



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Detección de las Ondas de Biot en un Phantom de Hueso
Trabecular

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:

JOSÉ ANGEL NERIA PÉREZ



TUTORA:
DRA. LUCÍA MEDINA GÓMEZ

2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México por brindarme la oportunidad de superarme académicamente.

A mi directora de Tesis, Dra. Lucía Medina Gómez, por la confianza depositada en mi y en este proyecto.

A mis padres y hermanos por guiarme para ser una persona de bien.

A Flor Alejandra Romero Montiel por acompañarme en estos últimos dos años como amiga, confidente y novia.

A los proyectos PAPIIT IT118811 *Diseño de un sistema básico de tomografía ultrasónica en transmisión para materiales altamente heterogéneos*; y SEP-CONACyT 131973 *Análisis de Velocidad de Fase y Atenuación Acústica en Materiales Heterogéneos y Dispersivos*. Por el apoyo económico otorgado.

Resumen

Este trabajo se encuentra dividido en seis capítulos. El capítulo 1 describe el ultrasonido como método de evaluación no destructiva. El capítulo 2 da una descripción del hueso como tejido biológico así como de la osteoporosis y da la motivación para el trabajo realizado en esta tesis. El capítulo 3 presenta la teoría de Biot y las ondas longitudinales predichas por la misma, así como las herramientas matemáticas usadas en la derivación de las propiedades de estas. El capítulo 4 describe la metodología usada en el diseño de los experimentos. El capítulo 5 discute los resultados obtenidos. Finalmente, el capítulo 6 resume las conclusiones principales de ésta tesis y presenta una perspectiva para trabajo futuro.

Índice

1	Nociones Básicas de los Ensayos no Destructivos por Ultrasonido	1
1.1	Principios Físicos	1
1.1.1	Ondas Mecánicas	1
1.1.2	Relación Entre Frecuencia, Frecuencia Angular y Longitud de Onda	3
1.1.3	Velocidades de Fase y de Grupo	3
1.2	Impedancia Acústica	4
1.2.1	Reflexión, Refracción y Dispersión	4
1.2.2	Pérdidas de Energía y Atenuación	5
1.3	Transductores	6
1.3.1	Efecto Piezoeléctrico	6
1.3.2	Características de Transductores Piezoeléctricos	7
1.3.3	Transductor de Cara Plana	7
1.3.4	Transductor Enfocado	8
1.4	Técnicas de Evaluación Ultrasonica	10
2	Descripción General del Hueso	11
2.1	¿Que es el hueso?	11
2.2	Osteoporosis	11
2.3	Métodos de Diagnóstico	12
2.3.1	Absorción Dual de Rayos X (DXA)	12
2.3.2	Tomografía Computarizada por Rayos X (QCT)	13
2.3.3	Ultrasonido Cuantitativo (QUS)	14
3	Propagación Acústica en Medios Porosos	17
3.1	Interacción de la Onda Ultrasonica y el Hueso	17
3.1.1	Teorías de Dispersión	17
3.1.2	Teoría de Biot	18
3.2	Ecuaciones de Movimiento	18
3.2.1	Fluido Ideal y Sólido Elástico	18
3.2.2	Ecuaciones Microscópicas de Biot (Sin Considerar Pérdidas)	21
3.3	Extensiones al Modelo de Biot	27
3.3.1	Técnicas de Separación de las Ondas Rápida y Lenta	29
4	Metodología para la Caracterización de las Ondas de Biot	33
4.1	Introducción	33
4.2	Arreglo Experimental	36
4.2.1	Sistema Ultrasonico	36
4.3	Cálculo de Velocidades y Atenuación	36
4.3.1	Velocidades Efectivas	36
4.3.2	Velocidad de Fase	37

4.3.3	Atenuación	39
4.4	Comportamiento Tiempo-Frecuencia de las Ondas de Biot	40
5	Resultados	41
5.1	Arreglo Experimental: Distancia entre Transductores	41
5.2	Velocidad Efectiva de Propagación	42
5.3	Velocidad de Fase y Atenuación	42
5.3.1	Velocidades de Fase y Efectiva del Hueso Trabecular	47
5.4	Representación Tiempo-Frecuencia de los Pulsos Ultrasónicos	47
6	Conclusiones	51
6.1	Trabajo Futuro	52
A	Determinación Ultrasónica de los Parámetros de Biot	53
A.0.1	Porosidad y Tortuosidad	53
A.0.2	Longitudes Características	56
A.0.3	Módulos de compresibilidad K_b y de corte N	59
B	Transformación Wavelet Continua: Nociones Básicas	61
B.1	Wavelets	61
B.2	Transformación Wavelet Continua	61
B.2.1	Parámetro de Escalado	62
B.2.2	Parámetro de Desplazamiento	62
B.2.3	Principio de Incertidumbre	62
B.2.4	Wavelet Mexican Hat	62
C	Códigos Realizados	65

Índice de figuras

1.1	Diagrama esquemático de la propagación de una onda acústica en un sólido. (a) Onda longitudinal. (b) Onda transversal.	2
1.2	Propagación de una onda de Rayleigh.	2
1.3	Ondas de Lamb. (a) Modo simétrico. (b) Modo antisimétrico.	3
1.4	Onda acústica a incidencia normal.	4
1.5	Onda longitudinal incidiendo oblicuamente a un ángulo A. (a) La interfaz es entre dos fluidos y por tanto sólo se puede transmitir una onda longitudinal. (b) La interfaz es entre un fluido y un sólido; la onda es reflejada y transmitida, además de exhibir un cambio de modo, es decir, se propaga también una onda transversal.	6
1.6	Proceso de polarización de un disco de policristal. La muestra es sumergida en un baño de aceite caliente, posteriormente se aplica un fuerte campo electrostático.	7
1.7	Campo acústico de un transductor (a) de cara plana, (b)enfocado.	8
1.8	Métodos de enfoque de un haz ultrasónico. (a) usando un lente cóncavo. (b) Usando un elemento piezoeléctrico cóncavo.	9
1.9	Disminución en la distancia focal al hacer incidir el haz acústico en el material.	9
1.10	Principio del método pulso-eco. Izquierda: El transductor emite una onda acústica en el material de prueba y hay dos indicadores, uno del pulso inicial y el segundo debido al eco de la superficie opuesta. Derecha: Un defecto crea una tercera señal y a su vez reduce la amplitud de la superficie opuesta. . .	10
1.11	(a) Transmisión: se colocan dos transductores en dos lados del material. (b) Transmisión Transversal: se colocan dos transductores en lados opuestos del material.	10
2.1	Huesos trabeculares desgrasados. (a) Cabeza femoral mostrando la arquitectura macroscópica del hueso, (b) imagen por microscopía electrónica de barrido de hueso trabecular vertebral ilustrando los elementos conectivos de tipo varilla y placa.	12
2.2	Composición del hueso. El hueso trabecular se encuentra envuelto por el hueso cortical.	13
2.3	Imágenes obtenidas por tomografía computarizada de la tibia de una mujer (a) sana premenopáusica y (b) una mujer altamente osteoporótica postmenopáusica. Se aprecia que la osteoporosis induce un aumento en la porosidad y una reducción en el grosor de la capa cortical, así como una interrupción en la red trabecular.	13
2.4	Imágenes por absorciometría dual de rayos X y las áreas de interés para las mediciones de densidad ósea en (a) cadera y (b) espina lumbar.	14
2.5	Equipo típico para realizar QCT [18].	14
2.6	(a)Equipo de medición ultrasónica en el antebrazo LD-100 [19]. (b) Uso del equipo. (c) Equipo de medición ultrasónica en el tobillo [18].	15
2.7	Correlación entre la BMD medida en cadera y QUS en tobillo. Las líneas punteadas delimitan los umbrales de osteoporosis para ambas variables. Sólo en el rectángulo izquierdo inferior los mismos pacientes son clasificados como osteoporóticos por ambos métodos. En los cuadros derecho inferior e izquierdo superior se observa un número considerable de pacientes que no pueden ser clasificados. . .	15

3.1	Volumen microscópico representativo de el medio poroso. El campo de velocidades del fluido \bar{v}^f (flechas punteadas) depende de la posición y el tiempo, mientras que el campo de velocidades del sólido \bar{v}^s (flechas continuas) se distribuye uniformemente en el espacio.	19
3.2	Primer experimento pensado de Biot-Willis: el volumen representativo se encuentra 'abrigado' por una membrana flexible y se aplica una presión de la forma $p_0 + p_1 \exp(-i\omega t)$	24
3.3	Segundo experimento pensado de Biot-Willis: el volumen representativo se encuentra 'desabrigado' y se aplica una presión de la forma $p_0 + p_1 \exp(-i\omega t)$	25
3.4	Comparación entre los resultados teóricos usando la teoría de Biot y los resultados experimentales para las velocidades de propagación de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bovino y humano [10,30].	28
3.5	Comparación entre los resultados teóricos usando el modelo de Biot y los resultados experimentales (puntos) para los coeficientes de atenuación de las ondas (a) rápida y (b) lenta en hueso trabecular bovino. V_f representa la porosidad [10,29].	29
3.6	Comparación entre los resultados teóricos usando el modelo MBA y los resultados experimentales para (a) velocidades de propagación y (b) coeficientes de atenuación de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bovino. "Traslape" representa a la ondas rápida y lenta completamente superpuestas.	29
3.7	Comparación entre el resultado teórico (línea punteada) usando el modelo MBJ y el resultado experimental (línea continua) para las ondas propagadas en hueso trabecular humano [8].	30
3.8	Modelo estratificado. Se asume que el hueso trabecular es un arreglo periódico de hueso compacto y médula [34].	30
3.9	Comparación entre los resultados teóricos calculados usando los modelos estratificados de Biot y los resultados experimentales para las velocidades de propagación de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bovino. En el eje horizontal los valores de 0 y 90 corresponden a las orientaciones paralela y perpendicular, respectivamente [34].	31
3.10	(a) Señal transmitida en la cabeza femoral humana. Se pueden apreciar dos ondas. (b) Espectrograma de la señal mostrando diferentes contenidos frecuenciales a determinados tiempos [21].	31
3.11	Espectro de poder de la señal 3.10(a) y las FDUAs respectivas para la onda rápida (pendiente de la parte de frecuencia baja de la señal) y la onda lenta (pendiente de la parte de alta frecuencia) [21].	32
3.12	(a) Formas de onda experimentalmente observadas. (b) Escalograma de la señal mostrada en (a).	32
4.1	Primeras ondas rápida y lenta observadas experimentalmente al propagarse en hueso trabecular bovino con porosidades de (a) 17% y (b) 25% en la dirección longitudinal [29].	33
4.2	Formas típicas de onda ultrasónicas que se propagan en hueso trabecular de la vértebra humana en tres direcciones ortogonales [35].	34
4.3	Equipo ultrasónico usado. (a) Generador de pulso. (b) Transductores y su arreglo en forma de transmisión transversal. (c) Osciloscopio.	36
4.4	Espécimen analizado. La denominación de las direcciones de evaluación es: $X = 4.92\text{cm}$, $Y = 2.98\text{cm}$, $Z = 1.92\text{cm}$	37
4.5	Cálculo de la velocidad del sonido en agua y velocidad efectiva de propagación en hueso. t_0 es el final del pulso excitador, t_1 es el tiempo de llegada del pulso propagado en hueso, t_2 es el tiempo de llegada del pulso propagado en agua.	38
4.6	(a) principio de substitución, (b) ejemplo de las formas de onda obtenidas en el agua (línea sólida) y através del material (línea discontinua) [44].	38
4.7	Corrección de la fase mostrada en la figura (b): (c)-(e) se suma (resta) un múltiplo entero de 2π cuando la distancia entre dos puntos consecutivos de la señal es menor (mayor) que $-\pi$ (π).	39
5.1	Señales obtenidas al variar la distancia entre el transductor receptor y la muestra en la dirección X. Se aprecia como a una distancia de 0 cm las ondas de Biot se encuentran traslapadas, mientras que al alejar al transductor receptor (2 cm), estas comienzan a separarse hasta poder diferenciarse (4 cm).	42
5.2	Señales obtenidas al variar la distancia entre el transductor receptor y la muestra en la dirección Y. Al variar la distancia entre la muestra y el transductor receptor sólo se aprecia un cambio en el tiempo de llegada del pulso y la amplitud de este. La forma de onda es preservada.	43

5.3	Señales obtenidas al variar la distancia entre el transductor receptor y la muestra en dirección Z . Al variar la distancia entre la muestra y el transductor receptor sólo se aprecia un cambio en el tiempo de llegada del pulso y la amplitud de este. La forma de onda es preservada.	44
5.4	Pulsos propagándose por la muestra en las direcciones X, Y, Z	44
5.5	Atenuación de un pulso ultrasónico al pasar por la muestra. (a) Propagación en dirección X . (b) Propagación en direcciones Y, Z	45
5.6	Velocidad de Fase del pulso al propagarse en las tres direcciones de la muestra.	46
5.7	Ejemplo de la obtención del ajuste lineal de la velocidad de fase en dirección X para frecuencias menores que $1MHz$	46
5.8	Escalogramas de la transformada wavelet aplicada a las señales obtenidas en la dirección X	48
5.9	Escalogramas de la transformada wavelet aplicada a las señales obtenidas en la dirección Y	49
5.10	Escalogramas de la transformada wavelet aplicada a las señales obtenidas en la dirección Z	50
A.1	(a) propagación acústica en agua y (b) en el material poroso saturado con agua. La tortuosidad se relaciona con la componente transmitida en agua.	54
A.2	Gometría del problema.	55
A.3	Espectro de la señal incidente (línea sólida) y espectro de la señal reflejada (línea discontinua) para un ángulo de incidencia (a) 0° y (b) 53° [3].	56
A.4	Comparación entre la curva teórica de ángulo vs. coeficiente de reflexión para $\alpha_\infty = 1.07$ y $\phi = 97\%$ y los datos experimentales para la espuma plástica [3].	56
A.5	Comparación entre las señales reflejadas de manera experimental (línea continua) y simulada (línea discontinua) para un ángulo de incidencia de 17° [3].	57
A.6	Pérdida de energía dentro del material poroso. La pérdida por calor ocurre en la parte donde la célula es estirada. La pérdida por viscosidad ocurre en la parte estrecha y ellas están relacionadas con Λ	57
A.7	Producto δQ como función de la frecuencia.	59
B.1	Representación en unidades arbitrarias de la wavelet 'Mexican hat'.	63

Índice de tablas

4.1	Condiciones experimentales donde se logra la separación de las ondas rápida y lenta. BF: fémur bovino, BT: tibia bovina, BV: vertebra bovina, HF: femur humano, HT: tibia humana [44]	35
5.1	Caracterización temporal de los pulsos recibidos	42
5.2	Velocidad de fase y atenuación de la muestra en las tres direcciones. Los intervalos de bajas y altas frecuencias corresponden a $f < 1MHz$ y $1MHz \leq f < 2MHz$, respectivamente. *La pendiente del ajuste lineal tiene unidades $\left[\frac{m}{s MHz}\right]$.**La pendiente del ajuste lineal tiene unidades $\left[\frac{dB}{m MHz}\right]$	43
5.3	Comparación entre la ordenada al origen del ajuste lineal de la velocidad de fase (V_φ) y la velocidad de propagación (V_p) de los pulsos propagados en las tres direcciones.	47
A.1	Propiedades de las muestras w1 y w2 usadas en el trabajo de Leclair et al. [6].	58
A.2	Parámetros obtenidos de las muestras w1 y w2 [6].	58

Capítulo 1

Nociones Básicas de los Ensayos no Destructivos por Ultrasonido

1.1 Principios Físicos

Los términos sonido y ultrasonido son usados en analogía con luz visible y luz ultravioleta para describir la propagación de una perturbación mecánica en diferentes rangos de frecuencia. El ultrasonido corresponde a una onda mecánica propagándose a frecuencias al intervalo audible humano (usualmente 20 kHz). La perturbación mecánica provoca pequeñas oscilaciones de las partículas del medio alrededor de su posición de equilibrio induciendo un desplazamiento de las partículas y son transmitidas paso a paso al resto del medio. En particular la propagación acústica depende de las propiedades elásticas intrínsecas del medio así como de su densidad.

1.1.1 Ondas Mecánicas

Las ondas ultrasónicas son ondas mecánicas y por tanto necesitan un medio para poder propagarse. En su propagación, las partículas del medio vibran paralela o perpendicularmente a la dirección del movimiento. Las ondas ultrasónicas pueden propagarse en una variedad de formas en el medio y éstas pueden ser clasificados como:

- (a) Ondas longitudinales o compresionales.
Estas ondas viajan a través del medio como una serie de compresiones y rarefacciones en las cuales las partículas que transmiten la onda vibran de hacia adelante y atrás en la dirección de propagación de la onda. En la figura 1.1 (a) se esquematiza la oscilación de las partículas debido al paso de una onda compresional, así como la rarefacción y compresión resultantes.
- (b) Ondas transversales o de corte.
Para comprender este tipo de onda basta con pensar en la vibración de una cuerda que es agitada rítmicamente, en la cual cada partícula, en lugar de vibrar paralelamente a la dirección de la propagación de la onda perpendicular a la dirección de propagación. En la figura 1.1(b) se representa esquemáticamente el paso de una onda transversal por un medio sólido.
Para que una onda transversal se pueda propagar es necesario que cada partícula exhiba una fuerte atracción entre sus vecinos de tal forma que mientras la partícula se mueve hacia atrás o adelante, "jale" a su vecino con ella. Es por esto que los fluidos no puedan propagar este tipo de ondas, a menos que su viscosidad sea alta. La velocidad de las ondas transversales es aproximadamente 50% la del onda longitudinal para el mismo material.
- (c) Ondas Superficiales o de Rayleigh.
Son un tipo de onda que viaja cerca de la frontera de un sólido o un fluido mediante el acoplamiento de ondas longitudinales y transversales en la interfaz. Como se muestra en la figura 1.2, la amplitud del desplazamiento de las partículas de estas ondas decae rápidamente con la distancia desde la interfaz y, a una profundidad

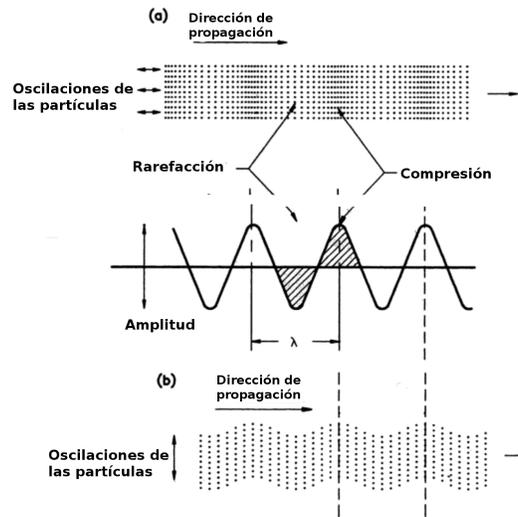


Figura 1.1: Diagrama esquemático de la propagación de una onda acústica en un sólido. (a) Onda longitudinal. (b) Onda transversal.

de dos longitudes de onda Rayleigh (λ_R) la amplitud es prácticamente cero. Cada partícula se mueve en una órbita elíptica cuya dirección de polarización cambia a una profundidad $0.2\lambda_R$ con respecto a la interfaz.

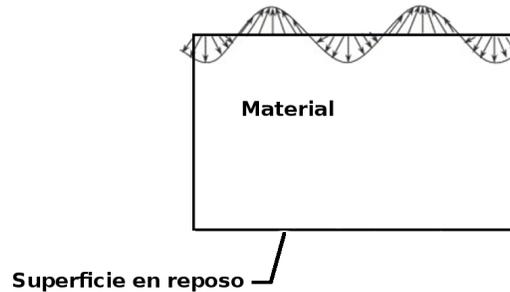


Figura 1.2: Propagación de una onda de Rayleigh.

- (d) Ondas de Lamb o de placa. Este tipo de onda se propaga en medios que cuyo grosor es apenas de unas pocas longitudes de onda. Existen dos tipos básicos de ondas de Lamb:
- Simétricas o dilatacionales.
En este tipo de onda hay un desplazamiento longitudinal de las partículas a lo largo del eje de simetría de la placa y un desplazamiento elíptico en las superficies de la placa.
 - Antisimétricas o de flexión .
Al contrario que las simétricas, hay un desplazamiento transversal de las partículas a lo largo del eje neutral de la placa y además un desplazamiento de partículas elíptico en cada superficie de la placa.

Las ondas simétrica y antisimétrica se muestran esquemáticamente en la figura 1.3(a) y 1.3(b), respectivamente.

- (e) Ondas de arrastre o de encabezamiento.
El comportamiento es similar al de las ondas longitudinales y de hecho viajan con la misma velocidad. La

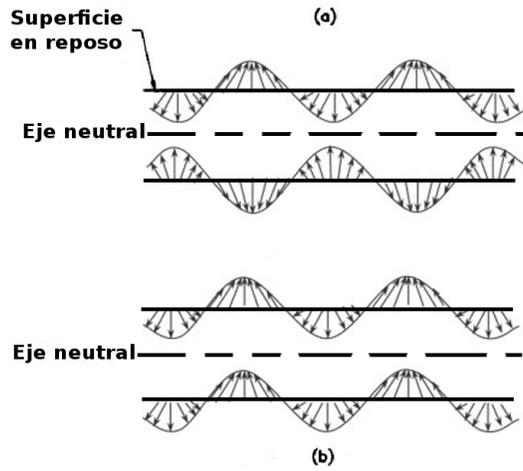


Figura 1.3: Ondas de Lamb. (a) Modo simétrico. (b) Modo antisimétrico.

diferencia radica en que son generadas de forma paralela a la superficie estudiada, lo cual permite la detección de defectos superficiales. Sin embargo no son influenciadas por las irregularidades como si ocurre en las ondas de Rayleigh.

1.1.2 Relación Entre Frecuencia, Frecuencia Angular y Longitud de Onda

Las variables características que describen la propagación de una onda monocromática en el tiempo y espacio son la frecuencia f o frecuencia angular ω y la longitud de onda λ dados por:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega},$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda (también denominada velocidad del sonido).

1.1.3 Velocidades de Fase y de Grupo

Se pueden distinguir dos velocidades del sonido fundamentalmente diferentes.

- Velocidad de Fase

La velocidad de fase es la tasa de cambio con la que la fase de la onda se propaga dada una componente frecuencial, definida por [22]

$$c_p(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (1.1)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$.

- Velocidad de Grupo

La velocidad de grupo corresponde a la velocidad a la cual la energía es transportada a lo largo de la dirección de propagación. La expresión de esta velocidad es [22]

$$c_g = \frac{c_{pc}}{1 - \frac{\omega_c}{c_{pc}} \left(\frac{\partial c_p}{\partial \omega} \right)}, \quad (1.2)$$

donde c_{pc} es la velocidad de fase a la frecuencia central del pulso (ω_c).

Dispersión y Medio Dispersivo

- **Dispersión**
El término se refiere a la variación de la velocidad de fase con la frecuencia [49].
- **Medio Dispersivo**
Se denomina así a un medio en que la velocidad de propagación depende de la frecuencia de la onda.

En el caso de un medio no dispersor, la velocidad de fase coincide con la de grupo, mientras que en un medio dispersivo ambas difieren.

1.2 Impedancia Acústica

Es una propiedad de estado intensiva definida por la resistencia que opone un medio a las ondas que se propagan sobre éste, se define como el producto de la densidad (ρ) y la velocidad del sonido en ese medio (c), es decir

$$Z = \rho c$$

Siendo el Rayleigh (rayl) su unidad.

1.2.1 Reflexión, Refracción y Dispersión

Los fenómenos de reflexión y refracción ocurren en la interfaz entre dos medios con distintas propiedades elásticas como impedancia acústica o velocidad de propagación.

Cuando una onda acústica incide normalmente en la interfaz de dos medios se genera una onda reflejada y otra transmitida (ver figura 1.4) A la razón entre la presión acústica (P_r) de la onda reflejada y la presión (P_i) de la onda incidente se le denomina coeficiente de reflexión (R), mientras que al ratio entre presión transmitida (P_t) y la incidente se le denomina coeficiente de transmisión (T). Las expresiones para R y T son

$$R = \frac{P_r}{P_i}, \quad T = \frac{P_t}{P_i}. \quad (1.3)$$

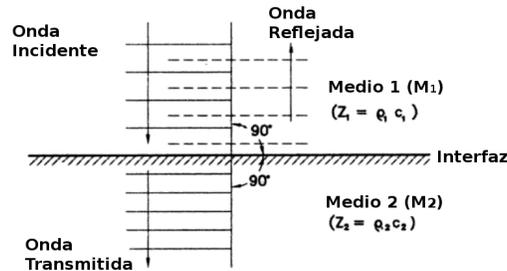


Figura 1.4: Onda acústica a incidencia normal.

En términos de las impedancias acústicas de los medios M_1 y M_2 , encontrándose [2]

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (1.4a)$$

$$T = \frac{2Z_2Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (1.4b)$$

De las ecuaciones (1.4a) y (1.4b) se puede observar que si ambos medios tienen la misma impedancia acústica no existirá onda reflejada y toda la energía será transferida al segundo medio. También es posible verificar la conservación de la energía al notar que $R^2 + T^2 = 1$. Si el camino de la onda es invertido, lo cual ocurre en los métodos pulso-eco¹, las expresiones para R' y T' serán

$$R' = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -R, \quad (1.5a)$$

$$T' = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \right) = \frac{Z_1}{Z_2} T. \quad (1.5b)$$

En el caso de una onda acústica que incide a un ángulo A en la interfaz de dos materiales que presentan diferentes impedancias acústicas, la onda será reflejada y refractada y además existirá un cambio de modo de vibración [2]. El haz ultrasónico que atraviesa la interfaz a incidencia oblicua cambiará su dirección de propagación de acuerdo a la ley de Snell [51]:

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{c_1}{c_2},$$

donde B es el ángulo de refracción y c_1 , c_2 son las velocidades de propagación en el primer y segundo medio, respectivamente (véase la figura 1.5a).

Si el segundo medio es un sólido, además de la refracción, existirá un cambio de modo ya que si incide una onda longitudinal, entonces ésta genera ondas longitudinales y transversales (véase la figura 1.5b). Cuando una onda es refractada a un ángulo B y la onda transversal fue generada a un ángulo D , al aplicar un análogo de la ley de Snell se obtiene [2]

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } D} = \frac{c_1 \text{ (longitudinal)}}{c_2 \text{ (transversal)}}.$$

1.2.2 Pérdidas de Energía y Atenuación

Un haz ultrasónico que viaja por un medio es atenuado al moverse hacia adelante. La pérdida de la energía ultrasónica propagada se debe principalmente a las características del material bajo inspección. De éstas pérdidas, las debidas a dispersión y atenuación son las dos principales.

Atenuación

La atenuación es la pérdida de energía de la señal y se define en escala logarítmica como

$$\hat{\alpha}(f) = \frac{1}{l} \log_{10} \frac{|A^{ref}(f)|}{|A(f)|}, \quad (1.6)$$

donde l es la longitud del material, $|A^{ref}(f)|$ y $|A(f)|$ son los espectros de amplitudes de la señal de referencia y el pulso propagado por el material, respectivamente

El fenómeno de dispersión resulta de la interacción entre la onda ultrasónica y las fronteras entre las partículas (inhomogeneidades) si sus propiedades físicas tales como la densidad o elasticidad son diferentes del medio que les rodea. En este caso, el movimiento oscilatorio de los dispersores es diferente, lo que da lugar a la emisión de una onda secundaria denominada onda dispersada.

El régimen de dispersión de una partícula depende del radio entre su dimensión y λ . Si λ es mucho más pequeña que

¹Véase la sección 1.4

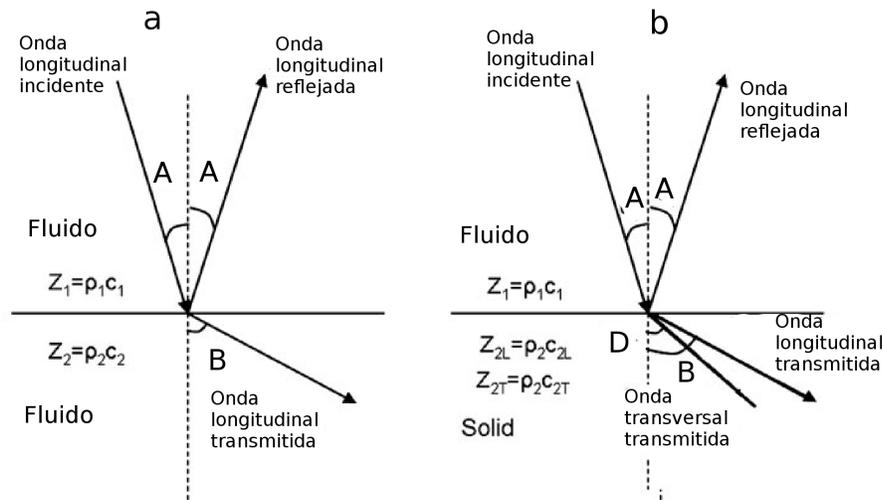


Figura 1.5: Onda longitudinal incidiendo oblicuamente a un ángulo A . (a) La interfaz es entre dos fluidos y por tanto sólo se puede transmitir una onda longitudinal. (b) La interfaz es entre un fluido y un sólido; la onda es reflejada y transmitida, además de exhibir un cambio de modo, es decir, se propaga también una onda transversal.

el tamaño de la heterogeneidad, entonces habrá reflexión especular, que obedece las leyes usuales de la reflexión. En contraste, una onda dispersada se crea si las dimensiones de las heterogeneidades son comparables o menores que la longitud de onda.

Para dispersores mucho menores que la longitud de onda, la intensidad de las ondas dispersadas es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia de la onda incidente.

1.3 Transductores

Un transductor es un dispositivo que cambia una forma de energía en otra. Los transductores ultrasónicos convierten energía eléctrica en energía mecánica (ondas acústicas) y viceversa. Existen varios métodos usados para generar y detectar pulsos ultrasónicos y los más comunes hacen uso del efecto piezoeléctrico hallado en ciertos materiales.

1.3.1 Efecto Piezoeléctrico

En 1880 los hermanos Curie descubrieron que al cortar rebanadas de ciertos cristales en una forma particular, éstas generaban un potencial eléctrico a través de las caras de la rebanada cuando era distorsionada por una fuerza mecánica. Ellos nombraron a este fenómeno *piezoeléctricidad*. Alrededor de un año después Lippman reportó que al aplicar un voltaje a través de la rebanada se producirá una distorsión mecánica.

Durante los primeros treinta años de uso de las técnicas ultrasónicas, desde Sokolov en 1929 hasta finales de los años 50, el cuarzo fue el material más comúnmente usado para fabricar transductores. Posteriormente nuevos materiales policristalinos fueron desarrollados, los cuales presentaban menor impedancia eléctrica (resistencia en altas frecuencias) y que además eran entre 60% y 70% más eficientes que el cuarzo. Ello se debía a que estaban polarizados, al ser polarizados los cristales individuales se alinean en la misma dirección de tal forma que su efecto combinado es coherente. La polarización se logra al colocar el disco policristalino en un baño térmico hasta una temperatura crítica llamada la temperatura de Curie, luego se aplica un campo electrostático intenso a través del disco y finalmente se disminuye la temperatura lentamente, este proceso es ilustrado en la figura 1.6. La temperatura de Curie difiere para cada material, consecuentemente sí el material es calentado cerca de la temperatura de Curie, se 'despolarizará' y perderá sus propiedades piezoeléctricas. Por lo que es de suma importancia la elección del material transductor [53].

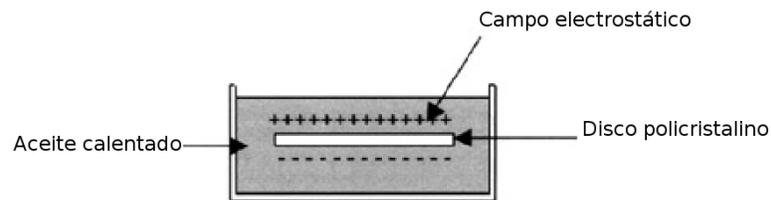


Figura 1.6: Proceso de polarización de un disco de policristal. La muestra es sumergida en un baño de aceite caliente, posteriormente se aplica un fuerte campo electrostático.

1.3.2 Características de Transductores Piezoeléctricos

1.3.3 Transductor de Cara Plana

En este tipo de transductores la energía está confinada principalmente en el campo cercano en un espacio cilíndrico del tamaño de la cara del transductor y se propaga en una forma esférica en el campo lejano [52]. La resolución lateral del transductor es mejor mientras más pequeño es el ancho del mismo, lo que se logra al reducir el diámetro del elemento piezoeléctrico, pero en la práctica presenta los problemas de poca resolución del campo lejano, alta atenuación en altas frecuencias, etc. [52]. Las zonas de Fresnel y de Fraunhofer para transductores de cara plana se muestran en la figura 1.7(a).

Divergencia del Haz

Para un transductor de cara plana, en el campo lejano el haz se difunde y parece provenir del centro de la cara del mismo. El grado de difusión del haz se obtiene por medio de la ecuación

$$\text{sen } A = 1.22 \frac{c}{fD},$$

donde A es el semiángulo de apertura mostrado en la figura 1.7(a).

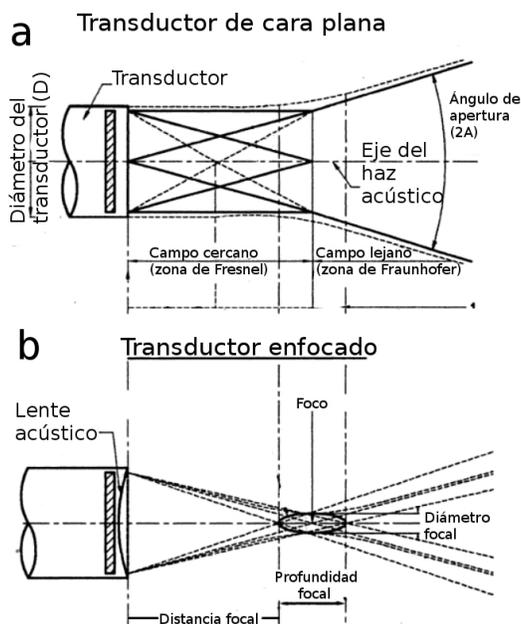


Figura 1.7: Campo acústico de un transductor (a) de cara plana, (b)enfocado.

1.3.4 Transductor Enfocado

En este tipo de transductor se superan los problemas mencionados que se presentan en los transductores de cara plana con la alta resolución obtenida del enfoque del haz ultrasónico. El enfoque concentra la energía total que se emite de un área relativamente grande, a una zona de enfoque relativamente pequeña. Existen diversos métodos para enfocar el haz ultrasónico pero los más usados se refieren a usar una lente plástica plano-convexa (figura 1.8(a)) o usando un elemento piezoeléctrico cóncavo (figura 1.8b).

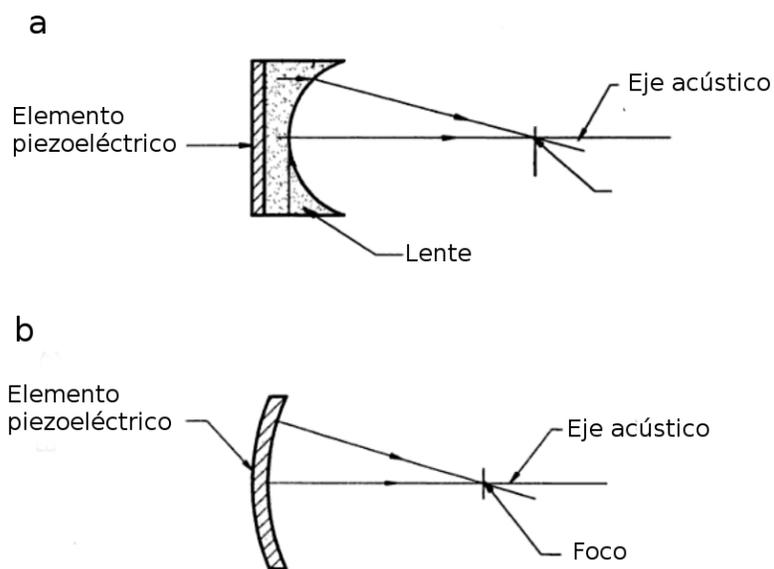


Figura 1.8: Métodos de enfoque de un haz ultrasónico. (a) usando un lente cóncavo. (b) Usando un elemento piezoeléctrico cóncavo.

Las lentes acústicas generalmente están hechas de materiales plásticos o metales. Para un estudio más profundo de los materiales y formas de enfocar el haz se puede consultar la referencia [52].

Es importante mencionar que si el haz enfocado entra en el material evaluado, el haz convergerá más rápido que si no estuviera dicho material. Lo anterior se debe a que la velocidad de propagación del sonido en los materiales evaluados es en general más alta que la del sonido en el medio de referencia (agua, aire), este hecho se ilustra en la figura 1.9 donde el material se encuentra sumergido en agua.

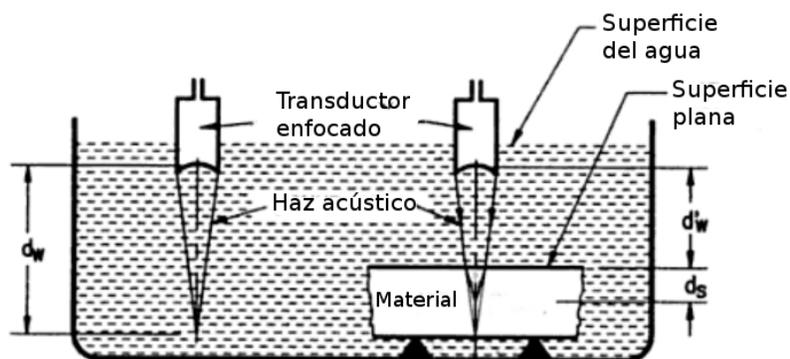


Figura 1.9: Disminución en la distancia focal al hacer incidir el haz acústico en el material.

1.4 Técnicas de Evaluación Ultrasónica

Ya se mostró como la energía ultrasónica que incide a una interfaz entre dos materiales diferentes ya sea normal u oblicuamente, será parcialmente reflejada y transmitida al otro medio. Es la parte transmitida de la energía la que se usa en los trabajos de inspección.

De los diversos métodos de evaluación ultrasónica los más usados son el pulso-eco y la transmisión transversal. El primero corresponde al uso de un sólo transductor para la emisión y recepción de la energía ultrasónica, como se ilustra en la figura 1.10. En el segundo se usa un emisor separado del receptor como se muestra en la figura 1.11.

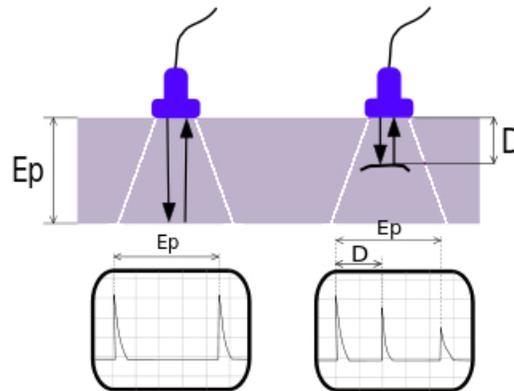


Figura 1.10: Principio del método pulso-eco. Izquierda: El transductor emite una onda acústica en el material de prueba y hay dos indicadores, uno del pulso inicial y el segundo debido al eco de la superficie opuesta. Derecha: Un defecto crea una tercera señal y a su vez reduce la amplitud de la superficie opuesta.

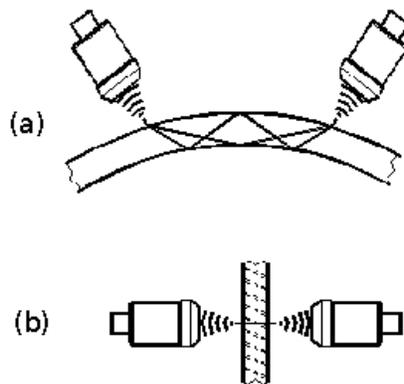


Figura 1.11: (a) Transmisión: se colocan dos transductores en dos lados del material. (b) Transmisión Transversal: se colocan dos transductores en lados opuestos del material.

Capítulo 2

Descripción General del Hueso

2.1 ¿Que es el hueso?

El hueso tiene tres funciones principales: (1) sostener cargas provenientes de acciones externas (tal como la gravedad) o de inserción muscular (movimiento), (2) una actividad metabólica y (3) como protección de órganos vitales (por ejemplo el tórax y el cráneo).

El hueso es un tejido biológico y como tal evoluciona a lo largo de su vida de acuerdo a los diferentes factores que tienen efectos en la fisiología o biología ósea (actividad física, nutrición, hormonas y medicamentos). El hueso adapta su forma y estructura a su ambiente y especialmente a su ambiente mecánico. Ejemplos de lo anterior son la exposición del hueso a microgravedad, efecto que ha sido observado en los astronautas en vuelos espaciales donde los puntos de medición del soporte de carga del esqueleto menor mostraron mayores pérdidas que la columna vertebral y los brazos [14]. Mientras que la actividad física intensa causa efectos opuestos [15]. Estos ejemplos ilustran la adaptación del hueso a las cargas mecánicas lo que está conceptualizado en la ley de Wolff, que establece que los esfuerzos mecánicos son responsables de la determinación de la arquitectura ósea. Este tipo de adaptaciones al ambiente mecánico se puede observar más fácilmente en otros tejidos biológicos, por ejemplo el efecto de la actividad física es más rápido y visible en el tejido muscular [44].

El hueso se clasifica en dos tipos:

- Hueso cortical (o compacto) que compone la envoltura externa de todos los huesos. El hueso cortical representa una estructura densa de baja porosidad que parece compacta al nivel macroscópico. Los valores típicos de porosidad que alcanza varían de 0 a 15%.
- Hueso trabecular (o esponjoso). Este tipo de hueso se encuentra cubierta por el hueso cortical y se ve como una esponja muy porosa con una estructura de tres dimensiones hecha de placas y/o varillas interconectadas, llamadas trabecula. *In vivo*, las cavidades formadas por la red trabecular son ocupadas por médula ósea. En la figura 2.1 (a) se muestra un hueso trabecular sin médula, mientras que en la figura 2.1 (b) se muestra como la red trabecular presenta elementos similares a varillas y placa.

Los huesos trabecular y compacto se muestran esquemáticamente en la figura 2.2.

2.2 Osteoporosis

Es una enfermedad esquelética en la que la densidad y propiedades mecánicas se ven reducidas provocando debilidad del esqueleto e incremento en el riesgo de fractura, particularmente en la columna, muñeca, cadera, pelvis y brazo [16]. La calidad del hueso abarca una serie de propiedades de los tejidos óseos, más allá de la densidad y que gobiernan la resistencia mecánica tales como la geometría del hueso, las propiedades corticales y trabeculares, la micro-arquitectura, la mineralización del tejido óseo, calidad del colágeno y de los cristales de hidroxialapatita, así

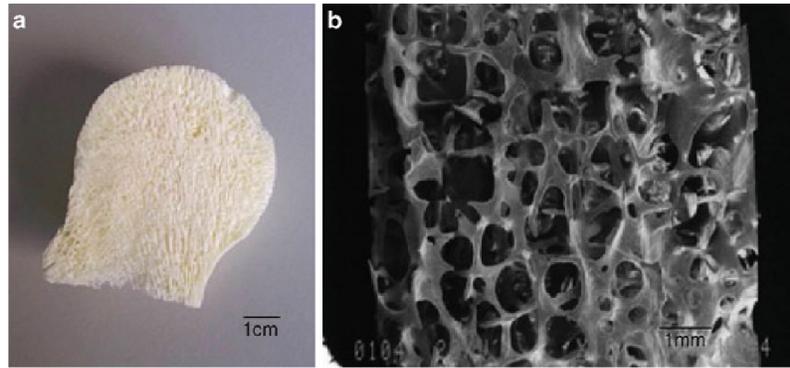


Figura 2.1: Huesos trabeculares desgrasados. (a) Cabeza femoral mostrando la arquitectura macroscópica del hueso, (b) imagen por microscopía electrónica de barrido de hueso trabecular vertebral ilustrando los elementos conectivos de tipo varilla y placa.

como la presencia de microfracturas [17]. La causa principal de la osteoporosis se debe a deficiencias hormonales, por lo que la gran parte de los casos se presentan en mujeres post menopáusicas. La figura 2.3 ilustra el deterioro de la microestructura del hueso trabecular debido a estas deficiencias.

Actualmente se considera a la osteoporosis como un problema de salud pública debido al gran número y consecuencias de fracturas. Al menos el 40% de las mujeres post menopáusicas y entre el 15-30% de los hombres con edad de aproximadamente 50 años sufrirán una o más fracturas por fragilidad en su tiempo de vida restante. Debido al aumento en el número de pacientes ancianos frágiles se pronostica que la cifra de fracturas de cadera en todo el mundo aumente dramáticamente en las próximas décadas.

Con el fin de introducir una medida cuantitativa de la osteoporosis la Organización Mundial de la Salud (OMS) propuso que las mediciones de densidad mineral ósea areal (BMD_a) como una referencia para determinar el grado de la osteoporosis. El valor de la BMD_a de un paciente se expresa en términos de la desviación estandar de la media de BMD_a de un adulto joven saludable, comúnmente referido como la puntuación T. De acuerdo a los estandares de la OMS, un paciente que presente osteoporosis tendrá una puntuación T de -2.5 o menor.

Sin embargo existe un importante traslape entre los valores de BMD para pacientes con y sin fractura, confirmando que los factores óseos más allá de la BMD deben ser considerados para evaluar el riesgo de fractura. Lo anterior sugiere la necesidad de métodos complementarios para evaluar el riesgo de fractura in vivo.

2.3 Métodos de Diagnóstico

Las principales técnicas para diagnosticar a la osteoporosis son: Absorción Dual de Rayos X, Tomografía Computarizada por Rayos X, y Ultrasonido Cuantitativo.

2.3.1 Absorción Dual de Rayos X (DXA)

DXA¹ es el método estándar para mediciones densitométricas. Una imagen DXA es una proyección 2D de el segmento de interés (figura 2.4) donde debido a la proyección de la imagen se superponen el hueso trabecular y cortical. La densidad se obtiene en g/cm^2 y se denomina densidad mineral ósea areal (BMD_a).

¹Usualmente denotada como densitometría ósea.

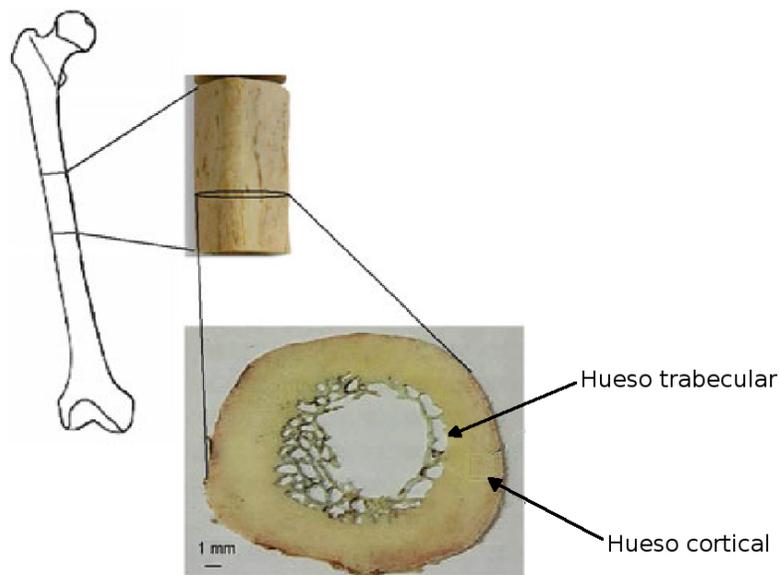


Figura 2.2: Composición del hueso. El hueso trabecular se encuentra envuelto por el hueso cortical.

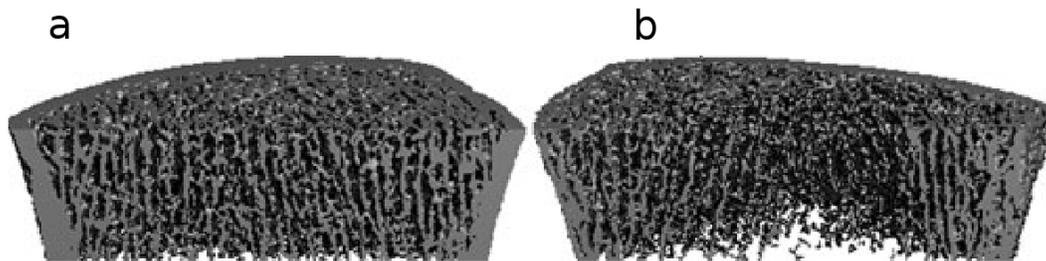


Figura 2.3: imágenes obtenidas por tomografía computarizada de la tibia de una mujer (a) sana premenopáusica y (b) una mujer altamente osteoporótica postmenopáusica. Se aprecia que la osteoporosis induce un aumento en la porosidad y una reducción en el grosor de la capa cortical, así como una interrupción en la red trabecular.

2.3.2 Tomografía Computarizada por Rayos X (QCT)

En esta técnica se reconstruye al hueso a través de un cierto número de secciones transversales adquiridas por QCT. La BMD se obtiene en g/cm^3 y en este caso la imagen obtenida permite diferenciar entre hueso trabecular y cortical.

La desventaja de este tipo de estudios es que sólo se obtiene información acerca de la densidad del hueso pero no las propiedades mecánicas del mismo, estas últimas tienen la misma importancia para el correcto diagnóstico de la osteoporosis; y también se basan en el uso de radiación ionizante, el equipo usado es voluminoso (figura 2.5) y el costo es relativamente alto [13].

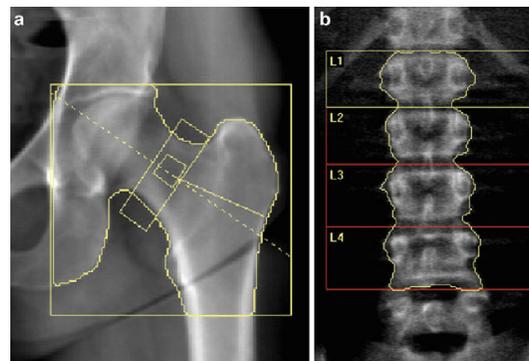


Figura 2.4: Imágenes por absorciometría dual de rayos X y las áreas de interés para las mediciones de densidad ósea en (a) cadera y (b) espina lumbar.



Figura 2.5: Equipo típico para realizar QCT [18].

2.3.3 Ultrasonido Cuantitativo (QUS)

La introducción de QUS en el diagnóstico de la osteoporosis fue en 1984 por Langton et al. [13], donde demostraron que la pendiente de la atenuación en el hueso podría permitir la discriminación entre pacientes con osteoporosis. A partir de estos estudios se han logrado avances importantes para el uso del ultrasonido, especialmente en las falanges, radio, tibia y fémur próximo, como un método alternativo (ver figura 2.6). Sin embargo, no existe aún consenso de los criterios de diagnóstico fiable. En la figura 2.7 se muestra la correlación de QUS con DXA para el diagnóstico de la osteoporosis, revelando que son pocas las coincidencias.

Sin embargo, el uso de ultrasonido como una técnica no invasiva y de bajo costo sigue siendo un área de investigación muy prolífica a nivel mundial.

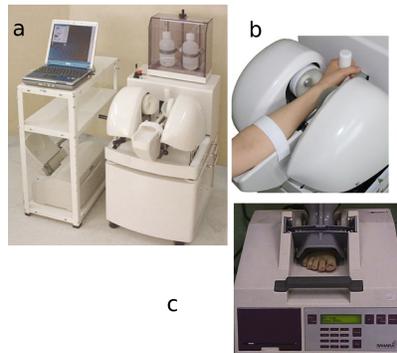


Figura 2.6: (a) Equipo de medición ultrasónica en el antebrazo LD-100 [19]. (b) Uso del equipo. (c) Equipo de medición ultrasónica en el tobillo [18].

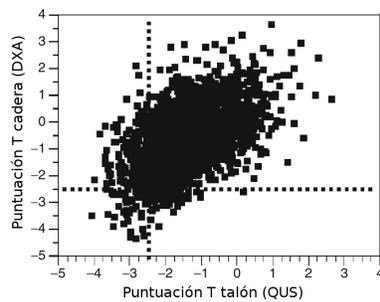


Figura 2.7: Correlación entre la BMD medida en cadera y QUS en tobillo. Las líneas punteadas delimitan los umbrales de osteoporosis para ambas variables. Sólo en el rectángulo izquierdo inferior los mismos pacientes son clasificados como osteoporóticos por ambos métodos. En los cuadros derecho inferior e izquierdo superior se observa un número considerable de pacientes que no pueden ser clasificados.

Capítulo 3

Propagación Acústica en Medios Porosos

3.1 Interacción de la Onda Ultrasónica y el Hueso

La propagación en medios porosos es muy compleja debido al poco entendimiento de los mecanismos físicos implicados en la interacción entre el ultrasonido y la estructura ósea, por lo que el modelado de la propagación del ultrasonido en hueso trabecular es de vital importancia para realizar diagnósticos correctos acerca del estado osteoporótico de los pacientes. Para tal fin se estudian dos teorías principales que intentan describir la interacción del ultrasonido con el hueso: (1) Teorías de Dispersión y (2) Teoría de Biot [10].

3.1.1 Teorías de Dispersión

Teoría de Waterman-Truell

Cuando una onda acústica incide en un material viscoelástico de dos fases (matriz-inclusión), parte de la energía es dispersada por las inclusiones y el resto es refractado.

El modelo de Waterman-Truell [24] ha sido usado extensivamente para predecir las propiedades efectivas de estos materiales [31], donde se asume que las inclusiones son de radio a y se encuentran embebidas en la matriz. Al conocer las propiedades mecánicas de las inclusiones y la matriz, se pueden determinar las propiedades de un medio efectivo cuya velocidad de fase y atenuación se relacionan con el número de onda complejo k como

$$k = \frac{2\pi f}{V(f)} + i\alpha(f). \quad (3.1)$$

Y el número de onda del material efectivo es

$$\left(\frac{k}{k_{mat}}\right)^2 = \left(1 - 2i \frac{l}{\pi a^2} \frac{f(0)}{k_{mat}^2}\right)^2 - \left(2i \frac{l}{\pi a^2} \frac{f(\pi)}{k_{mat}^2}\right)^2, \quad (3.2)$$

donde $l/\pi a^2$ es la fracción de inclusiones por unidad de volumen, $f(0)$ y $f(\pi)$ son las amplitudes de onda hacia adelante y hacia atrás por una inclusión de radio a , dadas por [24]

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n a_n^*, \quad (3.3a)$$

$$f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n a_n^* \quad (3.3b)$$

donde los coeficientes a_n son determinados por las condiciones de continuidad entre los dos medios.

Modelo Dinámico Auto Consistente

En este modelo desarrollado por Yang [25] asume que se tiene un material compuesto de tres fases: dispersores de radio a , rodeadas por una matriz de radio b embebida en un medio efectivo. El medio efectivo es un medio artificial que matemáticamente representa a un medio homogéneo con las propiedades elásticas totales de las inclusiones y la matriz.

En este caso el número de onda del medio efectivo se determina de un proceso iterativo que inicia con la expresión dada por la ecuación (3.2) y se actualiza de acuerdo a

$$k_{p+1} = k_p^2 - 4i \frac{c}{\pi a^2} f(0) - \frac{4}{k_p^2} \left(\frac{c}{\pi a^2} \right)^2 [f^2(0) - f^2(\pi)], \quad (3.4)$$

donde $c = a/b$, $p = 0, 1, 2, \dots$ hasta que $k_{p+1} \approx k_p$.

3.1.2 Teoría de Biot

La teoría de Biot es una forma establecida de predecir la propagación acústica en un material inhomogéneo y fue aplicada originalmente a rocas porosas saturadas con fluido para estudios geofísicos. El modelo de Biot trata el comportamiento individual y acoplado del material y el fluido contenido en los poros. Este modelo predice que la velocidad del sonido y la atenuación en un medio bifásico dependerá de la frecuencia de la onda incidente, las propiedades elásticas del material, porosidad, tortuosidad, y esfuerzos efectivos. La teoría de Biot ha sido aplicada al hueso trabecular con diferentes grados de éxito y, a su vez predice la existencia de tres ondas de propagación, una transversal y dos longitudinales denominadas onda lenta, donde el fluido y el sólido se mueven fuera de fase y rápida donde el fluido y el sólido se mueven en de fase.

Desde su formulación original en una serie de artículos publicados en un periodo de 20 años, la teoría ha tenido pocas modificaciones las cuales incluyen la introducción de conceptos físicos tales como las longitudes características viscosa y termal así como el concepto de tortuosidad dinámica y estática, introducidos por Johnson y colaboradores [5,10]; o bien los parámetros constitutivos locales que se determinan por los experimentos pensados de Biot y Willis¹ [27].

3.2 Ecuaciones de Movimiento

Para determinar las ecuaciones de movimiento se considera que el sólido es una fase deformable y conectada, por lo que se deduce que existirán y se propagaran ondas longitudinales y transversales en la fase sólida. Recíprocamente se supondrá que sólo las ondas compresionales se pueden propagar a través del líquido porque el fluido no transmite eficientemente los esfuerzos de corte a nivel macroscópico. Entonces la simplificación se hará de tal modo que las deformaciones de corte (macroscópicas) del fluido no están asociadas con ninguna fuerza cortante restitutiva ejercida en el fluido o el sólido. Es por esto que sólo se detectará un tipo de onda de corte. En resumen, las ecuaciones de Biot se obtienen al considerar una estructura isotrópica, donde el fluido saturador es ideal y el sólido es elástico.

Mientras que el campo de velocidades \bar{v}^f del fluido no se encuentra distribuido uniformemente a una escala microscópica y depende del punto considerado \bar{x}^2 , el campo de velocidades del sólido \bar{v}^s puede ser supuesto casi uniformemente distribuido, es decir $\bar{v}^s = \bar{v}^s(t)$.

Al incidir la onda ultrasónica, se observa localmente al sólido como si se moviera uniformemente sin deformación y el fluido como si se moviera en un modo libre de divergencia.

Esta situación se muestra esquemáticamente en la figura 3.1.

3.2.1 Fluido Ideal y Sólido Elástico

Con las restricciones de la figura 3.1 y el considerar solamente un fluido ideal y un sólido elástico sugiere que existen diferentes resultados o modelos posibles dependiendo de la complejidad de la microgeometría asumida del medio.

¹Es común encontrar en la literatura que a estos experimentos como se les denomina 'gedanken experiments'.

² Es decir $\bar{v}^f = \bar{v}^f(\bar{x}, t)$.

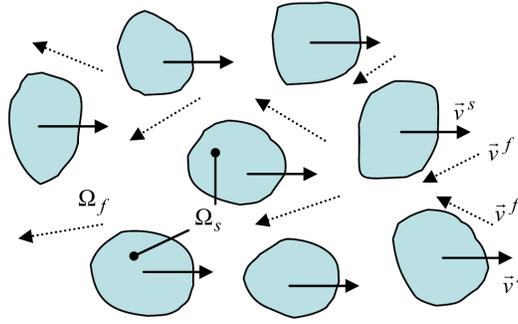


Figura 3.1: Volumen microscópico representativo de el medio poroso. El campo de velocidades del fluido \bar{v}^f (flechas punteadas) depende de la posición y el tiempo, mientras que el campo de velocidades del sólido \bar{v}^s (flechas continuas) se distribuye uniformemente en el espacio.

Sin embargo, al limitarse a un volumen microscópico representativo (figura 3.1), no es necesario hacer un análisis completo ya que la forma más general de las ecuaciones dadas por Biot pueden ser deducidas en una forma simple a partir de las simetrías presentes en el problema. Los parámetros constitutivos locales (parámetros elásticos y densidades) se determinarán a través de los experimentos pensados de Biot y Willis y con la observación hecha en los párrafos anteriores que el movimiento del sólido puede verse como si fuera uniforme a nivel microscópico. Básicamente, la suposición de que existe una teoría macroscópica significa que es posible construir un lagrangiano de el sistema usando solamente los vectores de desplazamiento medio del fluido y el sólido, es decir

$$U^f = \langle u^f \rangle, U^s = \langle u^s \rangle,$$

y sus derivadas espaciales y temporales. Al limitar el estudio a las primeras derivadas se obtienen las ecuaciones de Biot.

Ecuaciones de Euler Lagrange

Es usual reducir las leyes de la física a principios variacionales. En la teoría del campo un sistema continuo es descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas $q_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots$) las cuales cuentan los diferentes grados de libertad del sistema. Estas coordenadas se encuentran en el núcleo de la densidad lagrangiana $L(t, q_i, \dot{q}_i, q_{i,k})$. Para facilitar la lectura de las ecuaciones se usarán las notaciones simplificadas $\frac{\partial}{\partial t} q_i = \dot{q}_i$, $\frac{\partial}{\partial x_k} q_i = q_{i,k}$ y el convenio de sumación de Einstein; en el cual si aparecen dos índices repetidos se entiende que hay una suma sobre dicho índice. Además, debido a la invarianza temporal no es necesario considerar una dependencia de L con el tiempo. Al integrar la densidad lagrangiana se obtiene una acción S que debe ser estacionaria. Es decir variaciones alrededor de el camino seguido por el sistema se verifica la relación $\delta S = 0$. Entonces la condición extremal $\delta S = 0$ produce las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial q_{i,k}} \quad (3.5)$$

y al resolverlas se obtienen las ecuaciones de movimiento.

Al aplicar el principio variacional es posible deducir las ecuaciones de movimiento del fluido o del sólido para lo cual es necesario expresar a la densidad lagrangiana en la forma $L = T - V$ en donde $T(\dot{u}_i, \delta_{ij})$ es la densidad de energía cinética que debe ser un escalar cuadrático formado por \dot{u}_i y el tensor unitario δ_{ij} . Mientras que $V(\dot{u}_{ij}, \delta_{ij})$ es la densidad de energía potencial de deformación, que debe ser un escalar cuadrático formado por el tensor de deformación $u_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ y el tensor δ_{ij} ³. Para la energía cinética se tienen dos posibilidades $u_{ik}u_{ik}$ y

³Se consideran sólo tensores linealizados porque se está estudiando una teoría lineal.

$u_{ii}u_{jj}$. Sin embargo en el fluido ideal, la primera opción debe ser descartada porque no existe energía deformacional asociada con las deformaciones de corte, las cuales pueden ocurrir sin dar ninguna fuerza restitutiva. Entonces la densidad lagrangiana se escribe como:

$$\text{Fluido : } L = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^2 - \frac{1}{2}\lambda u_{ii}^2, \quad (3.6a)$$

$$\text{Sólido : } L = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^2 - \frac{1}{2}\lambda u_{ii}^2 - \mu u_{ik}^2, \quad (3.6b)$$

donde ρ , λ y μ son coeficientes escalares dependientes del medio, ρ es la densidad. En el caso fluido λ es el módulo principal, que a veces es denotado como K o $1/\chi$. En el caso sólido λ es la primera constante de Lamé, que define al módulo principal $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, y μ es el módulo de corte.

Al aplicar la ecuación (3.5) en L se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial (u_{i,k})}, \quad (3.7)$$

que puede ser expresada como

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (3.8)$$

Donde las componentes de π_i son los momentos conjugados, es decir

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \quad (3.9)$$

y las componentes de σ_{ik} se expresan como

$$\sigma_{ik} = - \frac{\partial L}{\partial u_{i,k}} = \frac{\partial V}{\partial u_{i,k}}. \quad (3.10)$$

La interpretación de la ecuación (3.8) es como sigue. El lado derecho corresponde a la fuerza volumétrica ejercida sobre el material, por unidad de volumen. Esta fuerza proviene de las acciones ejercidas por las partes contiguas de la unidad de volumen. Debido al pequeño rango de fuerzas intermoleculares, estas acciones son ejercidas únicamente en la frontera del volumen y deben tomar la forma de la divergencia del tensor de esfuerzos σ_{ik} . Por otra parte el lado izquierdo representa la variación de la cantidad de momento $\pi_i = \rho\dot{u}_i$ del material por unidad de volumen. De acuerdo con las relaciones tensoriales [27]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial u_{i,j}} &= \delta_{ik}\delta_{jl}, \\ \frac{\partial u_{kl}}{\partial u_{ij}} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned}$$

se puede concluir que $\frac{\partial u_{kl}}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial u_{kl}}{\partial u_{ij}}$ y por tanto que los coeficientes del tensor σ_{ik} son

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial V}{\partial u_{i,k}} = \frac{\partial V}{\partial u_{ik}} \quad (3.11)$$

En el caso de un fluido o sólido, las relaciones (3.11) son

$$\text{Fluido : } \sigma_{ik} = K u_{ll} \delta_{ik}, \quad (3.12a)$$

$$\text{Sólido : } \sigma_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik} = K u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu (u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}). \quad (3.12b)$$

Siguiendo este mismo procedimiento se puede hallar la forma de las ecuaciones micro y macroscópicas de Biot que describen la propagación de ondas de frecuencia baja al propagarse en el medio poroso ideal.

3.2.2 Ecuaciones Microscópicas de Biot (Sin Considerar Pérdidas)

Para describir un material poroso saturado de un fluido ideal, y basándose en el enfoque de la sección anterior, es necesario introducir seis coordenadas q_i , de las cuales tres corresponden al campo de desplazamiento U^s y el resto al campo de desplazamiento U^f .

Las densidad lagrangiana del sistema de la forma $L = T - V$, con $T(\dot{U}^s, \dot{U}^f, \delta_{ij})$ y $V(U^s, U^f, \delta_{ij})$.

Para la energía cinética hay tres posibles escalares cuadráticos: $\dot{U}_i^s \dot{U}_i^s$, $\dot{U}_i^f \dot{U}_i^f$, $\dot{U}_i^s \dot{U}_i^f$. Entonces, introduciendo tres constantes constitutivas del medio se tiene

$$T = \frac{1}{2} \rho_{11} \dot{U}^s{}^2 + \frac{1}{2} \rho_{22} \dot{U}^f{}^2 + \rho_{12} \dot{U}^s \cdot \dot{U}^f. \quad (3.13)$$

Las constantes ρ_{ij} son definidas de tal forma que (3.13) exprese la energía cinética por unidad de volumen total del material y su interpretación se deja para el la sección §3.2.2.

Para la energía potencial es posible combinar los tensores U_{ij}^s , U_{ij}^f , δ_{ij} para obtener los siguientes seis escalares cuadráticos: $U_{ij}^s U_{ij}^s$, $U_{ii}^s U_{jj}^s$, $U_{ij}^f U_{ij}^f$, $U_{ii}^f U_{jj}^f$, $U_{ij}^s U_{ij}^f$, $U_{ii}^s U_{jj}^f$. Dado que el fluido no es capaz de transmitir los esfuerzos de corte macroscópicos, entonces el esfuerzo de corte del fluido no puede contribuir a la energía potencial. Esto significa que los escalares $U_{ij}^f U_{ij}^f$ y $U_{ij}^s U_{ij}^f$ deben ser eliminados. Lo anterior no significa que dichos términos sean cero, sino que las dos constantes constitutivas asociadas a ellos deben ser iguales a cero. Por lo tanto deben introducirse sólo cuatro constantes constitutivas del medio: e ($e = \nabla \cdot \bar{U}^s = U_{ii}^s$) y ε ($\varepsilon = \nabla \cdot \bar{U}^f = U_{ii}^f$), que son las dilataciones del sólido y el fluido, obteniéndose

$$V = \frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{2} B \varepsilon^2 + C U_{ij}^s U_{ij}^s + D e \varepsilon. \quad (3.14)$$

Las constantes A , B , C y D se definirán de tal modo que (3.14) represente la energía potencial por unidad de volumen total del material y su interpretación se dará en la sección §3.2.2.

La notación usual para estas constantes es la introducida por Johnson y colaboradores [4], que se obtiene al reemplazar las constantes A , B , C y D de la siguiente forma

$$A \rightarrow P - 2N, \quad B \rightarrow R, \quad C \rightarrow N, \quad D \rightarrow Q.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano propuesto serán

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^s} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial U_{i,k}^s}, \quad (3.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i^f} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial U_{i,k}^f}, \quad (3.15b)$$

que, como en la sección anterior pueden ser expresados como

$$\frac{\partial \pi_i^s}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}^s}{\partial x_k}, \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial \pi_i^f}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}^f}{\partial x_k}, \quad (3.16b)$$

La interpretación de las ecuaciones (3.16a) y (3.16b) es como sigue: Los términos del lado izquierdo representan a las fuerzas volumétricas que actúan en las fases sólida y líquida por unidad de volumen total del material. Estas fuerzas en un volumen dado se deben a las acciones por las partes contiguas del cuerpo sobre la frontera, y puede ser representada por la divergencia de los tensores de esfuerzo de la fase fluida (σ_{ik}^f) y la fase sólida (σ_{ik}^s). Es importante señalar que lo anterior significa que σ_{ik}^s y σ_{ik}^f son los esfuerzos ejercidos sobre las partes sólida y fluida por unidad de superficie total del material, respectivamente.

El lado derecho de las ecuaciones representa la razón de cambio en el momento del cuerpo por unidad de volumen total, inducido por la aplicación de fuerzas en una u otra de las dos fases. Debido a la presencia de los índices s y f en los momentos π , no debe pensarse que $\pi^{s,f}$ representa el momento del sólido y el fluido por unidad de volumen total. Al contrario, mientras que las fuerzas en el lado derecho son aplicadas respectivamente al sólido y al fluido, ellas generan la variación del momento en ambas fases debido que ambas están acopladas.

De acuerdo con (3.9) los momentos son

$$\pi_i^s = \rho_{11} \dot{U}_i^s + \rho_{12} \dot{U}_i^f, \quad (3.17a)$$

$$\pi_i^f = \rho_{22} \dot{U}_i^f + \rho_{12} \dot{U}_i^s. \quad (3.17b)$$

Mientras que de la ecuación (3.10) y las relaciones tensoriales (3.11) se tiene

$$\sigma_{ik}^s = [(P - 2N)e + Q\varepsilon] \delta_{ik} + 2NU_{ik}^s, \quad (3.18a)$$

$$\sigma_{ik}^f = [Qe + R\varepsilon] \delta_{ik}, \quad (3.18b)$$

y substituyendo las ecuaciones (3.17), (3.18) en (3.16) se obtienen las ecuaciones de Biot

$$\rho_{11} \ddot{\bar{U}}^s + \rho_{12} \ddot{\bar{U}}^f = P \bar{\nabla} e + Q \bar{\nabla} \varepsilon - N \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{U}^s \quad (3.19a)$$

$$\rho_{22} \ddot{\bar{U}}^f + \rho_{12} \ddot{\bar{U}}^s = Q \bar{\nabla} e + R \bar{\nabla} \varepsilon. \quad (3.19b)$$

La expresión de las constantes constitutivas ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} , P , Q , R , S , N , introducidas en el modelo se dará en la siguiente sección.

Identificación de las densidades efectivas

Como σ_{ik}^s y σ_{ik}^f son los esfuerzos en las partes sólida y fluida por unidad de área superficial del material respectivamente, entonces es necesario escribir la ecuación de movimiento por unidad de volumen total del material para las fases sólida y fluida

$$\rho_f \phi \ddot{U}_i^f = \frac{\partial \sigma_{ik}^f}{\partial x_k} + R_i, \quad (3.20a)$$

$$\rho_s (1 - \phi) \ddot{U}_i^s = \frac{\partial \sigma_{ik}^s}{\partial x_k} - R_i, \quad (3.20b)$$

donde ρ_s , ρ_f y ϕ son las densidades del sólido, el fluido y la porosidad del material sólido. Además se ha introducido la fuerza interna de reacción R_i debido a las paredes del sólido. Debido a la tercera ley de Newton una fuerza igual y opuesta se debe introducir en la segunda ecuación.

Las ecuaciones (3.20a) y (3.20b) se obtienen al substituir la expresión de la fuerza de reacción R_i en las ecuaciones (3.16a) y (3.16b), donde [28]

$$R_i = -\phi \rho_f \chi_{\infty ij} \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad (3.21)$$

donde se ha introducido el tensor constitutivo adimensional $\chi_{\infty ij} = (\alpha_\infty - 1)\delta_{ij}$ con α_∞ una propiedad intrínseca al medio poroso, denominada tortuosidad y su significado físico se discute en el apéndice §A.0.1.

La velocidad a la que se hace referencia en la ecuación (3.2.2) es la generada por el movimiento relativo del fluido, es decir $v_i = \dot{U}_i^f - \dot{U}_i^s$.

Substituyendo la ecuación (3.2.2) en (3.20) y comparando con (3.16) se obtienen las siguientes expresiones para las densidades ρ_{ij} :

$$\rho_{11} = \rho_s (1 - \phi) + \rho_f \phi (\alpha_\infty - 1), \quad (3.22a)$$

$$\rho_{22} = \phi \rho_f \alpha_\infty, \quad (3.22b)$$

$$\rho_{12} = -\phi \rho_f (\alpha_\infty - 1). \quad (3.22c)$$

Esto implica que las cantidades ρ_{ij} contienen la información de las densidades del fluido y el sólido, así como la información de la tortuosidad y la porosidad⁴.

Identificación de los Coeficientes Elásticos

Es usual mencionar los experimentos pensados de Biot y Willis para identificar a los parámetros elásticos P , Q , R y N . Uno de éstos consiste en someter un volumen de material a un esfuerzo de corte puro y uniforme, este experimento es sencillo y da directamente la interpretación del coeficiente N : representa el módulo de corte de la estructura porosa sin considerar el fluido saturador. Lo anterior únicamente expresa la condición que se ha establecido al inicio: el fluido no contribuye a una fuerza restitutiva de corte macrocópica.

La interpretación de los coeficientes restantes es más delicada y es necesario realizar los siguientes experimentos pensados.

⁴Denominadas comúnmente en la literatura como densidades de Biot

1. Primer experimento (material "abrigado")

Considérese un volumen del material de tamaño L_h^3 y que se encuentre envuelto por una membrana flexible, la cual está sujeta a una presión uniforme $p_0 + p_1 \exp(-i\omega t)$, donde p_0 es la presión ambiental (constante) y $p_1 \exp(-i\omega t)$ es una pequeña presión armónica en el tiempo que se aplica directamente a la membrana. Si se hace un agujero de tamaño capilar en esta membrana y se conecta a un tanque que se encuentra sujeto a la presión p_0 , entonces la presión de la membrana y el tanque alcanzarán el mismo valor (ver figura 3.2). Suponiendo que las longitudes de onda son lo suficientemente grandes ($\lambda \gg L_h$), las variables de interés tendrán una distribución espacial uniforme en el volumen.

La excitación por el exceso de presión uniforme $p_1 \exp(-i\omega t)$ no genera un esfuerzo macroscópico de corte, pero si compresiones uniformes, es decir: $U_{1ij}^s = e_1 \delta_{ij}$, $U_{1ij}^f = \varepsilon \delta_{ij}$. Como el fluido permanece a la presión ambiente, se tiene que $\sigma_{1ij}^s = 0$ y la presión adicional $p_1 \exp(-i\omega t)$ se transmite totalmente al sólido: $\sigma_{ij}^s = -p_1 \exp(-i\omega t) \delta_{ij}$. Substituyendo estos resultados en las ecuaciones (3.18) se obtienen las ecuaciones

$$-p_1 \exp(-i\omega t) = \left(P - \frac{4N}{3} \right) e_1 + Q\varepsilon_1, \quad (3.23a)$$

$$0 = Qe_1 + R\varepsilon_1. \quad (3.23b)$$

Si K_b es el módulo principal de la estructura sólida con el fluido a presión constante (o el módulo principal de la estructura sólida en el vacío). Su valor estará dado por la ecuación $K_b = -p_1 \exp(-i\omega t)/e_1$ y substituyendo en las ecuaciones (3.23a) y (3.23b) se encuentra que

$$K_b = P - \frac{4}{3}N - \frac{Q^2}{R}. \quad (3.24)$$

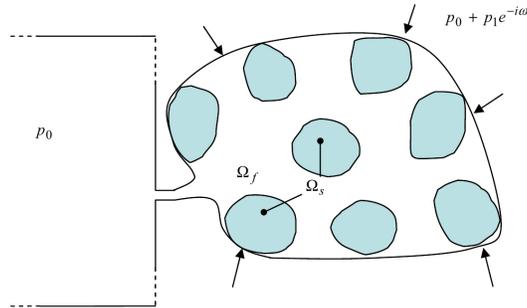


Figura 3.2: Primer experimento pensado de Biot-Willis: el volumen representativo se encuentra 'abrigado' por una membrana flexible y se aplica una presión de la forma $p_0 + p_1 \exp(-i\omega t)$.

2. Segundo experimento (material "desabrigado")

Considerando el mismo volumen de material pero ahora sujeto directamente a $p_1 \exp(-i\omega t)$ en el fluido, como se muestra en la figura 3.3. Por las mismas razones que en el experimento anterior, este exceso de presión permanece uniforme en el volumen considerado a las frecuencias relevantes.

Entonces este exceso hidrostático es transmitido al sólido, y las ecuaciones (3.18a) y (3.18b) se escriben como

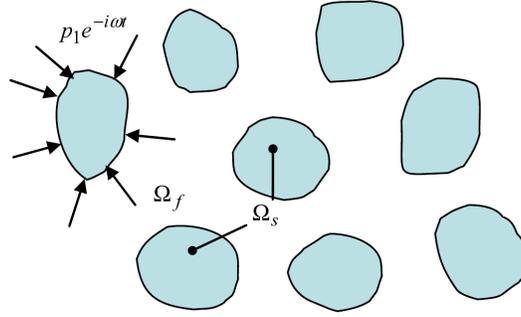


Figura 3.3: Segundo experimento pensado de Biot-Willis: el volumen representativo se encuentra 'desabrigado' y se aplica una presión de la forma $p_0 + p_1 \exp(-i\omega t)$.

$$-(1 - \phi)p_1 \exp(-i\omega t) = \left(P - \frac{4N}{3}\right) e_1 + Q\varepsilon_1, \quad (3.25a)$$

$$-\phi p_1 \exp(-i\omega t) = Qe_1 + R\varepsilon_1. \quad (3.25b)$$

La estructura se comprime y expande sin deformación y en este caso la cantidad $K_s = -p_1 \exp(-i\omega t)/e_1$ se interpreta como el módulo principal del sólido mismo, entonces eliminando e_1 de las ecuaciones (3.25a) y (3.25b) se obtiene la relación

$$(1 - \phi)K_s = P - \frac{4N}{3} + \left(\phi \frac{K_s}{R} - \frac{Q}{R}\right) Q. \quad (3.26)$$

Similarmente, la cantidad $K_f = -p_1 \exp(-i\omega t)/\varepsilon_1$ puede ser interpretada como el módulo de compresibilidad del fluido, porque la porosidad no varía y ε_1 consecuentemente representa las dilataciones microscópicas uniformes del fluido. Por lo cual, al eliminar ε_1 de las ecuaciones (3.25):

$$(1 - \phi)K_f = \left(P - \frac{4}{3}N\right) \left(\phi \frac{K_f}{Q} - \frac{R}{Q}\right) + Q. \quad (3.27)$$

Finalmente, al combinar las ecuaciones (3.24), (3.26) y (3.27) se determinan las siguientes expresiones para los coeficientes elásticos P , Q , R :

$$P = \frac{(1 - \phi) \left(1 - \phi - \frac{K_b}{K_s}\right) K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_b}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} + \frac{4}{3}N, \quad (3.28a)$$

$$Q = \frac{\left(1 - \phi - \frac{K_b}{K_s}\right) \phi K_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}, \quad (3.28b)$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}}. \quad (3.28c)$$

Por lo tanto las constantes elásticas de Biot P , Q , R , N contienen información de los módulos principales del sólido y el fluido K_s y K_f , la información de los módulos de corte y principal de la estructura en el vacío N y K_b , y la información de la porosidad del medio ϕ .

Los Tres Tipos de Ondas de Biot

Las ecuaciones de Biot (3.19) implican que pueden propagarse tres distintos tipos de ondas en el material: dos longitudinales y una transversal. Para probar este resultado se aplican los operadores divergencia y rotacional a las ecuaciones (3.19) y se obtienen los siguientes sistemas:

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta \epsilon \end{bmatrix}, \quad (3.29a)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{22} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\Omega}}_1 \\ \ddot{\bar{\Omega}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \Delta \bar{\Omega}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29b)$$

donde $\bar{\Omega}_1 = \nabla \times \bar{U}^s$ y $\bar{\Omega}_2 = \nabla \times \bar{U}^f$ son los vectores de rotación del sólido y el fluido, y Δ es el operador laplaciano.

El primer sistema describe ondas compresionales, mientras que el segundo describe ondas rotacionales (corte). Buscando las soluciones en forma de ondas planas $\exp(-i[\omega t - \bar{q} \cdot \bar{r}])$ se obtiene, para las ondas compresionales

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{22} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \bar{q}^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

El cuadrado del vector de onda \bar{q}^2 admite dos valores posibles: δ_1^2 y δ_2^2 , que son los eigenvalores de la matriz del lado izquierdo y están dados por las siguientes expresiones:

$$\delta_1^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)} \left(P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12} - \sqrt{\Delta} \right), \quad (3.31a)$$

$$\delta_2^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)} \left(P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12} + \sqrt{\Delta} \right), \quad (3.31b)$$

donde

$$\Delta = (P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12})^2 - 4(PR - Q^2)(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2). \quad (3.32)$$

Las cantidades δ_1 y δ_2 son las constantes de propagación de las dos ondas compresionales.

Para la onda rotacional, se tiene $\bar{\Omega}_2 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\bar{\Omega}_1$ y \bar{q}^2 es necesariamente igual al único valor posible δ_3^2 dado por

$$\delta_3^2 = \frac{\omega^2}{N} \frac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{\rho_{22}}. \quad (3.33)$$

La cantidad δ_3 es la constante de propagación de la onda de corte. La naturaleza positiva de las formas cuadráticas asociadas con las energías cinética y potencial requieren que las cantidades $PR - Q^2$ y $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2$ sean positivas. Una conclusión directa es que las ecuaciones (3.31a), (3.31b) y (3.33) son, como debe ser en ausencia de pérdidas, positivas. Las velocidades de propagación de cada onda $c_i = \omega/\delta_i$ son constantes, independientes de la frecuencia.

Para cada una de las tres ondas, los movimientos de fluido y el sólido son colineales: $\bar{U}^f = \mu_i \bar{U}^s$. Esto se debe a la anisotropía asumida. Los radios de amplitud μ_i están fijos y son

$$(i = 1, 2), \mu_i = -\frac{\omega^2 \rho_{11} - P\delta_i^2}{\omega^2 \rho_{12} - Q\delta_i^2} = -\frac{\omega^2 \rho_{12} - Q\delta_i^2}{\omega^2 \rho_{22} - R\delta_i^2}, \quad (3.34a)$$

$$\mu_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}. \quad (3.34b)$$

A diferencia del sistema masa-resorte, las constantes de propagación no pueden ser escritas como el cociente ω/c con $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, donde K sería una constante elástica que depende únicamente de P , Q , R y ρ una densidad que depende únicamente de ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} . Tal separación dinámica de los efectos inerciales y elásticos no es posible. Esto puede ser observado también de los radios μ_i , en los que las propiedades elásticas P , Q , R están involucradas así como las propiedades inerciales ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} . Sin embargo los dos radios μ_1 y μ_2 pueden relacionarse por medio de las densidades o por los parámetros elásticos. De hecho los radios μ_1 y μ_2 verifican las relaciones de ortogonalidad

$$\rho_{11} + \rho_{12}(\mu_1 + \mu_2) + \rho_{22}\mu_1\mu_2 = P + Q(\mu_1 + \mu_2) + R\mu_1\mu_2 = 0, \quad (3.35)$$

que pueden ser deducidas del sistema (3.30) al reemplazar $\begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ con los eigenvectores correspondientes a las ondas 1 y 2 y multiplicando el lado izquierdo por los transpuestos de los eigenvectores 1 y 2, respectivos. De la ecuación (3.35) se puede observar que los radios μ_1 y μ_2 siempre tienen signos opuestos. En otras palabras los movimientos del sólido y fluido están en fase para la onda con mayor velocidad de propagación. Esta onda es llamada "onda rápida" u onda del primer tipo. La onda con fase opuesta es llamada "onda lenta" u onda del segundo tipo.

3.3 Extensiones al Modelo de Biot

En su revisión de la aplicación de la teoría de Biot en hueso trabecular, Haire y Langton [10] indicaron que se tiene una predicción precisa para las velocidades de propagación de las ondas rápida y lenta, mientras que es inexacta para obtener los coeficientes de atenuación (ver figuras 3.4 3.5, respectivamente).

La discrepancia entre los coeficientes de atenuación puede deberse al hecho que el modelo de Biot sólo considera pérdidas por absorción debido a la fricción viscosa en la interfaces entre el sólido y el fluido, y no toma en cuenta fuentes adicionales de pérdida de energía. En particular se desprecia a los efectos de dispersión al asumir que la longitud de onda del ultrasonido es suficientemente grande en comparación con el tamaño del poro en el hueso trabecular. Sin embargo, el tamaño del poro para hueso trabecular del fémur humano se

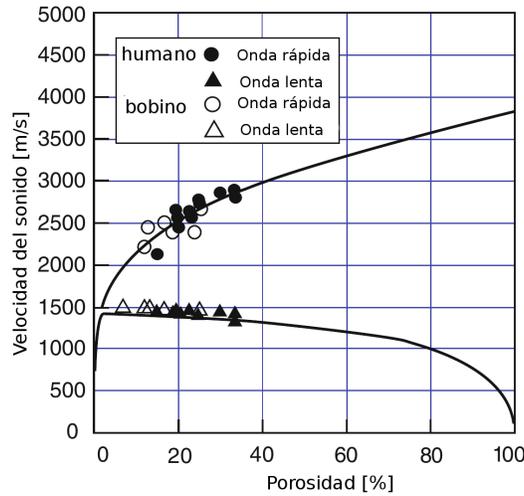


Figura 3.4: Comparación entre los resultados teóricos usando la teoría de Biot y los resultados experimentales para las velocidades de propagación de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bovino y humano [10, 30].

encuentra en el rango de 0.5 – 1.5 mm, que en el extremo es comparable con la longitud de onda de 1.5 mm a 1 MHz en agua [44].

Es por esto que se han desarrollado modelos modificados de Biot. A continuación se enlistan los más sobresalientes así como sus aciertos para mejorar el entendimiento de la interacción entre la onda acústica y el medio poroso saturado con fluido.

- **Modelo Modificado de Biot-Attenborough (MBA)**
Lee y colaboradores [47] estimaron teóricamente las propiedades de propagación usando este modelo. Las comparaciones entre los resultados teóricos y experimentales se muestra en la figura 3.6, donde se puede apreciar una buena concordancia no sólo para las velocidades de propagación sino también para los coeficientes de atenuación.
- **Modelo Modificado de Biot-Johnson (MBJ)**
Fellah y colaboradores [8] reprodujeron analíticamente los perfiles de onda de las ondas rápida y lenta al propagar un pulso ultrasónico a través de placas de hueso trabecular humano usando este modelo, la comparación entre el modelo y el experimento se muestra en la figura 3.7. Además fueron capaces de dar estimados para los parámetros estructurales del hueso al resolver el problema inverso.
- **Modelo estratificado de Biot**
En este modelo se asume que el medio poroso está compuesto de capas alternantes y periódicas de trabecula y fluido, es un modelo idealizado de hueso con una estructura trabecular altamente orientada [34]. El modelo se ilustra en la figura 3.8.

Usando este modelo, las velocidades de propagación de ambas ondas pueden ser fácilmente calculadas como función del ángulo respecto a la orientación trabecular, aunque los coeficientes de atenuación no pueden calcularse. Los resultados obtenidos de aplicar este modelo se comparan con los datos experimentales en la figura 3.9. En los resultados teóricos y experimentales, la velocidad de la onda rápida decrece cuando el ángulo entre la orientación trabecular y la dirección de propagación se incrementa, lo que causa el traslape de las ondas rápida y lenta. Entonces, la anisotropía del hueso trabecular puede interpretarse en el contexto de modelo estratificado. La comparación con el modelo estratificado de Biot fue realizada por Lee et al. [47] y Hughes et al. [32], los resultados obtenidos por Hughes et al. se muestran en la figura 3.9. A pesar de ser un modelo mucho más simple que los dos anteriores, la dependencia tanto de

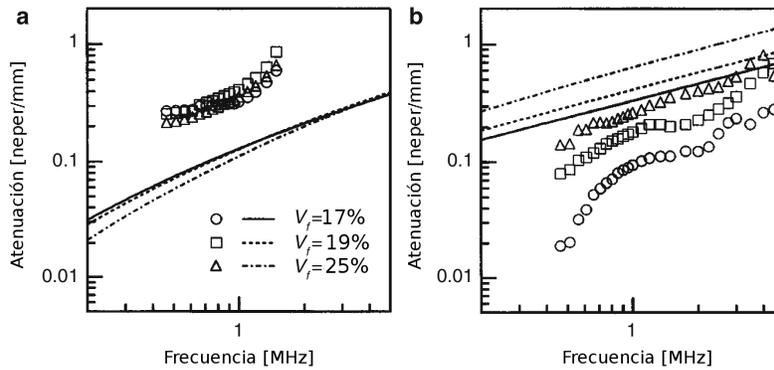


Figura 3.5: Comparación entre los resultados teóricos usando el modelo de Biot y los resultados experimentales (puntos) para los coeficientes de atenuación de las ondas (a) rápida y (b) lenta en hueso trabecular bovino. V_f representa la porosidad [10, 29].

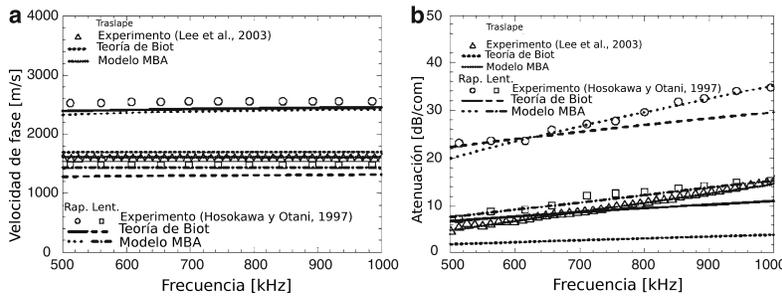


Figura 3.6: Comparación entre los resultados teóricos usando el modelo MBA y los resultados experimentales para (a) velocidades de propagación y (b) coeficientes de atenuación de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bovino. "Traslape" representa a la ondas rápida y lenta completamente superpuestas.

las velocidades de las ondas rápida y lenta con el ángulo entre la orientación trabecular y la dirección de propagación se predice adecuadamente.

Estos modelos tienen méritos y limitaciones, ya que los primeros dos requieren de al menos 10 parámetros que incluyen las propiedades del sólido, el fluido y la estructura porosa [10, 44]. Mientras que el último requiere comparativamente menos parámetros a cambio de considerar que el hueso es una estructura porosa ideal, lo que impide la comprensión correcta de la interacción entre la estructura porosa y la onda acústica.

3.3.1 Técnicas de Separación de las Ondas Rápida y Lenta

En las situaciones prácticas, la separación de las ondas de Biot es a veces difícil por el traslape temporal de las dos ondas. La separación exitosa de dichas ondas puede dar acceso a nuevos indicadores individuales, los cuales pueden incluir: velocidades, amplitudes y características espectrales. Se ha intentado separar las ondas usando procesamiento de señales tanto en el dominio temporal como en el frecuencial. En general se ha encontrado que la onda rápida tiene velocidad más alta y componentes de baja frecuencia, mientras que la onda lenta tiene las propiedades opuestas. Razón por la que las técnicas de separación de las ondas se basan en estas características. Cardoso et al. [21] observaron exitosamente la separación de las ondas al aplicar la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) como se muestra en la figura 3.10. Al aplicar una transformada de Fourier a toda la señal registrada, los autores también encontraron que la pendiente de la

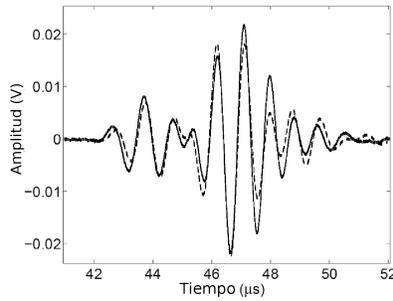


Figura 3.7: Comparación entre el resultado teórico (línea punteada) usando el modelo MBJ y el resultado experimental (línea continua) para las ondas propagadas en hueso trabecular humano [8].

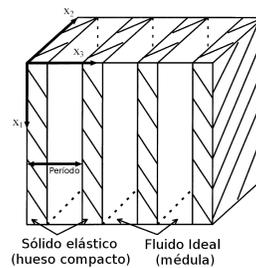


Figura 3.8: Modelo estratificado. Se asume que el hueso trabecular es un arreglo periódico de hueso compacto y médula [34].

parte de baja frecuencia (FDUA rápida) del espectro era mayor que la pendiente de la parte de alta frecuencia (FDUA lenta), como se muestra en la figura 3.11.

Por otro lado Hasegawa et al. [33] aplicaron un análisis basado en la transformada wavelet. Ellos ajustaron una función bidimensional al escalograma y fueron capaces de distinguir las dos ondas. Como resultado, las amplitudes de las componentes de frecuencia superiores e inferiores mostraron una buena correlación con la porosidad de la muestra. Además discutieron las características de las dos componentes al enfocarse en la distribución temporal de los escalogramas.

El método más eficiente hasta 2011 fue propuesto propuesto por Marutyan et al. [23], quienes aplicaron la teoría bayesiana de probabilidad para separar ondas mezcladas virtualmente y extraer las características individuales de propagación.

Sin embargo, estos métodos aún se encuentran en desarrollo, es decir que se necesita mejorar estas técnicas de procesamiento de señales antes que se puedan aplicar en ensayos clínicos.

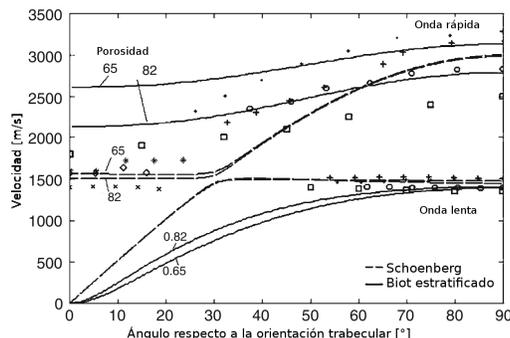


Figura 3.9: Comparación entre los resultados teóricos calculados usando los modelos estratificados de Biot y los resultados experimentales para las velocidades de propagación de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bovino. En el eje horizontal los valores de 0 y 90 corresponden a las orientaciones paralela y perpendicular, respectivamente [34].

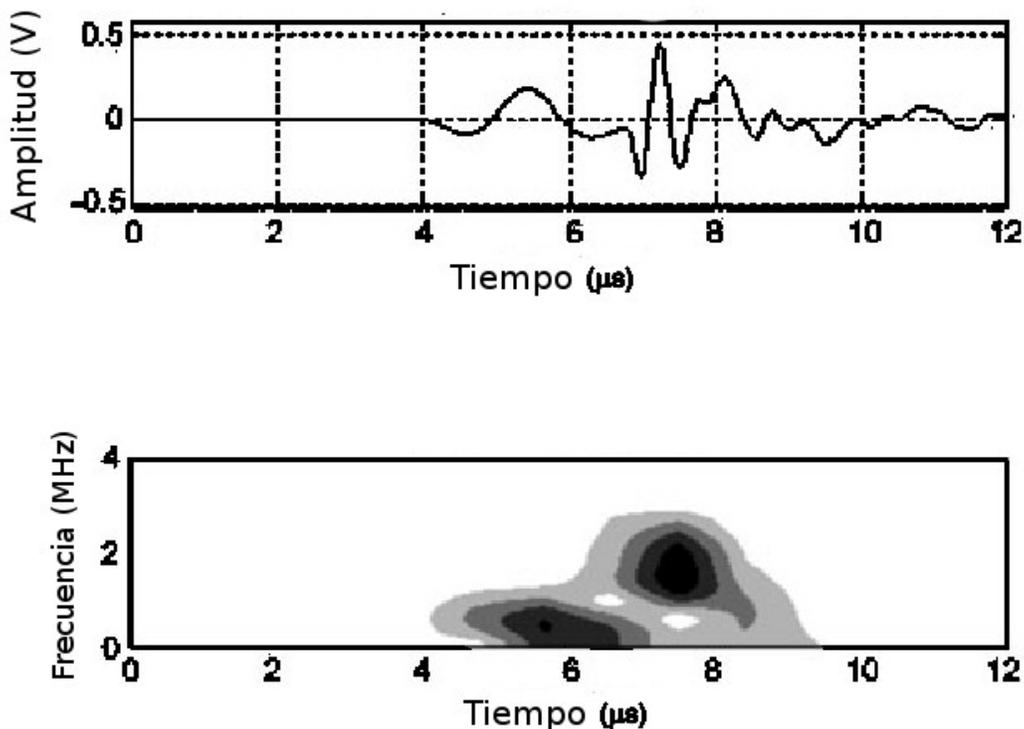


Figura 3.10: (a) Señal transmitida en la cabeza femoral humana. Se pueden apreciar dos ondas. (b) Espectrograma de la señal mostrando diferentes contenidos frecuenciales a determinados tiempos [21].

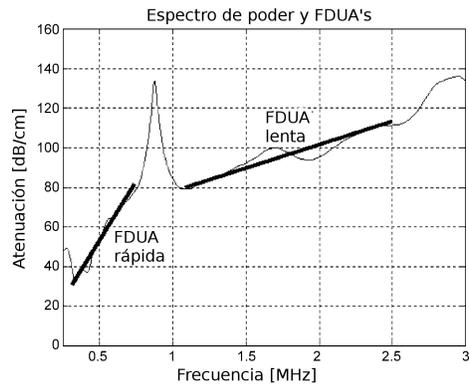


Figura 3.11: Espectro de poder de la señal 3.10(a) y las FDUAs respectivas para la onda rápida (pendiente de la parte de frecuencia baja de la señal) y la onda lenta (pendiente de la parte de alta frecuencia) [21].

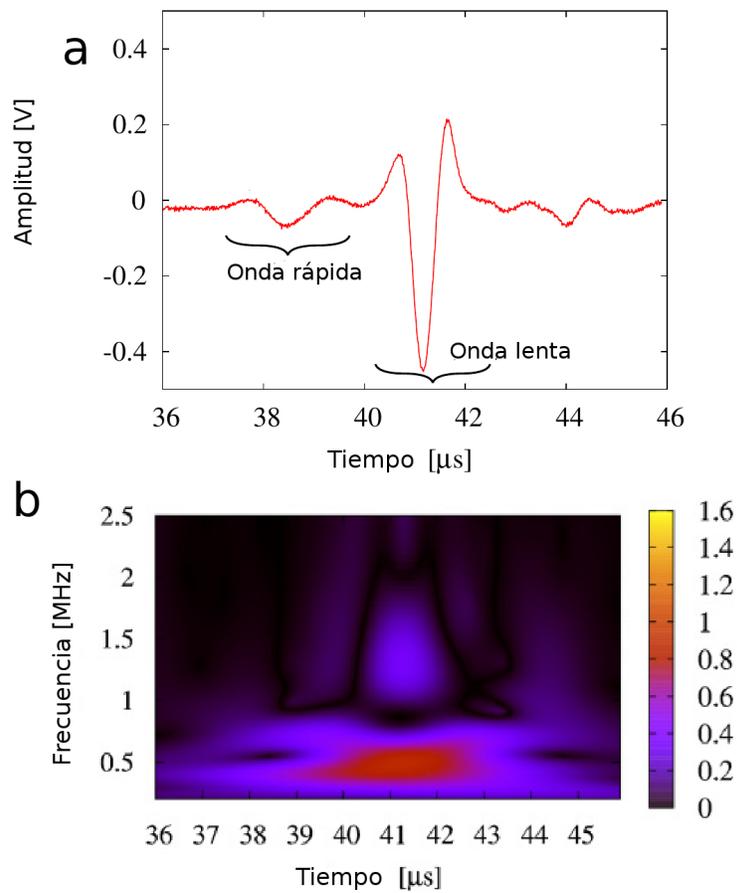


Figura 3.12: (a) Formas de onda experimentalmente observadas. (b) Escalograma de la señal mostrada en (a).

Capítulo 4

Metodología para la Caracterización de las Ondas de Biot

4.1 Introducción

La observación de la propagación de las ondas longitudinales rápida y lenta fue reportada por Hosokawa y Otani [29]. Se hizo incidir una onda ultrasónica con una frecuencia central de 1 MHz a la muestra normalmente en la dirección del espesor donde los elementos trabeculares estaban fuertemente orientados. Esta dirección fue denotada como dirección longitudinal [29]. Las formas de onda observadas se muestran en las figuras 4.1a y 4.1b para especímenes con porosidades de 17 y 25 por ciento, respectivamente; donde se aprecian dos ondas longitudinales distintas.

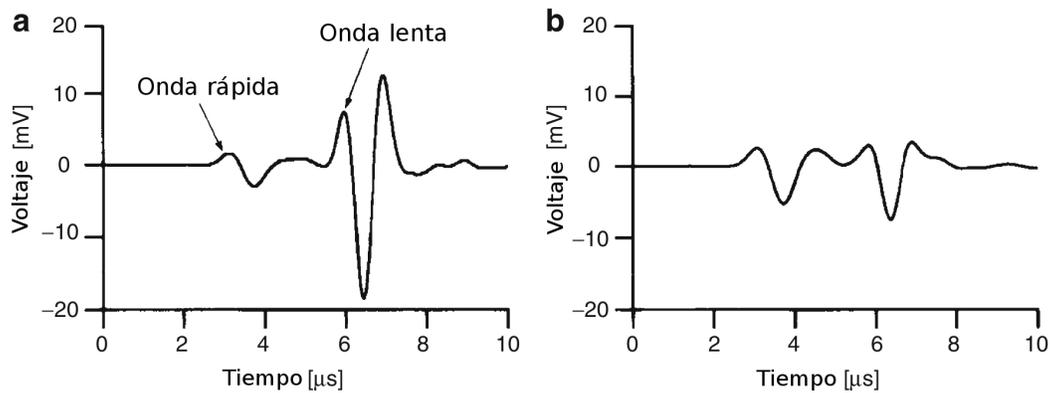


Figura 4.1: Primeras ondas rápida y lenta observadas experimentalmente al propagarse en hueso trabecular bovino con porosidades de (a) 17% y (b) 25% en la dirección longitudinal [29].

La posibilidad de observar las ondas rápida y lenta está influenciada por dos factores:

- Los transductores usados en el ensayo: los tiempos de excitación deben ser de corta duración incrementando la resolución temporal que permita discernir entre los dos tipos de ondas longitudinales, la correcta elección de la frecuencia de operación debe considerar que la atenuación de la onda rápida incrementa con la frecuencia [44].

- La dirección de propagación: Nicholson et al. [35] observaron experimentalmente formas de onda propagadas a través del hueso trabecular de la vértebra humana en tres direcciones denotadas como: craneo-caudal (CC), anteroposterior (AP) y mediolateral (ML). Las formas de onda observadas se muestran en la figura 4.2, donde se pueden apreciar dos ondas en la dirección CC, pero sólo se puede ver una en las otras direcciones.

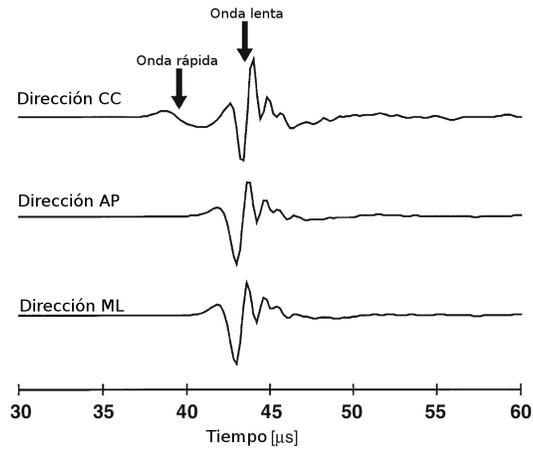


Figura 4.2: Formas típicas de onda ultrasónicas que se propagan en hueso trabecular de la vértebra humana en tres direcciones ortogonales [35].

La detección de las ondas rápida y lenta en hueso trabecular bajo diferentes condiciones reportadas se muestra en la tabla 4.1.

Condiciones del espécimen			Condiciones experimentales	
Hueso	Porosidad (%)	Fluido	Transd.	Dirección de prop.
BF	17, 25	BM	PVDF (.1-10 MHz)	Longitudinal
BF	18	BM	PVDF (.1-10 MHz)	Longitudinal
BF	12-19	Agua	PVDF	Longitudinal
BF, BT	35, NE	BM	Resonancia (1 MHz)	Paralela a la trabecula
BT	NE	Agua	Panametrics V306 (2.25 MHz)	SI
BF, BV	NE, NE	BM, Agua, Alcohol	Panametrics V302SU (1MHz), V304SU (2.25 MHz)	Orientación principal de la trabecula
BF	NE	Agua	Panametrics V323SU (2.25 MHz)	NE
HF, HT	NE			
HF	12-23	Agua	Panametrics A306S (2.25 MHz)	Dirección de la trabecula
BF	NE	Agua	PVDF hechos a medida por Toray Co.	Paralela a la dirección trabecular principal
HF	19, 30	Agua	PVDF hechos a medida por Toray Co.	Paralela a la dirección principal de la carga

Tabla 4.1: Condiciones experimentales donde se logra la separación de las ondas rápida y lenta. BF: fémur bovino, BT: tibia bovina, BV: vertebra bovina, HF: femur humano, HT: tibia humana [44]

4.2 Arreglo Experimental

4.2.1 Sistema Ultrasónico

La configuración del equipo para la detección de las ondas de Biot con ultrasonido consiste en la modalidad de transmisión transversal, usando un par de transductores ultrasónicos. El emisor es un transductor enfocado con superficie cóncava (Panametrics V389) y el receptor es un sensor plano (Panametrics V318). El transductor enfocado se eligió debido a que la salida es amplificada y la resolución espacial es mayor comparada con los transductores de superficie plana [52]. La frecuencia de operación de los transductores es de 500kHz . El transductor emisor fue excitado con un pulso cuadrado de 20 Vpp por medio de un generador de funciones (Tektronix AFG3021, ver figura 4.3(a)), y los ecos detectados fueron almacenados en un osciloscopio Tektronix MSO2024b (ver figura 4.3(c)). Se usó este osciloscopio debido a que la resolución temporal es alta, pudiéndose elegir entre adquirir 1×10^5 o bien 1×10^6 muestras para cada evento. Por otro lado la tasa de muestreo máxima es de 500 MS/s en una resolución de 2 ns [57]. En el presente estudio las señales adquiridas se obtuvieron a 200 MS/s en una resolución de $4\text{ }\mu\text{s}$. Estas características (definidas por el fabricante) se reflejan en un intervalo de muestreo de $1 \times 10^{-9}\text{ s}$.

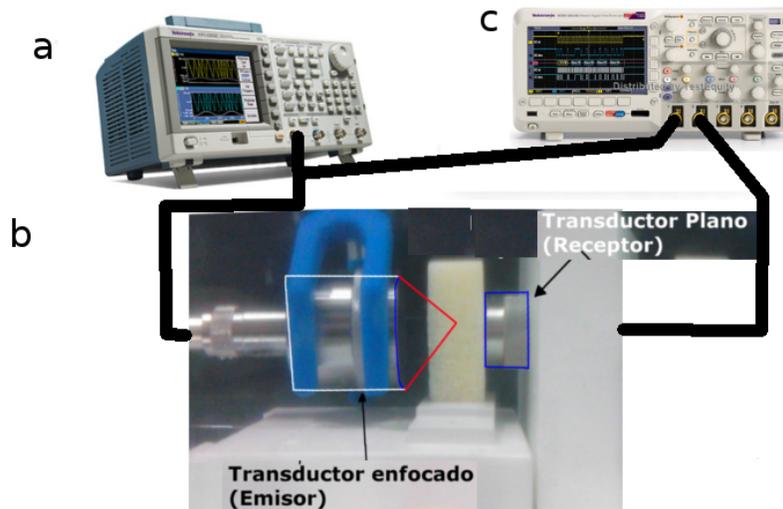


Figura 4.3: Equipo ultrasónico usado. (a) Generador de pulso. (b) Transductores y su arreglo en forma de transmisión transversal. (c) Osciloscopio.

Respecto al espécimen analizado se usó un hueso trabecular constituido por una matriz ósea de hueso bovino, anorgánico Nuke Bone Biocriss S.A. de C.V. de dimensiones $4.96 \times 2.98 \times 1.92\text{ cm}^3$ (figura 4.4). Las direcciones x , y y z como se muestra en la figura 4.4.

4.3 Cálculo de Velocidades y Atenuación

4.3.1 Velocidades Efectivas

Para el cálculo de la velocidad de propagación en agua se usaron dos transductores; uno como emisor y otro como receptor a una distancia d . Se excitó el emisor con un pulso cuadrado con una duración de $2 \times 10^{-6}\text{ s}$, el final de esta excitación se indica como t_0 en la figura 4.5 y el pulso propagado en agua se obtuvo después de un tiempo t_2 . La velocidad del sonido en agua v_w se obtiene por.

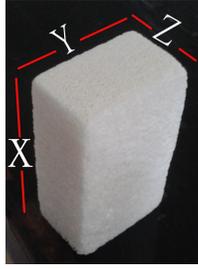


Figura 4.4: Espécimen analizado. La denominación de las direcciones de evaluación es: $X = 4.92cm$, $Y = 2.98cm$, $Z = 1.92cm$.

$$v_w = \frac{d}{t_2 - t_0},$$

donde d es la distancia entre transductores.

La implementación usada se muestra en el cuadro de código C.2. En el caso de la velocidad efectiva del hueso trabecular, se realizó el mismo procedimiento anteriormente descrito para obtener el tiempo de propagación en hueso (t_1 en la figura 4.5) de espesor l y así calcular la velocidad efectiva en hueso v_{ef} por medio de la ecuación [54]

$$v_{ef} = \frac{lv_w}{l - v_w(t_2 - t_1)} \quad (4.1)$$

4.3.2 Velocidad de Fase

La velocidad de fase definida por la ecuación (1.1) se refiere a la dependencia de la velocidad respecto de la frecuencia. Para el caso de un medio bifásico, el cálculo de la velocidad de fase se puede generalizar por el principio de substitución [22], como se muestra en la figura 4.6, obteniendo

$$c(\omega) = \frac{c_w}{1 + \frac{c_w \Delta\phi(\omega)}{\omega l}}, \quad (4.2)$$

donde $\Delta\phi(\omega) = \phi_{hueso} - \phi_{agua}$ es la diferencia de fases de las señales recibidas con y sin la muestra evaluada, y c_w es la velocidad del sonido en el medio de referencia, que en caso del presente estudio es el agua.

La diferencia de fases fue calculada al obtener la transformada rápida de Fourier (FFT) de las señales con y sin el material, posteriormente se calculó la fase dada por

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{Im(A)}{Re(A)} \right),$$

donde A es la transformada rápida de Fourier del pulso (S). Las rutinas predefinidas para calcular la función arcotangente sólo considera el intervalo $[-\pi, \pi]$, esto origina que el espectro se discontinuo. Una forma de corregir la fase es mediante la siguiente operación

$$\phi_{corregida}(f) = \phi(f) \pm 2k\pi,$$

donde k es un entero [54].

Para ilustrar la corrección de fase, suponer que la fase (teórica) de la señal adquirida es la mostrada en la

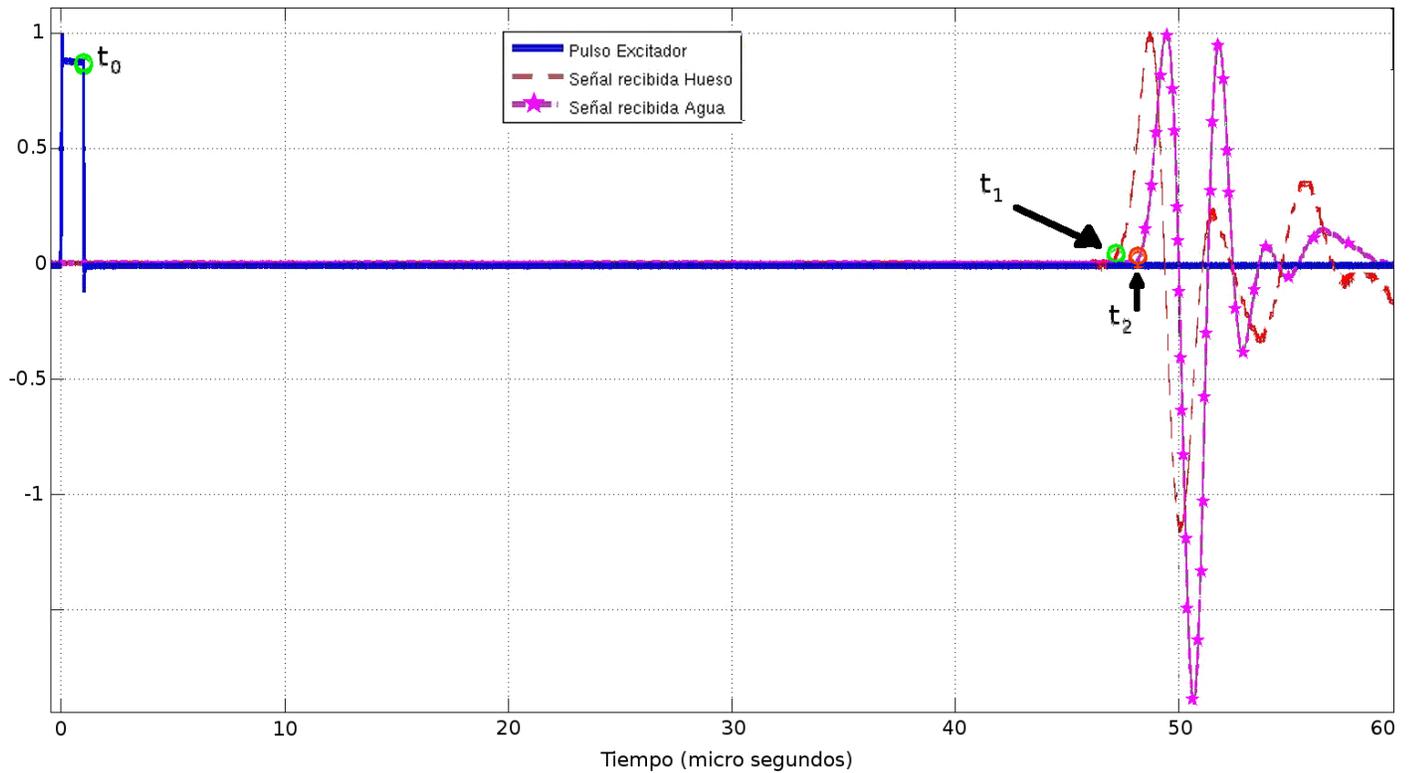


Figura 4.5: Cálculo de la velocidad del sonido en agua y velocidad efectiva de propagación en hueso. t_0 es el final del pulso excitador, t_1 es el tiempo de llegada del pulso propagado en hueso, t_2 es el tiempo de llegada del pulso propagado en agua.

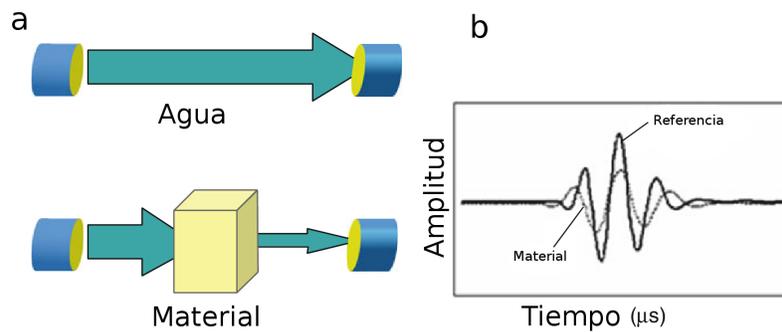


Figura 4.6: (a) principio de sustitución, (b) ejemplo de las formas de onda obtenidas en el agua (línea sólida) y a través del material (línea discontinua) [44].

figura 4.7(a), entonces su fase no corregida (ϕ) se muestra en la figura 4.7(b). En las figuras 4.7(c)-4.7(e) se ilustra el proceso de corrección de fase, hasta obtener $\phi_{corregida}$ mostrada en la figura 4.7(f).

Se usó la ecuación (4.2) y la velocidad del sonido calculada en la sección §4.3.1.

La implementación de este algoritmo se muestra en el cuadro de código C.3.

Finalmente se realizó un ajuste lineal a las curvas obtenidas para poder obtener una medida de la dispersión en cada dirección.

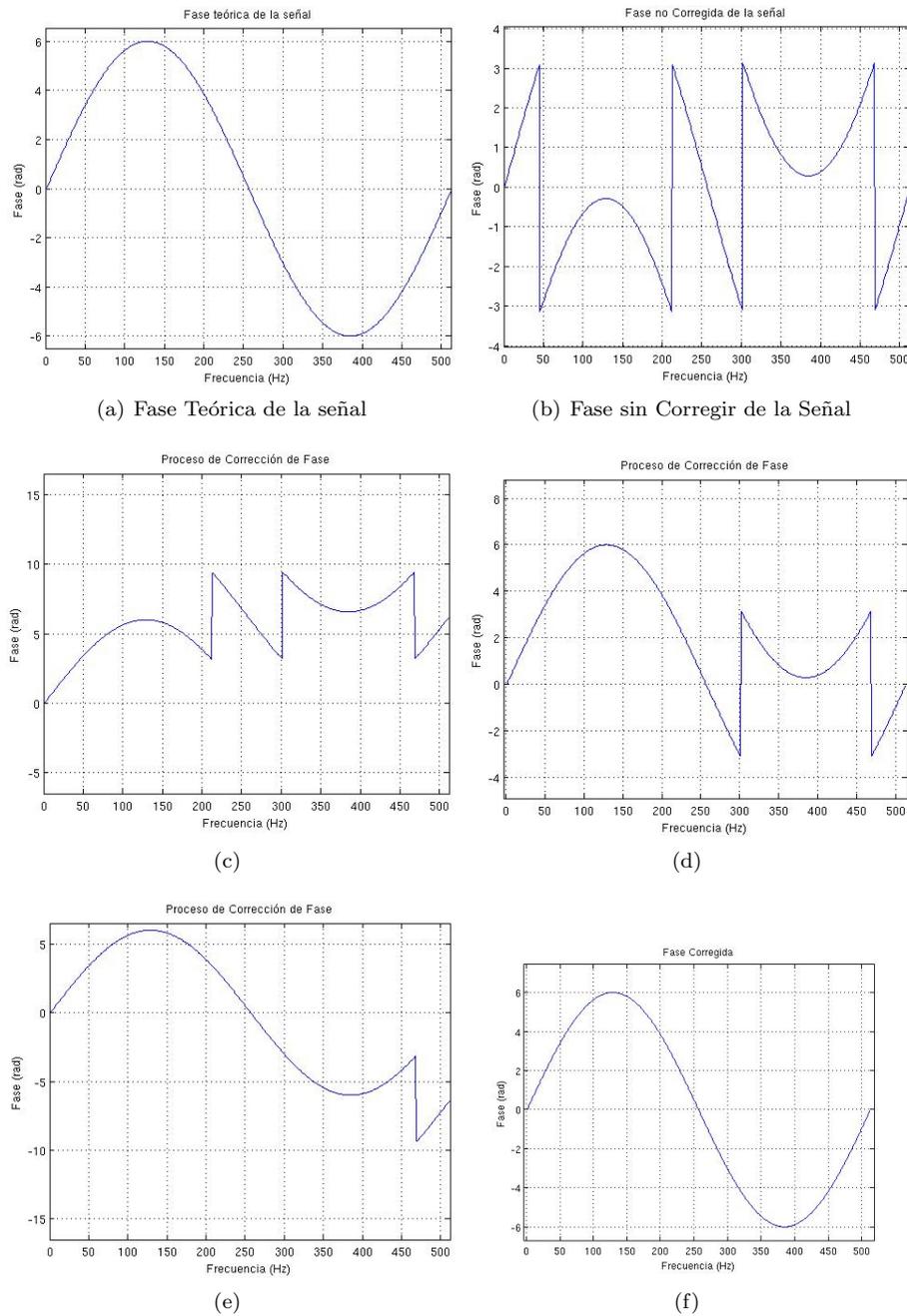


Figura 4.7: Corrección de la fase mostrada en la figura (b): (c)-(e) se suma (resta) un múltiplo entero de 2π cuando la distancia entre dos puntos consecutivos de la señal es menor (mayor) que $-\pi$ (π).

4.3.3 Atenuación

La atenuación fue calculada directamente de la ecuación (1.6) y posteriormente se realizó un ajuste lineal por mínimos cuadrados a las curvas de atenuación obtenidas, ya que la pendiente de éste se denomina *Atenuación Ultrasónica de Banda Ancha* (BUA o nBUA) y se relaciona con la orientación trabecular, aunque su papel no

es totalmente claro, ya que en algunos trabajos se muestra que la BUA presenta valores altos en la dirección principal y bajos perpendicularmente a esta [48, 50]; mientras que en otros se pone en duda que el hecho que los valores de la BUA varíen significativamente en las tres direcciones no debe tomarse como evidencia suficiente que está asociada con la estructura ósea [11]. El algoritmo usado se muestra en el cuadro de código C.4.

4.4 Comportamiento Tiempo-Frecuencia de las Ondas de Biot

Las ondas rápida y lenta tienen la característica que son de distinto contenido frecuencial, por lo que las señales ultrasónicas adquiridas fueron representadas en el espacio wavelet de tal manera que permita resaltar el contenido energético respecto al tiempo y frecuencia y verificar la dirección preferencial de las trabeculas. El kernel de wavelet elegido fue la onduleta Mexican Hat (Apéndice B) por la capacidad que tiene de detectar pequeños cambios en el ancho de banda de la señal analizada y verificar si las ondas rápida y lenta están sobrelapadas en un tiempo dado. Para generar la representación tiempo -frecuencia se usaron rutinas predefinidas, como se muestra en el cuadro de código C.5.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Arreglo Experimental: Distancia entre Transductores

Se adquirieron y promediaron 1024 señales de los eventos observados con el fin de disminuir la amplitud del ruido blanco. Para disminuir el posible traslape de las ondas longitudinales de Biot se determinó la distancia óptima entre la muestra y el receptor. Para cada dirección del hueso trabecular y distintas distancias entre elementos ultrasónicos se adquirieron las señales como se muestran en las figuras 5.1 a 5.3. Como se puede observar, las señales adquiridas en las direcciones Y y Z únicamente muestran versiones retrasadas y atenuadas una con respecto de la otra, y en la dirección X se muestra que el pulso de máxima amplitud es distinto en forma y que un eco se separa al incrementar la distancia, por lo que se seleccionó trabajar con el arreglo experimental de 4 *cm* entre la muestra y el receptor (ver figura 5.4).

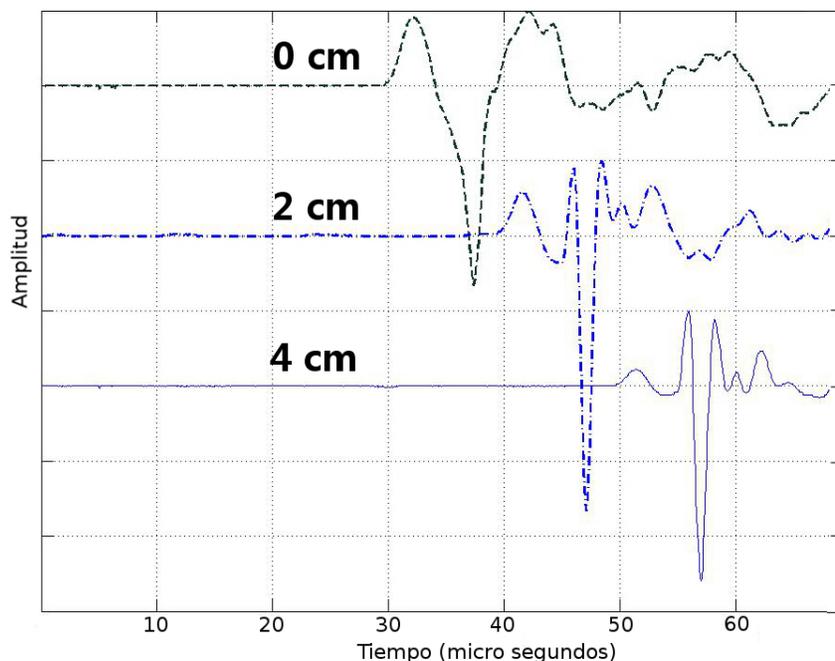


Figura 5.1: Señales obtenidas al variar la distancia entre el transductor receptor y la muestra en la dirección X . Se aprecia como a una distancia de 0 cm las ondas de Biot se encuentran traslapadas, mientras que al alejar al transductor receptor (2 cm), estas comienzan a separarse hasta poder diferenciarse (4 cm).

5.2 Velocidad Efectiva de Propagación

Se obtuvieron pulsos propagados por la muestra en las tres direcciones sin y con el espécimen por medio de la técnica de sustitución (ver §4.3.1). Los pulsos propagados en la muestra en las tres direcciones de evaluación se muestran en la figura 5.4. Posteriormente se determinó la velocidad de propagación acústica en el hueso trabecular como se enunció en 4.3.1.

Las velocidades obtenidas se enlistan en la tabla 5.1. Se tomó como criterio para definir las ondas rápida y lenta como el primer pulso recibido y el pulso con mayor amplitud, respectivamente [10].

Dirección	Ondas de Biot	Vel. Onda Rápida (Vel. del Frente) [m/s]	Vel. Onda Lenta [m/s]
X	Si	1743.83	1,378.42
Y	No	1689.15	–
Z	No	1757.06	–

Tabla 5.1: Caracterización temporal de los pulsos recibidos

5.3 Velocidad de Fase y Atenuación

Se calculó la transformada de Fourier de los pulsos en las tres diferentes direcciones del hueso y posteriormente se determinó la velocidad de fase y atenuación como se enunció en el capítulo 4.

Las gráficas de velocidad de fase y atenuación en las tres diferentes direcciones se muestran en las figuras 5.5(a), 5.5(b) y 5.6, respectivamente.

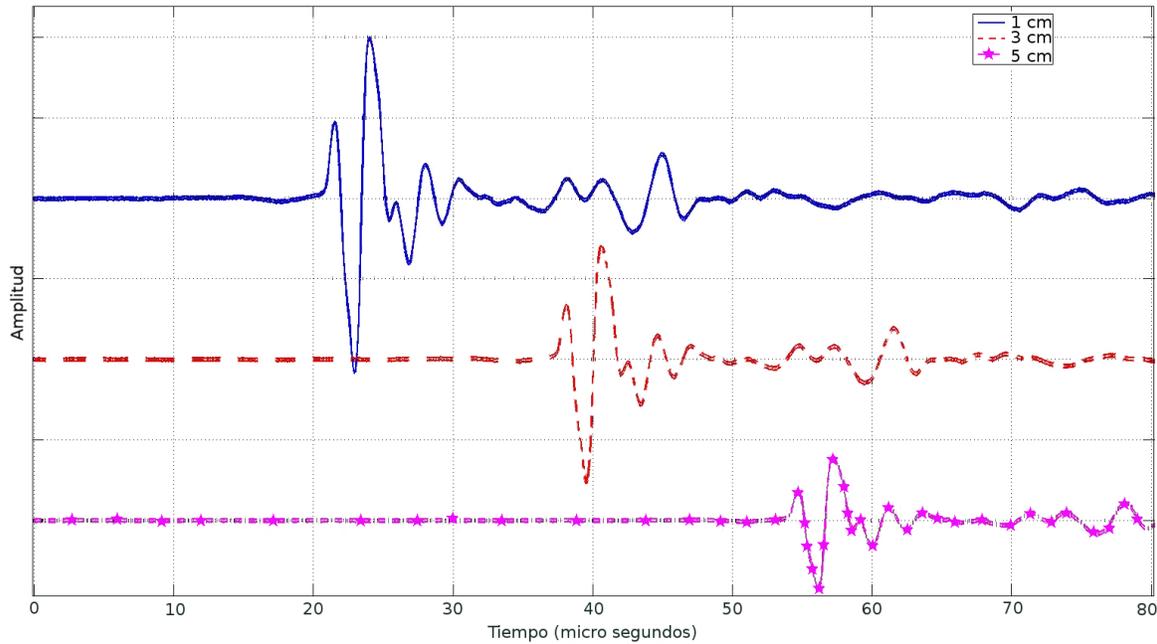


Figura 5.2: Señales obtenidas al variar la distancia entre el transductor receptor y la muestra en la dirección Y . Al variar la distancia entre la muestra y el transductor receptor sólo se aprecia un cambio en el tiempo de llegada del pulso y la amplitud de este. La forma de onda es preservada.

Los ajustes lineales de dichas curvas se resumen en la tabla 5.2. En la figura 5.7 se muestra un ejemplo de estos ajustes lineales, donde la curva discontinua muestra la velocidad de fase en dirección X para frecuencias menores que 1MHz y la azul muestra el ajuste lineal de ésta. La ecuación que define el ajuste es $y = -3490f + 1759.41$.

Dirección	Velocidad de Fase [m/s]		Atenuación [dB/m]	
	Bajas Frecuencias	Altas Frecuencias	Bajas Frecuencias	Altas Frecuencias
X	$-3490f + 1759.41^*$	$-2.32f + 1482.24^*$	$34.19f - 26.524^{**}$	$-0.495f - 3.062^{**}$
Y	$-344f + 1716.29^*$	–	$112.50f - 64.87^{**}$	–
Z	$-367f + 1792.72^*$	–	$45.69f - 29.21^{**}$	–

Tabla 5.2: Velocidad de fase y atenuación de la muestra en las tres direcciones. Los intervalos de bajas y altas frecuencias corresponden a $f < 1\text{MHz}$ y $1\text{MHz} \leq f < 2\text{MHz}$, respectivamente. *La pendiente del ajuste lineal tiene unidades $\left[\frac{m}{s\text{ MHz}}\right]$. **La pendiente del ajuste lineal tiene unidades $\left[\frac{dB}{m\text{ MHz}}\right]$.

Como se puede observar en la tabla 5.2, la pendiente del ajuste lineal de la atenuación de la onda lenta es despreciable comparada con la de la onda rápida y este fenómeno también se observa en la pendiente de la velocidad de fase. También se aprecia que la pendiente del ajuste lineal de la velocidad de fase es negativa. Este comportamiento de la velocidad de fase indica que el medio es dispersivo en el sentido definido en la sección §1.1.3, más aún, dado que la pendiente es negativa, se dice que el hueso presenta dispersión negativa y aunque se han hecho estudios que tratan de explicar este comportamiento ([20,36,41]), aún no existe consenso acerca de las causas físicas detrás de esto. Estos resultados se encuentran en acuerdo con ensayos realizados anteriormente [37,48], sin embargo los mecanismos responsables por estos fenómenos aún no son claros [48].

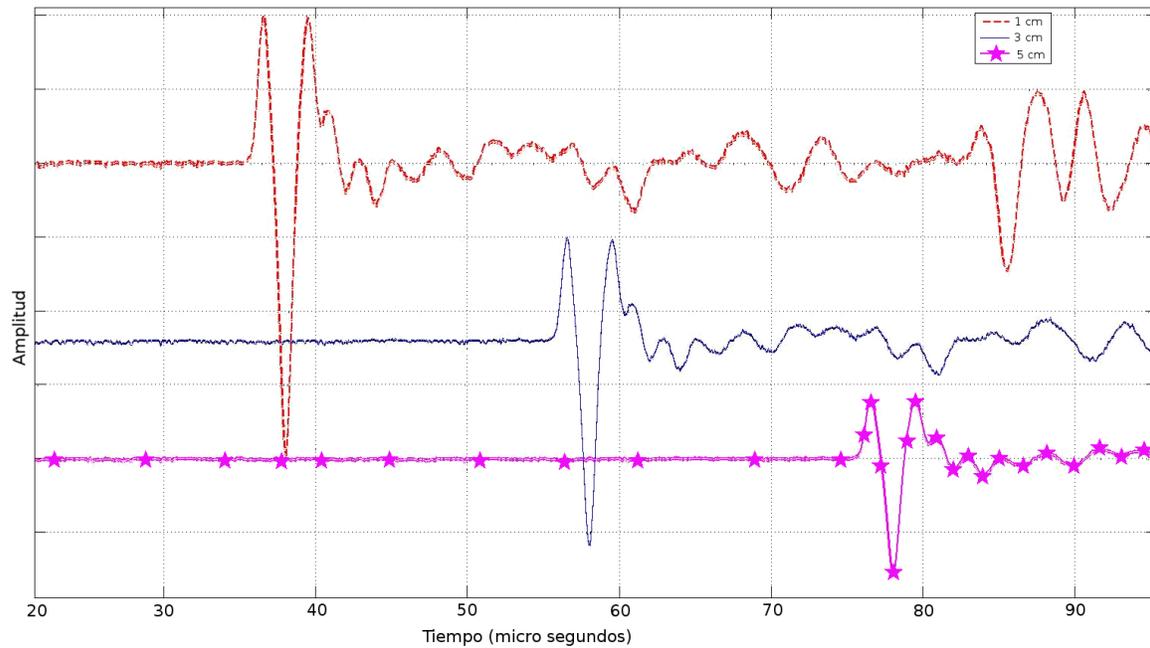


Figura 5.3: Señales obtenidas al variar la distancia entre el transductor receptor y la muestra en dirección Z . Al variar la distancia entre la muestra y el transductor receptor sólo se aprecia un cambio en el tiempo de llegada del pulso y la amplitud de este. La forma de onda es preservada.

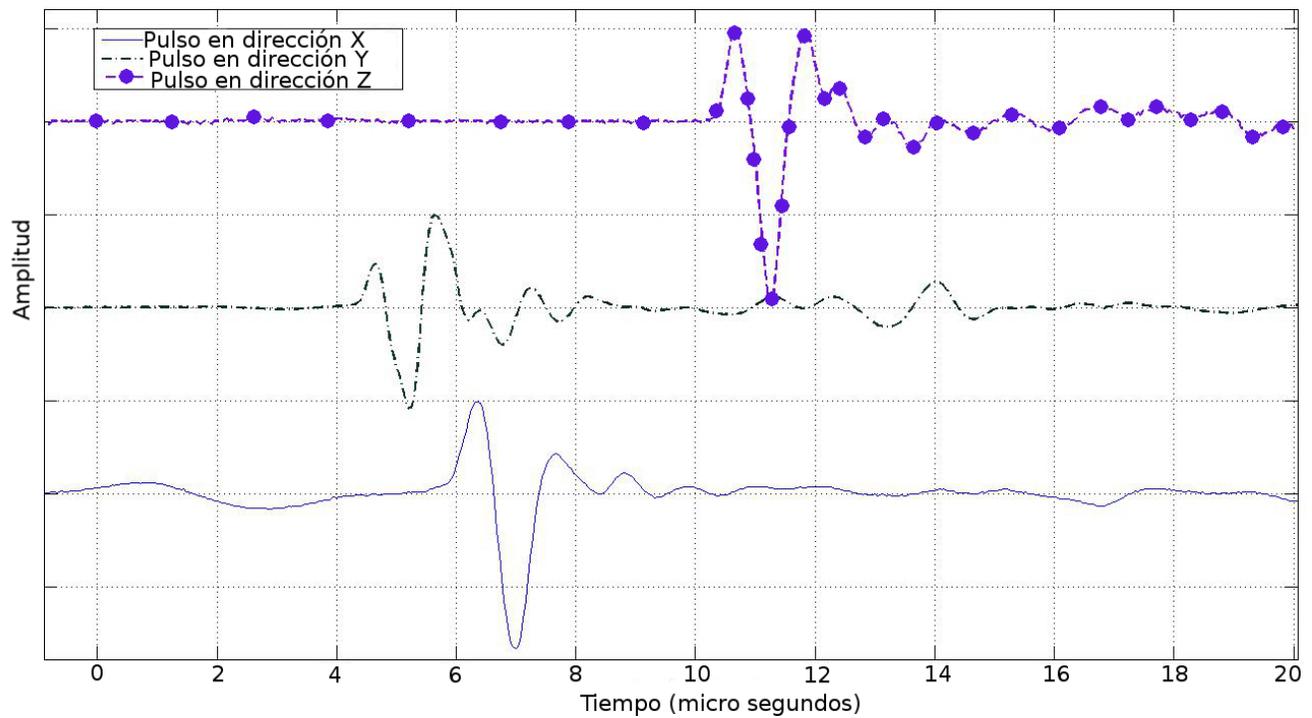


Figura 5.4: Pulsos propagándose por la muestra en las direcciones X , Y Z .

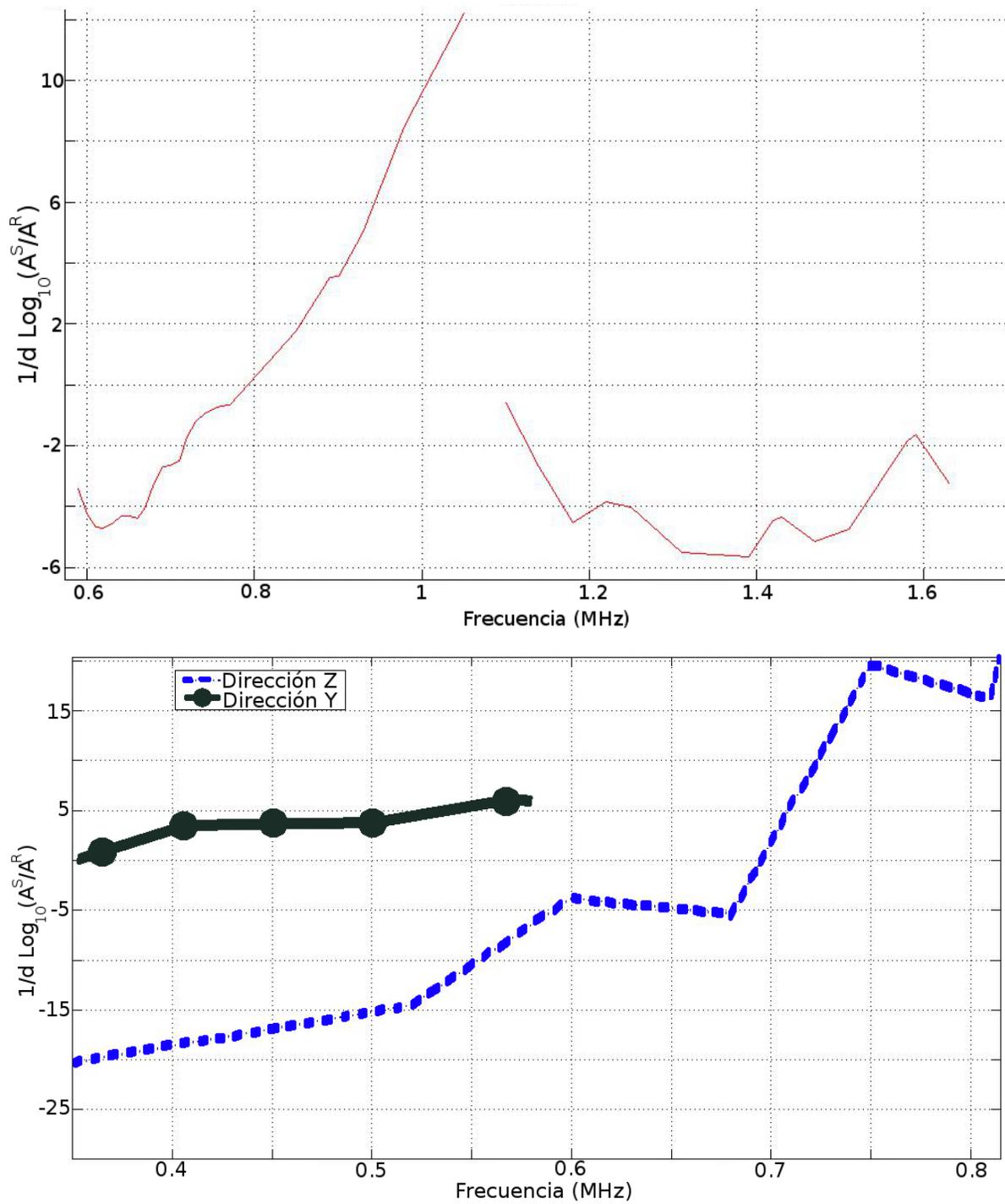


Figura 5.5: Atenuación de un pulso ultrasónico al pasar por la muestra. (a) Propagación en dirección X . (b) Propagación en direcciones Y , Z .

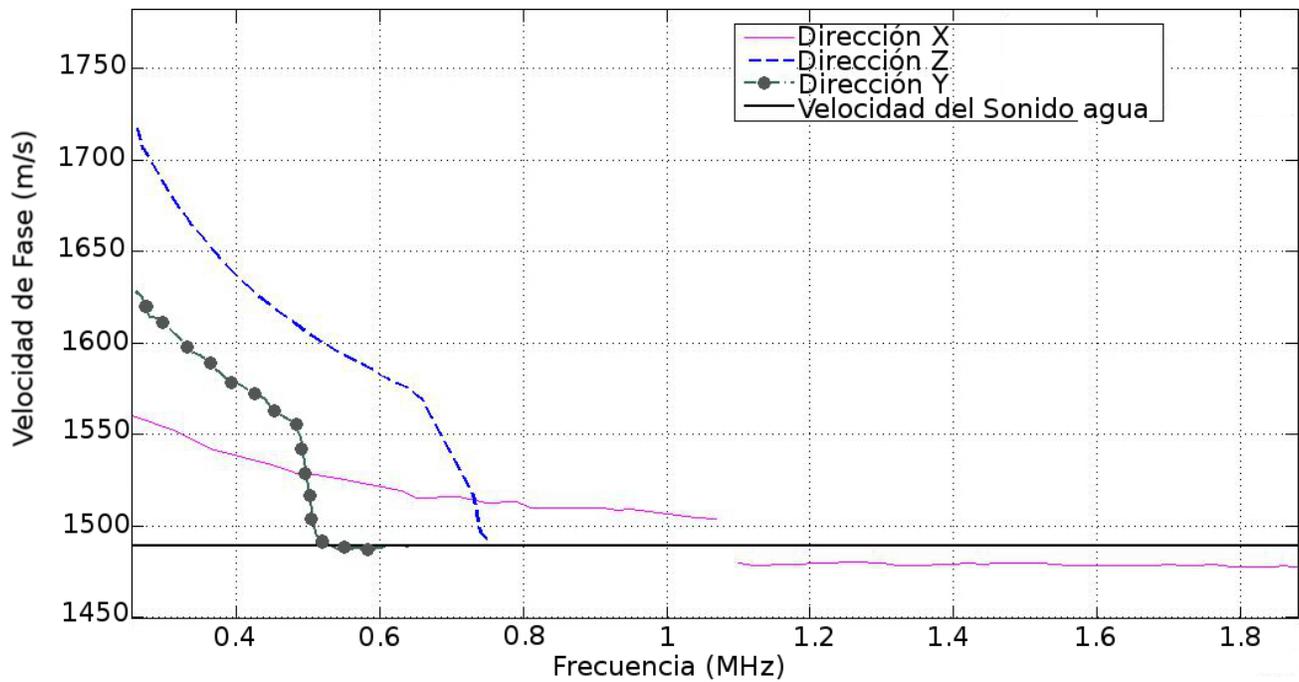


Figura 5.6: Velocidad de Fase del pulso al propagarse en las tres direcciones de la muestra.

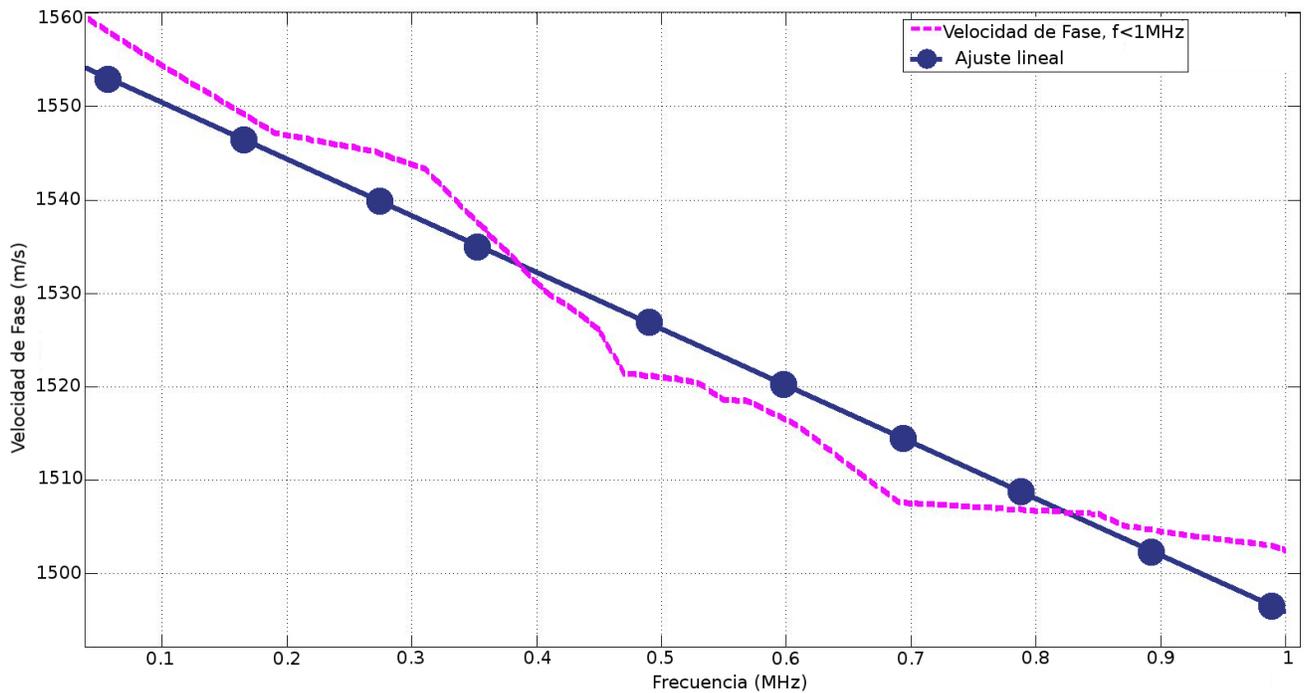


Figura 5.7: Ejemplo de la obtención del ajuste lineal de la velocidad de fase en dirección X para frecuencias menores que 1 MHz.

5.3.1 Velocidades de Fase y Efectiva del Hueso Trabecular

Por medio de la ordenada al origen del ajuste lineal en las velocidades de fase se calculó la diferencia porcentual entre las velocidades de los pulsos obtenidas en la caracterización temporal y se obtuvo que difieren en un rango de 0.85-5.95 por ciento. Esta información se muestra en la tabla 5.3.

Dirección	Velocidad de Fase (V_φ) [m/s]	Velocidad de Propagación (V_p) [m/s]	Error Porcentual $100 \frac{ V_p - V_\varphi }{V_p}$
X	1759.41; 1482.24	1743.83; 1378.42	0.89; 5.95
Y	1716.29	1689.15	1.60
Z	1793.72	1757.06	2.08

Tabla 5.3: Comparación entre la ordenada al origen del ajuste lineal de la velocidad de fase (V_φ) y la velocidad de propagación (V_p) de los pulsos propagados en las tres direcciones.

5.4 Representación Tiempo-Frecuencia de los Pulsos Ultrasónicos

Se aplicó el algoritmo de transformada wavelet continua como se enunció en §4.4 y se obtuvieron los escalogramas mostrados en las figuras 5.8, 5.9 y 5.10. Se aprecia que sólo en la dirección X se presenta un fenómeno de baja frecuencia (onda rápida) y posteriormente ondulaciones de alta frecuencia (onda lenta), mientras que en las direcciones Y , Z sólo se tienen ondulaciones de alta frecuencia.

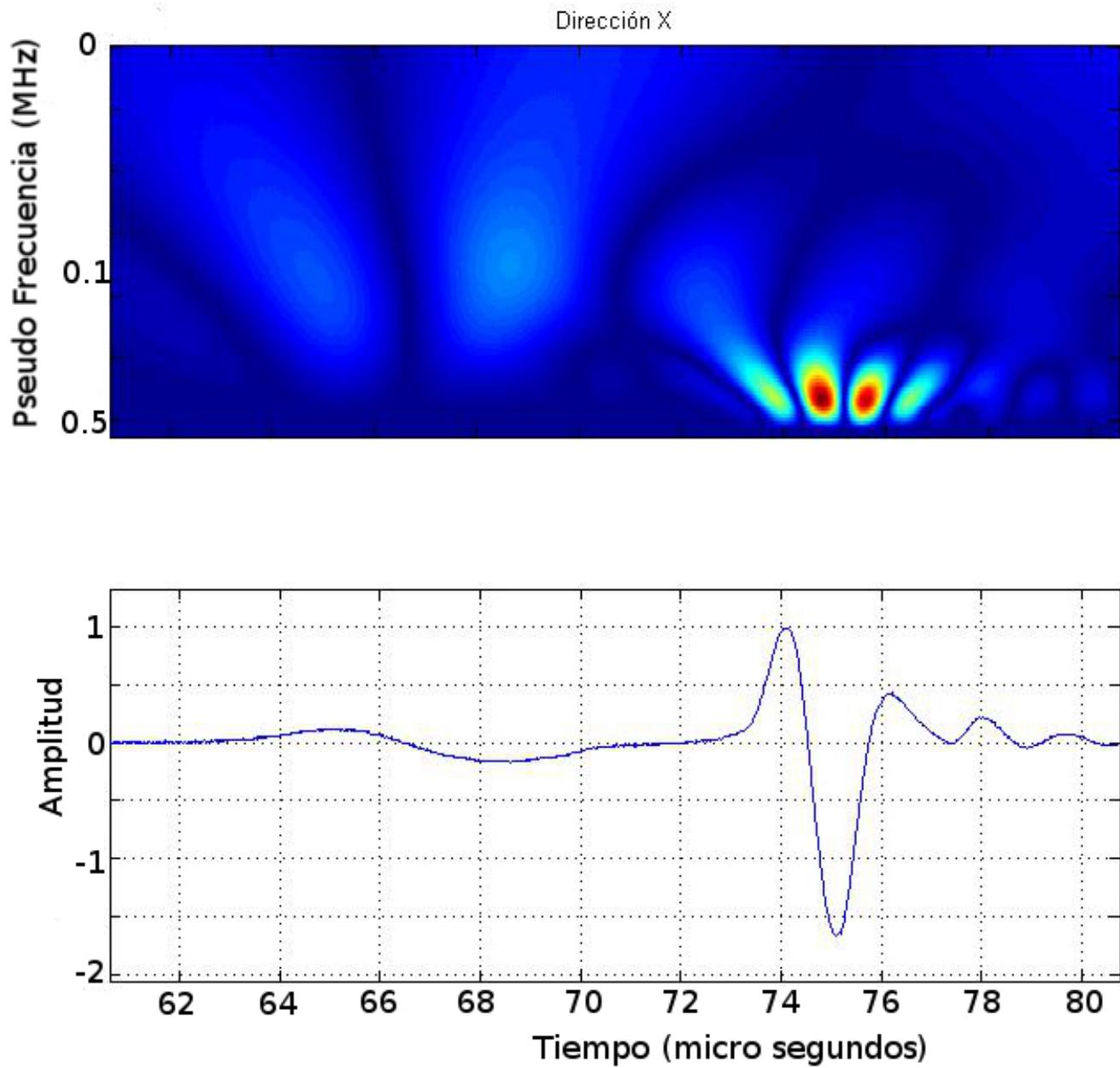


Figura 5.8: Escalogramas de la transformada wavelet aplicada a las señales obtenidas en la dirección X.

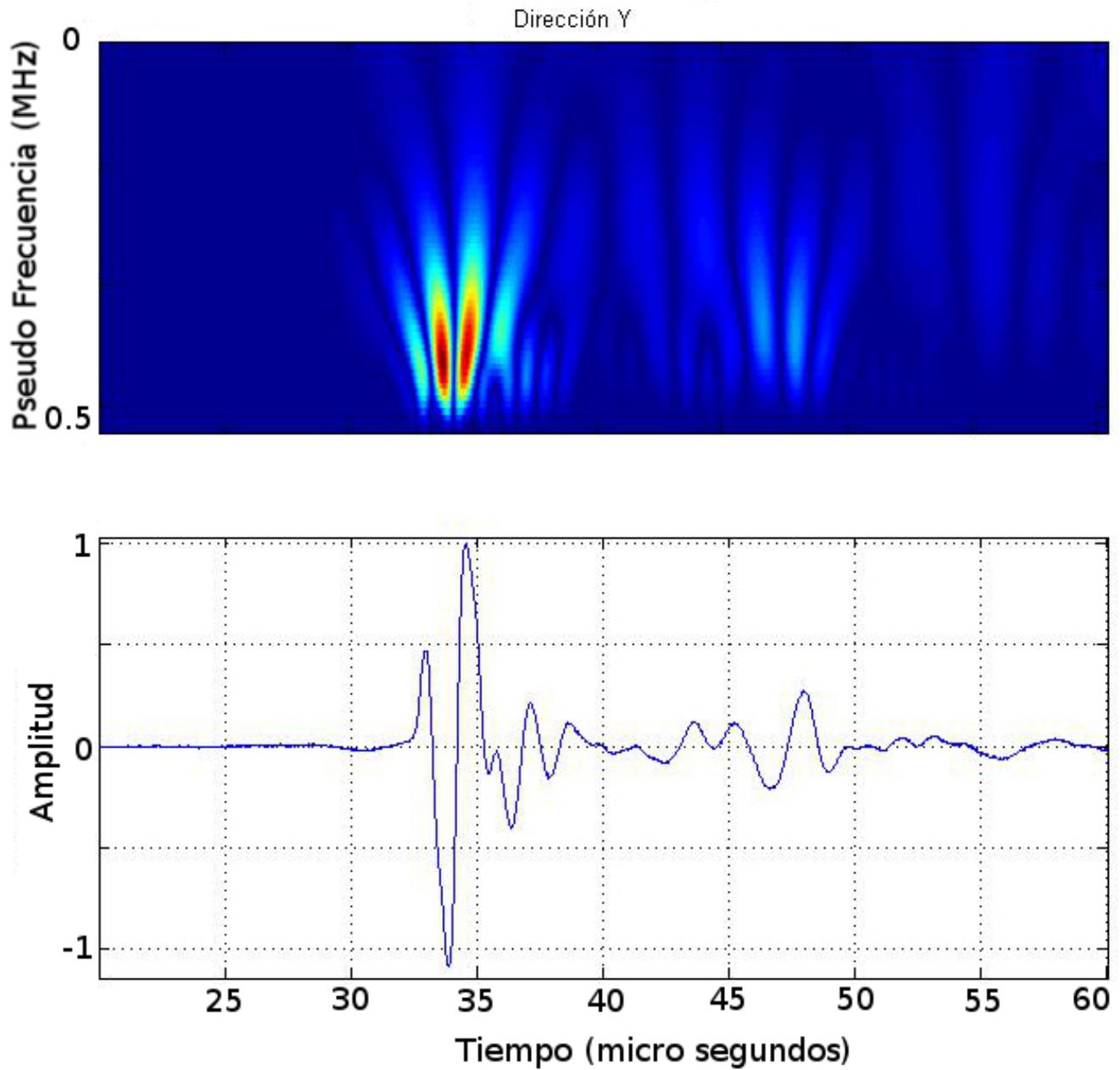


Figura 5.9: Escalogramas de la transformada wavelet aplicada a las señales obtenidas en la dirección Y.

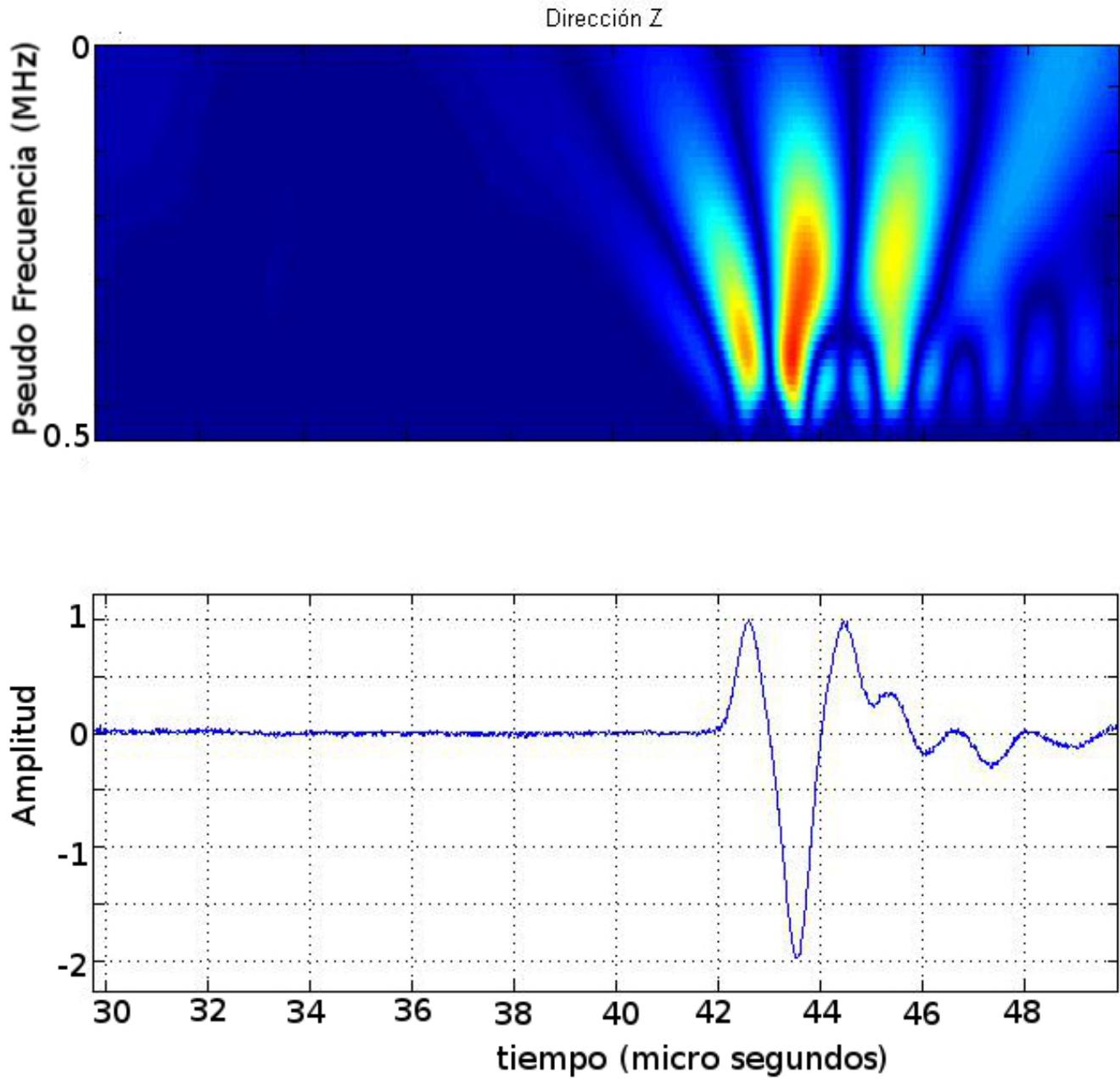


Figura 5.10: Escalogramas de la transformada wavelet aplicada a las señales obtenidas en la dirección Z.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió la teoría de Biot así como su aplicación al hueso trabecular como una aproximación para entender la propagación acústica en este medio bifásico y que posteriormente pueda medir el cambio de densidades óseas que permitan el diagnóstico de la osteoporosis.

Se concluye el presente trabajo con los siguientes puntos:

- * Se desarrolló el protocolo experimental para caracterizar las ondas de Biot usando ultrasonido en transmisión.
 1. Este protocolo precisó que el emisor fuese un transductor enfocado debido a que la onda rápida en la dirección X se traslapaba con el ruido eléctrico al usar un transductor plano. Además, como se menciona en [44,52], el uso de transductores enfocados permite que la resolución espacial sea mayor comparada con los transductores planos.
 2. Se excitó al transductor emisor con un pulso cuadrado, de frecuencia central igual a 500 kHz y una amplitud de 20 Vpp ya que de los posibles pulsos que se podían obtener con el Tektronix AFG3021, a saber cuadrados, sinusoidales, rampas y sinc, sólo con el primero se podían detectar las ondas de Biot.
- * Mediante los ensayos ultrasónicos se determinó que la dirección X es donde la estructura trabecular se alinea principalmente ya que es posible detectar la separación de las ondas de Biot.
- * Se determinó que las ondas de Biot, rápida y lenta en dicha dirección se propagan a 1743.83 m/s y 1378.42 m/s , respectivamente.
Por otro lado se observó que en las direcciones Y y Z no se presenta la propagación de las ondas de Biot. La velocidad de propagación de los pulsos ultrasónicos en esas direcciones fue de 1689.15 m/s y 1757.06 m/s , respectivamente.
- * Al analizar las pendientes de los ajustes lineales de las curvas de atenuación se determinó que en la dirección X a frecuencias menores que 1.1 MHz se tiene la menor atenuación por unidad de distancia (34.19 dB/m MHz), mientras que en la dirección Y se tiene la mayor (112 dB/m MHz), finalmente la dirección Z presenta un valor intermedio (45.69 dB/m MHz).
- * Los valores anteriormente mencionados se reflejan en las curvas de velocidad de fase ya que en la dirección X la dispersión negativa se extiende hasta 1.1 MHz , mientras que en las direcciones Y y Z se extiende en un rango de frecuencias bajo ($0 < V_\varphi < 0.5\text{ MHz}$) e intermedio ($0 < V_\varphi < 0.8\text{ MHz}$), respectivamente.
- * Aunque en las direcciones Y y Z no se detectan ondas de Biot, se tiene dispersión negativa.

- * De los intervalos mencionados y los valores de atenuación obtenidos, se infiere que para que se presenten las ondas de Biot en un medio no basta únicamente con que sea dispersivo y presente una estructura porosa como la del hueso, sino además la atenuación por unidad de distancia debe ser menor a 45.69 dB/m MHz .
- * Con respecto al análisis wavelet aplicado a las ondas observadas en la dirección X se pudo observar que la onda rápida presenta bajas frecuencias ($0.3 - 1.1 \text{ MHz}$) que se propagan a velocidades altas ($3490f + 1759.41 \text{ (m/s)}$); mientras que la onda lenta contiene altas frecuencias ($1.2 - 2 \text{ MHz}$) que se propagan a $-2.32f + 1482.24 \text{ (m/s)}$.
- * Este trabajo representa el inicio de ensayos ultrasónicos en hueso en el laboratorio de Acústica de la facultad de ciencias de la UNAM y se espera que se pueda seguir con esta línea de trabajo.

6.1 Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se desea relacionar la onda rápida y lenta con la densidad del hueso y otras propiedades físicas enunciadas en el apéndice A y posteriormente ser capaces de realizar la reconstrucción de los parámetros, esto es, a partir de una señal proveniente de hueso y una de referencia, poder obtener los parámetros estructurales del mismo. Esta dirección no ya ha empezado a ser explorada [1, 3, 28], sin embargo aún queda trabajo por hacer, por ejemplo, combinar el análisis bayesiano y poder estos resultados con los obtenidos en [1, 3].

Se han estudiado algunos de los aspectos fundamentales de los UNDT y se han aplicado el estudio del hueso trabecular en particular a la caracterización de las ondas de Biot en la dirección X y los pulsos propagados en las otras direcciones.

Apéndice A

Determinación Ultrasónica de los Parámetros de Biot

Para poder relacionar las velocidades de las ondas rápida y lenta con las propiedades acústicas y mecánicas del phantom es necesario conocer las características del mismo, así como del fluido que satura a los poros, en particular los parámetros necesarios son:

- L, Longitud de la muestra [m],
- ρ_s Densidad del material sólido [$Kg\ m^{-3}$],
- ρ_f Densidad del fluido saturante [Kgm^{-3}],
- η Viscosidad del fluido [$Kg\ ms^{-1}$],
- c_0 Velocidad del sondo en el fluido [ms^{-1}],
- K_f Módulo de compresibilidad del fluido [MPa],
- K_s Módulo de compresibilidad del sólido [MPa],
- ϕ Porosidad del material sólido [%],
- α_∞ Tortuosidad,
- N Módulo de corte del compuesto [MPa],
- K_b Módulo de compresibilidad del marco esquelético [MPa],

Sin embargo es importante notar que si se desea estudiar las predicciones de los modelos modificados de Biot, en los que se toman en cuenta las pérdidas térmicas y por viscosidad, es necesario medir también dos parámetros adicionales, denominados longitudes características:

- Λ Longitud característica de viscosidad [μm],
- Λ' Longitud característica térmica [μm].

De los trece parámetros citados, los primeros siete pueden consultarse en la bibliografía o medirse sin gran dificultad, por ende este apéndice se dedicará a detallar los métodos para determinar los cuatro parámetros restantes y por completez también se detallará la metodología para determinar las longitudes características.

A.0.1 Porosidad y Tortuosidad

Dos parámetros importantes que aparecen en teorías de propagación del sonido en materiales porosos son la porosidad y la tortuosidad. Se define a la porosidad (ϕ) como la fracción relativa por volumen de aire contenido en los poros del material, dicho de otro modo: el radio entre el volumen del fluido que satura el material y el volumen del material. Es una cantidad adimensional que puede variar desde 0 (material no poroso) hasta 1

(únicamente el fluido). A diferencia de otros parámetros incluidos en la descripción de varios fenómenos que ocurren en la propagación acústica en medios porosos en rangos de alta frecuencia tal como la tortuosidad, longitud característica de viscosidad y longitud termal característica, o en el rango de baja frecuencia tal como resistividad fluida y permeabilidad térmica, la porosidad es un parámetro clave que juega un papel importante en la propagación a todas las frecuencias [28]. Como tal, es altamente deseable de medir este parámetro con una buena precisión [1].

En 1942 Beranek describió un aparato (porosímetro) usado para medir la porosidad de materiales porosos [1]. Este dispositivo está basado en la ecuación de estado para gases ideales a temperatura constante (ley de Boyle-Mariotte). La porosidad puede ser determinada al medir el cambio en la presión de aire que ocurre al cambiar un volumen conocido de la cámara que contiene la muestra. En el aparato de Beranek ambos cambios son monitoreados usando un manómetro con forma de U [28].

También existen técnicas en la cuales se llena el medio poroso con agua (usualmente en estudios geofísicos) o bien con mercurio. Sin embargo, para muchos materiales, la introducción de líquidos es inapropiada [3].

La tortuosidad (α_∞) es un parámetro importante que interviene en la descripción de la interacción inercial entre el fluido y la estructura en el material poroso en el rango de altas frecuencias [1]. Este parámetro traduce el hecho que el fluido saturante (que se comporta como un fluido incompresible ideal) debe esquivar las partes sólidas de la estructura que se presentan en su camino. Es decir, caracteriza los efectos inerciales [28]. Dicho de otro modo: indica la complejidad de las aperturas en el material poroso. Mientras que la estructura interna se vuelve más compleja, la tortuosidad se vuelve más alta. En la figura A.1 se esquematiza el como la estructura porosa influye en la transmisión de la onda en el agua y por ende en la determinación de la tortuosidad.

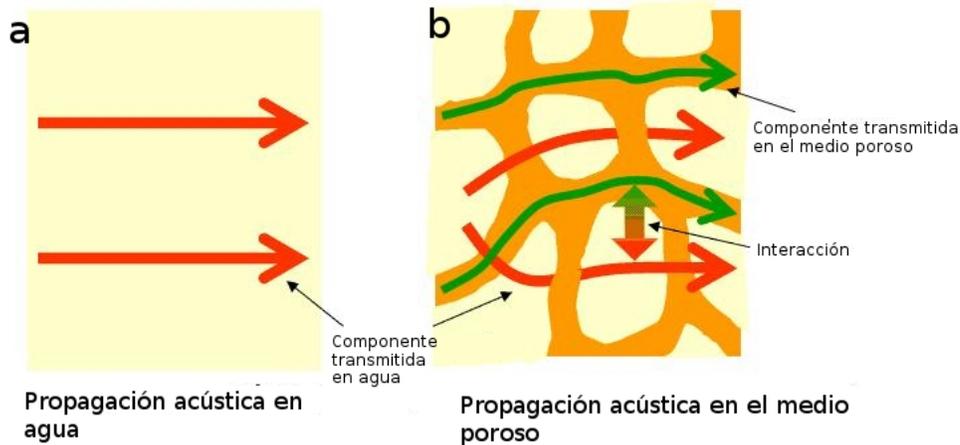


Figura A.1: (a) propagación acústica en agua y (b) en el material poroso saturado con agua. La tortuosidad se relaciona con la componente transmitida en agua.

Clásicamente la tortuosidad es determinada por mediciones eléctricas al relacionarla con las resistividades eléctricas de un fluido (r_f) y la de el material saturado con el mismo fluido (r_c) por medio de la relación

$$\alpha_\infty = \phi \frac{r_c}{r_f},$$

Sin embargo este método no es realizable para todo tipo de muestras ya que la relación anterior es válida únicamente para los casos en que el material poroso sea no conductor [3, 28].

Por lo dicho anteriormente es preferible un método en que se elimine la restricción que el material sea no conductor [3]. En 2003 Z. E. A. Fellah y colaboradores [3] reportaron un método para medir la porosidad y tortuosidad a partir de la medición de la onda acústica reflejada por un bloque de material poroso a incidencia oblicua, el esquema del arreglo usado se muestra en la figura A.2. Debido a la alta atenuación en este tipo de

medio, la onda reflejada por el material poroso puede ser aproximada por la onda reflejada en la primera interfaz, como consecuencia existe una relación simple entre la porosidad, tortuosidad, ángulo de incidencia y onda reflejada en el dominio temporal; en particular se muestra que la amplitud del espectro frecuencial de la onda reflejada es esencialmente el mismo que el de la onda incidente excepto por el factor $r(t, \theta)$ cuya forma analítica es

$$r(t, \theta) = \frac{\alpha_\infty \cos \theta - \phi \sqrt{\alpha_\infty - \sin^2 \theta}}{\alpha_\infty \cos \theta + \phi \sqrt{\alpha_\infty - \sin^2 \theta}} \delta(t). \quad (\text{A.1})$$

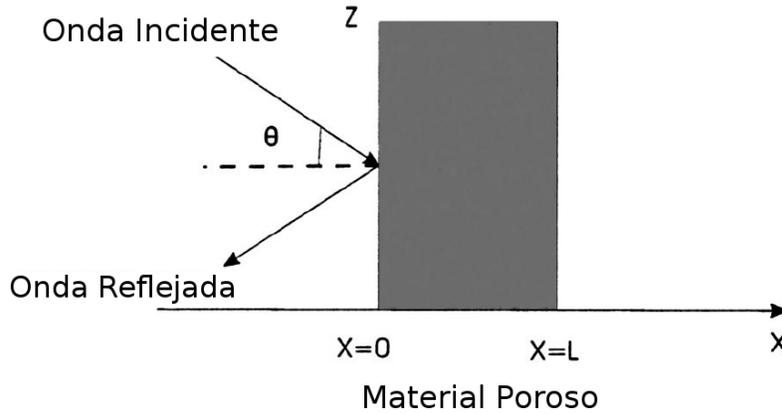


Figura A.2: Geometría del problema.

Para dos valores del ángulo de incidencia θ_1 y θ_2 , la expresión de la tortuosidad como función de los coeficientes $r_1 = r(t)|_{\theta=\theta_1}$ y $r_2 = r(t)|_{\theta=\theta_2}$ se obtiene como

$$\alpha_\infty = \frac{\left(\frac{(1-r_2)(1+r_1)\cos\theta_2}{(1+r_2)(1-r_1)\cos\theta_1} \right)^2 \sin^2\theta_1 - \sin^2\theta_2}{\left(\frac{(1-r_2)(1+r_1)\cos\theta_2}{(1+r_2)(1-r_1)\cos\theta_1} \right)^2 - 1}. \quad (\text{A.2})$$

Al conocer el valor de la tortuosidad, la porosidad puede ser determinada como función de θ_i y r_i por medio de la expresión

$$\phi = \frac{\alpha_\infty(1-r_i)\cos\theta_i}{(1+r_i)\sqrt{\alpha_\infty - \sin^2\theta_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.3})$$

Por tanto dichos parámetros pueden ser determinados en el mismo ensayo y con similar precisión a la de los ángulos θ_1 y θ_2 .

Para corroborar este modelo, en la figura A.3 se muestran los espectros de dos señales reflejadas por una espuma plástica con un grosor de 4.1 cm, $\phi = (98 \pm 2)\%$ ¹, $\alpha_\infty = 1.06 \pm 0.08$ para dos ángulos de incidencia

¹Medida con porosímetro

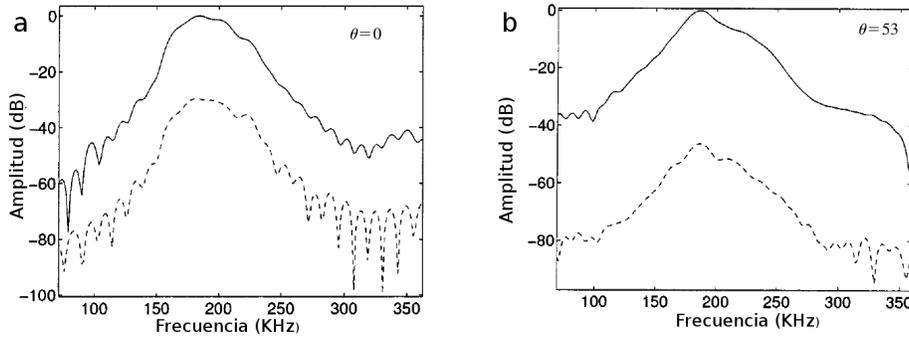


Figura A.3: Espectro de la señal incidente (línea sólida) y espectro de la señal reflejada (línea discontinua) para un ángulo de incidencia (a) 0° y (b) 53° [3].

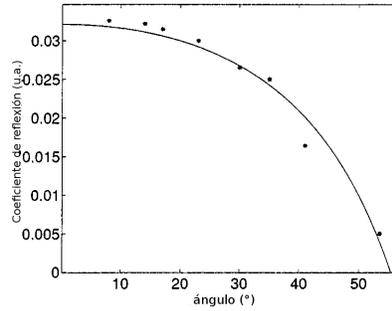


Figura A.4: Comparación entre la curva teórica de ángulo vs. coeficiente de reflexión para $\alpha_\infty = 1.07$ y $\phi = 97\%$ y los datos experimentales para la espuma plástica [3].

diferentes. Mientras que por este método se obtuvieron los valores $\phi = (97 \pm 1)\%$, $\alpha_\infty = 1.07 \pm 0.09$. En la figura A.4 se muestra una comparación entre los datos teóricos al usar la ecuación (A.1) con los valores $\phi = 97\%$, $\alpha_\infty = 1.07$; se puede apreciar que los valores experimentales siguen la misma tendencia que los valores teóricos. En la figura A.5 se comparan las señales experimental y teórica para la misma espuma plástica y un ángulo de incidencia de 17° . Se aprecia que la diferencia entre la señal reflejada simulada y la señal experimental reflejada es relativamente débil lo que conduce a la conclusión de que los valores de la tortuosidad y porosidad obtenidos son satisfactorios. De estos resultados se puede concluir que es ligera la diferencia entre el método propuesto por Fella y colaboradores y los métodos clásicos² con la ventaja que en una sola toma de datos se pueden obtener dos parámetros del material.

A.0.2 Longitudes Características

Al estudiar la teoría de Biot, Johnson et al. [5] introdujeron el concepto conveniente de una longitud característica de viscosidad (Λ) para la descripción del comportamiento acústico en altas frecuencias de medios porosos saturados con fluidos. Este parámetro se encuentra relacionado con la forma de las aperturas dentro del material poroso y da una medida de la pérdidas por arrastre viscoso del fluido saturador. En la figura A.6 se muestra esquemáticamente este parámetro.

Matemáticamente fue definida como $\frac{2}{\Lambda} = \frac{\int_S u^2 dS}{\int_V u^2 dV}$, donde u es la velocidad microscópica de el fluido ideal incompresible, S es área de la interfaz entre las fases sólida y el volumen V del fluido. Si bien, es matemáticamente

²1.02% para ϕ y 0.943% para α_∞

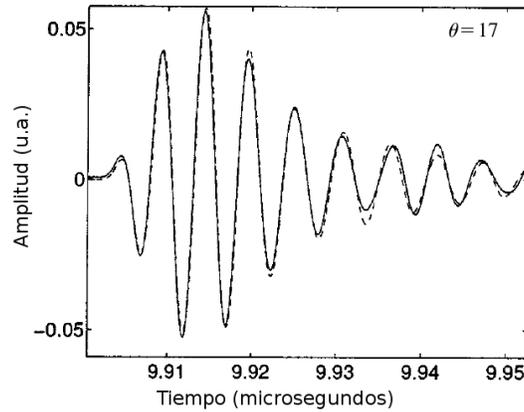


Figura A.5: Comparación entre las señales reflejadas de manera experimental (línea continua) y simulada (línea discontinua) para un ángulo de incidencia de 17° [3].

satisfactoria, no da una forma directa de medir esta longitud. Sin embargo, empíricamente se encontró que Λ se relaciona con la porosidad, tortuosidad y la permeabilidad del fluido saturante (κ) por

$$\Lambda = \frac{1}{c} \left(\frac{8\alpha_\infty \kappa}{\phi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.4})$$

donde c es un parámetro de forma cuyo orden de magnitud varía entre 0.3 y 3 para varios materiales. Además



Figura A.6: Pérdida de energía dentro del material poroso. La pérdida por calor ocurre en la parte donde la célula es estirada. La pérdida por viscosidad ocurre en la parte estrecha y ellas están relacionadas con Λ .

propusieron un método simple para determinar Λ a partir de la medición del límite de altas frecuencias de la atenuación por ciclo ($1/Q$).

Para la determinación del parámetro Λ es usual saturar el material poroso con agua, lo cual hace que los efectos térmicos puedan ser ignorados. En el límite de altas frecuencias, la atenuación por ciclo está dada por

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{Q} = \frac{\delta}{\Lambda}, \quad (\text{A.5})$$

donde $\delta = \sqrt{2\eta/\omega\rho_s}$ es la profundidad de viscosidad superficial a la frecuencia ω . Mientras que el denominador factor de calidad Q , se obtiene de la relación

Muestra	Porosidad (%)	Tortuosidad
w1	98	1.06
w2	97	1.12

Tabla A.1: Propiedades de las muestras w1 y w2 usadas en el trabajo de Leclaire et al. [6].

Muestra	c (NLF)	c' (NLF)	Λ (μm)
w1	0.56	2.6	207 ± 13
w2	0.94	2.1	153 ± 9

Tabla A.2: Parámetros obtenidos de las muestras w1 y w2 [6].

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\alpha V_\varphi}, \quad (\text{A.6})$$

siendo V_φ , α , la velocidad de fase y atenuación del sólido, respectivamente. Por lo que al graficar la curva ω vs. δQ y observar su tendencia asintótica, se obtendrá el valor numérico de la longitud característica Λ [6]. Para corroborar este método, Leclaire et al. [6] analizaron dos muestras, denotadas como w1 y w2, con la propiedades mostradas en la tabla A.1. Debido a que el estudio fue realizado con aire como líquido saturador y transductores de aire se deben considerar también las pérdidas térmicas, las cuales se encuentran contenidas en la denominada longitud característica térmica (Λ'), cuya expresión es

$$\Lambda' = c' \left(\frac{8\alpha_\infty \kappa}{\phi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.7})$$

donde c' es otro parámetro de forma cuyo valor cae en el mismo rango que su análogo para Λ y en el caso de poros cilíndricos con sección transversal circular $c = c' = 1$. Al tomar en cuenta este efecto térmico, la ecuación (A.5) toma la forma

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{Q} = \delta \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma - 1}{B\Lambda'} \right), \quad (\text{A.8})$$

donde B es la raíz cuadrada del número de Prandtl del aire y γ es el radio de calores específicos del aire. En la figura A.7 se muestra la curva frecuencia vs. $Q\delta$ para las muestras w1 y w2. Posteriormente usando la ecuación (A.8) se determinó Λ y finalmente haciendo un ajuste no lineal (NLF) se determinaron los parámetros c y c' , los resultados se muestran en la tabla A.2.

Leclaire et al. [6] concluyeron que este método, así como la corrección propuesta dan una medida de la longitud $\left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma - 1}{B\Lambda'} \right)^{-1}$ con un error del 6%. Es importante el señalar que para poder realizar este tipo de ensayo es necesario conocer de antemano el parámetro Λ' o bien usar dos fluidos saturadores, siendo uno de ellos el agua a fin de evitar las pérdidas térmicas y así obtener Λ y por comparación con los resultados en el otro fluido (aire o helio), obtener Λ' .

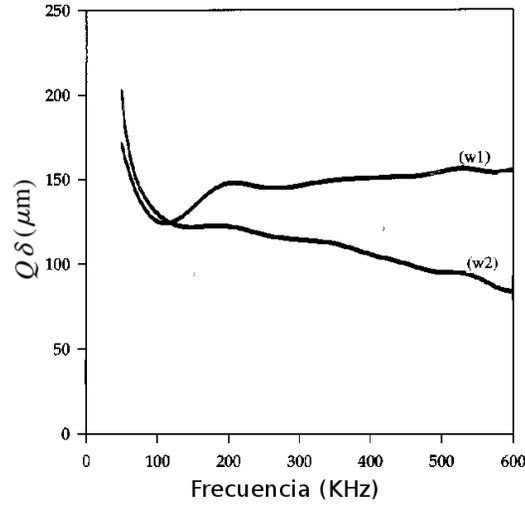


Figura A.7: Producto δQ como función de la frecuencia.

A.0.3 Módulos de compresibilidad K_b y de corte N

Al saturar la muestra porosa con aire y excitarla con transductores de contacto se encuentra que la velocidad de la onda rápida se aproxima a la velocidad en el marco como si se midiera en vacío y esta dada por la relación [7]

$$v_L = \sqrt{\frac{K_b + \frac{4}{3}N}{(1 - \phi)\rho_s}}. \quad (\text{A.9})$$

Por otro lado, el módulo de corte N puede ser evaluado independientemente al medir la velocidad de la onda transversal cuya forma empírica está dada como

$$v_T = \sqrt{\frac{N}{(1 - \phi)\rho_s}}. \quad (\text{A.10})$$

Al medir experimentalmente v_L y v_T es posible deducir los valores de K_b y N

$$K_b = (1 - \phi)\rho_s \left(v_T^2 - \frac{4}{3}v_L^2 \right), \quad (\text{A.11a})$$

$$N = (1 - \phi)\rho_s v_T^2. \quad (\text{A.11b})$$

Por tanto se obtienen todos los parámetros requeridos por la teoría de Biot o bien de los modelos modificados de Biot para poder caracterizar acústicamente cualquier medio poroso.

Apéndice B

Transformación Wavelet Continua: Nociones Básicas

B.1 Wavelets

En términos generales, una wavelet es una oscilación de tipo onda de soporte compacto. Las propiedades que debe cumplir la wavelet Ψ son:

- Se encuentran en el espacio de funciones medibles que son absolutamente y cuadrado integrables, $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, dicho de otro modo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (\text{B.1})$$

- La media vale cero, es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Transformación Wavelet Continua

La transformación Wavelet Continua (CWT) es una función que depende de una wavelet Ψ^1 y una señal temporal $x(t)$. La wavelet madre puede ser contraída o expandida y desplazada en la escala temporal, con esta técnica, la transformada wavelet puede ser usada para analizar formas de onda localmente en escalas temporales y frecuenciales.

En este trabajo se usó la transformación wavelet continua que se encuentra definida por

$$T(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_{a,b}(t) dt, \quad (\text{B.3a})$$

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x(t) - b}{a}\right), \quad (\text{B.3b})$$

donde $x(t)$ es la señal original, a y b son los parámetros de escalado y desplazamiento, y $\Psi(t)$ es la wavelet madre.

¹Denotada como la 'Wavelet Madre'.

B.2.1 Parámetro de Escalado

El parámetro de escala a dilata o comprime la señal permitiendo el análisis frecuencial, escalas muy bajas permiten resolver frecuencias más altas y vice versa.

La correspondencia precisa entre escalas y frecuencias (f) viene dada como

$$f = \frac{F_c}{a\Delta}, \quad (\text{B.4})$$

donde F_c es la frecuencia central de la wavelet, definida como el pico máximo de la transformada de Fourier de la wavelet madre. Δ es la frecuencia de muestreo de $x(t)$.

B.2.2 Parámetro de Desplazamiento

El parámetro de desplazamiento (b), como su nombre lo dice, corresponde al desplazamiento temporal de la wavelet madre a lo largo de la duración de la señal $x(t)$.

B.2.3 Principio de Incertidumbre

Una forma de enunciar el principio de incertidumbre de Heisenberg es:

La única función de soporte compacto en el espacio temporal y frecuencial² es la función idénticamente nula [56]

Es decir, se tiene buena resolución en frecuencia y mala en el tiempo o viceversa.

B.2.4 Wavelet Mexican Hat

La wavelet madre usada fue la 'Mexican Hat', definida como la segunda derivada negativa de una función Gaussiana, es decir

$$\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{B.5})$$

La representación gráfica de la wavelet Mexican Hat, en unidades arbitrarias se muestra en la figura B.1.

²En el sentido de la transformada de Fourier

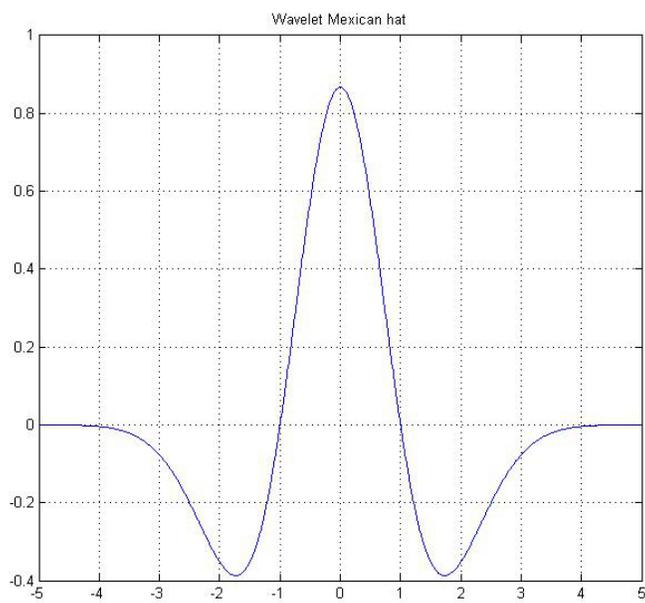


Figura B.1: Representación en unidades arbitrarias de la wavelet 'Mexican hat'.

Apéndice C

Códigos Realizados

Cuadro de código C.1: Promediado de Señales

```
1  clc
2  clear all
3  for in=0:29;
4  eval(['load_/home/skalabi/T000', num2str(in), '.CSV'])
5  eval(['X=temp', num2str(in), ';'])
6  X=X-mean(X);
7  SIG4mm1(:, in+1)=X;
8  sig4mm1=mean(SIG4mm1');
9  end
```

Cuadro de código C.2: Velocidad del sonido en agua

```
1  load referencia.csv %Se obtiene el archivo correspondiente al pulso propagado
2  %en el medio de referencia, en este caso se capturó el pulso excitador y el propagado
3  pro=referencia(:,3); %pulso propagado
4  exc=referencia(:,2); %Pulso excitador
5  pro=pro/max(pro); %se normaliza la señal del pulso propagado.
6  exc=exc/max(exc); %se normaliza la señal del pulso excitador.
7  pro=pro-mean(pro); %Se quita la componente de DC de la señal
8  exc=exc-mean(exc);
9  t=referencia(:,1); %A partir de los datos se obtiene el vector temporal.
10 d=10/100; %Distancia entre transductores, con el metro como unidad.
11 umbral1=0.2; %Se define un umbral de tal forma que supere el ruido eléctrico de los
12 %equipos
13 umbral2=0.02 %Umbral para determinar el tiempo del flanco de bajada
14 z1=find(pro<umbral1); %Halla la entrada de los puntos donde se superó el umbral.
15 z2=find(exc>1-umbral2) %Halla la entrada de los puntos donde el pulso decae
16 %es decir, donde termina la excitación.
17 v=d/(t(z1(1))-t(z2(end)))
```

Cuadro de código C.3: Velocidad de Fase

```
1  load referencia.csv %Se obtienen los archivos correspondientes al pulso propagado
2  %en el medio de referencia
3  load material.csv %Se obtienen los archivos correspondientes al pulso propagado
4  %en el material
5  ref=referencia(:,2);
```

```

6 mat=material(:,2);
7 ref=ref-mean(ref); %Se quita la componente de DC de la señal
8 mat=mat-mean(mat);
9 t=referencia(:,1); %A partir de los datos se obtiene el vector temporal (no necesario
10 %para este cálculo)
11 fs=inv(t(2)-t(1)); %determina la frecuencia de muestreo como el inverso del tiempo
12 %de muestreo
13 f=(0:length(t)-1)*fs/length(t); %Se genera el vector de frecuencias
14 vag=1416.20; %Define la velocidad del sonido en el agua, obtenida en el código
15 %anterior.
16 d=4.92/100; %Define el tamaño de la muestra
17 Fref=fft(ref); %calcula la FFT del pulso referencia
18 Fmat=fft(mat); %calcula la FFT del pulso propagado en material
19 FaseRef=atan(unwrap(imag(Fref)./real(Fref))); %Se calcula la fase del pulso de
20 %referencia, donde el comando 'unwrap' hace la corrección a la fase
21 FaseMat=atan(unwrap(imag(Fmat)./real(Fmat))); %Se calcula la fase del pulso de
22 %referencia
23 dfi=FaseMat-FaseRef
24 vf=vag*2*pi*f(2:end)./(d*2*pi*f(2:end)+vag*dfi(2:end)); %cálculo de la velocidad de
25 %fase de acuerdo a la ecuación \eqref{v_fase_bueno} y se quita la primera entrada de
26 %los vectores ya que f(1)=0 y en consecuencia se tendría vf(1)=NaN.

```

Cuadro de código C.4: Cálculo de la atenuación

```

1
2 load referencia.csv %Se obtienen los archivos correspondientes al pulso propagado
3 %en el medio de referencia
4 load material.csv %Se obtienen los archivos correspondientes al pulso propagado
5 %en el material
6 ref=referencia(:,2);
7 mat=material(:,2);
8 ref=ref-mean(ref); %Se quita la componente de DC de la señal
9 mat=mat-mean(mat);
10 t=referencia(:,1); %A partir de los datos se obtiene el vector temporal (no necesario
11 %para este cálculo)
12 fs=inv(t(2)-t(1)); %determina la frecuencia de muestreo como el inverso del tiempo
13 %de muestreo
14 f=(0:length(t)-1)*fs/length(t); %Se genera el vector de frecuencias
15 d=4.92/100; %Define el grosor del material.
16 Fref=fft(ref); %calcula la FFT del pulso referencia
17 Fmat=fft(mat); %calcula la FFT del pulso propagado en material
18 atenua=1/d*(log10(abs(Fref))-log10(abs(Fmat)));
19 p = polyfit(f, atenua, 1);

```

Cuadro de código C.5: Transformada Wavelet Continua

```

1 load pulso.csv %Se obtiene el archivo correspondiente al pulso propagado en hueso
2 pro=referencia(:,2); %pulso propagado
3 pro=pro/max(pro); %se normaliza la señal del pulso propagado.
4 pro=pro-mean(pro); %Se quita la componente de DC de la señal
5 t=referencia(:,1); %A partir de los datos se obtiene el vector temporal.
6 wname='mexh'; %Define el nombre de la wavelet a usar
7 fs=inv(t(2)-t(1)); %Obtiene la frecuencia de muestreo;
8 s=1:100:5001;
9 coef = cwt(pro,s,'mexh','plot'); %Determina los coeficientes de la
10 %transformacion wavelet

```

```
11 F = scal2frq(s, 'wname', fs); %Determina las pseudo-frecuencias.
```

Bibliografía

- [1] Fellah, Z. E. A., Mitri, F. G., Depollier, C., Berger, S., Lauriks, W., and Chapelon, J. Y. (2003). *Characterization of porous materials with a rigid frame via reflected waves*. J. Appl. Phys., 94(12), 7914-7922.
- [2] Beranek, L. L. (1942). *Acoustic impedance of porous materials*. J. Acoust. Soc. Am., 13(3), 248-260.
- [3] Fellah, Z. E. A., Berger, S., Lauriks, W., Depollier, C., Aristegui, C., and Chapelon, J. Y. (2003). *Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence*. J. Acoust. Soc. Am., 113(5), 2424-2433.
- [4] Johnson, D. L., Plona, T. J., Scala, C., Pasierb, F., and Kojima, H. (1982). *Tortuosity and acoustic slow waves*. Phys. Rev. Lett., 49(25), 1840-1844.
- [5] Johnson, D. L., Koplik, J., and Dashen, R. (1987). *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*. J. Fluid Mech., 176(1), 379-402.
- [6] Leclaire, P., Kelders, L., Lauriks, W., Glorieux, C., and Thoen, J. (1996). *Determination of the viscous characteristic length in air-filled porous materials by ultrasonic attenuation measurements*. J. Acoust. Soc. Am., 99(4), 1944-1948.
- [7] Sebaa, N., Fellah, Z. E. A., Fellah, M., Ogam, E., Wirgin, A., Mitri, F. G., and Lauriks, W. (2006). *Ultrasonic characterization of human cancellous bone using the Biot theory: Inverse problem*. J. Acoust. Soc. Am., 120(4), 1816-1824.
- [8] Fellah, Z. E. A., Chapelon, J. Y., Berger, S., Lauriks, W., and Depollier, C. (2004). *Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone: Application of Biot theory*. J. Acoust. Soc. Am., 116(1), 61-73.
- [9] Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., and Wright, P. E. (1998). *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions*. SIAM Journal on Optimization, 9(1), 112-147.
- [10] Haire, T. J., and Langton, C. M. (1999). *Biot theory: A review of its application to ultrasound propagation through cancellous bone*. Bone, 24(4), 291-295.
- [11] Glüer, C-C., C. Y. Wu, and H. K. Genant. *Broadband ultrasound attenuation signals depend on trabecular orientation: an in vitro study*. Osteoporosis Int. 3.4 (1993): 185-191.
- [12] Pithioux, M., Lasaygues, P., and Chabrand, P. (2002). *An alternative ultrasonic method for measuring the elastic properties of cortical bone*. J. Biomech., 35(7), 961-968.
- [13] Njeh, C. F., Boivin, C. M., and Langton, C. M. (1997). *The role of ultrasound in the assessment of osteoporosis: a review*. Osteoporosis International, 7(1), 7-22.
- [14] Lang, T. F. (2006). *What do we know about fracture risk in long-duration spaceflight?*. J. Musculoskeletal and Neuronal Int., 6(4), 319.
- [15] Guldberg, R. E., Caldwell, N. J., Guo, X. E., Goulet, R. W., Hollister, S. J., and Goldstein, S. A. (1997). *Mechanical stimulation of tissue repair in the hydraulic bone chamber*. J. Bone and Mineral Res., 12(8), 1295-1302.
- [16] International Osteoporosis Foundation (2002), *Osteoporosis in the Workplace: the social, economic and human costs of osteoporosis on employees, employers and governments*.

- [17] Pothuaud, L., Benhamou, C. L., Porion, P., Lespessailles, E., Harba, R., and Levitz, P. (2000). *Fractal Dimension of Trabecular Bone Projection Texture Is Related to Three-Dimensional Microarchitecture*. J. Bone and Mineral Res., 15(4), 691-699.
- [18] Griffith, J. F., and Genant, H. K. (2008). *Bone mass and architecture determination: state of the art*. Best Practice & Research Clinical Endocrinology & Metabolism, 22(5), 737-764.
- [19] Mano, I., Horii, K., Takai, S., Suzuki, T., Nagaoka, H., and Otani, T. (2006). *Development of novel ultrasonic bone densitometry using acoustic parameters of cancellous bone for fast and slow waves*. Jap. J. Appl. Phys., 45(5S), 4700.
- [20] Anderson, Christian C., et al. *Interference between wave modes may contribute to the apparent negative dispersion observed in cancellous bone*. J. Acoust. Soc. Am., 124.3 (2008): 1781-1789.
- [21] Cardoso, L., Teboul, F., Sedel, L., Oddou, C., and Meunier, A. (2003). *In vitro acoustic waves propagation in human and bovine cancellous bone*. J. Bone and Mineral Res., 18(10), 1803-1812.
- [22] Wear, A. Keith *Measurements of phase Velocity and Group Velocity in Human Calcaneus Ultrasound* in Med. and Biol., 26(4), 641-646.
- [23] Marutyan, K. R., Bretthorst, G. L., and Miller, J. G. (2006). *Bayesian estimation of the underlying bone properties from mixed fast and slow mode ultrasonic signals*. J. Acoust. Soc. Am., 121(1), EL8-EL15.
- [24] Waterman, P. C., and Truell, R. (2004). *Multiple scattering of waves*. J. Math. Phys., 2(4), 512-537.
- [25] Yang, R. B., and Mal, A. K. (1994). *Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite*. J. Mech. Phys. Solids, 42(12), 1945-1968.
- [26] Plona, T. J. (1980). *Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies*. Appl. Phys. Lett., 36(4), 259-261.
- [27] Kay, D. C. (1988). *Schaum's outline of theory and problems of tensor calculus*. McGraw-Hill.
- [28] Bruneau, M., and Potel, C. (Eds.). (2009). *Materials and acoustics handbook*. ISTE.
- [29] Hosokawa, A., and Otani, T. (1997). *Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone*. J. Acoust. Soc. Am., 101(1), 558-562.
- [30] Mizuno, K., Matsukawa, M., Otani, T., Laugier, P., and Padilla, F. (2009). *Propagation of two longitudinal waves in human cancellous bone: An in vitro study*. J. Acoust. Soc. Am., 125(5), 3460-3466.
- [31] Molero, M., and L. Medina. *Comparison of phase velocity in trabecular bone mimicking-phantoms by time domain numerical (EFIT) and analytical multiple scattering approaches*. Ultrasonics 52.7 (2012): 809-814.
- [32] Hughes, E. R., Leighton, T. G., White, P. R., and Petley, G. W. (2007). *Investigation of an anisotropic tortuosity in a Biot model of ultrasonic propagation in cancellous bone*. J. Acoust. Soc. Am., 1121(1), 568-574.
- [33] Hasegawa, S., Nagatani, Y., Mizuno, K., and Matsukawa, M. (2010). *Wavelet transform analysis of ultrasonic wave propagation in cancellous bone*. Jap. J. Appl. Phys., 49(7S), 07HF28.
- [34] Hughes, E. R., Leighton, T. G., Petley, G. W., and White, P. R. (1999). *Ultrasonic propagation in cancellous bone: a new stratified model*. Ultrasound in Medicine & biology, 25(5), 811-821.
- [35] Nicholson, P. H. F., Müller, R., Lowet, G., Cheng, X. G., Hildebrand, T., Rügsegger, P., and J. Boonen (1998). *Do quantitative ultrasound measurements reflect structure independently of density in human vertebral cancellous bone?*. Bone, 23(5), 425-431.
- [36] Marutyan, Karen R., Mark R. Holland, and James G. Miller. (2006) *Anomalous negative dispersion in bone can result from the interference of fast and slow waves*. J. Acoust. Soc. Am., 120(5), EL55-EL61.
- [37] Nicholson, P. H. F., et al. (1996) *A comparison of time-domain and frequency-domain approaches to ultrasonic velocity measurement in trabecular bone*. Phys. Med. Biol., 41(11), 2421.

- [38] Mizuno, K., Matsukawa, M., Otani, T., Takada, M., Mano, I., and Tsujimoto, T. (2008). *Effects of structural anisotropy of cancellous bone on speed of ultrasonic fast waves in the bovine femur*. Ultrasonics, Ferroelectrics and Freq. Control, IEEE Transactions on, 55(7), 1480-1487.
- [39] Hosokawa, A., and Otani, T. (1998). *Acoustic anisotropy in bovine cancellous bone*. J. Acoust. Soc. Am., 103(5), 2718-2722.
- [40] McKelvie, M. L., and Palmer, S. B. (1991). *The interaction of ultrasound with cancellous bone*. Phys. Med. Biol., 36(10), 1331.
- [41] Wear, Keith A. (2001) *A stratified model to predict dispersion in trabecular bone*. Ultrasonics, Ferroelectrics and Freq. Control, IEEE Transactions on 48(4), 1079-1083.
- [42] Kittel, C., and McEuen, P. (1996). *Introduction to solid state physics* (Vol. 7). New York: Wiley.
- [43] Scruby, C. B. (1987). An introduction to acoustic emission. J. Phys. E: Scientific Instruments, 20(8), 946.
- [44] Laugier, P., and Haèiat, G. (Eds.). (2011). *Bone quantitative ultrasound*. Springer.
- [45] Molero, M. (2009). *Caracterización de materiales cementicios mediante la dispersión ultrasónica*.
- [46] Villarreal L. Alejandro (2008) *Imágenes ultrasónicas de materiales multicapas*.
- [47] Lee, K. I., Roh, H. S., and Yoon, S. W. (2003). *Acoustic wave propagation in bovine cancellous bone: application of the modified Biot-Attenborough model*. J. Acoust. Soc. Am., 114(4), 2284-2293.
- [48] Kaczmarek, M., J. Kubik, and M. Pakula. (2002) *Short ultrasonic waves in cancellous bone*. Ultrasonics 40(1), 95-100.
- [49] Haiat, G., A. Lhemery, F. Renaud, F. Padilla, P. Laugier, and S. Naili. (2008) *Velocity dispersion in trabecular bone: influence of multiple scattering and of absorption*. J. Acoust. Soc. Am., 124(6): 4047-4058.
- [50] Langton, C. M., G. P. Evans, R. Hodgkinson, and C. M. Riggs. *Ultrasonic, elastic and structural properties of cancellous bone*. Current research in osteoporosis and bone mineral measurement. British Institute of Radiology, London 10 (1990).
- [51] Hecht, E., and Zajac, A. (1974). *Optics* Addison-Wesley. Reading, Mass.
- [52] Bindal, V. N. (1999). *Transducers for ultrasonic flaw detection*. Alpha Science Int'l Ltd..
- [53] Drinkwater, B. W., and Wilcox, P. D. (2006). *Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review*. NDT & E International, 39(7), 525-541.
- [54] Droin, P., Berger, G., and Laugier, P. (1998). *Velocity dispersion of acoustic waves in cancellous bone*. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on, 45(3), 581-592.
- [55] Kaufman, J. J., Xu, W., Chiabrera, A. E., and Siffert, R. S. (1995). *Diffraction effects in insertion mode estimation of ultrasonic group velocity*. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on, 42(2), 232-242.
- [56] Axler, S., Bourdon, P., and Wade, R. (2001). *Harmonic function theory* (Vol. 137). Springer.
- [57] <http://www.tek.com/datasheet/mso2000-dpo2000/mso2000b-series-dpo2000b-series-datasheet>