UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PRODUCTO SIMÉTRICO DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

IRENE ROSAS NÚÑEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F.
2014

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1.Datos del alumno
Rosas
Núñez
Irene
55492234
irene@ciencias.unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
305187640

2. Datos del tutor
Dr
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

3. Datos del sinodal 1
Dra
Patricia
Pellicer
Covarrubias

4. Datos del sinodal 2
Dr
Rodrigo Jesús
Hernández
Gutiérrez

5. Datos del sinodal 3
Dra
María Isabel
Puga
Espinosa

6. Datos del sinodal 4
Dra
Verónica
Martínez de la Vega
y Mansilla

7. Datos del trabajo escrito.
El producto simétrico de espacios topológicos
p 71
2014

Agradecimientos

Para poder llevar a cabo este trabajo y finalizar mis estudios recibí el apoyo de muchísimas personas a las cuales me gustaría agradecer y dedicarles esta tesis.

A mis padres, sin su apoyo constante, y el amor al conocimiento que me han inculcaron a lo largo de mi vida nada de esto hubiera sido posible. Gracias por siempre cuidar de mí y brindarme su amor incondicional.

A mi hermana Diana y a Jacobo, por siempre brindarme risas y apoyo cuando lo necesito. Ustedes ya saben que son las mejores horribles personas que conozco y que los quiero montones.

A Jorge, mi asesor de tesis. Gracias por ser tan paciente, ayudarme siempre que lo necesité y enseñarme tanto.

Finalmente, les dedico esta tesis a mis amigos, por hacer de mi vida universitaria una fuente sin fin de agradables recuerdos y experiencias que me ayudaron a crecer y convertirme en la persona que soy hoy. En particular agradezco (cabe aclarar que sin ningún orden o preferencia particular, no vayan a hacerme drama) a Mafer, Jorge, Paola, Laura, Teresa, Juan, Viry, Omar, Azucena, Nora, Yamín, Gina, Selene, Norma, Javier y muchos más que no mencionare, pues me tardaría mucho, pero eso no implica que los aprecie menos o les este menos agradecida por todas esas aventuras que vivimos.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

En el campo de la Topología se le llaman Hiperespacios a familias de subconjuntos de un espacio topológico (espacio base) con ciertas características particulares, a las cuales se les da una estructura topológica a partir de la estructura ya existente en el espacio base. Los principios de la Teoría de Hiperespacios se remontan a inicios del siglo veinte, en los trabajos de Hausdorff [9] y Vietoris [16]. La Teoría de Hiperespacios ha sido ampliamente estudiada a lo largo de el último siglo y está profundamemte relacionada con la Teoría de Continuos.

Dado un espacio topológico X y n en los naturales, los hiperespacios más comunmente estudiados son los siguientes:

- $2^X = \{A \subseteq X | A \text{ es compacto y no vacío}\}$.
- $C(X) = \{A \in 2^X | A \text{ es conexo}\}$.
- $C_n(X) = \{A \in 2^X | A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes conexas}\}$.
- $F_n(X) = \{A \in 2^X || A| \leq n\}$.

En el trabajo *"On symmetric products of topological spaces"* publicado por Karol Borsuk y Stanislaw Ulam en 1931 [3] se define por primera vez $F_n(X)$, que se denomina *enésimo producto simétrico de un espacio topológico*. En un principio se propone a este espacio como un subespacio de 2^X que, para espacios compactos y de dimensión finita, se asemeja bastante a 2^X y se espera que su estudio ayude a entender la estructura de 2^X. Borsuk y Ulam enfocan su trabajo en listar qué propiedades topológicas resultan invariantes bajo el producto simétrico y dejan como preguntas abiertas muchas de estas propiedades.

El objetivo de esta tesis es estudiar al producto simétrico en relación con su espacio base, para esto retomaremos la idea de Borsuk y Ulam y analizaremos que propiedades topológicas básicas resultan ser invariantes bajo productos simétricos y cómo se puede inferir la estructura del espacio base a partir de la estructura encontrada en el Producto Simétrico, esto es, qué propiedades hereda el espacio base de su producto simétrico.

En el grupo de continuos de la UNAM en el Distrito federal tradicionalmente se han estudiado las propiedades de los productos simétricos de continuos. Sin embargo, el objetivo de esta tesis es presentar los resultados de la forma más general posible, por lo que para nuestros espacios base utilizarar emos espacios topológicos con la menor cantidad de estructura posible.

En el primer capítulo definiremos formalmente al producto simétrico, se verá cómo darle una topología, propiedades básicas de dicha topología y las primeras propiedades del producto simétrico. Por último, se darán ejemplos de productos simétricos junto con sus modelos gráficos.

En el segundo capítulo definiremos una función que nos ayudara a relacionar al producto topológico con el producto simétrico, veremos las propiedades de esta función para después pasar a ver algunas propiedades estructurales dentro de $F_n(X)$. En la última sección de este capítulo veremos cómo el producto simétrico de un espacio métrico resulta ser métrico.

El tercer capítulo está completamente dedicado a los axiomas de separación, se verá cuáles resultan ser invariantes bajo el producto simétrico y si es que estos se heredan del producto simétrico al espacio base.

En el cuarto capítulo analizaremos las propiedades de conexidad, conexidad local, compacidad, compacidad local, los axiomas de numerabilidad, separabilidad y la propiedad de Lindelöf.

Finalmente, en el quinto capítulo se verá cómo se relaciona la dimensión del espacio base con la dimensión del producto simétrico. También se verán la contractibilidad, contractibilidad local y se verá para qué tipo de espacios se preserva la propiedad de ser un retracto absoluto bajo productos simétricos.

Este trabajo se realizó teniendo en mente a lectores que hayan completado los dos primeros cursos de Topología ofrecidos en la Facultad de Ciencias de la UNAM, por lo que se espera que el lector este familiarizado con los resultados a los que se hace referencia.

0.1. Notación

A lo largo de este trabajo se utilizará la siguiente notación:

Sean X un espacio topológico, $A, B \subseteq X$ y f y g funciones.

- $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Q}$ denota al conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales.
- $|A|$ denota a la cardinalidad de A.
- $\wp(A)$ denota al conjunto potencia de A.
- $A - B = \{a \in A | a \notin B\}$.
- $A^n = \underbrace{A \times ... \times A}_{\text{n veces}}$.
- $\overline{A}$ denota a la cerradura de A en X.
- $\overline{A}_B$ denota a la cerradura de A en B.

- $int(A)$ denota al interior de A en X.
- $int(A)_B$ denota al interior de A en B.
- $Fr(A)$ denota a la frontera de A en X.
- $Fr(A)_B$ denota a la frontera de A en B.
- $Img(f)$ denota al conjunto imagen de la función f.
- $f|_A$ denota a la función f restringida a A.
- $f \circ g$ denota la composición de las funciones f y g.

Capítulo 1

Definiciones y propiedades básicas

En la primera parte de este capítulo se presenta la definición de producto simétrico, en la segunda sección se verá cómo darle una topología a este espacio.

En la sección 1.3 se darán algunas propiedades importantes de dicha topología. También se verá cómo se relacionan los productos simétricos de espacios homeomorfos.

Por último, en la sección 1.4 se verán algunos ejemplos de productos simétricos junto con sus respectivos modelos geométricos, en especial veremos los primeros tres productos simétricos del intervalo $[0,1]$ y se presentará un resultado interesante a partir de éstos.

1.1. El enésimo producto simétrico

DEFINICIÓN 1.1.1. Sea X un espacio topológico. Llamaremos el enésimo producto simétrico de X al conjunto

$$F_n(X) = \{A \subseteq X \mid 1 \leq \mid A \mid \leq n\} \subseteq \wp(X).$$

En este caso X es llamado el espacio base del $F_n(X)$.

Es importante hacer las siguientes observaciones:

- $F_{n-1}(X) \subseteq F_n(X)$ para toda $n > 1$.
- Si $A \subseteq B$, entonces $F_n(A) \subseteq F_n(B)$.

A partir de ahora, siempre que consideremos un conjunto $A \in F_n(X)$ tal que $A = \{a_1, ..., a_r\}$ con $r \leq n$, supondremos que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$.

1.2. Una topología para el Producto Simétrico

Al enésimo producto simétrico se le puede asociar una topología a partir de la topología existente en el espacio base mediante los siguiente conjuntos.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sean $U_1, U_2, ..., U_m$ subconjuntos de X. Llamaremos subconjunto Vietórico al siguiente conjunto:

$$\langle U_1, U_2, ..., U_m \rangle = \{A \in F_n(X) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} U_i \ y \ A \cap U_i \neq \emptyset \ para \ toda \ i \in \{1, 2, ..., m\}\}.$$

PROPOSICIÓN 1.2.2. Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el conjunto

$$\mathbb{V} = \{\langle U_1, U_2, ..., U_m \rangle \mid m \in \mathbb{N} \ y \ U_1, U_2, ..., U_m \text{ son subconjuntos abiertos de } X\}$$

forma una base para una topología en $F_n(X)$.

Demostración. Para ver que $\mathbb{V}$ es base de una topología necesitamos comprobar los siguientes puntos [17, 5.3 p. 38]:

1. Para toda $A \in F_n(X)$, existe $\mathcal{U} \in \mathbb{V}$ tal que $A \in \mathcal{U}$.
2. Dados $\langle V_1, V_2, ..., V_m \rangle$, $\langle U_1, ..., U_l \rangle \in \mathbb{V}$ y $P \in \langle V_1, V_2, ..., V_m \rangle \cap \langle U_1, ..., U_l \rangle$, entonces existe $\langle W_1, ..., W_k \rangle \in \mathbb{V}$ tal que $p \in \langle W_1, ..., W_k \rangle$ y $\langle W_1, ..., W_k \rangle \subseteq \langle V_1, V_2, ..., V_m \rangle \cap \langle U_1, ..., U_l \rangle$.

La demostración del primer punto es bastante sencilla, basta notar que si $A \in F_n(X)$, entonces $A \in \langle X \rangle$.

Para demostrar el segundo punto basta con probar que dados $\langle U_1, ..., U_l \rangle, \langle V_1, ..., V_m \rangle \in \mathbb{V}$ se tiene que $\langle U_1, ..., U_l \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle = \langle U_1 \cap V, ..., U_l \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle \in \mathbb{V}$, donde $U = \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$.

Sean $\langle V_1, V_2, ..., V_m \rangle, \langle U_1, ..., U_l \rangle \in \mathbb{V}$. Primero probaremos que se da la siguiente contención, $\langle U_1, ..., U_l \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle \subseteq \langle U_1 \cap V, ..., U_l \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle$.

Sea $K \in \langle U_1, ..., U_l \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle$. Veamos primero que $K \subseteq (\bigcup_{i=1}^{l} (U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U))$. Como tenemos que $K \in \langle U_1, ..., U_l \rangle$ y $K \in \langle V_1, ..., V_m \rangle$, por definición de subconjunto Vietórico sabemos que $K \subseteq U$ y $K \subseteq V$, esto implica que $K \subseteq U \cap V$.

Por otra parte, notemos que $\bigcup_{i=1}^{l} (U_i \cap V) \cup \bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U) = (V \cap \bigcup_{i=1}^{l} U_i) \cup (U \cap \bigcup_{j=1}^{m} V_j) = (V \cap U) \cup (U \cap V) = U \cap V$. De esto se sigue que $K \subseteq (\bigcup_{i=1}^{l} (U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} (V_j \cap U))$.

Veamos ahora que, para toda $i \in \{1, ..., l\}$, se tiene que $K \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$. Dada $i \in \{1, ..., l\}$, por la definición de Vietórico se cumple que $K \cap U_i \neq \emptyset$. Como $K \subseteq V$, tenemos que $\emptyset \neq K \cap U_i = (K \cap V) \cap U_i = K \cap (U_i \cap V)$.

Bajo un razonamiento análogo al anterior se concluye que, para toda $j \in \{1, ..., m\}$, se cumple que $K \cap (V_j \cap U) \neq \emptyset$. Por lo que $K \in \langle U_1 \cap V, U_2 \cap V, ..., U_l \cap V, V_1 \cap U, V_2 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle$.

Ahora veamos que $\langle U_1 \cap V, ..., U_l \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle \subseteq \langle U_1, ..., U_l \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle$. Sea $K \in \langle U_1 \cap V, U_2 \cap V, ..., U_l \cap V, V_1 \cap U, V_2 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle$. Probemos primero que se cumple que

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ y $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$.

Por la definición de Vietórico sabemos que $K \subseteq (\bigcup_{i=1}^{l}(U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m}(V_j \cap U)) = U \cap V$, por lo tanto $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ y $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$.

Por otra parte, sabemos que, para toda $i \in \{1, ..., l\}$, $\emptyset \neq K \cap U_i \cap V \subseteq K \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, para toda $i \in \{1, ..., l\}$, tenemos que $K \cap U_i \neq \emptyset$. Similarmente, para toda $j \in \{1, ..., m\}$, tenemos que $K \cap V_j \neq \emptyset$. De esto se sigue que $K \in \langle U_1, ..., U_l \rangle \cap \langle V_i, ..., V_m \rangle$. Con esto concluimos la prueba de que $\langle U_1, ..., U_l \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle = \langle U_1 \cap V, ..., U_l \cap V, V_1 \cap U, ..., V_m \cap U \rangle$.

De este modo hemos probado que $\mathbb{V}$ es base para una topología en $F_n(X)$.

□

A la topología generada por $\mathbb{V}$ se le conoce como la topología de Vietoris y la denotaremos como τ_V. A los elementos de $\mathbb{V}$ se les llama Vietóricos básicos.

1.3. Algunas propiedades de la topología de Vietoris y una propiedad del Producto Simétrico

A continuación veremos algunas propiedades importantes de la topología de Vietoris que nos serán útiles a lo largo de este trabajo.

LEMA 1.3.1. Sean X un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y A un subconjunto cerrado de X. Entonces,

1. $A^- = \{K \in F_n(X) | K \cap A \neq \emptyset\}$ es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$.
2. $A^+ = \{K \in F_n(X) | K \subset A\}$ es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$.

Demostración. Empecemos con la prueba de 1, para ello veamos que $F_n(X) - A^-$ es un subconjunto abierto en X. Sea $C \in F_n(X) - A^-$. Esto implica que $C \cap A = \emptyset$, por lo que $C \subset X - A$. Además, $X - A$ es un subconjunto abierto de X. Entonces, $C \in \langle X - A \rangle$ el cual es un subconjunto abierto en $F_n(X)$.

Notemos que $\langle X - A \rangle \subset F_n(X) - A^-$, ya que si $B \in \langle X - A \rangle$ se tiene que $B \subseteq X - A$. Esto implica que $B \cap A = \emptyset$, por lo cual se tiene que $B \notin A^-$. Por lo tanto $F_n(X) - A^-$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$ y, en consecuencia, se tiene que A^- es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$.

Probemos ahora el inciso 2, para ello veamos que $F_n(X) - A^+$ es un subconjunto abierto en X. Sea $C \in F_n(X) - A^+$. Tenemos que $C \nsubseteq A$, por lo que existe $c \in C$ tal que $c \in X - A$. Como A es un subconjunto cerrado en X, tenemos que $X - A$ es un subconjunto abierto en X. Notemos que $C \in \langle X, X - A \rangle$.

Por otra parte, tenemos que $\langle X, X - A \rangle \subset F_n(X) - A^+$ ya que si $B \in \langle X, X - A \rangle$, entonces $B \cap (X - A) \neq \emptyset$. Esto implica que existe un $b \in B$, tal que $b \in X - A$ por lo cual $B \nsubseteq A$ y, en consecuencia, $B \notin A^+$. De esta forma se concluye que $F_n(X) - A^+$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$. Por lo cual tenemos que A^+ es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$.

□

PROPOSICIÓN 1.3.2. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si $k \leq n$ y $V_1, ..., V_k$ son subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces se cumple que $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle = \overline{\langle V_1, V_2, ..., V_k \rangle}$ en $F_n(X)$.

Demostración. Veamos primero que $\overline{\langle V_1, V_2, ..., V_k \rangle} \subseteq \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$. Debido a que se cumple $\langle V_1, ..., V_k \rangle \subseteq \langle \overline{V}_1, ..., \overline{V_k} \rangle$, solamente es necesario comprobar que $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$ es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$ [4, 4.5, p. 70].

Sea $A = \{a_1, ..., a_r\} \in F_n(X) - \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$. Entonces, por la definición de Vietórico, el que $A \notin \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$ se debe a dos posibles razones: $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i}$ o $A \cap \overline{V_j} = \emptyset$ para alguna $j \in \{1, ..., k\}$.

- Caso 1. $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i}$.

  Este caso implica que existe un $a_j \in A$, tal que $a_j \notin \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i}$. Dada $i \in \{1, ..., k\}$, como $\overline{V_i}$ es un subconjunto cerrado de X, tenemos que existe U_i subconjunto abierto en X tal que $a_j \in U_i$ y $U_i \subset X - \overline{V_i}$.

  Definimos $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Notemos que $U \subset X - \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i}$ y que U es un subconjunto abierto en X puesto que es intersección finita de abiertos [4, 1.1(2), p. 62].

  Consideremos al Vietórico básico $\langle X, U \rangle$, se tiene que $A \in \langle X, U \rangle$ puesto que $A \subset X \cup U$, $A \cap X \neq \emptyset$ y $A \cap U \neq \emptyset$.

  Veamos que $\langle X, U \rangle \subseteq F_n(X) - \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$. Sea $B \in \langle X, U \rangle$. Como $B \cap U \neq \emptyset$, tenemos que existe $b \in B$, tal que $b \in U \subseteq X - \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i}$, por lo cual $B \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{V_i}$, esto implica que $B \notin \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$. De esto se concluye que $\langle X, U \rangle$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$, tal que $A \in \langle X, U \rangle \subseteq F_n(X) - \langle \overline{V}_1, ..., \overline{V}_n \rangle$.

- Caso 2. $A \cap \overline{V_i} = \emptyset$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

  Esto implica que $A \subset X - \overline{V_i}$, además, se tiene que este último es un subconjunto abierto en X puesto que $\overline{V_i}$ es un subconjunto cerrado en X. Consideremos al Vietórico básico $\langle X - \overline{V_i} \rangle$, notemos que $A \in \langle X - \overline{V_i} \rangle$.

  Veamos que $\langle X - \overline{V_i} \rangle \subseteq F_n(X) - \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$. Sea $B \in \langle X - \overline{V_i} \rangle$. Entonces, $B \subseteq X - \overline{V_i}$, por lo cual $B \cap \overline{V_i} = \emptyset$, por lo tanto tenemos que $B \notin \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$. De esta forma hemos probado que $\langle X - \overline{V}_i \rangle$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$, tal que $A \in \langle X - \overline{V}_i \rangle \subseteq F_n(X) - \langle \overline{V}_1, ..., \overline{V}_n \rangle$.

De los puntos anteriores se concluye que $\langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$ es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$ y ,de esta forma, se tiene que $\overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle} \subseteq \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$.

Veamos ahora que $\langle \overline{V_1}, ..., \overline{V_k} \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle}$. Sean $A = \{a_1, ..., a_l\} \in F_n(X)$ tal que $A \in \langle \overline{V_1}, ..., \overline{V_k} \rangle$ y $\mathcal{W} = \langle W_1, ..., W_r \rangle$ un subconjunto Vietórico básico de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$. Para ver que $A \in \overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle}$, basta mostrar que $\langle W_1, ..., W_r \rangle \cap \langle V_1, ..., V_k \rangle \neq \emptyset$ [4, 4.3, p. 69].

Como por hipótesis tenemos que $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces, para cada $t \in \{1, ..., l\}$, se cumple que existe una única $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $a_t \in \overline{V_j}$. A partir de este hecho definimos la función $f = \{1, ..., l\} \longrightarrow \{1, ..., k\}$ como $f(t)$ es el único punto en $\{1, ..., k\}$ que cumple que $a_t \in \overline{V_{f(t)}}$. Veamos que f es suprayectiva. Sea $j \in \{1, ..., k\}$. Como $A \in \langle \overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_k} \rangle$, tenemos que $A \cap \overline{V_j} \neq \emptyset$, por lo cual existe $t \in \{1, ..., l\}$, tal que $a_t \in \overline{V_j}$, esto implica que $f(t) = j$.

Definimos $W^t = \bigcap\{W_i | a_t \in W_i\}$. Dada $t \in \{1, ..., l\}$, se cumple que $a_t \in W^t \cap \overline{V_{f(t)}}$, por lo cual existe $p_t \in X$, tal que $p_t \in W^t \cap V_{f(t)}$.

Definimos $P = \{p_1, ..., p_l\}$. Notemos que $l \leq n$ puesto que $A \in F_n(X)$; esto implica que $P \in F_n(X)$. Veamos que se cumple que $P \in \langle V_1, ..., V_k \rangle \cap \langle W_1, ..., W_r \rangle$.

Empecemos por comprobar que $P \in \langle V_1, ..., V_k \rangle$. Por construcción de P tenemos que $P \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$.

Ahora probaremos que para toda $i \in \{1, ..., k\}$ se cumple que $P \cap V_i \neq \emptyset$. Sea $i \in \{1, ..., k\}$. Como f es suprayectiva, se tiene que existe $t \in \{1, ..., l\}$ tal que $f(t) = i$, por lo cual $a_t \in \overline{V_i}$, y de esto se obtiene que $p_t \in V_i$. Por lo tanto $P \in \langle V_1, ..., V_k \rangle$.

Comprobemos ahora que $P \in \langle W_1, ..., W_r \rangle$. De la construcción de P también se obtiene que $P \subseteq \bigcup\limits_{1=1}^{r} W_i$. Veamos que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se tiene que $P \cap W_i \neq \emptyset$. Sea $i \in \{1, ..., r\}$. Como $A \in \langle W_1, ..., W_r \rangle$, tenemos que $A \cap W_i \neq \emptyset$,entonces existe $t \in \{1, ..., l\}$, tal que $a_t \in W_i$. Esto implica que $W^t \subseteq W_i$, por lo cual $p_t \in W_i$. De esto se infiere que $P \in \langle W_1, ..., W_r \rangle$.

De lo anterior se concluye que $P \in \langle V_1, ..., V_k \rangle \cap \langle W_1, ..., W_r \rangle$. Así hemos demostrado que $A \in \overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle}$, lo que implica que $\langle \overline{V_1}, ..., \overline{V_k} \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle}$. Con esto se concluye que se cumple la igualdad $\langle \overline{V_1}, ..., \overline{V_k} \rangle = \overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle}$.

$\square$

LEMA 1.3.3. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A = \{a_1, ..., a_r\} \in F_n(X)$ donde $1 \leq r \leq n$ y $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Si $A \in \mathcal{U}$, entonces existe un Vietórico básico $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, ..., V_r \rangle$ en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y, para toda $i \in \{1, 2, ..., r\}$, se tiene que $a_i \in V_i$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que dados $a_i, a_j \in A$ con $i \neq j$ se tiene que $a_i \neq a_j$. Esto implica, dado que X es un espacio de Hausdorff, que existen W_i^j y W_j^i subconjuntos abiertos de X tales que $a_i \in W_i^j$, $a_j \in W_j^i$ y, además, se cumple que $W_i^j \cap W_j^i \neq \emptyset$.

Definimos a $W_i = \bigcap\limits_{j \neq i} W_i^j$.

Notemos que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se tiene que $a_i \in W_i$ y $a_j \notin W_i$ si $i \neq j$; de hecho tenemos que $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ puesto que si existiera $x \in W_i \cap W_j$, entonces tendríamos que $x \in W_i^j$ y $x \in W_j^i$, lo cual es una contradicción. Por otra parte, como W_i está definido como una intersección finita de subconjuntos abiertos de X, se tiene que W_i es un subconjunto abierto en X para toda $i \in \{1, ..., r\}$ [4, 1.1(2), p. 62].

Como $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$ se tiene que existe $\mathcal{U}^* = \langle U_1, ..., U_m \rangle$ un Vietórico básico en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}$.

Definamos entonces al conjunto $V_i = W_i \cap (\bigcap\{U_k | a_i \in U_k\})$. Hagamos las siguientes observaciones:

1. El conjunto V_i es abierto en X puesto que es intersección finita de subconjuntos abiertos de X [4, 1.1, p. 62].
2. Para toda $i \in \{1, ..., r\}$ se tiene que $a_i \in V_i$ ya que, por definición, tenemos que $a_i \in W_i$ y, por la definición de Vietórico, tenemos que existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $a_i \in U_j$.
3. Se cumple que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i$. Esto debido a que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se tiene que $a_i \in V_i$.
4. Se tiene que $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Si existiera $x \in V_i \cap V_j$ esto implicaría que $x \in W_i \cap W_j$, lo cual es una contradicción.
5. Se da la contención $\bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$. Esto es claro al notar que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se tiene que $V_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$ puesto que se cumple $V_i \subseteq U_j$ para alguna $j \in \{1, ..., m\}$, por como definimos a V_i (recordemos que por definición de Vietórico $a_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., m\}$).

Definimos al conjunto $\mathcal{V}$ como el Vietórico denotado por $\langle V_1, ..., V_r \rangle$. De la Observación 3 y la definición de V_i se concluye que $A \in \mathcal{V}$.

Veamos que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Sea $B \in \mathcal{V}$. Por la definición de los conjuntos Vietóricos tenemos que $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i$ de lo cual se puede concluir, junto con Observación 5, que $B \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$.

Por otra parte comprobemos que para toda $i \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $B \cap U_i \neq \emptyset$. Sabemos que hay al menos una $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $V_j \subseteq U_i$ dado que existe al menos una $a_j \in U_i$. Como $B \cap V_j \neq \emptyset$, entonces existe $x \in B$ tal que $x \in U_i$. Por lo tanto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}^*$ y esto implica que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. □

TEOREMA 1.3.4. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X, Y espacios topológicos tales que X es homeomorfo a Y. Entonces $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$.*

Demostración. Como X es homeomorfo a Y, entonces existe una función $h : X \longrightarrow Y$ con h continua, biyectiva y de inversa continua.

Definimos $H : F_n(X) \longrightarrow F_n(Y)$ dada por $H(A) = h[A]$ donde $h[A] = \{h(x) \in Y | x \in A\}$. Como h es una función biyectiva tenemos que $|h[A]| = |A|$ [1, p. 61], entonces $1 \leq |h[A]| \leq n$ por lo que $H(A) \in F_n(Y)$ por lo cual tenemos que H esta bien definida.

Veamos que H es un homeomorfismo.

- H es suprayectiva.
  Sea $K = \{k_1, ..., k_m\} \in F_n(Y)$. Como h es suprayectiva tenemos que para cada $i \in \{1, ..., m\}$ existe $p_i \in X$ tal que $h(p_i) = k_i$. Definimos $P = \{p_1, ..., p_m\}$. Tenemos que $H(P) = K$, por lo tanto H es suprayectiva.

- H es inyectiva.
  Sean $A, B \in F_n(X)$ tales que $H(A) = H(B)$ esto implica que $h[A] = h[B]$. Como h es biyectiva, tenemos que $A = h^{-1}[h[A]] = h^{-1}[h[B]] = B$

- H es continua.
  Basta probar que dado $\langle W_1, ..., W_l \rangle$ un Vietórico básico en $F_n(Y)$, se tiene que $H^{-1}(\langle W_1, ..., W_l \rangle) = \langle h^{-1}[W_1], ..., h^{-1}[W_l] \rangle$ [4, 8.1, p. 79].

  Veamos primero que $H^{-1}(\langle W_1, ..., W_l \rangle) \subseteq \langle h^{-1}[W_1], ..., h^{-1}[W_1] \rangle$. Sea $A \in H^{-1}(\langle W_1, ..., W_l \rangle)$. Esto implica que $h[A] \in \langle W_1, ..., W_l \rangle$, por lo que se tiene que $H(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i$. Por lo cual tenemos que $A = H^{-1}(H(A)) \subseteq H^{-1}\big(\bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i\big) = h^{-1}\big[\bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i\big]$, donde tenemos que $h^{-1}\big[\bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i\big] = \bigcup\limits_{i=1}^{l} h^{-1}[W_i]$ ya que h es función. Por lo cual $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{l} h^{-1}[W_i] = \bigcup\limits_{i=1}^{l} H^{-1}(W_i)$.

  Veamos que para toda $i \in \{1, ..., l\}$ se cumple que $A \cap h^{-1}[W_i] \neq \emptyset$. Sea $i \in \{1, ..., l\}$. Como $H(A) \in \langle W_1, ..., W_l \rangle$, tenemos que que $H(A) \cap W_i \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $a \in H(A)$ tal que $a \in W_i$, entonces $h^{-1}(a) \in h^{-1}[W_i]$ y, puesto que $h^{-1}(a) \in A$, tenemos que $A \cap H^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. De esta forma se obtiene que $A \in \langle h^{-1}[W_1], ..., H^{-1}[W_l] \rangle$.

  Ahora veamos que $\langle h^{-1}[W_1], ..., h^{-1}[W_l] \rangle \subseteq H^{-1}(\langle W_1, ..., W_l \rangle)$.

  Sea $K \in \langle h^{-1}[W_1], ..., h^{-1}[W_l] \rangle$. Basta probar que $H(K) \in \langle W_1, ..., W_l \rangle$. Por definición de Vietórico tenemos que $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{l} h^{-1}[W_i] = h^{-1}\big[\bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i\big] = H^{-1}\big(\bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i\big)$, por lo que $H(K) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{l} W_i$.

  Por otra parte tenemos que, dada $i \in \{1, ..., l\}$, se cumple que $K \cap h^{-1}[W_i] \neq \emptyset$, por lo tanto existe $k \in K$ tal que $k \in h^{-1}[W_i] = H^{-1}(W_i)$. Esto implica que $h(k) \in W_i$ y en consecuencia tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., l\}$, se cumple que $H(K) \cap W_i \neq \emptyset$. Así concluimos que $H(K) \in \langle W_1, ..., W_l \rangle$.

  Por lo tanto tenemos que $H^{-1}(\langle W_1, ..., W_l \rangle) = \langle H^{-1}(W_1), ..., H^{-1}(W_l) \rangle$.

- H^{-1} es continua.

  De igual forma que con la continuidad en H para probar este punto basta observar que, dado $\langle U_1, ..., U_m \rangle$ Vietórico básico en $F_n(X)$, se tiene que $H(\langle U_1, ..., U_m \rangle) = \langle h[U_1], ..., h[U_m] \rangle$.

  Veamos primero que $H(\langle U_1, ..., U_m \rangle) \subseteq \langle h[U_1], ..., H[U_m] \rangle$. Sea $A \in H(\langle U_1, ..., U_m \rangle)$. Esto implica que $H^{-1}(A) \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$, por lo cual tenemos que $H^{-1}(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$, de esto se tiene que $A = H(H^{-1}(A)) \subseteq H\big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i\big) = h\big[\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i\big] = \bigcup\limits_{i=1}^{m} h[U_i]$.

  Por otra parte, como $H^{-1}(A) \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$, tenemos que dada $i \in \{1, .., m\}$, se cumple que $H^{-1}(A) \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo que existe $a \in H^{-1}(A)$ tal que $a \in U_i$, por lo cual $h(A) \in H(U_i) = h[U_i]$. De esta forma tenemos que $A \cap h[U_i] \neq \emptyset$, por lo tanto $A \in \langle H(U_1), ..., H(U_m) \rangle$.

  Veamos ahora que $\langle h[U_1], ..., h[U_m] \rangle \subseteq H(\langle U_1, ..., U_m \rangle)$. Sea $A \in \langle h[U_1], ..., h[U_m] \rangle$. Basta con demostrar que $H^{-1}(A) \in \langle U_1, ..., m \rangle$. Por definición tenemos que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} h[U_i] = h\big[\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i\big] = H\big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i\big)$ por lo cual tenemos que $H^{-1}(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$.

  Por otro lado tenemos que, dada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, se cumple que $A \cap h[U_i] \neq \emptyset$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \in h[U_i]$; en consecuencia se tiene que $h^{-1}(a) \in U_i$, de esta forma concluimos que $H^{-1}(A) = h^{-1}[A] \cap U_i \neq \emptyset$. Así hemos demostrado que $H^{-1}(A) \in \langle U_1, U_2, ..., U_m \rangle$.

  Con esto concluimos la prueba de que $H(\langle U_1, U_2, ..., U_m \rangle) = \langle H(U_1), H(U_2), ..., H(U_m) \rangle$.

Tenemos entonces que H es una función biyectiva, continua y de inversa también continua, por lo cual H es un homeomorfismo entre $F_n(X)$ y $F_n(Y)$.

$\square$

1.4. Ejemplos de productos simétricos y sus respectivos modelos gráficos.

A continuación veremos algunos ejemplos de espacios topológicos y sus productos simétricos. Asimismo construiremos modelos geométricos para dichos productos simétricos.

EJEMPLO 1.4.1. $F_2([0, 1])$ donde $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual.

Tenemos que $F_2([0, 1]) = \{\{a, b\} \mid a, b \in [0, 1]\}$. Consideremos a la función $f : F_2([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(\{a, b\}) \longrightarrow (\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$.

Veamos que $Img(f) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. Por una parte tenemos que $Img(f) \subseteq \{(u, v) \in \mathbb{R} | 0 \leq u \leq v \leq 1\}$ ya que, para todo $\{a, b\} \in F_2(\mathbb{R})$, se cumple la siguiente desigualdad: $0 \leq \text{mín}\{a, b\} \leq \text{máx}\{a, b\} \leq 1$. Por otra parte, se tiene que $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq v \leq 1\} \subseteq Img(f)$, puesto que, para todo $(u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq v \leq 1\}$, se cumple que $\{u, v\} \in F_2([0, 1])$.

Notemos que el conjunto $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq v \leq 1\}$ nos describe un triángulo con vértices en $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$ (Figura 1.1).

Probemos que f es biyectiva. Veamos primero que es inyectiva. Sean $\{a_1,b_1\}, \{a_2,b_2\} \in F_2([0,1])$ tales que $f(\{a_1,b_1\}) = f(\{a_2,b_2\})$. Esto implica que $(\text{mín}\{a_1,b_1\}, \text{máx}\{a_1,b_1\}) = (\text{mín}\{a_2,b_2\}, \text{máx}\{a_2,b_2\})$, por lo cual tenemos que $\{a_1,b_1\} = \{a_2,b_2\}$. Por otra parte, se tiene que f es suprayectiva del hecho de que, para todo $(u,v) \in Img(f)$, se cumple que $\{u,v\} \in F_2([0,1])$.

Veamos que f es continua. Sea $\{a,b\} \in F_2([0,1])$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b$. Sea U un subconjunto abierto en $Img(f)$ tal que $(a,b) = f(\{a,b\}) \in U$. Queremos ver que existe $\mathcal{V}$ subconjunto abierto en $F_2([0,1])$ tal que $\{a,b\} \in \mathcal{V}$ y $f[\mathcal{V}] \subset U$ [17, 7.1, p. 44]. Como estamos considerando a $\mathbb{R}^2$ con la topología usual sabemos que podemos encontrar un conjunto de la forma $V = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ tal que $(a,b) \in V$ y $V \subset U$. Consideremos al abierto $\mathcal{V} = \big\langle (a-\varepsilon, a+\varepsilon), (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \big\rangle$ en $F_2(X)$.

Notemos que $\{a,b\} \in \mathcal{V}$, si probamos que $f[\mathcal{V}] \subset V \subset U$ sabremos que f es continua. Sea $\{c,d\} \in \mathcal{V}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c \leq d$. Tenemos que $\{c,d\} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cup (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, entonces $c \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ó $c \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

- Caso 1. $c \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

  Tenemos que $d \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ o $d \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Si $d \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, tenemos que $(c,d) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ y por lo tanto $f(\{c,d\}) \in V \subseteq U$.

  Si $d \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, sabemos que $\{c,d\} \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \neq \emptyset$, por lo que $c \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ o $d \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, en cualquiera de estos casos se tiene que $d \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ (puesto que $c \leq d$). Por lo tanto $(c,d) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ y, en consecuencia, $f(\{c,d\}) \in V \subseteq U$.

- Caso 2. $c \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, tenemos que $d \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ puesto que $c \leq d$. Por otra parte, como $\{c,d\} \in \mathcal{V}$, tenemos que $\{c,d\} \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \neq \emptyset$, entonces $c \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ o $d \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. En cualquiera de los casos se tiene que $c \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (puesto que $c \leq d$). Por lo tanto $(c,d) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ y, en consecuencia, $f(\{c,d\}) \in V \subseteq U$.

De esta forma hemos demostrado que f es una función continua.

Ahora veamos que f^{-1} también es continua. Sean $(a,b) \in Img(f)$ y $\mathcal{U} = \big\langle U_1, ..., U_n \big\rangle$ un Vietórico tal que $f^{-1}((a,b)) = \{a,b\} \in \mathcal{U}$. Definimos $A = \bigcap\{U_i | a \in U_i\}$, $B = \bigcap\{U_i | b \in U_i\}$, $\varepsilon = \text{mín}\{d(a,u) | u \notin A\}$ y $\delta = \text{mín}\{d(b,u) | u \notin B\}$. Definimos ahora a $\gamma = \text{mín}\{\varepsilon, \delta\}$ y consideramos el abierto $V = (a - \frac{\gamma}{2}, a + \frac{\gamma}{2}) \times (b - \frac{\gamma}{2}, b + \frac{\gamma}{2})$, se tiene entonces que $(a,b) \in V$ y por lo tanto $f^{-1}((a,b)) \in f^{-1}[V]$. Sólo nos falta comprobar que $f^{-1}[V] \subset \mathcal{U}$.

Sea $(c,d) \in V$. Entonces $c \in (a - \frac{\gamma}{2}, a + \frac{\gamma}{2}) \subset A$ y $d \in (b - \frac{\gamma}{2}, b + \frac{\gamma}{2}) \subset B$, por lo que, a partir de las definiciones de A y B, tenemos que $\{c,d\} = f^{-1}((c,d)) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ y que, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que $\{c,d\} \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo tanto f^{-1} es continua.

Entonces, tenemos que tanto f como su inversa son continuas y, además, f es biyectiva. Por lo que f es un homeomorfismo entre $F_2([0,1])$ y $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq v \leq 1\}$.

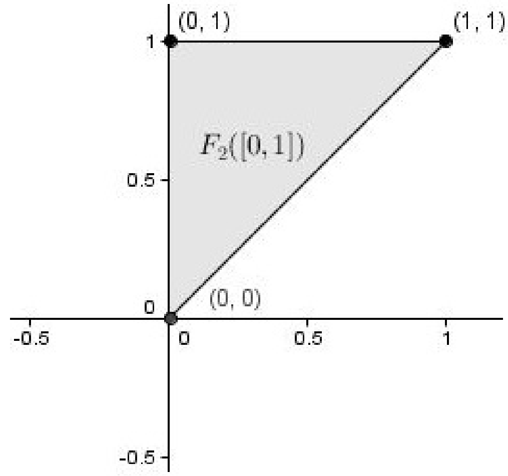


Figura 1.1: Representación gráfica del hiperespacio $F_2([0,1])$

Una observación importante es que $F_1([0,1]) = \{\{a\}|a \in [0,1]\}$ bajo f va a dar a la diagonal del triángulo que es una sección de la identidad.

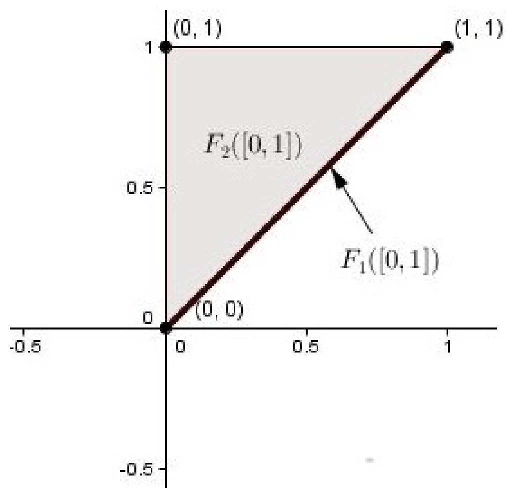


Figura 1.2: $F_1([0,1])$ en $F_2([0,1])$

EJEMPLO 1.4.2. $F_3([0,1])$ donde $[0,1] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.

Este ejemplo fue dado por Borsuk y Ulam en [3], siendo así uno de los primeros modelos creados para el producto simétrico.

Veamos primero de forma intuitiva cómo se podría construir un modelo para este hiperespacio.

Tenemos que $F_3([0,1]) = \{A \subseteq [0,1] \mid 1 \leq |A| \leq 3\}$, sea $A = \{a,b,c\} \in F_3([0,1])$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \leq b \leq c$. Fijemos a y c, de este modo obtenemos el conjunto $X = \{\{a,b,c\} \subseteq [0,1] \,|\, a \leq b \leq c\}$. Si ponemos a correr la b, empezaríamos y terminaríamos en $\{a,c\}$ que es un elemento de $F_2([0,1])$. En el Ejemplo 1.4.1 vimos cómo $F_2([0,1])$ es equivalente a un triangulo rectángulo.

Este comportamiento de empezar y terminar en un mismo punto es algo que podemos caracterizar como una circunferencia. Entonces tenemos una circunferencia asociada a cada $\{a, b\} \in F_2([0,1])$, excepto para los unitarios. Podemos visualizar esto como circunferencias ancladas en $F_2([0,1])$ donde las circunferencias van disminuyendo su diámetro al acercarse a la hipotenusa que es donde se encuentran los conjuntos con un solo elemento.

Por lo cual nuestro modelo sería el sólido de revolución resultante al rotar el triángulo que es el modelo de $F_2([0,1])$ usando como eje de rotación su hipotenusa.

Estas ideas se pueden formalizar de la siguiente manera. Recordemos que sin pérdida de generalidad podemos describir a $F_3([0,1])$ de la siguiente manera: $F_3([0,1]) = \{\{a, b, c\} \subseteq [0,1] \, | 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1\}$.

Definimos a la función $f : F_3([0,1]) \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(a, b, c) = (\xi(a, b, c), \eta(a, b, c), \zeta(a, b, c))$, donde

$$\xi(a, b, c) = \begin{cases} (c-a)sen\left(2\pi \frac{b-c}{a-c}\right) & \text{si } c > a \\ 0 & \text{si } c = a \end{cases}$$

$$\eta(a, b, c) = \begin{cases} (c-a)cos\left(2\pi \frac{b-c}{a-c}\right) & \text{si } c > a \\ 0 & \text{si } c = a \end{cases}$$

$$\zeta(a, b, c) = a$$

Esta función describe un cono en $\mathbb{R}^3$ con vértice en $(0,0,1)$ y como base tiene a la circunferencia unitaria centrada en el origen en el plano XY. Denotaremos con la letra C a este cono.

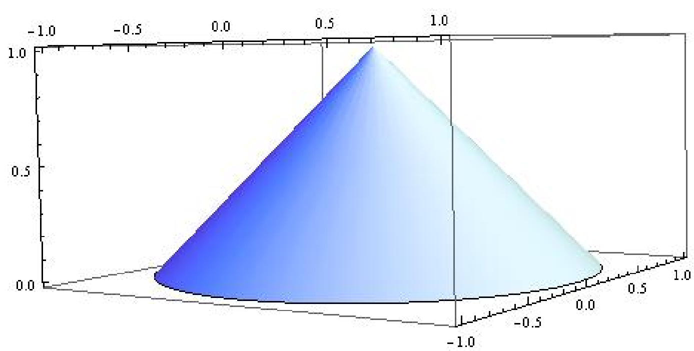


Figura 1.3: Gráfica de f

Notemos que f es una función continua puesto que es continua entrada a entrada [15, 4.10(a), p. 94].

Veamos primero que f es inyectiva. Sean $\{a, b, c\}$, $\{x, y, z\} \in F_3([0,1])$ y $\{a, b, c\} \neq \{x, y, z\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \leq b \leq c$ y $x \leq y \leq z$, tenemos varios casos:

Caso 1. $\{a,b,c\} \cap \{x,y,z\} = \emptyset$.

Entonces, $a \neq x$ por lo que $\zeta(\{a,b,c\}) \neq \zeta(\{x,y,z\})$ de tal forma que $f(\{a,b,c\}) \neq f(\{x,y,z\})$.

Caso 2. $\{a,b,c\} \cap \{x,y,z\} \neq \emptyset$.

Subcaso 2.1 $\mid \{a,b,c\} \cap \{x,y,z\} \mid = 2$.

Si $a \neq x$,entonces tenemos que $\zeta(\{a,b,c\}) \neq \zeta(\{x,y,z\})$ y de aquí obtenemos que $f(\{a,b,c\}) \neq f(\{x,y,z\})$.

Si $a = x$, entonces tenemos 4 posibilidades para los demás elementos:

- $b = y$ y $c \neq z$
- $b = z$ y $c \neq y$
- $c = y$ y $b \neq z$
- $c = z$ y $b \neq y$

en cualquiera de estos casos se tiene que $\xi(\{a,b,c\}) \neq \xi(\{x,y,z\})$, por lo cual se cumple $f(\{a,b,c\}) \neq f(\{x,y,z\})$.

Subcaso 2.2 $\mid \{a,b,c\} \cap \{x,y,z\} \mid = 1$.

Si $a \neq x$, entonces $\zeta(\{a,b,c\}) \neq \zeta(\{x,y,z\})$ por lo que $f(\{a,b,c\}) \neq f(\{x,y,z\})$.

Si $a = x$, tenemos que $b \neq y$, $b \neq z$, $c \neq y$ y $c \neq z$ por lo cual $\xi(\{a,b,c\}) \neq \xi(\{x,y,z\})$ entonces $f(\{a,b,c\}) \neq f(\{x,y,z\})$.

Pudiendo concluir así finalmente que f es inyectiva.

Veamos ahora que f es suprayectiva. Sea $(x,y,z) \in C = Img(f)$. Buscamos $\{a,b,c\} \in F_3([0,1])$ tal que $f(\{a,b,c\}) = (x,y,z)$. Notemos que para esto es necesario que se cumpla que $z = a$. Ahora bien, tenemos dos posibles casos:

Caso 1. $x \neq 0$ o $y \neq 0$. Medimos la distancia del punto (x,y,z) al eje Z, esto es $\sqrt{x^2+y^2}$, tenemos entonces que $\sqrt{x^2+y^2} = c - a$ por lo que $c = a - \sqrt{x^2+y^2} = z - \sqrt{x^2+y^2}$.

Si $y \neq 0$, tenemos que $y = (c-a)cos\left(2\pi\frac{b-c}{a-c}\right)$ de aquí se observa que $\frac{y}{c-a} = cos\left(2\pi\frac{b-c}{a-c}\right)$, por lo que $cos^{-1}\left(\frac{y}{c-a}\right) = 2\pi\frac{b-c}{a-c}$. De aqui de obtiene que $b = \frac{(a-c)cos^{-1}\left(\frac{y}{c-a}\right)}{(2\pi)} + c$. De esta forma tenemos que $f(\{a,b,c\}) = (x,y,z)$.

Si $x \neq 0$, tenemos que $x = (c-a)sen\left(2\pi\frac{b-c}{a-c}\right)$, de donde se observa que $b = \frac{(a-c)sen^{-1}\left(\frac{x}{c-a}\right)}{(2\pi)} + c$. De esta forma tenemos que $f(\{a,b,c\}) = (x,y,z)$.

Caso 2. Si $x = 0$, entonces, por las definiciones de ξ y η, tenemos que $y = 0$ (Notemos que $y = 0$ de igual forma implica que $x = 0$).

Tenemos que $z = a$, como $x = 0$ y $y = 0$, entonces $a = c$. Por lo cual tendríamos que $b = a = c$, ya que se debe de cumplir que $a \leq b \leq c$. De aquí se tiene que $f(\{a\}) = (x,y,z)$

De los Casos 1 y 2 podemos concluir que f es suprayectiva.

Ahora bien, más adelante en la tesis veremos como la compacidad se preserva bajo productos simétricos en el Teorema 4.2.2, entonces tenemos que $F_3([0,1])$ es compacto puesto que $[0,1]$ es compacto. Por otra parte, tenemos que $Img(f)$ es Hausdorff puesto que es un subespacio de un espacio de Hausdorff [17, 13.8(a), p. 87]. Entonces, como f es una función continua y biyectiva de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff, tenemos que f es un homeomorfismo [4, 2.1, p. 226].

Es importante destacar que en este modelo los unitarios resultan ser todos los puntos sobre el eje Z.

Al leer los Ejemplos 1.4.1 y 1.4.2 cabría suponer que $F_4([0,1])$ debería de poder encajarse en $\mathbb{R}^4$ de una manera similar, sin embargo esto no puede hacerse. De hecho para $n \geq 4$ se tiene que $F_n([0,1])$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Veremos el caso para $n = 4$, pero antes necesitamos conocer el siguiente resultado.

TEOREMA 1.4.3 (de la Invarianza del Dominio)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología usual. Si U es un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces, para cualquier encaje $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la imagen $h(U)$ debe de ser un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.*

No probaremos este Teorema puesto que sale de los intereses de esta tesis, la demostración se puede consultar en [8, 2B.3 p. 172].

PROPOSICIÓN 1.4.4. $F_4([0,1])$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^4$

Demostración. Consideremos al conjunto $J = [-1,1]$, sabemos que J es homeomorfo a $[0,1]$ por lo que tenemos que $F_4(J)$ es homeomorfo a $F_4([0,1])$ al aplicar el Teorema 1.3.4. Veamos entonces que $F_4(J)$ no es encajable en $\mathbb{R}^4$.

Supongamos que $F_4(J)$ es encajable en $\mathbb{R}^4$. Entonces, existe $h : F_4(J) \to \mathbb{R}^4$ una función continua, inyectiva y suprayectiva en su imagen.

Sea $Q = \{\{x,y,z,x_1\} \in F_4(J) | 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1,\ y = z \text{ si y sólo si } x = y = z \text{ y } |x_1 + \frac{1}{4}| \leq \frac{1}{12}\}$.

Definimos $\phi : Q \to \mathbb{R}^4$ dada por $\phi(\{x,y,z,x_1\}) = (\xi(\{x,y,z\}), \eta(\{x,y,z\}), \zeta(\{x,y,z\}), x_1 + \frac{1}{4})$ donde ξ, η, ζ son las mismas funciones utilizadas en el Ejemplo 1.4.2 y que están definidas de la siguiente manera:

$$\xi(x,y,z) = \begin{cases} (z-x)sen\left(2\pi\frac{y-z}{x-z}\right) & \text{si } z > x \\ 0 & \text{si } z = x \end{cases}$$

$$\eta(x,y,z). = \begin{cases} (z-x)cos\left(2\pi\frac{y-z}{x-z}\right) & \text{si } z > x \\ 0 & \text{si } z = x \end{cases}$$

$$\zeta(x,y,z) = x$$

Recordemos que la imagen de la función $f(\{x,y,z\}) = (\xi(\{x,y,z\}), \eta(\{x,y,z\}), \zeta(\{x,y,z\}))$ es el cono C, como se vio en el Ejemplo 1.4.2.

Notemos que la imagen de ϕ es $C \times [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}]$ y esto es homeomorfo a $[0,1]^4$.

Tenemos entonces que $int(Q)$ en $F_4(J)$ es homeomorfo a $int([0,1]^4)$ en $[0,1]^4$, que es un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^4$. Como ϕ y h son encajes, tenemos que $\phi^{-1} \circ h$ es un encaje de $int([0,1]^4)$ en $\mathbb{R}^4$. De esto se infiere, por el Teorema de la Invarianza del dominio (Teorema 1.4.3), que $h[int(Q)]$ es un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^4$.

Notemos que $f(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$ es un punto interior del cono C y $-\frac{1}{4}$ es un punto interior de $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}]$, por lo que $\phi(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\})$ es un punto interior de $C \times [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}]$. Como ϕ es un encaje, de esto se tiene que $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\} \in int(Q)$,entonces, $h(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\}) \in h(int(Q))$.

Consideremos la sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ donde $p_k = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{12k}, -\frac{1}{4}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{12k}, -\frac{1}{4}\}$. Observemos que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $p_k \notin Q$.

Notemos que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\} \in Q$.

Como h es un encaje tenemos que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $h(p_k) \in \mathbb{R}^4 \backslash h[Q]$ y $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = h(\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\}) \in h[int(Q)]$, lo cual implica que $h[int(Q)]$ no es abierto en $\mathbb{R}^4$ [17, 10.5, p. 72]. Esto es una contradicción puesto que teníamos que $h[int(Q)]$ es abierto en $\mathbb{R}^4$.

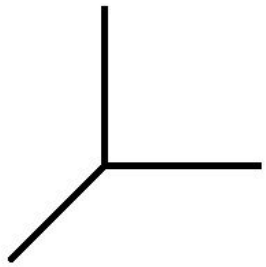
Por lo que no existe un encaje de $F_4(J)$ en $\mathbb{R}^4$ y en consecuencia no existe un encaje de $F_4([0,1])$ en $\mathbb{R}^4$.

$\square$

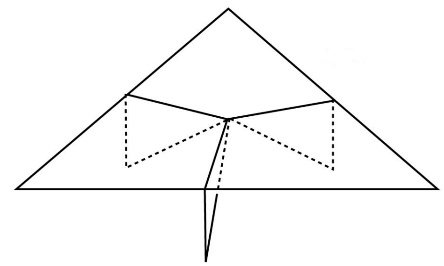
Este resultado se puede generalizar para $F_n([0,1])$ y $\mathbb{R}^n$ de la siguiente forma.

Se considera $Q = \{\{x,y,x,x_1,x_2,...,x_{n-3}\} \in F_n(J) | 0 \neq x \neq y \neq z,\ y = z \,\text{si y sólo si}\, x = y = z \,\text{y}\, |x_i + \frac{i}{n}| \neq \frac{1}{3n}$ para toda $i \in \{1,...,n-3\}\}$. A partir de este conjunto se define la siguiente función $\phi : Q \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(\{x,y,z,x_1,...,x_{n-3}\}) = (\xi\{x,y,z\}, \eta\{x,y,z\}, \zeta\{x,y,z\}, \xi_i, \xi_2, ..., \xi_{n-3})$ donde $\xi_i = x_1 + \frac{i}{n}$ para toda $i \in \{1,...,n-3\}$. El resto de la demostración es análoga.

Otros ejemplos conocidos son $F_2(Y)$, donde Y es un triodo simple y $F_2(S_1)$, donde S_1 es la circunferencia unitaria centrada en el origen, ilustrados a continuación. Si al lector le interesa ver cómo se construyen estas representaciones geométricas puede consultar el libro *Hiperespacios de Continuos* de Alejandro Illanes [11].

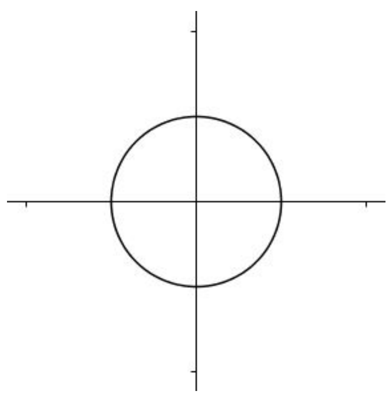


(a) El triodo simple Y

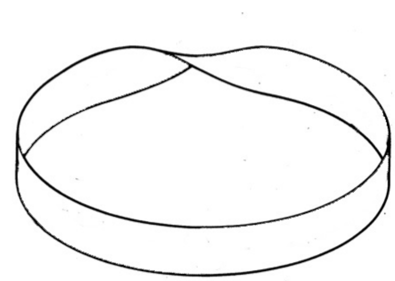


(b) Representación geométrica de $F_2(Y)$

Figura 1.4: El Segundo producto simétrico de un triodo simple.



(a) La Circunferencia S_1



(b) La representación gráfica de $F_2(S_1)$ es una Banda de Möbius

Figura 1.5: El Segundo producto simétrico de una curva cerrada simple.

Capítulo 2

La función canónica y algunas propiedades del producto simétrico

En la primera parte del capítulo definiremos a la función canónica φ, una función importante entre el enésimo producto topológico de un espacio y el enésimo producto simétrico de dicho espacio. Esta función es una herramienta muy útil para diversas demostraciones y nos permite ver cómo se relacionan estos dos productos.

En la segunda parte de este capítulo veremos algunas propiedades del Producto Simétrico que son sumamente útiles para diversas demostraciones y nos hablan de la estructura dentro de este hiperespacio.

Por último veremos cómo en los espacios métricos se le puede dar una métrica al Producto Simétrico a partir de la métrica existente en el espacio base.

2.1. La función canónica

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Llamaremos *función canónica de X^n en $F_n(X)$* a la función $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$, dada por $\varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Veamos algunas propiedades importantes de esta función.

PROPOSICIÓN 2.1.2. Sea X espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función canónica de X^n en $F_n(X)$ es suprayectiva y continua.

Demostración. Veamos primero que φ_n es suprayectiva. Sea $P = \{p_1, ..., p_l\} \in F_n(X)$. Por definición tenemos que $l \leq n$.

Consideremos al punto $\hat{p} = (p_1, .., p_l, p_l, ..., p_l) \in X^n$, esto es, el punto en el que para cada $i \in \{1, ..., l\}$ la iesíma coordenada es p_i y para $i \geq l$ la iesíma coordenada es p_l. De esta forma tenemos que $\varphi_n(\bar{p}) = P$. Por lo tanto, φ_n es suprayectiva.

Comprobemos ahora que φ_n es continua. Sean $\hat{x} = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ y $\langle U_1, ..., U_m \rangle$ un Vietórico básico en $F_n(X)$ tal que $\varphi_n(x_1, ...x_n) = \{x_1, ..., x_n\} \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$. Queremos encontrar un subconjunto abierto V en X^n tal que $\hat{x} \in V$ y $\varphi_n[V] \subset \langle U_1, ..., U_m \rangle$.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, definimos $V_i = \bigcap\{U_j | j \in \{1, ..., m\}\, y\, x_i \in U_j\}$. Tenemos que $x_i \in V_i$ y que V_i es un subconjunto abierto en X puesto que es una intersección finita de abiertos [4, 1.1(2), p. 62]. Definimos $V = V_1 \times ... \times V_n$. Se cumple que $(x_1, ..., x_n) \in V$ y, además, se tiene que V es un subconjunto abierto de X^n.

Veamos que $\varphi_n[V] = \varphi_n[V_1 \times ... \times V_n] \subseteq \langle U_1, ..., U_m \rangle$. Sea $(p_1, ..., p_n) \in V$. Comprobemos que $\varphi_n((p_1, ..., p_n)) = \{p_1, ..., p_n\} \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$. Notemos que dada $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $x_i \in U_j$ para alguna $j \in \{1, ..., m\}$ puesto que $\{x_1, ..., x_n\} \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$, entonces, $V_i \subseteq U_j$. Como $p_i \in V_i$, esto implica que $p_i \in U_j$. De esta forma se tiene que $\{p_1, ..., p_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$.

Ahora bien, dada $j \in \{1, ..., m\}$, tenemos que $U_j \cap \{x_1, ..., x_n\} \neq \emptyset$, por lo cual existe $i \in \{1, ..., l\}$ tal que $x_i \in U_j$. Esto implica que $V_i \subseteq U_j$ y, en consecuencia, tenemos que $p_i \in U_j$. De esto se concluye que, para toda $j \in \{1, ..., m\}$, se cumple que $U_j \cap \{p_1, ..., p_n\} \neq \emptyset$, por lo cual tenemos que $\{p_1, ..., p_n\} \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$. De esta forma hemos demostrado que φ_n es una función continua.

□

PROPOSICIÓN 2.1.3. Sea X un espacio topológico. Entonces $\varphi_2 : X^2 \longrightarrow F_2(X)$ es abierta.

Demostración. Sea $U = U_1 \times U_2$ un subconjunto básico en X^2. Veamos que $\varphi_2[U] = \langle U_1, U_2 \rangle$.

Primero comprobemos que $\langle U_1, U_2 \rangle \subseteq \varphi_2[U]$. Sea $A \in F_2(X)$ tal que $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. Tenemos por definición que $|A| \leq 2$ y $A \cap U_1 \neq \emptyset \neq A \cap U_2$.

Si $|A| = 1$, entonces $A = \{x\}$ para algún $x \in X$. Esto implica que $x \in U_1$ y $x \in U_2$, por lo que $(x, x) \in U_1 \times U_2$ y $\varphi_2(x, x) = A$, de aquí se tiene que $A \in \varphi_2[U]$.

Si $|A| = 2$, entonces $A = \{x_1, x_2\}$ con $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$. Por definición de Vietórico tenemos que $A \subseteq U_1 \cup U_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 \in U_1$. Hay dos opciones $x_2 \in U_2$ en cuyo caso tenemos que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ y $\varphi_2(x_1, x_2) = A$ o $x_2 \in U_1 - U_2$ en cuyo caso $x_1 \in U_2$ y, entonces, $(x_2, x_1) \in U_1 \times U_2$ y $\varphi_2(x_2, x_1) = A$. De aquí se infiere que $A \in \varphi_2[U]$.

Veamos que $\varphi_2[U] \subseteq \langle U_1, U_2 \rangle$. Sea $A \in \varphi_2[U]$. Entonces, existe $(x, y) \in U$ tal que $\varphi_2(x, y) = \{x, y\} = A$ con $x \in U_1$ y $y \in U_2$, esto implica que $A \in \langle U_1, U_2 \rangle$. De lo que podemos concluir que $\varphi_2[U] = \langle U_1, U_2 \rangle$.

□

A partir de la demostración anterior uno podría pensar que φ_n debería de ser una función abierta para $n > 2$, pero eso no pasa. Esto queda claro mediante el siguiente contraejemplo:

Consideremos $X = [0, 1]$ y $n = 3$. Sean $U_1 = U_2 = (\frac{2}{3}, 1]$, $U_3 = [0, \frac{1}{3})$ y $U = U_1 \times U_2 \times U_3$. Tenemos que U es un subconjunto abierto en $[0, 1]^3$ y $(1, 1, 0) \in U$. Notemos que $\{0, 1\} \in \varphi_3(U)$.

Supongamos que $\varphi_3[U]$ es abierto en $F_3([0, 1])$. Esto implica que $\varphi_3^{-1}\varphi_3[U]$ es un subconjunto abierto de $[0,1]^3$, puesto que φ_3 es continua (hecho que vimos en la Proposición 2.1.2). Como $(0, 0, 1) \in \varphi_3^{-1}\varphi_3(U)$, puedo encontrar un punto $(x, y, z) \in \varphi_3^{-1}\varphi_3(U)$ muy cercano al $(0, 0, 1)$ que cumpla que $x \neq y$, $0 \leq x < \frac{1}{3}$, $0 \leq y < \frac{1}{3}$, y $\frac{2}{3} < z \leq 1$. Por otra parte como $(x, y, z) \in \varphi_3^{-1}\varphi_3[U]$, se tiene que que $\varphi_3(x,y,z) = \varphi_3(a,b,c)$ para algún $(a,b,c) \in U$.

Entonces, $\{x,y,z\} = \{a,b,c\}$ con $\frac{2}{3} < a,b \leq 1$ y $0 \leq c < \frac{1}{3}$, por lo que se tendría que cumplir que $x = y = c$ (por como construimos a (x,y,z) no puede ser que x o y sean iguales a a o b), lo cual es una contradicción. Por lo tanto φ_3 no es una función abierta.

La pregunta natural que surge a partir de esto es ¿la función canónica es cerrada para toda n? La respuesta a esta pregunta fue dada por Ganea [7] y es afirmativa para espacios de Hausdorff. Para poder demostrarlo antes necesitamos el siguiente lema.

LEMA 2.1.4. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Si $\mathbb{B}$ es una base local de x y $\psi : \mathbb{B} \longrightarrow \{1,...,r\}$ es una función, entonces existe $k \in \{1,...,r\}$ tal que $\psi^{-1}(k)$ es una base local de x.

Demostración. Dada $l \in \{1,...,r\}$, definimos $\mathbb{B}_l = \psi^{-1}(l)$. Haremos nuestra demostración por contradicción, supongamos que para toda $l \in \{1,2,...,r\}$ $\mathbb{B}_l$ no es una base local de x, esto es, para cada $l \in \{1,2,...,r\}$, existe un abierto N_l en X tal que $x \in N_l$ y, para toda $V \in \mathbb{B}_l$, se cumple que $V \nsubseteq N_l$.

Definimos $N = \bigcap\limits_{i=1}^{r} N_i$. Notemos que $x \in N$ puesto que, para toda $i \in \{1,...,r\}$, se tiene que $x \in N_i$.

Ahora bien, como $\mathbb{B}$ es una base local, tenemos que existe $V \in \mathbb{B}$ subconjunto abierto en X, tal que $x \in V$ y $V \subset N$. Esto implica que, para toda $i \in \{1,2,...,\}$, se tiene que $V \subseteq N_i$.

Por otra parte $V \in \mathbb{B}_k$ para alguna $k \in \{1,...,r\}$ y $V \subset N_k$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe $k \in \{1,2,...,r\}$ tal que $\psi^{-1}(k)$ es base local de x.

□

Este lema nos dice que si tenemos una base local para un punto x y a los elementos de esta base les asociamos una cantidad finita de índices, entonces va a existir un índice tal que todos los elementos marcados con él serán a su vez una base local para el punto x.

PROPOSICIÓN 2.1.5. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función canónica $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ es cerrada.

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X^n. Veamos que $\varphi_n[A] = \overline{\varphi_n[A]}$, para ello sólo necesitamos probar que $\overline{\varphi_n[A]} \subseteq \varphi_n[A]$.

Sea $P = \{p_1,...,p_r\} \in \overline{\varphi_n[A]}$. Queremos ver que $P \in \varphi_n[A]$, para esto necesitamos encontrar un $\widehat{p} \in A$ tal que $\varphi_n(\widehat{p}) = P$. El problema recae entonces en encontrar la forma correcta de acomodar los r elementos de P en n coordenadas de tal manera que pueda asegurar que $\widehat{p} \in A$. Esto se logra bajo el siguiente proceso:

Como X es Hausdorff, tenemos que existen $W_1,...,W_r$ subconjuntos abiertos de X tales que $p_i \in W_i$ y $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Sea $\mathcal{W} = \langle W_1,...,W_r \rangle$. Tenemos que $\mathcal{W}$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$ y $P \in \mathcal{W}$.

Definimos $\mathbb{B} = \{\mathcal{V} \subseteq F_n(X) | P \in \mathcal{V},\ \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}\ y\ \mathcal{V}\ es\ un\ subconjunto\ abierto\ en\ F_n(X)\}$. Se tiene entonces que $\mathbb{B}$ es una base local para P en $F_n(X)$.

Notemos que para cada $\mathcal{V} \in \mathbb{B}$, se tiene que $P \in \mathcal{V} \cap \overline{\varphi_n[A]}$ por lo cual $\mathcal{V} \cap \varphi_n[A] \neq \emptyset$ [4, 4.3, p. 69]. Esto implica que existe $Q_{\mathcal{V}} \in \varphi_n[A] \cap \mathcal{V}$, entonces $Q_{\mathcal{V}} = \varphi_n(\widehat{q}_{\mathcal{V}})$ para algún $\widehat{q}_{\mathcal{V}} \in X^n$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\widehat{q}_{\mathcal{V}} = (q_1^{\mathcal{V}}, ..., q_n^{\mathcal{V}})$. Estos $Q_{\mathcal{V}}$ son puntos "cercanos" a P en $F_n(X)$ puesto que todos se encuentran dentro de los elementos de la base local $\mathbb{B}$. Observemos que ya sabemos cómo acomodar sus elementos en n coordenadas de tal forma que el punto $\widehat{q}_{\mathcal{V}}$ (formado con los elementos de $Q_{\mathcal{V}}$) quede dentro de A, a partir de esto podremos saber cómo acomodar los elementos de P para obtener el $\widehat{p} \in A$ que buscamos.

Notemos que $Q_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, por lo que $Q_{\mathcal{V}} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{r} W_k$. Además, como $W_i \cap W_l = \emptyset$ si $i \neq l$, tenemos que para cada $\mathcal{V} \in \mathbb{B}$ y $1 \leq i \leq n$ queda determinado un único índice $k(i, \mathcal{V})$ tal que $1 \leq k(i, \mathcal{V}) \leq r$ y $q_i^{\mathcal{V}} \in W_{k(i,\mathcal{V})}$.

Definimos la función $\psi_1 : \mathbb{B} \longrightarrow \{1, ..., r\}$ como $\psi_1(\mathcal{V}) = k(1, \mathcal{V})$. Por el Lema 2.1.4, tenemos que existe $\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}$ base local de P y $k_1 \in \{1, ..., r\}$ tales que, para toda $\mathcal{U} \in \mathbb{B}_1$, se tiene que $\psi(\mathcal{U}) = k_1$.

Definimos ahora la función $\psi_2 : \mathbb{B}_1 \longrightarrow \{1, ..., r\}$ como $\psi_2(\mathcal{V}) = k(2, \mathcal{V})$. Por el Lema 2.1.4, tenemos que existe $\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{B}_1$ base local de P y $k_2 \in \{1, ..., r\}$ tales que, para toda $\mathcal{U} \in \mathbb{B}_2$, se tiene que $\psi(\mathcal{U}) = k_2$.

Siguiendo este razonamiento, definimos la función $\psi_i : \mathbb{B}_{i-1} \longrightarrow \{1, ..., r\}$ como $\psi_i(\mathcal{V}) = k(i, \mathcal{V})$. Por el Lema 2.1.4, tenemos que existe $\mathbb{B}_i \subset \mathbb{B}_{i-1}$ base local de P y $k_i \in \{1, ..., r\}$ tales que, para toda $\mathcal{U} \in \mathbb{B}_i$, se tiene que $\psi(\mathcal{U}) = k_i$.

De esta forma tenemos que $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}$ es una base local de P tal que para toda $\mathcal{U} \in \mathbb{B}_n$ y para su respectivo $\widehat{q}_{\mathcal{U}} = (q_1^{\mathcal{U}}, ..., q_n^{\mathcal{U}})$, se tiene que $q_i^{\mathcal{U}} \in W_{k_i}$, para toda $i \in \{1, ..., n\}$.

Si se cumple que $\{1, ..., r\} = \{k_1, ..., k_n\}$, tendríamos una forma de acomodar los r elementos de P en n coordenadas. Veamos primero que $\{1, ..., r\} \subseteq \{k_1, ..., k_n\}$. Sean $l \in \{1, ..., r\}$ y $\mathcal{M} \in \mathbb{B}_n$. Tenemos que $Q_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}$. Por lo cual $Q_{\mathcal{M}} \in \mathcal{W}$, esto implica que $Q_{\mathcal{M}} \cap W_l \neq \emptyset$. Entonces, existe $j \in \{1, ..., n\}$, tal que $q_j^{\mathcal{M}} \in Q_{\mathcal{M}} \cap W_l$. Por la construcción anterior sabemos que $q_j^{\mathcal{M}} \in W_{k_j}$, en consecuencia se tiene que $l = k_j$. De esta forma tenemos que $\{1, ..., r\} \subseteq \{k_1, ..., k_n\}$.

Por otra parte, por construcción tenemos que para toda $k_i \in \{k_1, ..., k_n\}$, se tiene que $k_i = j$ para alguna $j \in \{1, ..., r\}$. Por lo que $\{k_1, ..., k_n\} \subseteq \{1, ..., r\}$ y en consecuencia tenemos que $\{1, ..., r\} = \{k_1, ..., k_n\}$.

Entonces $P = \{p_1, ..., p_r\} = \{p_{k_1}, ..., p_{k_n}\}$. Definimos $\widehat{p} = (p_{k_1}, ..., p_{k_n})$. Veamos que $\widehat{p} \in \overline{A} = A$. Para esto solamente hace falta ver que, para todo subconjunto abierto U de X^n tal que $\widehat{p} \in U$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.

Sea U un subconjunto abierto de X^n tal que $\widehat{p} \in U$. Podemos encontrar subconjuntos abiertos $U_1, ..., U_n$ en X tales que $p_{k_i} \in U_i$ y $U^* = U_1 \times ... \times U_n \subseteq U$.

Dada $i \in \{1, ..., n\}$, definimos $N_{k_i} = W_{k_i} \cap (\bigcap\{U_j | p_{k_i} \in U_j\ y\ j \in \{1, ..., n\}\}$. Tenemos que

$\mathcal{N} = \langle N_{k_1}, ..., N_{k_n} \rangle$ es un Vietórico en $F_n(X)$ tal que $P \in \mathcal{N}$. Como $\mathbb{B}_n$ es una base local de P, existe $\mathcal{V} \in \mathbb{B}_n$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$.

Tenemos que $Q_{\mathcal{V}} = \{q_1^{\mathcal{V}}, ..., q_n^{\mathcal{V}}\} \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$, $Q_{\mathcal{V}} \in \varphi_n[A]$ y $\widehat{q_{\mathcal{V}}} \in A$ .Veamos que $\widehat{q_{\mathcal{V}}} \in U^* \subseteq U$.

Dada $i \in \{1, ..., n\}$, como $Q_{\mathcal{V}} \in \mathcal{N}$, tenemos que existe $l \in \{1, ..., n\}$ tal que $q_i^{\mathcal{V}} \in N_l \subseteq W_{k_l}$. Además, como $\mathcal{V} \in \mathbb{B}_n$, tenemos que $q_i^{\mathcal{V}} \in W_{k_i}$, por lo tanto $k_i = k_l$. Como $N_{k_i} \subseteq U_i$, tenemos que $q_i^{\mathcal{V}} \in U_i$.

De esta forma hemos demostrado que $\widehat{q_{\mathcal{V}}} = (q_1^{\mathcal{V}}, ..., q_n^{\mathcal{V}}) \in U^* \subseteq U$. Por lo que $\widehat{p} \in \overline{A} = A$. Por lo tanto tenemos que φ_n es cerrada.

□

2.2. Algunas propiedades del Producto Simétrico

LEMA 2.2.1. Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función $f : X \longrightarrow F_n(X)$ dada por $f(x) = \{x\}$ es un encaje.

Demostración. Notemos que $Img(f) = F_1(X)$. Veamos que f es un homeomorfismo sobre su imagen.

- f es inyectiva.

  Sea $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Entonces $f(x) = \{x\} \neq \{y\} = f(y)$.

- f es suprayectiva.

  Sea $A \in F_1(X)$. Notemos que $A = \{x\}$ para algún $x \in X$, entonces $f(x) = \{x\} = A$.

- f es continua.

  Sean $x \in X$ y $\langle U_1, ..., U_m \rangle$ un subconjunto Vietórico de $F_n(X)$ tal que $f(x) = \{x\} \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$.

  Definimos $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$. Entonces, U es un subconjunto abierto en X tal que $x \in U$.

  Sea $y \in U$. Tenemos que $f(y) = \{y\}$, por lo cual $\{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Además, para toda $i \in \{1, ..., m\}$, tenemos que $\{y\} \cap U_i \neq \emptyset$ por lo que $f(y) \in \langle U_1, ..., U_m \rangle$ entonces $f[U] \subseteq \langle U_1, ..., U_m \rangle$ por lo cual se concluye que f es continua.

- f^{-1} es continua.

  Sean $\{x\} \in F_1(X)$ y U un subconjunto abierto de X tal que $f^{-1}(\{x\}) = x \in U$. Tenemos entonces que $\langle U \rangle \cap F_1(X)$ es un subconjunto abierto en $F_1(X)$ y $\{x\} \in \langle U \rangle$.

  Sea $\{y\} \in \langle U \rangle \cap F_1(X)$. Entonces $f^{-1}(\{y\}) = y \in U$ por lo tanto $f^{-1}(\langle U \rangle \cap F_1(X)) \subseteq U$. En consecuencia tenemos que f^{-1} es continua.

  De los puntos anteriores concluimos que f es un homeomorfismo sobre su imagen, esto es, es un encaje. Notemos que en consecuencia se tiene que X es homeomorfo a $F_1(X)$.

□

PROPOSICIÓN 2.2.2. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_m(X)$ es cerrado en $F_n(X)$ para toda $m < n$.

Demostración. Para probar esto veremos que $F_n(X) - F_m(X)$ es un subconjunto abierto. Sea $A \in F_n(X) - F_m(X)$. Como tenemos que $|A| > m$, escojamos $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$ puntos distintos de A.

Como X es un espacio de Hausdorff, tenemos que existen $U_1, U_2, ..., U_{m+1}$ subconjuntos abiertos y ajenos en X tales que $x_i \in U_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., m+1\}$. Entonces se cumple que $A \in \langle X, U_1, U_2, ..., U_{m+1} \rangle$.

Notemos que $\langle X, U_1, U_2, ..., U_{m+1} \rangle \subset (F_n(X) - F_m(X))$ ya que si $K \in \langle X, U_1, U_2, ..., U_{m+1} \rangle$, se tiene que para toda $i \in \{1, 2, ..., m+1\}$, $K \cap U_i \neq \emptyset$ por lo que $|K| > m$.

Esto demuestra que $F_n(X) - F_m(X)$ es abierto y por lo tanto tenemos que $F_m(X)$ es cerrado en $F_n(X)$.

□

2.3. La métrica de Hausdorff

Dado un espacio X con una métrica d se puede definir una métrica para $F_n(X)$ a partir de d, para ello es necesario contar con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.3.1. Sean (X, d) un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Dadas $\varepsilon > 0$ y $A \in F_n(X)$, definimos la nube de radio ε alrededor de A como el conjunto:

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in X | \text{existe } a \in A, \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Notemos que $N_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$, donde $B_\varepsilon(a)$ es la bola de radio ε alrededor del punto a.

Por otra parte recordemos que dada una métrica para un espacio X, ésta siempre puede ser acotada por 1. Para ello basta definir $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. El acotar la métrica de esta manera no afecta la topología del espacio [12, V, p. 211]. De ahora en adelante siempre estaremos considerando nuestros espacios métricos con la métrica d'.

DEFINICIÓN 2.3.2. Sea (X, d') un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Dados $A, B \in F_n(X)$, definimos

$$H(A, B) = inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} | \varepsilon > 0,\ A \subseteq N_\varepsilon(B)\ y\ B \subseteq N_\varepsilon(A)\}$$

A H se le conoce como la métrica de Hausdorff.

PROPOSICIÓN 2.3.3. Sean (X, d') un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces H es una métrica para $F_n(X)$.

Demostración. Sean $A, B \in F_n(X)$. Primero notemos que H esta bien definida ya que $A \subseteq N_2(B)$ y $B \subseteq N_2(A)$.

Por otra parte, por definición tenemos que, $H(A, B) \geq 0$ y $H(A, B) = H(B, A)$.

Veamos que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$. Supongamos que $A = B$. Entonces, para toda $\varepsilon \geq 0$, tenemos que $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$. De donde se tiene que $H(A, B) = 0$.

Supongamos ahora que $H(A, B) = 0$. Veamos que $A \subseteq B$. Sea $x \in A$ y $\alpha > 0$. Entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta \leq \alpha$, $A \subseteq N_\beta(B)$ y $B \subseteq N_\beta(A)$. Por lo que existe $b_\beta \in B$ tal que $d'(b_\beta, x) < \beta \leq \alpha$.

Se tiene entonces que $b_\beta \in B_\alpha(x)$, esto implica que $B_\alpha(x) \cap B \neq \emptyset$, por lo que tenemos que $x \in \overline{B} = B$ (no olvidemos que estamos trabajando en espacios T_2, por lo que los conjuntos finitos son cerrados [4, 1.4(1), p. 139]). De esta forma tenemos que $A \subseteq B$. Análogamente se prueba que $B \subseteq A$, por lo tanto $A = B$.

Ahora veamos que se cumple la desigualdad del triángulo. Sean $A, B, C \in F_n(X)$. Queremos probar que $H(A, B) \leq H(A, C) + H(B, C)$. Supongamos que $H(A, C) \leq \delta$ y $H(C, B) \leq \gamma$. Entonces, dado $x \in A$, como $A \subseteq N_\delta(C)$ y $C \subseteq N_\delta(A)$, tenemos que existe $c \in C$ tal que $d'(x, c) < \delta$.

De similar forma, dada $c \in C$, existe $b \in B$ tal que $d'(c, b) < \gamma$. Como d' es una métrica, tenemos que $d'(x, b) \leq d'(x, c) + d'(c, b) < \delta + \gamma$, por lo que $A \subseteq N_{\delta+\gamma}(B)$. Bajo un procedimiento análogo obtenemos que $B \subseteq N_{\delta+\gamma}(A)$, por lo cual se concluye que $H(A, B) \leq \delta + \gamma$.

Entonces tenemos que $H(A, B) \leq inf\{\delta + \gamma \in \mathbb{R} | H(A, C) < \delta\ y\ H(C, B) < \gamma\} = inf\{\delta \in \mathbb{R} | H(A, C) < \delta\} + inf\{\gamma \in \mathbb{R} | H(C, B) < \gamma\} = H(A, C) + H(C, B)$, por lo tanto $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$. De esta forma hemos probado que H es una métrica.

□

Denotaremos como τ_H a la topología generada por la métrica de Hausdorff.

DEFINICIÓN 2.3.4. Sean X un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $A \in F_n(X)$. En la métrica de Hausdorff definimos la Bola de radio épsilon alrededor del A como el conjunto

$$B^H_\varepsilon(A) = \{B \in F_n(X) | H(A, B) < \varepsilon\}.$$

TEOREMA 2.3.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\tau_V = \tau_H$, esto es, la topología de Vietoris es igual a la topología generada por la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Veamos primero que $\tau_H \subseteq \tau_V$.

Sea $P = \{p_1, ..., p_r\} \in F_n(X)$, $\varepsilon > 0$. Queremos probar que $B_\varepsilon^H(P) \in \tau_V$. Consideremos a $\langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle$, donde, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, $B_\varepsilon(p_i)$ denota a la bola de radio δ alrededor del punto p_i en (X, d). Tenemos entonces que $\langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle \in \tau_V$ y $P \in \langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle$. Veamos que $\langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle \subseteq B_\varepsilon^H(P)$.

Sean $C \in \langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle$ y $c \in C$. Por definición de Vietórico tenemos que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B_\varepsilon(p_i)$, por lo que existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $c \in B_\varepsilon(p_j)$. Esto implica que $d(c, p_j) < \varepsilon$, por lo que tenemos que $c \in N_\varepsilon(P)$, por lo tanto $C \subseteq N_\varepsilon(P)$.

Sea $p_i \in P$. Como $C \in \langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle$ tenemos que $C \cap B_\varepsilon(p_i) \neq \emptyset$, por lo cual existe $c \in C \cap B_\varepsilon(p_i)$. Entonces, $d(c, p_i) < \varepsilon$, lo que implica que $p_i \in N_\varepsilon(C)$. De esto se sigue que $P \subseteq N_\varepsilon(C)$, de lo cual podemos concluir que $H(C, P) < \varepsilon$ y, en consecuencia, $C \in B_\varepsilon^H(P)$. Por lo tanto $\langle B_\varepsilon(p_1), ..., B_\varepsilon(p_r)\rangle \subseteq B_\varepsilon^H(P)$. De esto se concluye que $B_\varepsilon^H(P) \in \tau_V$.

Veamos ahora que $\tau_V \subseteq \tau_H$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_m\rangle$ un Vietórico básico de $F_n(X)$ y $P = \{p_1, ..., p_r\} \in \mathcal{U}$. Como X es métrico, en particular es Hausdorff, entonces, por el Lema 1.3.3, tenemos que existe $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_r\rangle$ Vietórico básico tal que $P \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$ y, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, $p_i \in V_i$.

Como X es un espacio métrico, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}(p_i) \subseteq V_i$. Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_r\}$. Probemos que $B_\delta^H(P) \subseteq \mathcal{V}$.

Sea $K \in B_\delta^H(P)$. Tomemos $k \in K$, como $K \subseteq N_\delta(P)$, existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $d(k, p_j) < \delta$. Entonces tenemos que $k \in B_\delta(p_j) \subseteq B_{\delta_j}(p_j) \subseteq V_j$. Por lo tanto, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$.

Por otra parte, dada $j \in \{1, ..., r\}$, como $P \subseteq N_\delta(K)$, tenemos que existe $k \in K$ tal que $d(p_j, k) < \delta$. Entonces, $\emptyset \neq K \cap B_\delta(p_j) \subseteq K \cap B_{\delta_j}(p_j) \subseteq K \cap V_j$. Por lo tanto, para toda $i \in \{1, .., r\}$, se tiene que $K \cap V_i \neq \emptyset$, esto implica que $K \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo cual tenemos que $B_\delta^H(P) \subseteq \mathcal{U}$.

□

Capítulo 3

Axiomas de Separación

Los axiomas de separación son importantes pues nos ayudan a darle estructura a un espacio topológico, ya que de esta forma podemos saber cómo separar o distinguir a dos puntos diferentes a partir del tipo de abiertos que puedo encontrar alrededor de ellos. En este capítulo veremos qué axiomas de separación se preservan del espacio base al Producto Simétrico y cuales se heredan del Producto Simétrico al espacio base.

3.1. T_0

DEFINICIÓN 3.1.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_0, o de Kolgomorov, si para cualquier par de puntos $a, b \in X$ tales que $a \neq b$, existe U un subconjunto abierto tal que $\{a,b\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a,b\} \nsubseteq U$, esto es, un abierto que contiene a uno de los puntos pero no contiene al otro.

El primero de los axiomas de separación no se preserva del espacio base al Producto Simétrico. Para ver esto consideremos el siguiente ejemplo.

Sea $X = \{0,1,2\}$ y $\tau = \{\{1\},\{1,2\},X,\emptyset\}$ la topología de X. Observemos que X es T_0.

Consideremos a $F_3(X)$. Veamos que $F_3(X)$ no es T_0, consideremos los puntos $\{0,1\}$ y $\{0,1,2\}$. Probaremos primero que, para todo $\mathcal{U}$ subconjunto abierto de $F_3(X)$ tal que $\{0,1\} \in \mathcal{U}$, se tiene que $\{0,1,2\} \in \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto en $F_3(X)$ tal que $\{0,1\} \in \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{U}$ es un Vietórico básico tal que $\mathcal{U} = \left\langle U_1, ..., U_m \right\rangle$. Como $\{0,1\} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$, tenemos que existe $i \in \{1,...,m\}$, tal que $0 \in U_i$, esto implica que $U_i = \{0,1,2\}$ (pues es el único subconjunto abierto en τ que contiene a 0). Por lo cual tenemos que $\{0,1,2\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$.

Por otra parte, para toda $i \in \{1,...,m\}$, se tiene que $U_i = \{1\}$ o $U_i = \{1,2\}$ o $U_i = \{0,1,2\}$. En cualquiera de estos casos tenemos que $\{0,1,2\} \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo tanto $\{0,1,2\} \in \mathcal{U}$.

Probaremos ahora que, para todo $\mathcal{U}$ subconjunto abierto de $F_3(X)$ tal que $\{0,1,2\} \in \mathcal{U}$, se tiene que $\{0,1\} \in \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto en $F_3(X)$ tal que $\{0,1,2\} \in \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{U}$ es un Vietórico básico tal que $\mathcal{U} = \left\langle U_1, ..., U_m \right\rangle$. Como

$\{0,1,2\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_j$, tenemos que $\{0,1\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_j$.

Por otra parte, para toda $i \in \{1,...,2\}$, se tiene que $U_i = \{1\}$ o $U_i = \{1,2\}$ o $U_i = \{0,1,2\}$. En cualquiera de estos casos tenemos que $\{0,1\} \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo tanto $\{0,1\} \in \mathcal{U}$.

De esta forma hemos probado que $F_3(X)$ no es un espacio T_0.

Para el único producto simétrico que podemos asegurar que esta propiedad se preserva es para el segundo producto simétrico.

PROPOSICIÓN 3.1.2. Sea X un espacio topológico. Si X es un espacio T_0, entonces $F_2(X)$ es un espacio T_0.

Demostración. Sean $A, B \in F_2(X)$ tales que $A \neq B$.

- Caso 1. $|A| = 1$ y $|B| = 1$.
  Supongamos sin pérdida de generalidad que $A = \{a_1\}$ y $B = \{b_1\}$. Como $A \neq B$, tenemos que $a_1 \neq b_1$. Como X es un espacio T_0, existe U subconjunto abierto en X tal que $\{a_1, b_1\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a_1, b_1\} \nsubseteq U$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \in U$ y $b_1 \notin U$. Observemos que $A \in \langle U \rangle$ y $B \notin \langle U \rangle$.

- Caso 2. $|A| = 2$ y $|B| = 1$.
  Supongamos sin pérdida de generalidad que $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1\}$.

  - Subcaso 2.1. $B \subseteq A$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $b_1 = a_1$. Como $|A| = 2$, tenemos que $a_1 \neq a_2$. Como X es T_0, existe U subconjunto abierto en X tal que $\{a_1, a_2\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a_1, a_2\} \nsubseteq U$. Si $a_1 \in U$ y $a_2 \notin U$, tenemos que $B \in \langle U \rangle$ y $A \notin \langle U \rangle$. Si $a_2 \in U$ y $a_1 \notin U$ tenemos que $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \notin \langle X, U \rangle$.

  - Subcaso 2.2. $B \nsubseteq A$. Tenemos que $b_1 \neq a_1$ y $b_1 \neq a_2$. Como X es T_0, existe U subconjunto abierto en X tal que $\{a_1, b_1\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a_1, b_1\} \nsubseteq U$. Si $b_1 \in U$ y $a_1 \notin U$, tenemos que $B \in \langle U \rangle$ y $A \notin \langle U \rangle$. Si $a_1 \in U$ y $b_1 \notin U$ tenemos que $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \notin \langle X, U \rangle$.

- Caso 3. $|A| = 2$ y $|B| = 2$.
  Supongamos sin pérdida de generalidad que $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2\}$.

  - Subcaso 3.1. $A \cap B \neq \emptyset$. Notemos que $|A \cap B| = 1$ puesto que $A \neq B$.
    Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 = b_1$. Tenemos que $a_1 \neq b_2$. Como X es T_0, existe U subconjunto abierto en X tal que $\{a_1, b_2\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a_1, b_2\} \nsubseteq U$

    - Supongamos que $a_1 \in U$ y $b_2 \notin U$.
      Si $a_2 \in U$, entonces $A \in \langle U \rangle$ y $B \notin \langle U \rangle$.

      Si $a_2 \notin U$, como $a_2 \neq b_2$ y X es T_0, existe V subconjunto abierto en X tal que $\{a_2, b_2\} \cap V \neq \emptyset$ y $\{a_2, b_2\} \nsubseteq V$.

      Si $a_2 \in V$ y $b_2 \notin V$, tenemos que $A \in \langle U, B \rangle$ y $B \notin \langle U, V \rangle$. Si $b_2 \in V$ y $a_2 \notin V$, se tiene que $B \in \langle U, V \rangle$ y $A \notin \langle U, V \rangle$.

- ◦ Supongamos que $b_2 \in U$ y $a_1 \notin U$.
  Como $a_2 \neq b_2$ y X es T_0, existe V subconjunto abierto en X tal que $\{a_2, b_2\} \cap V \neq \emptyset$ y $\{a_2, b_2\} \nsubseteq V$.

  Si $b_2 \in V$ y $a_2 \notin V$, tenemos que $a_1, a_2 \notin U \cap V$, por lo cual $B \in \langle X, U \cap V \rangle$ y $A \notin \langle X, U \cap V \rangle$.

  Si $a_1, a_2 \in V$ y $b_2 \notin V$, tenemos que $A \in \langle V \rangle$ y $B \notin \langle V \rangle$. Si $a_2 \in V$ y $a_1, b_2 \notin V$, tenemos que $A \in \langle X, V \rangle$ y $B \notin \langle X, V \rangle$.

- Subcaso 3.2. $A \cap B = \emptyset$. Tenemos que $a_1 \neq a_2 \neq b_1 \neq b_2$.

  Como $a_1 \neq b_1$ y X es T_0, existe U subconjunto abierto en X tal que $\{a_1, b_1\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{a_1, b_1\} \nsubseteq U$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 \in U$ y $b_1 \notin U$.

  Si $b_2 \notin U$, tenemos que $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \notin \langle X, U \rangle$.

  Si $b_2 \in U$, como $a_1 \neq b_2$ y X es T_0, existe W subconjunto abierto en X tal que $\{a_1, b_2\} \cap W \neq \emptyset$ y $\{a_1, b_2\} \nsubseteq W$.

  Si $a_1 \in W$ y $b_2 \notin W$, tenemos que $a_1 \in W \cap U$ y $b_1, b_2 \notin W \cap U$. Esto implica que $A \in \langle X, W \cap U \rangle$ y $B \notin \langle X, W \cap U \rangle$.

  Si $b_2 \in W$ y $a_1, a_2 \notin W$, tenemos que $B \in \langle X, W \rangle$ y $A \notin \langle X, W \rangle$.

  Si $b_2, a_2 \in W$ y $a_1 \notin W$, como $a_2 \neq b_2$ y X es T_0, existe V subconjunto abierto en X tal que $\{a_2, b_2\} \cap V \neq \emptyset$ y $\{a_2, b_2\} \nsubseteq V$.

  Si $b_2 \in V$ y $a_2 \notin V$, tenemos que $b_2 \in V \cap W$ y $a_1, a_2 \notin V$. Lo que implica que $B \in \langle X, V \cap W \rangle$ y $A \notin \langle X, V \cap W \rangle$.

  Si $a_2 \in V$ y $b_2, b_1 \notin V$, tenemos que $A \in \langle X, V \rangle$ y $B \notin \langle X, V \rangle$.

  Si $a_2, b_1 \in V$ y $b_2 \notin V$, como $a_2 \neq b_1$ y X es T_0, existe Q subconjunto abierto en X tal que $\{a_2, b_1\} \cap Q \neq \emptyset$ y $\{a_2, b_1\} \nsubseteq Q$.

  Si $a_2 \in Q$ y $b_1 \notin Q$, tenemos que $a_2 \in Q \cap V$ y $b_1, b_2 \notin V \cap Q$. Esto implica que $A \in \langle X, Q \cap V \rangle$ y $B \notin \langle X, Q \cap V \rangle$.

  Si $b_1 \in Q$ y $a_2, a_1 \notin Q$, tenemos que $B \in \langle X, Q \rangle$ y $A \notin \langle X, Q \rangle$.

  Si $a_1 \in Q$, $b_1 \in Q$ y $b_2 \notin Q$, tenemos que $a_1 \in Q \cap U$ y $b_1, b_2 \notin Q \cap U$. Esto implica que $A \in \langle X, Q \cap U \rangle$ y $B \notin \langle X, Q \cap U \rangle$.

  Si $b_2 \in Q$, $a_1 \in Q$ y $a_2 \notin Q$, tenemos que $a_1, b_2 \in Q \cap U$ y $a_2 \notin Q \cap U$. Entonces $b_2 \in Q \cap U \cap W$ y $a_1, a_2 \notin Q \cap U \cap W$, esto implica que $B \in \langle X, Q \cap U \cap W \rangle$ y

$A \notin \langle X, Q \cap U \cap W \rangle$.

De esta forma hemos probado que $F_2(X)$ es un espacio T_0.

□

TEOREMA 3.1.3. *Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si $F_n(X)$ es un espacio T_0, entonces X es un espacio T_0.*

Demostración. Como $F_n(X)$ es T_0, tenemos que $F_1(X)$ es T_0 [17, 13B, p. 89] y, puesto que X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Lema 2.2.1), tenemos que X es T_0.

□

3.2. T_1

DEFINICIÓN 3.2.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_1 o un espacio de Fréchet si para cualquier par de puntos $a, b \in X$ tales que $a \neq b$, existen U y V subconjuntos abiertos de X tal que $a \in U$, $b \notin U$, $b \in V$ y $a \notin V$.

TEOREMA 3.2.2. *Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es T_1 si y sólo si $F_n(X)$ es T_1.*

Demostración. Supongamos que X es T_1. Sean $A, B \in F_n(X)$ tales que $A \neq B$. Entonces $A - B \neq \emptyset$ o $B - A \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A - B \neq \emptyset$ y $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Sea $a \in A - B$ esto implica que, para toda $i \in \{1, ..., m\}$, se cumple que $a \neq b_i$. Como X es T_1 tenemos, que para cada $i \in \{1, ..., m\}$, existen U_i, V_i subconjuntos abiertos de X, tales que $a \in U_i$, $b_i \in V_i$, $b_i \notin U_i$ y $a \notin V_i$.

Esto implica que $a \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, por lo cual $A \nsubseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$, de lo que se sigue que $A \notin \langle V_1, ..., V_m \rangle$. Por otra parte tenemos que $B \in \langle V_1, ..., V_m \rangle$, puesto que $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_i$ y, para toda $i \in \{1, ..., m\}$, se cumple que $B \cap V_i \neq \emptyset$.

Definimos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_i$. Tenemos que U es un subconjunto abierto en X puesto que es intersección finita de abiertos [4, 1.1(2), p. 62], además, se cumple que $a \in U$ y $B \cap U = \emptyset$. Entonces $A \in \langle X, U \rangle$ y $B \notin \langle X, U \rangle$. De esto se concluye que $F_n(X)$ es T_1.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es T_1. Esto implica que $F_1(X)$ es T_1 [17, 13B, p. 89], y, puesto que X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Lema 2.2.1), tenemos que X es T_1.

□

3.3. T_2

DEFINICIÓN 3.3.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_2, o un espacio de Hausdorff, si para cualquier par de puntos $a, b \in X$ tales que $a \neq b$, existen U y V subconjuntos abiertos de X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA 3.3.2. *Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es un espacio de Hausdorff si y sólo si $F_n(X)$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que X es T_2. Sean $A, B \in F_n(X)$ tales que $A \neq B$. Esto implica que $A - B \neq \emptyset$ o $B - A \neq \emptyset$, supongamos sin pérdida de generalidad que $A - B \neq \emptyset$ y $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Sea $a \in A - B$. Como X es T_2, tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., m\}$, existen U_i y V_i subconjuntos abiertos en X tales que $a \in U_i$, $b_i \in V_i$ y $U_i \cap V_i = \emptyset$.

Definimos $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$. Tenemos que U es un subconjunto abierto en X y $a \in U$. Por lo tanto, $A \in \langle X, U \rangle$. Por otra parte tenemos que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ y, para toda $i \in \{1, ..., m\}$, se tiene que $B \cap V_i \neq \emptyset$. Por lo cual $B \in \langle V_1, ..., V_m \rangle$.

Veamos que $\langle X, U \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle = \emptyset$. Supongamos que $\langle X, U \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle \neq \emptyset$ y tomemos $C \in \langle X, U \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle$. Entonces, $C \cap U \neq \emptyset$, sea $c \in C \cap U$. Como $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ tenemos que $c \in V_j$ para algún $j \in \{1..., m\}$. Por otra parte, como $c \in U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$, tenemos que $c \in U_j$, por lo que $c \in V_j \cap U_j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\langle X, U \rangle \cap \langle V_1, ..., V_m \rangle = \emptyset$ y, en consecuencia, $F_n(X)$ es T_2.

Ahora, supongamos que $F_n(X)$ es T_2. Esto implica que $F_1(X)$ es T_2 [17, 13.8, p. 87], como X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Lema 2.2.1), tenemos que X es T_2.

□

3.4. T_3

DEFINICIÓN 3.4.1. Sea X un espacio topológico T_1. Decimos que X es T_3, o regular, si para cada A subconjunto cerrado en X y $x \in X$ tal que $x \notin A$, existen U y V subconjuntos abiertos en X tales que $x \in U$, $A \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

TEOREMA 3.4.2. *Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es T_3 o regular si y sólo si $F_n(X)$ es T_3.*

Demostración. Supongamos que X es regular. Sabemos por el Teorema 3.2.2 que $F_n(X)$ es T_1. Sean $A = \{x_1, ..., x_k\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_m \rangle$ subconjunto Vietórico básico de $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Basta probar que existe $\mathcal{V}$ subconjunto abierto en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$ [4, 2.2, p. 141].

Como X es T_2, por el Lema 1.3.3, sabemos que existe $\mathcal{U}^* = \langle U_1, U_2, ..., U_k \rangle$ tal que $A \in \mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}$, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $x_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Como X es regular tenemos que, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, existe V_i subconjunto abierto de X tal que $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subset U_i$.

Consideremos al conjunto $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_k \rangle$, por construcción y la Proposición 1.3.2 tenemos que $A \in \langle V_1, ..., V_k \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, ..., V_k \rangle} = \langle \overline{V_1}, ..., \overline{V_k} \rangle \subset \mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}$.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es regular. Por el Lema 2.2.1 sabemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X; además, todo subespacio de un espacio regular es regular [4, 2.3, p. 142], por lo tanto $F_1(X)$ es regular y en consecuencia X es regular.

□

3.5. $T_{3\frac{1}{2}}$

DEFINICIÓN 3.5.1. Sea X un espacio topológico T_1. Decimos que X es $T_{3\frac{1}{2}}$, o completamente regular, o Tychonoff, si para cada punto $x \in X$ y cada F subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.

LEMA 3.5.2. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dada una familia de funciones continuas $\{f_i : X \longrightarrow [0,1] | i \in \{1, ..., n\}\}$, se tiene que $h : X \longrightarrow [0,1]$, dada por $h(x) = \text{mín}\{f_i(x) | i \in \{1, ..., n\}\}$, y $g : X \longrightarrow [0,1]$, dada por $g(x) = \text{máx}\{f_i(x) | i \in \{1, ..., n\}\}$, son funciones continuas.

Demostración. Veamos que h es continua, para eso basta ver que las imagenes inversas de los subconjuntos subbásicos de $[0,1]$ son subconjuntos abiertos en X [4, 8.3(3), p. 79]. Notemos que $\{(a,1] | a \in [0,1)\} \cup \{[0,b) | b \in (0,1]\}$ es una subbase para $[0,1]$.

Sea $a \in [0,1)$. Veamos primero que $h^{-1}[(a,1]] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(a,1]]$. Sea $y \in h^{-1}[(a,1]]$. Tenemos que $h(y) \in (a,1]$, entonces, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $a < h(y) \leq f_i(y)$. Esto implica que, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que $y \in f_i^{-1}[(a,1]]$. Por lo cual $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(a,1]]$.

Sea $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(a,1]]$. Tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que $a < f_i(y)$; como $h(y) = f_j(y)$ para alguna $j \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $a < h(y)$. Esto implica que $y \in h^{-1}[(a,1]]$. De esta forma hemos probado que $h^{-1}[(a,1]] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(a,1]]$.

Sea $b \in (0,1]$. Veamos ahora que $h^{-1}[[0,b)] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[[0,b)]$. Sea $y \in h^{-1}[[0,b)]$. Entonces, $h(y) < b$. Como $h(y) = f_j(y)$ para alguna $j \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $f_j(y) < b$. Esto implica que $y \in f_j^{-1}[[0,b)]$, por lo cual $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[[0,b)]$.

Sea $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[[0,b)]$. Tenemos que existe $j \in \{1, ..., n\}$, tal que $f_j(y) < b$. Por definición de h tenemos que, $h(y) \leq f_j(y) < b$. Por lo tanto $y \in h^{-1}[[0,b)]$. De esta forma hemos probado que $h^{-1}[[0,b)] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}[[0,b)]$ y en consecuencia tenemos que h es continua.

La prueba de que g es una función continua es análoga.

□

TEOREMA 3.5.3. *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es completamente regular si y sólo si $F_n(X)$ es completamente regular.*

Demostración. Supongamos que X es completamente regular. Sabemos por el Teorema 3.2.2 que $F_n(X)$ es T_1. Sean $A = \{a_1, ..., a_k\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{W}$ un subconjunto abierto en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$. Como X es completamente regular en particular tenemos que X es Hausdorff. Por el Lema 1.3.3, tenemos que existe $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_k \rangle \subseteq \mathcal{W}$ un Vietórico básico en $F_n(X)$ tal que, para toda $i \in \{1, ..., k\}$, se tiene que $a_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Para probar que $F_n(X)$ es completamente regular, basta ver que existe $F : F_n(X) \longrightarrow [0,1]$ una función continua tal que $F(A) = 0$ y, para toda $B \in F_n(X) - \mathcal{U}$, se tiene que $F(B) = 1$ [5, 1.5.8, p. 39].

Dada $i \in \{1, ..., k\}$, tenemos que $X - U_i$ es un subconjunto cerrado en X y $a_i \notin X - U_i$. Como X es completamente regular, tenemos que existe $f_i : X \longrightarrow [0,1]$ una función continua tal que $f_i(a_i) = 0$ y, para toda $p \in X - U_i$, se tiene que $f_i(p) = 1$.

Definimos $h(x) : X \longrightarrow [0,1]$, dada por $h(x) = \text{mín}\{f_i(x) | i \in \{1, ..., k\}\}$. Por el Lema 3.5.2, tenemos que h es una función continua.

Definimos $H : F_n(X) \longrightarrow [0,1]$, donde para $T = \{t_1, ..., t_m\} \in F_n(X)$, se tiene que $H(T) = \text{máx}\{h(t_i) | i \in \{i, ..., m\}\}$. Veamos que H es una función continua.

Sean $T = \{t_1, ..., t_m\} \in F_n(X)$ y $\varepsilon > 0$. Definimos $V = (H(T) - \varepsilon, H(T) + \varepsilon) \cap [0,1]$. Notemos que V es un subconjunto abierto en $[0,1]$ y $H(T) \in V$. Para probar la continuidad de H basta ver que existe $\mathcal{W}$ subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $T \in \mathcal{W}$ y $H[\mathcal{W}] \subseteq V$.

Por definición de H, tenemos que existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $h(t_j) = H(T)$. Como h es continua, existe U un subconjunto abierto en X, tal que $t_j \in U$ y $h[U] \subseteq V$.

Definimos $O = [0,1] \cap [0, H(T) + \varepsilon)$. Observemos que O es abierto en $[0,1]$. Sea $\mathcal{W} = \langle X, U \rangle \cap \langle h^{-1}[O] \rangle$. Notemos que $\mathcal{W}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.

Veamos que $T \in \mathcal{W}$. Tenemos que $T \in \langle X, U \rangle$ puesto que $t_j \in U$. Por otra parte, $T \in \langle h^{-1}[O] \rangle$ ya que, dada $i \in \{1, ..., m\}$, tenemos que $0 \leq h(t_i) \leq H(T) < H(T) + \varepsilon$, lo que implica que $h[T] \subseteq O$ y, en consecuencia $T \subseteq h^{-1}[O]$.

Ahora, veamos que $H[\mathcal{W}] \subseteq V$. Sea $Z \in \mathcal{W}$. Como $Z \in \langle X, U \rangle$, existe $z \in Z$ tal que $z \in U$, por lo que $h(z) \in V$. Por lo tanto, $H(T) - \varepsilon < h(z) \leq H(Z)$.

Por otra parte, como $Z \in \langle h^{-1}[O] \rangle$, tenemos que $h[Z] \subseteq O$. Esto implica que $H(Z) \in O$, por lo cual $H(Z) < H(T) + \varepsilon$. De aquí se tiene que $H(Z) \in (H(T) - \varepsilon, H(T) + \varepsilon)$, por definición de H se tiene que $H(Z) \in [0,1]$, entonces $H(Z) \in V$. Por lo tanto H es continua.

Dada $i \in \{1, ..., k\}$, definimos $G_i : F_n(X) \longrightarrow [0,1]$, donde dado $T = \{t_1, ..., t_m\} \in F_n(X)$ se tiene que $G_i(T) = \text{mín}\{f_i(t_k) | k \in \{1, ..., m\}\}$. Veamos que G_i es una función continua.

Sean $T = \{t_1, ..., t_m\} \in F_n(X)$ y $\varepsilon > 0$. Definimos $V = (G_i(T) - \varepsilon, G_i(T) + \varepsilon) \cap [0,1]$. Notemos que V es un subconjunto abierto en $[0,1]$ y $G_i(T) \in V$. Para probar la continuidad de G_i basta ver que existe $\mathcal{W}$ subconjunto abierto de $F_n(X)$ tal que $T \in \mathcal{W}$ y $G_i[\mathcal{W}] \subseteq V$.

Por definición de G_i, tenemos que existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $f_i(t_j) = H(T)$. Como h es continua, existe U un subconjunto abierto en X, tal que $t_j \in U$ y $f_i[U] \subseteq V$.

Definimos $O = [0,1] \cap (G_i(T) - \varepsilon, 1]$. Observemos que O es abierto en $[0,1]$. Sea $\mathcal{W} = \left\langle X, U \right\rangle \cap \left\langle h^{-1}[O] \right\rangle$. Notemos que $\mathcal{W}$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.

Veamos que $T \in \mathcal{W}$. Tenemos que $T \in \left\langle X, U \right\rangle$ puesto que $t_j \in U$. Por otra parte, $T \in \left\langle h^{-1}[O] \right\rangle$ ya que, dada $k \in \{1, ..., m\}$, tenemos que $G_i(T) - \varepsilon < G_i(T) \leq f_i(t_l) \leq 1$, lo que implica que $f_i[T] \subseteq O$ y, en consecuencia, $T \subseteq f_i^{-1}[O]$.

Ahora, veamos que $G_i[\mathcal{W}] \subseteq V$. Sea $Z \in \mathcal{W}$. Como $Z \in \left\langle X, U \right\rangle$, existe $z \in Z$ tal que $z \in U$, por lo que $h(z) \in V$. Por lo tanto, $G_i(Z) < f_i(z) \leq G_i(T) + \varepsilon$.

Por otra parte, como $Z \in \left\langle h^{-1}[O] \right\rangle$, tenemos que $h[Z] \subseteq O$. Esto implica que $H(Z) \in O$, por lo cual $G_i(T) - \varepsilon < G_i(Z)$. De aquí se tiene que $G_i(Z) \in (G_i(T) - \varepsilon, G_i(T) + \varepsilon)$, por definición de G_i se tiene que $G_i(Z) \in [0,1]$, entonces $G_i(Z) \in V$. Por lo tanto G_i es continua.

Definimos $F : F_n(X) \longrightarrow [0,1]$, donde dada $T = \{t_1, ..., t_m\} \in F_n(X)$, se tiene que $F(T) = \text{máx}\{H(T), G_1(T), ..., G_k(T)\}$. Notemos que, por el Lema 3.5.2, tenemos que F es continua.

Veamos que $F(A) = 0$. Notemos primero que, dada $j \in \{1, ..., k\}$, tenemos que $h(a_j) = 0$, lo que implica que $H(A) = 0$. Por otra parte, para toda $i \in \{1, ..., k\}$, tenemos que $G_i(A) = 0$, puesto que $f_i(a_i) = 0$. De esto se concluye que $F(A) = \text{máx}\{0, 0, 0, ..., 0\}$, por lo cual se tiene que $F(A) = 0$.

Veamos que, para toda $B \in F_n(X) - \mathcal{U}$, se cumple que $F(B) = 1$. Sea $B \in F_n(X) - \mathcal{U}$. Entonces tenemos que $B \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ o, para alguna $i \in \{1, ...k\}$, $B \cap U_i = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $B = \{b_1, ..., b_m\}$.

- Caso 1. $B \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$.

  Esto implica que existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que, para toda $i \in \{1, ...k\}$, $b_j \notin U_i$, esto es, $b_j \in X - U_i$. Entonces, para toda $i \in \{1, ...k\}$, $f_i(b_j) = 1$, por lo cual $h(b_j) = 1$. De lo cual tenemos que $H(B) = 1$ y, por la definición de F, se sigue que $F(B) = 1$.

- Caso 2. $B \cap U_i = \emptyset$ para alguna $i \in \{1, ..., k\}$.

  Esto implica que, dada $j \in \{1, ..., m\}$, $b_j \in X - U_i$. Por lo cual $f_i(b_j) = 1$, entonces, $G_i(B) = 1$. De esto se sigue, por la definición de F, que $F(B) = 1$.

De esta forma concluimos que $F_n(X)$ es completamente regular, puesto que $F : F_n(X) \longrightarrow [0,1]$ es una función continua tal que $F(A) = 0$ y, para toda $B \in F_n(X) - \mathcal{U}$, se tiene que $F(B) = 1$.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es completamente regular, esto implica que $F_1(X)$ es completamente regular [17, 14.10(a), p. 95]. Por el Lema 2.2.1 sabemos que $F_1(X)$ es homeomorfo a X y de esto se concluye que X es completamente regular.

□

3.6. T_4

DEFINICIÓN 3.6.1. Sea X un espacio topológico T_1. Decimos que X es T_4, o normal, si dados A y B subconjuntos cerrados de X tales que $A \cap B = \emptyset$, se tiene que existen U y V subconjuntos abiertos en X, tales que $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

La propiedad de ser un espacio normal no se hereda del espacio base al producto simétrico. Para poder ver esto es necesario recordar el siguiente resultado.

LEMA 3.6.2 (de Jones)**.** Sean X un espacio topológico separable y A un subconjunto cerrado y discreto de X tal que $|A| = |\mathbb{R}|$. Entonces, X no es normal.

Demostración. Supongamos que X es normal, lo cual nos debe de llevar a una contradicción. Notemos que, para todo $B \in \wp(A) - \{\emptyset\}$, donde $\wp(A)$ denota al conjunto potencia de A, se tiene que B es un subconjunto cerrado y abierto en A puesto que A es discreto en X [4, Ex.2, p. 63 y Ex.4 p. 78] ; por lo cual $A - B$ también es un subconjunto cerrado y abierto de A y, como A es un subconjunto cerrado en X, tenemos que B y $A - B$ son subconjuntos cerrados en X [4, 7.3, p. 78]

Por otra parte sabemos que $B \cap (A - B) = \emptyset$ y, como X es normal, se tiene que existen U_B y V_B subconjuntos abiertos de X tales que $B \subset U_B$, $(A - B) \in V_B$ y $U_B \cap V_B = \emptyset$.

Puesto que X es separable, existe D un conjunto denso y numerable en X. Para toda $B \in \wp(A) - \{\emptyset\}$ definimos $C_B = D \cap U_B$. Puesto que D es denso tenemos que $C_B \neq \emptyset$; definimos $f : \wp(A) - \{\emptyset\} \longrightarrow \wp(D) - \{\emptyset\}$ dada por $f(B) = C_B$.

Veamos que f es inyectiva. Sean $B_1, B_2 \in \wp(A) - \{\emptyset\}$ donde $B_1 \neq B_2$. Como $B_1 \neq B_2$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_2 - B_1 \neq \emptyset$. Esto implica que $\emptyset \neq B_2 - B_1 \subseteq U_{B_2} \cap V_{B_1}$, por lo cual tenemos que $\emptyset \neq D \cap (U_{B_2} \cap V_{B_1}) = C_{B_2} \cap V_{B_1}$. Ahora bien $C_{B_2} \cap V_{B_1} \subset C_{B_2} - C_{B_1}$ ya que si $x \in C_{B_2} \cap V_{B_1}$ entonces $x \in C_{B_2}$ y $x \in V_{B_1}$, por lo que $x \notin U_{B_1}$ y en consecuencia $x \notin C_{B_1}$. De este modo se tiene que $C_{B_2} \neq C_{B_1}$ y en consecuencia f es inyectiva.

Recordemos que dados dos conjuntos Z y W se tiene que $|Z| \leq |W|$ si y sólo si existe una función $g : Z \longrightarrow W$ inyectiva [1, p. 79]. Por lo cual la inyectividad de f implica la siguiente desigualdad:

$$2^{|\mathbb{R}|} = |\wp(\mathbb{R})| = |\wp(A) - \{\emptyset\}| \leq |\wp(D) - \{\emptyset\}| = |\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$

Lo cual es una contradicción al Teorema de Cantor [1, p. 67], por lo tanto X no es normal.

□

DEFINICIÓN 3.6.3. Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathbb{B} = \{[a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ donde $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}|a \leq x < b\}$. Entonces $\mathbb{B}$ es base para una topología τ_S (la topología de Sorgenfrey) en $\mathbb{R}$. Al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ se le conoce como la recta de Sorgenfrey.

PROPOSICIÓN 3.6.4. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es separable, Lindelöf y normal.

Demostración. Veamos en orden estas afirmaciones.

- $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es separable.

  El conjunto de los número racionales $\mathbb{Q}$ es denso y numerable en $\mathbb{R}$, por lo tanto $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es separable.

- $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es un espacio de Lindelöf.

  Recordemos que un espacio topológico de Hausdorff se dice que es un espacio de Lindelöf si para cada cubierta abierta puedo encontrar una subcubierta numerable. Dada una cubierta abierta podemos pensar a sus elementos como unionesintersecciones de básicos, por lo cual para probar que un espacio es de Lindelöf basta ver que dada una cubierta abierta de básicos, ésta tiene una subcubierta numerable.

  Sean $\mathbb{B} = \{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ una cubierta abierta de básicos para $\mathbb{R}$ y $T = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}(a_\alpha, b_\alpha)$. Queremos que $\mathbb{B}$ tenga una subcubierta abierta numerable, para ello primero veremos que hay una subcubierta abierta numerable para $\mathbb{R} - T$ y otra subcubierta abierta numerable para T. De este modo tendremos dos subcubiertas numerables que, al unirlas, nos dará la subcubierta abierta numerable que necesitamos para $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - T) \cup T$.

  Veamos primero que $\mathbb{R} - T$ es numerable. Sea $p \in \mathbb{R} - T$. Entonces, p es la orilla de un intervalo, esto quiere decir que existe $\alpha_0 \in \Delta$ tal que $p = a_{\alpha_0}$; esto implica que existe $q_p \in \mathbb{Q}$ tal que $q_p \in [p, b_{\alpha_0}) = [a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$. Observemos que $(a_{\alpha_0}, q_p) \subseteq (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0})$.

  Sea $f : \mathbb{R} - T \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(p) = q_p$. Veamos que f es inyectiva. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R} - T$ tales que $p_1 \neq p_2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p_1 < p_2$.

  Veamos que esto implica que $q_{p_1} < q_{p_2}$ y, en consecuencia, que $f(p_1) = q_{p_1} \neq q_{p_2} = f(p_2)$. Supongamos que $q_{p_2} \leq q_{p_1}$. Sabemos que $(p_1, q_{p_1}) \subseteq T$; como $p_1 < p_2$ y $q_{p_2} \leq q_{p_1}$, tenemos que $(p_2, q_{p_2}) \subset (p_1, q_{p_1})$. De hecho, $p_2 \in (p_1, q_{p_1})$, lo que implica que $p_2 \in T = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}(a_\alpha, b_\alpha)$, esto es una contradicción puesto que $p_2 \in \mathbb{R} - T$.

  La inyectividad en f implica que $|\mathbb{R} - T| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ [1, p. 79], concluyendo así que $\mathbb{R} - T$ es numerable. Esto implica que existe $\Gamma = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cantidad numerable de índices tales que $\mathbb{B}^* = \{[a_{\alpha_i}, b_i)\}_{i\in\Gamma}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R} - T$.

  Por otra parte T es un abierto en $\mathbb{R}$ con la topología usual, por lo cual tiene una cubierta abierta $\mathbb{A} = \{(a_\beta, b_\beta)\}_{\beta\in\Theta}$. Como $\mathbb{R}$ es segundo númerable, tenemos que T es segundo numerable [4, 6.2, p. 174]. Esto implica que existe $\mathbb{A}' = \{(a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una subcubierta abierta numerable de $\mathbb{A}$ para T [4, 6.3, p. 174]. Definimos $\mathbb{A}^* = \{[a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, por construcción se tiene que $\mathbb{A}^*$ es una cubierta abierta numerable para T en $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey.

  Finalmente observemos que $\mathbb{A}^* \cup \mathbb{B}^*$ es una cubierta abierta numerable de $(\mathbb{R}, \tau_S)$, puesto que la unión de conjuntos numerables es numerable [15, 2.12 p. 31]. De esta forma hemos probado que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es un espacio de Lindelöf.

- $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es normal.

  Veamos primero que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es T_1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq y$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$, entonces $[y, y+1)$ y $[x, \frac{x+y}{2})$ son subconjuntos abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_S)$ tales que $y \in [y, y+1)$, $x \notin [y, y+1)$, $x \in [x, \frac{x+y}{2})$ y $y \notin [x, \frac{x+y}{2})$. Por lo tanto $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es T_1.

  Ahora veamos que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es normal. Sean A y B subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Queremos ver que existen U y V subconjuntos abiertos en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

  Observemos que, para toda $a \in A$, se cumple que $a \in X - B$, donde $X - B$ es abierto puesto que B es cerrado. Entonces existe $x_a \in X - B$ tal que el subconjunto $[a, x_a)$ se queda contenido en $X - B$.

  Análogamente tenemos que, para toda $b \in B$, se cumple que $b \in X - A$ con $X - A$ subconjunto abierto puesto que A es cerrado. Por lo cual tenemos que existe $x_b \in X - A$ tal que $[b, x_b)$ se queda contenido en $X - A$.

  Definimos $U = \bigcup\limits_{a \in A} [a, x_a)$ y $V = \bigcup\limits_{b \in B} [b, x_b)$, U y V son abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_S)$ puesto que son uniones arbitrarias de abiertos, por otra parte por definición tenemos que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

  Veamos que $U \cap V = \emptyset$, supongamos $p \in U \cap V$. Entonces $p \in [a_0, x_{a_0})$ para alguna $a_0 \in A$ y $p \in [b_0, x_{x_{b_0}})$ para alguna $b_0 \in B$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $b_0 < a_0$. Esto implica que $[a_0, x_{a_0}) \cap [b_0, x_{b_0}) \neq \emptyset$, lo cual implica que $A \cap (X - A) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $U \cap V = \emptyset$ y en consecuencia tenemos que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es normal.

$\square$

PROPOSICIÓN 3.6.5. Sea $n \geq 2$. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey. $F_n(\mathbb{R})$ no es normal.

Supongamos que $F_n(X)$ es normal. Por la Proposición 2.2.2, tenemos que $F_2(X)$ es cerrado en $F_n(X)$, lo que implica que $F_2(X)$ es normal [4, 3.3, p. 145].

En la Proposición 3.6.4 probamos que la recta de Sorgenfrey es separable, entonces, por el Teorema 4.3.7 (que se verá en el siguiente capítulo), tenemos que $F_2(\mathbb{R})$ es separable.

Consideremos al conjunto $\mathcal{A} = \{\{x, -x\} | x \in \mathbb{R}\} \subset F_2(\mathbb{R})$. Vamos a probar que $\mathcal{A}$ tiene la cardinalidad de $\mathbb{R}$, es discreto y cerrado, lo que nos llevará, por el Lema 3.6.2, a que $F_2(X)$ no es normal, lo cual sería una contradicción.

Primero veamos que $\mathcal{A}$ tiene la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Consideremos a la función $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\{x, -x\}) = x$. Esta función es biyectiva por lo cual tenemos que $|\mathcal{A}| = \mathbb{R}$ [1, p. 79].

Observemos ahora que $\mathcal{A}$ es discreto, para esto tenemos que ver que todos sus puntos son subconjuntos abiertos en $\mathcal{A}$. Sea $\{x, -x\} \in \mathcal{A}$. Si $x = 0$ notemos que $\{0\} = \langle [0, 1) \rangle \cap \mathcal{A}$ que es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$. Si $x \neq 0$ notemos que $\{x, -x\} = \big\langle [-|x|, 0), [|x|, |x|+1) \big\rangle \cap \mathcal{A}$ que es un subconjunto abierto en $\mathcal{A}$, de esto se concluye que $\mathcal{A}$ es discreto.

Finalmente veamos que $\mathcal{A}$ es cerrado, para esto comprobaremos que $F_2(\mathbb{R}) - \mathcal{A}$ es abierto. Sea $\{p, q\} \in F_2(\mathbb{R}) - \mathcal{A}$. Queremos ver que existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ en $F_2(\mathbb{R})$ tal que $\{p, q\} \in \mathcal{U} \subset F_2(\mathbb{R}) - \mathcal{A}$.

- Caso 1. $p = q$ y $p \neq 0$.

  Si $p > 0$, entonces se tiene que $\{p\} \in \big\langle [p, p+1) \big\rangle$ y, puesto que no hay números negativos en $[p, p+1)$, tenemos que $\big\langle [p, p+1) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Si $p < 0$, entonces se tiene que $\{p\} \in \big\langle [p, 0) \big\rangle$ y puesto que no hay números positivos en $[p, 0)$, tenemos que $\big\langle [p, 0) \big\rangle \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

- Caso 2. $p \neq q$, $p = 0$ y $q \neq 0$.

  Si $q > 0$ tenemos que $\{0, q\} \in \big\langle [0, \frac{q}{2}), [q, q+1) \big\rangle$ y, puesto que no hay números negativos en $[0, \frac{q}{2}) \cup [q, q+1)$, se tiene que $\big\langle [0, \frac{q}{2}), [q, q+1) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

  Si $q < 0$ tenemos que $\{0, q\} \in \big\langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \big\rangle$. Veamos que $\big\langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Sea $\{x, -x\} \in \mathcal{A}$. Supongamos que $\{x, -x\} \in \big\langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \big\rangle$. Entonces, $x \in [q, \frac{q}{2})$ o $x \in [0, -\frac{q}{2})$. Si $x \in [q, \frac{q}{2})$, tenemos que $x < \frac{q}{2}$, lo que implica que $-x > -\frac{q}{2}$, por lo que $-x \notin [0, -\frac{q}{2})$. Análogamente, si $x \in [0, -\frac{q}{2})$, tenemos que $-x \notin [q, \frac{q}{2})$. De esto se concluye que $\big\langle [q, \frac{q}{2}), [0, -\frac{q}{2}) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

- Caso 3. $p \neq 0 \neq q$.

  Si $p, q > 0$, supongamos sin pérdida de generalidad que $p < q$. Entonces, $\{p, q\} \in \big\langle [p, \infty) \big\rangle$, además, como no hay números negativos en $[p, \infty)$, tenemos que $\big\langle [p, \infty) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

  Si $p, q < 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $p < q$. Entonces, $\{p, q\} \in \big\langle (-\infty, 0) \big\rangle$, además, como no hay números positivos en $(-\infty, 0)$, se tiene que $\big\langle (-\infty, 0) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

  Si $p \neq q$ y $p > 0$, $q < 0$ se tienen dos casos.

  El primer caso es $|p| > |q|$, entonces $\{p, q\} \in \big\langle [q, 0), [p, \infty) \big\rangle$. Veamos que $\big\langle [q, 0), [p, \infty) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Sea $\{x, -x\} \in A$. Para que $\{x, -x\}$ esté en $\big\langle [q, 0), [p, \infty) \big\rangle$ se debe de cumplir que $x \in [q, 0)$ o $x \in [p, \infty)$. Si $x \in [q, 0)$, tenemos que $q \leq x$, lo que implica que $-x \leq -q < p$, por lo tanto $-x \notin [p, \infty)$, lo que implica que $\{x, -x\} \nsubseteq [q, 0) \cup [p, \infty)$ y, en consecuencia, $\{x, -x\} \notin \big\langle [q, 0), [p, \infty) \big\rangle$. Análogamente, si $x \in [p, \infty)$, se tiene que $-x \notin [q, 0)$ y, en consecuencia $\{x, -x\} \notin \big\langle [q, 0), [p, \infty) \big\rangle$. Por lo tanto $\big\langle [q, 0), [p, \infty) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

  Si $|q| > |p|$, entonces $\{p, q\} \in \big\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle$. Veamos que $\big\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Sea $\{x, -x\} \in A$. Para que $\{x, -x\}$ este en $\big\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle$, se tiene que cumplir que $x \in [q, \frac{-p+q}{2})$ o $x \in [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle$. Si $x \in [q, \frac{-p+q}{2})$, tenemos que $x < \frac{-p+q}{2}$, lo que implica que $-x > \frac{p-q}{2}$, por lo que $\{x, -x\} \nsubseteq [q, \frac{-p+q}{2}) \cup [p, \frac{p-q}{2})$ y, en consecuencia, $\{x, -x\} \notin \big\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle$. Análogamente, si $x \in [p, \frac{p-q}{2})$, se tiene que $-x \notin [q, \frac{-p+q}{2})$, lo que implica que $\{x, -x\} \notin \big\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle$. Por lo tanto $\big\langle [q, \frac{-p+q}{2}), [p, \frac{p-q}{2}) \big\rangle \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

De todos los casos anteriores se concluye que $F_2(\mathbb{R}) - \mathcal{A}$ es un subconjunto abierto y en consecuencia $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado en $F_2(X)$. Y así hemos llegado a la contradicción que queríamos.

Capítulo 4

Conexidad, compacidad y axiomas de numerabilidad

En este capítulo veremos algunas de las propiedades topológicas más importantes. En la primera sección veremos cómo es que la conexidad y la conexidad local se preservan bajo productos simétricos. En la segunda sección se analizará la compacidad y la compacidad local.

Finalmente, en la sección 1.3 veremos los axiomas de numerabilidad, la separabilidad y la propiedad de ser un espacio de Lindeföf.

4.1. Conexidad

DEFINICIÓN 4.1.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es desconexo si existen A y B subconjuntos abiertos en X tales que, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$.

DEFINICIÓN 4.1.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es conexo cuando X no es desconexo.

TEOREMA 4.1.3. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es un espacio conexo si y sólo si $F_n(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Esto implica que X^n es conexo [4, 1.7, p. 109]. Por la Proposición 2.1.2 sabemos que la función $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ dada por $\varphi_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$ es continua y suprayectiva, de donde podemos concluir que $F_n(X)$ es conexo [4, 1.4, p. 108].

Demostraremos ahora que el que $F_n(X)$ sea conexo implica que X es conexo por contrapositiva, para ello supongamos que X es desconexo. Esto implica que $X = U \cup V$ donde U y V son abiertos no vacíos y ajenos entre si.

Notemos que $\langle U \rangle$ y $\langle X, V \rangle$ son abiertos no vacíos en $F_n(X)$. Como $U \neq \emptyset$, entonces existe un $x \in U$ por lo cual se tiene que $\{x\} \in \langle U \rangle$. De igual forma como $V \neq \emptyset$, existe $y \in V$ y, entonces, $\{y\} \in \langle X, V \rangle$ concluyendo así que $\langle X, V \rangle \neq \emptyset$.

Comprobemos que $F_n(X) = \langle U \rangle \cup \langle X, V \rangle$. Tenemos que $\langle U \rangle \cup \langle X, V \rangle \subseteq F_n(X)$. Sea $A \in F_n(X)$. Tenemos dos posibles casos:

- Si $A \subseteq U$, entonces tenemos que $A \in \langle U \rangle$ y, por lo tanto, $A \in \langle U \rangle \cup \langle X, V \rangle$.
- Si $A \nsubseteq U$, entonces existe $p \in A \cap (X - U)$, puesto que estamos suponiendo que $X = U \cup V$, tenemos que $p \in A \cap V$ lo que implica que $A \in \langle X, V \rangle$ y ,por consiguiente, $A \in \langle U \rangle \cup \langle X, V \rangle$.

Veamos que $\langle U \rangle \cap \langle X, V \rangle = \emptyset$. Supongamos que existe $A \in \langle U \rangle \cap \langle X, V \rangle$. Esto implica que $A \subseteq U$ y $A \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe $a \in A \cap V$ y, por otro lado tenemos que $a \in U$, lo cual es una contradicción puesto que $U \cap V = \emptyset$.

De esta forma hemos probado que Si X es desconexo, entonces $F_n(X)$ es desconexo, lo cual es equivalente a que si X es conexo, entonces $F_n(X)$ es conexo.

□

4.1.1. Conexidad Local

DEFINICIÓN 4.1.4. Decimos que un espacio topológico X es localmente conexo si, para toda $x \in X$ y para todo U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, existe V subconjunto abierto y conexo en X tal que $x \in V \subseteq U$.

TEOREMA 4.1.5. *Dada $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \{1,...,n\}}$ una familia finita de espacios topológicos localmente conexos se tiene que $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ es localmente conexo.*

Demostración. Sean $\widehat{x} = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ y $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ un subconjunto abierto básico de $X_1 \times ... \times X_n$ tal que $x \in U$.

Dada $i \in \{1, ..., n\}$, como X_i es localmente conexo y $x_i \in U_i$, tenemos que existe V_i un subconjunto abierto y conexo de X_i tal que $x_i \in V_i \subseteq U_i$. Puesto que el producto de espacios conexos es conexo [4, 1.7, p. 109], tenemos que $V_1 \times ... \times V_n$ es un subconjunto abierto y conexo de $X_1 \times ... \times X_n$ tal que $\widehat{x} \in V_1 \times ... \times V_n \subseteq U_1 \times ... \times U_n$. Por lo tanto $X_1 \times ... \times X_n$ es localmente conexo.

□

TEOREMA 4.1.6. *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si todas las componentes conexas de conjuntos abiertos son abiertas en X.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean U un subconjunto abierto en X, C una componente conexa de U y $x \in C$. Entonces, existe un subconjunto abierto conexo V en X, tal que $x \in V \subseteq U$. Por lo que $V \subseteq C$ y, en consecuencia, C es un subconjunto abierto en X pues todos sus puntos son interiores.

Supongamos ahora que toda componente conexa de cada abierto en X es abierta. Sea $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Sea $C(x)$ la componente conexa de U que contiene a x. Entonces, $C(x)$ es un subconjunto abierto y conexo de X que cumple que $x \in C(x) \subseteq U$. Por lo tanto X es localmente conexo.

□

DEFINICIÓN 4.1.7. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que $f : X \longrightarrow Y$ es una función cociente si f es suprayectiva, continua y se cumple que dado $U \subseteq Y$ si $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, entonces U es abierto en Y. En caso de que exista una función de este tipo se dice que Y es un espacio cociente de X.

TEOREMA 4.1.8. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función cerrada, continua y suprayectiva, entonces f es una función cociente.*

Demostración. Sea $O \subset Y$ tal que $f^{-1}[O]$ es abierto en X, entonces $X - f^{-1}[O]$ es cerrado en X, entonces como f es cerrada tenemos que $f[X - f^{-1}[O]]$ es cerrado en Y y puesto que f es suprayectiva tenemos que $f[X - f^{-1}[O]] = Y - O$, por lo cual O es abierto en Y y entonces f es una función cociente.

□

OBSERVACIÓN 4.1.9. Notemos que la función canónica $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ dada por $\varphi_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$ es una función cociente puesto que, como vimos en las Proposiciones 2.1.2 y 2.1.5, es continua, cerrada y suprayectiva.

TEOREMA 4.1.10. *Sea X un espacio topológico. Si X localmente conexo y Y es un espacio cociente de X, entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función cociente, $y \in Y$, O un abierto en Y tal que $y \in O$ y $C(y)$ la componente conexa de y en O. Queremos ver que $C(y)$ es abierto en Y, para ello primero veremos que $C = f^{-1}[C(y)]$ es un subconjunto abierto en X.

Sea $x \in C = f^{-1}[C(y)]$. Como $f(x) \in C(y) \subseteq O$, tenemos que $x \in f^{-1}[O]$. Puesto que X es localmente conexo, tenemos que existe U_x un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in U_x \subseteq f^{-1}[O]$.

Dado que la imagen continua de un conexo es conexa [4, 1.4, p. 108], tenemos que $f[U_x]$ es conexo. Además, como $f(x) \in f[U_x] \cap C(y)$, tenemos que $f[U_x] \cup C(y)$ es un subconjunto conexo de O.

Por otra parte, recordemos que $C(y)$ es componente conexa de O y, por lo tanto, es componente máximal con respecto a la contención. Entonces tenemos que $C(y) \cup f(U_x) = C(y)$ y $f(U_x) \subseteq C(y)$, por lo cual $U_x \subseteq f^{-1}(C(y)) = C$. En consecuencia $x \in int(C)$ y como x era un punto arbitrario de C, se tiene que todos los puntos de C son interiores y de esto se concluye que C es abierto en X.

Como f es una función cociente, $C(y)$ es abierto en Y, esto implica, por el Teorema 4.1.6, que Y es localmente conexo.

□

LEMA 4.1.11. Sea X espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{C}$ es un subconjunto conexo de $F_n(X)$ tal que $\mathcal{C} \cap F_1(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto conexo de X.

Demostración. Supongamos que $\bigcup \mathcal{C}$ no es conexo. Entonces, existen A y B subconjuntos de X, tales que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$, $\overline{B} \cap A = \emptyset$ y $\bigcup \mathcal{C} = A \cup B$ [17, 26.5, p. 192].

Sea $\{x\} \in \mathcal{C} \cap F_1(X)$. Tenemos que $x \in \bigcup \mathcal{C}$, por lo cual $x \in A$ o $x \in B$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in A$. Definimos $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{C} | K \subset A\}$ y $\mathcal{L} = \{K \in \mathcal{C} | K \cap B \neq \emptyset\}$.

Notemos que:

1. $\mathcal{C} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$.

   Por la definición de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$, tenemos que $\mathcal{K} \cup \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$. Veamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Sea $K \in \mathcal{C}$. Si $K \subset A$, se tiene que $K \in \mathcal{K}$. Supongamos que $K \nsubseteq A$. Entonces, existe $p \in K$ tal que $p \notin A$, pero puesto que $p \in \bigcup \mathcal{C}$ tenemos que $p \in B$, por lo cual $K \cap B \neq \emptyset$. Esto implica que $K \in \mathcal{L}$, en consecuencia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$ y, por lo tanto, $\mathcal{C} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$.

2. $\mathcal{K} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

   Tenemos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ puesto que $\{x\} \in \mathcal{K}$. Veamos que $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Tenemos que $B \neq \emptyset$, entonces existe $p \in B$, por lo que $p \in \bigcup \mathcal{C}$. Esto implica que existe $K \in \mathcal{C}$ tal que $p \in K$, por lo cual $K \cap B \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $K \in \mathcal{L}$.

3. $\overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

   Sea $G \in \overline{\mathcal{K}}$. Definimos $\mathcal{Z} = \{K \subseteq F_n(X) | K \subset \overline{A}\}$. Sabemos que $\mathcal{Z}$ es cerrado por lo que vimos en el Lema 1.3.1 y $\mathcal{K} \subset \mathcal{Z}$, por lo cual $\overline{K} \subset \overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}$. Esto implica que $G \in \mathcal{Z}$, entonces $G \subseteq \overline{A}$ y, puesto que $\overline{A} \cap B = \emptyset$, tenemos que $G \cap B = \emptyset$. Por consecuencia $G \notin \mathcal{L}$, con lo cual podemos concluir que $\overline{\mathcal{K}} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

4. $\overline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

   Sea $G \in \overline{\mathcal{L}}$. Definimos $\mathcal{Z} = \{K \in F_n(X) | K \cap \overline{B} \neq \emptyset\}$. Sabemos que $\mathcal{Z}$ es cerrado (Lema 1.3.1) y $\mathcal{L} \subset \mathcal{Z}$. Por lo cual $\overline{\mathcal{L}} \subset \overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}$, esto implica que $G \in \mathcal{Z}$, en consecuencia tenemos que $G \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Entonces $G \nsubseteq A$ puesto que $A \cap \overline{B} = \emptyset$, por ende tenemos que $G \notin \mathcal{K}$ y de esta forma concluimos que $\overline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

Pero de 1, 2, 3, y 4,se concluye que $\mathcal{C}$ es desconexo [17, 26.5, p. 192], lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ es conexo en X.

□

LEMA 4.1.12. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{C}$ un subconjunto abierto en $F_n(X)$. Entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto en X.

Demostración. Sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Entonces, por definición de unión, tenemos que existe $K \in \mathcal{C}$ tal que $x \in K$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $K = \{x, k_1, k_2, ..., k_l\}$. Como $\mathcal{C}$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$, por el Lema 1.3.3 tenemos que existe $\mathcal{V} = \langle V_x, V_1, V_2, ..., V_l \rangle$ un Vietórico básico en $F_n(X)$ tal que $x \in V_x$, para toda $i \in \{1, 2, ..., l\}$, se cumple que $k_i \in V_i$, $V_x \cap V_i = \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y , además, $K \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{C}$.

Veamos que $V_x \subset \bigcup \mathcal{C}$. Sea $p \in V_x$. Entonces $\{p, k_1, k_2, ..., k_l\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{C}$, por lo tanto $p \in \bigcup \mathcal{C}$. En consecuencia tenemos que $\bigcup \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto en X.

□

TEOREMA 4.1.13. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es localmente conexo si y sólo si $F_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sabemos que X^n es localmente conexo por el Teorema 4.1.5. Puesto que $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ dada por $\varphi_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$ es una función cociente (Observación 4.1.9), al aplicar el Teorema 4.1.10 se tiene entonces que $F_n(X)$ es localmente conexo.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es localmente conexo. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto en X tal que $x \in U$. Consideremos $\{x\} \in F_n(X)$, entonces $\{x\} \in \langle U \rangle$; como $F_n(X)$ es localmente conexo, tenemos que existe $\mathcal{V}$ subconjunto abierto y conexo en $F_n(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V} \subset \langle U \rangle$. Por los Lemas 4.1.11 y 4.1.12 se tiene que $\bigcup \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto y conexo en X.

Además, $\bigcup \mathcal{V} \subset U$, ya que dado $p \in \bigcup \mathcal{V}$, tenemos que existe $K \in \mathcal{V}$ tal que $p \in K$, y, puesto que $\mathcal{V} \subset \langle U \rangle$, entonces $K \in \langle U \rangle$, por lo que $K \subseteq U$ lo que implica que $p \in U$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{V}$ es un subconjunto abierto y conexo en X que cumple que $x \in \bigcup \mathcal{V} \subseteq U$, lo cual nos dice que X es localmente conexo.

□

4.2. Compacidad

DEFINICIÓN 4.2.1. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Decimos que X es compacto si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

TEOREMA 4.2.2. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es un espacio compacto si y solo si $F_n(X)$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que $F_n(X)$ es compacto. Por el Lema 2.2.1 sabemos que X es homeomorfo a $F_1(X)$ y, por la Proposición 2.2.2, tenemos que $F_1(X)$ es cerrado en $F_n(X)$. Esto implica que $F_1(X)$ es compacto [4, 1.4(3), p. 224] y, en consecuencia, X es compacto.

Supongamos ahora que X es compacto. Entonces, X^n es compacto [4, 1.4(4), p. 224]. Sabemos que la función canónica $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ dada por $\varphi_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$ es continua (Proposición 2.1.2) de donde podemos concluir que $F_n(X)$ es compacto, puesto que la imagen continua de un compacto es compacta [4, 1.4(1), p. 224].

□

4.2.1. Compacidad Local

DEFINICIÓN 4.2.3. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Decimos que X es localmente compacto si, para toda $x \in X$ y, para todo U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, se tiene que existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $\overline{V}$ es compacto.

TEOREMA 4.2.4. *Si X es un espacio topológico de Hausdorff. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X es localmente compacto.*
2. *Para todo compacto $C \subset X$ y, para todo subconjunto abierto U en X tal que $C \subset U$, se tiene que existe un abierto V en X tal que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ es compacto.*
3. *X tiene una base $\mathbb{B}$ tal que, para todo $U \in \mathbb{B}$ se cumple que $\overline{U}$ es compacto.*
4. *Para toda $x \in X$, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $\overline{U}$ es compacto.*

Demostración. Veamos que 1 implica 2. Sean $C \subset X$ compacto y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$.

Dada $x \in C$, como X es localmente compacto, tenemos que existe $V(x)$ un subconjunto abierto en X tal que $x \in V(x) \in \overline{V(x)} \subset U$ y $\overline{V(x)}$ es compacto. Entonces, $\{V(x)|x \in C\}$ es una cubierta abierta de C y, puesto que C es compacto tenemos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in C$ tales que $\{V(x_i)|i \in \{1, ..., n\}\}$ es una cubierta abierta de C. Como $\overline{V(x_i)}$ es compacto, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V(x_i)}$ es compacto y $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V(x_i)} \subset U$ puesto que, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\overline{V(x_i)} \subset U$. Por lo cual tenemos que $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V(x_i) \subseteq \overline{\bigcup\limits_{1=1}^{n} V(x_i)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V(x_i)} \subset U$ [4, 4.5(3), p. 70].

Comprobemos que 2 implica 3. Sean $\mathbb{B} = \{V \subseteq X | \overline{V} \textit{ es compacto y } V \textit{ es abierto en } X\}$, $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Tenemos que $\{x\}$ es compacto, como $\{x\} \subseteq U$, por 2, tenemos que existe $V \in \mathbb{B}$ tal que $\{x\} \subset V \subset \overline{V} \subseteq U$, lo cual implica $x \in V \subset \overline{V} \subseteq U$ por lo cual $\mathbb{B}$ es una base de la topología.

Ahora veamos que 3 implica 4. Sea $x \in X$. Como X es abierto en X, existe $U \in \mathbb{B}$ tal que $x \in U \subseteq X$.

Finalmente comprobemos que 4 implica 1. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto en X tal que $x \in U$. Por 4 tenemos que existe W un subconjunto abierto en X tal que $x \in W \subseteq \overline{W}$ y $\overline{W}$ es compacto. Se tiene que $\overline{W} \cap U$ es un subconjunto abierto en $\overline{W}$ tal que $x \in \overline{W} \cap U$. Como $\overline{W}$ es Hausdorff [4, 1.3(2), p. 138] y compacto tenemos que es $\overline{W}$ es normal [17, 17.10, p. 121], en particular tenemos que $\overline{W}$ es regular, por lo cual existe G un abierto en $\overline{W}$ tal que $x \in G \subseteq \overline{G}_{\overline{W}} \subseteq \overline{W} \cap U$.

Sabemos que un subconjunto A de X es abierto si y sólo si, para todo $B \subseteq X$ se cumple que $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$ [4, 4, p. 91]. Tenemos que $G = E \cap \overline{W}$ con E un subconjunto abierto en X, consideremos $V = E \cap W$ y notemos que $\overline{G}_{\overline{W}} = \overline{G}_X \cap \overline{W} = \overline{E \cap \overline{W}} \cap \overline{W}_X = \overline{E \cap W_X} \cap \overline{W}_X = \overline{V}_X \cap \overline{W}_X = \overline{V}_X$ por lo cual tenemos que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{W} \cap U \subseteq U$.

□

TEOREMA 4.2.5. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(X_i, \tau_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ una familia finita de espacios topológicos localmente compactos y T_2. Entonces, $X_1 \times ... \times X_n$ es localmente compacto.*

Demostración. Sea $\widehat{x} = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$. Dada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tenemos que X_i es localmente compacto y T_2, entonces existe U_i abierto en X_i tal que $x_i \in U_i$ y $\overline{U_i}$ es compacto.

Tenemos que $U_1 \times ... \times U_n$ es un subconjunto abierto en $X_1 \times ... \times X_n$ tal que $\widehat{x} \in U_1 \times ... \times U_n$. Notemos que $\overline{U_1} \times ... \times \overline{U_n} = \overline{U_1 \times ... \times U_n}$. Como para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que $\overline{U_i}$ es compacto, entonces $\overline{U_2} \times ... \times \overline{U_n}$ es compacto [4, 1.4(4), p. 224]. Por el inciso 4 del Teorema 4.2.4 tenemos que $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ es localmente compacto.

□

LEMA 4.2.6. Sea $p : X \longrightarrow Y$ una función cerrada. Dado $S \subset Y$ un subconjunto cualquiera y un abierto $U \subset X$ tal que $p^{-1}[S] \subseteq U$, existe un abierto $V \subset Y$ tal que $S \subset V$ y $p^{-1}(V) \subseteq U$.

Demostración. Sea $V = Y - p[X - U]$. Como $p^{-1}[S] \subset U$, tenemos que $S \subset V$. Por otra parte se tiene que V es abierto en Y ya que p es cerrada. Finalmente, observemos que $p^{-1}[V] = X - p^{-1}[p[X - U]] \subset X - (X - U) = U$.

□

LEMA 4.2.7. Sea $p : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces, p es cerrada si y sólo si, para todo $A \subset X$, se cumple que $\overline{p(A)} \subset p(\overline{A})$.

Demostración. Sea $A \subset X$. Supongamos que p es cerrada. Entonces, $p(\overline{A})$ es cerrado, y ,puesto que $p(A) \subset p(\overline{A})$, tenemos que $\overline{p(A)} \subset \overline{p(\overline{A})} = p(\overline{A})$.

Ahora supongamos que $\overline{p(A)} \subset p(\overline{A})$ para todo $A \subseteq X$. Tomemos A un subconjunto cerrado en X, tenemos que $p(A) \subset \overline{p(A)} \subset p(\overline{A}) = p(A)$, por lo que $p(A) = \overline{p(A)}$. Por lo tanto p es una función cerrada.

□

DEFINICIÓN 4.2.8. Una función $p : X \longrightarrow Y$ es llamada perfecta si es continua, cerrada, suprayectiva y, para toda $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ es compacto.

OBSERVACIÓN 4.2.9. Notemos que la función canónica (Definición 2.1.1) es perfecta. Sabemos que es suprayectiva, continua (Teorema 2.1.2) y cerrada (Teorema 2.1.5). Además, para todo $T \in F_n(X)$, tenemos que la imagen inversa de T bajo φ_n es finita y, por lo tanto, compacta.

TEOREMA 4.2.10. *Sean X y Y espacios topológicos de Hausdorff y $p : X \longrightarrow Y$ una función perfecta. Si X localmente compacto, entonces Y es localmente compacto.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Como p es perfecta, tenemos que $p^{-1}(y)$ es compacto en X. Entonces, como $p^{-1}(y) \subseteq X$ donde X es abierto, por el Teorema 4.2.4(2), tenemos que existe U subconjunto abierto de X tal que $p^{-1}(y) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X$ y $\overline{U}$ es compacto.

Por el Lema 4.2.6, tenemos que existe V subconjunto abierto de Y tal que $y \in V$ y $p^{-1}(V) \subseteq U$. Tenemos entonces que $V = p[p^{-1}[V]] \subseteq p[U]$. Notemos que, como p es cerrada y por el Lema 4.2.7, se tiene que $p[\overline{U}] \subset p(\overline{U})$. Entonces, $\overline{V} \subseteq \overline{p[U]} \subset p[\overline{U}]$. Tenemos que $p[\overline{U}]$ es compacto en Y puesto que es la imagen continua de un compacto [4, 1.4(1), p. 224], por lo cual podemos concluir que $\overline{V}$ es compacto en Y [4, 1.4(3) p. 224]. De esta forma hemos probado que Y es localmente compacto.

□

TEOREMA 4.2.11. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es localmente compacto si y sólo si $F_n(X)$ es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto. Por el Teorema 4.2.5 tenemos que X^n es localmente compacto. Sabemos que la función canónica es perfecta (Observación 4.2.9), entonces, por el Teorema 4.2.10, tenemos que $F_n(X)$ es localmente compacto.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es localmente compacto. Tenemos que $F_1(X)$ es cerrado en $F_n(X)$ (Proposición 2.2.2), lo que implica que $F_1(X)$ es localmente compacto [4, 6.5(3), p. 239]. Como X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Lema 2.2.1), se concluye que X es localmente compacto [4, 6.5(1), p. 239]. □

4.3. Axiomas de numerabilidad

4.3.1. Primer axioma de numerabilidad

DEFINICIÓN 4.3.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es primero numerable (o que cumple el primer axioma de numerabilidad) si todo punto en X tiene una base local numerable.

LEMA 4.3.2. Sea X un espacio topológico primero numerable y $A \subseteq X$. Entonces, A es primero numerable.

Demostración. Sea $a \in A$. Tenemos que $a \in X$, por lo tanto existe $\mathbb{B}(a) = \{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base local numerable de a en X. Veamos que $\mathbb{B}' = \{V_i \cap A\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable para a en A. Sea W un subconjunto abierto en A tal que $a \in W$. Entonces, $W = U \cap A$ con U un subconjunto abierto en X. Como $a \in U$ y $\mathbb{B}(a)$ es una base local de a, existe $V_i \in \mathbb{B}(a)$ tal que $a \in V_i \subseteq U$. Tenemos que $a \in V_i \cap A \subseteq U \cap A = W$. Por lo tanto $\mathbb{B}'$ es una base local de a en A. Observemos que por construcción se tiene que $\mathbb{B}'$ es numerable, por lo tanto A es primero numerable. □

TEOREMA 4.3.3. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es primero numerable si y solo si $F_n(X)$ es primero numerable.*

Demostración. Primero veamos que el que X sea primero numerable implica que $F_n(X)$ es primero numerable.

Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_r\} \in F_n(X)$. Como X es primero numerable tenemos que, para cada $x_i \in A$, existe una base local numerable $\mathbb{B}_i = \{V_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ de x_i en X.

Sea $\mathbb{C} = \{\langle W_1, ..., W_r\rangle | W_i \in \mathbb{B}_i \text{ y } i \in \{1, ..., r\}\}$. Veamos que $\mathbb{C}$ es base local para A en $F_n(X)$. Sea $\mathcal{U}$ un abierto en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$, por el Lema 1.3.3 tenemos que existe $\langle M_1, M_2, ..., M_r\rangle = \mathcal{M}$ un Vietórico básico tal que $A \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se tiene que $x_i \in M_i$ y $M_i \cap M_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Ahora bien, como para cada $i \in \{1, ..., r\}$ se tiene que $\mathbb{B}_i$ es base local, tenemos que existe $V_{j_i}^i \in \mathbb{B}_i$ tal que $x_i \in V_{j_i}^i \subseteq M_i$. Consideremos al Vietórico $\langle V_{j_1}^1, V_{j_2}^2, ..., V_{j_r}^r\rangle = \mathcal{V}$, notemos que $\mathcal{V} \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto tenemos que $\mathbb{C}$ es una base local para A en $F_n(X)$.

Veamos que $\mathbb{C}$ es numerable. Consideremos a la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B}_1 \times ... \times \mathbb{B}_r$, donde $f(\langle W_1, ..., W_r\rangle) = W_1 \times ... \times W_r$. Veamos que f es inyectiva. Sean $\mathcal{W} = \langle W_1, ..., W_r\rangle$, $\mathcal{Q} = \langle Q_1, ..., Q_r\rangle \in \mathbb{C}$ tales que $f(\mathcal{W}) = f(\mathcal{Q})$. Entonces, $W_1 \times ... \times W_r = Q_1 \times ... \times Q_r$ lo cual implica que,para toda $i \in \{1, ..., r\}$, $W_i = Q_i$, por lo que $\mathcal{W} = \mathcal{Q}$ con lo cual podemos concluir que f es inyectiva. Esto implica que $|\mathbb{C}| \leq |\mathbb{B}_1 \times \times ... \times \mathbb{B}_r|$ [1, p. 79]. Sabemos que $|\mathbb{B}_1 \times ... \times \mathbb{B}_r| \leq |\mathbb{N}|$ puesto que el producto cartesiano finito de conjuntos numerables es numerable [14, 5.2.15, p. 113]. Con esta observación hemos demostrado que $F_n(X)$ es primero numerable.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es primero numerable. Sabemos que X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Lema 2.2.1). Como el ser primero numerable se preserva bajo subespacios topológicos (Lema 4.3.2) tenemos que $F_1(X)$ es primero numerable y, en consecuencia, X es primero numerable.

□

4.3.2. Segundo Axioma de numerabilidad

DEFINICIÓN 4.3.4. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es segundo numerable (o que cumple el segundo axioma de numerabilidad) si X tiene una base numerable.

TEOREMA 4.3.5. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es segundo numerable si y solo si $F_n(X)$ es segundo numerable.*

Demostración. Supongamos que X es segundo numerable. Entonces X tiene una base numerable $\mathbb{B} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Consideremos a $\mathbb{C} = \{\langle U_{j_1}, U_{j_2}, ..., U_{j_k}\rangle | U_{j_i} \in \mathbb{B} \ y \ 1 \leq k \leq n\}$ el conjunto de los Vietóricos formados con a lo más n abiertos pertenecientes a $\mathbb{B}$. Veamos que $\mathbb{C}$ es una base de la topología de $F_n(X)$.

Sean $A = \{x_1, ..., x_r\} \in F_n(X)$ y $\mathcal{V}$ un subconjunto abierto en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}$. Por el Lema 1.3.3 tenemos que existe $\mathcal{W} = \langle W_1, ..., W_r\rangle$ un Vietórico básico tal que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, $x_i \in W_i$, $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

Como $\mathbb{B}$ es base de la topología tenemos que para cada $i \in \{1, ..., r\}$ existe $U_{l_i} \in \mathbb{B}$ tal que $x_i \in U_{l_i} \subseteq W_i$, esto implica que $\mathcal{U}^* = \langle U_{l_1}, U_{l_2}, ..., U_{l_r}\rangle \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Por construcción tenemos que $\mathcal{U}^* \in \mathbb{C}$, por lo cual concluimos que $\mathbb{C}$ es una base de la topología.

Veamos que $\mathbb{C}$ es numerable. Dada $k \in \{1, ..., n\}$, definimos $\mathbb{C}_k = \{\langle U_{j_1}, ..., U_{j_k}\rangle | U_{j_i} \in \mathbb{B}\}$. Observemos que $\mathbb{C} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{C}_k$. Veamos que, dada $k \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{C}_k$ es numerable. Consideremos a la función $f : \mathbb{C}_k \longrightarrow \mathbb{B}^k$, donde $f(\langle W_1, ..., W_k\rangle) = W_1 \times ... \times W_k$. Veamos que f es inyectiva. Sean $\mathcal{W} = \langle W_1, ..., W_k\rangle, \mathcal{Q} = \langle Q_1, ..., Q_k\rangle \in \mathbb{C}_k$ tales que $f(\mathcal{W}) = f(\mathcal{Q})$. Entonces, $W_1 \times ... \times W_k = Q_1 \times ... \times Q_k$ lo cual implica que, para toda $i \in \{1, ..., k\}$, $W_i = Q_i$, por lo que $\mathcal{W} = \mathcal{Q}$ con lo cual podemos concluir que f es inyectiva. Esto implica que $|\mathbb{C}_k| \leq |\mathbb{B}^k|$ [1, p. 79]. Sabemos que $|\mathbb{B}^k| \leq |\mathbb{N}|$ puesto que el producto cartesiano finito de conjuntos numerables es numerable [14, 5.2.15, p. 113]. Por lo tanto $\mathbb{C}_k$ es numerable.

Tenemos entonces que $\mathbb{C}$ es una unión finita de conjuntos numerables, lo que implica que es numerable [15, 2.12 p. 31]. Por lo tanto X es segundo numerable.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es segundo numerable. Por el Lema 2.2.1 sabemos que X es homeomorfo a $F_1(X)$. Ser segundo numerable se preserva bajo subespacios topológicos [4, 6.2(2), p. 174] por lo cual tenemos que $F_1(X)$ es segundo numerable y, en consecuencia, X es segundo numerable.

$\square$

4.3.3. Separabilidad

DEFINICIÓN 4.3.6. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Decimos que X es separable si existe $D \subseteq X$ tal que D es denso y contable.

TEOREMA 4.3.7. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es separable si y solo si $F_n(X)$ es separable.*

Demostración. Supongamos que X es separable. Para ver que $F_n(X)$ es separable necesitamos ver que existe un subconjunto en $F_n(X)$ numerable y denso. Como estamos suponiendo que X es separable, existe $D \subseteq X$ denso y numerable. Puesto que $D \subseteq X$, entonces $F_n(D) \subseteq F_n(X)$.

Notemos que $F_n(D) = \bigcup\limits_{r=1}^{n} \mathcal{D}_r$ donde $\mathcal{D}_r = \{Z \subset D ||Z| = r\}$. Por lo que si probamos que, para toda $r \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{D}_r$ es numerable habremos probado que $F_n(D)$ es numerable [15, 2.12 p. 31].

Sean $r \in \{1, ..., n\}$ y $f_r : \mathcal{D}_r \longrightarrow D^r$ dada por $f_r(\{z_1, ..., z_r\}) = (z_1, ..., z_r)$. Veamos que f es inyectiva. Sean $Z = \{z_1, ..., z_r\}, W = \{w_1, ..., w_r\} \in \mathcal{D}_r$ tales que $Z \neq W$. Entonces, existe $z_i \in Z$ tal que, para toda $j \in \{1, ..., r\}$, $z_i \neq w_j$, por lo cual $f_r(Z) = (z_1, ..., z_r) \neq (w_1, ..., w_r) = f(W)$ concluyendo así que f_r es inyectiva. Esto implica que $|\mathcal{D}_r| \leq |D^r|$ [1, p. 79], y puesto que D^r es numerable [14, 5.2.15, p. 113] se concluye que $\mathcal{D}_r$ es numerable. En consecuencia hemos probado que $F_n(D)$ es un conjunto numerable.

Para concluir esta parte de la demostración solamente hace falta ver que $F_n(D)$ es denso en $F_n(X)$. Sean un $\mathcal{A} \subseteq F_n(X)$ subconjunto abierto no vacío y $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\} \in \mathcal{A}$. Queremos ver que existe $P \in F_n(D)$ tal que $P \in \mathcal{A}$; por el Lema 1.3.3 sabemos que podemos encontrar un Vietórico básico $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_k \rangle$ en $F_n(X)$ tal que,para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $b_i \in V_i$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ y, además, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Como D es denso en X tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., k\}$, existe $p_i \in V_i \cap D$. Esto implica que $P = \{p_1, p_2, ..., p_k\} \in F_n(D) \cap \langle V_1, ..., V_k \rangle \subseteq \mathcal{A}$. Por lo tanto, $F_n(D)$ es denso en $F_n(X)$, concluyendo así que $F_n(X)$ es separable.

Supongamos ahora que $F_n(X)$ es separable. Entonces, existe $\mathcal{C} \subseteq F_n(X)$ denso y numerable, supongamos que $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, escojemos un $x_i \in C_i$ y formamos con ellos al conjunto $D = \{x_i | x_i \in C_i \ y \ i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que por como definimos a D se tiene que $D \subseteq X$ y, además, D es numerable.

Veamos que D es denso en X. Sean B un subconjunto abierto no vacío de X y $b \in B$. Entonces, $\langle B \rangle$ es un subconjunto abierto distinto del vacío en $F_n(X)$, lo cual implica que existe $C_l \in \mathcal{C}$ tal que $C_l \in \langle B \rangle$ por lo cual tenemos que $C_l \subseteq B$. Esto implica que $x_l \in B$, por lo cual tenemos que $B \cap D \neq \emptyset$. De esta forma podemos concluir que D es denso en X y por lo tanto X es separable.

$\square$

4.3.4. Espacios de Lindelöf

DEFINICIÓN 4.3.8. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Decimos que X es un espacio de Lindelöf si, para toda cubierta abierta de X, tiene una subcubierta numerable.

De manera similar a lo que ocurre con el producto topológico, se tiene que el ser un espacio de Lindelöf no se preserva bajo productos simétricos. Para probar esto necesitaremos recordar el siguiente resultado.

TEOREMA 4.3.9. *Sea X un espacio topológico. Si X es regular y Lindelöf, entonces X es normal.*

Demostración. Sean $T_1, T_2 \subseteq X$ cerrados tales que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Necesitamos encontrar $U_1, U_2 \subset X$ subconjuntos abiertos en X tales que $T_1 \subset U_1$, $T_2 \subset U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Como X es regular tenemos que, para todo $p \in T_1$ y T_2, existen $U_1(p)$ y $V_1(p)$ subconjuntos abiertos de X tales que $p \in U_1(p)$, $T_2 \subset V_1(p)$ y $U_1(p) \cap V_2(p) = \emptyset$. Análogamente, para todo $q \in T_2$, y T_1 existen subconjuntos abiertos $U_2(q)$ y $V_2(q)$ en X tales que $q \in U_2(q)$, $T_1 \subset V_2(q)$ y $U_2(q) \cap V_2(q) = \emptyset$.

Notemos que $\{U_1(p)|p \in T_1\}$ y $\{U_2(q)|q \in T_2\}$ son cubiertas abiertas de T_1 y T_2 respectivamente. Por otra parte, como X es Lindelöf y T_1, T_2 son subconjuntos cerrados en X se tiene que T_1 y T_2 son Lindelöf [4, 6.6, p. 175]; esto implica que existen $P = \{p_i|p_i \in T_1 \ y \ i \in \mathbb{N}\}$ y $Q = \{q_i|q_i \in T_2 \ y \ i \in \mathbb{N}\}$ subconjuntos numerables de puntos en T_1 y T_2 respectivamente tales que $\{U_1(q_i)|q_i \in P\}$ y $\{U_2(q_i)|q_i \in Q\}$ son cubiertas abiertas de T_1 y T_2.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los siguientes dos conjuntos:

- $U_1'(n) = U_1(p_n) \cap V_2(q_1) \cap V_2(q_2) \cap ... \cap V_2(q_n)$
- $U_2'(n) = U_2(q_n) \cap V_1(p_1) \cap V_1(p_2) \cap ... \cap V_1(p_n)$

Observemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $U_1'(n)$ y $U_2'(n)$ son subconjuntos abiertos en X ya que están definidos como intersecciones finitas de subconjuntos abiertos en X.

Veamos que $\mathbb{B}_1 = \{U_1'(n)|n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de T_1. Sea $x \in T_1$. Entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_1(p_j)$, como tenemos que, para toda $i \in \mathbb{N}$, $T_1 \subset V_2(q_i)$, se tiene que $x \in U_1'(p_j)$. Por lo tanto $T_1 \subset \bigcup \mathbb{B}_1$, lo que implica que $\mathbb{B}_1$ es una cubierta abierta para T_1. Bajo un razonamiento análogo tenemos que $\mathbb{B}_2 = \{U_2'(n)|n \in \mathbb{N}\}$ es cubierta abierta de T_2.

Definimos $U_1 = \bigcup \mathbb{B}_1$ y $U_2 = \bigcup \mathbb{B}_2$. Por lo anterior sabemos que son abiertos, $T_1 \subset U_1$ y $T_2 \subset U_2$. Si probamos que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ habremos acabado la demostración.

Para esto basta ver que, para toda $m, n \in \mathbb{N}$, $U_1'(n) \cap U_2'(m) = \emptyset$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $x \in U_1'(n)$.

Caso 1 $n \leq m$.

Tenemos que $x \in U_1(p_n)$ y sabemos que $V_1(p_n) \cap U_1(p_n) = \emptyset$, por lo que $x \notin V_1(p_n)$. Como $U_2'(m) \subset V_1(p_n)$, tenemos que $x \notin U_2'(n)$.

Caso 2 $m < n$.

Entonces $x \in V_2(q_m)$, sabemos que $U_2(q_m) \cap V_2(q_m) = \emptyset$ por lo que $x \notin U_2(q_m)$. Por definición de $U_2'(n)$ tenemos que, $U_2'(n) \subset U_2(q_m)$, lo que implica que $x \notin U_2'(m)$.

De forma análoga se prueba que dado $y \in U_2'(m)$ se tiene que $y \notin U_1'(n)$, por lo cual $U_1'(n) \cap U_2'(m) = \emptyset$. De esta forma concluimos que X es normal.

□

El ejemplo clásico para probar que el ser un espacio de Lindelöf no se preserva bajo productos topológicos es la Recta de Sorgenfrey. Curiosamente es justamente este espacio el que nos ayudara a probar que el ser un espacio de Lindelöf no se preserva bajo productos simétricos. Recordemos que definimos y utilizamos este ejemplo para probar que la normalidad no se preserva bajo productos simétricos, por lo que se recomienda consultar la definición y los resultados vistos en la sección 3,6 de esta tesis.

PROPOSICIÓN 4.3.10. Sea $n \geq 2$. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ (La recta de Sorgenfrey) es un espacio Lindelöf tal que $F_n(\mathbb{R})$ no es Lindelöf.

Demostración. Supongamos que $F_n(\mathbb{R})$ es Lindelöf. Por la Proposición 3.6.4 sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es regular, entonces, por el Teorema 3.4.2, tenemos que $F_n(\mathbb{R})$ es regular. Esto implica, por el Teorema 4.3.9, que $F_n(\mathbb{R})$ es normal, lo cual es una contradicción a la Proposición 3.6.5, donde vimos que $F_n(\mathbb{R})$ no es normal. Por lo tanto $F_n(\mathbb{R})$ no es Lindelöf.

□

Capítulo 5

Dimensión, contractibilidad y retractos absolutos

En la primera parte de este capítulo veremos cómo se relaciona la dimensión del producto simétrico con la dimensión del espacio base.

En la segunda sección veremos si es que la propiedad de ser un espacio contractil se preserva bajo productos simétricos, también veremos que pasa con la contractabilidad local.

Por último se verá en que tipo de espacios se preserva la propiedad de ser un retracto absoluto bajo productos simétricos.

5.1. Dimensión

La teoría de dimensión es una matería de gran importancia con aplicaciones en varios campos de las matemáticas, en particular en diversas áreas de la topología como son la teoría del punto fijo, la topología de espacios Euclidianos, los hiperespacios y la teoría de continuos.

Existen tres posibles definiciones para dimensión: la dimensión inductiva pequeña (the small inductive dimension) dada para espacios métricos separables, la dimensión inductiva grande (the large inductive dimension) dada para espacios normales [6, 1.6.1, p.40] y la dimensión por cubiertas (the covering dimension) [6, 1.6.7 p.42] desarrollada para espacios normales.

Cada una de estas definiciones genera modelos distintos para la Teoría de Dimensión, siendo el clásico el modelo generado por la definición de dimensión inductiva pequeña, además estos modelos coinciden para espacios métricos separables y es para este tipo de espacios para los que se tiene más resultados. Es por esto que a lo largo de este capítulo trabajaremos exclusivamente con este modelo. Si se quiere conocer más sobre las diferencias y resultados existentes para estos modelos recomendamos consultar [6].

A lo largo de este capítulo usaremos las siguientes abreviaciones: dim es la abreviación de dimensión; $dim(X)$ se refiere a la dimensión del espacio X; finalmente dado $p \in X$ la abreviación $dim_p(X)$ se refiere a la dimensión de X en el punto p.

Antes de empezar recordaremos la definición de Dimensión para un espacio métrico y separable. Las primeras dos partes de la definición de dimensión son inductivas, el resto esta dado en función de las primeras dos partes.

DEFINICIÓN 5.1.1. Sea X un espacio métrico y separable.

1. $dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$. Además, $dim(X) \leq -1$ se entiende que implica que $X = \emptyset$.
2. Supongamos inductivamente que hemos definido $dim(Y) \leq n-1$ para todo espacio métrico y separable Y y para toda $n \geq 0$. Decimos que $dim_p(X) \leq n$ si X tiene una base local en p de tal manera que la dimensión de las fronteras de los elementos de dicha base tienen dimensión menor o igual que $n-1$.
3. $dim_p(X) = n$ si $dim_p(X) \leq n$ y $dim_p(X) \nleq n-1$.
4. $dim_p(X) = \infty$ si $dim_p(X) \nleq n$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$.
5. $dim(X) \leq n$ si $dim_p(X) \leq n$ para toda $p \in X$.
6. $dim(X) = n$ si $dim(X) \leq n$ y $dim(X) \nleq n-1$.
7. $dim(X) = \infty$ si $dim(X) \nleq n$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$.

A continuación presentaremos resultados de la Teoría de Dimensión que necesitaremos, sin embargo, no demostraremos algunos de estos resultados en este trabajo puesto que va más allá de los objetivos que tenemos y se asume que el lector esta familiarizado con ellos. Se proporcionaran las referencia para su consulta en libros especializados.

TEOREMA 5.1.2. *[13, 1.2, p. 6] Sean X y Y espacios métricos y separables. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces dado $p \in X$ tenemos que:*

- *Si $dim_p(X) \leq n$, entonces $dim_{f(p)}(Y) \leq n$.*
- *Si $dim_p(X) = n$, entonces $dim_{f(p)}(Y) = n$.*
- *Si $dim_p(X) = \infty$, entonces $dim_{f(p)}(Y) = \infty$.*
- *Si $dim(X) \leq n$, entonces $dim(Y) \leq n$.*
- *Si $dim(X) = n$, entonces $dim(Y) = n$.*
- *Si $dim(X) = \infty$, entonces $dim(Y) = \infty$.*

PROPOSICIÓN 5.1.3. Si X es un espacio topológico no vacío, finito, métrico y separable. Entonces $dim(X) = 0$.

Demostración. Como X es finito existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Sea $x_j \in X$. Veamos que $dim_{x_j}(X) = 0$. Sean U un subconjunto abierto en X tal que $x_j \in U$, $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 0$ tal que la bola con centro en x_j y radio p esta contenida en U, esto es $B(x_j, p) \subset U$.

Consideremos al conjunto $D = \{d(x_i, x_j) | x_i \in X \ y \ i \neq j\}$ donde $d(x_i, x_j)$ denota la distancia del punto x_i al punto x_j, entonces existe un $p' \in \mathbb{R}$ tal que $p' \geq 0$, $p' < p$ y además $p' \notin D$. Se tiene que $B(x_j, p') \subset B(x_j, p)$ y además la frontera de $B(x_j, p')$ es vacía (se infiere del hecho que $p' \notin D$), por lo cual $dim_{x_j}(X) = 0$. Como esto lo hicimos para un punto cualquiera podemos concluir que $dim(X) = 0$.

□

TEOREMA 5.1.4 (Del Subespacio)**.** *[13, 3.2, p. 15] Cualquier subespacio de un espacio con dimensión menor o igual a n tiene dimensión menor o igual a n.*

TEOREMA 5.1.5 (De la suma para dimensión n)**.** *[10, III 2, p. 30] Un espacio que es la suma numerable de espacios cerrados de dimensión menor o igual que n tiene dimensión menor o igual que n.*

De este Teorema se sigue el siguiente Corolario.

COROLARIO 5.1.6. [10, Cor.1, p. 32] La suma de dos subespacios cada uno de los cuales tiene dimensión menor o igual que n y uno de ellos es cerrado tiene dimensión menor o igual que n.

TEOREMA 5.1.7. *[13, 20.2, p. 125] Sean X y Y espacios métricos y separables. Entonces se tiene que $dim(X \times Y) \leq dim(X) + dim(Y)$ si $X \neq \emptyset$ y $Y \neq \emptyset$.*

De este teorema se sigue el siguiente Corolario.

COROLARIO 5.1.8. Sea X espacio métrico y separable. Entonces se cumple que $dim(X^n) \leq n(dim(X))$ si $X \neq \emptyset$.

Demostración. Haremos esta prueba por inducción. Para $n = 1$ tenemos que $dim(X) = 1 \cdot dim(X)$. Por lo tanto $dim(X) \leq 1(dim(X))$.

Supongamos que para $n-1$ se cumple que $dim(X^{n-1}) \leq (n-1)dim(X)$. Tenemos que $dim(X^n) = dim(X^{n-1} \times X)$, por el Teorema 5.1.7 sabemos que $(X^{n-1} \times X) \leq dim(X^{n-1}) + dim(X)$. Por hipótesis de inducción se cumple que $dim(X^{n-1}) + dim(X)dim(X) \leq (n-1)dim(X) + dim(X) = n(dim(X))$. Por lo tanto $dim(X^n) \leq n(dim(X))$.

□

TEOREMA 5.1.9. *[10, VI 7, p. 91] Sean X y Y espacios métricos y separables. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función cerrada y $dim(X) - dim(Y) = k$ con $k > 0$, entonces existe un punto en Y cuya imagen inversa tiene dimensión mayor o igual a k.*

Existe una noción de homeomorfismo más debíl que la definición común llamada homeomorfismo local, la cual definiremos a continuación, esta definición es aplicable a espacios topológicos en general.

DEFINICIÓN 5.1.10. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo local si, para toda $x \in X$, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y se cumple que:

1. $f[U]$ es un subconjunto abierto de Y.

2. $f|_U : U \longrightarrow f[U]$ es un homeomorfismo, donde $f|_U$ detona a la función f restringida al conjunto U.

Decimos que X y Y son localmente homeomorfos si existe un homeomorfismo local entre ellos.

LEMA 5.1.11. Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y $A \subset X$. Entonces, $h[Fr(A)] = Fr[h(A)]$.

Demostración. Como f es homeomorfismo en particular se tiene que es biyectiva, por lo cual $f(Fr(A)) = f(\overline{A} \cap \overline{X - A}) = f(\overline{A}) \cap f(\overline{X - A})$.Por otra parte tenemos que f preserva cerraduras [4, 12.2, p. 89], entonces $f(Fr(A)) = f(\overline{A}) \cap f(\overline{X - A}) = \overline{f(A)} \cap \overline{f(X - A)} = \overline{f(A)} \cap \overline{Y - f(A)} = Fr(f(A))$.

□

TEOREMA 5.1.12. *Sean X y Y espacios métricos y separables. Si existe $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo local, entonces $dim(X) = dim(Y)$.*

Demostración. Supongamos que $dim(X) = n$. Veamos primero que $dim(Y) \leq n$.

Sea $p \in Y$. Entonces, existe $x \in X$ tal que $f(x) = p$, como f es homeomorfismo local sabemos que existe un subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, $f[U]$ es un subconjunto abierto de Y y $f|_U$ es un homeomorfismo.

Por otra parte, como $dim(X) = n$, existe una base local $\mathbb{B}$ en X para x tal que, para toda $V \in \mathbb{B}$, se tiene que $dim(Fr(V)) \leq n - 1$.

Definimos $\mathbb{B}' = \{V \in \mathbb{B} | V \subseteq U\}$, notemos que $\mathbb{B}'$ es una base local para x. A partir de $\mathbb{B}'$ definimos a $\mathbb{C} = \{f(V) | V \in \mathbb{B}'\}$. Veamos que $\mathbb{C}$ es una base local para $p \in Y$. Sea W un subconjunto abierto en Y. Como $f[U]$ es abierto, tenemos que $W \cap f[U]$ es un abierto en Y tal que $p \in W \cap f[U]$. Entonces, $x \in f^{-1}(W \cap f[U]) = f^{-1}(W) \cap U$, tenemos que existe $V \in \mathbb{B}'$ tal que $x \in V \subseteq f^{-1}(W) \cap U$, de donde se obtiene que $f(x) = p \in f(V) \subseteq W \cap f[U]$ donde $f(V)$ es un subconjunto abierto de Y ya que $f|_U$ es un homeomorfismo. Además, por el Teorema 5.1.2 y el Lema 5.1.11, sabemos que los homeomorfismos preservan fronteras y dimensión por lo que $dimFr(f(V)) \leq n - 1$ para toda $V \in \mathbb{B}'$ y, entonces $dim_p(Y) \leq n$. Como p era un punto arbitrario en Y, tenemos que $dim(Y) \leq n$.

Veamos ahora que $dim(Y) \nleq n - 1$. Como $dim(X) = n$, existe $p \in X$ tal que $dim_p(X) \nleq n - 1$. Como f es un homeomorfismo local, tenemos que existe U subconjunto abierto en X tal que $p \in U$, $f[U]$ es un subconjunto abierto en Y y $f|_U$ es un homeomorfismo, esto implica, por el Teorema 5.1.2, que $dim_{f(p)}(f[U]) \nleq n - 1$ de donde obtenemos que $dim(f[U]) \nleq n - 1$. Tenemos que $f[U]$ es un subespacio de Y, si $dim(Y) < n - 1$, por el Teorema del Subespacio (Teorema 5.1.4) tendríamos que $dim(f[U]) < n - 1$ lo cual sería una contradicción, por lo tanto $dim(Y) \nleq n - 1$. De esta forma hemos probado que $dim(Y) = n$.

Veamos ahora el caso para dimensión infinita. Supongamos que $dim(X) = \infty$. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$. Queremos probar que $dim(Y) \nleq n$. Como $dim(X) = \infty$, tenemos que existe $p \in X$ tal que $dim_p(X) \nleq n$. Como f es un homeomorfismo local, existe U subconjunto abierto en X tal que $p \in U$, $f[U]$ es un subconjunto abierto en Y y $f|_U$ es un homeomorfismo, esto implica, por el

Teorema 5.1.2, que $dim_{f(p)}(f[U]) \nleq n$ lo que implica que $dim(f[U]) \nleq n$. Tenemos que $f[U]$ es un subespacio en Y, si $dim(Y) < n$ tendríamos, por el Teorema del Subespacio (Teorema 5.1.4), que $dim(f[U]) < n$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ tenemos que $dim(Y) \nleq n$ de donde concluimos que $dim(Y) = \infty$.

$\square$

A continuación definiremos ciertos subconjuntos de $F_n(X)$ que nos serán de gran utilidad al analizar la dimensión del producto simétrico.

DEFINICIÓN 5.1.13. Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Para $n \geq 2$ y $1 \leq i \leq j \leq n$ definimos $A_{i,j} = \{x \in X^n | \widehat{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \ y \ x_i = x_j\}$.

A partir de estos conjuntos definimos $A = \bigcup_{1 \leq i \leq j \leq n} A_{i,j}$.

Notemos que A es el conjunto de todos los puntos de X^n que tienen al menos una coordenada repetida. En consecuencia se tiene que $X^n - A$ es el conjunto de todos los puntos en X^n cuyas coordenadas son todas distintas entre si.

PROPOSICIÓN 5.1.14. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Consideremos a φ_n la función canónica (Definición 2.1.1). Entonces, $\varphi_n[A] = F_{n-1}(X)$ y $\varphi_n[X^n - A] = F_n(X) - F_{n-1}(X)$.
2. Si X es Hausdorff, entonces A es un subconjunto cerrado en X.
3. Si X es Hausdorff, entonces $\varphi_n|_{X^n - A}$ es abierta y homeomorfismo local.

Demostración. Empecemos con la demostración de 1. Como A es el conjunto de los elementos de X^n que tienen al menos una coordenada repetida, al aplicar la función φ_n a cualquier punto en A este será mapeado en un conjunto de cardinalidad menor o igual que $n-1$ por lo cual $\varphi_n[A] \subseteq F_{n-1}(X)$. Veamos que $F_{n-1}(X) \subseteq \varphi_n[A]$. Sea $P \in F_{n-1}(X)$. Por definición de producto simétrico tenemos que $|P| \leq n-1$, entonces, dado $\widehat{p} \in \varphi_n^{-1}(P)$ tenemos que $\widehat{p}$ tiene al menos una coordenada repetida, por lo que $\widehat{p} \in A$. De lo cual podemos concluir que $F_{n-1}(X) \subseteq \varphi_n[A]$ y, en consecuencia, $F_{n-1}(X) = \varphi_n[A]$.

Por otra parte, tenemos que $X^n - A$ es el conjunto de los puntos cuyas coordenadas son todas distintas entre si, por lo que al aplicar la función φ_n a cualquier punto de $X^n - A$ este será mapeado forzosamente a un elemento de $F_n(X) - F_{n-1}(X)$, de donde se concluye que $\varphi_n[X^n - A] \subseteq F_n(X) - F_{n-1}(X)$. Ahora bien, dado $P \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$, se tiene que $|P| = n$. Esto implica que, dado $\widehat{p} \in \varphi_n^{-1}(P)$, se cumple que $\widehat{p}$ tiene todas su coordenadas distintas, por lo cual $F_n(X) - F_{n-1}(X) \subseteq \varphi_n^{-1}[X^n - A]$. Por lo tanto $\varphi_n[X^n - A] = F_n(X) - F_{n-1}(X)$.

Probemos ahora el punto 2. Veamos que el conjunto $A_{i,j}$ es un subconjunto cerrado en X^n para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., n\}$, para esto basta ver que $X^n - A_{i,j}$ es abierto.

Sean $i, j \in \{1, ..., n\}$ y $\widehat{p} = (p_1, ..., p_n) \in X^n - A_{i,j}$. Entonces, $p_i \neq p_j$ y, como X es Hausdorff, tenemos que existen W_i, W_j subconjuntos abiertos en X tales que $p_i \in W_i$, $p_j \in W_j$ y $W_i \cap W_j = \emptyset$.

Definimos a $V = V_1 \times ... \times V_n$ donde $V_k = X$ si $k \neq i, j$ y $V_k = W_k$ si $k = i$ o $k = j$. Tenemos que V es un subconjunto abierto de X^n completamente contenido en $X^n - A_{i,j}$, por lo cual $X^n - A_{i,j}$ es un subconjunto abierto en X^n y, en consecuencia, $A_{i,j}$ es un subconjunto cerrado en X^n.

De esto resulta entonces que A es cerrado puesto que es una unión finita de cerrados [4, 4.2(b), p. 69].

Por último veamos que $\varphi_n|_{X^n-A}$ es abierta y homeomorfismo local para de este modo probar 3. Observemos primero que es abierta.

Sean U un subconjunto abierto en $X^n - A$ y $P \in \varphi_n[U]$. Entonces $|P| = n$, supongamos sin pérdida de generalidad que $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Como $P \in \varphi_n[U]$, entonces existe $\widehat{x} = (x_1, ..., x_n) \in U$ tal que $\varphi_n(\widehat{x}) = P$. Puesto que U es un subconjunto abierto en $X^n - A$, que a su vez sabemos es un subconjunto abierto de X^n, se tiene que existe un subconjunto abierto básico $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ en X^n tal que $x \in U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \subset U$.

Como X es Hausdorff tenemos que existen $W_1, ..., W_n$ abiertos tales que $x_i \in W_i$, $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $W_1 \times ... \times W_n \subset U_1 \times ... \times U_n \subset U$. Ahora bien tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple que $p_i = x_k$ para una única $k \in \{1, ..., n\}$ y, por lo tanto, $p_i \in W_k$. De esto se sigue que $P \in \langle W_1, ..., W_n \rangle$. Por otra parte, como $W_1 \times ... \times W_n \subseteq U_1 \times ... \times U_n$, tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $W_i \subseteq U_i$. Esto implica que $\langle W_1, ..., W_k \rangle \subset \varphi_n[U]$, por lo que $\varphi_n[U]$ es abierto. En consecuencia tenemos que $\varphi_n|_{X^n-A}$ es una función abierta.

Comprobemos ahora que es un homeomorfismo local. Sea $\widehat{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n - A$. Como X es Hausdorff tenemos que existen $W_1, ..., W_n$ subconjuntos abiertos en X tales que $x_i \in W_i$ y $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Notemos que $W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$ es un abierto en $X^n - A$ y $\widehat{x} \in W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$. Veamos que $\varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n] = \langle W_1, W_2, ..., W_n \rangle$.

Veamos primero que $\varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n] \subseteq \langle W_1, W_2, ..., W_n \rangle$. Sea $B \in \varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n]$. Tomemos $\widehat{p} = (p_1, ..., p_n) \in W_1 \times ... \times W_n$ tal que $\varphi_n(\widehat{p}) = B$. Como $B = \{p_1, ..., p_n\}$ tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $B \cap W_i \neq \emptyset$. Además, $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, por lo tanto $B \in \langle W_1, ..., W_n \rangle$. Esto demuestra que $\varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n] \subseteq \langle W_1, W_2, ..., W_n \rangle$.

Ahora veamos que $\langle W_1, W_2, ..., W_n \rangle \subseteq \varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n]$. Sea $B \in \langle W_1, ..., W_n \rangle$. Como $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $B \in F_n(X)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B = \{b_1, ..., b_n\}$ con $b_i \in W_i$ para toda $i \in \{i, ..., n\}$. Entonces, $(b_1, ..., b_n) \in W_1 \times ... \times W_n$ y $\varphi_n(b_1, ..., b_n) = B$. Por lo tanto $B \in \varphi_n[W_1 \times ... \times W_n]$. Esto finaliza la demostración de que $\langle W_1, W_2, ..., W_n \rangle \subseteq \varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n]$.

Concluimos de esta forma que $\varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n] = \langle W_1, W_2, ..., W_n \rangle$ y en consecuencia se tiene que $\varphi_n[W_1 \times W_2 \times ... \times W_n]$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$.

Veamos ahora que $\varphi_n|_{W_1 \times W_2 \times ... \times W_n}$ es un homeomorfismo. Se tiene que es una función continua y suprayectiva puesto que φ_n es continua y suprayectiva (Proposición 2.1.2). Comprobemos que es inyectiva.

Sean $\widehat{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\widehat{z} = (z_1, z_2, ..., z_n) \in W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$ tales que $\varphi_n(y) = \{y_1, y_2, ..., y_n\} = \{z_1, z_2, ..., z_n\} = \varphi_n(z)$. Notemos que, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $x_i = y_i$, puesto que si se tuviera que $y_i \neq z_i$, entonces se tendría que $y_i = z_j$ para alguna $j \in \{1, 2, ..., n\}$ con $i \neq j$, por lo cual tendríamos que $y_i \in W_j$ y $y_i \in W_i$ lo cual es una contradicción pues $W_i \cap W_j = \emptyset$. Esto implica que $\widehat{y} = \widehat{z}$ y por consiguiente $\varphi_n|_{W_1 \times W_2 \times ... \times W_n}$ es inyectiva.

Solamente nos falta comprobar que $\varphi_n^{-1} : \langle W_1, ..., W_n \rangle \longrightarrow W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$ es continua. Sea $B = \{b_1, ..., b_n\} \in \langle W_1, ..., W_n \rangle$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b_i \in W_i$.

Sea V un subconjunto abierto básico de $W_1 \times ... \times W_n$ tal que $\varphi_n^{-1}(B) = (b_1, ..., b_n) \in V$. Tenemos que $V = V_1 \times ... \times V_n$ donde $b_i \in V_i \subseteq W_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Consideremos a $\mathcal{V} = \langle V_1, ..., V_n \rangle$. Veamos que $\varphi_n^{-1}[\mathcal{V}] \subseteq V_1 \times ... \times V_n$. Sea $K \in \langle V_1, ..., V_n \rangle$, como $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$, tenemos que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ si $i \neq j$, entonces, como $K \in F_n(X)$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $K = \{k_1, ..., k_n\}$ con $k_i \in V_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Tenemos que $\varphi_n^{-1}(K) = (k_1, ..., k_n) \in V_1 \times ... \times V_n$, de donde concluimos que $\varphi_n^{-1}[\mathcal{V}] \subseteq V_1 \times ... \times V_n$. Por lo tanto $\varphi_n^{-1} : \langle W_1, ..., W_n \rangle \longrightarrow W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$ es continua.

□

TEOREMA 5.1.15. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un espacio métrico separable. Entonces, $dim(X^n) = dim(F_n(X))$*

Demostración. Primero veamos que $dim(X^n) \leq dim(F_n(X))$. Para ello supongamos que $dim(F_n(X)) < dim(X^n)$. Por la Proposición 5.1.3, tenemos que, para todo $A \in F_n(X)$, se cumple que $dim(\varphi_n^{-1}(A)) = 0$. Por otra parte, por hipótesis tenemos que $dim(X^n) - dim(F_n(X)) = k$ para algún $k > 0$. Por la Proposición 2.1.5 sabemos que $\varphi_n : X^n \longrightarrow F_n(X)$ es una función cerrada, entonces, por el Teorema 5.1.9, se tiene que existe $P \in F_n(X)$ tal que $dim(\varphi_n^{-1}(P)) \geq k$ lo cual es una contradicción al hecho de que $dim(\varphi_n^{-1}(P)) = 0$. Por lo tanto $dim(X^n) \leq dim(F_n(X))$.

Por inducción demostraremos ahora que $dim(F_n(X)) \leq dim(X^n)$. Para $n = 1$, del Teorema 5.1.2 y el hecho de que X es homeomorfo a $F_1(X)$ (Lema 2.2.1) se obtiene que $dim(F_1(X)) = dim(X)$, por lo cual se tiene que $dim(F_n(X)) \leq dim(X^n)$.

Para $n \geq 2$ supongamos que $dim(F_{n-1}(X)) \leq dim(X^{n-1})$. Notemos que esto implica que $dim(F_{n-1}(X)) \leq dim(X^n)$ puesto que $dim(X^{n-1}) \leq dim(X^n)$ (Teorema 5.1.4). Ahora bien, por la Proposición 5.1.14 sabemos que $\varphi_n[X^n - A] = F_n(X) - F_{n-1}$ y que $\varphi_n|_{X^n - A}$ es un homeomorfismo local, entonces, por Teorema 5.1.12, podemos concluir que $\dim(F_n(X) - F_{n-1}(X) = dim(X^n - A) \leq dim(X^n)$ (Teorema 5.1.4).

Por otra parte notemos que $F_n(X) = (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cup F_{n-1}(X)$. Por el Lema 2.2.2, sabemos que $F_{n-1}(X)$ es un subconjunto cerrado en $F_n(X)$, entonces, por el Colorario 5.1.6 del Teorema 5.1.5, tenemos que $dimF_n(X) = max\{dim(F_{n-1}(X)), dim(F_n(X) - F_{n-1}(X))\} \leq dim(X^n)$. Por lo tanto $dim(F_n(X)) \leq dim(X^n)$ y de aquí se concluye que $dim(X^n) = dim(F_n(X))$.

Por el Corolario 5.1.8 del Teorema 5.1.7 sabemos que $dim(X^n) \leq n(dim(X))$, por lo cual hemos probado que $dim(F_n(X)) \leq n(dim(X))$. □

5.2. Contractibilidad

DEFINICIÓN 5.2.1. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es contráctil si existen $a \in X$ y una función $g : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ continua tal que, para toda $x \in X$, se cumple que $g(x, 0) = x$ y $g(x, 1) = a$.

TEOREMA 5.2.2. *Sean X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como X es contráctil, tenemos que existen $a \in X$ y una función $h : X \times [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que, para toda $x \in X$, se cumple que $h(x,0) = x$ y $h(x,1) = a$.

Definimos $g : F_n(X) \times [0,1] \longrightarrow F_n(X)$ de la siguiente forma, dado $Z = \{z_1, ..., z_l\} \in F_n(X)$, $g(Z,t) = \{h(z_1,t), ..., h(z_l,t)\}$.

Notemos que, para toda $Z \in F_n(X)$, se cumple que $g(Z,0) = Z$ y $g(Z,1) = \{a\}$, por lo que sólo falta probar que g es continua.

Sean $A = \{a_1, ..., a_r\} \in F_n(X)$, $t_0 \in [0,1]$, y $\mathcal{M} = \langle M_1, ..., M_m \rangle$ un Vietórico básico en $F_n(X)$ tal que $g(A,t_0) \in \mathcal{M}$. Para probar la continuidad de g, basta ver que existen $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto en $F_n(X)$ y J un subconjunto abierto en $[0,1]$, tales que $(A,t_0) \in \mathcal{U} \times J$ y $g[\mathcal{U} \times J] \subset \mathcal{M}$ [4, 8.3(4), p. 79]

Como $g(A,t_0) = \{h(a_1,t_0), ..., h(a_r,t_0)\} \in \mathcal{M}$, entonces por definición de Vietórico sabemos que, dada $i \in \{1, ..., r\}$, $h(a_i,t_0) \in M_s$ para al menos una $s \in \{1, ..., m\}$. Definimos $L_i = \bigcap\{M_s | h(a_i,t_0) \in M_s\}$. Observemos lo siguiente:

- $L_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$.
- L_i es un conjunto abierto en X, puesto que es una intersección finita de abiertos [4, 1.1(2), p. 62].

Dada $i \in \{1, ..., r\}$, como h es una función continua y L_i es un subconjunto abierto en X, tenemos que existen U_i subconjunto abierto en X y J_i subconjunto abierto en $[0,1]$, tales que $(a_i,t_0) \in U_i \times J_i$ y $h[U_i \times J_i] \subseteq L_i$. Definimos $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, ..., U_r \rangle$ y $J = \bigcap\limits_{j=i}^{r} J_i$.

Observemos que $A \in \mathcal{U}$ puesto que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se cumple que $a_i \in U_i$. Por otra parte, tenemos que $t_0 \in J$ puesto que, para toda $i \in \{1, ..., r\}$, se tiene que $t_0 \in J_i$. Entonces, $(A,t_0) \in \mathcal{U} \times J \subseteq F_n(X) \times [0,1]$.

Veamos que $g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$. Sea $(B,t) \in \mathcal{U} \times J$, con $B = \{b_1, ..., b_l\}$. Probemos primero que $\{h(b_1,t), ..., h(b_l,t)\} = g(B,t) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$. Como $B \in \mathcal{U}$, dada $i \in \{1, ..., l\}$, tenemos que $b_i \in U_j$ para al menos una $j \in \{1, ..., r\}$. Además, como $t \in J$, se tiene que $t \in J_j$. Por lo tanto $(b_i,t) \in U_j \times J_j$, esto implica que $h(b_i,t) \in h[U_j \times J_j] \subseteq L_j$. Como $L_j \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$, tenemos entonces que $h(b_i,t) \in L_j \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$. Con esto concluimos que $g(B,t) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$.

Comprobemos ahora que, para toda $s \in \{1, ..., m\}$, se cumple que $g(B,t) \cap M_s \neq \emptyset$. Sea $s \in \{1, ..., m\}$. Como $g(A,t_0) \in \mathcal{M}$, tenemos que $h(a_k,t_0) \in M_s$ para alguna $k \in \{1, ..., r\}$, lo cual implica que $L_k \subseteq M_s$.

Por otra parte, como $B \in \mathcal{U}$, tenemos que $b_j \in U_k$ para alguna $j \in \{1, ..., l\}$ y, puesto que $t \in J = \bigcap\limits_{j=i}^{n} J_i$, tenemos que $t \in J_k$. De esto se concluye que $(b_j,t) \in U_k \times J_k$ y, en consecuencia,

$h(b_j,t) \in h[U_k \times J_k] \subseteq L_k \subseteq M_s$, por lo que $g(B,t) \cap M_s \neq \emptyset$.

De esta forma se tiene que $g(B,t) \in \mathcal{M}$ y, en consecuencia, tenemos que $g[\mathcal{U} \times J] \subseteq \mathcal{M}$.

Así concluimos que g es una función continua y, con ello, que $F_n(X)$ es un espacio contráctil. $\square$

5.2.1. Contractibilidad local

DEFINICIÓN 5.2.3. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es localmente contráctil si, para toda $a \in X$, y para cada subconjunto abierto U de X tal que $a \in U$, existen V un subconjunto abierto en Xy una función continua $g : V \times [0,1] \longrightarrow U$ tales que $a \in V$, $V \subseteq U$ y, para toda $x \in V$, se cumple que $g(x,0) = x$ y $g(x,1) = a$.

TEOREMA 5.2.4. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Si X es localmente contráctil, entonces $F_n(X)$ es localmente contráctil.*

Demostración. Sean $A \in F_n(X)$, donde $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ y $\mathcal{W}$ un subconjunto abierto en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$. Por el Lema 1.3.3, tenemos que existe $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_r \rangle$ un Vietórico básico en $F_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$,y, para toda $k \in \{1, ..., r\}$, $a_k \in U_k$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Como X es un espacio localmente contráctil, tenemos que, para toda $k \in \{1, ..., k\}$, existen un subconjunto abierto V_k de X y una función continua $h_k : V_k \times [0,1] \longrightarrow U_k$ tales que $a_k \in V_k$, $V_k \subset U_k$ y, para toda $x \in V_k$, se cumple que $h_k(x,0) = x$ y $h_k(x,1) = a_k$.

Definimos $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, ..., V_r \rangle$. Notemos que $A \in \mathcal{V}$ y $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$, puesto que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces, dado $Z = \{z_1, z_2, ..., z_l\} \in \mathcal{V}$ tenemos que $z_i \in V_k$ para un único $k \in \{1, ..., r\}$. Esto implica que existe un único número $k_i(Z)$ tal que $z_i \in V_{k_i(Z)}$. Notemos que $\{1, ..., r\} = \{k_1(Z), ..., k_l(Z)\}$, lo que implica que $\{V_{k_i(Z)} | i \in \{1, ..., l\}\} = \{V_j | j \in \{1, ..., r\}\}$.

Definimos la función $g : \mathcal{V} \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}$, dada por $g(Z,t) = \{h_{k_1(Z)}(z_1,t), h_{k_2(Z)}(z_2,t), ..., h_{k_l(Z)}(z_l,t)\}$. Notemos que $g(Z,0) = Z$ y $g(Z,1) = A$.

Veamos que g es continua. Sea $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\} \in \mathcal{V}$, $t_0 \in [0,1]$ y $\mathcal{M} = \langle M_1, ..., M_m \rangle$ un Vietórico básico tal que y $g(B,t_0) \in \mathcal{M}$.

Queremos ver que existen $\mathcal{N}$ subconjunto abierto en $\mathcal{V}$ y J subconjunto abierto en $[0,1]$ tales que $(B,t_0) \in \mathcal{N} \times J$ y $g[\mathcal{N} \times J] \subseteq \mathcal{M}$.

Ahora bien, como $\{h_{k_1(B)}(b_1,t_0), h_{k_2(B)}(b_2,t_0), ..., h_{k_p(B)}(b_p,t_0)\} = g(B,t_0) \in \mathcal{M}$, tenemos que, para toda $i \in \{1, ..., p\}$, $h_{k_i(B)}(b_i,t_0) \in M_s$ para algún $s \in \{1, ..., m\}$.

Definimos $L_i = \bigcap\{M_s | h_{k_i(B)}(b_i,t_0) \in M_s\}$. Observemos lo siguiente:

- L_i es abierto pues es intersección finita de abiertos [4, 1.1(2), p. 62].
- $L_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} M_k$

Por otra parte, dada $i \in \{1, ...p\}$, tenemos que $h_{k_i(B)}$ es continua. Esto implica, puesto que L_i un subconjunto abierto en X, que existen N_i subconjunto abierto en $V_{k_i(B)}$ y J_i subconjunto abierto en $[0,1]$, tales que $(b_i, t_0) \in N_i \times J_i$, y $h_{k_i(B)}[N_i \times J_i] \subseteq L_i$.

Definimos $\mathcal{N} = \langle N_1, N_2, ..., N_p \rangle$ y $J = \bigcap_{i=1}^{p} J_i$. Notemos lo siguiente:

- $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$.

  Sea $P \in \mathcal{N}$. Entonces $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} N_i$, como $N_i \subseteq V_{k_i(B)}$, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{p} N_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} V_{k_i(B)} = \bigcup_{j=1}^{r} V_j$, por lo cual $P \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} V_j$. Por otra parte, dada $i \in \{1, ..., p\}$, tenemos que $P \cap N_i \neq \emptyset$, lo que implica que $P \cap V_{k_i(B)} \neq \emptyset$. Recordemos que $\{V_{k_i(B)} | i \in \{1, ..., p\}\} = \{V_j | j \in \{1, ..., r\}\}$ de lo cual se observa que $P \cap V_j \neq \emptyset$ para toda $j \in \{1, ..., r\}$.

- $J \subseteq [0,1]$.

- $\mathcal{N}$ es un subconjunto abierto en $F_n(X)$.

- J es un subconjunto abierto en $[0,1]$.

- $(B, t_0) \in \mathcal{N} \times J$.

Veamos que $g[\mathcal{N} \times J] \subseteq \mathcal{M}$. Sean $P = \{p_1, ..., p_q\} \in \mathcal{N}$ y $t \in J$. Queremos probar que $\{h_{k_1(P)}(p_1, t), ..., h_{k_q(P)}(p_q, t)\} = g(P, t) \in \mathcal{M}$.

Dada $i \in \{1, ..., q\}$, $p_i \in N_j$ para alguna $j \in \{1, ..., p\}$, esto implica que $p_i \in V_{k_j(B)}$. Como por definición $p_i \in V_{k_i(P)}$, tenemos que $k_j(B) = k_i(P)$. De esto y el hecho de que $t \in J \subset [0,1]$, se obtiene que $h_{k_j(B)}(p_i, t) = h_{k_i(P)}(p_i, t)$. Por lo que $h_{k_i(P)}(p_i, t) = h_{k_j(B)}(p_i, t) \in h_{k_j(B)}[N_j \times J_j] \subseteq L_j \subseteq \bigcup_{l=1}^{m} M_l$, concluyendo así que $g(P, t) \subseteq \bigcup_{l=1}^{m} M_l$.

Sea $s \in \{1, ..., m\}$. Como $h(B, t_0) \in \mathcal{M}$,tenemos que existe $i \in \{1, ..., m\}$, tal que $h_{k_i(B)}(b_i, t_0) \in M_s$, esto implica que $L_i \subseteq M_s$, por lo cual $N_i \subseteq L_i \subseteq M_s$.

Por otra parte, como $P \in \mathcal{N}$, existe $p_j \in P$, tal que $p_j \in N_i$. Entonces $h_{k_j(P)}(p_j, t) = h_{k_i(B)}(p_j, t) \in h_{k_i(B)}[N_i \times J_i] \subseteq L_i \subseteq M_s$. Por lo que, para toda $s \in \{1, ..., m\}$, tenemos que $g(P, t) \cap M_s \neq \emptyset$, por lo tanto $g[\mathcal{N} \times J] \subseteq M$. Concluyendo así finalmente que g es continua.

□

5.3. Retractos absolutos

En el paper “On symmetric products of topological spaces” [3] Borsuk y Ulam no sólo introducen por primera vez el concepto de producto simétrico, sino también plantearon preguntas con respecto a él. Una de estas preguntas fue: ¿La propiedad de ser un retracto absoluto se preserva bajo productos simétricos?. En esta sección veremos la respuesta dada por Ganea en el paper “Symmetrische Potenzen topologischer Räume” [7].

Recordemos primero las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 5.3.1. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un retracto de X si existe una función continua f tal que $f[X] = A$ y, para toda $x \in A$, $f(x) = x$.

DEFINICIÓN 5.3.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un retracto absoluto (RA) si para cada encaje cerrado de X en un espacio topológico normal Y, la imagen de X es un retracto de Y.

DEFINICIÓN 5.3.3. Sean X un espacio topológico. Decimos que X es un retracto absoluto por vecindades (RAV) si para cada encaje cerrado de X en un espacio topológico normal Y, existe un subconjunto abierto V de Y tal que la imagen de X es un retracto de V.

Observemos que ser un retracto absoluto implica que se es un retracto absoluto por vecindades.

TEOREMA 5.3.4. *Un retracto absoluto por vecindades es un retracto absoluto si y solo si es contráctil. [2, 9.1, p. 96]*

TEOREMA 5.3.5. *Sea X un espacio métrico, compacto y de dimensión finita. Entonces, X es un retracto absoluto por vecindades si y solo si X es localmente contráctil. [2, 10.4, p. 122]*

El teorema dado por Ganea es el siguiente.

TEOREMA 5.3.6. *Sean X un espacio métrico, compacto y de dimensión finita y $n \in \mathbb{N}$. Si X es un retracto absoluto, entonces $F_n(X)$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Tenemos que X es un retracto absoluto, esto implica que es un retracto absoluto por vecindades. Por los Teoremas 5.3.4 y 5.3.5 concluimos que X es contráctil y localmente contráctil. Entonces,por los Teoremas 5.2.2 y 5.2.3, tenemos que $F_n(X)$ es contráctil y localmente contráctil.

Por otra parte, por los Teoremas 2.3.3, 4.2.2 y 5.1.15, tenemos que $F_n(X)$ es métrico, compacto y de dimensión finita. Entonces por el Teorema 5.3.5, se tiene que $F_n(X)$ es un retracto absoluto por vecindades y al aplicar el Teorema 5.3.4 tenemos que $F_n(X)$ es un retracto absoluto.

□

Bibliografía

[1] J. A. Amor Montaño, *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Las prensas de ciencias, 2a Edición, México, 2005.

[2] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne, Tom. 44, 1967.

[3] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37, 1931, 875-882.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Twelfth printing, 1978.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[6] R. Engelking *Theory of Dimensions: Finite and Infinite* Heldermann Verlang, Berlin, 1995.

[7] T. Ganea, *Symmetrische Potenzen topologischer Räume*, Mathematische Nachrichten, Volume 11, Issue 4-5, 1954, 305–316.

[8] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, First Edition, 2001.

[9] F. Hausdorff, *Grundzünge der Mengelehre*, Veit and co., 1914.

[10] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory* Princenton University Press, Ninth Printing, 1974.

[11] A. Illanes Mejía, *Hiperespacios de Continuos*, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1a edición, 2004.

[12] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N.Y., 1966.

[13] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with Exercises* Sociedad Matemática Méxicana, 1a Edición, 2002.

[14] J. E. Rubin, *Set Theory for the mathematician*, Holden-Day, First Edition, 1967.

[15] W. Rudin, *Principios de análisis matemáticos*, Mc Graw Hill, 3a Edición, México, 1980.

[16] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordung*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 32, 1922, 258 - 280.

[17] S. Willard, *General Topology*, Addison- Wesley, First Edition, 1970.