le corresponde una sucesión de clases de cohomología

$$\mathbf{cl}_i(\xi) \in H^{bi}(B; K_b), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

tal que $\mathbf{cl}_0(E) = 1$ y $\mathbf{cl}_i(E) = 0$ si $i > n$.

Axioma 2. Si $f: B' \rightarrow B$ es una aplicación continua, entonces

$$\mathbf{cl}_i(f^*(\xi)) = f^*(\mathbf{cl}_i(\xi)).$$

Axioma 3. Si ξ y η son haces vectoriales sobre B entonces

$$\mathbf{cl}_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^i \mathbf{cl}_j(\xi) \cup \mathbf{cl}_{i-j}(\eta)$$

Axioma 4. Para el haz de líneas canónico γ_1^1 sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^1$ tenemos

$$\mathbf{cl}_1(\gamma_1^1) = -g_1 \in H^b(\mathbb{F}\mathbb{P}^1, K_b).$$

Denotamos como g_1 al generador canónico de $H^{bn}(\mathbb{F}\mathbb{P}^n, K_b)$ que es el dual de Kronecker de la clase fundamental de $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$, en el caso $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ este es la clase dada por su orientación

canónica . La suma $\mathbf{cl}(\xi) = 1 + \mathbf{cl}_1(\xi) + \cdots + \mathbf{cl}_n(\xi)$ es la clase característica total.

En nuestra construcción mostraremos que las clases características se caracterizan por los axiomas 1, 2, 3', 4' donde los axiomas 3' y 4' son los siguientes:

Axioma 3'. Sea ε^k el haz producto de rango k entonces

$$\mathbf{Cl}_i \varepsilon^k \oplus \varepsilon^k = \mathbf{Cl}_i(\varepsilon^k).$$

Axioma 4'. Sea ζ^n el haz canónico de rango n sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ entonces

$$\mathbf{Cl}_n(\zeta^n) = (-1)^n g_n \in H^{bn}(\mathbb{F}\mathbb{P}^n; K_b).$$

Denotamos $\mathbf{cl}_i(\xi)$ a las clases que satisfacen los axiomas 1,2,3 y 4 y como $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ a las clases que satisfacen los axiomas 1,2,3' y 4'. La equivalencia de los axiomas la probaremos mas adelante.

Para haces vectoriales reales las clases $\mathbf{cl}_i(\xi)$ son llamadas *clases de Stiefel-Whitney* $w_i(\xi)$, para haces vectoriales complejos las clases $\mathbf{cl}_i(\xi)$ son llamadas *clases de Chern* $c_i(\xi)$.

4.4.2. Definición de las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$

Recordemos que los morfismos genéricos de haces son densos en el espacio de todos los morfismos de haces vectoriales por [4, 14.6].

Definición 4.11. Sea ξ un haz vectorial sobre un campo \mathbb{F} , suave de rango n sobre una variedad M de dimensión m , cerrada, suave, K_b -orientada. Sea $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi$ un morfismo genérico de el haz producto de rango $n - i + 1$ al haz ξ , definimos las clases

$$\mathbf{Cl}_i(\xi) = \hat{\phi}([\tilde{Z}(h)]) \in H^{bi}(M; K_b)$$

donde $\hat{\phi} = \phi_* \circ D_M$ y $[\tilde{Z}(h)]$ es la clase fundamental de $\tilde{Z}(h)$.

$$\begin{array}{ccc} H_{m-bi}(\tilde{Z}(h); K_b) & \xrightarrow{\phi_*} & H_{m-bi}(M; K_b) \\ & \searrow \hat{\phi} & \updownarrow D \\ & & H^{bi}(M; K_b) \end{array}$$

Proposición 4.12. Sean $\xi \cong \xi'$ entonces $\mathbf{Cl}_i(\xi) = \mathbf{Cl}_i(\xi')$.

Demostración. Sean $\xi \cong \xi'$ entonces existe una aplicación f tal que restringido a fibras es isomorfismo lineal y que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \xi' & \xrightarrow{f} & \xi \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

Sea $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi$ un morfismo genérico de haces, del haz producto de rango $n - i + 1$ al haz ξ y $h': \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi'$ definido como $h' = f^{-1} \circ h$ entonces por el Corolario 4.6 todos

los conjuntos singulares $Z_j(h)$ y $Z_j(h')$ son subvariedades de M . Consideremos el haz de morfismos $\pi: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \rightarrow M$ y el haz de morfismos $\pi': \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \rightarrow M$ entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \\ \begin{array}{c} \uparrow s_{h'} \\ \downarrow \pi' \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \pi \\ \uparrow s_h \end{array} \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array} \quad (4.1)$$

con \bar{f} definido como $v \mapsto f \circ v$, puesto que f es isomorfismo podemos definir la inversa de \bar{f} como $v' \mapsto f^{-1} \circ v'$ entonces \bar{f} es isomorfismo. Ahora sea s_h la sección de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$ correspondiente a h , definimos la sección $s_{h'}$ de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi')$ mediante

$$s_{h'}(x) = \bar{f}^{-1}(s_h(x))$$

Sean τ y τ' morfismos de haces tautológicos sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$ y $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi')$ respectivamente, ya que h es genérico tenemos que $s_h \pitchfork Z_j(\tau)$, por otro lado notemos que

$$\begin{aligned} \bar{f}^{-1}(Z_j(\tau)) &= \{v' \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \mid \bar{f}(v') \subset Z_j(\tau)\} \\ &= \{v' \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \mid \dim \ker \tau_{f \circ v'} = j\} \\ &= \{v' \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \mid \dim \ker f \circ v' = j\} \\ &= \{v' \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \mid \dim \ker v' = j\} \\ &= \{v' \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \mid \dim \ker \tau'_{v'} = j\} \\ &= Z_j(\tau') \end{aligned}$$

Dado que el diagrama (4.1) conmuta tenemos que $\bar{f} \circ s_{h'} \pitchfork Z_j(\tau)$ para toda j , esto es

$$d(\bar{f} \circ s_{h'})(T_x M) \oplus T_{\bar{f} \circ s_{h'}(x)} Z_j(\tau) = T_{\bar{f} \circ s_{h'}(x)} \text{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$$

ahora si aplicamos $d\bar{f}^{-1}$ tenemos

$$d\bar{f}^{-1} \left(d(\bar{f} \circ s_{h'})(T_x M) \oplus T_{\bar{f} \circ s_{h'}(x)} Z_j(\tau) \right) = d\bar{f}^{-1} T_{\bar{f} \circ s_{h'}(x)} \text{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$$

$$d\bar{f}^{-1} (d\bar{f}(ds'_{h'}(T_x M) \oplus T_{\bar{f} \circ s_{h'}(x)} Z_j(\tau))) = d\bar{f}^{-1} T_{\bar{f} \circ s_{h'}(x)} \text{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$$

$$ds'_{h'}(T_x M) \oplus T_{s_{h'}(x)} Z_j(\tau') = T_{s_{h'}(x)} \text{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi')$$

por lo tanto $s_{h'} \pitchfork Z_j(\tau')$. Ahora consideremos

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi') \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{\bar{f} \times id} & \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \\ \begin{array}{c} \uparrow s_{h'} \times id \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow s_h \times id \end{array} \\ M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

y notemos que

$$\begin{aligned} (s_{h'} \times id)^{-1}(\tilde{Z}(\tau')) &= \{(x, L) \in M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \mid s_{h'} \times id \subset \tilde{Z}(\tau')\} \\ &= \{(x, L) \in M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \mid (x, L) \subset \ker h'_x\} \\ &= \tilde{Z}(h') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s_h \times id)^{-1}(\tilde{Z}(\tau)) &= \{(x, L) \in M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \mid s_h \times id \subset \tilde{Z}(\tau)\} \\
&= \{(x, L) \in M \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \mid (x, L) \subset \ker h_x\} \\
&= \tilde{Z}(h)
\end{aligned}$$

entonces tenemos que $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$ y $\phi': \tilde{Z}(h') \rightarrow M$ son la misma aplicación y por lo tanto definen la misma clase de homología. \square

Teorema 4.13. *Las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi) = \hat{\phi}([\tilde{Z}(h)])$ satisfacen los axiomas 1, 2, 3'y 4'.*

Demostración. Demostraremos que las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ satisfacen los axiomas.

Axioma 1 Recordemos que $\tilde{Z}(h)$ es una variedad de dimensión $m - bi$, entonces podemos tomar $[\tilde{Z}(h)] \in H_{m-bi}(\tilde{Z}(h); K_b)$ por lo tanto $\mathbf{Cl}_i(\xi) \in H^{m-bi}(M; Z_b)$. Si $i = 0$ tenemos que $\phi(\tilde{Z}(h)) = M$, entonces $\tilde{Z}_1(h) = M$ y por la Proposición 4.9 cualquier $x \in Z_1(h)$ es un valor regular de ϕ con sólo una preimagen, por lo tanto ϕ tiene grado uno y $\mathbf{Cl}_0(\xi) = 1 \in H^0(M; K_b)$, ahora si $i > n$ la construcción no tiene sentido por lo tanto definimos $\mathbf{Cl}_i(\xi) = 0 \in H^{bi}(M; K_b)$.

Axioma 2 Sea $f: M' \rightarrow M$ una aplicación diferenciable y consideremos el haz inducido

$$\begin{array}{ccc}
f^*\xi & \xrightarrow{\bar{f}} & \xi \\
\downarrow p' & & \downarrow p \\
M' & \xrightarrow{f} & M
\end{array}$$

y sea $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi$ morfismo genérico de haces y recordemos que los conjuntos singulares $Z_j(M)$ son subvariedades de M . Sin pérdida de generalidad suponemos que f es transversal a $Z_j(h)$. Consideremos el haz de morfismo $\varpi: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \rightarrow M$ y tenemos que $f^* \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \cong \text{Hom}_{\mathbb{F}}(f^* \varepsilon^{n-i+1}, f^* \xi)$ y por la propiedad universal del haz inducido tenemos $f^* \varepsilon_M^{n-i+1} \cong \varepsilon_{M'}^{n-i+1}$, tenemos el siguiente diagrama del pull-back

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^* \xi) & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, f^* \xi) \\
s_g \uparrow \downarrow & & \downarrow p \uparrow s_h \\
M' & \xrightarrow{f} & M
\end{array}$$

sean τ y τ' haces tautológicos sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_M^{n-i+1}, \xi)$ y $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon_{M'}^{n-i+1}, f^* \xi)$ respectivamente entonces tenemos que $Z_j(\tau') = f^{-1}(Z_j(\tau))$. Definimos una sección de s_g de ϖ' como $s_g(y) = (y, \bar{f}_y^{-1}(s_h(f(y))))$ el cual está bien definido puesto que \bar{f} es isomorfismo restringido a fibras. Ahora necesitamos ver que s_g es transversal a toda $Z_j(\tau')$ puesto que h es genérico tenemos que s_h es transversal a $Z_j(\tau')$ para toda j , por otro lado $Z_j(h) = s_h^{-1}(Z_j(\tau))$ y recordemos que tomamos f transversal a $z_j(h)$ para toda j entonces $s_h \circ f$ es transversal a $Z_j(\tau)$ y como el diagrama conmuta tenemos que $\bar{f} \circ s_g$ es transversal a $Z_j(\tau)$ para toda j , esto es s_g es transversal a $Z_j(\tau')$ y puesto que $Z_j(\tau') = \bar{f}^{-1}(Z_j(\tau))$ y que f es transversal a $Z_j(\tau)$ y del diagrama tenemos que $Z_j(g) = f^{-1}(Z_j(h))$ entonces $\tilde{Z}_j(g) = f^{-1}(\tilde{Z}_j(h))$.

Sea $\phi: \tilde{Z}(h) \rightarrow M$ y $\phi': \tilde{Z}(g) \rightarrow M'$, puesto $\phi(\tilde{Z}(h)) = \tilde{Z}_1(h)$ y f es transversal a todas las

$Z_j(h)$ tenemos la transversalidad de f con ϕ y más aún

$$\begin{aligned} M' \pitchfork \tilde{Z}(h) &= \{(y, x, L) \in M' \times \tilde{Z}(h) \mid f(y) = \phi(x, L), (x, L) \subset \ker h_x\} \\ &= \{(y, f(x), L) \in M' \times \tilde{Z}(h) \mid (f(y), L) \subset \ker h_{f(y)}\} \\ &\cong \{(y, L) \in M' \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-i} \mid (y, L) \subset \ker g_y\} \\ &= \tilde{Z}(g). \end{aligned}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}(g) & \longrightarrow & \tilde{Z}(h) \\ \downarrow \phi' & & \downarrow \phi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

entonces usando la Proposición 3.38 tenemos que

$$(-1)^{bim} \phi'_*([\tilde{Z}(g)]) = D_{M'} \circ f^* \circ D_M^{-1} \circ \phi_*([\tilde{Z}(h)]).$$

Para el caso $b = 1$ (real) usamos coeficientes en \mathbb{Z}_2 por lo cual el signo no es importante, para el caso $b = 2$ (complejo), el signo es siempre positivo, entonces tenemos que $f^*: H^*(M; K_b) \rightarrow H^*(M'; K_b)$ mapea el dual de Poincaré de la clase $\phi_*([\tilde{Z}(h)])$ al dual de Poincaré de la clase $\phi'_*([\tilde{Z}(g)])$. Entonces $\mathbf{Cl}_i(f^*\xi) = f^*(\mathbf{Cl}_i(\xi))$.

Axioma 3' Sea $h: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi$ morfismo genérico de haces y consideremos $h \oplus id_{\varepsilon^k}: \varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k \rightarrow \xi \oplus \varepsilon^k$, notemos que $Z_j(h \oplus id_{\varepsilon^k}) = \{x \in M \mid \dim_{\mathbb{F}} \ker(h \oplus id_{\varepsilon^k})_x = j\} = Z_j(h)$ para toda j . Veamos que $h \oplus id_{\varepsilon^k}$ es genérico, consideremos el morfismo de haces

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k) \\ & \searrow s_h & \swarrow s_h \oplus id_{\varepsilon^k} \\ & M & \end{array}$$

con \hat{f} dado por $\hat{f}(v) = v \oplus id_{\varepsilon^k}$. Sean τ y τ'' haz de morfismos tautológicos sobre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k)$ respectivamente, entonces tenemos que $Z_j(\tau) = \hat{f}^{-1}(Z_j(\tau''))$, como h es genérico tenemos que s_h es transversal a $Z_j(\tau)$. Sea $s_{h \oplus id_{\varepsilon^k}}$ la sección correspondiente a $s_h \oplus id_{\varepsilon^k}$, entonces $s_h \oplus id_{\varepsilon^k} = \hat{f} \circ s_h$. Para probar que $s_h \oplus id_{\varepsilon^k}$ es transversal a $Z_j(\tau'')$ es suficiente ver que \hat{f} es transversal a $Z_j(\tau)$. Usando el hecho de que $Z_j(\tau)$ es una subvariedad de codimensión $b(n-k+j)$ tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) &= b^2(n-i+1)n + m, \\ \dim Z_j(\tau) &= b^2(n-i+1)n + m - bj(n-k+j), \\ \dim Z_j(\tau'') &= b^2(n-i+1+k)(n+k) + m - bj(n-k+j). \end{aligned}$$

Sea $v \in Z_j(\tau)$ y $w = \hat{f}(v)$ necesitamos probar que

$$\dim\{d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi)) \oplus T_w Z_j(\tau'')\} = \dim\{T_w \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-j+i} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k)\}.$$

Como $d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \cap T_w Z_j(\tau'')) = T_v Z_j(\tau)$ entonces

$$\begin{aligned} \dim\{d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi) \oplus T_w Z_j(\tau''))\} &= \dim\{d\hat{f}_v(T_v \mathrm{Hom}(\varepsilon^{n-i+1}, \xi))\} + \dim\{T_w Z_j(\tau'')\} - \dim\{T_v Z_j(\tau)\} \\ &= b^2(n-i+1+k)(n+k) + m \\ &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^{n-i+1} \oplus \varepsilon^k, \xi \oplus \varepsilon^k) \end{aligned}$$

y como $s_{h \oplus id_{\varepsilon^k}}$ es transversal a $Z_j(\tau'')$ tenemos que $h \oplus id_{\varepsilon^k}$ es genérico y $\tilde{z}(h \oplus id_{\varepsilon^k})$ es una subvariedad de $M \times \mathbb{F}^{n-i+k}$ de dimensión $m - bi$. Sea $\Phi: M \times \mathbb{F}^{k-i} \rightarrow M \times \mathbb{F}^{n-i+k}$ definida como

$$\phi((x, [x_1, \dots, x_{n-i+j}])) = (x, [x_1, \dots, x_{n-j+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_k])$$

donde $[x_1, \dots, x_{n-i+1}] \in \mathbb{F}^{n-i}$ dado en coordenadas homogéneas, entonces por la Proposición 4.9 tenemos que Φ manda de manera difeomorfa a $\tilde{Z}(h)$ en $\tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k})$ y tenemos que $\tilde{Z}_1(h \oplus id_{\varepsilon^k}) = \tilde{Z}_1(h)$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}(h) & \xrightarrow{\phi} & M \\ \Phi \downarrow & & \nearrow \check{\phi} \\ \tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k}) & & \end{array}$$

entonces $\phi_*([\tilde{Z}(h)]) = \check{\phi}_*([\tilde{Z}(h \oplus id_{\varepsilon^k})])$ por lo tanto $\mathbf{Cl}_i(\xi \oplus \varepsilon^k) = \mathbf{Cl}_i(\xi)$,

Axioma 4' Sea ζ^n el haz canónico sobre $\mathbb{F}P^n$, definimos un morfismo de haces $h: \varepsilon^1 \rightarrow \zeta^n$ definido como

$$h([x_1, \dots, x_{n+1}], t) = [x_1, \dots, x_{n+1}, tx_1, \dots, tx_n]$$

tenemos que $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n) \cong \zeta^n$ y la sección s_h asociada a h está dada por

$$s_h([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x - 1, \dots, x_{n+1}, tx_1, \dots, tx_n].$$

Sea τ morfismo tautológico sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$, el único conjunto singular es $Z_1(\tau) = S_1$ y es igual a la sección cero, sea $x_0 = [0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{F}P^n$ y $R = s_h(\mathbb{F}P^n) \subset \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$, entonces $R \cap S_1 = [x_0, 0]$. Ahora, queremos ver que R es transversal a S_1 , sea $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ y $x = (\tilde{x}, x_{n+1})$, tenemos que el espacio tangente a $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \mathbb{F}^n)$ en el punto $[x, v]$ está dado por

$$T_{[x,v]} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n) = \{ \langle y, w \rangle \mid \langle y, w \rangle \in \mathbb{F}^{n+1} \times \mathbb{F}^n, \ x \cdot y = 0 \}$$

donde $\langle y, w \rangle$ es la orbita de $(y, w) \in \mathbb{F}^{n+1} \times \mathbb{F}^n$ bajo la acción de $S^{v(1)}$ dado por $\lambda(y, w) = (\lambda y, \lambda w)$, entonces

$$T_{[x_0,0]} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n) = \{ \langle y, w \rangle \mid \langle y, w \rangle \in \mathbb{F}^{n+1} \times \mathbb{F}^n, \ y = (\tilde{y}, 0) \}$$

puesto que la condición $x_0 \cdot y = 0$ es equivalente a y ponemos la última coordenada igual a cero y tenemos las siguientes

$$T_{[x_0,0]} S_1 = \{ \langle y, 0 \rangle \mid (y, 0) \in \mathbb{F}^{n+1} \times \mathbb{F}^n, \ y = (\tilde{y}, 0) \}$$

$$T_{[x_0,0]} R = \{ \langle y, w \rangle \mid (y, w) \in \mathbb{F}^{n+1} \times \mathbb{F}^n, \ y = (w, 0) \}$$

si $\langle y, w \rangle \in T_{x_0,0} \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$ entonces $\langle (\tilde{y}, 0), w \rangle = \langle (w, 0), w \rangle + \langle (\tilde{y}-w, 0), 0 \rangle$ entonces tenemos que $\langle (w, 0), w \rangle \in T_{[x_0,0]} R$ y $\langle (\tilde{y}-w, 0), 0 \rangle \in T_{[x_0,0]} S_1$ por lo tanto S_1

es transversal a R entonces h es genérico y $Z_1(h) = \{x_0\}$ es una subvariedad de dimensión cero. Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ tenemos que tomar en cuenta las orientaciones, puesto que $\mathbb{F}\mathbb{P}^0$ es un punto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon', \zeta^n) \times \mathbb{F}\mathbb{P}^0 & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon', \zeta^n) \\ \tilde{s}_h \uparrow \downarrow \pi \times id & & \downarrow \pi \uparrow s_h \\ \mathbb{F}\mathbb{P}^n \times \mathbb{F}\mathbb{P}^0 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{F}\mathbb{P}^n \end{array}$$

tenemos que tomar las orientaciones de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $Z_1(\tau)$ y de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\varepsilon^1, \zeta^n)$ de manera que estas determine una orientación en $Z_1(h)$ puesto que podemos identificar $\tilde{Z}(\tau)$ con $Z_1(\tau)$ y $\tilde{Z}(h)$ con $Z_1(h)$, tenemos que $[\tilde{Z}(h)] = [Z_1(h)]$.

Sea $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ base canónica de \mathbb{C}^{n+1} , $\{f_1, \dots, f_n\}$ base canónica de \mathbb{C}^n . La base de $T_{x_0}\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ bajo $d(s_h)_{x_0}$ es la base de $T_{[x_0,0]}R$ dada por $\{\langle e_1, f_1 \rangle, \dots, \langle e_n, f_n \rangle\}$, por otro lado la base de $T_{[x_0,0]}S_1$ está dada por $\langle e_1, 0 \rangle, \dots, \langle e_n, 0 \rangle$ y la base de $T_{[x_0,0]}\mathrm{Hom}(\varepsilon^1, \zeta^n)$ es $\{\langle e_1, f_1 \rangle, \dots, \langle e_n, f_n \rangle, \langle 0, f_1 \rangle, \dots, \langle 0, f_n \rangle\}$. Dado que s_h es transversal a S_1 una base para $T_{[x_0,0]}R \oplus T_{[x_0,0]}S_1$ está dada por $\{\langle e_1, f_1 \rangle, \dots, \langle e_n, f_n \rangle, \langle e_1, 0 \rangle, \dots, \langle e_n, 0 \rangle\}$ por lo cual

$$\begin{aligned} & \mathrm{sign}\{\langle e_1, 0 \rangle, \dots, \langle e_n, 0 \rangle, \langle 0, f_1 \rangle, \dots, \langle 0, f_n \rangle\} \\ &= (-1)^{n^2} \mathrm{sign}\{\langle e_1, f_1 \rangle, \dots, \langle e_n, f_n \rangle, \langle e_1, 0 \rangle, \dots, \langle e_n, 0 \rangle\} \end{aligned}$$

por lo tanto $[\tilde{Z}(h)] = (-1)^{n^2} x_0 \in H_0(\{x_0\}; K_b)$ y entonces

$$Cl_n(\zeta^n) = \phi!([\tilde{Z}(h)]) = (-1)^{n^2} g_n \in H^{bn}(\mathbb{F}\mathbb{P}^n, K_b)$$

□

4.4.3. Generalización

Hasta el momento hemos definido las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ para haces vectoriales sobre una variedad diferenciable. Pero estas pueden ser definidas para cualesquiera haz vectorial numérico usando el hecho de que cualquier haz vectorial numérico es un pull-back del haz universal.

Sea $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$ el haz canónico sobre la variedad de Grassmann $G_n(\mathbb{F}^{n+l})$. Tomemos la inclusiones $\mathbb{F}^{n+l} \subset \mathbb{F}^{n+l+1} \subset \dots$ las cuales nos dan inclusiones $G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \subset G_n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \subset \dots$ y a su vez tenemos $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \subset \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \subset \dots$. Denotemos $G_n = G_n(\mathbb{F}^\infty) = \cup_l G_n(\mathbb{F}^{n+l})$ y a $\gamma^n = \cup_l \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$ con la topología del límite directo. Sea $l_l: G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \rightarrow G_n$ las inclusiones, tenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda: H^{bi}(G_n; K_b) & \longrightarrow \varprojlim H^{bi}(G_n) \\ \omega & \longmapsto ((l_0)_*(\omega), (l_1)_*(\omega), \dots, (l_k)_*(\omega), \dots) \end{aligned}$$

El caso para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ se sigue de [10, Proposición 3F.5] y el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ de [20, Proposición 7.66 y Teorema 7.75] puesto que por [20, Teorema 20.3.2] y el siguiente diagrama tenemos que los grupos $H^{bi}(G_n(\mathbb{C}^{n+l}); \mathbb{Z})$ satisfacen la condición de Mittag-Leffler dada en [20, Definición 7.74].

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) & \longrightarrow & \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_n(\mathbb{F}^{n+l}) & \hookrightarrow & G_n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \end{array} \quad (4.2)$$

entonces por el axioma 2 tenemos que $l^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}))) = \mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$ por lo tanto tenemos un elemento $(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n)), \dots, \mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})), \dots) \in \varprojlim H^i(G_n(\mathbb{F}^{n+l}); K_b)$ y podemos definir

$$\mathbf{Cl}_i(\gamma^n) = \lambda^{-1}((\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n)), \dots, \mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})), \dots)) \in H^{bi}(G_n; K_b) \quad (4.3)$$

por lo tanto tenemos

$$l_i^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)) = \mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) \text{ para toda } l \geq 0. \quad (4.4)$$

Notemos que para el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, puesto que $G_n(\mathbb{C}^{n+l})$ es una variedad compleja, se tiene una orientación natural y por lo tanto las clases $\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$ están bien definidas con coeficientes en \mathbb{Z} .

Proposición 4.14. *Sea ξ un haz vectorial de rango n sobre una variedad M compacta, suave y K_b -orientable. Sea $\psi_\xi: M \rightarrow G_n$ la aplicación clasificante de ξ entonces*

$$\mathbf{Cl}_i(\xi) = \psi_\xi^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)).$$

Demostración. Sea l suficientemente grande entonces por [16, Lema 5.3] tenemos que existe una aplicación $\varrho_l: M \rightarrow G_n(\mathbb{F}^{n+l})$ tal que $\xi = \varrho_l^*(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$ y por el axioma 2 tenemos que $\mathbf{Cl}_i(\xi) = \varrho_l^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})))$. Por otro lado puesto que $\xi = (l_l \circ \varrho_l)^*(\gamma^n)$ donde $l_l: G_n(\mathbb{F}^{n+l}) \rightarrow G_n$ es la inclusión, tenemos que ψ_ξ y $l_l \circ \varrho_l$ son homotópicas esto por [16, Teorema 5.7]. Por lo tanto usando la ecuación 4.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_\xi^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)) &= (l_l \circ \varrho_l)^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)) \\ &= \varrho_l^*(l_l^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n))) \\ &= \varrho_l^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))) \\ &= \mathbf{Cl}_i(\xi). \end{aligned}$$

□

Ahora usaremos la caracterización de las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ dada en la Proposición 4.14 para generalizar la construcción a cualquier haz vectorial numérico sobre cualquier espacio base.

Recordemos que una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ de un espacio B se dice *numérica* si existe una partición de la unidad $\{\phi_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ tal que el soporte de ϕ_i está contenido en U_i para cada $i \in \mathcal{A}$.

Definición 4.15. Un haz vectorial ξ sobre un espacio B es *numérico* si existe una cubierta numérica $\{U_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ de B tal que $\xi|_{U_i}$ es trivial para cada $i \in \mathcal{A}$.

Por [12, Teorema 12.2 y 12.4] todo haz vectorial numérico ξ de rango n tiene una aplicación clasificante $f_\xi: B \rightarrow G_n$ es decir $\xi \cong f_\xi^*(\gamma^n)$ la cual es única salvo homotopía, ver Proposición 2.50.

Teorema 4.16. *Sea ξ un haz vectorial numérico de rango n sobre un espacio B . Sea $\psi_\xi: B \rightarrow G_n$ la aplicación clasificante, definimos $\mathbf{Cl}_i(\xi) = \psi_\xi^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n))$ entonces $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ satisface los axiomas 1, 2, 3 y 4'.*

Demostración. Sólo mostraremos que las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ cumplen los axiomas 1,2 y 3' puesto que por la Proposición 4.14 verificar el axioma 4' es consecuencia del Teorema 4.13.

Axioma 1 Por definición $\mathbf{Cl}_i(\xi) \in H^{bi}(B; K_b)$.

Si $i = 0$ entonces por el Teorema 4.13 axioma 1 tenemos que $\mathbf{Cl}_0(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) = 1$ para toda l entonces por la ecuación 4.3 $\mathbf{Cl}_0(\gamma^n) = 1$ y por lo tanto $\mathbf{Cl}_0(\xi) = 1 \in H^0(B; K_b)$.

Análogamente si $i > n$ entonces por el Teorema 4.13 axioma 1 tenemos que $\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})) = 0$ para toda l , entonces por la ecuación 4.3 tenemos que $\mathbf{Cl}_i(\xi) = 0$ por lo tanto $\mathbf{Cl}_i(\xi) = 1 \in H^{bi}(B; K_b)$.

Axioma 2 Sea $f: B' \rightarrow B$ una aplicación continua y sean ψ_ξ y $\psi_{f^*\xi}$ las aplicaciones clasificantes de ξ y $f^*\xi$ respectivamente, entonces $f^*\xi \cong \psi_{f^*\xi}^*(\gamma^n) \cong (\psi_\xi \circ f)^*(\gamma^n)$, puesto que $\psi_{f^*\xi}$ y $\psi_\xi \circ f$ son homotópicas por [12, Teorema 12.4], por lo tanto

$$\begin{aligned} \psi_{f^*\xi}^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)) &= (\psi_\xi \circ f)^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)) \\ \mathbf{Cl}_i(f^*\xi) &= f^*(\psi_\xi^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n))) \\ &= f^*(\mathbf{Cl}_i(\xi)). \end{aligned}$$

Axioma 3 Sea ε_B^k el haz trivial de rango k sobre B y sean $\psi_\xi: B \rightarrow G_n$ y $\psi_{\xi \oplus \varepsilon_B^k}: B \rightarrow G_{n+k}$ las aplicaciones clasificantes de ξ y $\xi \oplus \varepsilon_B^k$, sea $\ell_n: G_n \rightarrow G_{n+k}$ la aplicación clasificante del haz $\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_\xi^*(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k) &\cong \psi_\xi^*(\gamma^n) \oplus \psi_\xi^*(\varepsilon_{G_n}^k) \\ &\cong \xi \oplus \varepsilon_B^k. \end{aligned}$$

Entonces $\xi \oplus \varepsilon_B^k \cong \psi_{\xi \oplus \varepsilon_B^k}^*(\gamma^{n+l})(\ell_n \circ \psi_\xi)^*(\gamma^{n+l})$ y por lo tanto $\psi_{\xi \oplus \varepsilon_B^k}$ y $\ell_n \circ \psi_\xi$ son homotópicas por [12, Teorema 12.4], por lo tanto

$$\mathbf{Cl}_i(\xi \oplus \varepsilon_B^k) = \psi_\xi^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k)). \quad (4.5)$$

Tenemos las inclusiones $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k \subset \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})}^k \subset \dots$ y por lo tanto $\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k = \cup_k (\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k)$. Por el diagrama (4.2) tenemos que $\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k = l_i^*(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l+1}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l+1})}^k)$ puesto que $l_i^*(\gamma^n) = \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l})$ tenemos que $l_i^*(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k) = \gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k$, entonces por la Proposición 4.14 tenemos que $\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k) = l_i^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k)) = l_i^*(\ell_n^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k))) = l_i^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k))$ entonces

$$\mathbf{Cl}_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k) = \lambda^{-1}((\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^n) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^n)}^k), \dots, \mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k))).$$

Pero por el axioma 3 del Teorema 4.13 tenemos $\mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}) \oplus \varepsilon_{G_n(\mathbb{F}^{n+l})}^k) = \mathbf{Cl}_i(\gamma^n(\mathbb{F}^{n+l}))$ para toda l entonces por (4.3) tenemos $\mathbf{Cl}_i(\gamma^n \oplus \varepsilon_{G_n}^k) = \mathbf{Cl}_i(\gamma^n)$ por lo tanto por (4.5) tenemos $\mathbf{Cl}_i(\xi \oplus \varepsilon_B^k) = \mathbf{Cl}_i(\xi)$ \square

4.4.4. Unicidad

En esta sección probaremos la unicidad de las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$.

Lema 4.17. *Sea $p: \gamma^k \rightarrow G_k$ el haz universal sobre G_k , sea p_0 la restricción de p al subespacio $E(\gamma^k)_0$ de todos los vectores distintos de cero del espacio total $E(\gamma^k)$. Entonces $p_0^*(\gamma^k) = \nu^{k-1} \oplus \varepsilon^1$ y $\mathbf{Cl}_k(p_0^*(\gamma^k)) = 0$.*

Demostración. Tenemos que $p_0^*(\gamma^k) = \{(\ell, v, w) | \ell \in G_k, v, w \in \ell \text{ y } v \neq 0\}$. La aplicación $s: E_0 \rightarrow p_0^*(\gamma^k)$ dada por $s(\ell, v, w) = (\ell, v, w)$ es una sección global no nula, esta sección define un subhaz de líneas trivial $\varepsilon^1 \subset p_0^*(\gamma^k)$, puesto que \mathbb{F}^∞ tiene métrica euclidiana, existe una métrica Riemanniana canónica en γ^k y consideramos el pull-back de esta métrica en $p_0^*(\gamma^k)$. Definimos ν^{k-1} como su complemento ortogonal, por lo tanto $p_0^*(\gamma^k) \cong \nu^{k-1} \oplus \varepsilon^1$ y por el Teorema 4.16 tenemos que $\mathbf{Cl}_k(p_0^*(\gamma^k)) = 0$ \square

Teorema 4.18. *Sea ξ un haz vectorial numérico de rango n entonces $\mathbf{Cl}_k(\xi) = \mathbf{cl}_k(\xi)$ para toda k*

Demostración. Sea $\psi_\xi: B \rightarrow G_n$ la aplicación clasificante de ξ esto es $\xi = \psi_\xi^*$. Sea $k \leq n$ y sea $\ell_k: G_k \rightarrow G_n$ la aplicación clasificante del haz $\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}$ los axiomas 2, y 3 implican el axioma 3' por [6, Proposición 3,p.39] entonces para $i = 0, \dots, n$ tenemos

$$\begin{aligned} \ell_k^*(\mathbf{cl}_i(\gamma^n)) &= \mathbf{cl}_i(\ell_k^*(\gamma^n)) \\ &= \mathbf{cl}_i(\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}) \\ &= \mathbf{cl}_i(\gamma^k). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otro lado, nuevamente por los axiomas 2, y 3' tenemos que si $i = 0, \dots, n$ entonces

$$\begin{aligned} \ell_k^*(\mathbf{Cl}_i(\gamma^n)) &= \mathbf{Cl}_i(\ell_k^*(\gamma^n)) \\ &= \mathbf{Cl}_i(\gamma^k \oplus \varepsilon^{n-k}) \\ &= \mathbf{Cl}_i(\gamma^k). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Entonces por Lema 4.17 tenemos $p_0^*(\mathbf{Cl}_k(\gamma^k)) = 0$ y por la sucesión exacta de Gysin [6, Teorema 12.2]

$$H^0(G_k; K_b) \xrightarrow{\cup \mathbf{cl}(\gamma^k)} H^{bk}(G_k; K_b) \xrightarrow{p_0^*} H^{bk}(E(\gamma^k)_0; K_b) \longrightarrow$$

existe $\alpha_k \in H^0(G_k; K_b)$ tal que $\mathbf{Cl}_k(\gamma^k) = \alpha_k \cup \mathbf{cl}_k(\gamma^k)$. Puesto que G_n es conexo por trayectorias para toda n , entonces ℓ_k induce un isomorfismo en la cohomología de dimensión cero, sea ρ_k el único elemento en $H^0(G_n; K_b)$ tal que $\ell_k^*(\rho_k) = \alpha_k$ entonces

$$\begin{aligned} \ell_k^*(\mathbf{Cl}_k(\gamma^n)) &= \mathbf{Cl}_k(\gamma^k) \\ &= \alpha_k \cup \mathbf{cl}_k(\gamma^k) \\ &= \alpha_k \cup \ell_k^*(\mathbf{cl}_k(\gamma^n)) \\ &= \ell_k^*(\rho_k \cup \mathbf{cl}_k(\gamma^n)) \end{aligned}$$

El anillo de cohomología $H^*(G_n; K_b)$ es el anillo de polinomios $K_b[\mathbf{cl}_1(\gamma^n), \dots, \mathbf{cl}_n(\gamma^n)]$ en las clases de Stiefel-Whitney de γ^n para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ [12, Teorema 20.5.2] ó en las clases de Chern de γ^n para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ [12, Teorema 20.3.2]. Por (4.6) tenemos que los homomorfismos

$$H^{bk}(G_k; K_b) \xrightarrow{\ell_k^*} H^{bk}(G_k; K_b)$$

son isomorfismos para $i \leq k$. Por lo tanto

$$\mathbf{Cl}_k(\gamma^k) = \rho_k \cup \mathbf{cl}_k(\gamma^n).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cl}_k(\xi) &= \mathbf{Cl}_k(\psi_\xi^*(\gamma^n)) \\
&= \psi_\xi^*(\mathbf{Cl}_k(\gamma^n)) \\
&= \psi_\xi^*(\rho_k \cup \mathbf{cl}_k(\gamma^n)) \\
&= \psi_\xi^*(\rho_k) \cup \psi_\xi^*(\mathbf{cl}_k(\gamma^n)) \\
&= \beta_k \cup \mathbf{cl}_k(\psi_\xi^*(\gamma^n)) \\
&= \beta_k \cup \mathbf{cl}_k(\xi)
\end{aligned}$$

con $\beta_k = \psi_\xi^*(\rho_k)$. El elemento $\beta_k \in H^0(B; K_b)$ es independiente del haz ξ puesto que para cualquier espacio conexo por trayectorias B y cualquier aplicación $f: B \rightarrow G_n$ el homomorfismo inducido $f^*: H^0(G_n; K_b) \rightarrow H^0(B; K_b)$ es el mismo isomorfismo. Sea ζ^k el haz canónico de rango k sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^k$, por el axioma 4' tenemos que $\mathbf{Cl}_k(\zeta^k) = (-1)^k g_k \in h^{bk}(\mathbb{F}\mathbb{P}^k; K_b)$. Consideremos la clase $\mathbf{cl}_1(\gamma_k^1) \in H^b(\mathbb{F}\mathbb{P}^k; K_b)$ entonces por [16, p.170] tenemos que

$$g_k = (-1)^k \mathbf{cl}_1(\gamma_k^1)^k \quad (4.8)$$

Por el Lema 4.2 ζ^k es la suma de Whitney de k copias del haz de líneas canónico γ_k^1 sobre $\mathbb{F}\mathbb{P}^k$, usando el axioma 3 y (4.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{cl}_k(\zeta^k) &= \mathbf{cl}_k(\gamma_k^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_k^1) \\
&= \mathbf{cl}_1(\gamma_k^1)^k \\
&= (-1)^k g_k
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{Cl}_k(\zeta^k) = \beta_k \cup \mathbf{cl}_k(\zeta^k)$ esto implica que $\beta_k = 1$ por lo tanto $\mathbf{Cl}_k(\xi) = \mathbf{cl}_k(\xi)$ para todo haz ξ y toda k . \square

Corolario 4.19 (Unicidad). *Sea ξ un haz vectorial suave, las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ están bien definidas por lo tanto están bien definidas para cualquier haz vectorial numérico.*

Demostración. Si tomamos un morfismo de haces genérico $g: \varepsilon^{n-i+1} \rightarrow \xi$ diferente en el Teorema 4.13, las clases $\mathbf{Cl}_i^g(\xi) = \phi!([\tilde{Z}(g)])$ satisfacen el Teorema 4.18 por lo tanto coinciden con las clases $\mathbf{cl}_i(\xi)$ por lo tanto son únicas. \square

Corolario 4.20. *Sea ξ un haz vectorial sobre un espacio paracompacto entonces las clases $\mathbf{Cl}_i(\xi)$ están bien definidas.*

Demostración. Puesto que cualquier cubierta abierta de un espacio paracompacto B tiene una partición de la unidad subordinada a un refinamiento localmente finito, entonces cualquier haz vectorial sobre B es numérico. \square

Bibliografía

- [1] Marcelo Aguilar, José Luis Cisneros-Molina, and Eduardo Frías Armenta. *Characteristic Classes and Transversality*. *Topology and its applications*, 154:1220–1235, 2007.
- [2] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] J. M. Boardman. *Singularities of differentiable maps*. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (33) (1967) 21–57.
- [4] TH. Bröcker and K.Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [5] José Luis Cisneros Molina. *Clases Características*. Notas del curso. <http://www.matcuer.unam.mx/~jlcm/clascar.pdf>.
- [6] S. S. Chern. *On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle*. *Ann. of Math.* 49 (1948) 362–372.
- [7] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic Topology A First Course*. Addison-Wesley, 1981.
- [8] W. H Greub. *Multilinear Algebra* Springer-Verlag, New York, 1978.
- [9] Victor Guillemin and Allan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [11] Allen Hatcher. *Vector Bundles and KTheory*. Unpublished book on-line available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>, January 2003.
- [12] D. Husemoller. *Fibre Bundles*, tercera edición. Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, 1978.
- [13] J.M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Graduate Texts in Maths 202, Springer, 2000.
- [14] Ralph Abraham, J. E. Marsden, and Tudor Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences75. Springer-Verlag, second edition, 1988.
- [15] John W. Milnor. *Topology from the differentiable point of view*. The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [16] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Study 76. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [17] S. William Massey. *Algebraic Topology: an introduction*. Springer Verlag, 1967.

-
- [18] Nakahara Miko.n *Geometry, Topology and Phisics*. IOP Publishing Ltd, second edition, 2003.
- [19] F. Ronga. *Le calcul des classes duales auxingularités de Boardman d'ordre deux*, *Comment. Math. Helv.* 47(1972) 15–35.
- [20] R.M. Switzer. *Algebraic Topology- Homotopy and Homology*. Grundlehren Math, Wiss., vol. 212, Springer, Berlin, 1970.
- [21] R. Thom. *Les singularités des applications différentiables*. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1955–1956) 43–87.

Índice alfabético

- Aplicación
 - diferenciable, 13
- Atlas, 11
- Atlas diferenciable, 12
- Clase
 - característica, 68
 - de Thom, 57
- Codimensión, 14
- Curva parametrizada, 14
- Difeomorfismo local, 17
- Diferencial, 16
- Encaje, 17
- Espacio
 - tangente, 15
- Funciones de transición, 27
- Germen de función, 14
- Grupos
 - de cohomología, 46
 - de homología, 45
- Haz
 - normal, 25
 - de línea, 62
 - de Möbius, 24
 - de morfismo, 63
 - de morfismos, 32
 - dual, 30
 - inducido, 35
 - producto, 24
 - restricción, 30
 - tangente, 24
 - tautológico, 25
 - vectorial, 23
 - vectorial paracompacto, 74
 - vectorial universal, 40
- Isomorfismo
 - de haces, 26
 - de Thom, 57
- Morfismo
 - de haces genéricos, 64
 - de haces tautológico, 63
- Operador
 - cara, 44
 - cofrontera, 45
 - frontera, 44
- Orientación, 53
- Potencia exterior
 - de haces vectoriales, 32
- Producto
 - cap, 51
 - cup, 50
 - interno, 33
 - slant, 51
- Producto tensorial
 - de haces vectoriales, 32
- Secciones, 26
- Simplejo estándar, 43
- Subcomplejo, 48
- Subhaz, 30
- Subvariedad, 14
- Suma directa
 - de haces vectoriales, 31
- Transversal, 20
- Umkehrhomomorfismo de Hopf, 60
- Valores regulares, 19
- Variedad
 - de Grassmann, 40
 - de Stiefel, 40
 - topológica, 11
- Vector tangente, 15

Índice de figuras

1.1. Cartas coordenadas	12
1.2. Parametrizaciones de S^2	13
1.3. Subvariedad	14
1.4. Vectores tangentes a p	15
1.5. Plano tangente a S^2 y recta tangente a S^1	15
1.6. Diferencial	17
1.7. Transversalidad	20
2.1. Haz vectorial	24
2.2. Haz de Möbius	24
2.3. Haz tangente a S^1	24
2.4. Secciones de un haz vectorial	27
2.5. Trivialización de un haz vectorial	28
2.6. Trivializaciones	29
2.7. Haz restricción	30
3.1. Simplejos de dimensión 0,1 y 2 respectivamente	44
3.2. i -ésima cara de dimensión 0,1 y 2	44

