



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
FACULTAD DE CIENCIAS

HOLOGRAFÍA, CAMPO DE DIRAC Y EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
MANUEL DE LA CRUZ LÓPEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. ÉRICK LEONARDO PATIÑO JÁIDAR
FACULTAD DE CIENCIAS

MIEMBRO COMITÉ TUTOR
DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO COMITÉ TUTOR
DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Holografía, Campo de Dirac y el Grupo de Renormalización

Manuel de la Cruz López

29 de julio de 2014

En la física la belleza podría resumirse como una suerte de simplicidad conceptual.

J. M. Maldacena.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ SUSY	1
1.1.1. Simetrías	2
1.1.2. El Limite de N Grande	3
1.2. Generalidades de Teoría de Cuerdas IIB	5
1.2.1. El espectro de IIB	5
1.2.2. D-Branas	7
1.3. Espacio Anti de Sitter	10
1.3.1. Coordenadas Globales	10
1.3.2. Coordenadas de Poincaré	12
1.4. La Correspondencia AdS/CFT	13
1.5. Diccionario de la Correspondencia AdS/CFT	17
1.5.1. Correspondencia entre Parámetros	17
1.5.2. Correspondencia entre Simetrías	18
1.5.3. Correspondencia entre Estados/Operadores	18
1.5.4. Conexión UV/IR	20
1.5.5. Funciones de Correlación - La prescripción GKPW	21
1.5.6. Holografía y el Grupo de Renormalización	23
2. Campo de Dirac en AdS	25
2.1. Vielbein	25
2.2. Matrices Gamma en $d+1$ dimensiones	26
2.2.1. d par	26
2.2.2. d impar	27
2.2.3. Álgebra de Clifford curva	27
2.3. La conexión de Espín	27
2.4. La acción Fermiónica	28
2.5. Variación de la Acción	29
2.6. Condiciones de Frontera	29
2.6.1. Condiciones de frontera de Dirichlet	30
2.6.2. Condiciones de Frontera de Neumann	32
3. Renormalización en Teoría de Campos	34
3.1. Introducción	34
3.2. Divergencias y Renormalización	35
3.2.1. ¿ Constantes de acoplamiento variables ?	37
3.3. La función β	38
3.4. Ecuación de Callan-Symanzik	39
3.5. El grupo de Renormalización	41

3.5.1. Grupo de Renormalización en Teoría de Campos	42
4. Renormalización Holográfica	47
4.1. Funciones de Correlación Renormalizadas	47
4.1.1. Análisis Asintótico	48
4.1.2. Regularización	48
4.1.3. Contratérminos	49
4.1.4. Acción en la Capa de Masa Renormalizada	49
4.1.5. Funciones de 1 punto	49
4.1.6. Correladores de n puntos	50
4.1.7. Callan-Symanzik Holográfica	50
4.2. Renormalización Holográfica para el Campo de Dirac	50
4.2.1. Ecuación de Dirac en AdS	50
4.2.2. Prescripción	51
4.2.3. Correlador Renormalizado	53
4.3. Implementación del Grupo de Renormalización de Wilson en Holografía	53
4.3.1. Formulación del Flujo Holográfico Wilsoniano	53
4.3.2. Flujo RG - Hamilton-Jacobi	55
4.3.3. Consideraciones Finales al Capítulo	56
5. Funciones Beta Holográficas	59
5.0.4. Hamilton-Jacobi y flujo RG	59
5.0.5. Deformaciones	61
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	66
A. Acción de Contratérminos	67

Resumen

El grupo de renormalización es una teoría que describe cómo los sistemas físicos cambian al variar la escala de energía o distancia. Goza de enorme potencial de aplicabilidad y es una herramienta muy poderosa para extraer dinámica a bajas energías cotejables con el experimento. El grupo de renormalización puede implementarse geoméricamente en la llamada correspondencia AdS/CFT o dualidad holográfica. Esta teoría permite explorar el régimen de acoplamiento fuerte de una teoría cuántica de campos definida sobre un espacio plano d -dimensional utilizando una configuración gravitacional asintóticamente anti de-Sitter $(d + 1)$ -dimensional. La coordenada extra define una escala de energía característica y su variación en el fondo gravitacional codifica de manera natural como la teoría d -dimensional y sus acoplamientos cambian con la escala.

Tal variación de los acoplamientos o funciones beta, se modelan en el fondo gravitacional a través de una ecuación de Hamilton-Jacobi para la acción de frontera que a su vez, implementa las condiciones de frontera de los campos que se propagan en el fondo [4; 5]. En [4] se reportó esta técnica aplicada al campo escalar y vectorial mientras que en [1] se realizó para el campo fermiónico con algunos ejemplos de deformaciones que rompen simetrías de la teoría de campo y que son modeladas en la acción de frontera. Es interesante este último ya que se ha reportado en [32] que puede constituir una herramienta para describir, al menos cualitativamente, sistemas de materia condensada fuertemente acoplada como superconductividad. Los acoplamientos de estas teorías pueden cambiar con la escala y la herramienta del grupo de renormalización holográfico es entonces aplicable.

En este trabajo se revisaron las ideas del grupo de renormalización holográfico para fermiones siguiendo primordialmente a [1] y a diferencia de este, fue utilizada en esta tesis una acción fermiónica no antisimetrizada llegando a los mismos resultados. Se agregó en este trabajo la discusión en torno a la naturaleza de las condiciones de frontera del espinor que presenta sutilezas respecto a los campos escalares y vectoriales debido al grado de la ecuación de movimiento reportado en [9; 12; 3] e implementado aquí sistemáticamente. Se añadió también una revisión de [7] sobre la renormalización holográfica de las funciones de correlación para espinores siguiendo primordialmente a [21; 11]. Finalmente, para definir el campo fermiónico en anti de-Sitter, fue necesario hacer revisión y cálculo explícito de la conexión de espín y la derivada covariante para la métrica de anti-de Sitter y calcular la ecuación de movimiento emergente en esta configuración.

Palabras clave: holografía, funciones beta, campo fermiónico.

Abstract

The renormalization group is a theory that describes how a physical system changes as a function of distance (or energy) scale. It has a great potential applicability and is a powerful framework to extract low energy dynamics observable in experiments. The renormalization group can be applied in the context of the so-called AdS/CFT correspondence or holographic duality. This theory allows to explore the strong coupling regime of a quantum field theory defined on d -dimensional flat spacetime using a gravitational configuration asymptotically $(d + 1)$ -dimensional anti de-Sitter. The extra coordinate is interpreted as a distance (or energy) scale and its running over the bulk spacetime encodes, in a natural way, how the quantum field theory and its couplings run with scale.

The running of the couplings (beta functions), are modeled by Hamilton-Jacobi equation for the boundary action that, by the way, implements the boundary conditions of the fields that propagate in the bulk. [3] discusses this idea for scalar and vector fields and [1] reports for fermion fields with some examples of deformations codified in the boundary action that break certain symmetries. The last paper is interesting because [32] explore holographic fermionic fields to describe, qualitatively at least, condensed matter systems like superconductivity in strong coupling regime. The running of the couplings can occur and the renormalization group flow can be applied.

The present thesis explores the previous ideas following [1] with the difference that this work uses non-antisymmetrized action for Dirac fields and arrives to the same results. The present work incorporates a review of boundary conditions that spinor fields must obey following [9; 12; 3] and implements here systematically. The thesis adds a review based on [7] on holographic renormalization of correlation functions applied for fermions following [21; 11]. Finally, the Dirac fields in anti de-Sitter spacetime need a well defined spin connection and covariant derivative so this thesis calculates them explicitly.

Keywords: Holography, beta-functions, fermionic field.

Capítulo 1

Introducción

Discutiremos brevemente la correspondencia AdS/CFT. Esta teoría es la clase de ejemplos mejor establecida dentro del contexto de la dualidad norma/gravedad. De acuerdo con esta dualidad, una teoría gravitacional en un espacio asintóticamente anti de Sitter (aAdS) producto con una variedad compacta M , es exactamente equivalente a una teoría de campos (QFT) que *vive* en la frontera de aAdS. También llamada correspondencia holográfica, permite igualar el régimen de acoplamiento fuerte de la teoría de campos con el régimen de acoplamiento débil en la teoría de cuerdas y viceversa. La equivalencia de ambas teorías implica, al menos en principio, la posibilidad de obtener información completa de un lado de la dualidad realizando cálculos en el otro lado. En este trabajo interesa la correspondencia entre una teoría conforme de campos (CFT) llamada Super Yang Mills con $\mathcal{N} = 4$ supersimetría y grupo de norma $SU(N)$ definida sobre Minkowski $(3 + 1)$ dimensional y la teoría de Cuerdas tipo IIB $(9 + 1)$ dimensional, de los cuales, 5 dimensiones corresponden a un espacio-tiempo asintóticamente anti de Sitter y las restantes codifican una esfera 5 dimensional¹. Exploremos en este capítulo las principales características de esta teoría.

1.1. Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ SUSY

Super Yang-Mills (SYM) es una teoría supersimétrica remotamente similar a Cromodinámica Cuántica (QCD). Considerando que el grupo de norma es $SU(N)$, su contenido consiste en

- Campo Gluónico $(A_\mu(x))_{c\bar{c}'}$ que transforma en la representación adjunta de $SU(N)$ con $c, \bar{c}' = 1, \dots, N$
- 6 campos escalares reales sin masa² $(\Phi^e(x))_{c\bar{c}'}$ en la representación adjunta de $SU(N)$ con $e = 1, \dots, 6$
- 4 espinores de Weyl izquierdos sin masa³ $(\Psi^f(x))_{c\bar{c}'}$ en la representación adjunta de $SU(N)$ con $f = 1, \dots, 4$

Los campos A_μ , Φ^e y Ψ^f se acoplan con términos cúbicos y cuárticos que dan lugar a un lagrangiano que generaliza al de Yang-Mills⁴.

¹Se discute en esta introducción las dimensiones estándar, en el capítulo 5 no obstante, se trabaja con AdS_4

²O equivalentemente 3 campos escalares complejos

³Los cuatro campos de Weyl son equivalentes a 2 campos de Dirac si descomponemos este como espinores de Weyl izquierdo y derecho y trabajamos en la base de Weyl.

⁴ $\mathcal{L}_{YM} \propto Tr [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]$

1.1.1. Simetrías

La teoría es invariante bajo transformaciones que mezclan a los campos bosónicos y fermiónicos con 4 supercargas Q_α^f ($f = 1, \dots, 4$) fermiónicas⁵. Todos los campos de la teoría están emparentados entre sí a través de la supersimetría, por tanto forman un solo multiplete conocido como *multiplete vectorial* $\mathcal{N} = 4$.

Las funciones de correlación de los campos básicos de la teoría son finitos, es decir, no poseen divergencias al calcular los diagramas de Feynman asociados. Para funciones de correlación de estos campos básicos, la teoría es finita a todo orden y su función beta asociada es nula⁶ incluso a nivel no perturbativo⁷. La finitud de la teoría sucede por la supersimetría y por la simetría ante reescalamientos:

$$x^\mu \rightarrow sx^\mu. \quad (1.1)$$

El generador D de la transformación (1.1), satisface

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, J_{\mu\nu}] = 0.$$

En donde P_μ y $J_{\mu\nu}$ son los generadores traslaciones, rotaciones y boost respectivamente y forman el grupo de Poincaré (que también es, por supuesto, una simetría de la teoría). Es común utilizar una base de operadores que posean eigenvalor definido Δ bajo D , llamado *dimensión de escalamiento* o simplemente *dimensión*. Un operador transforma bajo (1.1) de acuerdo con

$$O(x) \rightarrow O'(x) = s^\Delta O(sx). \quad (1.2)$$

Se incluye en la lista de simetrías las *transformaciones conformes especiales* que transforman las coordenadas como

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b_\nu x^\nu + b^2 x^2} \quad (1.3)$$

Con generadores K_μ que verifican

$$\begin{aligned} [K_\mu, K_\nu] &= 0 \\ [J_{\mu\nu}, K_\lambda] &= -i(\eta_{\mu\lambda}K_\nu - \eta_{\nu\lambda}K_\mu) \\ [P_\mu, K_\nu] &= 2iJ_{\mu\nu} - 2i\eta_{\mu\nu}D \\ [D, K_\mu] &= iK_\mu. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Todos los 15 generadores cierran entre sí y forman el *álgebra conforme* que codifica la tabla de multiplicar del *Grupo Conforme*. En efecto, definiendo

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{J}_{\nu\mu}, \quad \mathcal{J}_{\mu 4} \equiv \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu), \quad \mathcal{J}_{45} \equiv D, \quad \mathcal{J}_{\mu 5} \equiv \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu), \quad (1.5)$$

puede verse que \mathcal{J}_{MN} ($M, N = 0, \dots, 5$) satisfacen el álgebra de Lorentz [2.5] pero con métrica $\eta_{MN} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, -1)$. En otras palabras, el grupo conforme en $(3+1)$ -dimensiones es isomorfo al grupo $SO(4, 2)$. Por esta razón SYM es una *teoría de campos conforme*. Las teorías conformes son de interés intrínseco ya que describen teorías de campo en el régimen de ultra altas (bajas) energías codificadas a través del punto fijo UV (IR) del grupo de renormalización (ver sección 3.5). Podemos incorporar en el grupo conforme a los generadores de la supersimetría Q^f y sus conjugados complejos \bar{Q}_f ⁸. Al ser generadores fermiónicos, obedecen relaciones de anticonmutación (impares) entre ellos y junto con las relaciones

⁵De aquí el nombre $\mathcal{N} = 4$

⁶ver sección (3.3)

⁷Las divergencias que ocurren en teoría de campos se analizan en el capítulo 3.

⁸ Q^f (\bar{Q}_f) transforma en la representación fundamental (antifundamental) de $SU(4)$.

de conmutación bosónicas (pares) cierran completamente para formar una súper álgebra gradada llamada súper Poincaré. Más aún, incorporando los generadores D y K_μ , el álgebra cierra con nuevos generadores fermiónicos $S_{\alpha f}$ y $\bar{S}^f_{\dot{\alpha}}$ llamados *supercargas conformes* y nuevos generadores bosónicos R_A ($A = 1, \dots, 15$) en el álgebra de $SU(4)$ llamados *cargas R* que deja invariante al campo gluónico $(A_\mu(x))_{c\bar{c}'}$ pero rota entre sí a los 4 campos fermiónicos $(\Psi^f(x))_{c\bar{c}'}$ y mezcla entre sí a los 6 campos escalares $(\Phi^e(x))_{c\bar{c}'}$. El álgebra resultante codifica la teoría *superconforme*, contiene una subálgebra $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$ llamada *simetría R* que es interna global.

1.1.2. El Limite de N Grande

Como se mencionó en las secciones anteriores, al generalizar Yang-Mills consideramos el grupo de norma de como $SU(N)$. La teoría con número de colores arbitrario mantiene la libertad asintótica y el confinamiento[3.3]; propiedades esenciales de Yang-Mills. Otro posible reescrito de la teoría es tomar el limite de 't Hooft:

$$N \rightarrow \infty, \quad \text{con} \quad \lambda \equiv g_{YM}^2 N \text{ fija} \quad (1.6)$$

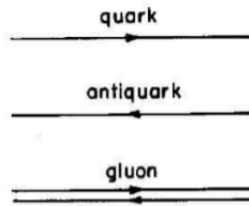
Donde λ es llamado acoplamiento de 't Hooft⁹. La expresión anterior implica que $g_{YM}^2 \rightarrow 0$. A pesar de ello la teoría no se vuelve libre y la función beta asociada sigue siendo finita y negativa, es decir, mantenemos la libertad asintótica y el confinamiento. Este reescrito de la constante de acoplamiento permite considerar a $1/N$ como parámetro pequeño en el desarrollo perturbativo¹⁰. Para analizar como intervienen los factores de N y λ en el desarrollo perturbativo conviene reescribir los campos de la teoría. Por ejemplo, para el campo gluónico, el reescrito $A_\mu \rightarrow g_{YM} A_\mu$ permite sacar un factor global en la acción de Yang-Mills,

$$S_{YM} \sim \frac{1}{g_{YM}^2} Tr [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]. \quad (1.7)$$

El factor global es $1/g_{YM}^2 \equiv N/\lambda$. Con esta notación, el correlador de dos puntos adopta la forma

$$\langle A_{c\bar{c}'}^\mu(x) A_{d\bar{d}'}^\nu(0) \rangle \propto \frac{\lambda}{N} \frac{\eta^{\mu\nu}}{x^2} \left(\delta_{cd} \delta_{\bar{c}'\bar{d}'} - \frac{1}{N} \delta_{c\bar{c}'} \delta_{d\bar{d}'} \right). \quad (1.8)$$

Enfaticemos que el campo gluónico $[A_\mu(x)]_{c\bar{c}'}$ porta dos índices de color y anticolor¹¹. Para seguir la pista a esta estructura de color, es de utilidad considerar la *notación de doble línea* sugerida por 't Hooft. Consiste en dibujar la línea asociada a un gluón como un par de líneas de quark-antiquark (asociados a los índices c y \bar{c})

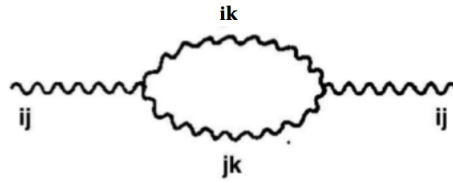


El diagrama de Feynman de un lazo correspondiente a la auto energía del gluón contiene dos vértices y un índice de color libre y por tanto su amplitud escala como $g_{YM}^2 N$,

⁹Si incluimos quarks en la teoría también consideramos el número de sabores fijo.

¹⁰Además, la diferencia entre $SU(N)$ y $U(N)$ se vuelve imperceptible en este limite ya que el número de campos de norma independientes escala como $(N^2 - 1)$ [22].

¹¹El primer (segundo) índice del campo gluónico transforma en la representación fundamental (antifundamental) de $SU(N)$



Los vértices de gluón y quark-antiquark dibujados en notación de doble línea se muestran en la figura (1) mientras que la auto energía del gluón está esquematizada en la figura (2).

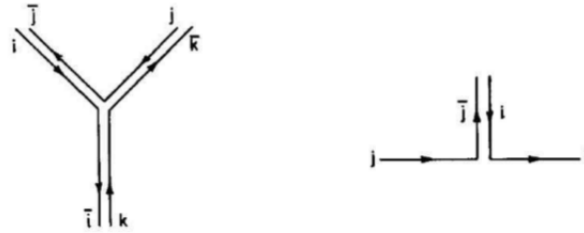


Figura 1: Vértices en notación de doble línea[22].

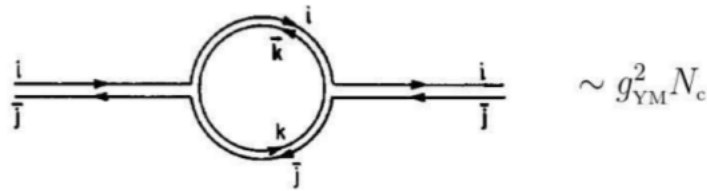
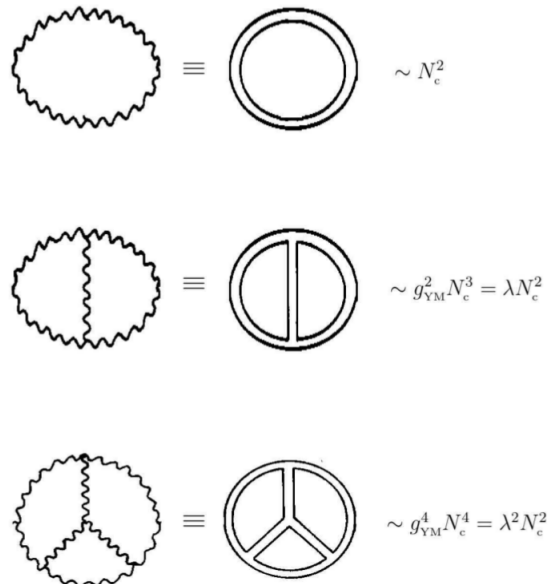


Figura 2: Auto energía del gluón en notación de doble línea[22].

Los diagramas que contribuyen a la amplitud de vacío (funciones de cero puntos), comúnmente llamadas burbujas de vacío, pueden reescribirse también[22],



Los parámetros que ocurren en los correladores en el desarrollo perturbativo para las burbujas de vacío, genéricamente escalan de acuerdo con

$$\left(\frac{\lambda}{N}\right)^a \left(\frac{N}{\lambda}\right)^b (N)^c$$

Donde a es el número de propagadores, b el número de vértices y c los lazos de quark cuyo color queda sin determinar. Los ejemplos de la figura anterior corresponden a *diagramas planares* definidos como aquellos que pueden dibujarse sin cruzar líneas. A L lazos su conteo de potencias es proporcional a $N^2 \lambda^{L-1}$. Existen diagramas que no son planares que están suprimidos por factores adicionales de $1/N^2$ respecto a los planares si N es grande. Lo interesante de este análisis es que en el límite de 't Hooft la teoría se simplifica ya que elimina todos los diagramas no planares, siendo los planares los que dominan la dinámica¹². Más aún, en el límite de N grande, las glubolas¹³ no interactúan entre sí y están débilmente acopladas. De igual manera los mesones se vuelven libres e interactúan débilmente, mientras que los bariones se vuelven infinitamente pesados y solo son visibles como objetos solitónicos[37]. Es el acoplamiento de t'Hooft el que se considera como parámetro para el desarrollo perturbativo en la teoría de super Yang-Mills.

1.2. Generalidades de Teoría de Cuerdas IIB

La teoría de cuerdas es un formalismo en el cual, se considera a una cuerda como objeto básico. La cuantización de esta produce una torre infinita de campos cuyas excitaciones básicas pueden verse como estados de partícula. Uno de esos estados, corresponde al campo de espín 2 llamado *gravitón*. En este formalismo, por tanto, el propio espacio-tiempo es dinámico. El enfoque de la teoría es considerar la relatividad general como una teoría efectiva (descripción aproximada) a bajas energías que hace falta modificar para describirla cuántica y perturbativamente a distancias pequeñas¹⁴. Este enfoque es el punto de partida que termina siendo un candidato a describir la gravedad cuántica. A este respecto, los agujeros negros deben formar parte de la descripción de una teoría cuántica de la gravedad en virtud de la teoría de Hawking. En esta sección revisaremos brevemente los principales características de la teoría de cuerdas IIB por su relevancia en la correspondencia AdS/CFT.

1.2.1. El espectro de IIB

La teoría de cuerdas IIB posee supersimetría $\mathcal{N} = 2$ y es quiral. Su espectro se obtienen de los sectores:

- Sector NS-NS. (Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz)
 - $\phi(x)$ Dilatón
 - $h_{MN}(x)$ Gravitón
 - $B_{MN}(x)$ Campo de Kalb-Ramond Antisimétrico
- Sector R-R. (Ramond-Ramond)
 - $C(X)$ Escalar R-R o Axión
 - $C_{MN}(x)$ 2-forma R-R
 - $C_{MNPQ}^+(x)$ 4-forma autodual de Hodge

¹²Otro aspecto interesante es que el desarrollo perturbativo para la amplitud de vacío tiene la misma forma que el desarrollo para la amplitud de vacío de una teoría de cuerdas cerradas (y abiertas si incluimos quarks).

¹³Operadores compuestos con los campos básicos que forman productos invariantes de norma. En QCD, un operador $G \sim \text{Tr}[F^2]$ actúa sobre el vacío para crear glubolas.

¹⁴En el contexto de teoría cuántica de campos, la acción de Einstein-Hilbert es perturbativamente no renormalizable (3).

- Sector NS-R y R-NS

$\lambda_s^1, \lambda_{s'}^2$ Dilatinos. Espinores de Majorana-Weyl de la misma quiralidad

χ_{MS}^1, χ_{MS}^2 Gravitino. Vector x espinor de Majorana-Weyl

Los campos B_{MN} , C , C_{MN} y C_{MNPQ}^+ son de norma con intensidades de campo asociadas. A bajas energías ($E \ll l_c^{-1}$) la acción de cuerdas IIB se reduce a una acción efectiva que sólo involucra estados no masivos,

$$S_{IIB,ef} = S_{SUGRA} + S_{\alpha'} \quad (1.9)$$

Donde el primer término domina a bajas energías y es conocida como *Supergravedad* (SUGRA) tipo IIB en $(9 + 1)$ dimensiones cuya acción es pesada con $1/16\pi G_N$ y

$$16\pi G_N \equiv 2\kappa_{10}^2 = (2\pi)^7 g_c^2 l_c^2$$

Cada solución a las ecuaciones de movimiento de (1.9) define un *fondo*, es decir, una asignación específica de los valores esperados para cada uno de los campos de la teoría. Sobre este fondo se propagan las cuerdas que representan pequeñas fluctuaciones al rededor del valor promedio.

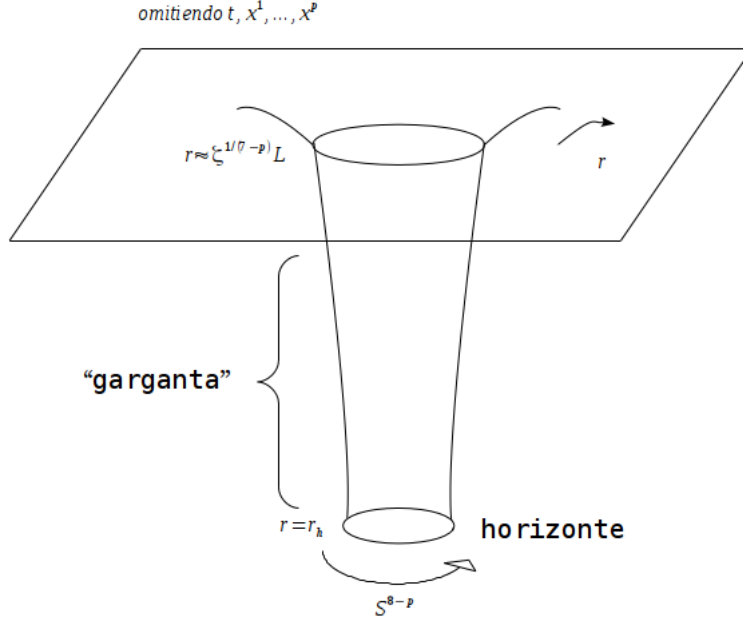
Una solución particularmente relevante en AdS/CFT es la *p-brana negra*, que en el caso extremal adopta la forma¹⁵,

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(r)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2) \\ e^\phi &= H(r)^{(3-p)/4} \\ C_{10\dots p} &= g_c^{-1} (1 - H(r)^{-1}) \\ H(r) &= 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^{7-p}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Propiedades de la p-brana negra

La solución (1.10) es independiente de t, x_1, \dots, x_p y posee simetría esférica en la esfera S^{8-p} . Se reduce a Minkowski $(9 + 1)$ -dimensional cuando $r \gg L, r_h$ y posee un horizonte de eventos en $r = r_h \rightarrow 0$ con topología $S^{8-p} \times \mathbb{R}^p$.

¹⁵La brana negra extremal se encuentra en equilibrio debido a que la atracción gravitatoria (debido a su masa) se compensa con la repulsión debido a la carga. Las branas extremales saturan la desigualdad BPS: $M \geq \frac{NVol(p)}{(2\pi)^p g_c l_p^{p+1}}$



La solución (1.10) es un objeto solitónico que generaliza a p dimensiones al agujero negro de Reissner-Nordström con carga eléctrica RR.¹⁶

$$Q = \frac{(7-p)\Omega_{8-p}}{(2\pi)^{(7-p)}g_c} \left(\frac{L}{l_c}\right)^{(7-p)} \quad (1.11)$$

La carga del objeto está cuantizada¹⁷

$$L^{(7-p)} \sim g_c l_c^{(7-p)} N. \quad (1.12)$$

Esta solución no radia, su entropía y temperatura es cero si el horizonte de eventos es cero (como es el caso extremal)¹⁸.

1.2.2. D-Branas

La teoría de cuerdas IIB incluye otros tipos de soluciones como la solución de *cuerda negra* cargada bajo B_{MN} . En el caso extremal puede mostrarse que su masa y carga están dados por $M = nVT$ donde T es la tensión de la cuerda. Físicamente representa una colección de cuerdas apiladas (es un estado 1/2BPS) y estiradas. Todas las branas de la teoría están emparentadas entre sí a través de dualidad S que posee la teoría IIB con grupo discreto $SL(2, \mathbb{Z})$ ¹⁹. Dado que la solución de cuerda negra (1-dimensional) representa a los campos macroscópicos de muchas cuerdas fundamentales apiladas, parece natural buscar soluciones que generalicen tal sistema a p -dimensiones. Estas son las llamadas *D-branas*.

Las $D(p)$ -branas son objetos extendidos en p dimensiones con grosor infinitesimal en las direcciones $(9-p)$ restantes. Sus excitaciones se describen a través de cuerdas abiertas cuyos extremos tienen libertad de deslizarse a lo largo de las direcciones paralelas a la brana (i.e. condiciones de Neumann) y se mantienen fijas en las direcciones transversales (i.e. Condiciones de Dirichlet) manteniendo a la cuerda

¹⁶La carga total se obtiene con ley de Gauss integrando el flujo de la intensidad de campo asociado $G_{r01\dots p} \sim \partial_r C_{01\dots p}$.

¹⁷Argumento de discretización de Dirac

¹⁸En el caso no extremal, la radiación de un agujero negro puede verse como la creación y aniquilación de partículas y un efecto de tunelaje en el horizonte de eventos. La entropía de un agujero negro se calcula con la célebre ecuación de Bekenstein-Hawking (1.48).

¹⁹La misma que posee SYM.

adherida a la brana. Las cuerdas abiertas sólo pueden existir en presencia de una Dp-brana, como consecuencia de su definición. La tensión de la cuerda es la misma que la cuerda cerrada, $1/2\pi l_c^2$; sus puntos internos son indistinguibles (es una cuerda fundamental) y se pueden mover en todas direcciones. En la teoría de cuerdas, las D-branas son soluciones no perturbativas, es decir, son solitones. Los modos de excitación sin masa de la D-brana están asociados a campos definidos sobre ella²⁰, por ejemplo, campos escalares $\Phi^i(x^\nu)$; campos de norma $U(1)$, $A_\alpha(x^\nu)$ y campos espinoriales $\Psi(x^\nu)$.

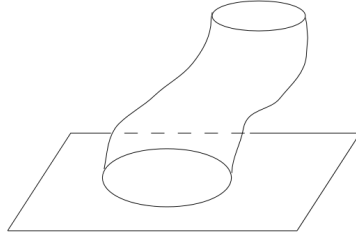
Calculando amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas, podemos determinar las interacciones entre ellas y construir la acción que describe su dinámica. A bajas energías, donde $E \ll l_c^{-1}$, las interacciones se pueden resumir en una acción efectiva (con campos no masivos descritos arriba): $S_{eff} = S_{DBI} + S_{\alpha'}$. Donde

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma \sqrt{-det(\partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \eta_{MN} + 2\pi l_c^2 F_{\alpha\beta})} + \text{fermiones}, \quad (1.13)$$

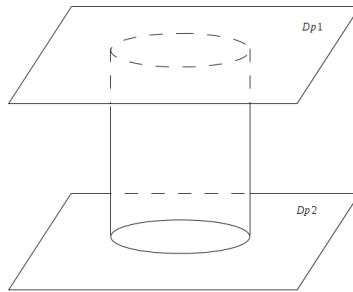
es la acción de Dirac-Born-Infeld (DBI) supersimetrizada²¹. La tensión de la brana (energía por unidad de volumen p-dimensional) esta controlada por T_{Dp} . La acción completa incluye una serie infinita de correcciones en potencias de l_c y cuando los campos son constantes, representa la acción exacta. En caso contrario, contribuyen términos de altas derivadas (por ejemplo $\partial_\alpha \partial_\beta F_{\gamma\delta}$) codificados en la acción $S_{\alpha'}$ [37]. Es posible acoplar los modos de supergravedad generalizando la acción DBI a $S_{DBI} + S_{WZ,CS}$ donde $S_{WZ,CS}$ denota la acción de Wess-Zumino (o Chern-Simons),

$$S_{DBI} + S_{WZ} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma e^{-\phi} \sqrt{-det[\partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N (g_{MN} + B_{MN}) + (2\pi l_c^2) F_{\alpha\beta}]} \\ + T_{Dp} \int d^{p+1}\sigma \sum_{p' \leq p} C_{(p'+1)} \wedge e^{\mathbf{B} + 2\pi l_c^2 F_{(2)}} + \dots \quad (1.14)$$

Donde B_{MN} es el campo de Kalb-Ramond antisimétrico y $C_{(p+1)}$ es la forma Ramond-Ramond (1.2.1). La presencia de este último implica que la D-brana tiene carga RR y su densidad de carga es igual a su tensión T_{Dp} (es un estado BPS). La tensión controla la manera en que la D-brana se acopla a la métrica y por tanto su amplitud para emitir gravitones. Por tanto es posible inferir su valor a partir del calculo de la amplitud de emisión de un gravitón,



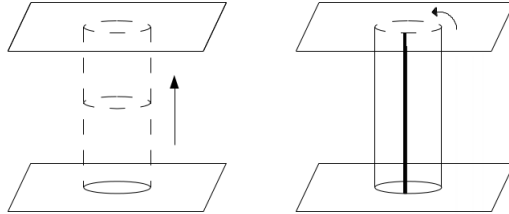
o a partir de la amplitud de interacción entre dos d-branas,



²⁰El espectro cuántico de la cuerda abierta da lugar a una torre infinita de estados con $m^2 = n^2/l_c^2$ con $n = 0, 1, \dots$

²¹El primer término dentro del determinante es la métrica inducida sobre la D-brana, mientras que el segundo es la intensidad de campo $\partial_a A_b - \partial_b A_a$.

Es decir, la amplitud puede calcularse e interpretarse de dos maneras distintas. Por un lado, la amplitud de que las dos D-branas interactúen a través del intercambio de una cuerda cerrada y por otro interpretar el mismo proceso como un lazo de cuerda abierta que se extiende de una D-brana a la otra y su correspondiente anticuerda (seguida de la aniquilación del par):



La amplitud resulta ser nula por una cancelación de lazos de bosones y fermiones en la descripción de cuerda abierta o entre la atracción gravitacional (y dilatónica) y la repulsión del campo RR en la descripción de cuerda cerrada[37]. Más aún, las cuerdas abiertas y cerradas pueden dar descripciones alternativas de un mismo proceso, propiedad llamada *dualidad de cuerdas abiertas y cerradas*. Comparando ambas descripciones Joseph Polchinski demostró que

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}, \quad (1.15)$$

en donde l_c es la longitud de cuerdas²². En Presencia de N Dp-branas paralelas, las cuerdas abiertas tienen la posibilidad de conectar sus puntos extremos en distintas D-branas además de las cuerdas que conectan a cada D-brana consigo misma (figura 1.1). Existe un total de N^2 tipos de cuerda abierta, etiquetadas con números IJ tales que el extremo inicial esté en la D-brana número I y el extremo final termine en la D-brana número J con $1 \leq I, J \leq N$. Al cuantizar el sistema, tendremos ahora N^2

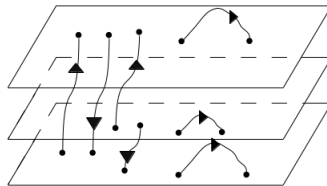


Figura 1.1: Se toma en cuenta las orientaciones de las cuerdas abiertas.

estados y los campos correspondientes serán matrices $N \times N$: $\Phi_{IJ}^i(x)$, $A_{IJ}^\alpha(x)$, $\Psi_{IJ}(x)$. Si las D-branas se encuentran exactamente en el mismo sitio, la longitud mínima de todos los tipos de cuerda abierta es cero y todos los estados IJ son intercambiables entre sí. El campo de norma $A_{IJ}^\alpha(x)$, que es ahora una matriz, indica que el grupo de norma asociado es no abeliano²³ y las transformaciones de los campos y estados se pueden hacer localmente. En síntesis, la dinámica de una pila de N Dp-branas se describe por una teoría de norma con grupo $U(N)$ ²⁴. En el caso supersimétrico, la acción efectiva para N Dp-branas (bajas energías) es *super Yang-Mills* $\mathcal{N} = 2^{(7-p)/2}$ en $(p+1)$ -dimensiones con grupo de norma $U(N)$ y acoplamiento

$$g_{YM}^2 = (2\pi)^{p-2} g_c l_c^{p-4}.$$

²²En un mundo 4 dimensional, $l_c \approx 10^{-33}$ cm.

²³Los estados $|p, IJ, \dots\rangle$ transforman de acuerdo con $U_{II'} U_{JJ'} |p, IJ\rangle$ y los campos como $\Phi_{IJ} \rightarrow U_{II'} \Phi_{IJ} U_{JJ'}^{-1}$ con U generadores del grupo $U(N)$.

²⁴La acción no abeliana de la pila de N D-branas es DBI con traza, análogo a $Tr[F^2]$ de QCD.

1.3. Espacio Anti de Sitter

La geometría del espaciotiempo anti de Sitter (AdS) juega un papel protagónico en holografía²⁵. Uno de los aspectos más importantes es la relación existente entre la compactificación conforme de AdS y la correspondiente para el espacio plano. En el caso de signatura Euclidiana, el espacio \mathbb{R}^n puede compactificarse a una n -esfera \mathbb{S}^n añadiendo un punto en infinito. Por otro lado, el espacio hiperbólico $(n+1)$ -dimensional, que es la versión Euclidea de AdS, puede mapearse conformalmente en el disco D_{n+1} $(n+1)$ -dimensional. La frontera del espacio hiperbólico compactificado es entonces el espacio Euclidiano compactificado. Una relación similar se verifica en el caso de signatura Lorentziana[28]. Anti de Sitter es la solución maximalmente simétrica a las ecuaciones de Einstein[29],

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^d x \sqrt{-g} (R - \Lambda)$$

donde G_N es la constante de Newton y Λ la constante cosmológica negativa (tensor de energía momento constante). La curvatura del espacio L es constante y negativa donde $-6/L^2 = 2\Lambda$ ²⁶.

Discutiremos el caso AdS_5 a pesar de que la mayoría de las propiedades son independientes de la dimensión. Algebráicamente, AdS_5 está dado por la hipersuperficie

$$-L^2 = X_{-1}^2 + X_0^2 - X_1^2 \dots - X_4^2, \quad (1.16)$$

Para alguna constante L . La métrica en AdS_5 es inducida de la métrica

$$ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + dX_1^2 \dots + dX_4^2, \quad (1.17)$$

que describe un espacio *seudo Euclidean* $\mathbb{R}^{2,4}$ 6-dimensional. Por construcción, el espacio AdS_5 tiene isometría $SO(2,4)$ ya que el espacio ambiente $\mathbb{R}^{2,4}$ tiene como álgebra de Lie

$$[\mathcal{J}_{AB}, \mathcal{J}_{BC}] = \eta_{AB} \mathcal{J}_{BC} + \eta_{BC} \mathcal{J}_{AD} - \eta_{AC} \mathcal{J}_{BD} - \eta_{BD} \mathcal{J}_{AC} \quad (1.18)$$

con \mathcal{J}_{AB} dados por (1.5). A su vez, AdS es homogéneo e isotrópico[28].

1.3.1. Coordenadas Globales

Una parametrización del hiperboloide (1.16) se obtiene con las coordenadas *globales*:

$$\begin{aligned} X_{-1} &= L \cosh \rho \cos \tau, \\ X_0 &= L \cosh \rho \sin \tau, \\ X_i &= L \sinh \rho \Omega_i, \quad i = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Donde Ω_i parametriza la esfera 3-dimensional de radio unitario $\Omega_i \Omega^i = 1$, $0 \leq \rho < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$. Bajo estas coordenadas, la métrica inducida sobre el hiperboloide a partir de la métrica (1.17) es

$$ds_{AdS_5}^2 = L^2 (-\cosh^2 \tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2) \quad (1.20)$$

Tomando $0 \leq \rho$ y $0 \leq \tau \leq 2\pi$, la solución (1.20) cubre el hiperboloide completo, por esta razón las coordenadas (τ, ρ, Ω_i) son llamadas *globales*. Cerca de $\rho = 0$ la métrica se comporta como $ds^2 \approx L^2 (-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$; el hiperboloide tiene topología $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^4$ con \mathbb{S}^1 representando curvas tipo tiempo cerradas en la dirección τ . Para obtener estructura causal, desenrollamos el círculo $(-\infty < \tau < \infty)$ para obtener

²⁵A pesar de que existen otras teorías holográficas con fondos más generales.

²⁶Para AdS_{d+1} , $2\Lambda = -\frac{(d-1)(d-2)}{L^2}$.

la *cubierta universal* del hiperboloide. Al analizar la estructura causal de AdS_5 , es útil introducir la transformación $\tan \alpha = \sinh \rho$ con $0 \leq \alpha < \pi/2$. La métrica (1.20) adopta la forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \alpha} (-d\tau^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_3^2) \quad (1.21)$$

Implementamos un reescalamiento de la métrica multiplicándola por $L^{-2} \cos^2 \alpha$ (transformación de Weyl²⁷) para eliminar el factor global respetando las direcciones nulas[37],

$$ds'^2 = -d\tau^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_3^2 \quad (1.22)$$

Que es la métrica del *universo estático de Einstein* que también aparece en la compactificación conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ (Minkowski): $ds^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{p-1}^2$. Para este último, la coordenada θ toma valores $[0, \pi)$ mientras que en el caso de (1.22) los valores de α corren en el intervalo $[0, \pi/2)$. Lo anterior indica que AdS_5 puede mapearse de manera conforme a la mitad del universo estático de Einstein con topología $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^4$. En general, un espaciotiempo que puede mapearse conformalmente a una región que tiene la misma frontera que la mitad del universo estático de Einstein, es llamado asintóticamente AdS ²⁸. En vista de que la frontera se extiende en la dirección tipo tiempo etiquetada por τ , necesitamos especificar una condición de frontera sobre $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^4$ en $\alpha = \pi/2$ para tener definir el problema de Cauchy. Un resultado importante es que la frontera de AdS_5 compactificado conformalmente es idéntica a la compactificación conforme del espacio de Minkowski (3 + 1)-dimensional. Esto juega un papel crucial en AdS/CFT. Una bondad de la métrica transformada (1.22) es que podemos visualizar al espacio AdS completo en una región finita; su *diagrama de Penrose* (figura 1.2). En un corte vertical del diagrama de Penrose (figura 1.3) podemos notar que el infinito espacial (y nulo) es una superficie tipo tiempo y la luz toma un tiempo finito en llegar a la frontera ubicada en $\rho = \infty$ ($\alpha = \pi/2$) a pesar de que ésta se encuentra a una distancia propia infinita. En efecto, tomando la métrica (1.20) a $\theta_i = cte$ y $L = 1$, las trayectorias nulas son $\dot{\rho}^2 = \cosh^2 \rho \dot{\tau}^2$ y, por otro lado, una traslación temporal (en la coordenada τ) conserva la energía²⁹, resultando $\cosh^2 \rho \dot{\tau} = E$. Combinando ambas ecuaciones obtenemos,

$$\dot{\rho}^2 = \frac{E^2}{\cosh^2 \rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} \sinh \rho = \pm E \quad (1.23)$$

Para rayos de luz salientes (signo +), obtenemos

$$\sinh \rho(\lambda) = E(\lambda - \lambda_0), \quad (1.24)$$

y por tanto $\rho \rightarrow \infty$ es alcanzado por valores infinitos del parámetro afín, $\lambda \rightarrow \infty$. Para la coordenada temporal, sin embargo, encontramos,

$$\dot{\tau} = \frac{E}{\cosh^2 \rho} \quad \Rightarrow \quad \tan \tau = \lambda - \lambda_0. \quad (1.25)$$

Estas geodésicas nulas comienzan en $\rho = 0$ en $\tau = 0$ y alcanzan la frontera ($\rho = \infty$) en $\tau = \pi/2$ independientemente de los valores de E y λ_0 . Esto implica que, para determinar la evolución de una señal no basta dar su condición inicial sino también especificar condiciones de frontera como señalamos anteriormente en el mapeo al universo estático de Einstein³⁰.

²⁷ Aquí adoptamos la convención de que, una transformación de Weyl es un reescalamiento local de la métrica, $g(x) \rightarrow g'(x) = \Omega^2(x)g$. En la reparametrización conforme, $g(x) \rightarrow g'(x') = \omega^2 g(x)$. La composición de ambas deja invariante a la métrica si $\Omega(x) = \omega(x)^{-1}$ y llamamos a esta, transformación conforme.

²⁸ Bajo este criterio, un espacio es asintóticamente plano si posee la misma estructura de frontera que la de un espacio plano compactificado conformalmente (universo estático de Einstein)

²⁹ Si la métrica es independiente de $x^0 = t$, la energía se conserva: $p_0 = g_{0\nu} x^\nu = -E$

³⁰ O lo que es lo mismo, AdS no es globalmente hiperbólico: La evolución de una hipersuperficie de Cauchy requiere además de condición inicial, una condición de frontera.

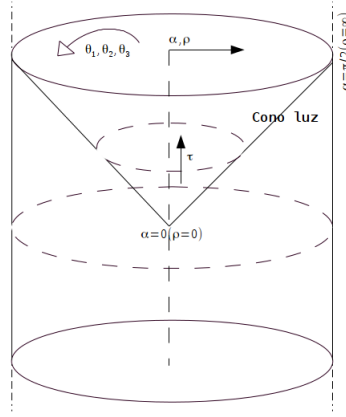


Figura 1.2: Diagrama de Penrose en coordenadas globales (1.22) [37].

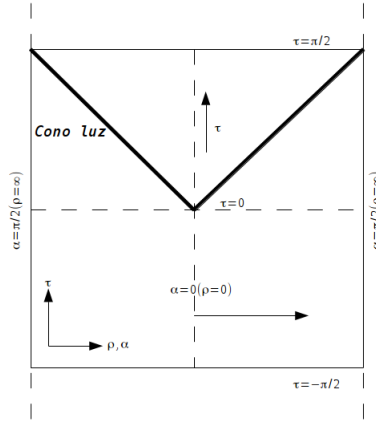


Figura 1.3: Corte vertical de 1.2. Aquí la coordenada τ es periódica[37].

1.3.2. Coordenadas de Poincaré

Las coordenadas de Poincaré u horosféricas (u, t, \vec{x}) parametrizan el hiperboloide (1.16) de acuerdo con[37]

$$\begin{aligned}
 X_{-1} &= \frac{u}{L} t, \\
 X_0 &= \frac{L^2}{2u} \left[1 + \frac{u^2}{L^4} (L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right], \\
 \vec{X} &= \frac{u}{L} \vec{x}, \\
 X_4 &= \frac{L^2}{2u} \left[1 + \frac{u^2}{L^4} (-L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right].
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Con $0 \leq u < \infty$, $-\infty < t, x_1, \dots, x_3 < \infty$, la métrica adopta la forma

$$ds^2 = \frac{u^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{u^2} du^2. \tag{1.27}$$

Estas coordenadas cubren sólo una porción del hiperboloide llamada *cuña de Poincaré*, como se muestra en (1.4). En esta forma, (1.27) tiene manifiesta isometrías con subgrupos $ISO(1, 4)$ (Transformación de

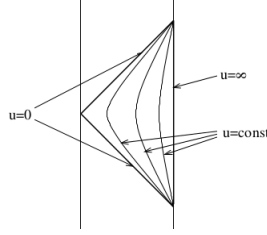


Figura 1.4: AdS_2 se mapea conformalmente a $\mathbb{R} \times [-\pi/2, \pi/2]$. (u, t) cubre la región triangular (cuña de Poincaré)[28].

Poincaré) y $SO(1, 1)$ de $SO(2, 4)$. La simetría $ISO(1, 4)$:

$$(t, \vec{x}, u) \rightarrow (ct, c\vec{x}, c^{-1}u), \quad c > 0 \quad (1.28)$$

juega un papel importante en AdS/CFT; es identificada con las dilataciones D del grupo conforme de $\mathbb{R}^{1,p}$ [28]. Más aún, el tiempo de Poincaré coincide directamente con el tiempo en la CFT.

Para el propósito de este trabajo, conviene utilizar una *coordenada radial* invertida, $r = \frac{L^2}{u}$, de modo que la frontera de AdS_5 quede determinada en $r = 0$ ($u \rightarrow \infty$). La métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dr^2) \quad (1.29)$$

A tiempo fijo, podemos esquematizar la métrica (1.29) como la figura (1.5.4)

1.4. La Correspondencia AdS/CFT

La motivación a la correspondencia AdS/CFT comienza con una comparación entre las Rp-branas negras y las Dp-branas. Para las primeras, las branas negras extremales (1.10) tienen la masa mínima posible para la carga dada y satura la desigualdad BPS. Por otro lado, una pila de N Dp-branas sin excitar posee exactamente la misma carga y masa[23]. Esto sugiere que la brana negra son los campos macroscópicos de $SUGRA$ generados una pila de D-branas. Para $g_c N \gg 1$, el radio de curvatura de la Rp-brana negra es muy grande (1.12), por lo que la solución (1.10) es confiable a nivel de cálculos perturbativos³¹ (en este régimen las cuerdas son pequeñas comparadas con el radio de curvatura). Por otro lado $g_c N$ controla el desarrollo perturbativo de las cuerdas abiertas (excitaciones de las D-branas) incluyendo la emisión de gravitones por parte de la pila de D-branas. Si $g_c N \ll 1$ podemos entender a la pila de D-branas como viviendo en un fondo plano y describir sus excitaciones perturbativamente (incluyendo modos de $SUGRA$).

Una conclusión natural a ese análisis es que la brana negra y la D-brana (en fondo plano) son descripciones alternativas del mismo sistema físico pero válidas en regímenes mutuamente excluyentes ($g_c N \ll 1$ para la D-brana y $g_c N \gg 1$ para la brana negra) llamado *principio de correspondencia*[37; 24]. En otras palabras, una pila de N D-branas inmersas en el fondo de $SUGRA$ que ellas mismas generan y dependiendo de $g_c N$ una descripción se vuelve más relevante respecto a la otra. Podemos imaginar extender la descripción de cuerdas cerradas (brana negra) al régimen no perturbativo $g_c N \gtrsim 1$ y, similarmente considerar la descripción de cuerdas abiertas (pila de N D-branas) en el régimen no perturbativo $g_c N \lesssim 1$. En este régimen el principio de correspondencia sería una dualidad, es decir, descripciones alternativas de un mismo sistema en regiones mutuamente incluyentes. En favor de esta dualidad, se ha mostrado que ambas descripciones conducen a los mismos resultados para las amplitudes de dispersión de

³¹Si además la constante de cuerdas $g_c e^\phi \ll 1$.

cuerdas abiertas a bajas energías y para la amplitud de absorción de cuerdas cerradas[37; 25]. Además, el sistema de D-branas reproduce la radiación de Hawking de la brana negra[26; 37]. La dualidad de cuerdas abiertas y cerradas es otra manifestación de la habilidad de las cuerdas abiertas para reproducir geometría curva. Juan Maldacena tomo como punto de partida esta dualidad para deducir la correspondencia AdS/CFT[27] como revisaremos a continuación.

Para $p = 3$, la R3-brana negra (1.10) tiene al dilatón constante y mantiene excitados sólo a la métrica y la 5-forma G_{MNPQR} :

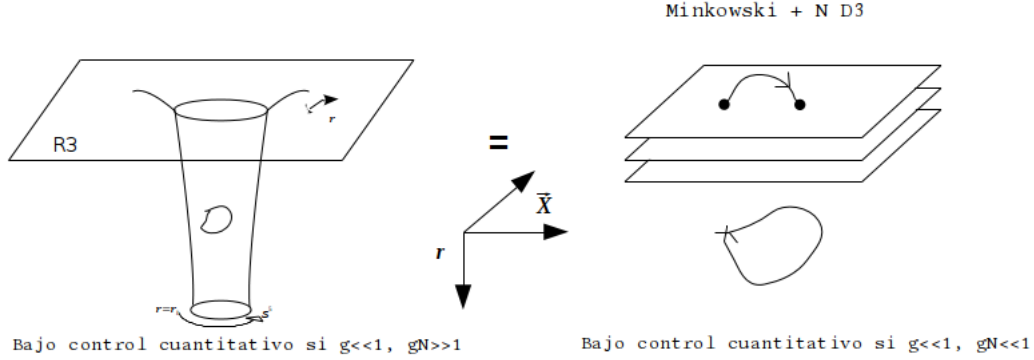
$$ds^2 = H(r)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (1.30)$$

donde

$$C_{0123} = g_c^{-1} (1 - H^{-1}(r)), \quad G_{r0123} = g_c^{-1} H(r)^{-2} H'(r), \quad G_{\theta_1 \dots \theta_5} = g_c^{-1} r^5 H'(r) V(\Omega_5), \quad (1.31)$$

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4, \quad L^4 = 4\pi N g_c l_c^4,$$

y $V(\Omega_5)$ es el volumen de la esfera unidad. Para que esta solución sea confiable es necesario pedir que $g_c N \gg 1$ (curvatura pequeña) y $g_c \ll 1$ (cuerdas débilmente acopladas).



Considerando el sistema a ultra bajas energías, $E \ll 1/l_c, 1/L$, en vista de que $L = (4\pi g_c N)^{1/4} l_c$ tenemos

$$\frac{1}{L} \ll \frac{1}{l_c}$$

siempre que $g_c N \gg 1$ o bien

$$\frac{1}{L} \gg \frac{1}{l_c}$$

siempre que $g_c N \ll 1$.

En ultra bajas energías, tanto en la R3-brana negra como en la pila de N D3-branas obtenemos dos sistemas desacoplados. En la R3 la sección eficaz de absorción de modos no masivos por parte de la brana negra es $\sigma \propto (EL)^8$ y parece que la brana negra absorbe cualquier materia. Sin embargo hay que resaltar que su tamaño característico es L y resulta por tanto invisible para modos con longitud de onda $1/E \gg L$. Los modos de *SUGRA* en el exterior de la garganta ($r < L$) se propagan esencialmente como en un fondo plano y no pueden penetrar el interior. Inversamente, los modos en el interior de la garganta no tienen suficiente energía para escapar del potencial gravitacional hacia el exterior. Las dos regiones no se pueden comunicar una con otra. De lado de las D-branas, la probabilidad de absorción es la misma e igualmente obtenemos dos sistemas desacoplados: las cuerdas cerradas en el fondo plano no pueden convertirse en abiertas ni viceversa.

En cada lado de la dualidad, la dinámica se simplifica drásticamente. De lado de las D-branas, las cuerdas cerradas IIB en fondo plano se reducen a *SUGRA* libre y las cuerdas abiertas sobre las D3 se reducen

a los modos masivos descritos por SYM con supersimetría $\mathcal{N} = 4$ y grupo de norma $U(N)$ en $(3 + 1)$ -dimensiones. En las R3, hay un efecto de corrimiento al rojo en virtud de que $g_{tt} = -(1 + L^4/r^4)^{-1/2}$: un objeto con energía propia E_p en un punto r tiene energía

$$E_\infty = \sqrt{-g_{tt}}E_p = (1 + L^4/r^4)^{-1/4} E_p,$$

según un observador en infinito³². En cualquier posición $r \gtrsim L$, pedimos que la energía $E_p \ll 1/l_c, 1/L$ para reducir a *SUGRA* libre (cuyos modos se propagan en un fondo plano).

En la región *cercana al horizonte* $r \ll L$, podemos tener E_p arbitrariamente grande y aún así satisfacer $E \propto \frac{r}{L}E_p \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{L}$. Más aún, en esta región, $H(r) \propto \frac{L^4}{r^4}$ de tal modo que el fondo se simplifica:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) = \left(\frac{r^2}{L^2} dx_\mu dx^\mu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \right) + L^2 d\Omega_5^2 \quad (1.32)$$

Reconocemos el primer término de lado derecho en (1.32) como el espaciotiempo anti-de Sitter $(4 + 1)$ -dimensional con radio L y el segundo término como una 5-esfera de radio L ³³. Este espacio $AdS_5 \times S^5$ está cargado bajo el campo Ramond-Ramond (contiene N unidades de flujo RR a través de la S^5) y en él se propagan todos los modos de IIB incluyendo los no perturbativos como las D-branas. Lo que estamos considerando está representado esquemáticamente en la figura (1.5). En el limite de ultra bajas energías

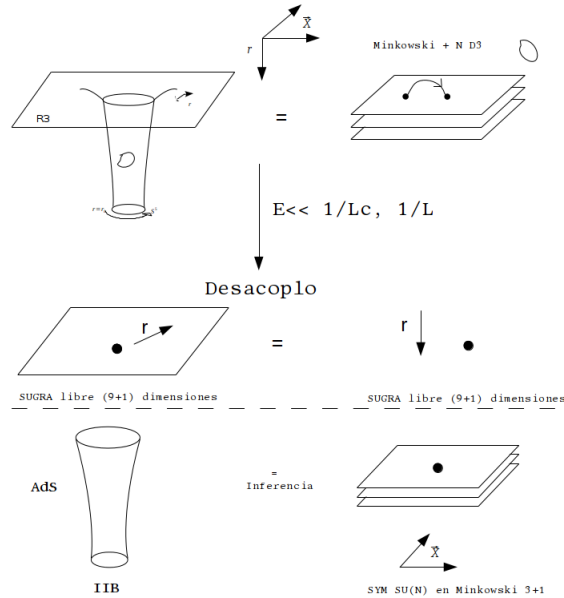


Figura 1.5: El desacoplo de SYM y IIB[37]

las dos componentes que representan a *SUGRA* libre en Minkowski $(9 + 1)$ dimensiones en ambos lados de la dualidad, obviamente coinciden. Si nos aventuramos a concluir que las dos componentes desacopladas restantes también son equivalentes en este limite, tendríamos:

³²La energía E_∞ es la que está condicionada a ser $E \ll 1/l_c, 1/L$ ya que la noción de tiempo en la R3 cuando $r \rightarrow \infty$ es el que coincide con la noción de tiempo en las D3

³³Además $G_{r\theta_{123}} = g_c^{-1} \frac{4r^3}{L^4}$, $G_{\theta_1 \dots \theta_5} = g_c^{-1} 4L^4 V(\Omega_5)$

Teoría de Cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ con N unidades de flujo RR sobre la S^5 es equivalente a SYM con grupo $SU(N)$ ³⁴ en Minkowski (3 + 1) dimensional.

La deducción es en términos de la descripción a ultra bajas energías, sin embargo, el enunciado puede volverse exacto en el límite $El_c, EL \rightarrow 0$. Para analizarlo conviene formular la idea en términos del *límite de Maldacena*³⁵,

$$l_c \rightarrow 0 \quad \text{mientras mantenemos fijo} \quad g_c N \quad (\Rightarrow L \rightarrow 0)$$

Bajo este criterio, E puede ser arbitrariamente grande sin que regresemos a la correspondencia de cuerdas abiertas/cerradas original; tiene sentido considerar IIB en el fondo (1.32) y a SYM con energías arbitrariamente altas y sostener la afirmación de Maldacena, es decir, su validez se mantiene para cualquier valor de E , g_c y N ³⁶. Para ahondar más en este punto, si consideramos esquemáticamente la acción completa de la pila de N D3-branas,

$$S_{D3} \propto \int d^4x \{Tr(F^2 + \dots) + l_c^4 Tr(F^4 + \dots) + \dots\}$$

Donde el primer término corresponde a SYM $\mathcal{N} = 4$ con acoplamientos marginales³⁷ y el segundo término de lado derecho da correcciones a la intensidad de campo con acoplamientos de dimensión negativa (irrelevantes). A bajas energías S_{D3} se reduce a S_{SYM} lo cual se hace evidente en el límite de Maldacena, ya que E puede ser entonces arbitraria[37]. La teoría obtenida en este límite es invariante bajo reescalamientos, es decir, un punto fijo no trivial³⁸ ya que continúa siendo interactuante.

De lado de la R3, aún cuando en la *deducción* consideramos $r/L \rightarrow 0$, después del límite de Maldacena podemos tomar r arbitrario en la geometría emergente AdS (incluyendo $r \gg L$) sin que ello implique regresar a la región asintóticamente plana; cualquier punto en AdS, corresponde a estar todavía dentro de las D3 a nivel de SYM.

Si en verdad IIB=SYM completa, entonces la parte gravitacional debe considerar no solo a la geometría (1.32). Deformaciones arbitrariamente grandes de ella deben incorporarse a la descripción, incluyendo agujeros negros. A pesar de ello, no podemos cambiar la geometría en el infinito (frontera) ya que ello requeriría una energía infinita. El aserto de la dualidad es entonces que la información de SYM está codificada en un espacio $aAdS_5 \times S^5$, donde $aAdS$ se refiere a un fondo asintóticamente anti de-Sitter. Las deformaciones o fluctuaciones del fondo pueden ser pequeñas (descritas por cuerdas cerradas) o grandes en cuyo caso los valores de fondo de los campos de la teoría de *SUGRA* pueden modificarse sustancialmente y deformar el fondo,

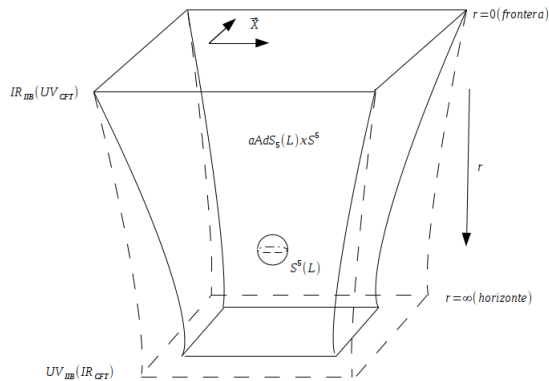
³⁴El grupo original de la dualidad es $U(N)$. Los grados de libertad correspondientes al grupo $U(1)$ corresponden a posiciones del centro de masa de la pila de D3 branas que están desacoplados del resto en la descomposición $U(N) \sim U(1) \times SU(N)$ y es válido omitirlos. En la R3 tales grados de libertad corresponden a la posición en el espacio de la garganta.

³⁵límite de desacoplo o cercano al horizonte

³⁶Análogo a la obtención de la teoría de Dirac y Maxwell al hacer $E \rightarrow 0$ en la teoría completa de QED sin masa y considerar $S_{Dirac} + S_{Maxwell}$ a cualquier energía

³⁷ver sección 3.5.

³⁸A diferencia de un punto fijo trivial o Gaussiano donde la teoría se vuelve libre



siempre conservando el mismo comportamiento asintótico en la frontera de AdS; la teoría de cuerdas al ser una teoría de gravitación, la geometría es dinámica.

1.5. Diccionario de la Correspondencia AdS/CFT

En general cualquier proceso o estado de un lado de la dualidad tiene su correspondiente estado o proceso de lado de SYM. Es común hablar de un diccionario que traduce información de un proceso o estado de un lado a otro de la dualidad. Por ejemplo, en la sección anterior mencionamos la posibilidad de hacer fluctuaciones grandes de los campos de *SUGRA* conservando la estructura de AdS en la frontera. El fondo (1.32) sin excitaciones de ningún tipo (conservando el flujo RR) corresponde al estado de mínima energía en SYM, es decir al vacío. Fluctuaciones pequeñas o grandes por encima de (1.32) corresponden a otros estados en SYM.

1.5.1. Correspondencia entre Parámetros

Conviene hacer mención de los diversos parámetros de las teorías. De lado de SYM, el rango del grupo de norma N (número de colores) o, equivalentemente, el número de D3-branas apiladas corresponde, bajo la dualidad, al número de unidades de flujo del campo Ramond-Ramond a través de la S^5 . Equivalentemente es la carga que posee la R3-brana negra bajo el campo Ramond-Ramond (RR). El acoplamiento de SYM, g_{YM} , equivale al valor de fondo del dilatón (campo de *SUGRA*) y a su vez está relacionado con la constante de acoplamiento de cuerdas g_c ,

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_c \equiv 4\pi e^\phi|_{r=0}.$$

El acoplamiento de 't Hooft (1.6) sobre el cual se realiza el desarrollo perturbativo en SYM corresponde al cociente entre el radio de curvatura de AdS y la longitud de cuerdas,

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N = 4\pi g_c N = \frac{L^4}{l_c^4} = \frac{L^4}{\alpha'^2}.$$

A este respecto, la teoría de cuerdas está bajo control (perturbativamente) si el espacio está débilmente curvado y las cuerdas están débilmente acopladas, es decir, cuando

$$\frac{l_c^2}{L^2} \ll 1, \quad g_c \ll 1$$

Lo cual implica que,

$$\lambda \equiv g_c^2 N \gg 1, \quad N \gg 1$$

Es decir, cuando IIB está bajo control, SYM posee muchos colores y con fuerte acoplamiento (como QCD a bajas energías). En el límite $(N, \lambda) \rightarrow \infty$, si tomamos $g_c \rightarrow 0$, la teoría IIB es libre/clásica (nivel árbol). A su vez, si $l_c/L \rightarrow 0$, IIB se reduce a supergravedad IIB (*SUGRA*). En estos límites, la correspondencia AdS/CFT es operativamente manejable para explorar la región de acoplamiento fuerte de la teoría de norma SYM³⁹.

1.5.2. Correspondencia entre Simetrías

SYM es una teoría de campos conforme, invariante bajo el grupo conforme $SO(4, 2)$ en $(3 + 1)$ -dimensiones. De lado de AdS, estas mismas simetrías codifican el grupo de isometrías de AdS_5 , es decir, los difeomorfismos que dejan invariante la forma de la métrica. SYM posee una simetría interna global llamada simetría R con grupo $SU(4) \simeq SO(6)$. En la pila de D3 branas sobre un espacio plano, el grupo $SO(6)$ se origina por los generadores de rotaciones en las 6 direcciones transversales a las D3-branas. De lado de la R3, la S^5 está asociada a las direcciones que rodean a la garganta. En el límite de desacoplo, el fondo (1.32) hereda los grados de libertad S^5 y sus isometrías forman el grupo $SO(6)$. IIB posee 32 supersimetrías⁴⁰ codificados en 2 espinores de Majorana-Weyl en $9 + 1$ dimensiones. La R3 es un estado $(1/2)BPS$ y es invariante ante 16 supersimetrías. Sin embargo, en el límite cercano al horizonte, (1.32) es máximamente supersimétrico e invariante ante las 32 supersimetrías. SYM posee una simetría discreta global llamada dualidad S (1.1.1) con grupo $SL(2, \mathbb{Z})$. La teoría de cuerdas IIB posee la misma simetría (y dualidad T) que mezcla/intercambia los campos B_{MN} y C_{MN} (1.2.1). Respecto a las simetrías locales, no existe una correspondencia entre ellas en AdS/CFT. El grupo de norma $SU(N)$ de SYM y correspondientemente los difeomorfismos (No los de S^5) en $aAdS^5 \times S^5$ no les corresponde nada en SYM. Recordando que las invariancias locales no son simetrías en el sentido de que mapean estados físicos en otros, sino una manifestación de la redundancia de la teoría⁴¹, la información física debe estar contenida en cantidades invariantes de norma. A nivel de estas cantidades debemos empatar en ambos lados de la dualidad (ver sección 1.5.3).

Correspondencia entre coordenadas

De la comparación entre las D3-branas y las R3-branas que condujo a la correspondencia AdS/CFT, tenemos que las coordenadas $x^\mu = (t, \vec{x})$ del espaciotiempo de Minkowski $3 + 1$ -dim donde está definida SYM coincide directamente con las coordenadas x^μ (salvo la coordenada radial) en la cuña de Poincaré (1.3.2). Como anticipamos en la sección (1.5.2), las coordenadas θ_i en la S^5 de IIB no son coordenadas espaciales en SYM, sino que parametrizan el espacio interno (simetría global) asociado al grupo $SO(6)$ con números cuánticos bien definidos bajo $SU(4) \simeq SO(6)$ (armónicos esféricos sobre la 5-esfera). Falta el mapeo de una coordenada más, que hemos llamado *radial*. Por su particular importancia en este trabajo (y en general para AdS/CFT) la revisaremos en la sección (1.5.4).

1.5.3. Correspondencia entre Estados/Operadores

Como mencionamos en la sección (1.5.2), los operadores relevantes en SYM son aquellos invariantes de norma. La correspondencia AdS/CFT debe asignar a cada operador invariante de norma en la CFT, un campo básico en IIB⁴². Antes de tomar el límite de Maldacena, cuerdas cerradas pueden excitar a la pila de D3-branas en puntos específicos convirtiéndose en cuerdas abiertas vibrando sobre la brana. De la misma manera, es posible arrojar cuerdas cerradas a la garganta de la R3-brana negra. Una cuerda

³⁹Inversamente, los cálculos perturbativos en SYM en la región $\lambda \ll 1$, $N \gg 1$ codifican información de la teoría de cuerdas débilmente interactuantes en un fondo altamente curvado.

⁴⁰II hace referencia al grado de supersimetría local $\mathcal{N} = 2$ en $9+1$ dimensiones.

⁴¹Hay mas variables que grados de libertad físicos.

⁴²Análogamente, existe una correspondencia entre estados de ambas teorías que puede entenderse bajo el mapeo estado-operador de la CFT.

cerrada vibrando de manera específica corresponde a un campo de IIB. En el límite de bajas energías el campo de IIB, $\phi(x)$, se acopla a cierto operador local $\mathcal{O}(x)$ en SYM. El valor de $\phi(x)$ ubicado en la D3 se convierte en una fuente de los campos de SYM a través del operador $\mathcal{O}(x)$. A su vez, el valor de $\phi(x)$ que produce excitaciones en la R3, es el que el campo tiene en la frontera de AdS ya que ese es el *punto de entrada* a la garganta (o lo que queda de ella después del límite de Maldacena). La identificación unívoca $\mathcal{O} \rightarrow \phi$ puede exhibirse analizando la acción de las D3. Para el dilatón φ , que aparece en la métrica de las D3,

$$S_{D3} = -T \int d^4x e^{-\varphi} sTr \sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu} + 2\pi l_c^2 F_{\mu\nu} + \dots)}$$

al expandir la exponencial, habrá un término que acompaña a φ :

$$S_{D3} \supset \int d^4x \varphi Tr (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots)$$

El operador dual a φ será

$$Tr (F^2 + \dots) \sim \lim_{l_c \rightarrow 0} \frac{\delta S_{D3}}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

Es decir, *el dilatón es dual a la densidad lagrangiana de SYM*. Otro campo relevante, el gravitón, aparece también en la acción de la D3: $g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}$,

$$S_{D3} = -T \int d^4x sTr \left\{ \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \dots)} + \dots \right\}$$

La métrica en la acción es la inducida sobre la brana, de modo que las componentes μ, ν del gravitón son *duales al tensor de energía-momento de SYM*.

$$\mathcal{O}_{h_{\mu\nu}}(x) \sim \lim_{l_c \rightarrow 0} \frac{\delta S_{D3}}{\delta h^{\mu\nu}} \Big|_{h=0} \equiv T_{\mu\nu} = Tr (F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} + \dots).$$

Recordando que todos los campos en SYM transforman en la representación adjunta (1.1), los operadores invariantes de norma son de la forma

$$\mathcal{O}(x) \sim Tr (M_1(x) M_2(x) \dots), \tag{1.33}$$

siendo $M(x)$ cualquiera de los campos de SYM y/o derivadas covariantes de ellos. Los operadores de una sola traza como el anterior son relevantes para este trabajo y corresponden a operadores de glubolas. De lado de IIB, los campos básicos, denotados colectivamente como Φ , que crean estados de una partícula y son ellos los duales a operadores de una traza. Productos de tales campos básicos (que crean estados de varias partículas) serán duales a operadores multitraza.

Otro aspecto importante de esta identificación es que los operadores están localizados en las coordenadas de Minkowski, pero no en las coordenadas θ_i que parametrizan el espacio interno S^5 asociado a la simetría R (ver sección 1.5.2). Los operadores duales, más bien, poseen números cuánticos bien definidos bajo la simetría $SO(6)$ ⁴³. De lado de gravedad, el espacio S^5 codifica propiedades de transformación de los campos $\Phi(x)$ bajo el grupo de isometrías asociado. Cada campo $(9+1)$ -dimensional, se descompone en una torre infinita de modos de Kaluza-Klein (KK) sobre la 5-esfera,

$$\Phi(x^m, \theta^b) = \sum_k \phi_k(x^m) Y_k(\theta^b),$$

donde $Y_k(\theta^b)$ son los armónicos esféricos sobre la 5-esfera. Son los modos $\phi_k(x^m)$ los que son duales a operadores en SYM.

⁴³Es decir, pertenecen a alguna representación específica del grupo $SO(6)$; el dilatón, dual a la densidad lagrangiana son escalares bajo este grupo.

Dada la correspondencia entre simetrías, los operadores de ambas teorías también se organizan en multipletes de estas simetrías. En SYM, tales multipletes están generados por operadores BPS (o primarios superconformes) que dan lugar a operadores primarios con dimensión Δ determinada sólo por sus propiedades de transformación bajo Lorentz y simetría R y no recibe correcciones (dimensiones anómalas) para cualquier valor del acoplamiento λ . De lado de IIB, el espectro completo sobre $AdS_5 \times S^5$ se desconoce pero, en el límite de muchos colores, se reduce a SUGRA IIB libre. A partir de esta acción desarrollada hasta orden cuadrático y descomponer en modos KK sobre la 5-esfera, es posible obtener el espectro de masas para las torres KK. Si k representa el momento angular sobre S^5 , los campos φ y C tienen masas $m^2 L^2 = k(k+4)$, $k \geq 0$, B_{ab} verifica $m^2 L^2 = (k-2)(k+2)$, $k \geq 1$, etc.[45]. Genéricamente, en AdS_5 global, la dimensión conforme Δ en la CFT corresponde a la energía asociada al tiempo global τ en AdS_5 ⁴⁴,

$$\begin{aligned} \text{Espín } 0 \text{ ó } 2 : \quad m^2 L^2 &= \Delta(\Delta - 4) \\ \text{Espín } 1/2 \text{ ó } 3/2 : \quad |m|L &= \Delta - 2 \\ \text{p-forma} : \quad m^2 L^2 &= (\Delta - p)(\Delta + p - 4) \end{aligned} \tag{1.34}$$

1.5.4. Conexión UV/IR

En la sección (1.5.2) mostramos cómo se mapean 9 de las 10 coordenadas de (1.32). La coordenada restante, llamada *radial*, juega un papel preponderante en AdS/CFT. De la métrica (1.29) podemos notar que el reescalamiento o dilatación en SYM,

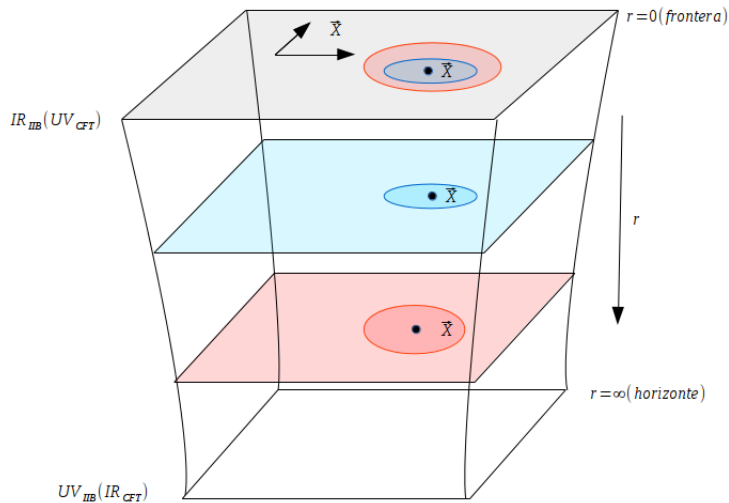
$$(t, \vec{x}) \rightarrow (st, s\vec{x}),$$

que pertenece al grupo conforme $SO(4,2)$, corresponde en IIB al difeomorfismo

$$(t, \vec{x}, r) \rightarrow (st, s\vec{x}, sr),$$

que es una isometría de AdS_5 . Además, de (1.29) podemos notar que, debido al factor L^2/r^2 , la distancia propia d en el bulto y la distancia d_{cft} en las coordenadas de Minkowski⁴⁵ están relacionadas: $d = (L/r)d_{cft}$ o bien, en términos de energía, $E = (r/L)E_{cft}$.

Al explorar distancias más pequeñas o más grandes en SYM, estamos explorando en IIB ubicaciones con menores o mayores valores de la coordenada radial r . Una foliación radial de AdS a distinto valor de r (o distinto valor de u) codifica información de SYM a distintas escalas de distancia (o de energía, con $u = L^2/r$ en 1.27),



⁴⁴La deducción de esto no es evidente a partir de lo expuesto hasta ahora.

⁴⁵Identificando Minkowski como la frontera de AdS_5 .

Figura 1.6: La teoría definida en la hipersuperficie roja describe excitaciones en la región IR, mientras que la hipersuperficie en azul, en la región UV. Véase también [30; 37].

La región cercana a la frontera de AdS, corresponde al IR de la teoría gravitacional (volumen infinito) y del otro lado de la dualidad, esta misma región corresponde al UV de la teoría de norma,

$$r \longleftrightarrow \text{escala de distancia} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{r} = \frac{u}{L^2} \longleftrightarrow \text{escala de energía.} \quad (1.35)$$

Esta es la llamada *conexión UV/IR*[44; 37]. En la frontera de AdS, $r \rightarrow 0$, estaremos describiendo excitaciones completamente localizadas de SYM bajo la dualidad. Podemos elegir otra foliación radial que nos permitirá describir la teoría de norma en un espaciotiempo distinto (hasta una transformación de Weyl). Los difeomorfismos en AdS que mezclan \vec{x} con r cambian la foliación radial y con ello pueden cambiar la métrica de SYM por una transformación de Weyl⁴⁶.

1.5.5. Funciones de Correlación - La prescripción GKPW

Los objetos más importantes en toda teoría de campo son las funciones de correlación (o correladores). La correspondencia AdS/CFT implementa una receta para hallar los correladores de la CFT utilizando una funcional generadora del lado gravitacional⁴⁷. En la sección (1.5.3) mencionamos que la fuente J_i asociada a un operador $\mathcal{O}(x)$ en la D3-brana, corresponde a encender el campo de IIB correspondiente en puntos apropiados de la frontera de AdS. Tales fuentes están empaquetados en la funcional generadora de la CFT,

$$\mathcal{Z}_{SYM}[J_i] \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\Psi^f \exp \left[iS_{SYM} + i \sum_j \int d^4x J_j \mathcal{O}_j(x) \right] \quad (1.36)$$

A partir de la cual, los correladores se obtienen por derivación funcional,

$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1) \dots \mathcal{O}_{j_n}(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_{SYM}[0]} \frac{\delta}{i\delta J_1(x_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta J_n(x_n)} \mathcal{Z}_{SYM}[J_i] |_{J_i=0} \quad (1.37)$$

De lado de gravedad, la funcional generadora posee fuentes que son los valores de frontera de los campos de IIB⁴⁸:

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_j^0] = \int \mathcal{D}\varphi_l \mathcal{D}h_l^{mn} \mathcal{D}B_l^{mn} \dots \exp[iS_{IIB}], \quad (1.38)$$

con la condición $\varphi_l(x^\mu, r=0) \sim \varphi_l^0(x^\mu)$ ⁴⁹. El subíndice l denota el modo KK sobre la 5-esfera. En el caso gravitacional, tales condiciones de frontera están restringidas por las ecuaciones de movimiento (eom). Los valores asintóticos (cerca de la frontera) de un campo de IIB, genéricamente se comportan como

$$\phi =_{r \rightarrow 0} r^{\pm\Delta} \phi^0(x^\mu) \quad (1.39)$$

Donde Δ es justamente la dimensión conforme del operador dual \mathcal{O} y por tanto verifica las relaciones (1.34) correspondientes. Las ecuaciones de movimiento (libre) pueden ser de segundo orden (como el dilatón) y por tanto existen dos posibles comportamientos asintóticos ($\Delta_+ = \Delta$ y $\Delta_- = 4 - \Delta_+$)⁵⁰. Para el campo escalar,

$$\Delta_\pm = 2 \pm \sqrt{4 + m^2 L^2} \quad (1.40)$$

⁴⁶Pasar de coordenadas de Poincaré a coordenadas globales es un ejemplo de esto. La CFT vivirá en el universo estático de Einstein (1.22)

⁴⁷En toda QFT, las amplitudes de dispersión se obtienen de considerar los estados asintóticos. En una CFT no existe un límite de esta naturaleza ya que no hay una escala característica donde podamos definir tal límite.

⁴⁸Como se mencionó en la sección 1.3, AdS no es globalmente hiperbólico y es necesario imponer condiciones de frontera.

⁴⁹Estamos considerando solo condiciones de frontera para el dilatón. Los otros campos poseen condiciones similares.

⁵⁰Este no es el caso del Campo de Dirac que es de primer orden. Especial cuidado se debe tener para este caso (ver sección 2.6).

Denotando la configuración de frontera de algún campo como ϕ_- y ϕ_+ , podemos formar su producto interno $\|\phi_\pm\|^2 \equiv (\phi_\pm, \phi_\pm)$ y evaluar el comportamiento de este producto en la frontera como función de la dimensión Δ ⁵¹. Genéricamente, los valores asintóticos ϕ_\pm se agrupan en modo *no normalizable* y modo *normalizable* dependiendo de los valores de Δ , es decir, la dimensión impone cotas a los valores asintóticos para ser normalizables o no normalizables.

Al cuantizar el campo $\phi(x^\mu, r)$, los modos normalizables son los que pueden fluctuar y asociarlos a operadores de creación y aniquilación que especifican un estado de la teoría. Los modos no normalizables, en cambio, tienen comportamiento muy violento y no pueden fluctuar (Se requiere una energía infinita para ello) representando un fondo fijo que define la teoría y sobre el cual ocurren las fluctuaciones dinámicas[37]. En este contexto, la correspondencia opera a nivel de un espacio asintóticamente anti de Sitter, lo cual significa que sólo los modos no normalizables están apagados. Los modos no normalizables encendidos implicarían cambiar o deformar la teoría. Son los modos no normalizables los que juegan el papel de fuentes de SYM a nivel de la correspondencia AdS/CFT. La funcional generadora (1.36) posee fuentes que se pueden considerar como deformaciones de la teoría⁵². Análogamente, los modos no normalizables pueden verse como deformaciones de la teoría IIB que modifican las condiciones de frontera y cambian la teoría. Con estas ideas, se propone entonces la identificación (GKPW⁵³)

$$\mathcal{Z}_{SYM}[J_i] \equiv \mathcal{Z}_{AdS}[J_i = \phi_j^0]. \quad (1.41)$$

En las condiciones de frontera⁵⁴

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi_j(x^\mu) r^{\Delta_{nn}} = \phi_j^0(x^\mu) \equiv J_i(x^\mu),$$

y el valor de frontera del campo $\phi_j(x^\mu, r)$ se interpreta como la fuente $J_i(x^\mu) = \phi_j^0(x^\mu)$ del operador dual $\mathcal{O}_j(x^\mu)$.

En general es imposible calcular la funcional (1.38). En el límite $\lambda \gg 1$, podemos restringir IIB a SUGRA (9 + 1)-dimensiones

$$S_{IIB} = \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} [R^{(10)} - \dots]$$

y descomponer en modos KK,

$$S_{IIB} = \frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} [R^{(5)} - \dots]$$

donde,

$$\frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \equiv \frac{Vol(S^5)}{16\pi G_N^{(10)}} = \frac{L^5 \Omega_5}{16\pi G_N^{(10)}} = \frac{N^2}{8\pi L^3}. \quad (1.42)$$

En el límite de muchos colores ($N \rightarrow \infty$), la acción anterior se vuelve muy pesada y la funcional generadora puede calcularse en la *aproximación de punto silla* (o *aproximación de fase estacionaria*)

$$\mathcal{Z}_{AdS}[\phi_j^0] \simeq \exp \left\{ i S_{SUGRA} \left[\phi_j^{cl}[\phi^0] \right] \right\}, \quad (1.43)$$

donde ϕ_j^{cl} es la solución clásica a las ecuaciones de movimiento de SUGRA en las condiciones de frontera especificadas. Por tanto, *para $\lambda, N \gg 1$ podemos determinar los correladores de SYM resolviendo las ecuaciones de movimiento clásicas de SUGRA.*

⁵¹El producto interno de Klein-Gordon es la componente temporal de la corriente de Noether.

⁵²Al calcular los correladores, eventualmente se apaga esta deformación.

⁵³Por los apellidos Gubser, Klebanov, Polyakov y Witten.

⁵⁴El subíndice en Δ_{nn} se refiere al modo no normalizable.

1.5.6. Holografía y el Grupo de Renormalización

La dualidad AdS/CFT implementa geoméricamente el enfoque del grupo de Renormalización de Wilson (-Kadanoff)[30]. Para motivar esta idea⁵⁵, consideremos un sistema no gravitacional en una red de espaciamento a y Hamiltoniano

$$H = \sum_{x,i} J_i(x,a) \mathcal{O}^i(x). \quad (1.44)$$

Donde x denota los sitios de la red e i etiqueta una colección de operadores \mathcal{O}^i . El factor $J_i(x,a)$ son las constantes de acoplamiento (o fuentes) de los operadores en el punto x de la red. El argumento a en las fuentes hace énfasis en el espaciamento característico sobre el cual definimos la teoría. En el grupo de Renormalización⁵⁶ sustituimos la red incrementando el espaciamento y reemplazando los múltiples sitios (etiquetados con x) por uno solo que representa el valor promedio de todo un conjunto de sitios en la red original. En este proceso, el Hamiltoniano (1.44) retiene su forma original pero los operadores son pesados distinto. En consecuencia, los acoplamientos $J_i(x,a)$ cambian. Suponiendo que el espaciamento se duplica en cada proceso, los acoplamientos cambian bajo la sucesión,

$$J_i(x,a) \rightarrow J_i(x,2a) \rightarrow J_i(x,4a) \rightarrow \dots \quad (1.45)$$

Entonces el acoplamiento adquiere en este proceso una dependencia en la escala (el espaciamento en la red) y podemos considerar tal dependencia como $J_i(x,z)$ siendo $z = a, 2a, 4a, ..$ la escala de longitud a la cual se analiza el sistema. La evolución de estos acoplamientos está determinada por una función beta⁵⁷,

$$z \frac{\partial}{\partial z} J_i(x,z) \equiv \beta_i(J_i(x,z), z). \quad (1.46)$$

En la región de acoplamiento débil, las funciones β pueden ser determinadas perturbativamente. Sin embargo, en el régimen de acoplamiento fuerte, la correspondencia AdS/CFT propone considerar z como una dimensión extra (la coordenada radial inversa en (1.29)). La sucesión de redes a diferentes valores de z corresponden entonces a diferentes hipersuperficies de un espacio de dimensión mayor (ver figura 1.5.4). Las fuentes $J_i(x,z)$ son identificadas como fuentes en el espacio con coordenada extra z : $J_i(x,z) = \phi_i(x,z)$ y gobernadas por una acción gravitacional, es decir, por una métrica.

La *dualidad holográfica* puede entenderse entonces como una geometrización de la dinámica cuántica codificada en el grupo de renormalización[30]. Los acoplamientos (microscópicos) en el UV pueden identificarse con los valores de los campos del bulto en la frontera del espacio con dimensión extra (anti de Sitter).

Holografía

Considerando una teoría cuántica de campos en d dimensiones con dual gravitacional, el número de grados de libertad de un sistema es medido por su entropía (cantidad extensiva). Si \mathcal{R}_{d-1} es una región $(d-1)$ -dimensional a tiempo constante, su entropía sería proporcional al volumen,

$$S_{QFT} \propto Vol(\mathcal{R}_{d-1}). \quad (1.47)$$

La teoría gravitacional dual vive en $(d+1)$ dimensiones y aún así contiene la misma información que la QFT de dimensión menor. Por otro lado, la entropía en un volumen dado en una teoría gravitacional está acotada por la entropía de un agujero negro que encierra tal volumen. De acuerdo al *principio*

⁵⁵En la sección (4.3) se analiza con mayor detalle

⁵⁶ver sección (3.5)

⁵⁷Ver sección (3.3)

Holográfico, la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte de eventos⁵⁸ (la ecuación de Bekenstein-Hawking),

$$S_{BH} = \frac{1}{4G_N} A_H \tag{1.48}$$

Utilizando esta expresión, si \mathcal{R}_d es una región espacial en la teoría gravitacional $(d + 1)$ -dimensional y asumiendo que \mathcal{R}_d está acotada por una variedad $(d - 1)$ -dimensional \mathcal{R}_{d-1} , es decir, $\mathcal{R}_{d-1} = \partial\mathcal{R}_d$, entonces la entropía asociada a \mathcal{R}_d escala como

$$S_{GR}(\mathcal{R}_d) \propto \text{Área}(\partial\mathcal{R}_d) \propto \text{Vol}(\mathcal{R}_{d-1})$$

En acuerdo al comportamiento de la QFT (1.47). En general, el principio holográfico establece que una región del espacio cuya frontera tiene área A , puede ser descrita de manera exhaustiva por no más de $A/4G_N$ grados de libertad, es decir, por aproximadamente un grado de libertad por área de Planck.

⁵⁸Una revisión de estas ideas está contenida en [44].

Capítulo 2

Campo de Dirac en AdS

En este capítulo daremos una breve revisión al campo de Dirac en *AdS*. Los *vielbein*, necesarios para definir localmente a los campos en geometrías generales, adquieren una expresión sencilla en anti de Sitter. Teniendo estos objetos podemos hacer contacto con las álgebras de Clifford curvas para construir la ecuación de Dirac y su derivada covariante via la conexión de espín. Finalmente, al ser anti de Sitter un espacio con frontera y el campo de Dirac un objeto que obedece una ecuación de primer orden en derivadas, es necesario tener cuidado al establecer condiciones de frontera (Dirichlet o Neumann).

2.1. Vielbein

Para un espaciotiempo curvo, necesitamos un referencial ortogonal en cada punto sobre el cual definir la regla de transformación de los campos (en este caso del fermión). Debido al principio de equivalencia, podemos hallar, en un punto arbitrario x_0 , un conjunto de coordenadas $\xi_{x_0}^a$ ($a = 1, \dots, \dim M$) locales e inerciales en x_0 . La métrica en cualquier sistema no inercial estará dado por

$$g_{MN}(x) = \eta_{ab} e_M^a(x) e_N^b(x)$$

Donde $e_M^a(x) = \partial_M \xi_{x_0}^a(x)$ ¹ es el *Vielbein*. Índices M hace referencia a las coordenadas del espaciotiempo del bulto mientras que índices a están asociados a un referencial ortonormal local y plano (LP). Bajo una transformación general de coordenadas $x \rightarrow x'$, los vielbein se comportan como un vector contravariante

$$e_M^a \rightarrow e'^a_M = \frac{\partial x'^a}{\partial x^M} e_M^a$$

y bajo una rotación local, transforma como

$$e_M^a \rightarrow e'^a_M = (L^{-1}(x))^a_b e_M^b(x)$$

La matriz $L_b^a \in SO(1, d-1)$ o $SO(d)$ representa una transformación de Lorentz local tal que,

$$\eta_{ab} L_c^a(x) L_d^b(x) = \eta_{cd}$$

Es conveniente definir los vielbein inversos $E \equiv e^{-1}$.

$$E_a^M(x) = \eta_{ab} g^{MN}(x) e_N^b(x)$$

y el vector dual a la 1-forma e^a ,

$$E_a(x) = E_a^M(x) \frac{\partial}{\partial x^M} \in T_p(M)$$

¹la métrica η_{ab} puede ser reemplazada por su versión euclidiana δ_{ab}

El vielbein y su inverso satisfacen las relaciones

$$e^a \cdot E_b = e_M^a E_b^M = \delta_b^a \quad E_a^M e_N^a = \delta_N^M \quad \eta_{ab} = g_{MN}(x) E_a^M(x) E_b^N(x) \quad (2.1)$$

En el parche de Poincaré (1.29), los vielbein adoptan la forma,

$$e_M^a = \frac{L}{r} \delta_M^a, \quad E_a^M = \frac{r}{L} \delta_a^M \quad (2.2)$$

2.2. Matrices Gamma en d+1 dimensiones

En electrodinámica cuántica, interesa hallar representaciones del grupo de Lorentz SO(1,3) correspondientes a partículas de espín 1/2. Si existe un conjunto de matrices $\Gamma^\mu \in M_{n \times n}(K)$ tales que satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} \equiv \Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n \times n} \quad (2.3)$$

decimos que proveen una representación n -dimensional del álgebra de Lorentz definiendo [16]

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad (2.4)$$

Ya que $S^{\mu\nu}$ satisfacen el álgebra de Lorentz

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\rho}, \quad (2.5)$$

Válidas en cualquier dimensión Lorentziana o Euclidiana. Las matrices de Dirac junto con la identidad generan el álgebra de Clifford C , definida como el conjunto de todas las combinaciones lineales de todos los productos formados de los elementos de $C = \mathbf{1}, \Gamma^0, \Gamma^1, \dots, \Gamma^{n-1}$. Donde n es la dimensión del espacio-tiempo.

Una base para C es[35]

$$\{\mathbf{1}, \Gamma^a, \Gamma^{a_1} \Gamma^{a_2}, \dots, \Gamma^{a_1} \dots \Gamma^{a_r}, \dots, \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{n-1}\}$$

Donde $0 \leq a_1 < a_2 < \dots \leq n-1$. La representación espinorial del grupo de Lorentz no es unitaria. Al ser $(\gamma^0)^2 = -1$ y $(\gamma^i)^2 = 1$, los eigenvalores son imaginarios y reales, respectivamente (en la signatura $(-, +, +, \dots)$). Entonces, podemos tomar γ^0 anti hermitiana y consecuentemente, γ^i hermitiana². Estas relaciones se condensan en

$$(\Gamma^a)^\dagger = \Gamma^0 \Gamma^a \Gamma^0 \quad (2.6)$$

Resulta relevante para el propósito de esta tesis analizar los casos de dimensión par e impar de la teoría de frontera. Si la dimensión del espacio es n , requerimos n matrices que cierren el álgebra (2.3). El tamaño mínimo de las matrices sin embargo, es $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \times 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ donde $\lfloor n/2 \rfloor$ es el entero más grande no mayor que $\lfloor n/2 \rfloor$.

2.2.1. d par

Si la teoría de frontera es de dimensión par, podemos escoger las matrices gamma planas en el bulto como[3]

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \equiv \Gamma_\eta^\mu, \quad \Gamma^r = \gamma^{d+1} \equiv \Gamma_\eta^r \quad (2.7)$$

Donde γ^{d+1} es el análogo de γ^5 para $d = 4$. El subíndice en (2.7) es por que tal matriz satisface el álgebra de Clifford plana. En esta representación las dos componentes que resultan del espinor de Dirac, ψ_\pm , transforman como espinores de Weyl d dimensional de quiralidad opuesta. Por tanto, en la teoría de frontera, el operador dual asociado es un espinor quiral.

²La representación quiral o de Weyl tienen esta propiedad.

2.2.2. d impar

Cuando la teoría de frontera es de dimensión impar es conveniente trabajar con la representación en el bulto

$$\Gamma_\eta^r = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\eta^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Que satisfacen (2.3). En esta base las componentes ψ_\pm transforman cada como un espinor de Dirac d dimensional. Se sigue que el operador dual asociado en la frontera es también de esta clase. En cualquier dimensión, el operador dual asociado al espinor del bulto tiene la mitad de las componentes.

Una representación relevante para espinores en AdS_4 es

$$\Gamma_\eta^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, \quad \Gamma_\eta^r = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\eta^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Donde $\gamma^\mu = (i\sigma^3, \sigma^1, \sigma^2)$ proporciona una representación del álgebra de Clifford $d = 3$ dimensional[1].

2.2.3. Álgebra de Clifford curva

Con ayuda del formalismo de los vielbein podemos extender el álgebra (2.3) al caso en que la métrica $g^{MN}(x)$ codifica un espacio-tiempo curvo en general dependiente de la posición. Las matrices de Dirac *curvas* están relacionadas con sus similares *planas* por

$$\Gamma_g^M = E_a^M(x)\Gamma_\eta^a \quad (2.10)$$

En cuyo caso, las álgebras curva y plana están dadas, respectivamente, por las relaciones de anticommutación,

$$\{\Gamma_g^M, \Gamma_g^N\} = 2g^{MN}\mathbf{1}, \quad \{\Gamma_\eta^M, \Gamma_\eta^N\} = 2\eta^{MN}\mathbf{1} \quad (2.11)$$

2.3. La conexión de Espín

En un espacio-tiempo curvo, es necesario definir la diferenciación tomando en cuenta la variación de los vectores base que generan localmente un referencial en el espacio tangente a una variedad diferenciable[41].

$$D_M V^N = \partial_M V^N + \Gamma_{ML}^N V^L.$$

Donde Γ_{ML}^N es la conexión de Levi-Civita y V^M es un vector en $T_p M$. Gracias a los Vielbein, es posible escribir V con índices a del espacio localmente plano y a su vez, usando las matrices gamma, cambiar estos últimos a índices espinoriales, es decir

$$D_M V^a = \partial_M V^a + \omega_{Mb}^a V^b.$$

La cantidad ω_{Mb}^a es llamada *conexión de espín*. Consistencia de ambas ecuaciones implica

$$D_M V^a = e_N^a D_M V^N$$

En cuyo caso, la conexión espinorial tiene la forma³

$$2\omega_M^{ab} = e^{Na} \left(\partial_M e_N^b - \partial_N e_M^b \right) - e^{Nb} \left(\partial_M e_N^a - \partial_N e_M^a \right) - e^{Pa} e^{Rb} \left(\partial_P e_{Rd} - \partial_R e_{Pd} \right) e_M^d \quad (2.12)$$

Con esta estructura de los vielbein (2.2), podemos calcular explícitamente los términos en (2.12).

$$\partial_M e_N^b = -\frac{L}{r^2} \delta_N^b \delta_M^5 = -\frac{1}{r} \left(\frac{L}{r} \delta_N^b \right) \delta_M^5 = -\frac{1}{r} \delta_M^5 e_N^b$$

³La demostración rigurosa escapa al objetivo de esta tesis, una revisión puede encontrarse en [15]

$$\partial_P e_{Rd} = \partial_P \left(\eta_{dh} e_R^h \right) = \eta_{dh} \partial_P e_R^h = -\frac{1}{r} \delta_P^5 e_R^h \eta_{hd}$$

Y la conexión de espín adopta la forma

$$2\omega_M^{ab} = e^{Na} \left(-\frac{1}{r} \delta_M^5 e_N^b + \frac{1}{r} \delta_N^5 e_M^b \right) - e^{Nb} \left(-\frac{1}{r} \delta_M^5 e_N^a + \frac{1}{r} \delta_N^5 e_M^a \right) - e^{Pa} e^{Rb} \left(-\frac{1}{r} \delta_P^5 e_R^h \eta_{hd} + \frac{1}{r} \delta_R^5 e_P^h \eta_{hd} \right) e_M^d \quad (2.13)$$

Es de utilidad considerar la identidad,

$$e^{Na} \delta_N^5 e_M^b = \delta_5^a \delta_M^b \quad (2.14)$$

Ya que con ella, los términos de lado derecho en (2.13) resultan,

$$2r\omega_M^{ab} = \delta_5^a \delta_M^b - \delta_M^a \delta_5^b - \delta_5^b \delta_M^a + \delta_M^b \delta_5^a - \delta_M^a \delta_5^b + \delta_5^a \delta_M^b = 2\delta_5^{[a} \delta_M^{b]} + \delta_{[5}^a \delta_M^b]$$

O bien,

$$\omega_M^{ab} = \frac{1}{r} \delta_5^{[a} \delta_M^{b]} \quad (2.15)$$

Finalmente, contraemos los índices del espacio LP con la representación del álgebra de Lorentz (2.4), para obtener

$$D_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_M^{ab} \sigma_{ab} \quad (2.16)$$

Con $\sigma_{ab} = \frac{1}{4} [\Gamma^a, \Gamma^b]$. Explícitamente, para AdS_{d+1} en la métrica (1.29),

$$D_M = \begin{cases} \partial_\mu + \frac{1}{4r} [\Gamma^r, \Gamma^\mu] & \text{si } M = \mu \\ \partial_r & \text{si } M = r. \end{cases}$$

2.4. La acción Fermiónica

Con las herramientas descritas en las secciones anteriores, estamos listos para escribir la acción para fermiones a orden cuadrático en AdS[1; 3; 11; 12],

$$S = \mathcal{N} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} i \bar{\psi} [\Gamma^M D_M - m] \psi + S_B. \quad (2.18)$$

Con las matrices gamma dadas por (2.11) y la derivada covariante por (2.16). En (2.18) la derivada covariante actúa a la derecha. Las componentes del campo de Dirac son complejas, por tanto, es formalmente equivalente considerar la parte real e imaginaria de ψ_a independientes o bien, tomar el par $(\psi, \bar{\psi})$ como campos independientes donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^0$.

El complejo i aparece como factor global debido a que permite escribir la acción en signatura euclidiana como,

$$S_E = -\mathcal{N} \int d^{d+1} x \sqrt{g} (\bar{\psi} \Gamma^M \mathcal{D}_M \psi - m \bar{\psi} \psi), \quad (2.19)$$

considerando las continuaciones analíticas[3]

$$t \rightarrow -i\tau, \quad \omega \rightarrow i\omega_E, \quad iS \rightarrow -S_E, \quad \gamma^t \rightarrow -i\gamma^\tau, \quad \Gamma^t \rightarrow -i\Gamma^\tau, \quad \bar{\psi} \rightarrow -i\bar{\psi}.$$

El factor \mathcal{N} en (2.18) sólo contribuye por un factor global en los correladores pero su signo está fijo por unitariedad en el bulto⁴ y en lo sucesivo se omite. Finalmente, S_B en (2.18) denota los términos de frontera requeridos para satisfacer el principio variacional[12] como veremos en la sección (2.5) y (2.6).

⁴ El argumento es considerar la cuantización canónica de (2.18) imponiendo relaciones de anticonmutación a tiempos iguales, $\{\psi(x), \Pi(x')\} = i\delta(x, x')$. Π es el momento conjugado respecto al tiempo, entonces $\Pi = -i\mathcal{N}\sqrt{-g}\psi^\dagger$. Si requerimos

2.5. Variación de la Acción

Efectuando la variación de (2.18) tenemos⁵,

$$\begin{aligned}\delta(S_b + S_B) &= \int d^{d+1}x \sqrt{-g} i \{ (\delta\bar{\psi}) \Gamma^M D_M \psi - \bar{\psi} \Gamma^M D_M \delta\psi - m (\delta\bar{\psi}) \psi + m \bar{\psi} \delta\psi \} + \delta S_B \\ &= \int d^{d+1}x \sqrt{-g} i \{ \delta\bar{\psi} [\Gamma^M D_M - m] \psi - \bar{\psi} \Gamma^M D_M \delta\psi + m \bar{\psi} \delta\psi \} + \delta S_B\end{aligned}$$

Integrando por partes $D_M (\bar{\psi} \Gamma^M \psi) = (D_M \bar{\psi}) \Gamma^M \psi - \bar{\psi} \Gamma^M D_M \delta\psi$ ⁶

$$\delta(S_b + S_B) = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} i \{ \delta\bar{\psi} (eom\psi) - (eom\bar{\psi}) \delta\psi + D_M (\bar{\psi} \Gamma^M \psi) \} + \delta S_B$$

Del teorema de la divergencia, con el unitario $\hat{\eta}_r = \frac{L}{r} (0, 0, \dots, 1)$ la acción del bulto sólo da contribución radial

$$\begin{aligned}\delta S_b &= i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \hat{\eta}_r \bar{\psi} \Gamma_g^r \delta\psi \\ &= i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \left(\frac{L}{r} \right) \bar{\psi} \Gamma_g^r \delta\psi \\ &= i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \left(\frac{L}{r} \right) \bar{\psi} E_a^M \Gamma_\eta^a \delta\psi \\ &= i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \left(\frac{L}{r} \right) \bar{\psi} \frac{r}{L} \delta_a^r \Gamma^a \delta\psi \\ &= i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \bar{\psi} \Gamma_\eta^r \delta\psi\end{aligned} \tag{2.20}$$

La variación de (2.18) es entonces

$$\delta(S_b + S_B) = i \int_\epsilon d^d x \sqrt{-\gamma} \bar{\psi} \Gamma_\eta^r \delta\psi + \delta S_B + \dots \tag{2.21}$$

Donde los puntos suspensivos refieren a los términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento y al exigir que éstas se verifiquen debemos proponer un término de frontera S_B tal que su variación δS_B cancele el término de variación del bulto.

2.6. Condiciones de Frontera

En una teoría cuántica, la funcional generadora

$$Z = \int [D\psi] \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\psi] \right)$$

posee toda la información relevante de la teoría. El método de fase estacionaria (aproximación de punto silla (1.43)) permite que, en el límite $\hbar \rightarrow 0$,

$$Z \sim \exp \frac{i}{\hbar} S_c$$

que el conmutador sea positivo (estados de norma positiva en el Hilbert) encontramos que esto fija el signo de \mathcal{N} a ser negativo. En [3], se reporta que con este argumento, resultan positivas las densidades espectrales de la teoría de frontera a través de los correladores.

⁵El operador δ cambia el signo de las variables de Grassmann,[34]

⁶ $D_M \Gamma^M = 0$

Donde S_c es el valor de la acción funcional $S[\phi]$ evaluada en la trayectoria clásica, es decir, en las soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \quad (2.22)$$

Como se anunció en la sección anterior, es un hecho genérico que en un espacio con frontera la variación de la acción produce, además de términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento, términos de frontera que no se cancelan al imponer (2.22)[12]. Resulta crucial entonces colocar un término de frontera S_B tal que $\delta(S + S_B) = 0$. Por otro lado, S_B es el objeto más importante para reproducir dinámica en la teoría de frontera en el contexto de AdS/CFT. Como se mencionó en (1.5.5), esta teoría permite calcular las funciones de correlación de la teoría de campo dual utilizando la acción de gravedad clásica. Se vuelve crucial entonces que se verifique (2.22) para todos los campos involucrados y además S_B sea capaz de generar funciones de correlación de operadores duales. Existe una estrecha relación entre S_B y las condiciones de frontera en el infinito de AdS como revisaremos a continuación.

2.6.1. Condiciones de frontera de Dirichlet

La ecuación de Dirac contiene derivadas de primer orden. El momento canónico asociado a ψ es proporcional a ψ^\dagger y por tanto no podemos fijar por completo todas las componentes del espinor en la frontera simultáneamente[9]. En otras palabras, $\delta\psi = 0$ (que son condiciones de frontera de Dirichlet), fija por completo al espinor y a su momento canónico. Por tanto, sólo podemos fijar un conjunto completo de variables que conmutan (e.g. las coordenadas q 's o los momentos p 's). Resulta útil entonces descomponer el espinor como $\psi = \psi_+ + \psi_-$, donde ψ_\pm son proyecciones de ψ debido a los proyectores Γ_\pm ⁷,

$$\psi_\pm \equiv \Gamma_\pm \psi = \frac{1}{2} (\mathbf{1} \pm \Gamma^r) \psi, \quad \Gamma_\pm^\dagger = \Gamma_\pm, \quad (2.23)$$

Es decir ψ_\pm es eigen-espinor de Γ^r con eigenvalor ± 1 (2.23), la variación (2.20) puede reescribirse

$$\delta S_b = i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} (\bar{\psi}_+ + \bar{\psi}_-) \Gamma^r (\delta\psi_+ + \delta\psi_-)$$

Efectuando los productos, podemos notar que los términos con mismo signo se anulan,

$$\bar{\psi}_\pm \Gamma^r \delta\psi_\pm = \bar{\psi}_\pm \Gamma^r \Gamma_\pm \delta\psi = \pm \psi^\dagger \Gamma_\pm \Gamma^0 \Gamma_\pm \delta\psi = \pm \psi^\dagger \Gamma^0 \Gamma_\mp \Gamma_\pm \delta\psi = 0.$$

Mientras que los términos con signo distinto pueden ser más sucintos,

$$\bar{\psi}_\pm \Gamma^r \delta\psi_\mp = \mp \bar{\psi}_\pm \delta\psi_\mp$$

La expresión (2.20) adopta la forma,

$$\delta S_b = i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} [\bar{\psi}_- \delta\psi_+ - \bar{\psi}_+ \delta\psi_-] \quad (2.24)$$

Si proponemos la acción de frontera[1; 9; 12] que preserva la invarianza conforme,

$$S_B[r = \epsilon] = -\frac{i}{2} \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \bar{\psi} \psi \quad (2.25)$$

Su variación resulta⁸

$$\delta S_B[r = \epsilon] = -\frac{i}{2} \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} [(\delta\bar{\psi}) \psi - \bar{\psi} \delta\psi] \quad (2.26)$$

⁷Los Proyectores satisfacen : $(\Gamma_\pm)^2 = \Gamma_\pm$, $(\Gamma_\pm)^\dagger = \Gamma_\pm$, $\Gamma_\pm \Gamma_\mp = 0$. Ver (2.9).

⁸ $\sqrt{-\gamma} = \left(\frac{L^2}{\epsilon^2}\right)^{d/2}$ es la métrica inducida en $r = \epsilon$ en el parche de Poincaré (1.29).

Notemos que el primer término del lado derecho puede reescribirse como sigue

$$(\delta\bar{\psi})\psi = (\delta\psi)^\dagger \Gamma^0 \psi = \left(\Gamma^0 \delta\psi\right)^\dagger \psi = -\left(\psi^\dagger (\Gamma^0 \delta\psi)\right)^\dagger = -\left(\psi^\dagger \Gamma^0 \delta\psi\right)^* = -(\bar{\psi}\delta\psi)^*. \quad (2.27)$$

Y, al ser $\bar{\psi}\delta\psi$ variable de Grassmann⁹ tenemos

$$\delta S_B[r = \epsilon] = \frac{i}{2} \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} 2\bar{\psi}\delta\psi \quad (2.28)$$

En términos de los eigenespinores de Γ_\pm reescribimos la variación

$$\delta S_B[r = \epsilon] = i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} [\bar{\psi}_+ \delta\psi_- + \bar{\psi}_- \delta\psi_+] \quad (2.29)$$

Con estas consideraciones, la variación total de la acción (bulto + frontera) es

$$\delta(S_b + S_B) = 2i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \bar{\psi}_- \delta\psi_+ \quad (2.30)$$

Si han de verificarse las ecuaciones de movimiento, debemos imponer como condición de frontera $\delta\psi_+ = 0$. Notemos que, si proponemos la acción de frontera con signo opuesto

$$S_B[r = \epsilon] = \frac{i}{2} \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \bar{\psi}\psi \quad (2.31)$$

La variación total de la acción resulta

$$\delta(S_b + S_B) = -2i \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} \bar{\psi}_+ \delta\psi_- \quad (2.32)$$

En cuyo caso, es $\delta\psi_- = 0$ la condición de frontera a satisfacer.

Cuál de las dos condiciones $\delta\psi_\pm = 0$ tomar está determinada por el comportamiento asintótico ($r \rightarrow 0$) del espinor en la frontera¹⁰. En modos de Fourier en las direcciones transversales,

$$\begin{aligned} \psi_-(k, r) &= A(k)r^{d/2-mL} + B(k)r^{d/2+mL+1} + \dots \\ \psi_+(k, r) &= D(k)r^{d/2+mL} + C(k)r^{d/2-mL+1} + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Los espinores A , B , C y D están relacionados (sustituyendo estas asintóticas como $\psi_+ + \psi_- = \psi$ en la ecuación de Dirac y colectando potencias en r),

$$D = -\frac{i\Gamma \cdot k}{k^2}(2m+1)B, \quad C = \frac{i\Gamma \cdot k}{2m-1}A \quad (2.34)$$

La componente temporal de la corriente de Noether asociada al Lagrangiano de Dirac es la energía (producto interno de Dirac),

$$\varepsilon \sim \int_{r \geq \epsilon} dr \frac{1}{r^{d+1}} \left[\bar{A}C r^{d-2mL+1} - \bar{D}B r^{d+2mL+1} \right] \quad (2.35)$$

Si $mL \geq 1/2$ el término $\bar{D}B$ es normalizable mientras que $\bar{A}C$ es no-normalizable¹¹. Esto significa que A no puede fluctuar dinámicamente sin invertir una energía infinita. En este caso, estamos obligados

⁹Un binomio es de Grassman imaginario si $(\bar{\psi}\psi)^* = -\bar{\psi}\psi \Rightarrow -(\bar{\psi}\psi)^* - \bar{\psi}\psi = -2\bar{\psi}\psi$

¹⁰A su vez, determinado por las relaciones (1.34)

¹¹Ver sección (1.5.5).

a imponer $\psi_- = 0$ como condición en la frontera. Inversamente, si $mL \leq -1/2$, el término $\bar{D}B$ es no normalizable y debemos imponer entonces $\psi_+ = 0$ en la frontera. Algo interesante ocurre en el intervalo $0 < mL < 1/2$: todos los términos en la asintótica (2.33) son de hecho, normalizables¹². En este caso podemos fijar una u otra condición con libertad. Las teorías de campo en la frontera que resultan son genéricamente diferentes[13], referidas comúnmente como *cuantización estándar y alternativa*¹³.

En cuantización estándar, el coeficiente $A(k)$ representa la fuente del operador dual \mathcal{O}_ψ en la teoría de frontera, mientras que, el coeficiente $D(k)$ representa el vev del operador dual. Por tanto, si $mL \geq 1/2$, debemos imponer como condición de frontera $\psi_- = 0$ y así fijar la fuente. En la frontera, la teoría es de campo conforme e invariante de Lorentz y contiene operadores fermiónicos \mathcal{O}_ψ con dimensión de escalamiento $\Delta_+ = d/2 + mL$.

En cuantización alternativa, se fija $\psi_+ = 0$. $D(k)$ es interpretado como la fuente del operador dual y $A(k)$ como el valor de expectación asociado. La teoría de frontera resultante es conforme e invariante de Lorentz y el operador fermiónico tiene dimensión de escalamiento $\Delta_- = d/2 - mL$. Fijar un modo u otro como la fuente y vev conduce a dos teorías de campo en la frontera, diferentes entre sí cuyas funciones de correlación están vinculadas a través de una transformada de Legendre[13].

2.6.2. Condiciones de Frontera de Neumann

Las condiciones $\delta\psi_+ = 0$ y $\delta\psi_- = 0$ sobre las componentes del espinor son de *Dirichlet*. Podemos trabajar con condiciones de *Neumann*, que fijarán el comportamiento del momento canónico en la frontera

$$\Pi_\psi^r = \frac{\delta S_B}{\delta \dot{\psi}}, \quad \Pi_{\bar{\psi}}^r = 0 \quad (2.36)$$

Donde el índice superior r refiere a la componente radial. Tal componente es de mayor interés en este trabajo. Lo interesante de las ecuaciones (2.36) es que con ellas y la acción de frontera S_B propuesta podemos codificar el tipo de cuantización (estándar o alternativa) que resulta en la frontera. Para tal efecto, reescribamos el término de frontera en (2.25) como

$$S_B[r = \epsilon] = \frac{i}{2} \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma} f \bar{\psi} \psi \quad (2.37)$$

Donde f es un acoplamiento a determinar. La condición de Neumann que resulta de esta última expresión es¹⁴

$$\Pi_\psi = \frac{\delta S_B}{\delta \dot{\psi}} = -i\sqrt{-\gamma} f \bar{\psi} \quad (2.38)$$

Por otro lado, el momento canónico radial asociado a ψ se obtiene directamente del Lagrangiano del bulto(2.18)

$$\Pi_\psi^r \equiv \frac{\vec{\partial} L}{\partial(D_r \psi)} = -i\sqrt{-g} \bar{\psi} \Gamma_g^r \quad (2.39)$$

Comparando estas últimas ecuaciones, se verifica que

$$\bar{\psi} [f\sqrt{-\gamma} - \sqrt{-g}\Gamma_g^r] = 0,$$

o bien

$$\bar{\psi} \left[\mathbf{1} f \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^d - \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^{(d+1)} E_a^r \Gamma_\eta^a \right] = \bar{\psi} \left[f \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^d \mathbf{1} - \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^{(d+1)} \frac{\epsilon}{L} \delta_a^r \Gamma_\eta^a \right] = 0,$$

¹²El análogo a este intervalo de valores para el caso del campo escalar es $-d^2/4 \leq m^2 L^2 < -d^2/(4+1)$ en AdS_{d+1} .

¹³El término cuantización se refiere a que la teoría de campo dual, es cuántica.

¹⁴El factor de 2 es debido a la ecuación (2.27).

es decir

$$\bar{\psi} [f\mathbf{1} - \Gamma_\eta^r] = 0. \quad (2.40)$$

De esta última expresión, si $f = \pm 1$, tenemos

$$\bar{\psi} (\pm\mathbf{1} - \Gamma^r) = \pm\bar{\psi} (\mathbf{1} \mp \Gamma^r) = \pm 2\bar{\psi}\Gamma_\mp = \pm 2\bar{\psi}_\pm \Rightarrow \bar{\psi}_\pm = 0 \quad (2.41)$$

En AdS_4 y con las matrices gamma (2.9), la condición $\bar{\psi}_\pm = 0$ implica que $\psi_\mp = 0$, ya que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^\dagger = (\psi_+^\dagger, \psi_-^\dagger) \Rightarrow \bar{\psi} = (\psi_+^\dagger, \psi_-^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_-^\dagger \gamma^0, \psi_+^\dagger \gamma^0)$$

Es decir, Γ^0 mezcla los espinores ψ_\pm . Resumiendo,

$$f = \begin{cases} -1 & \Rightarrow \psi_+(r \rightarrow 0) = 0 & \text{Cuantización Alternativa} \\ 1 & \Rightarrow \psi_-(r \rightarrow 0) = 0 & \text{Cuantización Estándar} \end{cases}$$

La elección del valor de f nos permite elegir en que cuantización, estándar o alternativa, estamos trabajando para la ventana de valores $0 < mL < 1/2$ donde los términos dominantes en el desarrollo asintótico de los campos son todos normalizables. Al analizar la dinámica de la acción de frontera en el contexto de la renormalización holográfica de Wilson, este acoplamiento codifica el flujo entre puntos fijos de la teoría de frontera.

Capítulo 3

Renormalización en Teoría de Campos

3.1. Introducción

Es un hecho conocido que las teorías físicas dependen fuertemente de la escala de energía o distancia a la cual se exploran los sistemas físicos. El éxito de la Relatividad General para describir la interacción gravitacional es válida en regímenes desde el sistema solar hasta cúmulos de galaxias. Por otro lado, la mecánica cuántica, describe los sistemas microscópicos con alto grado de precisión. La idea, por demás sensata, de construir teorías que se reduzcan bajo ciertos límites a teorías que tenemos bajo control experimental es consecuencia de ello. La dependencia en la escala es también muy contundente en el contexto de la teoría cuántica de campos (QFT), que describen las interacciones microscópicas probadas hasta energías de 15 TeV. Por arriba de este valor, no tenemos por qué confiar que la estructura formal de la teoría siga siendo válida ni tampoco probar lo contrario sin alguna herramienta extra. Por otro lado, QFT adolece de divergencias, que aparecen en cálculos de correcciones radiativas codificadas en los diagramas de Feynman. Las correcciones radiativas, son en esencia, correcciones cuánticas al valor semi clásico. Genéricamente, los cálculos se traducen en integrales sobre el espacio de momentos asociados a las partículas virtuales que nacen del vacío cuántico. Como el valor de los momentos virtuales pueden ser arbitrariamente altos (o bajos), las integrales son divergentes. Llamamos divergencias Ultravioleta UV (infrarroja IR) al infinito o divergencia que surge al integrar sobre excitaciones muy localizadas (muy espaciadas) del espacio tiempo.

La catástrofe de las divergencias en QFT, fue sanada por un método que a priori parece ser un simple artificio matemático: absorber los infinitos en cantidades que no son físicas u observables¹. El resultado de este truco es una cantidad finita y observable. Este proceso, llamado *Renormalización* no es, sin embargo, una simple providencia. Ha probado ser una herramienta muy poderosa para controlar las divergencias en QFT, su taxonomía y lo más importante para el propósito de este trabajo: implementar sistemáticamente, ecuaciones para los acoplamientos de las teorías como función de la escala. Estas ecuaciones, llamadas funciones beta, mapean las divergencias de la teoría en flujos de los acoplamientos con la escala energética.

Un paso más allá, es la implementación de Wilson del proceso de renormalización². La idea de Wilson consiste en reconocer que cualquier teoría es válida dentro de un rango de escala energética, por encima (o debajo) de la cual, nueva física puede emerger. Los grados de libertad fuera de esta escala deben ser codificados dentro de la descripción de tal manera que su influencia sea despreciable al hacer fluir la teoría lejos de la escala límite. Llamamos teoría *efectiva* a la que resulta de implementar estas ideas. Basado en la integral de trayectoria, el origen de las divergencias puede ser abordado considerando la dependencia de los parámetros del lagrangiano con la escala, aislando su dependencia funcional con el corte UV y construyendo nuevos diagramas de Feynman que resultarán en flujos de los acoplamientos en el espacio

¹Esconder los infinitos debajo de la alfombra'

²Una revisión de las ideas de Kenneth Wilson están contenidas en K.G.Wilson y J. Kogut, Phys. Repts. 12C, 75 (1974)

de posibles teorías.

Es posible además, codificar toda la dependencia de las funciones de Green renormalizadas con la escala. En el proceso de renormalización, es necesario imponer una escala de corte para regular las divergencias. Tal corte o regulador debe mandarse a infinito para obtener una entidad independiente del corte. La física dependerá de la escala de renormalización μ . La ecuación de Callan-Symanzik codifica cómo varían las funciones de Green de la teoría con la escala de renormalización.

Este capítulo describimos con un ejemplo particular, cómo surgen las divergencias en el cálculo de amplitudes y las técnicas para regularlas y renormalizarlas. Daremos una breve discusión sobre la sistematización de las divergencias para una teoría genérica, donde surgen la evidencia incuestionable de absorber tales infinitos en los constantes de acoplamiento. Esta es la llamada *Teoría de Perturbaciones Renormalizada*. Revisaremos del *Grupo de Renormalización* y funciones β que nos permite deducir cuando y por qué una teoría es renormalizable en función de la escala.

3.2. Divergencias y Renormalización

En electrodinámica Cuántica (QED), un proceso dispersivo típico es la aniquilación de un par electrón-positrón para crear un par muón-antimuón $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$. A nivel árbol³ el diagrama que contribuye al proceso es ilustrado en (3.1). Correcciones radiativas a orden e^4 requiere considerar 7 diagramas más. Uno

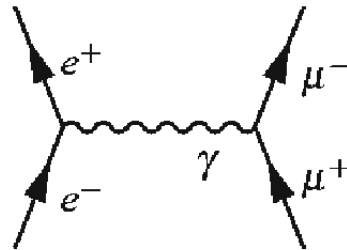


Figura 3.1: Dispersión a nivel árbol o a orden lineal en potencias de e

de ellos representa la polarización del vacío o auto energía del fotón⁴. El diagrama (3.2) puede verse como

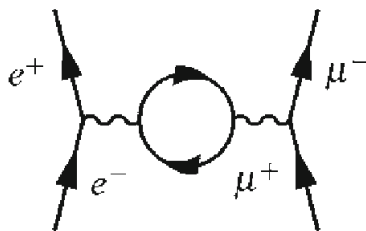


Figura 3.2: Corrección radiativa a orden e^4 en la expansión perturbativa

una modificación a la estructura del fotón debido un par virtual protón-positrón. Este diagrama altera el

³Consideramos el orden dominante, al nivel árbol y subdominante a un loop en los diagramas de Feynman

⁴Los diagramas restantes corresponden a correcciones por auto energía del electrón y corrección de vértice

campo $A^\mu(x)$ visto por el electrón dispersado. Puede cambiar la intensidad del campo electromagnético y además su dependencia en x [16]. Analizaremos de manera sucinta este efecto en esta sección como propósito de exhibir las divergencias. En la figura (3.2), el lazo interno está codificado en el *tensor de polarización* del fotón,

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= (-ie)^2(-1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \\
 &\equiv \Pi_2^{\mu\nu}(q)
 \end{aligned}$$

Podemos generalizar el diagrama considerando las contribuciones de todos los diagramas cuya topología es irreducible por una partícula (IP1), en cuyo caso $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ es la contribución a orden subdominante en potencias de e del tensor $\Pi^{\mu\nu}(q)$. Debido a la identidad de Ward, la estructura de $\Pi^{\mu\nu}$ es de la forma

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad (3.1)$$

Donde $\Pi(q^2)$ es regular en $q^2 = 0$. El propagador exacto puede reescribirse como

$$\text{Diagrama} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2))}.$$

que siempre tendrá un polo en $q^2 = 0$ con residuo

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} \equiv Z_A. \quad (3.2)$$

Esto sugiere que la amplitud del proceso dispersivo a cualquier orden, resulta en un cambio en el propagador relativo a la aproximación de nivel árbol,

$$\begin{aligned}
 &\text{Diagrama} \rightarrow \text{Diagrama} \\
 &\dots \frac{e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \dots \rightarrow \dots \frac{Z_A e^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \dots
 \end{aligned}$$

Sí codificamos este cambio en una sustitución del valor de la carga eléctrica por $e \rightarrow \sqrt{Z_A}e$, paso conocido como *renormalización de la carga*, podemos argumentar que el valor físico u observable de este parámetro es $\sqrt{Z_A}e$ al incluir las correcciones radiativas. Definimos entonces, el valor *desnudo* de la carga a la cantidad que aparece como parámetro en el lagrangiano como e_0 y el valor físico como simplemente e . La relación entre ambas será

$$e = \sqrt{Z_A}e_0 \quad (3.3)$$

A nivel árbol, $Z_A = 1$ y $e = e_0$.

3.2.1. ¿ Constantes de acoplamiento variables ?

El fenómeno de la polarización del vacío puede entenderse con las ideas anteriores. El valor medible de la carga eléctrica resulta de considerar el efecto de la creación de pares virtuales e^+e^- que *apantallan* el valor desnudo. A medida que penetramos en el medio circundante, este se comporta efectivamente como dieléctrico debido a las partículas virtuales (ver fig.3.3). Al explorar energías cada vez más altas, el apantallamiento del medio es menor y nos aproximamos al valor desnudo e infinito de la carga eléctrica. La constante de acoplamiento efectiva resulta⁵

$$\alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log[-q^2/Am^2]} \quad (3.4)$$

Con $A = \exp(5/3)$. La expresión es infinita para un valor finito de q^2 , llamado *Polo de Landau*, que

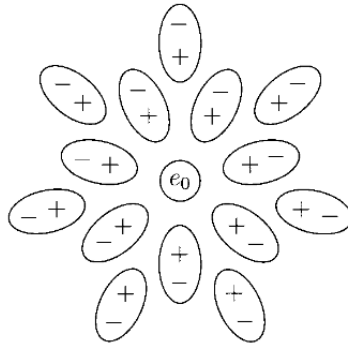


Figura 3.3: Los pares virtuales e^+e^- se comportan como dipolos efectivos de longitud $\sim 1/m$ y nublan el valor desnudo del electrón

sucede a energías del orden de 10^{277} GeV $\gg 10^2$ GeV (escala electrodébil). Al descender en la energía, consideramos cada vez más la contribución de esta nube de partículas virtuales, resultando en una disminución del valor de la carga, que es el valor medible cuyo comportamiento asintótico a bajas energías es $1/137$. Fijando $q = 1/r$, el comportamiento de la constante de acoplamiento como función de la distancia está esquematizado en (3.4).

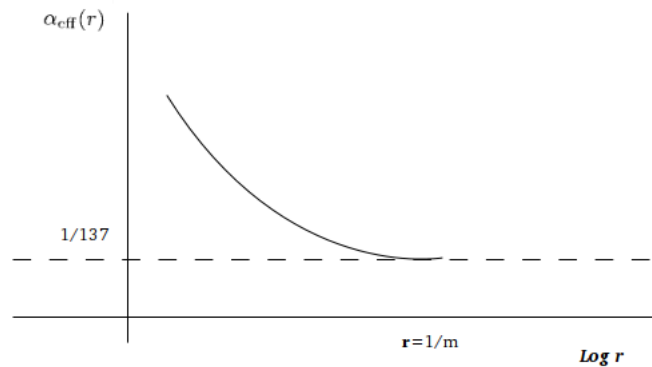


Figura 3.4: Descripción Cualitativa de la constante de acoplamiento efectiva generada por el efecto de polarización del Vacío

⁵ α es proporcional a la carga eléctrica: $\alpha = e^2/4\pi$

3.3. La función β

No obstante el éxito del proceso de renormalización en subsanar las divergencias, es un hecho conocido actualmente que esta técnica está íntimamente ligada a la manera en cómo las teorías físicas se comportan dependiendo la escala de energía (o de distancia) a la cuál se extrae información relevante para la descripción de un fenómeno físico. A través de la renormalización, podemos codificar las divergencias en una dependencia explícita de los parámetros de la teoría con la escala de energía como sugiere la secciones anteriores. La variación de los parámetros, o más generalmente, de los acoplamientos de la teoría con la escala, está contenida en la llamada función beta⁶

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} \quad (3.5)$$

En Electrodinámica Cuántica, la función beta calculada a partir del proceso de dispersión $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ a orden e^4 (1 lazo) en la expansión perturbativa tiene la forma

$$\beta(e)_{QED} = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (3.6)$$

El hecho de que $\beta(e) > 0$ significa que, si comenzamos con una energía donde el acoplamiento es pequeño tal que el método perturbativo es válido, la carga efectiva crece al incrementar la energía. Decimos que QED es seguro en el infrarrojo (IR), ya que la aproximación perturbativa ofrece cada vez mejores resultados a medida que disminuye la energía. De hecho, en vista de que el electrón es la partícula más ligera cargada eléctricamente y tiene masa no nula, el corrimiento de la constante de estructura fina⁷ se detiene a la escala m_e en el valor $1/137$. A medida que incrementamos la escala de energía, $e(\mu)^2$ crece hasta que, en cierto valor, el acoplamiento es de orden uno y la expansión perturbativa deja de ser válida. En QED tal valor es llamado polo de Landau. Un cálculo que incluya el efecto de todos los fermiones del Modelo Estándar muestra que en el polo de Landau $\Lambda_L \simeq 10^{34} GeV$ [43]. Sin embargo, en esta escala, se espera que QED esté unificada con las otras interacciones del Modelo Estándar en el contexto de las teorías de gran unificación. Si este no es el caso, el polo de Landau entra en el territorio de la Gravedad Cuántica, con energías del orden de $10^{19} GeV$. Las teorías de Norma no abelianas como QCD presentan el caso opuesto, $\beta(g) < 0$. Lo cual significa que a medida que incrementamos (disminuimos) la energía, el acoplamiento decrece (aumenta). Este fenómeno llamado *Libertad Asintótica* es la razón por la cual, los quarks están unidos en combinaciones neutras bajo la carga de color a escalas menores a $200 MeV$ (confinamiento). A altas energías, en la región ultravioleta (UV) de la teoría, el acoplamiento de QCD se aproxima a cero mientras que a bajas energías se vuelve fuertemente acoplada. Decimos que QCD es *esclavizada en IR*.

En general, las propiedades UV e IR que posee una teoría están controladas por los puntos fijos de la función beta, definidos como aquellos valores del acoplamiento para los cuales

$$\beta(g^*) = 0 \quad (3.7)$$

QED y QCD presentan puntos fijos con $g^* = 0$, llamados triviales o gaussianos. Cerca del punto fijo, si la función beta es negativa (como el caso QCD) el acoplamiento tiende a su valor crítico, $g^* = 0$ al incrementar la energía. Esto significa que el punto crítico es un punto estable en el UV, o bien, es atractor a medida que g evoluciona a altas energías. Por el contrario, si la función beta es positiva (como el caso QED) el acoplamiento se aproxima al valor crítico al disminuir la energía. Decimos en este caso que el punto fijo es estable en IR.

Las teorías que poseen acoplamientos sin dimensiones son invariantes de escala a nivel clásico debido a

⁶ μ representa la escala de energía en un experimento mientras que Λ la escala de corte

⁷La constante de estructura fina y la carga eléctrica están relacionadas por $\alpha_{em} = e^2/4\pi$

que la acción no contiene parámetros con dimensiones. En este caso, la variación de los acoplamientos con la energía puede verse como el resultado del rompimiento a nivel cuántico de la invariancia clásica de escala; diferentes escalas de energía en la teoría se distinguen por diferentes valores de sus acoplamientos⁸. Podemos entender esta anomalía conforme notando que el proceso de regularización privilegia una escala, que es la de corte. Sin embargo, la invariancia de escala se recupera a nivel cuántico justamente en los puntos fijos donde, por definición, el acoplamiento no cambia. Genéricamente, la variación de los acoplamientos en una teoría interactuante destruye la invariancia clásica de escala a nivel cuántico. A pesar de esto, en los puntos fijos de la función beta asociada, las funciones de Green escalan ahora con dimensión

$$\Delta_{\text{anómalo}} = \Delta + \gamma^* \quad (3.8)$$

La dimensión de escalamiento de los campos es corregida por γ^* llamada dimensión *anómala*.

3.4. Ecuación de Callan-Symanzik

El programa de renormalización habitual en teoría de campos consiste, en esencia, de dos pasos. Primero, las divergencias que surgen en el cálculo de diagramas con lazos son controladas introduciendo un regulador Λ . El segundo paso consiste en absorber las divergencias ($\Lambda \rightarrow \infty$) en los parámetros que aparecen en el lagrangiano. Esto conduce a interpretar tales parámetros como los acoplamientos dependientes de escala. En QED, además de las funciones $e_0(\Lambda)$ y $m_0(\Lambda)$, los campos de la teoría adquieren un factor de normalización global. En otras palabras, los campos *desnudos* $\psi_0(x)$ y $A_{0\mu}(x)$ del lagrangiano, adquieren una dependencia en Λ de la forma,

$$\psi_0(x, \Lambda) = \sqrt{Z_\psi(\Lambda)}\psi(x), \quad A_{0\mu}(x, \Lambda) = \sqrt{Z_A(\Lambda)}A_\mu(x), \quad (3.9)$$

donde $\psi(x)$ y $A_\mu(x)$ son los *campos renormalizados* e independientes del regulador. Las divergencias son absorbidas por los factores de normalización en el proceso perturbativo y el lagrangiano adopta la forma,

$$\mathcal{L}_{ren} = Z_\psi(\Lambda)\bar{\psi} [i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0(\Lambda)]\psi - \frac{1}{4}Z_A(\Lambda)F^2 - e_0(\Lambda)Z_\phi(\Lambda)\sqrt{Z_A(\Lambda)}A_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (3.10)$$

Imponiendo *condiciones de renormalización* controlamos la divergencia en el factor de normalización⁹,

$$Z_A(\Lambda) = \frac{1}{1 - \Pi_0(0, \Lambda)}, \quad (3.11)$$

que coincide con la expresión (3.2). Otra manera práctica de implementar el programa de renormalización completamente equivalente a la sistemática anterior, es bajo el esquema de *teoría de perturbaciones renormalizada*. Esta técnica utiliza, en lugar de acoplamientos desnudos, aquellos renormalizados que son independientes del corte. En el caso de QED, el punto de partida es la acción escrita en términos de los campos, masa y carga renormalizados.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4}F^2 - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (3.12)$$

Las divergencias que aparecen en las correcciones radiativas son tratadas de la siguiente manera. Para cada diagrama IP1 infinito, añadimos un *contratérmino* a la acción de manera que el nuevo vértice inducido cancele la divergencia. Este proceso puede realizarse sistemáticamente a todo orden en el desarrollo

⁸El rompimiento de la invariancia clásica de escala a nivel cuántico es una simetría anómala.

⁹Para la renormalización de la carga, la condición de renormalización es que el propagador exacto se comporte como el propagador libre cerca del polo.

perturbativo, en potencias de los acoplamientos. Por construcción, después de añadir los contratérminos a (3.12), las funciones de Green se calculan a partir del lagrangiano renormalizado

$$\mathcal{L}_{ren} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{ct} \quad (3.13)$$

y son completamente finitas al retirar el corte. Para QED, el lagrangiano de contratérminos tiene la forma[42]

$$\mathcal{L}_{ct} = iA(\Lambda)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mB(\Lambda)\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}C(\Lambda)F^2 - eD(\Lambda)_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (3.14)$$

Añadiendo este lagrangiano a la expresión (3.12) y comparando con la forma que tiene (3.10), se verifica

$$\begin{aligned} m_0(\Lambda) &= m\frac{1+B}{1+A} \\ e_0(\Lambda) &= e\frac{1+D}{[1+A]\sqrt{1+C}} \\ Z_\psi(\Lambda) &= 1+A \\ Z_A(\Lambda) &= 1+C \end{aligned} \quad (3.15)$$

QED y en general las teorías de Yang-Mills, pertenecen a la clase de teorías llamadas renormalizables. Esto significa que los operadores que aparecen en el lagrangiano de contratérminos tienen la misma estructura que aquellos del lagrangiano original. Este no es el caso para otras teorías donde la eliminación de divergencias a altos ordenes en el desarrollo perturbativo requiere la introducción de nuevos operadores cuyos acoplamientos absorben las divergencias. Cuando el número de estos acoplamientos crece con el orden del desarrollo perturbativo, decimos que la teoría es *no renormalizable*. En los inicios de este programa, se creía que tales teorías eran inconsistentes. Sin embargo, actualmente se reconoce que las teorías no renormalizables son perfectamente consistentes y pueden ser utilizadas para calcular observables a energías por debajo de cierta escala natural, como veremos en la siguiente sección. Como mencionamos, el programa de renormalización depende de las condiciones de renormalización. Gracias a ellas, los parámetros desnudos de la teoría son relacionados con cantidades renormalizadas. Para QED, la renormalización *en la capa de masa* (on-shell) define los parámetros renormalizados evaluando la correspondiente función de Green para valores on-shell de los momentos externos. Podemos empero, implementar un cambio en el *esquema de renormalización*. Para QED, este cambio de esquema involucra definir la masa y carga renormalizada en términos de otro valor de momento, sea físico o no, $p^2 = \mu^2$. El cambio de esquema puede arrojar valores diferentes para las funciones de Green así como los parámetros renormalizados, a pesar de que todas las cantidades deben ser independientes de la elección del esquema de renormalización. La dependencia en μ de las funciones de Green (funciones de correlación) está dada por la ecuación de *Callan-Symanzik*. Consideremos una teoría con campo $\phi(x)$ e ignoremos todos sus posibles índices. Hemos visto que el campo renormalizado adquiere un factor de normalización respecto al valor desnudo,

$$\phi_0(x) = \sqrt{Z_\phi(\Lambda)}\phi(x). \quad (3.16)$$

Donde Λ constituye el regulador y $\phi(x)$ es el campo renormalizado. Con diagramas de Feynman, las funciones de Green desnudas de n puntos adoptan la forma

$$\begin{aligned} G_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda)_0 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) \\ = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n)} \langle \Omega | T[\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n)] | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (3.17)$$

Calculadas orden por orden en el desarrollo perturbativo con acoplamiento desnudo $g_0(\Lambda)$. Por otro lado, la función de Green renormalizada, $G_n(p_1, \dots, p_n)$, es independiente del regulador pero sí depende de la

escala de μ en donde las condiciones de renormalización se implementan. De la expresión (3.16), hallamos que se verifica la siguiente identidad,

$$G_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda)_0 = Z_\phi(\Lambda)^{n/2} G_n(p_1, \dots, p_n; \mu) \quad (3.18)$$

Las funciones IP1, $\Gamma_n(p_1, \dots, p_n)$, pueden obtenerse de la ecuación anterior tomando en cuenta que, al pasar de las funciones de Green a las funciones IP1 debemos remover la contribución de los propagadores externos cuya contribución individual es un factor $Z(\Lambda)$. Obtenemos

$$\Gamma_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda)_0 = Z_\phi(\Lambda)^{-n/2} \Gamma_n(p_1, \dots, p_n; \mu) \quad (3.19)$$

La función del lado izquierdo depende explícitamente del regulador e implícitamente a través de $m_0(\Lambda)$ y $g_0(\Lambda)$. Por otro lado, la función del lado derecho sólo depende de parámetros renormalizados y la escala μ .

Podemos ahora averiguar cómo $\Gamma_n(p_1, \dots, p_n; \mu)$ cambia con la escala μ . Manteniendo fijos los parámetros desnudos $m_0(\Lambda)$ y $g_0(\Lambda)$ mientras variamos μ resulta en un cambio en los parámetros m , g y $Z_\phi(\Lambda)$. Recordando que el lado derecho de (3.19) es independiente de μ , tenemos

$$\mu \frac{d}{d\mu} \left[Z_\phi(\Lambda)^{-n/2} \Gamma_n(p_1, \dots, p_n; \mu) \right] = 0$$

y usando la dependencia en μ de m , g y Z_ϕ arrivamos a la ecuación de Callan-Symanzik

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma_n(g) \right] \Gamma_n(p_1, \dots, p_n; \mu) = 0 \quad (3.20)$$

Reconocemos la función β de la sección anterior que gobierna la evolución de los acoplamientos con la energía y la dimensión anómala $\gamma(g)$,

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \\ \gamma_m(g) &= \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \\ \gamma(g) &= \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z_\phi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.5. El grupo de Renormalización

En las secciones anteriores señalamos que la cancelación de las divergencias UV es esencial si una teoría ha de tener capacidad predictiva y que al implementar el proceso de renormalización, los cuántos virtuales de arbitrariamente alta energía se codifican en una dependencia de los acoplamientos con la escala de energía. Es un hecho bastante sorprendente que, en una teoría renormalizada, tales cuantos virtuales tengan poco efecto en la dinámica a bajas energías[16]. Esta simplificación inusitada y contra intuitiva puede ser abordada con el esquema *Wilsoniano* del proceso de renormalización, donde se interpreta de manera sistemática cómo los acoplamientos de una teoría renormalizable pueden verse como entidades dependientes de la escala y además provee de un marco teórico para describir cuantitativamente el origen de las divergencias. La escala de corte que implementa Wilson tiene significado físico. Por ejemplo el espaciado atómico en un imán provee una escala de corte natural.

En la sección (1.5.6) consideramos un sistema cuántico genérico descrito por el Hamiltoniano (1.44), con acoplamientos $J_i(x, a)$. Al iterar el espaciado en la red (1.45), los acoplamientos pueden verse como funciones del espaciado, $J_i(x, z)$. Si llamamos a tal proceso *decimación* \mathcal{D} , eventualmente existirá un hamiltoniano \mathcal{H}_* invariante ante la decimación,

$$H \xrightarrow{\mathcal{D}} H_{(1)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H_{(2)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \dots \xrightarrow{\mathcal{D}} H_{(*)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H_{(*)}$$

Es decir, la teoría con dinámica descrita por H_* es un *punto fijo* en el espacio de teorías. En este punto fijo, H_* es invariante de escala ya que \mathcal{D} no cambia ya la teoría codificada en sus acoplamientos. El espacio de Hamiltonianos puede parametrizarse especificando los valores de las constantes de acoplamiento. Denotando $\mathcal{O}^i(x)$ a todos los términos de interacción (posiblemente hay infinitos de ellos), el Hamiltoniano más general para el sistema puede escribirse como

$$H = \sum_{x,i} J_i(x, a) \mathcal{O}^i(x) \quad (3.22)$$

donde J_i son los acoplamientos correspondientes y representan las *coordenadas* en el espacio de Hamiltonianos. La decimación por tanto, define un mapeo sobre ellos,

$$\mathcal{D} : J_i \rightarrow J_i^{(1)}$$

\mathcal{D} puede entenderse entonces como un cambio en las constantes de acoplamiento, en remembranza con lo visto en las secciones anteriores. Nuestra ignorancia en la Física a cortas distancias resulta en una renormalización de las constantes de acoplamiento y el nuevo Hamiltoniano describe el sistema a distancias grandes. La transformación en el espacio de teorías bajo \mathcal{D} constituye el llamado *flujo del grupo de renormalización*.

Supongamos que describimos un sistema con un Hamiltoniano de punto fijo H^* e implementamos una perturbación, cambiando las constantes de acoplamiento asociadas a un término de interacción O . Es decir consideramos,

$$H = H_* + \delta\lambda O \quad (3.23)$$

Pensando en λ como coordenada en el espacio de Hamiltonianos, la interacción O corresponde a un desplazamiento o flujo, separando la teoría (sin perturbación) del punto fijo. Nos preguntamos entonces sobre las posibilidades que tiene el sistema perturbado para fluir¹⁰

- El flujo del grupo de renormalización regresa el sistema al punto fijo. En este caso, decimos que la interacción O es *irrelevante*.
- El flujo del grupo de renormalización aleja al sistema de su punto fijo. Decimos que la interacción O es *relevante*.
- A primero orden, la perturbación no aleja al sistema del punto fijo. Llamamos a O , deformación *marginal*. Será necesario considerar términos más altos en la expansión para determinar el flujo.

En la figura (3.5) se esquematiza un ejemplo del flujo del grupo de renormalización en el espacio de acoplamientos. La teoría presenta dos acoplamientos λ_1 y λ_2 y dos puntos fijos; en el origen 0 (Gaussiano) y en el punto F (no trivial). Las flechas indican la dirección en la cual el flujo actúa. La teoría libre ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) es un punto fijo estable ya que cualquier perturbación $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2 > 0$ hace fluir la teoría de regreso al caso libre para distancias grandes. Por otro lado el punto F es estable respecto a cierta clase de perturbaciones (flechas entrantes), otras perturbaciones pueden hacer fluir a la teoría lejos del punto fijo o incluso llevarla al origen, donde vive el sistema libre.

3.5.1. Grupo de Renormalización en Teoría de Campos

En teoría cuántica de campos el grupo de renormalización está construido en el esquema de integral de trayectoria, en donde los grados de libertad son variables de integración. Todas las cantidades importantes se obtienen de la funcional generadora

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int (\mathcal{L} + J\phi) \right] = \left(\prod_k \int d\phi(k) \right) \exp \left[i \int (\mathcal{L} + J\phi) \right] \quad (3.24)$$

¹⁰Consideramos la perturbación-deformación O a primer orden en $\delta\lambda$.

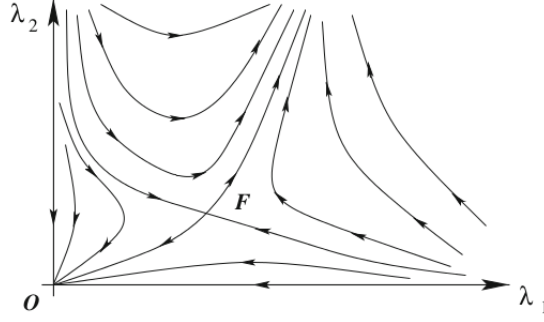


Figura 3.5: Ejemplo del flujo del grupo de renormalización. [42]

Donde en el lado derecho hemos considerado componentes de Fourier. Al estar interesados en la descripción de la teoría por debajo de cierta escala Λ , imponemos el corte. De acuerdo con Wilson, las fluctuaciones cuánticas de excitaciones grandes están representadas por componentes de Fourier cerca del corte¹¹. La descripción a bajas energías es tomar el límite $\mu \ll \Lambda$. Para establecer el flujo de la teoría desde Λ hasta cierta escala de renormalización $\mu < \Lambda$, podemos implementar en la integral de trayectoria algo análogo a la decimación de la sección anterior. Primero, definamos la medida con corte Λ

$$[D\phi]_{\Lambda} = \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k) \quad (3.25)$$

Ahora dividamos las variables de integración en dos grupos tomando un parámetro $b < 1$. Variables $\phi(k)$ en el intervalo $b\Lambda < |k| < \Lambda$ son asociadas a grados de libertad de momentos grandes que serán integrados. Defínase el soporte

$$\hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{para } b\Lambda < |k| < \Lambda \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (3.26)$$

Con esto podemos reemplazar el lagrangiano original por aquél con $\phi + \hat{\phi}$ y reescribir la funcional como

$$Z = \int D\phi \exp\left(\int \mathcal{L}\right) \int D\hat{\phi} \exp\left(\int d^d x \hat{\mathcal{L}} + \sum g_{n,m} (\phi^n \hat{\phi}^m)\right) \quad (3.27)$$

Las integrales sobre los $\hat{\phi}(k)$ se llevan a cabo usando las reglas de Feynman adaptadas a la integral funcional¹², obteniendo

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_0 + (\text{suma de diagramas conectados}) \quad (3.28)$$

Donde \mathcal{L}_0 representa el lagrangiano original. Con \mathcal{L}_{eff} se pueden calcular funciones de correlación de los ϕ y como estos incluyen momentos hasta $b\Lambda$, los diagramas con lazos son integrados hasta este corte. En general, este procedimiento provoca la aparición de operadores de alta dimensión. Estas piezas no renormalizables surgen en la integración de las variables $\hat{\phi}$. Sin embargo el esquema mantiene estas contribuciones bajo control. Más aún, el análisis implicaría la presencia de interacciones no renormalizables

¹¹ En Minkowski, $k^2 \leq \Lambda^2$ no es muy efectivo en controlar variables de momentos grandes ya que en direcciones tipo luz las componentes de k pueden ser muy grandes y aún así tener k^2 pequeño. Después de una rotación de Wick, la integral funcional es Euclidiana y $k^2 \leq \Lambda^2$ controla bien los momentos.

¹²No llevaremos a cabo la derivación ya que solo pretendemos ilustrar el método

en el lagrangiano original para valores muy grandes del corte Λ , pero con efecto despreciable en la física a energías muy por debajo del corte.

Al reescalar distancias y momentos de acuerdo a

$$k' = k/b, \quad x' = xb, \quad \Rightarrow |k'| < \Lambda, \quad (3.29)$$

y considerando como caso particular la teoría ϕ^4 , el lagrangiano efectivo (3.28), puede escribirse esquemáticamente como

$$\begin{aligned} \int d^d x \mathcal{L}_{eff} = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(1 + \Delta Z)(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(\lambda + \Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C(\partial_\mu \phi)^4 + \Delta D\phi^6 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En términos de la variable reescalada x' ,

$$\begin{aligned} \int d^d x \mathcal{L}_{eff} = \int d^d x' b^{-d} \left[\frac{1}{2}(1 + \Delta Z)b^2(\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(\lambda + \Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C b^4(\partial'_\mu \phi)^4 + \Delta D\phi^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esta última expresión lleva al mismo propagador que el lagrangiano original si reescalamos los campos

$$\phi' = [b^{2-d}(1 + \Delta Z)]^{1/2} \phi \quad (3.32)$$

Y la acción regresa a su expresión original¹³, mientras que las perturbaciones se transforman

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = \int d^d x' \left[\frac{1}{2}(\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2}m'^2 \phi'^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\lambda' \phi'^4 + C'(\partial'_\mu \phi')^4 + D' \phi'^6 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Los nuevos parámetros del lagrangiano serán ahora

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2 + \Delta m^2)(1 + \Delta Z)^{-1} b^{-2}, \\ \lambda' &= (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta Z)^{-2} b^{d-4}, \\ C' &= (C + \Delta C)(1 + \Delta Z)^{-2} b^d, \\ D' &= (D + \Delta D)(1 + \Delta Z)^{-3} b^{2d-6}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

Todas las correcciones, Δm^2 , $\Delta\lambda$, etc, derivan de diagramas correctivos y por tanto son pequeñas comparadas con los términos dominantes¹⁴.

Combinando la operación de integrar grados de libertad cerca del corte con el reescalamiento (3.29), el lagrangiano sufre una transformación en sus parámetros. Sucesivas integraciones producen más iteraciones en (3.34). Tomando b cercano a 1, las capas de momento se vuelven infinitesimalmente pequeñas y la transformación se vuelve continua. El resultado neto es un flujo o trayectoria en el espacio de posibles lagrangianos (como en la sección anterior del modelo de red). Las transformaciones continuas del lagrangiano generadas por este proceso se conoce como el *grupo de renormalización*¹⁵.

El grupo de renormalización está relacionado con el proceso de renormalización. Si deseamos calcular la función de correlación de campos cuyos momentos p_i son mucho menores que Λ existen dos caminos:

¹³En el caso de ϕ^4 , $L \sim (\partial\phi)^2 + m\phi^2 - (\lambda/4!)\phi^4$

¹⁴El lagrangiano original tiene $C=D=0$, pero las mismas ecuaciones aplican si fueran no nulas.

¹⁵El grupo de renormalización no es un grupo en el sentido formal ya que no es invertible.

perturbativamente usando el lagrangiano original o el lagrangiano efectivo obtenido después de integrar capas de momento hasta la escala del momento externo p_i . Ambos procedimientos arrojan los mismos resultados[16]. En el primer caso, los efectos de las correcciones permanecen ocultas hasta que se calculen los diagramas subdominantes. En el segundo caso, los efectos de las fluctuaciones han sido ya absorbidos en los nuevos acoplamientos (m', λ' , etc) y su influencia puede verse directamente del lagrangiano. Sin embargo, los parámetros del lagrangiano efectivo pueden diferir de aquellos del lagrangiano original ya que debemos iterar la transformación (3.34) muchas veces para obtener sus valores desde la escala Λ hasta el valor experimental típico. Más aún, podemos estudiar como el lagrangiano tiende a variar bajo el grupo de renormalización, en analogía con los sistemas estadísticos. El caso más simple es tomar un lagrangiano en la vecindad del punto $m^2 = \lambda = C = D = \dots = 0$, donde todas las perturbaciones se anulan. Es decir, para el campo escalar, el término cinético,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 \quad (3.35)$$

es un punto fijo bajo el grupo de renormalización. En la vecindad de \mathcal{L}_0 , podemos ignorar los términos $\Delta m^2, \Delta\lambda$, etc, en (3.34). Los parámetros transforman ahora como

$$m'^2 = m^2 b^{-2}, \quad \lambda' = \lambda b^{d-4}, \quad C' = C b^d, \quad D' = D b^{2d-6}, \quad \text{etc.}$$

Ya que $b < 1$, aquellos parámetros multiplicados por potencias negativas (positivas) de b crecerán (disminuirán). Si el lagrangiano contiene coeficientes crecientes, eventualmente llevarán al lagrangiano lejos del punto fijo \mathcal{L}_0 . Es convencional que los términos en el lagrangiano efectivo sean vistos como operadores locales añadidos como perturbaciones o deformaciones al lagrangiano original \mathcal{L}_0 . Llamamos *relevantes* a estos operadores cuyos coeficientes crecen durante el proceso de recursión. Operadores *irrelevantes* serán aquellos cuyos coeficientes decrecen y *marginales* si los coeficientes asociados están multiplicados por $(b^0)^{16}$.

La aplicación del grupo de renormalización en teoría cuántica de campos profundiza el significado físico de una teoría renormalizable. Dada una teoría definida por su lagrangiano

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}_0 + \sum_i g_i O_i[\phi]$$

Al intentar remover los infinitos de la teoría, imponemos un regulador Λ y los valores de los acoplamientos cambian al variar la escala. Si deseamos calcular la dinámica efectiva de la teoría a una energía $\mu < \Lambda$, solo debemos integrar grados de libertad con energías entre el corte Λ y μ . la acción efectiva que resulta de esta integración, $S[\phi, \mu]$ a la escala μ , queda codificada en la funcional generadora,

$$e^{iS[\phi', \mu]} = \int_{\mu < p < \Lambda} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, \Lambda]} \quad (3.36)$$

Donde,

$$S[\phi, \Lambda] = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0[\phi] + \sum_i g_i(\Lambda) O_i[\phi] \right\} \quad (3.37)$$

es la acción a la escala de corte. Y

$$S[\phi', \mu] = \int d^d x \left\{ \mathcal{L}_0[\phi'] + \sum_i g_i(\mu) O_i[\phi'] \right\} \quad (3.38)$$

¹⁶El operador de masa ϕ^2 en el campo escalar es siempre relevante mientras que el operador ϕ^4 es relevante si $d < 4$ y marginal en $d = 4$.

la acción efectiva que depende de la escala μ y el campo renormalizado ϕ' .

La interpretación Wilsoniana de la renormalización ofrece una explicación a la otrora perspicaz remoción de infinitos: Las constantes de acoplamiento que corren con la energía pueden entenderse como una manera de incorporar en la acción efectiva a la escala μ , los efectos de excitaciones del campo a altas energías $E > \mu$ considerando a su vez, que toda teoría cuántica posee un corte Λ que tiene un significado físico.

Capítulo 4

Renormalización Holográfica

Para sistemas con dual gravitacional, la correspondencia AdS/CFT provee una descripción geométrica del proceso de renormalización. Recordemos del capítulo I que un mapeo esencial de la teoría es la igualdad en las funcionales generadoras (receta GKPW 1.5.5). Sin embargo, esta expresión es formalmente divergente; en la descripción de campo en la frontera, la divergencia es UV debido a excitaciones muy localizadas mientras que en el bulto, la divergencia es IR debido al volumen formalmente infinito[7]. *Renormalizar Holográficamente* recae en la simetría conforme de la CFT, cuyo dual es la isometría $r \rightarrow \lambda r$, $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ y que motiva la identificación de la coordenada radial en el bulto con una escala de energía en la teoría de frontera; $\Lambda \sim 1/r$ ¹. En este capítulo abordaremos el método para renormalizar las funciones de correlación de la CFT de manera holográfica, es decir, implementando un proceso de regularización y renormalización en el bulto. Una interpretación Wilsoniana del proceso de renormalización es posible considerando la variación de la acción de frontera en la coordenada radial[4; 5]. En todos los ejemplos conocidos de teorías con dual gravitacional en aAdS Poincaré, la componente g_{tt} es una función monotónicamente decreciente en la coordenada radial r , lo cual implica que los intervalos temporales en la frontera Δt tienen corrimiento al rojo comparado con el tiempo propio local $\Delta\tau \sim \sqrt{g_{tt}}\Delta t$ al incrementar el valor r . Por tanto, procesos de baja energía en la teoría de frontera, corresponden a procesos en el bulto muy en su interior. La conexión UV/IR otorga la interpretación natural de la coordenada radial r como la escala del grupo de renormalización en la teoría de frontera (ver sección (1.5.6)).

4.1. Funciones de Correlación Renormalizadas

En esta sección revisaremos el método general para obtener correladores renormalizados de la CFT utilizando la acción del bulto[7]. De acuerdo con AdS/CFT, a cada campo del bulto Φ se le asocia un operador de frontera invariante de norma O_Φ ². La función de partición del bulto es una funcional de los campos y parametrizada por condiciones de frontera. De acuerdo a la prescripción GKPW, el valor de frontera de los campos son identificados con la fuente que se acopla al operador dual y la función de partición en la capa de masa se identifica con la funcional generadora de las funciones de correlación en la CFT (1.41).

$$Z_{SUGRA}[\phi_0] = \int_{\Phi \sim \phi_0} D\Phi \exp(-S[\Phi]) = \left\langle \exp\left(-\int_{\partial aAdS} \phi_0 O\right) \right\rangle_{CFT} \quad (4.1)$$

Donde el valor de expectación de lado derecho es sobre la integral de trayectoria en la CFT. En la aproximación de punto silla (1.43), la expresión anterior resulta

$$S_{\text{on-shell}}[\phi_0] = -W_{CFT}[\phi_0] \quad (4.2)$$

¹La llamada conexión IR/UV de la sección 1.5.4.

²En particular, campos de norma en el bulto corresponden a corrientes en la frontera, con sus simetrías asociadas

Donde $S_{\text{on-shell}}[\phi_0]$ es la acción de supergravedad en la capa de masa y $W_{CFT}[\phi_0]$ la funcional generadora de diagramas conectados. Las funciones de correlación de algún operador \mathcal{O} se obtienen por diferenciación funcional respecto a la fuente,

$$\begin{aligned}\langle O(x) \rangle &= \frac{\delta S_{\text{onshell}}}{\delta \phi_0(x)} \Big|_{\phi_0=0} \\ \langle O(x)O(x_2) \rangle &= \frac{\delta^2 S_{\text{onshell}}}{\delta \phi_0(x)\delta \phi_0(x_2)} \Big|_{\phi_0=0} \\ \langle O(x)\dots O(x_n) \rangle &= (-1)^{n+1} \frac{\delta^3 S_{\text{onshell}}}{\delta \phi_0(x_1)\dots \delta \phi_0(x_n)} \Big|_{\phi_0=0}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Las funciones de correlación genéricamente divergen y (4.2) no está bien definida sin renormalización como mencionamos al inicio de capítulo. Para subsanar los infinitos en el bulto, el primer paso consiste en considerar el desarrollo en series de potencias en la coordenada radial cerca de la frontera para los campos del bulto, que denotaremos genéricamente con $F(x, r)$,

$$F(x, r) = r^{2m}(f_{(0)}(x) + f_{(2)}(x)r^2 + \dots + r^{2n}(f_{(2n)}(x) + \log r^2 \tilde{f}_{(2n)}(x)) + \dots)\tag{4.4}$$

Donde r es la coordenada radial en AdS usando coordenadas de Poincaré (1.29). En las siguientes secciones revisamos la técnica general de renormalización presentada en [7].

4.1.1. Análisis Asintótico

Las ecuaciones de campo son ecuaciones diferenciales de segundo orden³ en r con dos soluciones independientes. El comportamiento asintótico (cerca de la frontera $r = 0$) es r^{2m} y r^{m+n} respectivamente. En el desarrollo asintótico, la forma del término subdominante está determinada por las ecuaciones de campo. Si n no es entero, el término logarítmico $\tilde{f}_{(2n)}$ no está presente. Aquí supongamos que n es entero. El valor de frontera del campo $f_{(0)}$ que multiplica el factor dominante r^{2m} es interpretado como la fuente del operador dual. En el análisis, se resuelve las ecuaciones de movimiento de manera iterativa considerando la variable r como parámetro pequeño. Este proceso arroja ecuaciones algebraicas para $f_{(2k)}$, $k < n$ que determina unívocamente a $f_{(2k)}$ en términos de $f_{(0)}$ y sus derivadas hasta orden $2k$, dejando indeterminada a $f_{(2n)}$ que es la condición de frontera de Dirichlet para la solución linealmente independiente de aquella cuya forma asintótica dominante es r^m . $f_{(2k)}$ está relacionada con el vev o función de un punto del operador dual correspondiente. El término logarítmico en (4.4) está relacionado con anomalías conformes en la teoría dual y es determinado por $f_{(0)}$. En resumen[7],

- $f_{(0)}(x)$ es la fuente de la teoría de campo frontera,
- $f_{(2)}(x), \dots, f_{(2n-2)}$ y $\tilde{f}_{(2n)}$ se determinan completamente por las ecuaciones de movimiento y son funciones locales de $f_{(0)}$,
- $\tilde{f}_{(2n)}$ está relacionado con anomalías conformes,
- $f_{(2n)}(x)$ queda indeterminado por el análisis asintótico.

4.1.2. Regularización

El siguiente paso es calcular el valor de la acción en la capa de masa, es decir, la acción evaluada en las ecuaciones de movimiento (eom). Si estas se verifican la acción del bulto es nula quedando solo la acción de frontera,

$$S[\Phi_{cl}] = \int_{r=\epsilon} d^{d+1}x \sqrt{-g}[\text{eom}\Phi] + S_B[\Phi_{cl}(r = \epsilon)]\tag{4.5}$$

³Como excepción el campo de Dirac que trataremos más adelante.

Donde Φ_{cl} denota la solución clásica a las ecuaciones de movimiento. La acción de frontera queda automáticamente regularizada en $r = \epsilon$ y la definiremos entonces como $S_B = S_{reg}$. Esta acción puede contener divergencias al hacer $\epsilon \rightarrow 0$. Un número finito de tales términos divergentes puede ser aislado

$$S_{reg}[f_{(0)}; \epsilon] = \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-\gamma_{ind}} \left[\epsilon^\nu a_{(0)} + \epsilon^{-(\nu+1)} a_{(2)} + \dots - \log \epsilon a_{(2\nu)} + O(\epsilon^0) \right] \quad (4.6)$$

Donde $\nu > 0$ depende de la dimensión de escalamiento del operador dual y $a_{(2k)}$ son funciones locales de la fuente $f_{(0)}$. La divergencia logarítmica está directamente relacionada con la anomalía conforme[8]. Las divergencias no dependen de $\tilde{f}_{(2n)}$, es decir, de los coeficientes que el análisis asintótico no determina.

4.1.3. Contratérminos

La acción de contratérminos está definida como

$$S_{ct}[F(x, \epsilon); \epsilon] = -\text{términos divergentes de } S_{reg}[f_0; \epsilon] \quad (4.7)$$

Donde los términos divergentes son expresados en términos de los campos $F(x, \epsilon)$ que habitan en la hiper superficie $r = \epsilon$, ya que son ellos los que transforman de manera covariante. Por tanto debemos invertir la expresión (4.4) hasta el orden requerido para obtener $f_{(0)} = f_{(0)}(F(x, \epsilon), \epsilon)$ e insertarlos en (4.6).

4.1.4. Acción en la Capa de Masa Renormalizada

Definimos la acción sustraida como

$$S_{sub}[F(x, \epsilon); \epsilon] = S_{reg}[f_{(0)}; \epsilon] + S_{ct}[F(x, \epsilon); \epsilon] \quad (4.8)$$

Esta expresión tiene limite finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$. La acción renormalizada será una funcional de las fuentes definida en este limite,

$$S_{ren}[f_{(0)}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{sub}[F; \epsilon] \quad (4.9)$$

La distinción entre S_{ren} y S_{sub} es necesario ya que las derivadas funcionales requeridas para obtener los correladores son efectuadas antes de tomar el limite.

4.1.5. Funciones de 1 punto

La función de un punto o VEV del operador O_F en presencia de fuentes es

$$\langle O_F \rangle_s = \frac{1}{\sqrt{-\gamma_{ind}}} \frac{\delta S_{ren}}{\delta f_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon^{d/2-m}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_{sub}}{\delta F(x, \epsilon)} \right) \quad (4.10)$$

La evaluación explícita de tal limite arroja

$$\langle O_F \rangle_s \sim f_{(2n)} + C(f_{(0)}). \quad (4.11)$$

con $C(f_{(0)})$ una función que depende localmente de las fuentes y por tanto da términos de contacto para funciones de n puntos. La forma exacta de $C(f_{(0)})$ depende de la teoría bajo consideración y es en general, dependiente del esquema de sustracción. El coeficiente de $f_{(2n)}$ depende también de la teoría bajo consideración pero es independiente del esquema de sustracción.

4.1.6. Correladores de n puntos

Para calcular funciones de n puntos (o correladores) necesitamos soluciones a las ecuaciones de movimiento con la condiciones de frontera prescritas. Dada una solución exacta podemos determinar el coeficiente $f_{(2n)}$ como función de $f_{(0)}$ considerando la asintótica de la solución. El correlador de n puntos se calcula entonces con⁴,

$$\langle O(x_1)\dots O(x_n) \rangle \sim \frac{\delta^n f_{(2n)}}{\delta f_{(0)}(x_1)\dots\delta f_{(0)}(x_n)} \Big|_{f_{(0)}=0} \quad (4.12)$$

4.1.7. Callan-Symanzik Holográfica

Como hemos visto, la escala de energía en la teoría de frontera está asociada con la coordenada radial en el bulto. Transformaciones del Grupo de Renormalización pueden ser estudiadas desde el punto de vista geométrico. Consideremos la isometría

$$r \rightarrow \lambda r, \quad x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu \quad (4.13)$$

Sabiendo como transforman los campos del bulto bajo difeomorfismos podemos calcular cómo la función $f_{(2n)}$ (y por tanto el correlador de n puntos 4.12) transforma bajo (4.13) y observar su variación a medida que variamos el regulador ϵ (escala de energía $1/\epsilon$ en la CFT).

4.2. Renormalización Holográfica para el Campo de Dirac

Apliquemos las ideas de las secciones anteriores para obtener el correlador de dos puntos fermiónico renormalizado [11; 12; 7; 21]. Para ello escribamos explícitamente la ecuación de Dirac en una base adecuada. La obtención de correladores involucra resolver la ecuación de movimiento en el bulto bajo condiciones de frontera prescritas.

4.2.1. Ecuación de Dirac en AdS

La ecuación de movimiento de Dirac es $E_a^M \Gamma^a D_M \psi - m\psi = 0$. Tomemos el radio de curvatura de anti-de Sitter como la unidad, en cuyo caso $E_a^M = r\delta_a^M$. Además, conviene trabajar en la versión Euclidiana de AdS ,

$$ds^2 = \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} dx^i dx^j + dr^2) \quad (4.14)$$

Las componentes de la conexión de espín no nulas son $(\omega_i)_{rj} = \frac{1}{r}\delta_{ij}$. Así que $D_r = \partial_r$ y las componentes restantes son

$$D_i = \partial_i + \frac{1}{4r} [\Gamma^r, \Gamma^i] \quad (4.15)$$

La ecuación de Dirac se simplifica,

$$\begin{aligned} 0 &= E_a^M \Gamma^a D_M \psi - m\psi \\ &= r\Gamma^M \partial_M \psi + \frac{1}{4}\Gamma^i [\Gamma^r, \Gamma^i] \psi - m\psi \\ &= \left[r\Gamma^M \partial_M - \frac{d}{2}\Gamma^r - m \right] \psi \end{aligned} \quad (4.16)$$

⁴Si no hay solución exacta como en el caso de varios campos acoplados, el problema de Dirichlet no es tratable en general. Se procede a linealizar las ecuaciones y hallar el propagador bulto-frontera.

Trabajemos con un solo modo de Fourier, $\psi \rightarrow e^{ikx}\psi$, donde hemos considerado el modo en dirección x^5 . La ecuación de Dirac es entonces

$$\left[r\Gamma^r \partial_r + ikr\Gamma^x - \frac{d}{2}\Gamma^r - m \right] \psi = 0 \quad (4.17)$$

Una base explícita para las matrices Γ hermitianas,

$$\Gamma^r = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^t = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^x = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Donde σ_i son las matrices de Pauli estándar. En esta base, los proyectores Γ_{\pm} (ver sección 2.6), son diagonales

$$\Gamma_+ \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \Gamma^r) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_- \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \Gamma^r) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Las ecuaciones de movimiento expresadas en términos de $\psi_{\pm} \equiv \Gamma_{\pm}\psi$ son

$$\begin{aligned} \left(r\partial_r - \frac{d}{2} - m \right) \psi_+ + kr\sigma_3\psi_- &= 0, \\ \left(r\partial_r - \frac{d}{2} + m \right) \psi_- + kr\sigma_3\psi_+ &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Que dan lugar a una ecuación de segundo orden

$$\left[\partial_r^2 - \frac{d}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2} \left(-m^2 \pm m + \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} \right) - k^2 \right] \psi_{\pm} = 0. \quad (4.21)$$

El comportamiento asintótico de ψ_{\pm} es⁶,

$$\psi_{\pm} = c_{\pm}(k)r^{d/2 \pm m} + O\left(r^{d/2+1 \pm m}\right) \quad (4.22)$$

Donde c_{\pm} son espinores que verifican $\Gamma_{\pm}c_{\pm} = \pm c_{\pm}(k)$ ⁷.

Identificamos el operador dual \mathcal{O} como el coeficiente del término dominante (modo no normalizable) en la asintótica (4.22) con $r \rightarrow 0$. Tal término es $r^{d/2-m}$, con el cual identificamos $c_-(k)$ como la fuente para \mathcal{O} . En otras palabras, fijemos ψ_- ⁸,

4.2.2. Prescripción

Como se mencionó en las secciones anteriores, al evaluar la acción de Dirac en la solución, el término del bulto se anula. La contribución no nula a la acción on-shell proviene del término de frontera S_B que involucra términos localizados en la hiper superficie $r = \epsilon$. Al ser formalmente divergente, esta acción debe separarse en dos partes,

$$S_{reg} = S_B = S_{var} + S_{ct} \quad (4.23)$$

Donde S_{var} contiene los términos requeridos para satisfacer el principio variacional y S_{ct} es la acción de contratérminos. El objetivo de la renormalización holográfica es entonces, obtener explícitamente tales

⁵Sin pérdida de generalidad.

⁶El comportamiento asintótico se obtiene al analizar el desarrollo en series de las funciones de Bessel modificadas para argumento pequeño, ver apéndice (A).

⁷La notación utilizada aquí difiere de (2.33) por comodidad.

⁸El comportamiento asintótico depende del valor de m , aquí lo consideramos entero positivo.

términos que cancelen las posibles divergencias en S_{var} . La acción renormalizada S_{ren} está definida como en (4.9) y con ella, podemos obtener correladores renormalizados bajo la prescripción GKPW,

$$e^{-S_{ren}[c_-, \bar{c}_-]} = \left\langle \exp \left[\int d^d x (\bar{c}_- \mathcal{O} + \bar{\mathcal{O}} c_-) \right] \right\rangle \quad (4.24)$$

Tomando menos el logaritmo en ambos lados, encontramos que la acción del bulto on-shell es el generador de correladores conectados. Sabemos ya que el caso del campo de Dirac presenta sutilezas respecto al Klein-Gordon⁹. Los campos ψ_+ y ψ_- no son independientes y cada uno determina el momento canonico asociado al otro[3; 12]. En el problema de Dirichlet entonces, no podemos fijar los valores asintóticos $c_{\pm}(k)$ simultáneamente y después permitir que el campo varíe. Para que la acción permanezca estacionaria bajo variaciones, debemos añadir el término de frontera,

$$S_{var} = \int d^d x \sqrt{\gamma} \bar{\psi}_+ \psi_-, \quad (4.25)$$

y cancelar las divergencias con S_{ct} . Con la acción renormalizada (discutida en el apéndice, ecuación A.10)

$$S_{ren} = \int d^d x \bar{c}_+ c_- \quad (4.26)$$

Los correladores renormalizados se obtienen derivando funcionalmente,

$$\langle \bar{\mathcal{O}} \rangle_{ren} = -\frac{\delta S_{ren}}{\delta c_-} = -\bar{c}_+ \quad (4.27)$$

El proceso de obtención de la acción renormalizada se revisa en el apéndice. Utilizando el hecho de que la acción del bulto on-shell es hermitiana, $S = S^\dagger$, tenemos,

$$S_{ren} = S_{ren}^\dagger = \int d^d x [\bar{c}_+ c_-]^\dagger = \int d^d x \bar{c}_- c_+,$$

En cuyo caso, hallamos también

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{ren} = -\frac{\delta S_{ren}}{\delta \bar{c}_-} = -c_+. \quad (4.28)$$

Con la segunda derivada obtenemos funciones de dos puntos, por ejemplo,

$$\langle \bar{\mathcal{O}} \mathcal{O} \rangle_{ren} = -\frac{\delta^2 S_{ren}}{\delta c_- \delta \bar{c}_-} = -\frac{\delta c_+}{\delta c_-}. \quad (4.29)$$

Las ecuaciones de movimiento junto con la condición de regularidad en el interior del espaciotiempo ($r \rightarrow \infty$) relacionan c_+ y c_- . Al ser la ecuacion de movimiento lineal, la relación entre estos será también lineal: $c_+ = -G(k)\Gamma^t c_-$, siendo la matriz $G(k)$ la función de Green Euclidieana¹⁰. Finalmente, el correlador renormalizado es,

$$\langle \bar{\mathcal{O}} \rangle_{ren} = G(k)\Gamma^t, \quad \langle \mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger \rangle_{ren} = G(k). \quad (4.30)$$

⁹Ver sección 2.6

¹⁰Se incluye el factor Γ^t ya que en realidad, la funcion de Green es $\langle \mathcal{O} \mathcal{O}^\dagger \rangle$ que difiere de $\langle \mathcal{O} \bar{\mathcal{O}} \rangle$ por Γ^t .

4.2.3. Correlador Renormalizado

En AdS_{d+1} puro (no $aAdS$), la solución (A.1) dada en el apéndice, resuelve la ecuación de Dirac para toda r y no solo la solución asintótica. Por otro lado, el correlador renormalizado se calcula con c_1^+ en términos de \bar{c}_2^- (4.29). Para hallar la relación entre estas debemos imponer la condición de regularidad en el interior del bulto (O region IR). Muy en el interior, donde $r \rightarrow \infty$, las soluciones (A.1) divergen a menos que $C_1^+ = (-1)^{m+1/2}C_2^+$. Trasladar esta condición a una condición sobre las $c_{1,2}$ se realiza con ayuda de (A.3),

$$c_1^+ = -2^{2m}(2m-1)\frac{\Gamma(1/2-m)}{\Gamma(1/2+m)}k^{2m-1}c_2^+ \quad (4.31)$$

Utilizando (A.6) para escribir c_2^+ en términos de $i\cancel{k}c_2^-$ obtenemos el correlador de 2 puntos renormalizado,

$$\langle \mathcal{O}\bar{\mathcal{O}} \rangle_{ren} = 2^{-2m}\frac{\Gamma(1/2-m)}{\Gamma(1/2+m)}k^{2m-1}i\cancel{k}. \quad (4.32)$$

Que es la forma correcta (hasta una constante de normalización) para el correlador de dos puntos en el espacio de momentos para operadores cuasi primarios de dimensión $\Delta = d/2 + m$.

4.3. Implementación del Grupo de Renormalización de Wilson en Holografía

Recordemos de la sección (3.5.1) que la renormalización en el esquema de Wilson involucra considerar un sistema físico definido hasta un corte Λ_0 . La teoría efectiva que resulta de integrar grados de libertad por debajo del corte $\mu < \Lambda_0$ mediante capas de momento induce un flujo en el espacio de posibles lagrangianos parametrizado por constantes de acoplamiento que corren con la energía.

Un esquema Wilsoniano puede implementarse en AdS/CFT[3; 5]. Identificando la teoría de frontera definida con un corte Λ_0 con una teoría en el bulto definida en la región del espacio tiempo $r > \epsilon_0$ (figura 4.1). Integrando grados de libertad en la CFT desde Λ_0 hasta algún $\Lambda' < \Lambda_0$ es entonces asociado a la integración de grados de libertad en el bulto desde $r = \epsilon_0$ hasta algún valor $r = \epsilon' > \epsilon_0$. La integración en el bulto sobre la región $\epsilon_0 < r < \epsilon'$ resulta en una acción de frontera $S_B(r = \epsilon')$ definida en la hiper superficie $r = \epsilon'$ que codifica condiciones de frontera sobre los campos que se propagan en el bulto en la región $r > \epsilon'$. En [3], se propone que S_B puede ser entonces identificada con la acción Wilsoniana de la teoría de frontera a la escala Λ' , donde los acoplamientos en S_B corresponden a aquellos asociados a operadores unitraza y multitraza inducidos en la teoría de frontera. Puede establecerse una ecuación que describe el flujo (Wilsoniano) de S_B en la coordenada radial r , requiriendo que la acción completa sea independiente del corte ϵ' ¹¹.

4.3.1. Formulación del Flujo Holográfico Wilsoniano

Consideremos una teoría definida por su integral de trayectoria por debajo de un corte UV Λ ,

$$Z = \int_{\Lambda} D\phi \exp[iI_{eff}[\phi, \Lambda]] \quad (4.33)$$

Donde ϕ denota toda una colección de campos de la teoría. La acción efectiva $I_{eff}[\phi, \Lambda]$ a la escala Λ , puede escribirse como

$$I_{eff}[\phi, \Lambda] = I_0[\phi] + I_{UV}[\phi, \Lambda] \quad (4.34)$$

¹¹En el régimen de gravedad clásica las ecuaciones que resultan de este proceso deben verse como el flujo de acoplamientos en límite de N grande de la CFT.

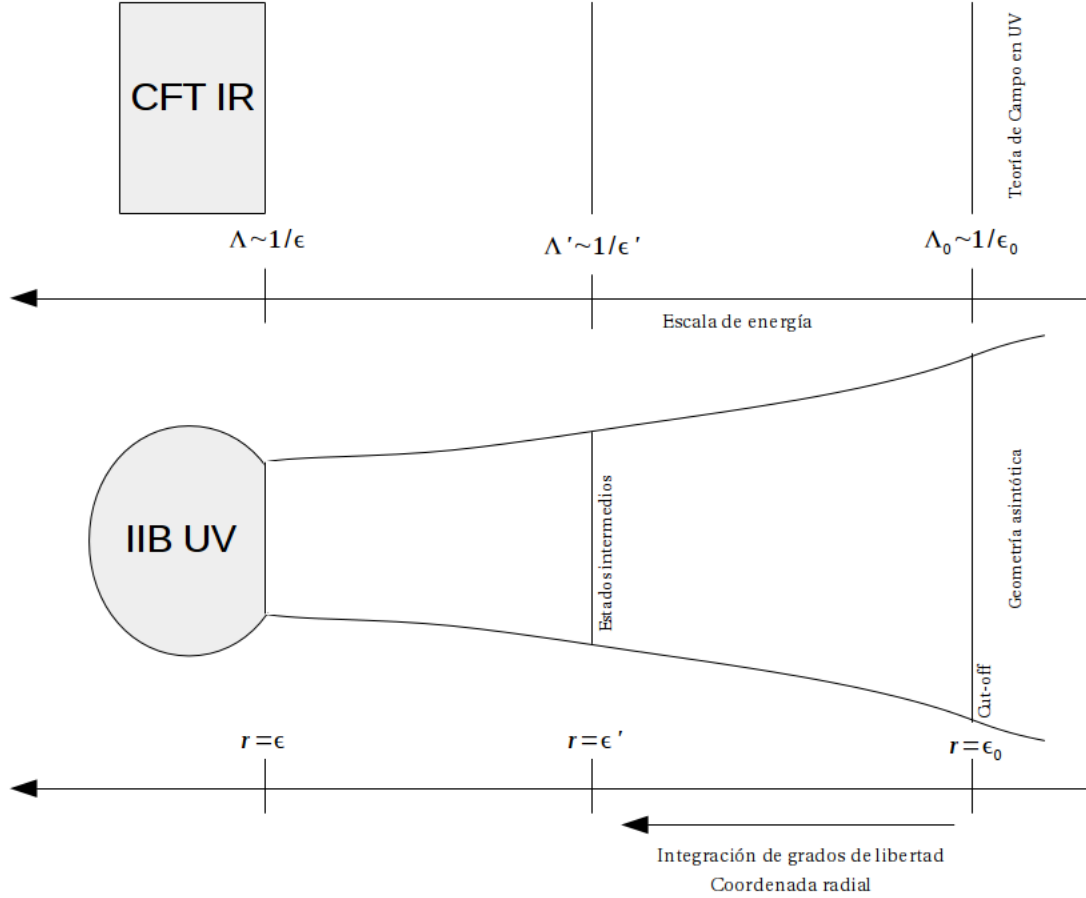


Figura 4.1: Descripción esquemática de la integración en capas en la teoría de frontera (esquema superior) y su correspondiente dual en el buelo (esquema inferior)[4]

Donde $I_0[\phi]$ es la acción original (microscópica y/o desnuda) e I_{UV} surge de integrar grados de libertad arriba de Λ . Si Z ha de ser independiente del corte, I_{UV} deberá satisfacer una ecuación del grupo de renormalización. Al expandir I_{UV} en términos de un conjunto completo de operadores invariantes de norma O , este flujo Wilsoniano otorga las funciones β para el conjunto de acoplamientos que acompañan a cada término en la expansión.

La acción del buelo genérica para un campo ϕ en la métrica de Poincaré es

$$S = \int_{r>\epsilon} d^{d+1}x \sqrt{-g} L(\phi, \partial_M \phi) + S_B. \quad (4.35)$$

Donde S_B define condiciones de frontera para el campo ϕ en $r = \epsilon$ y puede verse como la especificación de un *estado de frontera* para la teoría del buelo definida en la región $r > \epsilon$. A su vez, puede interpretarse como el resultado de la integración de grados de libertad de ϕ para $r < \epsilon$.

En [3; 5] se propone que el término de frontera $S_B[\phi, \epsilon]$ puede ser interpretado como el dual de la parte UV de la acción efectiva (4.34), es decir, el término I_{UV} . Tal asociación es más clara en cuantización alternativa, donde el valor de frontera del campo ϕ es identificado (en ausencia de S_B) como el valor de expectación del operador dual[14]. En este caso, $S_B[\phi, \epsilon]$ es directamente identificada con I_{UV} en la teoría de frontera¹². Si desarrollamos S_B en serie de potencias del campo ϕ , el término lineal corresponde al operador dual O ; ϕ^2 le corresponde un operador de doble traza O^2 y en general, ϕ^n está asociado a

¹²Hasta una constante de normalización.

operadores multi traza O^n . En contraste, en cuantización estándar, donde el valor de frontera del campo ϕ es interpretado como la fuente del operador dual, el término I_{UV} debe identificarse con la transformada de Legendre de $S_B[14]^{13}$.

4.3.2. Flujo RG - Hamilton-Jabobi

Derivemos ahora una ecuación de flujo para S_B para el campo de Dirac, requiriendo que los observables físicos sean independientes de ϵ al variar radialmente la acción total $S = S_{bulk} + S_B$. La correspondencia AdS/CFT mapea la variación de S_B a una ecuación de flujo RG para los acoplamientos de la teoría de frontera considerada en el límite (planar) de N grande.

Con la acción de Dirac (2.18) hallamos las ecuaciones de movimiento,

$$[\not{D} - m]\psi = 0 \quad (4.36)$$

En las condiciones de frontera de Neumann

$$\Pi_\psi^r = \frac{\delta S_B}{\delta \psi}, \quad \Pi_{\bar{\psi}}^r = \frac{\delta S_B}{\delta \bar{\psi}} \quad (4.37)$$

Consideremos una variación infinitesimal en la coordenada radial evaluada en $r = \epsilon^{14}$.

$$\begin{aligned} S[\epsilon + \delta\epsilon] - S[\epsilon] &= \int_{\epsilon+\delta\epsilon}^{\infty} dr d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L} - \int_{\epsilon}^{\infty} dr d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L} \\ &+ S_B[\psi(x, \epsilon + \delta\epsilon); \epsilon + \delta\epsilon] - S_B[\psi(x, \epsilon); \epsilon] \end{aligned}$$

Que podemos escribir como¹⁵

$$\begin{aligned} S[\epsilon + \delta\epsilon] - S[\epsilon] &= - \int_{\epsilon}^{\epsilon+\delta\epsilon} dr d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L} \\ &+ S_B[\psi(x, \epsilon + \delta\epsilon); \epsilon + \delta\epsilon] - S_B[\psi(x, \epsilon); \epsilon] \end{aligned}$$

desarrollando a primer orden en $\delta\epsilon$, tenemos¹⁶

$$\frac{dS}{d\epsilon} = - \int_{r=\epsilon} d^d x \sqrt{-g} \mathcal{L} + \int_{r=\epsilon} d^d x \left(- \frac{\delta S_B}{\delta \psi} \partial_r \psi + \partial_r \bar{\psi} \frac{\delta S_B}{\delta \bar{\psi}} \right) + \frac{\partial S_B}{\partial \epsilon} \Big|_{r=\epsilon} \quad (4.38)$$

Notemos que, las derivadas funcionales de la acción S_B son los momentos canónicos de los campos, debido a que trabajamos en condiciones de Neumann. Sustituyendo tales momentos, la expresión es la transformada de Legendre del lagrangiano (2.18).

$$\frac{dS}{d\epsilon} = \int_{r=\epsilon} d^d x \mathcal{H} + \frac{\partial S_B}{\partial \epsilon} \Big|_{r=\epsilon}$$

Finalmente, de acuerdo a la interpretación Wilsoniana del proceso de renormalización, esperamos que la acción total sea independiente del corte UV[4], es decir $\frac{dS}{d\epsilon} = 0$.

$$\frac{\partial S_B}{\partial \epsilon} = - \int_{r=\epsilon} d^d x \mathcal{H} \quad (4.39)$$

¹³Cerca del punto fijo de la teoría, las dos identificaciones es precisa. Sin embargo, lejos del punto fijo, la identificación posee ambigüedad y dependerá del esquema de renormalización.

¹⁴Solo aparece aquí el campo ψ y su dependencia en ϵ por comodidad

¹⁵ $\int_{\epsilon+\delta\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} = - \left(\int_{\infty}^{\epsilon+\delta\epsilon} + \int_{\infty}^{\epsilon} \right) = - \int_{\epsilon}^{\epsilon+\delta\epsilon}$

¹⁶Las variables son de Grassman por tanto de debe tener cuidado en el orden

Donde \mathcal{H} es la densidad Hamiltoniana para la evolución en la coordenada radial r . El flujo es generado por el Hamiltoniano y gobernado por una ecuación de Hamilton-Jacobi.

El Hamiltoniano radial será la transformada de Legendre del Lagrangiano, considerando que los momentos canónicos son tomados respecto a la derivada radial de los campos. De (2.18)

$$\Pi_\psi^r \equiv \frac{\vec{\partial} \mathcal{L}}{\partial(D_r \psi)} = -i\sqrt{-g}\bar{\psi}\Gamma_g^r, \quad \Pi_{\bar{\psi}}^r \equiv \frac{\vec{\partial} \mathcal{L}}{\partial(D_r \bar{\psi})} = 0 \quad (4.40)$$

Y la densidad Hamiltoniana adopta la forma¹⁷,

$$\mathcal{H} = -\Pi_\psi^r D_r \psi + D_r \bar{\psi} \Pi_{\bar{\psi}}^r - \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (4.41)$$

Cuando S_B se expande en serie de potencias del campo ψ , la ecuación (4.39) especifica cómo los coeficientes de la expansión (acoplamiento) fluyen con ϵ .

4.3.3. Consideraciones Finales al Capítulo

Análogo al caso de teoría de campos de la sección (3.5.1), el enfoque Wilsoniano en holografía es particularmente útil para extraer la dinámica IR de la teoría de frontera a través de los correladores efectivos. Recordemos que en la formulación estándar de AdS/CFT, los correladores renormalizados (4.1) se obtienen a través de la funcional generadora

$$Z[J] = e^{I[J]} \equiv \left\langle e^{\int J O} \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{S_{sub}[\phi_c]} \quad (4.42)$$

Donde S_{sub} es la acción definida en (4.8). El campo ϕ_c es la solución clásica a las ecuaciones de movimiento. Las condiciones de frontera son, genéricamente, regularidad en el interior y valor asintótico especificado por la fuente J , que define el problema de Dirichlet (o Neumann).

En el enfoque Wilsoniano[4], la funcional generadora se divide en tres partes[5]

$$Z[J] = \int D\phi_{(r<l)} D\phi_l D\phi_{(r>l)} e^{iS_{sugra}} \quad (4.43)$$

En donde $\phi_l = \phi(r=l)$ y $l \equiv \Lambda^{-1}$ es la escala de corte. Sea,

$$\Phi_{UV}(J, \phi_l) = \int_{\phi(l,x)=\phi_l}^{\phi(\epsilon,x) \sim \epsilon^{d-\Delta}} D\phi_{(r \leq l)} e^{iS_{sugra}} \quad \Phi_{IR}(\phi_l) = \int_{\phi(l,x)=\phi_l(x)} D\phi_{(r \geq l)} e^{iS_{sugra}} \quad (4.44)$$

Donde en la primera integral, ϵ se aproxima a cero después de añadir contratérminos como comanda (4.9). Identificamos

$$\Phi_{IR}(\phi_l) = \left\langle e^{iN^2 \int d^d x l^{\delta-d} \phi_\Delta O} \right\rangle_{CFT, \Lambda=l^{-1}} \quad (4.45)$$

Donde el lado derecho es la funcional generadora de funciones de correlación en la CFT con corte. La integral de trayectoria completa es ahora,

$$Z[J] = \int D\phi_l \Phi_{UV}(J, \phi_l) \Phi_{IR}(\phi_l) \quad (4.46)$$

El cálculo de Φ_{UV} identifica los acoplamiento en la CFT en términos de los parámetros de la funcional Φ_{UV} . Por ejemplo, si la parte UV tiene perfil Gaussiano¹⁸

$$\Phi_{UV}(\phi_l) = \exp \left[iN^2 d x \frac{1}{2hl^{2(d-\Delta)}} \left(\phi_l - l^{d-\Delta} \lambda \right)^2 \right], \quad (4.47)$$

¹⁷El signo menos en el primer término del lado derecho es por el carácter Grassmanniano. Ver (4.38).

¹⁸Como el caso del campo escalar libre.

donde h y λ son funciones de l . Insertando (4.45) en (4.46), la integral completa se escribe[18]

$$Z = \left\langle \exp \left[iN^2 \int d^d x \left(\lambda O + \frac{h}{2} O^2 \right) \right] \right\rangle_{CFT, \Lambda} \quad (4.48)$$

Esta es definida como la acción Wilsoniana con acoplamientos $\lambda(l)$ y $h(l)$ para operadores unitraza y doble traza respectivamente ¹⁹.

En el limite de N grande, la funcional Φ_{UV} puede escribirse como

$$\Phi_{UV} = e^{S_B} \quad (4.49)$$

Donde S_B obedece la ecuación (4.39) y provee un conjunto de ecuaciones del grupo de renormalización para los acoplamientos $\lambda(l)$ y $h(l)$. Al estar interesados en obtener correladores para momento arbitrario, (4.48) no ofrece simplificación respecto a (4.42): resolver S_B con (4.39) es equivalente a resolver la ecuación clásica de movimiento en la región integrada hasta ϵ . Lo mismo ocurre en teoría de campo: integrar capas de momento no simplifica en ningún modo los cálculos si uno está interesado en extraer la dinámica a escalas arbitrarias. Sin embargo, (4.48) sí ofrece simplificación en extraer el comportamiento a bajas energías de los correladores. Para tal propósito, podemos desarrollar S_B analíticamente en frecuencias (o momentos) pequeños en analogía con el proceso de extracción de la acción efectiva Wilsoniana en teoría de campo.

Otro aspecto importante es que el desarrollo en frecuencias pequeñas (y/o k pequeños) puede coadyuvar a determinar donde colocar la superficie de corte $r = \epsilon$; esta debe colocarse en la frontera de alguna región IR donde el desarrollo de potencias en ω o k deja de ser bien portada u holomorfa. En ese lugar, la no analiticidad señala la presencia de nuevos grados de libertad que deben ser retenidos en la dinámica a baja energía y no deben ser integrados[4].

Un punto importante estriba en la correspondencia entre S_B y Φ_{UV} . Es decir, identificación de integrar grados de libertad del bulto en $r < \epsilon$ con integración de grados de libertad (en la CFT) por arriba de algún corte Λ . Cualquier proceso físico (de energía arbitraria) en la teoría de frontera involucra todas las regiones del bulto. En particular, I_{UV} tiene expansión analítica bien portada en términos de operadores locales e invariantes de norma pero esto no es necesariamente el caso de S_B . Se conocen ejemplos donde existen modos gapless²⁰ en la región UV y modos de Goldstone²¹ en rompimientos de simetría de fase. Integrar estos modos puede inducir términos no locales en S_B . En orden de tener una descripción sensata de la dinámica IR, debemos aislar tales modos de S_B y tratarlos separadamente[4]. En ausencia de tales modos, se espera que la identificación en las acciones en algún esquema de corte específico este bien definido.

En el párrafo anterior, mencionamos que el desarrollo de S_B en frecuencias pequeñas ω puede dejar de ser analítica para algún valor del corte. Sí el modo asociado al rompimiento de la expansión analítica es un modo gapless debe tratarse separadamente y si este no es el caso, es preciso retenerlos como parte de la dinámica IR.

La conexión IR/UV ofrece la identificación natural de la coordenada radial con la escala del grupo de renormalización en la teoría de frontera. Para AdS puro, es cierto que $g_{tt} \propto r^{-2}$ y $r \propto 1/\Lambda$. No obstante, para una métrica genérica, tal relación puede ser muy complicada. La escala Λ puede ser estimada en términos de una geodésica que conecta dos puntos en la frontera y *baja* hasta un radio r [6]. El mismo orden de magnitud se obtiene considerando la extensión en las coordenadas x^μ del cono de luz desde un punto en la frontera cuando este intersecta en $r = \epsilon$ [5] (ver figura 4.2). Resultando que la distancia propia correspondiente al corte Λ es del orden del radio de AdS a tal escala y es consistente con un grado de

¹⁹Dada una colección de campos matriciales Φ_i , el operador asociado en una teoría en el limite de N grande es de la forma $O_\alpha = (1/N)Tr F_\alpha(\Phi_i)$, con F_α una función arbitraria de los Φ_i y sus derivadas que no posee dependencia explicita en N ni trazas. Tal operador es de una traza o *unitraza*

²⁰Modos tales que con un monto arbitrariamente pequeño de energía es posible excitar el sistema

²¹ tipo gapless que existe debido a rompimiento espontáneo de simetría

libertad por área de Planck[6]: $N^2 \equiv L^{d-1}/L_p^{d-1}$, en términos de la longitud de Planck $d + 1$ dimensional. En la acción S_B es posible agregar términos que corresponderán a deformaciones de la teoría de frontera

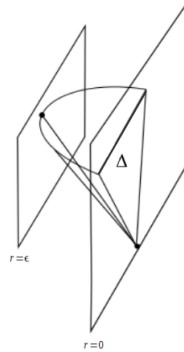


Figura 4.2: La escala Λ en donde la acción Wilsoniana está localizada[5]

y calcular las funciones β que codifican el flujo de la teoría hacia o desde un punto fijo. Si bien, tenemos plena libertad de agregar tales términos (siempre que respeten las simetrías de la teoría) en general no es sencillo deducir la forma de su dual en la CFT. Las deformaciones doble traza para el caso del campo escalar surgen al momento de desarrollar S_B hasta orden cuadrático en los campos (4.47) y es posible hallar las ecuaciones de flujo de sus acoplamientos asociados[4; 5]. En [17] se halla que las deformaciones doble traza inducidos en el campo escalar presentan flujos resonantes entre dos puntos fijos del grupo de renormalización correspondientes a dos CFT²². Abordaremos este tema en el capítulo siguiente para el caso de deformaciones fermiónicas en el campo de Dirac.

²²Las condiciones de frontera especifican dos tipos de teorías distintas

Capítulo 5

Funciones Beta Holográficas

En este capítulo implementaremos las ideas de [3] para el caso del campo fermiónico libre que nos permitirá hallar la función beta asociada a la masa del espinor. A su vez, siguiendo a [1] calcularemos funciones beta para un conjunto de deformaciones de la teoría de frontera codificadas en la acción de frontera del bulto, S_B .

5.0.4. Hamilton-Jacobi y flujo RG

De acuerdo con la correspondencia AdS/CFT, un campo fermiónico ψ en AdS, de carga q y masa m , es dual a un operador fermiónico \mathcal{O} de dimensión conforme Δ y misma carga en la frontera. Si d es impar, \mathcal{O} corresponde a un espinor de Dirac. Con d par, corresponde a un espinor quiral[11]. La relación de dispersión entre la masa del espinor y la dimensión de su operador dual es (1.34),

$$\Delta = \frac{d}{2} \pm mL \quad (5.1)$$

Donde d , es la dimensión espacial de AdS_{d+1} . En la métrica (1.29), construyamos la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.39). Los momentos canónicos radiales son (4.40),

$$\Pi_\psi^r = -i\sqrt{-g}\bar{\psi}\Gamma_g^r, \quad \Pi_{\bar{\psi}}^r = 0, \quad (5.2)$$

bajo los cuales, la densidad Hamiltoniana (4.41) es,

$$\mathcal{H} = i\sqrt{-g} [\bar{\psi}\Gamma_g^r D_r \psi - \bar{\psi}\Gamma^M D_M \psi + m\bar{\psi}\psi] \quad (5.3)$$

Interesantemente, la componente radial que surge del momento canónico se anula con el término radial de la densidad Lagrangiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= i\sqrt{-g} [\bar{\psi}\Gamma_g^r D_r \psi - \bar{\psi}\Gamma_g^r D_r \psi - \bar{\psi}\Gamma_g^\nu D_\nu \psi + m\bar{\psi}\psi] \\ &= i\sqrt{-g} [-\bar{\psi}\Gamma_g^\nu D_\nu \psi + m\bar{\psi}\psi], \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde los índices $\nu = t, x, y, z$, es decir, sin la coordenada radial. Armados con la densidad Hamiltoniana y la acción de frontera (2.25), podemos construir la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.39),

$$\partial_\epsilon \left[\frac{i}{2} \int_\epsilon \sqrt{-\gamma} d^d x f \bar{\psi} \psi \right] = -i \int_\epsilon d^d x \sqrt{-g} [-\bar{\psi}\Gamma_g^\nu D_\nu \psi + m\bar{\psi}\psi] |_{r=\epsilon}.$$

O bien,

$$\partial_\epsilon [i\sqrt{-\gamma} f \bar{\psi} \psi] = 2i\sqrt{-g} [\bar{\psi}\Gamma_g^\nu D_\nu \psi - m\bar{\psi}\psi] |_{r=\epsilon}. \quad (5.5)$$

Para el flujo en el estado de mínima energía o vacío superconforme¹, los campos del bulto son constantes en direcciones de frontera²(etiquetadas con ν)[1], en cuyo caso la última expresión es más sucinta:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} [i\sqrt{-\gamma}f\bar{\psi}\psi] = -2im\sqrt{-g}\bar{\psi}\psi.$$

Consideremos ahora la parte $\partial_\epsilon \bar{\psi}\psi$ del lado izquierdo que puede manipularse considerando las ecuaciones de movimiento. De $(\Gamma^M D_M - m)\psi = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma^\epsilon D_\epsilon \psi &= m\psi - \Gamma^\nu D_\nu \psi = m\psi, \\ \Gamma^\epsilon \Gamma^\epsilon D_\epsilon \psi &= m\Gamma^\epsilon \psi.\end{aligned}$$

Y del álgebra de Clifford $(d+1)$ -dimensional curvo

$$D_\epsilon \psi = m \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2 \Gamma^\epsilon \psi.$$

Análogamente, de $\bar{\psi}(\Gamma^M \overleftarrow{D}_M - m) = 0$, tenemos

$$\bar{\psi} \overleftarrow{D}_\epsilon = m \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2 \bar{\psi} \Gamma^\epsilon$$

La conexión de espín se anula en la dirección radial (2.17) por lo que las derivadas son parciales (no covariantes). Obtenemos

$$\partial_\epsilon (\bar{\psi}\psi) = m \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2 [\bar{\psi}\Gamma^\epsilon \psi - \bar{\psi}\Gamma^\epsilon \psi] = 0.$$

Arribamos finalmente a una expresión tipo función beta para f y m ,

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{L^d}{\epsilon^d} f(\epsilon)\right) = -2 \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d+1} m \quad (5.6)$$

Cuantización estándar

Al iniciar el flujo desde la CFT UV ($\epsilon \rightarrow 0$) tomamos como condición inicial $f(\epsilon) = 1$, que corresponde a fijar $\psi_- = 0$ en la frontera³. El operador dual \mathcal{O}_+ tiene dimensión $\Delta_+ = d/2 + mL$ y la fuente asociada es $A(k)$ con valor de expectación $D(k)$ en el desarrollo asintótico (2.33). Ver además (1.5.5). Con estas consideraciones, la expresión (5.6) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{f(\epsilon)}{\epsilon^d}\right) = \frac{2mL}{\epsilon^{d+1}} \quad (5.7)$$

con solución trivial $f(\epsilon) = 2mL/d \Rightarrow d = 2mL$. La dimensión Δ del operador dual será $\Delta_+ = 2mL$ y la teoría de frontera se mantiene conforme. La solución corresponde a un punto fijo y el término de frontera (2.25) es irrelevante en el límite de N grande⁴.

¹Correspondiente a la métrica (1.29) sin deformar el fondo. Ver también sección (1.1.1).

²([4]) relaja esta restricción.

³Cuantización estándar

⁴La teoría que estamos considerando es Dirac libre.

Cuantización Alternativa

En cuantización alternativa, $f = -1$, fija el espinor $\psi_+ = 0$. Los papeles de ψ_- y ψ_+ se intercambian. La fuente del operador dual \mathcal{O}_- es D y su valor de expectación es A en el desarrollo asintótico (2.33). El operador dual tiene dimensión $\Delta_- = d/2 - mL = -2mL$ con $d = -2mL$. En conclusión, el acoplamiento f en la acción S_B es irrelevante y no hace fluir la teoría manteniéndose conforme en el punto fijo en ambas cuantizaciones.

5.0.5. Deformaciones

Consideremos deformaciones de la acción de frontera (2.25) por operadores relevantes y analicemos sus flujos RG asociados[1; 4; 18; 17]. Comenzando con la CFT UV codificada en $f = 1$, podemos seguir la pista al flujo que tales deformaciones inducen en la teoría. Algunos operadores bilineales⁵ invariantes de Lorentz que se pueden construir con los campos en la teoría de frontera Ψ son[1]

- Deformación de Dirac $\bar{\Psi}\Psi$ ⁶. Preserva conjugación de carga y rompe paridad.
- Deformación Majorana $\bar{\Psi}^{(c)}\Psi + h.c.$. El espinor conjugado es $\Psi^{(c)} = C\Psi^*$, donde $C = \sigma^1$. Preserva paridad y rompe la simetría global $U(1)$ que rota la fase de Ψ .

Para AdS_4 , podemos tomar el álgebra de Clifford (2.9). Para todas las deformaciones anteriores, la dimensión del operador es $2\Delta_- = 3 - 2mL$ en alternativa y es relevante para $0 < mL < 1/2$.

Deformación de Dirac

En el estado de mínima energía (fuentes apagadas), la teoría puede ser deformada por el operador relevante,

$$\Delta S_{Dirac} = i \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \alpha \bar{\Psi}(k) \Psi(k), \quad (5.8)$$

con α constante. En [1] se propone que esta deformación está modelada por la acción de frontera (2.25) añadiendo el término $g\bar{\psi}\Gamma^5\psi$,

$$S_B = \frac{i}{2} \int_{\epsilon} d^4x \sqrt{-\gamma} [f(\epsilon)\bar{\psi}\psi + g(\epsilon)\bar{\psi}\Gamma^5\psi]. \quad (5.9)$$

El término extra junto con $\bar{\psi}\psi$ rompen paridad en la acción del bulto ($S_B \rightarrow -S_B$) que se hereda en $\bar{\Psi}\Psi$ en la frontera. Más aún, en la teoría alternativa, el espinor A en (2.33) está relacionado con el operador dual vía $A \sim \langle \Psi \rangle$ y por tanto, el término $\bar{\psi}\Gamma^5\psi \sim A^\dagger \gamma^0 A$ contiene dos copias del operador que es la propiedad clave para perturbaciones doble traza escalares en [31; 13]⁷. La condición de Neumann (2.36) para la acción de frontera (5.9) es,

$$-i\sqrt{-g}\bar{\psi}\Gamma_g^r = -i\sqrt{-\gamma}\bar{\psi} [f\mathbf{1} + g\Gamma^5] \quad (5.10)$$

Que codifica la ecuación matricial,

$$\bar{\psi} [f(\epsilon)\mathbf{1} + \Gamma_\eta^r - g(\epsilon)\Gamma^5] = 0 \quad (5.11)$$

⁵La acción de Dirac es bilineal en los campos y por eso basta agregar a la acción deformaciones de ese orden.

⁶Este término no es de masa ya que los campos de frontera son genéricamente operadores compuestos y transforman en la adjunta de $SU(N)$.

⁷En este sentido, el término $\bar{\psi}\psi \sim A^\dagger \gamma^0 D$ no tiene la estructura apropiada para ser perturbación doble traza.

La condición de frontera requiere fijar la mitad de las componentes del espinor (ver sección 2.6) por lo cual, la ecuación (5.11) debe ser de rango 2. Esto se verifica si⁸

$$f(\epsilon)^2 + g(\epsilon)^2 = 1 \quad (5.12)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi (4.39) es entonces⁹

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{L^d}{\epsilon^d} f \right) \bar{\psi} \psi + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{L^d}{\epsilon^d} g \right) \bar{\psi} \Gamma^5 \psi = -2m \frac{L^{d+1}}{\epsilon^{d+1}} \bar{\psi} \psi \quad (5.13)$$

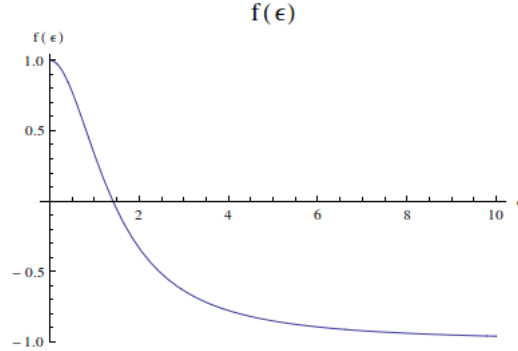
Donde el término $\partial_\epsilon(\bar{\psi}\Gamma^5\psi)$ se anula idénticamente en vista de que $\Gamma^r\Gamma^5 = -\Gamma^5\Gamma^r$. De la condición de frontera de Neumann, puede mostrarse que $\bar{\psi}\Gamma^r\psi = 0$ y $f\bar{\psi}\psi + g\bar{\psi}\Gamma^5\psi = 0$. De estas últimas y de (5.12), podemos reescribir (5.13) en términos de $f(\epsilon)$,

$$\epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = -2mL(1 - f^2) \quad (5.14)$$

con solución

$$f(\epsilon) = \frac{1 - \alpha^2 \epsilon^{4mL}}{1 + \alpha^2 \epsilon^{4mL}}. \quad (5.15)$$

El coeficiente α de (5.8) reaparece como constante de integración. La solución se comporta como lo esperado interpolando los acoplamientos desde el punto fijo UV (en $f = 1$) en $\epsilon = 0$ a el punto fijo IR (con $f = -1$) en $\epsilon \rightarrow \infty$.



La función $g(\epsilon)$ es el coeficiente del operador doble traza añadido, para $f > 0$, su función beta es

$$\epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon} = 2mLg\sqrt{1 - g^2}, \quad (5.16)$$

El coeficiente g se incrementa monótonicamente hasta $g = 1$ y $f = 0$. En este punto f cambia de signo y la función beta es remplazada por

$$\epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon} = -2mLg\sqrt{1 - g^2} \quad (5.17)$$

La solución para el flujo completo es

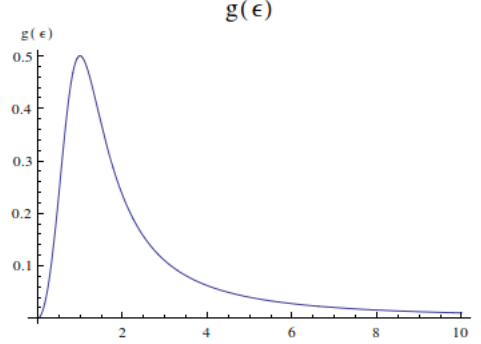
$$g(\epsilon) = \frac{4\alpha\epsilon^{2mL}}{4 + \alpha^2\epsilon^{4mL}} \quad (5.18)$$

Al iniciar el flujo RG, g está relacionado con el coeficiente del operador doble traza mediante $g \approx \alpha\epsilon^{2mL}$. Al ser g adimensional, la constante de integración debe tener dimension $2mL$ como corresponde a (5.8).

⁸Construyendo la forma de Jordan de 5.11, puede verse que, al multiplicar por el espinor $(\bar{\psi}_+, \bar{\psi}_-)$, esta proyecta sobre $\bar{\psi}_\pm$ si se verifica la constricción de los acoplamientos

⁹Análogo al análisis que condujo a la ecuación 5.6, consideramos AdS puro y campos constantes en direcciones de frontera: $\partial_\mu\psi = 0$.

En contraste con f , el flujo del acoplamiento g no es monótonico; $g \rightarrow 0$ en ambos puntos fijos IR y UV. De hecho, esto es necesario para asegurar que los puntos fijos son invariantes bajo paridad a pesar de que el flujo RG no lo es.



Flujos debido a deformaciones de Dirac más generales pueden considerarse si llevamos la teoría fuera del estado base, es decir, agregando fuentes en el lagrangiano de la teoría de frontera,

$$\Delta S_{fuentes} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [\bar{\eta}(k)\Psi(k) + \bar{\Psi}(k)\eta(k)]. \quad (5.19)$$

Las fuentes rompen la invariancia traslacional pero los operadores multitraza que ellos inducen no [4; 5]. La simetría traslacional rota, más bien, se manifiesta en la necesidad de encender operadores descendientes que contienen términos con derivadas de alto orden, $\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi$, $\bar{\Psi}\partial^2\Psi$, $\bar{\Psi}\partial^2\not{\partial}\Psi$,...

De lado de gravedad, operadores de la forma $\Psi\partial^{2n}\Psi$ en S_B pueden agruparse convenientemente si promovemos la constante g a una función de $k^2 \equiv k_\mu k^\mu = -\omega^2 + \vec{k}^2$. Términos sucesivos en el desarrollo de Taylor de $g(k^2)$ están relacionados con la torre de operadores de derivadas de alto orden. Sin embargo, para codificar en S_B términos de la forma $\bar{\Psi}\partial^{2n}\not{\partial}\Psi$ debemos añadir a la acción de frontera un término diferente cuyo coeficiente es una función $h(k^2)$. Dicho todo esto, la forma general de la acción de frontera es,

$$S_B = \frac{i}{2} \int_\epsilon d^4 x \sqrt{-\gamma} [f(k^2)\bar{\psi}\psi + g(k^2)\bar{\psi}\Gamma^5\psi + ih(k^2)\psi\not{k}\psi - \bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta]. \quad (5.20)$$

Donde $\not{k} \equiv k_\mu \Gamma^\mu$ con suma sobre matrices del bulto sin coordenada radial. La estructura espinorial del término asociado a $h(k^2)$ es de la misma forma que el correspondiente a $g(k^2)$. Incluye $A^\dagger k_\mu \gamma^\mu A$ en lugar de $A^\dagger D$ del término $f(k^2)$. La condición de frontera de Neumann sobre el espinor es

$$\bar{\psi}\mathcal{M} = -\bar{\eta} \quad (5.21)$$

con

$$\mathcal{M} = f\mathbf{1}\Gamma^r + g\Gamma^5 + ih\not{k}. \quad (5.22)$$

Surge una sutileza. La fuente en (5.19) es un espinor de 2 componentes mientras que η en (5.20) es de 4 componentes. La discrepancia se resuelve si consideramos η en (5.21) proyectado en la imagen de la matriz \mathcal{M} de rango 2. La fuente debe ser embebida en un subespacio de dimension 2 apropiado. El embebimiento rota bajo el flujo RG.

Nuevamente, el requerimiento de que la ecuación (5.21) no fije todas las componentes del espinor es equivalente a pedir que la matriz \mathcal{M} tenga rango 2. Es decir,

$$f^2 + g^2 + h^2 k^2 = 1 \quad (5.23)$$

Sustituyendo (5.20) en la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.39) esta vez reteniendo el término cinético en \mathcal{H} ,

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \bar{\psi} \psi + \epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \bar{\psi} \Gamma^5 \psi + i \epsilon \frac{\partial h}{\partial \epsilon} \bar{\psi} \not{k} \psi - \epsilon \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \epsilon} \psi - \epsilon \bar{\psi} \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon} \\ = 2i \epsilon \bar{\psi} \not{k} \psi - 2mL \bar{\psi} \psi - \frac{3}{2} (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Mediante (5.21), los términos bilineales están relacionados,

$$f \bar{\psi} \psi + g \bar{\psi} \Gamma^5 \psi + i h \bar{\psi} \not{k} \psi = \frac{1}{2} (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta). \quad (5.25)$$

Con esta constricción podemos eliminar un término. Los coeficientes remanentes proveen las funciones beta (acopladas),

$$\epsilon \frac{\partial \eta}{\partial \epsilon} = \left(\frac{3}{2} + \frac{mL}{f} + \frac{\epsilon}{2f} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right) \eta \quad (5.26)$$

Y las funciones beta para g y h resultan

$$\begin{aligned} f \epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon} - g \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} &= 2mLg \\ f \epsilon \frac{\partial h}{\partial \epsilon} - h \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} &= 2\epsilon f + 2mLh \end{aligned} \quad (5.27)$$

Deformación de Majorana

Para la deformación de Majorana, consideramos únicamente el flujo en el estado base (sin fuentes) y deformaciones doble traza,

$$\Delta S_{Majorana} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\zeta \bar{\Psi}^{(c)}(-k) \Psi(k) + \zeta^* \bar{\Psi}(-k) \Psi^{(c)}(k) \right], \quad (5.28)$$

nuestra convención es $\Psi^{(c)} = C\Psi$ con $C = \sigma^1$. El signo $(-)$ en el argumento de Ψ radica en la definición de la transformada de Fourier. Genéricamente, el coeficiente $\zeta \in \mathbb{C}$ pero su fase puede ser eliminada por una rotación de fase en Ψ . Tomando en cuenta esta libertad, tomamos $\zeta \in \mathbb{R}$.

La conjugación de carga del espinor en el bulto es $\psi^{(c)} = \mathcal{C}\psi^*$ con $\mathcal{C} = \Gamma^0 \Gamma^2$. En [1] se propone el dual gravitacional a esta deformación como,

$$S_B = \frac{i}{2} \int_{\epsilon} \sqrt{-\gamma} \left[f \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} g \bar{\psi}^{(c)} \Gamma^5 \psi + \frac{1}{2} g \bar{\psi} \Gamma^5 \psi^{(c)} \right]. \quad (5.29)$$

Esta deformación es la única que preserva (y rompe) las mismas simetrías que (5.28). Como es usual en el término de masa de Majorana, tratamos ψ como objeto Grassmanniano. La condición de Neumann para la acción (5.29) verifica

$$(f \mathbf{1} + \Gamma^r) \psi + g \Gamma^5 \psi^{(c)} = 0 \quad (5.30)$$

Las condiciones para las cuales (5.30) fija solo la mitad de las componentes del espinor puede hallarse insistiendo que el complejo conjugado de (5.30) sea él mismo. En efecto, tomando el complejo conjugado,

$$(f \mathbf{1} + \Gamma^4) \psi^{(c)} + g \Gamma^5 \psi = 0$$

y multiplicando por $(f + \Gamma^r) \Gamma^5$ regresamos a (5.30). Imponiendo ahora la misma restricción que en el caso de deformación de Dirac (5.12) obtenemos,

$$\epsilon \frac{\partial g}{\partial \epsilon} = 2mLg \sqrt{1 - g^2}, \quad (5.31)$$

que difiere por un signo respecto a (5.16). La equivalencia de la función beta de Dirac y Majorana es poco intuitiva ya que los flujos mismos son distintos. El flujo de Majorana rompe la simetría $U(1)$ en todas las energías exceptuando los puntos finales. Sin embargo, la tasa a la cual el flujo RG sucede es el mismo. Esto sugiere que la función beta es una propiedad general de los operadores fermiónicos doble traza en N grande.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

En esta tesis hemos revisado el formalismo básico para obtener funciones beta de una teoría de campos de manera holográfica basados en la correspondencia AdS/CFT. La entrada del diccionario que permite la dualidad entre la evolución radial de la acción de frontera y el flujo RG de los acoplamientos en la teoría conforme fue expuesta aquí basado en [1; 2; 3; 4; 5]. A diferencia de [1], la acción de Dirac en esta revisión no está antisimetrizada. Esto condujo a obtener solo una condición de Neumann, es decir solo un momento canónico (el asociado a ψ). Esperando que ambas aproximaciones conduzcan a los mismos resultados, se revisó toda la teoría subyacente en torno a la naturaleza Grassmanniana del espinor de Dirac y su estructura holográfica emergente haciendo énfasis en las condiciones de frontera que, en el caso de espinores, presentan sutilezas en relación con el campo escalar expuesto en [4]. Para exhibir tales sutilezas se revisaron los artículos pioneros en torno a espinores en *AdS* y sus condiciones de frontera, [12; 9; 3]. En particular, la ecuación que codifica el valor del acoplamiento f en (2.40) y en (5.11) es una ecuación matricial para $\bar{\psi}$ a diferencia de [1] llegando a los mismos valores para f y para $f + g$, respectivamente. Las condiciones de frontera para el espinor expuestas en el capítulo II, fueron revisadas cuidadosamente contribuyendo este trabajo a identificar sistemáticamente que proyección del espinor fijar en la frontera en términos de la acción de frontera (ver sección 2.6.1 específicamente las expresiones (2.30) y (2.32)).

La renormalización holográfica Wilsoniana también permite considerar deformaciones de la teoría conforme y analizar sus flujos RG. En general, no es una empresa sencilla modelar tales acoplamientos mediante la adición de términos en la acción de frontera S_B . Basados primordialmente en [1], revisamos sus propuestas de deformaciones de Dirac y Majorana obteniendo los mismos resultados aquí. En [16] (capítulo 12) se discute la conexión entre renormalización y el grupo de renormalización. Esperando una relación análoga para el caso holográfico hemos revisado el enfoque de [7] para obtener correladores de dos puntos para el caso de fermiones (4.2) y su relación con las ideas Wilsonianas del grupo de renormalización holográfico.

La tecnología revisada aquí puede extenderse al caso de otros fondos útiles para acercarnos cualitativamente a sistemas reales. Por ejemplo, en [32] se reporta una nueva clase de líquido *no-Fermi* usando la correspondencia Norma/Gravedad. La configuración gravitacional utilizada es *AdS*₄ con agujero negro cargado que agrega un término a la derivada covariante fermiónica en la geometría debido a la presencia de un campo electromagnético no nulo. Esta configuración es dual a un sistema fermiónico de densidad finita. Explorar esta teoría mediante deformaciones analizando sus flujos RG puede ayudar al entendimiento de sistemas de materia condensada.

Apéndice A

Acción de Contratérminos

En este apéndice revisaremos el procedimiento para obtener los contratérminos de la sección (4.2) y así calcular correladores renormalizados. Seguiremos primordialmente el procedimiento presentado en [21; 11] y basado en [7] tomando en cuenta las sutilezas emergentes para el caso de Dirac expuestas en [12; 9].

La ecuación (4.21) puede resolverse analíticamente en AdS_{d+1} . La forma de la solución depende de m . Si m no es semi entero, la solución de (4.21) es¹,

$$\psi_{\pm} = r^{d/2+1/2} \left[C_1^{\pm}(k) J_{m \mp 1/2} \left(\sqrt{-k^2} r \right) + C_2^{\pm}(k) J_{-(m \mp 1/2)} \left(\sqrt{-k^2} r \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

Donde J son las funciones de Bessel de primer tipo, C_1^{\pm} y C_2^{\pm} son espinores de la misma quiralidad que ψ_{\pm} . El desarrollo en series de la función $J_n(x)$ para cualquier n es,

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}, \quad (\text{A.2})$$

Para argumento grande $x \gg 1$ la serie tiene desarrollo asintótico $J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$. Reescribiendo las soluciones (A.1) utilizando el desarrollo en series,

$$\begin{aligned} \psi_{\pm} &= r^{(d+1)/2} \left[c_1^{\pm}(k) r^{m \mp 1/2} (1 + s_a^{\pm}(r, k)) + c_2^{\pm}(k) r^{-(m \mp 1/2)} (1 + s_b^{\pm}(r, k)) \right] \\ &= c_1^{\pm}(k) r^{d/2+m \mp 1/2+1/2} (1 + s_a^{\pm}(r, k)) + c_2^{\pm}(k) r^{d/2-m \pm 1/2+1/2} (1 + s_b^{\pm}(r, k)) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se han absorbido varios factores en $C_{1,2}^{\pm}$ y reetiquetado entonces con $c_{1,2}^{\pm}$. A su vez, se definen la series

$$s_a^{\pm}(r, k) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\pm}(m) (-k^2)^j r^{2j}, \quad a_j^{\pm}(m) \equiv \frac{(-1)^j \Gamma(1 + (m \mp 1/2))}{j! 2^{2j} \Gamma(j + 1 + (m \mp 1/2))} \quad (\text{A.4})$$

s_b y b_j son similares a las expresiones anteriores pero con el intercambio $(m \mp 1/2) \rightarrow -(m \mp 1/2)$. Se han aislado las potencias dominantes de r cerca de la frontera. Las sumas $s_{a,b}$ involucran términos subdominantes de r . Como se mencionó en la sección (4.2), los coeficientes c_i^{\pm} no son independientes. Insertando la suma $\psi_+ + \psi_- = \psi$ en la ecuación de Dirac (4.21) utilizando las expresiones (A.3) y colectando potencias de r tenemos²,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[(-2m+1)c_2^+(k) + i \not{k} c_2^-(k) \right] r^{1-m+d/2} \\ &\quad + \left[-(2m+1)c_1^-(k) + i \not{k} c_1^+(k) \right] r^{1+m+d/2} + O \left(r^{2-m+d/2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

¹Solo consideramos el caso de m entero. La ecuación (4.21) puede llevarse a la forma $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1)x \frac{dy}{dx} + (a^2 x^{2r} + \beta^2)y =$ 0 que es la ecuación diferencial de Bessel-Bowman.

²Generalizamos $k\Gamma^x \rightarrow \not{k}$

se concluye que

$$c_1^-(k) = \frac{1}{2m+1} i k c_1^+(k), \quad c_2^+(k) = \frac{1}{2m-1} i k c_2^-(k) \quad (\text{A.6})$$

En lo sucesivo nos restringimos a valores positivos de m (y mantenemos la suposición de no semi-entero). Para recobrar resultados para m negativo, procedemos como sigue. Para m no semi-entero, si $m < 0$ insertamos $m = -|m|$ en (A.1) para obtener,

$$\begin{aligned} \psi_{\pm} &= r^{d/2+1/2} \left[C_1^{\pm}(k) J_{m \mp 1/2} \left(\sqrt{-k^2} r \right) + C_2^{\pm}(k) J_{-(m \mp 1/2)} \left(\sqrt{-k^2} r \right) \right] \\ &= r^{d/2+1/2} \left[C_1^{\pm}(k) J_{-(|m| \pm 1/2)} \sqrt{-k^2} r + C_2^{\pm}(k) J_{|m| \pm 1/2} \left(\sqrt{-k^2} r \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para obtener resultados con m negativo, podemos trabajar con m positivo tomando en todas las ecuaciones $m \rightarrow |m|$ e intercambiando $C_1^{\pm}(k) \longleftrightarrow C_2^{\mp}(k)$, que significa

$$c_1^{\pm}(k) \rightarrow c_2^{\mp}(k), \quad c_2^{\pm}(k) \rightarrow c_1^{\mp}(k), \quad m \text{ no semi-entero.} \quad (\text{A.8})$$

Determinando los contratérminos

Colocando las soluciones (A.1) en (4.25) de la sección (4.2.2) y aislando todos los términos que divergen al hacer $r = \epsilon \rightarrow 0$ podemos introducir S_{ct} con términos que cancelan los divergentes de S_{var} de acuerdo con (4.7). Las expresiones contenidas en la acción de frontera deben respetar las simetrías de la acción en la capa de masa S_{var} y son construidos solo con ψ_- . Insertando las soluciones³ ψ_{\pm} de (A.3) en S_{var} tenemos,

$$\begin{aligned} S_{var} &= \int d^d x \frac{1}{\epsilon^d} \left[\bar{c}_1^+ c_2^- \epsilon^d (1 + f_{a+b-}(\epsilon, k)) + \bar{c}_2^+ c_1^- \epsilon^{d+2} (1 + f_{a-b+}(\epsilon, k)) \right. \\ &\quad \left. + \bar{c}_1^+ c_1^- \epsilon^{d+2m+1} (1 + f_{a+a-}(\epsilon, k)) + \bar{c}_2^+ c_2^- \epsilon^{d-2m+1} (1 + f_{b+b-}(\epsilon, k)) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde hemos considerado como notación más sucinta: $f_{a+a-} \equiv s_a^+ + s_a^- + s_a^+ s_a^-$ y similarmente para f_{b+b-} , f_{a+b-} y f_{a-b+} . Todas ellas son sumas de potencias de ϵ^2 . En (A.9), el primer término permanece finito por cancelación de ϵ^d ; el segundo y tercero se anulan como ϵ^2 y ϵ^{2m+1} , respectivamente. El comportamiento del cuarto término depende del valor de m . Si $m < 1/2$, el cuarto término se anula como ϵ^{-2m+1} y no habrá divergencia alguna, c'est fini. Sin embargo, para $m > 1/2$, el cuarto término en (A.9) puede tener uno o más términos divergentes liderados por ϵ^{-2m+1} . En este caso es necesario añadir contratérminos. Suponiendo que hemos logrado construir contratérminos y $m > 1/2$, la acción renormalizada es⁴

$$S_{ren} = \int_{\epsilon} \frac{1}{\epsilon^d} \bar{c}_1^{(+)} c_2^{(-)} \epsilon^d \quad (\text{A.10})$$

Para construir la acción de contratérminos asumamos ahora que $m > 1/2$ en lo sucesivo. Usando las constricciones (A.6), reescribimos la acción en la capa de masa,

$$S_{var} = \int d^d x \frac{1}{\epsilon^d} \left[\bar{c}_1^+ c_2^- \epsilon^d + \frac{1}{2m-1} \bar{c}_2^- i k c_2^- \epsilon^{d-2m+1} (1 + f_{b+b-}(\epsilon, k)) + O\left(\epsilon^{d+2}\right) \right], \quad (\text{A.11})$$

recordando que los espinores c dependen de k . Aislados los términos mal portados, construimos la acción de contratérminos que los cancele. Como se mencionó en el cuerpo de esta tesis, la acción está construida con el valor de frontera de ψ_- . S_{ct} es de la forma[21]

$$S_{ct} = \int d^d x \sqrt{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(m) \bar{\psi}_- \not{\partial}_{\epsilon} \square_{\epsilon}^j \psi_- = \int d^d x \frac{1}{\epsilon^d} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{1+2j} \alpha_j(m) \bar{\psi}_- \not{\partial} \square^j \psi_-, \quad (\text{A.12})$$

³Insistiendo en tomar m no semi-entero y positivo

⁴La acción renormalizada es S_{ren} definida como el limite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de $S_{var} - S_{ct}$

con $\not\partial_\epsilon = \epsilon \not\partial^5$ y \square_ϵ^j es la j -ésima potencia del Laplaciano escalar \square_ϵ en $r = \epsilon$. Al evaluar en ϵ las derivadas actúan solo en las direcciones transversales, i.e., $\square_\epsilon = \epsilon^2 \partial^2$. En componentes de Fourier, $\psi \rightarrow e^{ikx} \psi$, (A.12) verifica

$$S_{ct} = \int d^d x \frac{1}{\epsilon^d} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{1+2j} \alpha_j(m) \bar{\psi}_- i \not{k} (-k^2)^j \psi_-, \quad (\text{A.13})$$

y, sustituyendo las soluciones ψ_\pm , hallamos

$$\begin{aligned} S_{ct} = & + \int d^d x \frac{1}{\epsilon^d} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{1+2j} \alpha_j(m) [\\ & + \epsilon^{d+2m+2} \bar{c}_1^- i \not{k} (-k^2)^j c_1^- (1 + f_{a-a^-}(\epsilon, k)) \\ & + \epsilon^{d+1} \bar{c}_1^- i \not{k} (-k^2)^j c_2^- (1 + f_{a-b^-}(\epsilon, k)) \\ & + \epsilon^{d+1} \bar{c}_2^- i \not{k} (-k^2)^j c_1^- (1 + f_{b-a^-}(\epsilon, k)) \\ & + \epsilon^{d-2m} \bar{c}_2^- i \not{k} (-k^2)^j c_2^- (1 + f_{b-b^-}(\epsilon, k))] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

El término potencialmente divergente cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es el asociado a ϵ^{d-2m} . El procedimiento ahora es fijar el coeficiente $\alpha_j(m)$ tal que, los términos divergentes en (A.11) y (A.14) se cancelen uno al otro. Es decir,

$$\frac{1}{2m-1} (1 + f_{b+b^-}(\epsilon, k)) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(m) (-\epsilon^2 k^2)^j (1 + f_{b-b^-}(\epsilon, k)), \quad (\text{A.15})$$

debe anularse orden por orden en $-\epsilon^2 k^2$ hasta el orden ϵ^{2m-1} . Puede verse que $\alpha_0(m) = -\frac{1}{2m-1}$. Más aún, una relación recursiva puede determinar todos los coeficientes, a saber,

$$\alpha_j = -\frac{1}{2m-1} \left[b_j^+ + b_j^- + \sum_{i=1}^j b_i^+ b_{j-i}^- \right] - \sum_{i < j} \alpha_i \left[2b_{j-i}^- + \sum_{k=1}^i b_k^- b_{j-i-k}^- \right], \quad (\text{A.16})$$

considerando $b_j^\pm(m) \equiv 0$ si $j \leq 0$. Los primeros coeficientes resultan⁶

$$\begin{aligned} \alpha_0(m) &= -\frac{1}{2m-1} \\ \alpha_1(m) &= -\frac{1}{(2m-1)^2(2m-3)} \\ \alpha_2(m) &= \frac{2}{(2m-1)^3(2m-3)(2m-5)} \\ \alpha_3(m) &= \frac{17-10m}{(2m-1)^4(2m-3)^2(2m-5)(2m-7)} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

⁵En esta expresión, ϵ aparece por los Veilbein inversos.

⁶Con ayuda de las expresiones explícitas para b_i^\pm de A.4.

Agradecimientos

A mi padre y ejemplo, por creer en mí y por su sempiterno apoyo. A Alberto Güijosa Hidalgo y Leonardo Patiño Jáidar por mostrarme esta bella teoría. Gracias a Ana Denhi Martínez Farfán por su incansable apoyo y amorosa compañía, Andrés Luna Godoy, mi amigo ejemplar. Agradesco a mi madre, María Guadalupe López Negrete y hermanos Luis Emilio de la Cruz y Diego de la Cruz por su constante preocupación y apoyo. Dr. Rodolfo Martínez y Romero, Dr. Román Lináres Romero por tomarme siempre en cuenta. Dr. David Vergara Oliver. Gracias Daniel Torres, Belinka González, Patricia Ortega, Nestor Gaspar, Fabian Zeller, Adolfo Sánchez de la Cruz. A mis tíos Margarita, Patricia, José María, Salvador, Mariano. A mis abuelos, Manuel de la Cruz López y Josefina Jasso. Gracias a mi hermosa Facultad de Ciencias.

Dedico esta tesis a mi padre, José Manuel de la Cruz Jasso.

México D.F. 20 de Junio de 2014.
Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.

Bibliografía

- [1] D. Tong, J. Laia. *Flowing Between Fermionic Fixed Points*. <http://arxiv.org/abs/1108.2216>
- [2] D. Tong, J. Laia. *A Holographic Flat Band*. <http://arxiv.org/abs/1108.1381>
- [3] H.Lui, N. Iqbal. *Real time response in AdS/CFT with application to spinors*. <http://arxiv.org/abs/0903.2596>
- [4] M. Rangamani, H.Lui, et. al. *Integrating out geometry: Holographic Wilsonian RG and the membrane paradigm*. <http://arxiv.org/abs/1010.4036>
- [5] I. Heemskerk, J. Polchinski. *Holographic and Wilsonian Renormalization Groups*. <http://arxiv.org/abs/1010.1264>
- [6] L. Susskind, E. Witten. *The holographic bound in Anti de Sitter Space*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9805114>
- [7] K. Skenderis. *Lecture Notes on Holographic Renormalization*. <http://arxiv.org/abs/1010.1264>
- [8] M. Henningson, K. Skenderis. *The Holographic Weyl anomaly*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9806087>
- [9] M. Henningson, K. Sfetsos. *Spinors and the AdS/CFT correspondence*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9803251v2>.
- [10] Bertlmann, Reinhold A. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Clarendon Press. Oxford 1996.
- [11] J. Korovins. *holographic Renormalización for fermions in Real Time*. <http://arxiv.org/abs/1107.0558v1>
- [12] M. Henneaux. *Boundary terms in the AdS/CFT correspondence for spinor fields*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9902137>
- [13] E. Witten. *Multi-Trace Operators, Boundary Conditions, And AdS/CFT Correspondence*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0112258v3>
- [14] I.R. Klebanov, E. Witten. *AdS/CFT Correspondence and Symmetry breaking*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9905104>
- [15] R. Sundrum. *Eective Field Theory for a Three-Brane Universe*. *Phys. Rev. D*59. (1999)085009. <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9805471>.
- [16] Peskin, Michael. Schroeder, Daniel. *An introduction to Quantum Field Theory*. (Perseus Books, 1995. ISBN 0-201-50397-2).

- [17] L. Vecchi. *Multitrace deformations, Gamow states, and Stability of AdS/CFT*. <http://arxiv.org/abs/1005.4921v2>
- [18] V. Balasubramanian, M. Guica, A. Lawrence. *Holographic Interpretations of the Renormalization Group*. <http://arxiv.org/abs/1211.1729>
- [19] I. Papadimitriou. *Holographic Renormalization as a Canonical Transformation*. <http://arxiv.org/abs/1007.4592v2>
- [20] J. de Boer, E. Verlinde, H. Verlinde. *On the Holographic Renormalization Group*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9912012v1>
- [21] M. Ammon, J. Erdmenger, M. Kaminski, A. O'Bannon. *Fermionic Operator Mixing in Holographic p-wave Superfluids*. <http://arxiv.org/abs/1003.1134v2>
- [22] D. Mateos. *String Theory and Quantum Chromodynamics*. <http://arxiv.org/abs/0709.1523v1>
- [23] J. Polchinski. *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9510017>
- [24] G. Horowitz, J. Polchinski. *A Correspondence Principle for Black Holes and Strings*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9612146>
- [25] A. Hashimoto, I. Klebanov. *Scattering of Strings from D-branes*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9611214>
- [26] J. Maldacena, A. Strominger. *Black Hole Greybody Factors and D-Brane Spectroscopy*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9609026>
- [27] J. Maldacena. *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9711200>
- [28] O. Aharony, S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz. *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9905111v3>
- [29] H. Nastase. *Introduction to AdS/CFT*. <http://arxiv.org/abs/0712.0689v2>.
- [30] A. V. Ramallo. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. <http://arxiv.org/abs/1310.4319>
- [31] M. Berkooz, A. Server, A. Shomer. *Double trace deformations, boundary conditions and space-time singularities*. JHEP 0202,034 (2002)
- [32] T. Faulkner, N. Iqbal, et. al. *From Black Holes to Strange Metals*. <http://arxiv.org/abs/1003.1728v1>
- [33] M. Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>
- [34] Pierre, Ramond. *Field Theory. A Modern Primer*.
- [35] T. Parker. *Quantum Field Theory on Curved Spacetimes*.
- [36] A. Guijosa. *Curso de Posgrado: Teoría Cuántica de Campos. Notas de lectura*.
- [37] A. Guijosa. *Curso de Posgrado: Correspondencia Norma/Gravedad. Notas de lectura*.
- [38] A. Guijosa. *Curso de Posgrado: Introducción a la Teoría de Cuerdas. Notas de lectura*.

- [39] M. Henneaux, C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. (Princeton University Press, 1993. ISBN-10: 0691037698).
- [40] M.D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standar Model*. (Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9781107034730).
- [41] S. Carroll. *Space Time And Geometry*. (Cummings, 2003. ISBN-10: 0805387323
- [42] Luis Álvarez-Gaumé, Miguel A. Vázquez-Mozo. *An invitation To Quantum Field Theory*. (Springer, Lecture Notes In Physics, Vol 839, 2012. ISBN 978-3-642-23727-0).
- [43] F. Yndurain. *The theory of Quarks And Gluons*. (Springer, 2006. ISBN: 978-3-540-33209-1)
- [44] L. Susskind, J. Lindesay. *An introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution. The Holographic Universe*. (World Scientific, 2005. ISBN 981-256-083-1).
- [45] Kim, Romans. *Mass spectrum of chiral ten-dimensional $N=2$ supergravity on S^5* . <http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.32.389>
- [46] S. A. Hartnoll. *Lectures on holographic methods for condensed matter physics*. <http://xxx.lanl.gov/abs/0903.3246>