UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Esquemas Formales

T E S I N A
QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

ARACELI REYES MORALES

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

México, D. F. Junio 2014

Resumen

El objetivo del presente trabajo es recopilar con demostraciones detalladas resultados básicos de la teoría de esquemas formales desarrollada por Alexander Grothendieck en [11]. La idea general es que la exposición sea autocontenida, dentro de lo posible.

Índice general

Capítulo 1

Esquemas: nociones básicas

En este capítulo se hace una pequeña recopilación de algunos conceptos y resultados generales que se usarán en los siguientes capítulos.

1.1. Esquemas

Definición 1.1. Un *espacio anillado local* es un espacio topológico junto con una gavilla $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que para todo punto $x \in X$ el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local.
Un *morfismo de espacios anillados locales* es un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#})$ tal que para cada punto $x \in X$ el morfismo inducido en los tallos:

$$f_x^{\#} : (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

es un morfismo de anillos locales.

Dado que podemos tener morfismos de espacios anillados que no son morfismos de espacios anillados locales entonces la subcategoría de espacios anillados locales no es una subcategoría plena de la categoría de espacios anillados.

Ejemplo 1.2. *Sea A un anillo y tomemos $X = Spec(A)$, sabemos que una base para la topología de Zariski en $Spec(A)$ es el conjunto $\{D(f) \mid f \in A\}$ y si tomamos $\mathcal{O}_X(D(f)) := A_f$ donde A_f es la localización de A respecto al conjunto multiplicativo $\{f^i \mid i \geq 0\}$ entonces tenemos un sistema inverso de la siguiente manera: sea $\iota_f : A \to A_f$ el morfismo de localización, entonces el morfismo inducido ${}^a\iota_f : Spec(A_f) \to D(f)$ es suprayectivo y como para $f, g \in A$ se cumplen:*

1. *$A_f = A_g$ si $D(f) = D(g)$*
2. *$D(f) \subseteq D(g)$ si y sólo si existe $n \geq 1$ tal que $f^n \in A_g$ si y sólo si $\frac{g}{1} \in (A_f)^{\times}$*

entonces tenemos un único morfismo de anillos $\rho_{f,g} : A_g \to A_f$ tal que $\rho_{f,g} \circ \iota_g = \iota_f$ y si $D(f) \subseteq D(g) \subseteq D(h)$ entonces $\rho_{f,g} \circ \rho_{g,h} = \rho_{f,h}$, así tenemos una estructura de pregavilla que de hecho es gavilla en la base de los conjuntos $D(f)$

para la topología de $Spec(A)$ *donde las restricciones son* $\rho_{f,g}$ *y para cada punto* $x \in X = Spec(A)$ *se tiene:*

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{D(f)\ni x} \mathcal{O}_X(D(f)) = \varinjlim_{f\notin \mathfrak{P}_x} A_f = A_{\mathfrak{P}_x}$$

así, en particular $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un espacio anillado local.*

Definición 1.3. Un *esquema afín* es un espacio anillado local $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo como espacio anillado local al espectro de un anillo.
Un *esquema* es un espacio anillado local $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta $x \in U \subseteq X$ tal que el espacio topológico U junto con la gavilla restricción $\mathcal{O}_X|_U$ es un esquema afín.

Si tenemos un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$, llamaremos a X el espacio topológico subyacente al esquema y a $\mathcal{O}_X$ la gavilla estructural. Como abuso de notación pondremos X para referirnos al esquema.

Definición 1.4. Sea S un esquema fijo, un *esquema sobre* S es un esquema X, junto con un morfismo $X \to S$.
Si X y Y son esquemas sobre S, un S-*morfismo* de X a Y es un morfismo $f : X \to Y$ compatible con los morfismos a S, es decir se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathfrak{Sch}(S)$ a la categoría de esquemas sobre S. Si A es un anillo pondremos $\mathfrak{Sch}(A)$ para referirnos a la categoría de esquemas sobre $Spec(A)$.

Definiremos también una *variedad* sobre el campo K como cualquier variedad afín, cuasi-afín, proyectiva o cuasi-proyectiva sobre K. Denotaremos como $\mathfrak{Var}(K)$ a la categoría de variedades sobre el campo K. Teniendo esto en cuenta enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 1.5. *Sea* K *un campo algebraicamente cerrado, entonces existe un funtor natural fielmente pleno de la categoría de variedades sobre* K *a la categoría de esquemas sobre* K

$$t : \mathfrak{Var}(K) \to \mathfrak{Sch}(K)$$

1.2. Esquemas noetherianos

Definición 1.6. Un esquema X es *localmente noetheriano* si se puede cubrir por subconjuntos abiertos afines $Spec(A_i)$ donde cada A_i es un anillo noetheriano. Diremos que X es *noetheriano* si es localmente noetheriano y cuasi-compacto.

Equivalentemente un esquema X es noetheriano si existe una cubierta finita de subconjuntos abiertos afines $Spec(A_i)$ con cada A_i un anillo noetheriano.

Notemos que si X es un esquema noetheriano entonces el espacio topológico subyacente es un espacio topológico noetheriano pero no inversamente. A continuación tenemos una caracterización de esquemas localmente noetherianos.

Proposición 1.7. *Un esquema X es localmente noetheriano si y sólo si para cualquier subconjunto abierto afín $U = Spec(A)$, A es un anillo noetheriano. En particular, un esquema afín $X = Spec(A)$ es noetheriano si y sólo si A es un anillo noetheriano.*

1.3. Gavillas coherentes

Definición 1.8. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema, una *gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos* es una gavilla de grupos abelianos $\mathcal{F}$ en X tal que para cada abierto $U \subseteq X$, el grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ tiene estructura de $\mathcal{O}_X$-módulo compatible con las restricciones; es decir, si $V \subseteq U$ son abiertos de X, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

Notemos que para cualquier punto del esquema $x \in X$ el tallo $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo. En efecto, si $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ y $f \in \mathcal{F}_x$, consideramos $U \subseteq X$ vecindad abierta de x y tomamos $s \in \mathcal{O}_X(U)$, $t \in \mathcal{F}(U)$ tales que los gérmenes $(s)_x = a$ y $(t)_x = f$; así tenemos $(s)_x(t)_x = (st)_x$ usando la acción de $\mathcal{O}_X(U)$ en el grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$.

Un resultado importante acerca de gavillas de $\mathcal{O}_X$-módulos es el siguiente:

Proposición 1.9. *Sea $\mathcal{F}$ pregavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos. Entonces la gavilla asociada*[1] *$\mathcal{F}^+$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto, consideremos $b \in \mathcal{O}_X(U)$ y $s = (s(x))_{x \in U} \in \mathcal{F}^+(U)$. Bastará que definamos la acción $\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(U)$; pongamos entonces:

$$b \cdot (s(x)) := (b)_x \cdot (s(x))$$

así, por definición de gavilla asociada podemos elegir un abierto $V \subseteq U$ vecindad de x y una sección $t \in \mathcal{F}(V)$ tal que $(t)_y = (s)_y$ para toda $s \in V$, por lo tanto $b \cdot (s(x)) \in \mathcal{F}^+(U)$. □

[1] Recordemos que el funtor inclusión de la categoría de gavillas en la categoría de pregavillas tiene un adjunto izquierdo, que es justamente la *gavillificación* de una pregavilla, el cual se construye de la siguiente manera: a cada pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X le podemos asociar una única gavilla $\mathcal{F}^+$ sobre X, la cual para cada abierto $U \subseteq X$ se define como:

$$\mathcal{F}^+(U) = \{(s_x) \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, \exists \text{ una vecindad abierta de } x, W \subseteq U \text{ y } t \in \mathcal{F}(W) : \forall w \in W, s_w = t_w\}$$

Definición 1.10. Sean A un anillo, M un A-módulo y $X = Spec(A)$. Definimos la *gavilla asociada a M en X*, denotada por $\widetilde{M}$ como sigue: a cada abierto distinguido $D(f) \subseteq X$ le asociamos $\widehat{M}(D(f)) := M_f \cong M \otimes_A A_f$ el módulo localizado en f, del ejemplo 1.2 tenemos que $\widehat{M}$ es pregavilla y considerando la gavilla asociada $\widehat{M}^+ := \widetilde{M}$ tenemos la gavilla asociada al módulo M, que es una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos por la proposición 1.9.

Denotaremos como A-Mod a la categoría de A-módulos y como $\mathcal{O}_X$-Mod a la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos. Algunas propiedades de la gavilla asociada a un módulo se enlistan en la siguiente proposición cuya prueba se puede consultar en [13] [pp. 110].

Proposición 1.11. *Sea A un anillo y $X = Spec(A)$. Supongamos que tenemos un morfismo de anillos $A \to B$ y el morfismo inducido en los espectros $f : Spec(B) \to Spec(A)$. Entonces:*

1. $(.)\tilde{}: A\text{-}Mod \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-}Mod$ *es un funtor exacto, fielmente pleno;*
2. *si M y N son A-módulos, entonces* $(M \otimes N)\tilde{} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$*;*
3. *si $\{M_i\}$ es una familia de A-módulos, entonces* $(\oplus M_i)\tilde{} \cong \oplus \widetilde{M_i}$*;*
4. *para un B-módulo N, se tiene* $f_*(\widetilde{N}) \cong ({}_AN)\tilde{}$*;*
5. *para un A-módulo M, se tiene* $f^*(\widetilde{M}) \cong (M \otimes_A B)\tilde{}$*.*

Definición 1.12. Sea X un esquema. Diremos que un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es *cuasi-coherente* si para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X|_U$-módulos de la forma:

$$\mathcal{O}_X|_U^{(I)} \to \mathcal{O}_X|_U^{(J)} \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

donde I y J son conjuntos no necesariamente finitos.
Si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos de la forma:

$$\mathcal{O}_X|_U^{(n)} \to \mathcal{F}|_U \to 0$$

diremos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo *finitamente generado.*

OBSERVACIÓN 1.13. *Si tenemos una gavilla $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos, la cuasi-coherencia de la gavilla es una noción local en el sentido de que si existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ es cuasi-coherente como $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-módulo, para cada $i \in I$, entonces $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente. Así, es equivalente decir que una gavilla $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos es cuasi-coherente si X se puede cubrir con subconjuntos abiertos afines $U_i = Spec(A_i)$ tales que para cada i, existe un A_i-módulo M_i tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$; y que $\mathcal{F}$ es coherente si además cada M_i es un A_i-módulo finitamente generado.*

Para una gavilla $\mathcal{F}$ en un esquema X, definimos el soporte como el conjunto:

$$sop(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

Lema 1.14. *Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ una gavilla cuasi-coherente de ideales en X, entonces $sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ es cerrado en X.*

Demostración. Consideremos una cubierta afín $\{U_i = Spec(A_i)\}$ de X y para cada i consideramos el ideal:

$$I_i = \Gamma(U_i, \mathcal{I}) \subseteq \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) = A_i$$

y la gavilla cociente $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ que está determinada por la pregavilla $U_i \mapsto A_i/I_i$; notemos que $sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \cap U_i = V(I_i) \subseteq Spec(A_i)$. En efecto, si $P \in V(I_i)$ entonces $P \supseteq I_i$ y por lo tanto $(A_i/I_i)_P \neq 0$ lo cual implica que $P \in sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$. Luego, si tomamos P tal que $P \notin V(I_i)$ entonces $P \not\supseteq I_i$ y por lo tanto $(A_i)_P = (I_i)_P = 0$ y así $P \notin sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$. Con esto hemos probado que $sop(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ es cerrado para cada U_i y por tanto es cerrado en X. □

EJEMPLO 1.15. *En cualquier esquema X, la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ es una gavilla cuasi-coherente y más aún, es coherente. En efecto, por definición la gavilla estrucutural de un esquema tiene una cubierta abierta de conjuntos afines $U_i = Spec(A_i)$ así basta tomar $A_i = M_i$ y es finitamente generada ya que se tiene una sucesión exacta de la forma:*

$$\mathcal{O}_X|_U^{(1)} \to \mathcal{O}_X|_U \to 0$$

EJEMPLO 1.16. *Si $X = Spec(A)$ y M es un A-módulo, entonces $\widetilde{M}$ es cuasi-coherente, basta recordar que como todo módulo es cociente de un libre tiene una resolución libre y si consideramos la sucesión:*

$$A^{(I)} \to A^{(J)} \to M \to 0$$

y aplicamos el funtor $\widetilde{(.)} : A - Mod \longrightarrow \mathcal{O}_X$ tenemos la sucesión exacta:

$$\widetilde{A^{(I)}} \to \widetilde{A^{(J)}} \to \widetilde{M} \to 0$$

como $\widetilde{A} = \mathcal{O}_X$ y usando 1.11 tenemos

$$\mathcal{O}_X^{(I)} \to \mathcal{O}_X^{(J)} \to \widetilde{M} \to 0.$$

Más aún, las gavillas cuasi-coherentes sobre un esquema afín son de la forma anterior. Para probarlo usaremos el siguiente lema cuya prueba se puede consultar en [13] [pp. 112].

Lema 1.17. *Sean $X = Spec(A)$ un esquema afín, $f \in A$ con el abierto distinguido correspondiente $D(f) \subseteq X$ y $\mathcal{F}$ una gavilla cuasi-coherente en X. Entonces:*

1. *Si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es una sección global de $\mathcal{F}$ cuya restricción a $D(f)$ es cero, entonces $f^n s = 0$ para alguna $n > 0$.*

2. *Dada una sección $t \in \mathcal{F}(D(f))$ de $\mathcal{F}$ sobre un abierto distinguido $D(f)$, para alguna $n > 0$, $f^n t$ se extiende a una sección global de $\mathcal{F}$ sobre X.*

Observación 1.18. *Si $X = Spec(A)$ un esquema afín y $\mathcal{F}$ una gavilla cuasi-coherente en X sabemos que X se puede cubrir con subconjuntos abiertos afines de la forma $V = Spec(B)$ tales que $\mathcal{F}|_V \cong \widetilde{M}$ para algún B-módulo M y podemos cubrir cada V con abiertos distinguidos $D(g)$, $g \in A$; así, la inclusión $D(g) \hookrightarrow V$ corresponde a un morfismo de anillos $B \to A_g$ y usando 1.11 tenemos $\mathcal{F}|_{D(g)} \cong (M \otimes_B A_g)\widetilde{}$.*

Proposición 1.19. *Sea X un esquema. Entonces un $\mathcal{O}_X$-módulo es cuasi-coherente si y sólo si para todo subconjunto abierto afín $U = Spec(A)$ existe un A-módulo M tal que $\mathcal{F}|_U \cong \widetilde{M}$. Además si X es noetheriano, $\mathcal{F}$ es coherente si y sólo si M es finitamente generado.*

Demostración. Sean $\mathcal{F}$ cuasi-coherente en X y $U = Spec(A)$ un abierto afín, usando la observación 1.18 X tiene una base de abiertos para los cuales la restricción de $\mathcal{F}$ es la gavilla asociada a un módulo. Es decir, $\mathcal{F}|_U$ es cuasi-coherente, por lo tanto basta con probar el resultado para el caso de un esquema afín $X = Spec(A)$.

Sea $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$, entonces existe un mapeo natural[2] $\alpha : \widetilde{M} \to \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente en X, X se puede cubrir con abiertos $D(g_i)$ tales que $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$ para algún A_{g_i}-módulo M_i; más aún, usando el lema 1.17 $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong M_{g_i}$ y por tanto $M_i = M_{g_i}$; es decir, $\alpha|_{D(g_i)}$ es un isomorfismo y como los $D(g_i)$ son cubierta de X entonces α es isomorfismo.

Si X es un esquema noetheriano afín y $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente, continuando con la notación tenemos además que, cada M_{g_i} es un A_{g_i}-módulo finitamente generado. Debemos probar que M es finitamente generado. Ahora bien como A y A_{g_i} son anillos noetherianos entonces los módulos M_{g_i} son noetherianos, así pues probaremos que M es un módulo noetheriano.

Sea $N \leq M$ submódulo de M y consideremos $\varphi_i : M \to M_{g_i}$ el morfismo de localización para cada $i = 1, ..., r$. Afirmamos que se cumple la siguiente igualdad:

$$N = \cap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(N) \cdot M_{g_i}) \tag{1.1}$$

la primera contención es clara, así que es suficiente ver la otra. Tomemos $x \in M$ tal que $x \in \cap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(N) \cdot M_{g_i})$, entonces

$$\varphi_i(x) = l_i / g_i^{n_i}$$

[2]Si $X = Spec(A)$ es un esquema afín, M es un A-modulo y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$-módulos, se tiene un isomorfismo natural:

$$Hom_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong Hom_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F})$$

en M_{g_i}, donde $l_i \in N$ y $n_i > 0$, si tomamos n_i lo suficientemente grande podemos fijar el exponente n para toda i, es decir que en M tenemos la expresión:

$$g_i^{m_i}(g_i^n x - l_i) = 0$$

para alguna m_i y si nuevamente consideramos $m_i = m$ lo suficientemente grande tendremos $g_i^{m+n}x \in N$ para toda i.
Luego, como los $D(g_i)$ cubren X, entonces si tomamos $k = m+n$ existen ciertos $c_i \in A$ $i = 1, ..., r$ tales que $1 = \sum c_i g_i^k$ y por tanto:

$$x = \sum c_i g_i^k x \in N$$

y así (1.1) se cumple.
Finalmente supongamos que tenemos una cadena ascendente de submódulos de M:

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq ...$$

entonces para cada i, se tiene la cadena:

$$\varphi_i(N_1) \cdot M_{g_i} \subseteq \varphi_i(N_2) \cdot M_{g_i} \subseteq \varphi_i(N_3) \cdot M_{g_i} \subseteq ...$$

de submódulos de M_{g_i} que es noetheriano y por lo tanto se estaciona, luego usando la afirmación (1.1) obtenemos que la cadena original se estaciona, por tanto M es noetheriano y esto finaliza la prueba. $\square$

Corolario 1.20. *Sean A un anillo y $X = Spec(A)$. El funtor $\widetilde{(.)}$: A-$Mod \longrightarrow$ $\mathcal{O}_X$-Mod nos da una equivalencia de categorías entre la categoría de A-módulos y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos cuasi-coherentes cuyo inverso es el funtor $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. Si A es noetheriano la equivalencia es entre la categoría de A-módulos finitamente generados y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos coherentes.*

Capítulo 2

Esquemas formales

En este capítulo definiremos y estudiaremos las principales propiedades de los esquemas formales noetherianos, gavillas coherentes en esquemas formales y finalmente estudiaremos la equivalencia de categorías análoga a 1.20.
Comenzaremos recordando algunas cosas importantes acerca de límites de gavillas y completaciones de anillos.

2.1. Completaciones

2.1.1. Límites inversos de gavillas

Recordemos que la existencia de límites inversos depende de la categoría en la que se está trabajando. En nuestro caso, tal objeto sí existe en la categoría de gavillas:

Proposición 2.1. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathfrak{C}$ la categoría de gavillas de grupos abelianos en X. Entonces el límite inverso existe en $\mathfrak{C}$ y, más aún, si $(\mathcal{F}_n)$ es un sistema inverso de gavillas en X y consideramos*

$$\mathcal{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$$

su límite inverso, entonces para cualquier abierto U, tenemos que

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \varprojlim \Gamma(U, \mathcal{F}_n)$$

en la categoría de grupos abelianos.

2.1.2. Completaciones de anillos

Sea A un anillo conmutativo con uno y sea I un ideal de A, tenemos los morfismos naturales:

$$A/I \leftarrow A/I^2 \leftarrow A/I^3 \leftarrow ...$$

lo que nos da un sistema inverso de anillos (A/I^n), al límite inverso de este sistema se le conoce como *la completación de A respecto a I* o bien *la completación I-ádica de A*; a la cual denotamos como:

$$\hat{A} = \varprojlim A/I^n.$$

Si M es un A-módulo, de manera similar definimos la *completación I-ádica de M* como:

$$\hat{M} = \varprojlim M/I^n M$$

el cual tiene una estructura natural de $\hat{A}$-módulo.

Teorema 2.2. *Sean A un anillo noetheriano e I un ideal de A, entonces:*

1. $\hat{I} = \varprojlim I/I^n$ *es un ideal de $\hat{A}$ y para cada n, $\hat{I^n} = I^n\hat{A}$ y $\hat{A}/\hat{I^n} \cong A/I^n$;*

2. *si M es un A-módulo finitamente generado, entonces $\hat{M} \cong M \otimes_A \hat{A}$;*

3. *el funtor $M \mapsto \hat{M}$ es un funtor exacto en la categoría de A-módulos finitamente generados;*

4. *$\hat{A}$ es un anillo noetheriano;*

5. *si (M_n) es un sistema inverso donde cada M_n es un A/I^n-módulo finitamente generado, cada morfismo $\varphi_{nm} : M_m \to M_n$ es suprayectivo y $ker(\varphi_{nm}) = I^n M_m$, entonces $M = \varprojlim M_n$ es un $\hat{A}$-módulo finitamente generado y para cada n, $M_n \cong M/I^n M$.*

Demostración. 1,2,3 y 4, ver [7][pp. 108,109,113].
Para 5, ver [8][Cap.III,2, no.11, Prop. y Cor. 14]. □

Definición 2.3. Sean X un esquema noetheriano y Y un subesquema cerrado dado por una gavilla de ideales $\mathcal{I}$. Definimos la *completación formal de X a través de Y* como el espacio anillado $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ dado como sigue: consideramos el espacio topológico Y, entonces tenemos las gavillas de anillos sobre Y de la forma $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^k$, así que consideramos el límite inverso:

$$\mathcal{O}_{\hat{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^k$$

Notemos que la gavilla estructural del espacio $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ no depende de la estructura de esquema que tiene Y. Supongamos que $\mathcal{J}$ es otra gavilla de ideales sobre Y, como X es un esquema noetheriano entonces existen enteros m, n tales que $\mathcal{I}^n \subseteq \mathcal{J}$ y $\mathcal{J}^m \subseteq \mathcal{I}$, es decir los sistemas inversos $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n)$ y $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m)$ son cofinales el uno en el otro y por lo tanto sus límites inversos son isomorfos.

Veamos ahora que en efecto tenemos un espacio anillado local, es decir que los tallos de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ son anillos locales. Consideremos A un anillo, I ideal de A y el espacio topológico $U_0 = Spec(A/I)$ con gavilla estructural $\varprojlim \mathcal{O}_{U_n}$, donde $U_n = Spec(A/I^{n+1})$. Observemos que como espacios topológicos tenemos $U = U_0 = U_1 = ... = U_n = ...$; es decir, las gavillas $\mathcal{O}_{U_n}$ son todas gavillas sobre el mismo espacio topológico que además forman un sistema inverso con los mapeos correspondientes a los epimorfismos $A/I^{n+1} \to A/I^n$.

Ahora bien, tomemos $x \in \hat{X}$, como X es un esquema entonces $\hat{X}$ es localmente un esquema afín, y así para el punto x podemos considerar una vecindad

U como la descripción anterior, de esta forma el mapeo $\mathcal{O}_{\hat{X}} \to \mathcal{O}_{U_0}$ induce un mapeo en los tallos:

$$\mathcal{O}_{\hat{X},x} \to \mathcal{O}_{U_0,x}$$

y dado que $\mathcal{O}_{U_0,x}$ es un anillo local, consideremos $\mathfrak{m}_x$ la preimagen del ideal máximo de $\mathcal{O}_{U_0,x}$ en $\mathcal{O}_{\hat{X},x}$. Afirmamos que éste es el único ideal máximo de $\mathcal{O}_{\hat{X},x}$. Sea $f \in \mathcal{O}_{\hat{X},x}$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_x$, por definición de tallo f se extiende a una sección de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ sobre alguna vecindad de x, que podemos suponer que es la misma vecindad afín U; de esta manera podemos pensar a f como un elemento en el límite inverso de $\mathcal{O}_{U_n}(U)$, es decir en el límite inverso de los anillos $A/\mathcal{I}^{n+1}$. Como $f \notin \mathfrak{m}_x$ entonces su imagen en $\mathcal{O}_{U_0}(U)$ no es el ideal máximo en x y haciendo U tan pequeña como lo necesitemos podemos suponer también que f es unidad en $\mathcal{O}_{U_0}(U) = A/\mathcal{I}$, así f es también unidad en $A/\mathcal{I}^{n+1}$ para toda n y $f \in \varprojlim A/\mathcal{I}^{n+1}$ por tanto f es unidad en el límite, entonces f es unidad en $\mathcal{O}_{\hat{X}}(U)$, en particular en el tallo $\mathcal{O}_{\hat{X},x}$; es decir, $\mathcal{O}_{\hat{X},x}$ es un anillo local con ideal máximo $\mathfrak{m}_x$.

Observación 2.4. *Consideremos A un anillo y su completación $\hat{A}$. Sean $X = Spec(A)$ y $Z = Spec(\hat{A})$, si nos fijamos en la completación formal de estos esquemas notemos que usando 2.2,1 se tiene que $\hat{X} = \hat{Z}$. Es decir, la construcción de la completación del esquema a través de un subesquema cerrado no cambia si reemplazamos A por $\hat{A}$.*

Definición 2.5. Sean X, Y, $\mathcal{I}$ como en la definición anterior, y sea $\mathcal{F}$ una gavilla coherente en X. Definimos la *completación de $\mathcal{F}$ a través de Y*, que denotamos $\hat{\mathcal{F}}$, como la gavilla sobre Y dada por:

$$\hat{\mathcal{F}} := \varprojlim \mathcal{F}/\mathcal{I}^n\mathcal{F}$$

la cual tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-módulo.

2.2. Esquemas noetherianos formales

Definición 2.6. Un *esquema noetheriano formal* es un espacio anillado local $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ con una cubierta abierta finita $\{\mathfrak{U}_i\}$ tal que para cada i se tiene que $(\mathfrak{U}_i, \mathcal{O}_X|_{\mathfrak{U}_i})$ es isomorfo como espacio anillado a la completación de algún esquema noetheriano X_i a través de un subesquema cerrado Y_i.
Un *morfismo de esquemas noetherianos formales* es un morfismo de espacios anillados locales.

Ejemplo 2.7.
1. *Si X es un esquema noetheriano y Y un subesquema cerrado, entonces su completación $\hat{X}$ es un esquema formal.*
2. *Si X es un esquema noetheriano y tomamos $Y = X$, entonces $\hat{X} = X$. Es decir, la categoría de esquemas noetherianos formales contiene a los esquemas noetherianos.*
3. *Si X es un esquema noetheriano y Y es un punto cerrado P, entonces $\hat{X}$ es un espacio unipuntual $\{P\}$ y la completación $\hat{O}_P$ del anillo local en P es su gavilla estructural.*

Definición 2.8. Un *esquema formal afín (noetheriano)* es un esquema formal obtenido de la completación de un esquema afín noetheriano a través de un subesquema cerrado.

Sean $X = Spec(A)$, $Y = V(I)$ y $\mathfrak{X} = \hat{X}$; para un A-módulo finitamente generado M consideremos la gavilla coherente $\widetilde{M}$ en X y denotamos $M^{\triangle}$ a la completación de $\widetilde{M}$ en $\mathfrak{X}$. Así, por definición $M^{\triangle}$ es una gavilla coherente en $\mathfrak{X}$.

Usaremos la notación A-*mod* para la categoría de A-módulos finitamente generados y $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-$cMod$ para la categoría de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos coherentes.

Proposición 2.9. *Sean A un anillo noetheriano, I un ideal de A y X, Y, $\mathfrak{X}$ como en la definición anterior, entonces:*

1. *el funtor $(\cdot)^{\triangle} : A\text{-}mod \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\text{-}cMod$ es un funtor exacto;*
2. *$\mathscr{I} = I^{\triangle}$ es una gavilla de ideales en $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ y para cada n tenemos el isomorfismo,*
$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}^n \cong (A/I^n)\widetilde{\ }$$
como gavillas en Y;
3. *si M es un A-módulo finitamente generado entonces:*
$$M^{\triangle} = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}.$$

Demostración. Primero observemos que como X tiene una base de abiertos afines cuyas intersecciones con Y forman una base para la topología de Y y queremos probar las afirmaciones para gavillas sobre $\mathfrak{X}$, entonces basta probar lo correspondiente en secciones para cualquier abierto afín de $\mathfrak{X}$.
1. Tomemos $B = Spec(A)$ un abierto afín de X, $J = \Gamma(U, \widetilde{I})$, $M \in A$-*mod* y $N = \Gamma(U, \widetilde{M})$. Sabemos que B es un anillo noetheriano por ser X un esquema noetheriano, también que N es un B-módulo finitamente generado por la proposición 1.19 y del corolario 1.20 tenemos que el funtor $M \mapsto N = \Gamma(U, \widetilde{M})$ es exacto de la categoría de A-módulos a la categoría de B-módulos.
Para probar la primera propiedad consideremos un A-módulo finitamente generado M, y por definición tenemos:
$$M^{\triangle} = \varprojlim \widetilde{M}/\widetilde{I^n}\widetilde{M}$$
usando 2.1, en cada abierto se calcula como:
$$\Gamma(U, M^{\triangle}) = \varprojlim \Gamma(U, \widetilde{M}/\widetilde{I^n}\widetilde{M})$$
que es lo mismo que:
$$\varprojlim N/J^nN = \hat{N}$$

donde $\hat{N}$ denota la completación J-ádica de N (Ver 2.1.2) y notemos que como la asignación $M \mapsto N$ es un funtor exacto y $N \mapsto \hat{N}$ es también exacto, entonces $M \mapsto \Gamma(U, M^{\triangle})$ es un funtor exacto para cada U y por tanto $M \mapsto M^{\triangle}$ es exacto.
2. Tomemos U como antes, así:

$$\Gamma(U, I^{\triangle}) = \varprojlim \Gamma(U, \widetilde{I}/\widetilde{I^n}) = \tilde{J}$$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = \tilde{B}.$$

Notemos que por 2.2 $\tilde{J}$ es ideal de $\tilde{B}$; es decir $\mathscr{I} = I^{\triangle}$ es gavilla de ideales en $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Consideremos ahora la sucesión exacta corta de A-módulos:

$$0 \to I^n \to A \to A/I^n \to 0$$

aplicando el funtor $(\cdot)^{\triangle}$: A-$mod \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-$cMod$ que es exacto tenemos una sucesión exacta corta de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos:

$$0 \to \mathscr{I}^n \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to (A/I^n)^{\triangle} \to 0$$

y notemos que el sistema inverso que define $(A/I^n)^{\triangle}$ como la completación de $(A/I)\tilde{}$ es estacionario; es decir, esta gavilla es anulada por $\widetilde{I^n}$, por lo tanto tenemos $(A/I^n)^{\triangle} = (A/I^n)\tilde{}$ con lo que concluimos

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}^n \cong (A/I^n)\tilde{}.$$

Finalmente, para probar la tercera afirmación observemos primero que como $\widetilde{M}$ y $\mathcal{O}_X$ son gavillas sobre X, estrictamente deberíamos poner $M^{\triangle} \cong \widetilde{M}|_Y \otimes_{\mathcal{O}_X|_Y} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ pero podemos considerar a $M^{\triangle}$ y $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ como gavillas en X mediante la extensión por cero. Sea M A-módulo finitamente generado, para un abierto U como lo hemos estado tomando tenemos $\Gamma(U, M^{\triangle}) = \tilde{N}$; por otro lado, $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ es la gavilla asociada a la pregavilla:

$$U \mapsto \Gamma(U, \widetilde{M}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = N \otimes_B \tilde{B}$$

y por 2.2 $\tilde{N} \cong N \otimes_B \tilde{B}$; por lo tanto podemos concluir el isomorfismo $M^{\triangle} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. □

Corolario 2.10. *Si X es un esquema noetheriano, Y un subesquema cerrado y $\mathfrak{X} = \hat{X}$ la completación de X a través de Y, entonces el funtor $\mathcal{F} \mapsto \hat{\mathcal{F}}$ es exacto de $\mathcal{O}_X$-cMod en $\mathcal{O}_X$-cMod. Más aún si $\mathcal{I}$ es una gavilla de ideales en Y con $\hat{\mathcal{I}}$ su completación, entonces:*

$$\hat{\mathcal{F}}/\hat{\mathcal{I}}^n\hat{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F}/\mathcal{I}^n\mathcal{F}$$

para cada n y $\hat{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

Demostración. Sea $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{O}_X$-$cMod$, así, aplicando el funtor exacto $\Gamma(\mathfrak{X}, \cdot)$ tenemos una sucesión exacta:

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

en A-mod, donde $M_i = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{F}_i)$. Como $N \mapsto \hat{N}$ es exacto en A-mod entonces tenemos la sucesión:

$$0 \to \hat{M}_1 \to \hat{M}_2 \to \hat{M}_3 \to 0;$$

luego, aplicando el funtor $(\cdot)\tilde{}$ tenemos la sucesión exacta en $\mathcal{O}_X$-$cMod$:

$$0 \to (\hat{M}_1)\tilde{} \to (\hat{M}_2)\tilde{} \to (\hat{M}_3)\tilde{} \to 0$$

tal que $(\hat{M}_i)\tilde{} \cong \hat{\mathcal{F}}_i$. En efecto, por 2.2 tenemos el isomorfismo $\hat{M}_i \cong M_i \otimes_A \hat{A}$ y usando 1.11 $(M_i \otimes_A \hat{A})\tilde{} \cong \widetilde{M_i} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\hat{A})\tilde{}$, y finalmente tenemos los isomorfismos:

$$\widetilde{M_i} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\hat{A})\tilde{} \cong \widetilde{M_i} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{Spec(\hat{A})} \cong \mathcal{F}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \hat{\mathcal{O}}_{Spec(A)} \cong \hat{\mathcal{F}}_i.$$

El resto del corolario se sigue de la proposición anterior. $\square$

Definición 2.11. Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X})$ un esquema formal noetheriano. Una gavilla de ideales $\mathscr{I} \subseteq \mathcal{O}_\mathfrak{X}$ es llamada *un ideal de definición* para $\mathfrak{X}$ si $sop(\mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I}) = \mathfrak{X}$ y el espacio anillado local $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I})$ es un esquema noetheriano.

Proposición 2.12. *Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X})$ un esquema formal noetheriano.*

1. *Si $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$ son dos ideales de definición entonces existen enteros $m, n > 0$ tales que $\mathscr{I}_1 \supseteq \mathscr{I}_2^m$, $\mathscr{I}_2 \supseteq \mathscr{I}_1^n$.*

2. *Existe un único ideal máximo $\mathscr{I}$, caracterizado por el hecho de que $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I})$ es un esquema reducido. En particular los ideales de definición existen.*

3. *Si $\mathscr{I}$ es ideal de definición, entonces $\mathscr{I}^n$ lo es para toda $n > 0$.*

Demostración. 1. Sean $\mathscr{I}_1$, $\mathscr{I}_2$ dos ideales de definición, entonces tenemos los epimorfismos de gavillas de anillos $f_1 : \mathcal{O}_\mathfrak{X} \to \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I}_1$ y $f_2 : \mathcal{O}_\mathfrak{X} \to \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I}_2$. Fijemos un punto $P \in \mathfrak{X}$, entonces el tallo de $\mathscr{I}_2$ en P, $(\mathscr{I}_2)_P$ está contenido en el ideal máximo $\mathfrak{m}_P$ del anillo local $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P}$. En efecto $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P}/(\mathscr{I}_2)_P$ es el anillo local de P en el esquema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I}_2)$ y en particular, si éste último es distinto de cero se tiene la contención $(\mathscr{I}_2)_P \subseteq \mathfrak{m}_P$. Consideremos la gavilla de ideales $f_1(\mathscr{I}_2)$ en el esquema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I}_1)$, para cada punto P, el tallo $f_1(\mathscr{I}_2)_P$ está contenido en el ideal máximo $\mathfrak{m}_P/(\mathscr{I}_1)_P$ de su anillo local $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P}/(\mathscr{I}_1)_P$. Entonces toda sección local de $f_1(\mathscr{I}_2)$ es nilpotente. Para ver esto consideremos U abierto de $\mathfrak{X}$ y $s \in f_1(\mathscr{I}_2)(U)$ una sección local; sea $P \in U$ y $s_P \in f_1(\mathscr{I}_2)_P \subseteq \mathfrak{m}_P/(\mathscr{I}_1)_P$, así para cada n, $s_P^n \in f_1(\mathscr{I}_2)_P^n \subseteq \mathfrak{m}_P^n/(\mathscr{I}_1)_P^n$, luego

$$\bigcap f_1(\mathscr{I}_2)_P^n \subseteq \bigcap \mathfrak{m}_P^n/(\mathscr{I}_1)_P^n = 0$$

la última igualdad debido a que el esquema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{I}_1)$ es noetheriano, entonces existe alguna $k > 0$ para la cual $s^k \to s_P^k = 0$ y por lo tanto la sección s

es nilpotente. Como toda sección local de $f_1(\mathscr{I}_2)$ es nilpotente y el esquema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}_1)$ es noetheriano, entonces $f_1(\mathscr{I}_2)$ es nilpotente; entonces existe $m > 0$ tal que $\mathscr{I}_1 \supseteq \mathscr{I}_2^m$. Finalmente, por simetría tenemos que existe $n > 0$ tal que $\mathscr{I}_2 \supseteq \mathscr{I}_1^n$.
2. Supongamos que el esquema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}_1)$ es reducido, de la prueba anterior se tiene que $f_1(\mathscr{I}_2) = 0$, por lo tanto $\mathscr{I}_1 \supseteq \mathscr{I}_2$; es decir, cualquier otro ideal de definición está contenido en $\mathscr{I}_1$ y por lo tanto es el máximo dentro de la familia de ideales de definición. Solamente debemos probar la existencia, la cual es una cuestión local. Supongamos que $\mathfrak{X}$ es la completación de un esquema noetheriano afín X a través de un subesquema cerrado $Y = V(I)$ y pensemos a Y con la estructura reducida inducida, usando 2.9 tenemos $\mathscr{I} = I^{\triangle}$ que es ideal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ y también $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I} \cong (A/I)\tilde{} = \mathcal{O}_Y$, entonces $\mathscr{I}$ es ideal de definición tal que $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})$ es reducido.
3. Sea $\mathscr{I}$ un ideal de definición y sea $\mathscr{I}_0$ el ideal de definición máximo, entonces existe un entero $r > 0$ tal que $\mathscr{I} \supseteq \mathscr{I}_0^r$, por tanto $\mathscr{I}^n \supseteq \mathscr{I}_0^{nr}$. Observemos que $\mathscr{I}_0^{nr}$ es un ideal de definición, lo cual podemos verificar localmente; pongamos $\mathscr{I}_0 = I^{\triangle}$, usando la notación de 2), por 2.9 tenemos que

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}_0^{nr} \cong (A/I^{nr})\tilde{}$$

y entonces $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}_0^{nr})$ es un esquema cuyo soporte es $Y = \mathfrak{X} = \tilde{X}$. Llamemos a este esquema Y', si consideramos el correspondiente morfismo de gavillas $f : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{O}_{Y'}$, entonces $(Y', \mathcal{O}_{Y'}/f(\mathscr{I})) = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})$, que es noetheriano por hipótesis y por tanto $f(\mathscr{I})$ es una gavilla coherente, luego $f(\mathscr{I}^n) = f(\mathscr{I})^n$ también es coherente y por lo tanto $(Y', \mathcal{O}_{Y'}/f(\mathscr{I}^n)) = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}^n)$ es también un esquema noetheriano. □

Proposición 2.13. *Sean $\mathfrak{X}$ un esquema formal noetheriano, $\mathscr{I}$ un ideal de definición. Para cada $n > 0$ denotamos por Y_n al esquema $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}^n)$.*

1. *Si $\mathfrak{F}$ es una gavilla coherente de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos, entonces para cada n,*

$$\mathcal{F}_n = \mathfrak{F}/\mathscr{I}^n\mathfrak{F}$$

es una gavilla coherente de $\mathcal{O}_{Y_n}$-módulos y $\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$.

2. *Supongamos que para cada n tenemos un $\mathcal{O}_{Y_n}$-módulo coherente $\mathcal{F}_n$ junto con morfismos suprayectivos $\varphi_{nm} : \mathcal{F}_m \to \mathcal{F}_n$ para cada $m \geq n$ que hacen de $(\mathcal{F}_n)$ un sistema inverso de gavillas. Supongamos también que para cada $m \geq n$, $ker(\varphi_{mn}) = \mathscr{I}^n\mathcal{F}_m$. Entonces,*

$$\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$$

es un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente y para cada n se tiene $\mathcal{F}_n \cong \mathfrak{F}/\mathscr{I}^n\mathfrak{F}$.

Demostración. 1. Como es una cuestión local, supongamos que $\mathfrak{X}$ es un esquema afín igual a la completación de $X = Spec(A)$ a través de $Y = V(I)$ y pongamos

$\mathfrak{F} = M^{\triangle}$ para algún A-módulo finitamente generado, así, de la prueba de 2.9 2) tenemos que para cada n:

$$\mathfrak{F}/\mathscr{I}^n \cong (M/I^nM)\tilde{},$$

por lo tanto $\mathcal{F}_n$ es coherente en $Y_n = Spec(A/I^n)$ y $\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$.
2. De igual forma como es una cuestión local supongamos que $\mathfrak{X}$ es un esquema afín y usando la observación 2.4 también podemos suponer que A es I-ádicamente completo; es decir, que $A = \hat{A}$ es la completación I-ádica.
Para cada n consideremos $M_n = \Gamma(Y_n, \mathcal{F}_n)$, con esto (M_n) es un sistema inverso que satisface las hipótesis de 2.2.5), por tanto $M = \varprojlim M_n$ es un A-módulo finitamente generado y para cada n, $M_n \cong M/I^nM$, como $\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$ es justamente $M^{\triangle}$ entonces es un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente y más aún,

$$\mathfrak{F}/\mathscr{I}^n\mathfrak{F} \cong (M/I^nM)\tilde{}$$

como en 1); luego $\mathfrak{F}/\mathscr{I}^n\mathfrak{F} \cong \mathcal{F}_n$. □

Teorema 2.14. *Sean A un anillo noetheriano, I un ideal y supongamos que A es I-ádicamente completo. Sean $X = Spec(A)$, $Y = V(I)$, $\mathfrak{X} = \hat{X}$, entonces los funtores $(\cdot)^{\triangle} : A\text{-}mod \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\text{-}cMod$ y $\Gamma(\mathfrak{X}, \cdot) : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\text{-}cMod \to A\text{-}mod$ son exactos y nos dan una equivalencia categórica. En particular, todo $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente es de la forma $M^{\triangle}$ para algún A-módulo M.*

Demostración. Sabemos que el funtor $(\cdot)^{\triangle} : A\text{-}mod \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\text{-}cMod$ es exacto por 2.9. Probemos que el funtor $\Gamma(\mathfrak{X}, \cdot)$ es exacto en la categoría de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos coherentes. Sea

$$O \to \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{F}_3 \to 0$$

una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulos coherentes, para cada $i = 1, 2, 3$, sea $M_i = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}_i)$, así M_i es un A-módulo finitamente generado, y tenemos la sucesión exacta izquierda:

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3,$$

sea R el conúcleo del morfismo $M_2 \to M_3$, aplicando el funtor $(\cdot)^{\triangle}$ obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \to M_1^{\triangle} \to M_2^{\triangle} \to M_3^{\triangle} \to R^{\triangle} \to 0$$

en $\mathfrak{X}$; pero cada $M_i^{\triangle} \cong \mathfrak{F}_i$, por tanto $R^{\triangle} = 0$ y como $R = \Gamma(\mathfrak{X}, R^{\triangle})$ entonces $R = 0$.
Veamos ahora que los funtores nos dan una equivalencia categórica. Si M es un A-módulo finitamente generado entonces:

$$\Gamma(\mathfrak{X}, M) = \varprojlim M/I^nM = \hat{M}$$

y por 2.2.2), como A es completo entonces $M = \hat{M}$.
Tomemos ahora $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente y sea $\mathscr{I} = I^{\triangle}$, entonces de 2.13.1), $\mathfrak{F} = \varprojlim \mathcal{F}_n$, donde para cada $n > 0$ $\mathcal{F}_n = \mathfrak{F}/\mathscr{I}^n\mathfrak{F}$, con esto el sistema inverso de

gavillas ($\mathcal{F}_n$) satisface las hipótesis de 2.13.2) y de la prueba de éste, tenemos que de hecho $\mathfrak{F} \cong M^{\triangle}$ para algún A-módulo finitamente generado. Luego, por 2.1 y usando que A es completo:

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}) = \varprojlim \Gamma(Y, (M/I^n M)\tilde{}\,) = \varprojlim M/I^n M = \hat{M} = M.$$

Esto prueba que $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ es un A-módulo finitamente generado y $\mathfrak{F} \cong \Gamma(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})^{\triangle}$. □

Corolario 2.15. *Cualquier núcleo, conúcleo o imagen de un morfismo de gavillas coherentes en esquemas formales noetherianos es, de nuevo coherente.*

Demostración. Como es una cuestión local se sigue del teorema anterior. □

2.3. El espectro formal de un anillo

Sea A un anillo noetheriano, I un ideal y consideremos al anillo A dotado con la topología I-ádica, de esta manera se tiene que $\{I^n\}_{n\geq 1}$ forma un sistema fundamental de vecindades alrededor del cero y además esta topología hace de A un anillo topológico Hausdorff y completo.

Definimos el *espectro formal de A*, al cual denotamos $Spf(A)$ como el subconjunto del espectro de A formado por los ideales que son abiertos en la topología I-ádica.

Para cada n pongamos $X_n = Spec(A_n)$ donde $A_n = A/I^{n+1}$, con esta notación definimos:

$$\mathcal{O}_{Spf(A)} = \varprojlim \mathcal{O}_{X_n}$$

Proposición 2.16. $(Spf(A), \mathcal{O}_{Spf(A)})$ *es un esquema formal noetheriano.*

Demostración. Probaremos que $(Spf(A), \mathcal{O}_{Spf(A)}) = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ donde $\mathfrak{X} = \hat{X} = V(I)$ con I el ideal que nos da la topología I-ádica en A.
Notemos que como conjuntos se tiene:

$$\begin{aligned} Spf(A) &= \{P \in Spec(A) \mid P \text{ es abierto en la topología } I\text{-ádica }\} \\ &= \{P \in Spec(A) \mid \exists n \text{ tal que } I^n \subseteq P\} \\ &= \{P \in Spec(A) \mid I \subseteq P\} \\ &= V(I) \end{aligned}$$

y si U es un abierto en $Spf(A)$ entonces:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{Spf(A)}) = \varprojlim \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_n}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

□

Así, en particular tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(Spf(A), \mathcal{O}_{Spf(A)}) &= \varprojlim \Gamma(Spf(A), \mathcal{O}_{X_n}) \\ &\cong \varprojlim A/I^n \\ &\cong A\end{aligned}$$

como espacios topológicos y en fibras se tiene:

$$\mathcal{O}_{Spf(A),x} = \varinjlim_{f\in A, f(x)\neq 0} A_f$$

Proposición 2.17. *Sea A un anillo noetheriano con la topología I-ádica y consideremos su espectro formal $(Spf(A), \mathcal{O}_{Spf(A)})$. Para $f \in A$ definimos $\mathcal{D}(f) = D(f) \cap Spf(A)$, entonces el espacio anillado $(\mathcal{D}(f), \mathcal{O}_{Spf(A)}|_{\mathcal{D}(f)})$ es isomorfo al espectro formal afín $Spf(A_f)$.*

Demostración. Sea $f \in A$, consideremos la localización $(A/I)_f \cong A_f/I_f$. Veamos que podemos identificar canónicamente a los conjuntos $Spf(A_f)$ y $\mathcal{D}(f)$. Sea $P \in D(f) \cap Spf(A)$ esto sucede si y sólo si $P \in (Spec(A) - V(f))$ y $P \in Spf(A) \Leftrightarrow P \notin V(f)$ y $P \supseteq I \Leftrightarrow f \notin P$ y $P \supset I \Leftrightarrow P_f \in Spec(A_f)$ y $P_f \supset I_f$, es decir $P_f \in Spf(A_f)$.
Tomemos ahora un abierto U de $Spf(A)$ tal que está contenido en $\mathcal{D}(f)$, entonces $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X_n}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{Spec(A/I^{n+1})})$ se identifica con el módulo de secciones de la gavilla estructural de $Spec(A_f/I_f^{n+1})$ sobre U, por tanto si ponemos $\mathfrak{Y} = Spf(A_f)$ entonces $\Gamma(U, \mathcal{O}_{Spf(A)})$ se identifica con el módulo de las secciones $\Gamma(U, \mathcal{O}_{Spf(A_f)})$. $\square$

Capítulo 3

Subesquemas cerrados de esquemas formales

En este capítulo definiremos y caracterizaremos los subesquemas cerrados de esquemas formales, también veremos que la definición de inmersión cerrada juega un papel importante en los subesquemas cerrados y veremos que las propiedades que uno espera que se cumplan para inmersiones cerradas en esquemas formales, son, en efecto ciertas.

Proposición 3.1. *Sea $\mathfrak{X}$ es un esquema formal noetheriano, entonces la gavilla de anillos $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ es coherente y el ideal de definición de $\mathfrak{X}$ es un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente.*

Demostración. La prueba es local, entonces consideremos $X = Spec(A)$, con A un anillo noetheriano I-ádicamente completo y Y el subesquema cerrado $V(I)$, al igual que en el ejemplo 1.15 , basta tomar un abierto formal afín $\mathfrak{U}_i = \varprojlim U_{i,n}$, donde cada $U_{i,n}$ es un abierto afín en $X_n = Spec(A/I^{n+1})$ y considerar la sucesión obvia con morfismos identidad restringidos. Para ver que es un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente observamos que $\mathfrak{I} = I^{\triangle}$ y usamos el teorema 2.14 □

Proposición 3.2. *Sean $\mathfrak{X}$ un esquema formal noetheriano y $\mathscr{A}$ un ideal coherente de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Si ponemos $\mathfrak{Y} = sop(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})$, entonces el espacio topológico anillado:*

$$(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}|_{\mathfrak{Y}})$$

es un esquema formal noetheriano.

Demostración. Tenemos $\mathscr{A}$ una gavilla coherente de ideales, entonces $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ es una gavilla coherente, y por ser coherente su soporte $sop(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})$ es cerrado (1.14). Consideremos $\mathfrak{I}$ ideal de definición de $\mathfrak{X}$ y pongamos:

$$X_n = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}^{n+1})$$

entonces la gavilla de anillos $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ es el límite inverso de las gavillas:

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathfrak{I}^{n+1}) = (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}^{n+1}).$$

La gavilla $(\mathscr{A} + \mathfrak{I}^{n+1})/\mathfrak{I}^{n+1}$ es un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente porque $\mathfrak{I}^{n+1}$ es coherente, y entonces $(\mathscr{A} + \mathfrak{I}^{n+1})/\mathfrak{I}^{n+1}$ es también un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{I}^{n+1}$-módulo coherente.

Sea Y_n es un subesquema cerrado de X_n definido por el ideal $\mathfrak{I}^{n+1}$, entonces concluimos que $(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}|_{\mathfrak{Y}})$ es el esquema formal correspondiente al límite inverso de los Y_n. $\square$

Con esta proposición hemos probado cómo son los subesquemas cerrados de un esquema formal noetheriano y dado que son de la forma:

$$(\mathfrak{Y}, (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})|_{\mathfrak{Y}})$$

con $\mathscr{A}$ un ideal coherente de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, diremos que este esquema es un *subesquema cerrado definido por* $\mathscr{A}$.

Notemos que la correspondencia que define esta asignación entre ideales coherentes de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ y subesquemas cerrados de $\mathfrak{X}$ es biyectiva.

3.1. Inmersiones cerradas

Definición 3.3. Un morfismo $f : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ de esquemas formales noetherianos es una *inmersión cerrada* si se factoriza como:

$$\mathfrak{Z} \xrightarrow{g} \mathfrak{Y} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$$

donde g es un isomorfismo del esquema $\mathfrak{Z}$ en el subesquema cerrado $\mathfrak{Y}$ y j es la inclusión canónica.

Notemos que como j es un monomorfismo de espacios anillados, entonces g y $\mathfrak{Y}$ son necesariamente únicos.

Definición 3.4. Sea $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morfismo de esquemas formales noetherianos. Diremos que f es un *morfismo ádico* si existe un ideal de definición $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tal que $f^{\#}(\mathscr{K}) = \mathscr{I}$ es ideal de definición de $\mathfrak{X}$.

Proposición 3.5. *Una inmersión cerrada es un morfismo de tipo finito.*

La prueba de esta proposición es un corolario del siguiente teorema que nos da una caracterización de los morfismos de tipo finito en esquemas formales, la prueba puede consultarse en [11] [pp. 439 (I.10.13.1)].

Teorema 3.6. *Sean $\mathfrak{Y}$ un esquema formal noetheriano, $\mathscr{K}$ ideal de definición de $\mathfrak{Y}$ y $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morfismo de esquemas formales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{X}$ es noetheriano, f es un morfismo ádico y si ponemos $\mathscr{I} = f^{\#}(\mathscr{K})$, el morfismo $f_0 : (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}) \to (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ es de tipo finito.*

2. *$\mathfrak{X}$ es noetheriano y es el límite inverso de un sistema inverso (X_n) tal que el morfismo $X_0 \to Y_0$ es de tipo finito.*

3. *Todo punto de $\mathfrak{Y}$ tiene una vecindad abierta formal afín V tal que tiene la siguiente propiedad:*

(P) $f^{-1}(V)$ *es unión de una familia finita de abiertos formales afines* $\{U_i\}$ *tales que el anillo* $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *es topológicamente isomorfo a un álgebra de series formales restringidas en* $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$ *para un ideal necesariamente cerrado.*

Lema 3.7. *Sean* $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morfismo de esquemas formales noetherianos y* (U_α) *una recubrimiento de* $f(\mathfrak{Y})$ *de abiertos formales afines de* $\mathfrak{X}$ *tales que* $f^{-1}(U_\alpha)$ *son abiertos formales de* $\mathfrak{Y}$*. Entonces* f *es una inmersión cerrada si y sólo si* $f(\mathfrak{Y})$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathfrak{X}$ *y para cada* α*, la restricción* $f|_{f^{-1}(U_\alpha)}$ *corresponde a un morfismo suprayectivo:*

$$\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(f^{-1}(U_\alpha), \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) \tag{3.1}$$

Demostración. Si f es una inmersión cerrada entonces f se factoriza como

$$\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{Z} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$$

con $f(\mathfrak{Y}) \cong \mathfrak{Z}$ un subesquema cerrado que es de la forma:

$$(\mathfrak{Z}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}) = (sop(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})$$

para $\mathscr{I}$ una gavilla coherente de ideales. Entonces se tiene el epimorfismo de gavillas $j^{\#} : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}$ y por el diagrama anterior el morfismo $f^{\#}$ inducido en gavillas nos da un epimorfismo $f^{\#} : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$, lo cual implica (3.1).
Ahora, supongamos que $f(\mathfrak{Y})$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{X}$ y que para cada α la restricción $f|_{f^{-1}(U_\alpha)}$ corresponde a un morfismo suprayectivo

$$\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{f_\alpha} \Gamma(f^{-1}(U_\alpha), \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$$

Pongamos para cada α, $L_\alpha = ker(f_\alpha)$. Definimos un ideal coherente $\mathscr{A}$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ tal que $\mathscr{A}|_{U_\alpha} = L_\alpha^{\triangle}$ y cero en el complemento de la unión de las U_α. En efecto, como $f(\mathfrak{Y})$ es cerrado entonces $sop(L_\alpha^{\triangle}) = U_\alpha \cap f(\mathfrak{Y})$, por lo tanto basta probar que $L_\alpha^{\triangle}$ y $L_\beta^{\triangle}$ inducen la misma gavilla en un abierto formal afín $V \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$. Si K es el núcleo del morfismo suprayectivo $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$ correspondiente a esta restricción, entonces del teorema 2.14, se tiene que $L_\alpha^{\triangle}$ y $K^{\triangle}$ coinciden en V. Así, considerando el ideal $\mathscr{A}$ se tiene que $f = g \circ j$, con $j : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ la inclusión canónica del subesquema cerrado $\mathfrak{Z}$ definido por el ideal $\mathscr{A}$ y $g : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$ es un isomorfismo de esquemas. □

Proposición 3.8.

1. *Si* $f : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$*,* $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *son inmersiones cerradas de esquemas formales noetherianos, entonces* $g \circ f$ *es una inmersión cerrada.*
2. *Sean* $\mathfrak{X}$*,* $\mathfrak{Y}$ *y* $\mathfrak{S}$ *esquemas formales noetherianos,* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ *una inmersión cerrada y* $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{S}$ *un morfismo. Entonces el morfismo* $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ *es una inmersión cerrada.*

3. *Sea $\mathfrak{S}$ un esquema formal noetheriano y $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ dos $\mathfrak{S}$-esquemas formales noetherianos tales que $\mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y}'$ es noetheriano. Si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ son dos $\mathfrak{S}$-esquemas formales noetherianos y $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$, $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}'$ son $\mathfrak{S}$-morfismos que son inmersiones cerradas, entonces $f \times_{\mathfrak{S}} g$ es una inmersión cerrada.*

Demostración. En [11] [pp.33, 0.1.3.9] se tiene un criterio para las pruebas de morfismos que heredan propiedades, usando esto es suficiente probar 1 y 2.
Para probar 1, supongamos que $\mathfrak{Y}$ es un subesquema cerrado de $\mathfrak{X}$ definido por un ideal coherente $\mathscr{I}$ y $\mathfrak{Z}$ un subesquema cerrado de $\mathfrak{Y}$ definido por un ideal coherente $\mathscr{K}$. Sea $\psi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ el morfismo en los espacios topológicos subyacentes, entonces la imagen directa $\psi_*(\mathscr{K})$ es un ideal coherente de $\psi_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}$ y por lo tanto un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente. Si consideramos el morfismo $\rho : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})/\psi_*(\mathscr{K})$ y $\mathscr{K}_1 = ker(\rho)$ que también es un ideal coherente de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ entonces tenemos que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}_1$ es isomorfo a $\psi_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ y por lo tanto $\mathfrak{Z}$ es isomorfo a un subesquema cerrado de $\mathfrak{X}$ y esto prueba 1.
Para 2, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathfrak{Y} \arrow[r, "g"'] & \mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

Para probar que el morfismo punteado es una inmersión cerrada, pongamos $\mathfrak{S} = Spf(A)$, $\mathfrak{X} = Spf(B)$ y $\mathfrak{Y} = Spf(C)$, con A un anillo noetheriano I-ádico, y como se tiene la inmersión cerrada f podemos poner $B = A/J$ con J un ideal de A y a C un A-álgebra ádica noetheriana. Por el lema anterior, basta probar que $C \mapsto (C \otimes_A B)\hat{}$ es suprayectivo. En efecto, se tiene $(C \otimes_A B)\hat{} = (C \otimes_A (A/J))\hat{} \cong C \otimes_A (A/J) \cong C/CJ$, y por lo tanto se tiene una inmersión cerrada. $\square$

Corolario 3.9. *Con las hipótesis de 3.8,2; consideremos las proyecciones $p : \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, $q : \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$, del producto fibrado:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{Y} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathfrak{Y} \arrow[r, "g"'] & \mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-módulo coherente se tiene un isomorfismo canónico de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-módulos:

$$u : g^*(f_*(\mathcal{F})) \to q_*(p^*(\mathcal{F})) \tag{3.2}$$

Demostración. Queremos definir un morfismo $g^*(f_*(\mathcal{F})) \to q_*(p^*(\mathcal{F}))$ que es lo mismo que definir $(f_*(\mathcal{F}) \to g_*(q_*(p^*(\mathcal{F}))) = f_*(p_*(p^*(\mathcal{F})))$. Pongamos $u = f_*(\rho)$, donde ρ es el morfismo canónico $\mathcal{F} \to p_*(p^*(\mathcal{F}))$. Pongamos a $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$ y

$\mathfrak{Y}$ como los espectros formales de anillos A, B y C como en 3.8.2, y entonces $\mathcal{F} = M^{\triangle}$ con M un A/J-módulo finitamente generado y como los lados de (3.2) se identifican respectivamente con $(C \otimes_A M)^{\triangle}$ y $((C/JC) \otimes_{A/J} M)^{\triangle}$, basta notar que $(C/JC) \otimes_{A/J} M = (C \otimes_A (A/J)) \otimes_{A/J} M$, que se identifica con $C \otimes_A M$. □

Corolario 3.10. *Sean X un esquema noetheriano, Y un subesquema cerrado de X, $j : Y \hookrightarrow X$ la inclusión canónica, X' un subconjunto cerrado de X y $Y' = Y \cap X'$. Entonces $\hat{j} : Y|_{Y'} \to X|_{X'}$ es una inmersión cerrada, y para todo $\mathcal{O}_Y$-módulo coherente $\mathcal{F}$ se tiene $\hat{j}^*(\mathcal{F}|_{\mathcal{Y}'}) = (j_*(\mathcal{F}))|_{X'}$.*

3.2. Avances recientes acerca de esquemas formales

A pesar de que los esquemas formales fueron introducidos por Grothendieck en [11], como se desarrollaron en el presente trabajo, no ha sido sino hasta los últimos años que el estudio de éstos se ha intensificado. Algunos aspectos categóricos de los esquemas formales han sido estudiados en [6], [1], [2] y [5]. Propiedades de morfismos entre esquemas formales en [16], [3] y [4]. Por supuesto aquí solamente se mencionan algunos de los artículos que hay al respecto.

Usando la idea de completaciones en [9] se introduce y estudia la noción de completación de una categoría a través de una subcategoría usando categorías trianguladas compactamente generadas, en particular se obtienen las completaciones de esquemas noetherianos a través de subesquemas cerrados.

Finalmente, cabe mencionar que también existen contribuciones a la teoría de esquemas formales restringiendo las hipótesis que se piden originalmente, por ejemplo en [15] se estudian esquemas formales noetherianos que no son ádicos.

Bibliografía

[1] Alonso, L., Jeremías, A., Lipman, J. *Duality and flat base change on Formal Schemes* Contemp. Math. 244, pp. 3-90, 1999.

[2] Alonso, L., Jeremías, A., Lipman, J. *Correction to the paper: Duality and flat base change on Formal Schemes* Proc. Amer. Math. Soc. 355, núm. 6, 2523-2543, 2003.

[3] Alonso, L., Jeremías, A., Pérez, M. *Infinitesimal lifting and Jacobi criterion for smoothness on formal schemes* Comm. Alg. Vol. 35 Issue 4, pp. 1341-1367, 2007.

[4] Alonso, L., Jeremías, A., Pérez, M. *Local structure theorems for smooth maps of formal schemes* J.Pure Appl. Algebra 213, núm. 7, pp. 1373-1398, 2009.

[5] Alonso, L., Jeremías, A., Pérez, M., Vale, M.J. *On the existence of a compact generator on derived category of a noetherian formal scheme* Appl. Categ. Structures 19, núm. 6, pp. 865-877, 2011.

[6] Alonso, L., Jeremías, A., Souto, M. J. *Bousfield localization on formal schemes* J. Algebra 278, núm. 2, pp. 585-610, 2004.

[7] Atiyah, M.F., Macdondald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.

[8] Bourbaki, N. *Algèbre Commutative.* Eléments de Math. 27,28,30,31. Hermann, Paris 1961-1965.

[9] Efimov, A.I. *Formal completion of a category along a subcategory* Preprint: arXiv:1006.4721v2 [math.AG] 12 Aug 2010

[10] Fantechi, B., Göttsche, L., Illusie, L., Kleiman, S.L., Nitsure, N., Vistoli, A. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained.* American Mathematical Society, Survey 123, 2005.

[11] Grothendieck, A., Dieudonné, J.A. *Éléments de Géométrie Algébrique. I. Le Langage des Schémas.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[12] Görtz, U., Wedhorn, T. *Algebraic Geometry I.* Vieweg+Teubner Verlag — Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010.

[13] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag New York Inc. 1977.

[14] Mac Lane, S., Moerdijk, I. *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory.* Springer-Verlag New York Inc. 1992.

[15] Yasuda, T. *Non-adic formal schemes* International Mathematics Research Notices, 2417-2475, 2009(2009).

[16] Yekutieli, A. *Smooth formal embeddings and the residue complex* Can. J. Math. Vol.50(4), pp. 863-896, 1998.

[17] Zaldivar, F. *Introducción al álgebra conmutativa* Notas electrónicas: http://dl.dropboxusercontent.com/u/30868497/conmutativa.pdf, 17 de mayo 2013.