



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉTODOS DE DISEÑO DE SUPERFICIES DE
DESLIZAMIENTO PARA CONTROLADORES POR
MODOS DESLIZANTES DE ORDEN SUPERIOR.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero Eléctrico y Electrónico

PRESENTA:

Ulises Arturo Pérez Ventura

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi madre por acompañarme a lo largo de este viaje llamado licenciatura.

A mis hermanos Eduardo y Elizabeth por apoyarme en todo momento y mostrarme que las cosas se deben hacer bien.

A mi tía Hilaria y mi prima Sandra por todo su apoyo incondicional.

A mis amigos de la carrera, Brenda, Celeste, Alejandro, Carlos, Hugo, Jesús y Natanael por compartir conmigo parte de sus vidas.

Al doctor Fridman por la invitación al laboratorio de modos deslizantes y a los compañeros Antonio, Ismael y Héctor por su ayuda brindada para la realización de esta tesis.

A Debbie Hernández y al doctor Fernando Castaños del CINVESTAV por aclarar mis dudas en temas relacionados con este trabajo.

Al proyecto PAPIIT IN113613 por el apoyo otorgado para el desarrollo de este trabajo de tesis.

Ulises.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación y Estado del Arte	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Objetivo	3
1.4. Metodología	3
1.5. Contribuciones	5
1.6. Estructura de la tesis	5
2. Marco Teórico	7
2.1. Modos Deslizantes de Orden Superior	7
2.1.1. Métodos de Diseño de Superficies de Deslizamiento de Grado Re-	
lativo Arbitrario	8
2.1.1.1. Ubicación de Polos	8
2.1.1.2. LQ Singular	10
2.1.2. Control Equivalente Nominal	14
2.1.3. Super-Twisting	14
2.1.4. Super-Twisting de Tercer Orden	15
2.2. Diferenciador de Orden Superior	16
2.2.1. Diferenciador Robusto y Exacto de Orden Arbitrario	16
3. Modelo Matemático del Helicóptero	17
3.1. Descripción de la Planta	17
3.2. Modelo Matemático	18
3.2.1. Dinámica de <i>Inclinación y Desplazamiento</i>	20
3.2.2. Dinámica de <i>Elevación</i>	22

3.3. Parámetros de la Planta	23
3.4. Punto de Operación	24
3.5. Linealización del Modelo	25
3.6. Dinámica del Error	26
3.6.1. Error de Inclinación y Error de Desplazamiento	26
3.6.2. Error de Elevación	28
3.7. Análisis de Controlabilidad	28
3.8. Estimación de la Velocidad del Helicóptero	29
4. Diseño de Superficies de Deslizamiento	31
4.1. Ubicación de Polos	33
4.1.1. Grado Relativo Uno	33
4.1.2. Grado Relativo Dos	39
4.1.3. Análisis de Resultados	44
4.2. LQ Singular	45
4.2.1. Grado Relativo Uno	45
4.2.2. Grado Relativo Dos	52
4.2.3. Análisis de Resultados	58
5. Resultados Experimentales	59
5.1. Ubicación de Polos	61
5.1.1. Grado Relativo Uno	61
5.1.2. Grado Relativo Dos	64
5.1.3. Análisis de Resultados	68
5.2. LQ Singular	69
5.2.1. Grado Relativo Uno	69
5.2.2. Grado Relativo Dos	73
5.2.3. Análisis de Resultados	76
6. Conclusiones	79
A. Modos Deslizantes Convencionales	81
A.1. Conceptos Principales	82
A.2. Control Equivalente	85
A.3. Ecuaciones de Modos Deslizantes	86

B. Cálculo de las Ganancias	89
B.1. Super-Twisting	89
B.2. Super-Twisting de Tercer Orden	91
C. Instrumentación	93
C.1. Tarjeta dSPACE 1103	93
C.2. Etapa de potencia	94
C.3. Encoders	95
Bibliografía	97

Introducción

1.1. Motivación y Estado del Arte

Los sistemas de control han asumido un papel cada vez más importante en el desarrollo tecnológico, se encuentran en gran cantidad en todos los sectores de la industria, tales como líneas de ensamble automático, tecnología espacial, sistemas de armas, sistemas de transporte, robótica y muchos otros. Casi cualquier sistema que se pueda representar mediante un modelo matemático, se puede estudiar a través de la teoría de control.

La discrepancia entre el sistema real y el modelo matemático utilizado para el diseño del controlador; implica la aparición de parámetros desconocidos, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas. El diseño de algoritmos de control que logren un desempeño deseado del sistema, en presencia de incertidumbres, es uno de los mayores retos que enfrenta la teoría de control actualmente. En particular, el control por Modos Deslizantes (SM Control por sus siglas en inglés), es una técnica de *control robusto* muy eficiente para la compensación de perturbaciones acopladas a la señal de control.

El SM Control convencional es robusto ante incertidumbres e insensible a perturbaciones acotadas, su implementación generalmente requiere del diseño de una superficie de deslizamiento de grado relativo uno respecto al control; la cual una vez alcanzada, se comportará con la dinámica deseada y el orden del sistema será reducido $(n - 1)$ [1]. La principal desventaja de este esquema de diseño es que para conservar las propiedades antes mencionadas se requiere de funciones discontinuas, provocando vibraciones de alta frecuencia (*chattering*) en los estados del sistema, además de que la señal de control puede ser perjudicial para los actuadores.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los primeros enfoques que se desarrollaron para atenuar el efecto del *chattering* fue el de los Modos Deslizantes de Segundo Orden (SOSM por sus siglas en inglés). Actualmente esta idea se generalizó con el control por Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSM), que actúa sobre una superficie de grado relativo arbitrario, e inclusive sin la necesidad del diseño de ésta si el sistema es mecánico.

La forma de seleccionar una variable de deslizamiento de grado relativo arbitrario, para aplicar HOSM Control sobre sistemas lineales e invariantes en el tiempo, se ha presentado en [2] y [3]. La ventaja de estos métodos es que permiten diseñar una dinámica deseada en el modo deslizante, la cual será de orden menor o igual a $(n - 1)$.

Los helicópteros son de gran utilidad ya que permiten realizar despegues y aterrizajes verticales sin necesidad de pista, por esta razón, se usan a menudo en zonas congestionadas o aisladas donde los aviones no pueden despegar o aterrizar. Sin embargo resulta complicado diseñar controladores debido a las condiciones de operación, debido a que el modelo matemático difícilmente describe de forma exacta su dinámica y por consiguiente se requiere de algoritmos que garanticen estabilidad en lazo cerrado a pesar de las incertidumbres.

Sobre el helicóptero de tres grados de libertad de la marca Quanser, se han aplicado leyes de control de lógica difusa para adaptar el valor de las ganancias del controlador en [4]. El fabricante en [5], propone control PID para regular a posiciones angulares deseadas. En cuanto a controladores robustos, H_∞ es empleado en [6] para seguimiento de trayectorias utilizando un modelo lineal de la planta. Esta técnica relativamente nueva combina elementos de control en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

La técnica de SMC se ha utilizado para diferentes propósitos sobre esta planta. En [7] se utiliza un observador por modos deslizantes para identificar perturbaciones y de esta manera se generan dos entradas de control, una con control PID y la segunda basada en la perturbación identificada por el observador, obteniendo un controlador robusto por salida. En [8] se diseñan controladores HOSM cuasi-continuos, para llevar al helicóptero a posiciones angulares deseadas, con el inconveniente de que la señal de control es discontinua en el modo deslizante.

Modos deslizantes con señales de control continuo se utilizan en [9], con un controlador basado en el Algoritmo Super-Twisting (STA por sus siglas en inglés) para el seguimiento de trayectorias oscilatorias. En [10] se aplica el Algoritmo Super-Twisting de Ganancias Variables (VGSTA), con el cual las ganancias varían según la perturbación que afecta al sistema. Nuevamente en [11] se utiliza el algoritmo VGSTA, ahora para estabilizar al helicóptero y generar señales de control suficientemente grandes para rechazar perturbaciones. Finalmente en [12] se prueba el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden (3-STA), para alcanzar posiciones angulares deseadas en tiempo finito, sin la necesidad del diseño de una superficie.

1.2. Planteamiento del problema

El problema principal se centra en estabilizar en forma robusta, un helicóptero de tres grados de libertad en cualquier punto de operación de su espacio de trabajo. Basándose en el diseño de superficies de deslizamiento para controladores por modos deslizantes de orden superior, se busca atenuar los efectos del *chattering* mediante señales de control continuo, contando sólo con la medición de la posición y estimando en tiempo real la velocidad.

1.3. Objetivo

El objetivo de esta tesis es implementar de forma experimental los métodos de diseño de superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario, realizando regulación a puntos de operación deseados y mostrando cómo se modifica el desempeño del sistema, cuando se incrementa el orden del controlador.

1.4. Metodología

1. Análisis y Modelado del Helicóptero

En primer lugar se obtuvo el modelo matemático de la planta, para ello fue necesario conocer las limitaciones físicas de helicóptero, la magnitud de las señales de control y la instrumentación instalada. Luego plantear ecuaciones de equilibrio y linealizarlas en torno a un punto de operación. Puesto que sólo se cuenta con la

1. INTRODUCCIÓN

medición de la posición del sistema, se implementarán diferenciadores de orden superior por modos deslizantes para estimar las velocidades angulares.

2. Diseño de Superficies de Deslizamiento

En este paso se diseñaron superficies de deslizamiento con los métodos Ubicación de Polos y LQ Singular Óptimo, de acuerdo al controlador por modos deslizantes que se va a utilizar y la dinámica deseada en el modo deslizante.

3. Diseño del Controlador

Para el diseño del controlador, se compensa en tiempo real la dinámica conocida del sistema en el modo deslizante y con el conocimiento de la cota máxima de la derivada de las perturbaciones, es posible diseñar las ganancias de los controladores. En simulación se muestra el comportamiento de la planta en lazo cerrado con el control.

4. Implementación Física

Una vez hecho el diseño de las superficies y calculado las ganancias de los controladores, el siguiente paso consiste en validar el esquema de control en tiempo real y de ser necesario ajustar las ganancias para lograr un desempeño deseado.

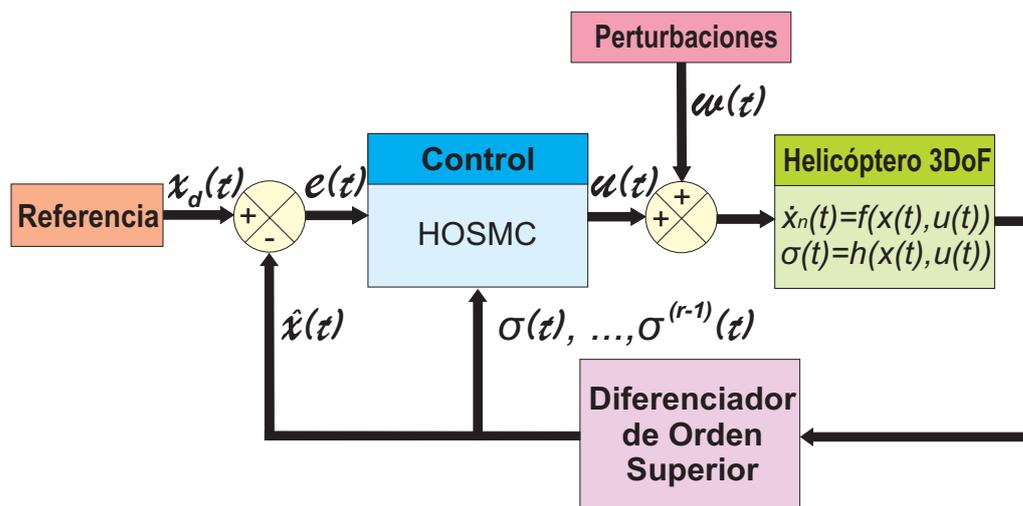


Figura 1.1: Esquema de Control.

La Figura 1.1 muestra el diagrama de bloques que ejemplifica lo antes mencionado, en donde x_d es el punto de operación deseado, $\hat{x}(t)$ es la estimación de las velocidades del helicóptero. El controlador trabaja con la señal de error $e(t)$ y la variable de deslizamiento $\sigma(t)$ así como sus derivadas temporales $\dot{\sigma}(t), \dots, \sigma^{(r-1)}(t)$, en consecuencia $u(t)$ es un HOSM Control que debe lidiar con perturbaciones acopladas $w(t)$.

1.5. Contribuciones

Las contribuciones principales se enumeran a continuación:

1. Comprobar de forma experimental la validez de los métodos de diseño de superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario.
2. Analizar el desempeño del sistema ante el incremento de orden del controlador.

1.6. Estructura de la tesis

El presente trabajo está dividido en 6 capítulos, en el Capítulo 2 se expone la teoría de control básica para implementar un HOSM Control. En el Capítulo 3 se realiza el análisis de la planta con el fin de obtener un modelo matemático aproximado. En el Capítulo 4 se diseñan superficies de deslizamiento con los métodos Ubicación de Polos y LQ Singular, se prueba en simulación el esquema de control. En el Capítulo 5 se encuentran los resultados experimentales y el análisis de los errores, una vez que se alcanza el modo deslizante. En el Capítulo 6 están las conclusiones generales de este trabajo. Finalmente en la sección de Apéndice se encuentra lo relacionado al SM Control convencional, el cálculo de las ganancias de los controladores a partir de funciones de Lyapunov, la instrumentación con la que cuenta el helicóptero y la etapa de potencia.

Marco Teórico

Este capítulo está dedicado a la teoría de control necesaria para desarrollar el presente trabajo de tesis. Se hace especial énfasis en los beneficios de los algoritmos por modos deslizantes y la atenuación del efecto conocido como *chattering*, mediante el uso de señales de control continuo.

Se plantean dos métodos de diseño de superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario, útiles para aplicar Control por Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSMC por sus siglas en inglés) en sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Finalmente se mencionan dos leyes de HOSMC, con las características que debe tener la superficie diseñada para su implementación. Además se incluye un diferenciador robusto, para estimar las derivadas temporales de la superficie de deslizamiento.

2.1. Modos Deslizantes de Orden Superior

El Control por Modos Deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) convencional, proporciona alta precisión y robustez bajo ciertas condiciones de perturbación. Sin embargo se presentan dos restricciones: primero, el grado relativo de la superficie respecto al control debe ser uno. Segundo, el control al ser de naturaleza discontinua, puede ser perjudicial para el sistema debido a los efectos del *chattering*, ver Apéndice A.

Con el fin de minimizar los efectos de la conmutación de alta frecuencia, se desarrollaron los HOSMC. Para su implementación, es necesario conocer un número sucesivo de derivadas temporales de la variable de deslizamiento, es decir, $\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$ [13].

Si se supone el diseño de una superficie de deslizamiento σ , en cuya r -ésima derivada temporal aparece por primera vez el control u , se dice que el grado relativo de la superficie es r . En consecuencia para llevar a la variable deslizante a cero, es necesario que $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ y para lograrlo se necesita emplear Control por Modos Deslizantes de r -ésimo Orden [1].

2.1.1. Métodos de Diseño de Superficies de Deslizamiento de Grado Relativo Arbitrario

Dado un sistema lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + w(t)), \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}$ es un control escalar y la señal de perturbación $w(t)$ es acoplada al canal de control. El par (A, B) se asume controlable y se desea llevar al estado x a cero, en presencia de la perturbación acotada $\|w(t)\| \leq L$, utilizando SMC de orden $r \geq 1$. Para lograr lo anterior, se muestra el diseño de superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario y dinámica deseada en el modo deslizante. Los enfoques a tratar son:

- Ubicación de Polos.
- LQ Singular Óptimo.

2.1.1.1. Ubicación de Polos

Para el sistema (2.1) es posible seleccionar una variable de deslizamiento, con grado relativo arbitrario y dinámica deseada en el modo deslizante, utilizando la fórmula generalizada de Ackermann-Utkin propuesta en [2]. Para el diseño se considerarán los siguientes pasos:

1. Calcular la matriz de Controlabilidad

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{(n-1)}B]. \quad (2.2)$$

2. Definir el grado relativo r de la superficie y la dinámica del modo deslizante, mediante un polinomio deseado $\gamma(\lambda) = \lambda^{(n-r)} + \gamma_{n-r-1}\lambda^{(n-r-1)} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$.

3. Encontrar la salida virtual (variable deslizante):

$$\sigma(t) = Cx(t); \quad \sigma \in \mathfrak{R}, \quad (2.3)$$

tal que $\sigma \equiv 0$ implica que $x \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. La forma de calcular la matriz de ganancias C que ubica los polos de la dinámica de deslizamiento, se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Con el polinomio deseado $\gamma(\lambda)$ y la matriz de controlabilidad P , se define la fórmula de Ackermann-Utkin:*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \gamma(\lambda), \quad (2.4)$$

entonces la superficie (2.3) es de grado relativo r y las raíces del polinomio $\gamma(\lambda)$ son los valores propios de la dinámica del modo deslizante, en la intersección de los planos $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ [2].

Después de realizar los pasos anteriores, la función de transferencia

$$g(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s^{(n-r)} + \gamma_{n-r-1}s^{(n-r-1)} + \dots + \gamma_1s + \gamma_0}{s^n + a_{(n-1)}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (2.5)$$

es de grado relativo r con respecto al control y su numerador es $\gamma(s)$, por tanto los autovalores de la dinámica del modo deslizante son iguales a sus raíces, es decir:

$$\begin{aligned} \sigma &= \gamma_0 x_1 + \gamma_1 x_2 + \dots + \gamma_{n-r-1} x_{n-r-1} + x_{n-r} = 0, \\ &\Downarrow \\ x_{n-r} &= -\gamma_0 x_1 - \gamma_1 x_2 - \dots - \gamma_{n-r-1} x_{n-r-1}, \\ &\Downarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-r-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & \dots & \dots & -\gamma_{n-r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-r-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dando lugar a un sistema dinámico de orden reducido y dinámica deseada. Eligiendo un polinomio $\gamma(\lambda)$ Hurwitz, nos aseguramos de que todos los estados convergen a cero en forma exponencial cuando $\sigma = 0$.

2.1.1.2. LQ Singular

Se ha presentado en [14], que un índice de desempeño singular con respecto al control se puede utilizar en el diseño de superficies de deslizamiento, y que con un índice de desempeño con orden de singularidad mayor a uno, es posible diseñar superficies de deslizamiento con grado relativo superior [3].

Dada una función de costo o índice de desempeño para el sistema (2.1)

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x(t)^T Q x(t)] dt, \quad (2.6)$$

con $Q = Q^T > 0$ simétrica y positiva definida. El índice de desempeño de la ecuación (2.6), es singular con respecto a la entrada de control escalar $u(t)$ y es llamada función de “control sin costo” [15], [14], [16], [17]. El diseño de las superficies deslizantes se basa en la solución del Problema de Estabilización Óptimo Singular (SOSP por sus siglas en inglés).

Con el sistema (2.1) en su forma canónica de controlador:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad (2.7)$$

la matriz de ponderación Q también debe ser transformada, identificando los elementos

$$\bar{Q} = T^T Q T = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

con $\bar{Q}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ y $\bar{Q}_{22} > 0$. Sin embargo, el diseño de superficies de orden superior parte del supuesto que al transformar Q como en la ecuación (2.8), el escalar $\bar{Q}_{22} = 0$. De la teoría de control óptimo singular [18], [19], [20], se sabe que cuando la matriz Q es positiva semi-definida, la dimensión del conjunto estabilizante óptimo es menor a $(n - 1)$.

Si el escalar $\bar{Q}_{22} = 0$ en la ecuación (2.8), debido a las propiedades de simetría y positividad definida, todos los elementos \bar{Q}_{12} y \bar{Q}_{21} son cero. Esto significa que \bar{Q} sólo

puede tener la forma:

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

con $\bar{Q}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$ es una matriz simétrica positiva definida y $\bar{Q}_{22} > 0 \in \mathfrak{R}$. Se define el *Orden de Singularidad* como el entero $i = k + 1$, donde k es el número de columnas cero de la matriz de ponderación transformada \bar{Q} , como se expresa en la ecuación (2.9), tales que $\bar{Q}_{22} > 0 \in \mathfrak{R}$ [3].

Hecha la partición de la matriz \bar{Q} , es necesario hacer particiones de las matrices del sistema (2.7) de las mismas dimensiones que en la ecuación (2.9), entonces el vector de estados se divide en tres subconjuntos:

- $\bar{z}_1 = [z_1 \ \cdots \ z_{n-i}]^T$: representa las variables de estado que formarán la dinámica reducida de modos deslizantes.
- $\bar{z}_2 = z_{n-i+1}$: control virtual.
- $\bar{z}_3 = [z_{n-i+2} \ \cdots \ z_n]^T$: el resto de las variables de estado.

Como la matriz \bar{A} tiene forma canónica de controlador, en el subsistema dinámico

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\bar{z}_2, \quad (2.10)$$

las matrices \bar{A}_{11} y \bar{A}_{12} conservan dicha particularidad

$$\bar{A}_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n-i \text{ columnas}}; \quad \bar{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} n-i \text{ renglones,}$$

cabe notar que la matriz \bar{Q}_{11} tiene la misma dimensión que $\bar{A}_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-i) \times (n-i)}$.

Una vez obtenidas las particiones del sistema, con \bar{A}_{11} como matriz del subsistema y \bar{A}_{12} como matriz de entradas del control virtual, el índice de desempeño (2.6) toma la forma

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{11} \bar{z}_1(t) + 2\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{12} \bar{z}_2(t) + \bar{z}_2^T(t) \bar{Q}_{22} \bar{z}_2(t) dt, \quad (2.11)$$

se observa que (2.11) contiene términos cruzados entre los estados \bar{z}_1 y el control virtual \bar{z}_2 . Sin embargo, es posible hacer un cambio de variable para eliminar estos términos

$$v = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1, \quad (2.12)$$

entonces el índice de desempeño bajo el cambio de variable es

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \bar{z}_1^T(t) \underbrace{(\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T)}_{\hat{Q}} \bar{z}_1(t) + v^T(t) \underbrace{\bar{Q}_{22}}_{\hat{R}} v(t) dt \quad (2.13)$$

con matrices de ponderación \hat{Q} y \hat{R} para los estados \hat{z}_1 y el control virtual v , respectivamente. El subsistema dinámico de la ecuación (2.10), es ahora

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{A} \hat{z}_1 + \hat{B} v, \quad (2.14)$$

con matrices

- $\hat{A} = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T \in \mathfrak{R}^{(n-i) \times (n-i)}$.
- $\hat{B} = \bar{A}_{12} \in \mathfrak{R}^{(n-i)}$.

Finalmente después de la transformación (2.8), la partición del sistema según el orden de singularidad y el cambio de variable (2.12), el índice de desempeño (2.6) singular con respecto al control, se convirtió en un problema de Control Óptimo regular que se soluciona mediante la *Ecuación Algebraica de Riccati*:

$$\hat{A}^T P + P \hat{A} - P \hat{B} (\hat{R})^{-1} \hat{B}^T P + \hat{Q} = 0, \quad (2.15)$$

la ecuación (2.15) requiere del conocimiento de \hat{A} , \hat{B} , \hat{Q} , \hat{R} , con $P > 0$ solución única positiva definida, si los pares (\hat{A}, \bar{D}) son observables con \bar{D} tal que $\bar{D}^T \bar{D} = \hat{Q}$ [21].

Con la solución de la ecuación (2.15) es posible construir un control virtual estabilizante, óptimo con respecto al índice de desempeño (2.13):

$$\begin{aligned}\hat{z}_2 &= -K\hat{z}_1, \\ &= -(\hat{R})^{-1}(\hat{B}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\hat{z}_1, \\ &= -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\hat{z}_1,\end{aligned}\tag{2.16}$$

la superficie deslizante de grado relativo $r \geq 1$ puede ser seleccionada de la siguiente manera:

$$\sigma = \hat{z}_2 + K\bar{z}_1 = \hat{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1; \quad \sigma \in \mathfrak{R},\tag{2.17}$$

es importante remarcar que el *Orden de Singularidad* obtenido de la matriz de ponderación transformada (2.9), es igual al *grado relativo* de la superficie deslizante diseñada, esto es $r = k + 1$.

El control por modos deslizantes restringe las trayectorias del sistema (2.14) a la superficie (2.17), donde la dinámica está descrita por el modelo de orden reducido:

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \underbrace{(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)}_K)\bar{z}_1,$$

la matriz de ganancias $K \in \mathfrak{R}^{1 \times (n-i)}$ modifica la dinámica en el modo deslizante.

En resumen el método consiste en los siguientes pasos:

1. Transformar al sistema (2.1) en su forma canónica de controlador así como a la matriz de ponderación Q , como (2.8).
2. Definir el *Orden de Singularidad* de (2.9) buscando el escalar $\bar{Q}_{22} \neq 0$.
3. Hacer las particiones sobre la matriz de ponderación transformada \bar{Q} y sobre el sistema canónico.
4. Diseñar la superficie de deslizamiento mediante un control virtual estabilizante, con la solución a la Ecuación Algebraica de Riccati (2.15), para un índice de desempeño no-singular de orden reducido.

2.1.2. Control Equivalente Nominal

Utilizando cualquiera de los métodos de diseño de superficies antes descritos, se cumple que la r -ésima derivada temporal de la variable de deslizamiento tiene la forma

$$\sigma^{(r)} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + (u + w),$$

se define el *Control Equivalente Nominal*

$$u_{eqn} = -(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n),$$

para compensar la dinámica conocida del sistema, entonces la señal de control que debe aplicarse es

$$u = u_{eqn} + u_{sm}, \quad (2.18)$$

donde u_{sm} es un HOSMC que se lleva a la variable deslizante $\sigma = \dot{\sigma} = \cdots = \sigma^{(r-1)} = 0$ en tiempo finito, además de compensar la perturbación acoplada $w(t)$.

El orden del controlador u_{sm} de la expresión (2.18), crece conforme el grado relativo deseado r de la superficie diseñada incrementa. A continuación se muestran dos HOSMC que se aplicarán al helicóptero, para mostrar el comportamiento del sistema ante el incremento del orden del controlador.

2.1.3. Super-Twisting

El algoritmo Super-Twisting [22] (STA por sus siglas en inglés), es de segundo orden y tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -k_1 |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v, \\ \dot{v} &= -k_2 \text{sign}(\sigma). \end{aligned} \quad (2.19)$$

las ganancias k_1 y k_2 son positivas y se diseñan de modo que el controlador lleva a la variable deslizante $\sigma, \dot{\sigma}, \rightarrow 0$ en tiempo finito. Para el cálculo de las ganancias basándose en funciones de Lyapunov, ver el Apéndice B.

Este algoritmo fue diseñado para ser aplicado principalmente a sistemas con grado relativo $r = 1$, o bien con una superficie diseñada de la forma:

$$\dot{\sigma} = h(t, \sigma) + g(t, \sigma)u_1,$$

donde $g(t, \sigma) \neq 0$ es la función de entradas y $h(t, \sigma)$ es una función de perturbación incierta, de la que se conoce la cota máxima $\|\frac{dh(t, \sigma(t))}{dt}\| \leq \Delta$.

El STA tiene las siguientes características:

- Es un algoritmo por modos deslizantes de segundo orden ya que lleva a la superficie y su derivada temporal $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$, en tiempo finito.
- El control (2.19) es continuo, en consecuencia los efectos del *chattering* se minimizan.
- Para su implementación se requiere del conocimiento en línea de σ .
- Compensa teóricamente de forma exacta perturbaciones Lipschitz en el tiempo sobre las trayectorias del sistema.

2.1.4. Super-Twisting de Tercer Orden

El algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden [23] (3-STA por sus siglas en inglés) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |\phi|^{1/2} \text{sign}(\phi) + \Gamma, \\ \dot{\Gamma} &= -k_3 \text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$\phi = \dot{\sigma} + k_2 |\sigma|^{2/3} \text{sign}(\sigma),$$

las ganancias k_1 , k_2 y k_3 son positivas y se diseñan de modo que el controlador lleva a la variable deslizante σ , $\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito. Para el cálculo de las ganancias basándose en funciones de Lyapunov, ver el Apéndice B.

El 3-STA es un algoritmo por modos deslizantes diseñado para sistemas con grado relativo $r = 2$, o bien con superficie de deslizamiento diseñada de la forma:

$$\ddot{\sigma} = h(t, \sigma, \dot{\sigma}) + g(t, \sigma, \dot{\sigma})u_1. \quad (2.21)$$

donde $g(t, \sigma, \dot{\sigma}) \neq 0$ es la función de entradas y $h(t, \sigma, \dot{\sigma})$ es una función de perturbación incierta, de la que se conoce la cota máxima $\|\frac{dh(t, \sigma(t), \dot{\sigma}(t))}{dt}\| \leq \Delta$.

El 3-STA tiene las siguientes características:

- Es un algoritmo por modos deslizantes de orden tres, ya que lleva a la superficie y sus dos primeras derivadas temporales $\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito.
- El control (2.20) es continuo, en consecuencia los efectos del *chattering* se minimizan.
- Para su implementación se requiere del conocimiento en línea de σ y $\dot{\sigma}$.
- Compensa teóricamente de forma exacta perturbaciones Lipschitz en el tiempo sobre las trayectorias del sistema.

2.2. Diferenciador de Orden Superior

Como se ha mencionado antes, la implementación de HOSMC requiere de la estimación de las $(r - 1)$ derivadas sucesivas de la superficie de deslizamiento, con respecto al tiempo. El diferenciador que se presenta a continuación es robusto con respecto a ruidos en la medición y exacto en ausencia de ellos.

2.2.1. Diferenciador Robusto y Exacto de Orden Arbitrario

Dada la función acotada $f(t)$ definida en el intervalo $[0, \infty)$, con características de ruido de medición desconocidas pero acotadas y señal base $f_0(t)$ igualmente desconocida, el Diferenciador Robusto y Exacto de Orden Arbitrario [1] se define

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= -\lambda_k \Lambda^{1/(k+1)} |z_0 - f(t)|^{k/(k+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1, \\
 \dot{z}_1 &= -\lambda_{k-1} \Lambda^{1/k} |z_1 - \dot{z}_0|^{(k-1)/k} \text{sign}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{k-1} &= -\lambda_1 \Lambda^{1/2} |z_{k-1} - \dot{z}_{k-2}|^{1/2} \text{sign}(z_{k-1} - \dot{z}_{k-2}) + z_k, \\
 \dot{z}_k &= -\lambda_0 \Lambda \text{sign}(z_k - \dot{z}_{k-1}),
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

se conoce de su k -ésima derivada temporal, la constante Lipschitz $\Lambda > 0$. Una posible elección de los parámetros para un diferenciador de quinto o menor orden $k \leq 5$, es con $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 5$ y $\lambda_5 = 8$.

Este diferenciador entrega la estimación de las derivadas sucesivas $z_0 = f(t)$, $z_1 = \dot{f}(t)$, \dots , $z_k = f^{(k)}(t)$, donde es claro que $f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(k-1)}(t)$ son funciones continuas y el término discontinuo aparece únicamente en $f^{(k)}(t)$.

Modelo Matemático del Helicóptero

3.1. Descripción de la Planta

El sistema a analizar es un helicóptero de tres grados de libertad de la marca Quanser [5], es subactuado debido a que cuenta con sólo dos entradas de control. Consiste en una base sobre la cual se encuentra montado un brazo. El brazo sostiene, en uno de sus extremos, el cuerpo del helicóptero y por el otro un contrapeso.



Figura 3.1: Helicóptero 3DoF.

El cuerpo del helicóptero consta de dos propulsores que controlan el vuelo, cada propulsor está formado por un motor de corriente directa marca Pittman 9234S004 con voltaje nominal $E = 12$ [V] y corriente de pico $i_p = 14.5$ [A], acoplado a una tercia de hélices de 20/15 cm (8/6"). La dinámica de los motores será despreciada para el diseño del controlador, por lo que se considerará que la fuerza de sustentación generada por

Nota 3.1 *El sentido de giro para cualquiera de los ángulos se rige por la regla de la mano derecha. En consecuencia, un giro en el sentido positivo del ángulo de inclinación genera un movimiento de desplazamiento en sentido negativo.*

El *espacio de trabajo* del helicóptero y la magnitud de las señales de control se resumen en la Tabla (3.1).

Variable	Valor	Unidades	Descripción
ε	$[-25, 25]$	Grados	Ángulo de Elevación
ρ	$[-90, 90]$	Grados	Ángulo de Inclinación
θ	$[-\infty, \infty]$	Grados	Ángulo de Desplazamiento
u_f	$[-15, 15]$	V	Voltaje del Motor Delantero
u_b	$[-15, 15]$	V	Voltaje del Motor Trasero

Tabla 3.1: Espacio de Trabajo y Señales de Control

El modelo matemático del Helicóptero 3DoF está basado en la Segunda Ley de Newton, considerando como vector de estados las posiciones y velocidades angulares en torno a los ejes coordenados propuestos

$$x = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \rho \\ \theta \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

con el vector de señales de control expresadas en voltaje

$$u_d = u_f - u_b, \quad (3.2)$$

$$u_s = u_f + u_b, \quad (3.3)$$

de esta forma se pueden diseñar leyes de control para dos subsistemas de una sola entrada. Las señales de control que se aplican físicamente al sistema simplemente se despejan de las ecuaciones (3.2) y (3.3), resultando

$$u_f = \frac{1}{2}(u_d + u_s),$$

$$u_b = \frac{1}{2}(u_d - u_s).$$

3.2.1. Dinámica de *Inclinación y Desplazamiento*

La dinámica de *inclinación* se produce cuando existe una diferencia entre la fuerza aportada por cada propulsor, esto es expresado en voltaje en la ecuación (3.2). Los momentos de fuerza que intervienen en torno al eje de inclinación son:

$$\tau_\rho = J_\rho \ddot{\rho} : \text{Momento de oposición a la inclinación del helicóptero.} \quad (3.4)$$

$$\tau_f = F_f l_h : \text{Momento generado por el motor delantero.} \quad (3.5)$$

$$\tau_b = F_b l_h : \text{Momento generado por el motor trasero.} \quad (3.6)$$

$$\tau_{pf} = g M_f l_h : \text{Momento debido a la masa del propulsor delantero.} \quad (3.7)$$

$$\tau_{pb} = g M_b l_h : \text{Momento debido a la masa del propulsor trasero.} \quad (3.8)$$

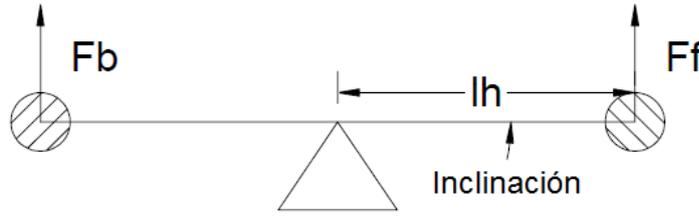


Figura 3.3: Dinámica de Inclinación.

De la Figura (3.3), la ecuación de equilibrio cumple con

$$\tau_f - \tau_b + \tau_{pb} = \tau_\rho + \tau_{pf}, \quad (3.9)$$

sustituyendo las expresiones (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) en la ecuación (3.9):

$$F_f l_h - F_b l_h + g M_b l_h = J_\rho \ddot{\rho} + g M_f l_h,$$

la masa de los propulsores es la misma $M_f = M_b$ y la fuerza de los motores es proporcional al voltaje ¹

$$K_f l_h u_d = J_\rho \ddot{\rho},$$

considerando a la señal w_d como perturbación acoplada al canal de control, se tiene

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{J_\rho} (K_f l_h (u_d + w_d)). \quad (3.10)$$

¹Mediante la constante de proporcionalidad $K_f = 0.1188 \frac{N}{V}$

La dinámica de *desplazamiento* corresponde al grado de libertad subactuado, ya que depende del ángulo de *inclinación*. La componente horizontal de la fuerza producida por los propulsores F_g , cuando el ángulo de inclinación es distinto de cero, empuja al cuerpo del helicóptero y lo hace girar en torno a su base.

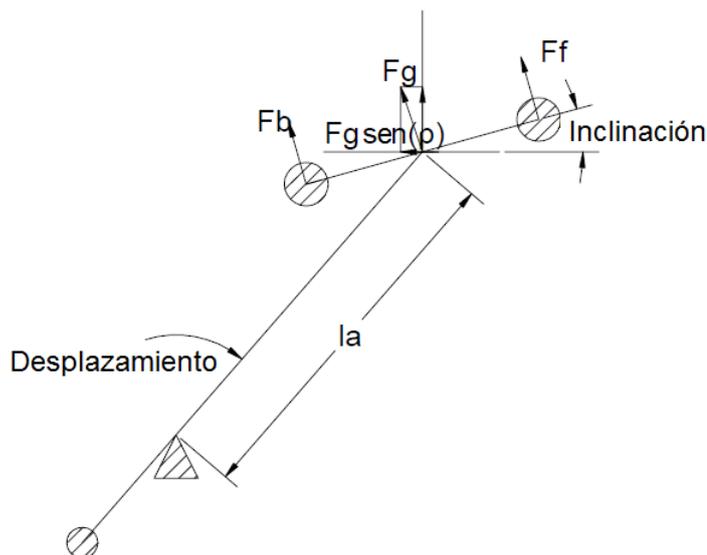


Figura 3.4: Dinámica de Desplazamiento.

Los momentos de fuerza que intervienen de acuerdo con la Figura (3.4) son

$$\tau_{\theta} = J_{\theta} \ddot{\theta} : \text{Momento de oposición al desplazamiento.} \quad (3.11)$$

$$\tau_{g\rho} = F_g l_a \text{sen}(\rho) : \text{Momento generado por la inclinación del helicóptero.} \quad (3.12)$$

y la ecuación de equilibrio es

$$\tau_{\theta} = -\tau_{g\rho}, \quad (3.13)$$

se considerará que la fuerza F_g es únicamente la requerida para mantener en vuelo al helicóptero¹. Sustituyendo las expresiones (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.13):

$$J_{\theta} \ddot{\theta} = -F_g l_a \text{sen}(\rho),$$

entonces

$$\ddot{\theta} = \frac{-1}{J_{\theta}} (K_p l_a \text{sen}(\rho)). \quad (3.14)$$

¹Es constante e igual a $K_p = 0.686 [N]$

3. MODELO MATEMÁTICO DEL HELICÓPTERO

El sistema dinámico de inclinación y desplazamiento (denotado por $\dot{x}_{i,d}$), de acuerdo al vector de estados (3.1) y a las ecuaciones (3.10 y (3.14) es:

$$\dot{x}_{i,d} = \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \frac{K_f l_h}{J_\rho} (u_d + w_d) \\ \dot{\theta} \\ -\frac{K_p l_a}{J_\theta} \text{sen}(\rho) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2.2. Dinámica de *Elevación*

La señal de control capaz de modificar la elevación del helicóptero se logra cuando ambos motores giran con la misma intensidad y sentido, o con la componente vertical de la suma algebraica (3.3). Los momentos de fuerza que intervienen se describen a continuación:

$$\tau_\varepsilon = J_\varepsilon \ddot{\varepsilon} : \text{Momento de oposición a la elevación.} \quad (3.16)$$

$$\tau_u = F_m l_a : \text{Momento generado por la fuerza de ambos motores.} \quad (3.17)$$

$$\tau_w = g M_w l_w : \text{Momento debido al contrapeso.} \quad (3.18)$$

$$\tau_h = g M_h l_a : \text{Momento debido al peso del helicóptero.} \quad (3.19)$$

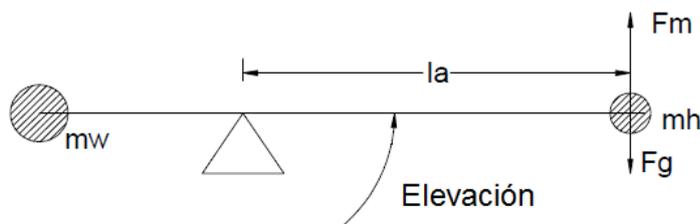


Figura 3.5: Dinámica de Elevación.

De la Figura (3.5), la ecuación de equilibrio en torno al eje de elevación es

$$\tau_\varepsilon + \tau_h = \tau_w + \tau_u, \quad (3.20)$$

sustituyendo las expresiones (3.16), (3.17), (3.18) y (3.19) en la ecuación (3.20), además teniendo en cuenta que la fuerza de sustentación F_m generada por los motores, es proporcional al voltaje aplicado¹:

$$J_\varepsilon \ddot{\varepsilon} + g M_h l_a = g M_w l_w + K_f l_a u_s,$$

¹Mediante la constante de proporcionalidad $K_f = 0.1188 \frac{N}{V}$

considerando a la señal w_s como perturbación acoplada al canal de control, se tiene

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{J_\varepsilon} (g(M_w l_w - M_h l_a) + K_f l_a (u_s + w_s)). \quad (3.21)$$

El sistema dinámico de elevación (denotado por \dot{x}_e), de acuerdo al vector de estados (3.1) y a la ecuación (3.21) es:

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \frac{1}{J_\varepsilon} (g(M_w l_w - M_h l_a) + K_f l_a (u_s + w_s)) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

3.3. Parámetros de la Planta

Los parámetros constantes que describen el modelo del helicóptero se muestran en la Tabla 3.2. La información fue tomada del manual de usuario proporcionado por el fabricante Quanser [5].

Símbolo	Valor	Unidad	Descripción
Jp	0.0364	kgm^2	Momento de inercia sobre el eje de inclinación
Je	0.91	kgm^2	Momento de inercia sobre el eje de elevación
Jt	0.91	kgm^2	Momento de inercia sobre el eje de desplazamiento
Kp	0.686	N	Fuerza requerida para mantener el helicóptero en vuelo
Kf	0.5	$\frac{N}{V}$	Constante de fuerza-empuje del propulsor
Mh	1.15	kg	Masa del helicóptero (considerando ambos propulsores)
Mw	1.87	kg	Masa del contrapeso
Mf	0.713	kg	Masa del propulsor delantero
Mb	0.713	kg	Masa del propulsor trasero
la	0.66	m	Distancia entre el eje de desplazamiento y el cuerpo
lh	0.177	m	Distancia entre el eje de inclinación y cada propulsor
lw	0.47	m	Distancia entre el eje de desplazamiento y el contrapeso
g	9.81	$\frac{m}{s^2}$	Constante gravitacional

Tabla 3.2: Parámetros Constantes del Modelo

3.4. Punto de Operación

Un punto de operación denotado por $PO = (X, U)$, se define como aquel valor constante:

$$PO = \begin{cases} X = (X_\varepsilon, X_\rho, X_\theta, X_{\dot{\varepsilon}}, X_{\dot{\rho}}, X_{\dot{\theta}}) \\ U = (U_s, U_d), \end{cases} \quad (3.23)$$

para el cual si

$$u(t) = U \quad \text{y} \quad x(t_0) = X,$$

entonces $x(t) = X$; para todo $t \geq t_0$.

A partir de la igualación con cero de las ecuaciones que forman los sistemas dinámicos (3.15) y (3.22), se obtienen las condiciones de punto de operación:

$$\dot{\varepsilon} = 0 = X_{\dot{\varepsilon}}. \quad (3.24)$$

$$\dot{\rho} = 0 = X_{\dot{\rho}}. \quad (3.25)$$

$$\dot{\theta} = 0 = X_{\dot{\theta}}. \quad (3.26)$$

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{J_\varepsilon} (g(M_w l_w - M_h l_a) + K_f l_a U_s) = 0,$$

$$U_s = \frac{g(M_h l_a - M_w l_w)}{K_f l_a}. \quad (3.27)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{J_\rho} (K_f l_h U_d) = 0,$$

$$U_d = 0. \quad (3.28)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_\theta} (K_p l_a \text{sen}(X_\rho)) = 0,$$

$$X_\rho = \arcsen(0) = 0. \quad (3.29)$$

Finalmente de las expresiones (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29), el conjunto de puntos de operación del sistema es

$$PO = \begin{cases} X = (\varepsilon, 0, \theta, 0, 0, 0) \\ U = \left(\frac{g(M_h l_a - M_w l_w)}{K_f l_a}, 0 \right). \end{cases} \quad (3.30)$$

Del análisis anterior se concluye que:

- Cualquier valor de elevación ε dentro del espacio de trabajo del helicóptero es un punto de operación, además es distinto para cada valor de la señal de control u_s de la ecuación (3.3), siempre que ésta contrarreste los efectos gravitatorios en torno al eje de elevación.
- Cualquier valor de desplazamiento θ es un punto de operación, si la entrada de control u_d de la ecuación (3.2) es igual con cero y en consecuencia el ángulo de inclinación ρ es nulo.
- En un punto de operación, las velocidades angulares $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\rho}$ y $\dot{\theta}$ son cero.

3.5. Linealización del Modelo

El proceso de linealización busca aproximar un sistema no lineal mediante un sistema lineal alrededor a un punto de operación $PO = (X, U)$. El objetivo es obtener un modelo más sencillo que permita aplicar técnicas de control lineal. Una forma de linealizar es utilizando la expansión en Serie de Taylor:

$$f(x, u) = f(X, U) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x_1} \right|_{(X, U)} (x_1 - X_1) + \dots + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x_n} \right|_{(X, U)} (x_n - X_n) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u_1} \right|_{(X, U)} (u_1 - U_1) + \dots + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u_m} \right|_{(X, U)} (u_m - U_m) + T.O.S.$$

Despreciando los términos de orden superior (T.O.S) se obtiene una aproximación lineal para una región “pequeña” alrededor de un punto de operación. Si el sistema está conformado por n ecuaciones diferenciales no lineales, su representación en forma matricial lineal es:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_A \Big|_{(X, U)} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}}_B \Big|_{(X, U)} u, \quad (3.31)$$

donde las matrices A y B son aproximaciones lineales.

3. MODELO MATEMÁTICO DEL HELICÓPTERO

Al linealizar los subsistemas (3.15) y (3.22) con respecto a (3.30), mediante los Jacobianos (3.31), se tiene que para variaciones pequeñas en el ángulo de inclinación ρ :

▪ **Inclinación y Desplazamiento**

$$\dot{x}_{i,d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-l_a K_p}{J_\theta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \dot{\rho} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_h K_f}{J_\rho} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u_d + w_d] \quad (3.32)$$

y despreciando los efectos gravitatorios sobre la barra, el contrapeso y el cuerpo del helicóptero:

▪ **Elevación**

$$\dot{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_a K_f}{J_\varepsilon} \end{bmatrix} [u_s + w_s]. \quad (3.33)$$

El modelo lineal expresado en forma general es

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-l_a K_p}{J_\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \rho \\ \theta \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_a K_f}{J_\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{l_h K_f}{J_\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s + w_s \\ u_d + w_d \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

3.6. Dinámica del Error

El objetivo de control es llevar al sistema a posiciones angulares deseadas ε_d y θ_d , es decir a distintos puntos de operación (3.30). Para ello se deben expresar los sistemas (3.32) y (3.33) en términos del error de regulación o seguimiento, según sea el caso.

3.6.1. Error de Inclinación y Error de Desplazamiento

Como la dinámica subactuada corresponde al *desplazamiento*, debe controlarse el ángulo de inclinación ρ de tal forma que lleve al error de desplazamiento $e_\theta \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Partiendo de la señal de error de desplazamiento

$$e_\theta(t) = \theta(t) - r_\theta, \quad (3.35)$$

se calculará en línea una señal referencia que deberá seguir el ángulo de inclinación, con un algoritmo PID de la forma

$$r_{c\rho} = k_p e_\theta + k_d \dot{e}_\theta + k_i \int_0^t e_\theta dt, \quad (3.36)$$

en donde los argumentos (t) serán omitidos por simplicidad. La ventaja de utilizar la referencia (3.36), es que buscará restringir el ángulo de inclinación al intervalo $\rho \in [-25^\circ, 25^\circ]$ y así evitar perder elevación, cuando el helicóptero se desplace.

Luego se plantea un sistema en función del error de inclinación $e_\rho(t) = \rho(t) - r_{c\rho}(t)$, para seguir la referencia antes mencionada. Este sistema tiene por variables de estado:

$$e_\rho = \begin{bmatrix} e_{\rho_1} \\ e_{\rho_2} \\ e_{\rho_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t (\rho - r_{c\rho}) dt \\ \rho - r_{c\rho} \\ \dot{\rho} - \dot{r}_{c\rho} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

cuya dinámica es

$$\dot{e}_\rho = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\rho} e_\rho + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_h K_f}{J_\rho} \end{bmatrix}}_{B_\rho} (u_d + w_d) - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{perturbación}} \ddot{r}_{c\rho}. \quad (3.38)$$

Suponiendo que el error de inclinación $e_\rho \rightarrow 0$ rápidamente, la dinámica de desplazamiento toma la forma

$$\ddot{\theta} = \frac{-1}{J_\theta} K_p l_a r_{c\rho},$$

que tiene la función de transferencia

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{\frac{K_p l_a k_p}{J_\theta} s + \frac{K_p l_a k_i}{J_\theta}}{s^3 + \frac{K_p l_a k_d}{J_\theta} s^2 + \frac{K_p l_a k_p}{J_\theta} s + \frac{K_p l_a k_i}{J_\theta}},$$

si la ganancia integral es pequeña, el comportamiento será el de un sistema de Segundo Orden. Para un tiempo de pico $t_p = 7$ [s] y factor de amortiguamiento $\zeta = 0.707$:

$$\begin{aligned} k_i &= 0.0976, \\ w_n &= \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.634, \\ k_d &= \frac{2\zeta w_n J_\theta}{K_p l_a} = 1.804, \\ k_p &= \frac{J_\theta w_n^2}{K_p l_a} = 0.809. \end{aligned}$$

3.6.2. Error de Elevación

De manera similar, se propone un sistema en función del error de elevación $e_\varepsilon(t) = \varepsilon(t) - r_\varepsilon$, con el vector de estados:

$$e_\varepsilon = \begin{bmatrix} e_{\varepsilon_1} \\ e_{\varepsilon_2} \\ e_{\varepsilon_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t (\varepsilon - r_\varepsilon) dt \\ \varepsilon - r_\varepsilon \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

cuya dinámica de regulación es

$$\dot{e}_\varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\varepsilon} e_\varepsilon + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_a K_f}{J_\varepsilon} \end{bmatrix}}_{B_\varepsilon} (u_s + w_s). \quad (3.40)$$

Los subsistemas dinámicos (3.38) y (3.40) conforman el modelo matemático del helicóptero en función del error, a partir de ellos se diseñarán superficies de deslizamiento y se obtendrán leyes de control para alcanzar puntos de operación deseados. En consecuencia debe comprobarse la controlabilidad de ambos subsistemas.

3.7. Análisis de Controlabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 , si se puede llevar de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado $x(t_1)$, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo determinado [24].

El rango de la matriz de controlabilidad (3.41) nos permite saber si el sistema es de estado completamente controlable.

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{(n-1)}B]. \quad (3.41)$$

Evaluando los subsistemas (3.38) y (3.40) en la expresión (3.41), las matrices de controlabilidad son respectivamente:

$$P_\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 0.577 & 0 \\ 0.577 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.086 \\ 0 & 0.086 & 0 \\ 0.086 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

el rango de las matrices (3.42) y (3.43) es completo, por tanto los subsistemas de las ecuaciones (3.38) y (3.40) son de estado completamente controlable.

En el esquema de control por realimentación de estados, se requiere del conocimiento en tiempo real de las posiciones y velocidades angulares del helicóptero. Además el modelo matemático contempla la señal de referencia para el ángulo de inclinación, así como su velocidad deseada.

3.8. Estimación de la Velocidad del Helicóptero

En el prototipo experimental sobre el que se realizarán las pruebas únicamente es posible medir la posición, debido a esto es necesario utilizar algoritmos de diferenciación para poder tener todo el estado disponible. A continuación se presenta la implementación del Diferenciador Robusto y Exacto de Tercer Orden, obtenido con la forma generalizada de la expresión (2.22)

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= -3\Lambda^{1/4}|z_0 - f(t)|^{3/4} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1, \\
 \dot{z}_1 &= -2\Lambda^{1/3}|z_1 - \dot{z}_0|^{2/3} \text{sign}(z_1 - \dot{z}_0) + z_2, \\
 \dot{z}_2 &= -1.5\Lambda^{1/2}|z_2 - \dot{z}_1|^{1/2} \text{sign}(z_2 - \dot{z}_1) + z_3, \\
 \dot{z}_3 &= -1.1\Lambda \text{sign}(z_3 - \dot{z}_2),
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde la función $f(t)$ representa las posiciones del helicóptero, es decir, $\varepsilon(t)$, $\rho(t)$ y $\theta(t)$, además de la señal de referencia calculada para el ángulo de inclinación $r_{c\rho}(t)$; mientras que en la variable z_1 se estiman las velocidades. Las constantes Lipschitz fueron sintonizadas en forma experimental y se muestran en la Tabla 3.3.

	$\dot{\varepsilon}$	$\dot{\rho}$	$\dot{\theta}$	$\dot{r}_{c\rho}$
Λ	50	150	50	30

Tabla 3.3: Ganancias de los Diferenciadores

Con el algoritmo (3.44) es posible estimar las velocidades del helicóptero en forma robusta con respecto a ruidos en la medición y produciendo señales continuas. También se puede tener una idea clara de la derivada temporal de las perturbaciones, es decir, las cotas $\|\dot{w}_d\|$, $\|\dot{w}_s\|$ y $\|\ddot{r}_{c\rho}\|$.

Diseño de Superficies de Deslizamiento

En este capítulo se ponen en práctica los métodos de diseño de superficies de deslizamiento de grado relativo $r \geq 1$,

- Ubicación de Polos.
- LQ Singular.

Mediante simulaciones, se demuestra el desempeño en lazo cerrado de la planta con el Controlador por Modos Deslizantes de Orden Superior. Se espera convergencia exponencial de los estados al punto de operación, a pesar de las incertidumbres y dinámicas no consideradas en el modelo del helicóptero en función del error:

- **Error de Inclinación**

$$\dot{e}_\rho = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\rho} e_\rho + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.577 \end{bmatrix}}_{B_\rho} (u_d + w_d) - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{perturbación}} \ddot{r}_{c\rho}. \quad (4.1)$$

- **Error de Elevación**

$$\dot{e}_\varepsilon = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_\varepsilon} e_\varepsilon + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.086 \end{bmatrix}}_{B_\varepsilon} (u_s + w_s). \quad (4.2)$$

Las ganancias de los algoritmos se calcularon considerando que las perturbaciones por software, entran en el canal de voltaje de cada motor

$$\begin{aligned} w_f &= 0.5 + 0.2\text{sen}(t) + 0.2\text{cos}(2t) \\ w_b &= -0.5 + 0.2\text{cos}(t) + 0.2\text{sen}(2t), \end{aligned}$$

las señales que perturban a los sistemas de las ecuaciones (4.1) y (4.2), cumplen con que su derivada respecto al tiempo es acotada

$$\begin{aligned} w_d = w_f - w_b &\Rightarrow \|\dot{w}_d\| = 0.8 \\ w_s = w_f + w_b &\Rightarrow \|\dot{w}_s\| = 0.8, \end{aligned}$$

una posible interpretación de las perturbaciones por software es suponer que una constante del modelo matemático varía con el tiempo en cierta proporción.

- La perturbación que afecta al sistema dinámico en función del *error de inclinación* es w_d , la cual es acoplada a la señal de control y dada su cota máxima produce un par en torno al eje de inclinación

$$\|\tau_{\rho_{per}}\|_{\text{máx}} = K_f l_h \|\dot{w}_d\| = 0.0168 [Nm], \quad (4.3)$$

con el fin ver más claramente el efecto de la perturbación, se puede interpretar que dicho par es generado por una masa δ_m variante con el tiempo, que situada a la distancia l_h del eje de inclinación cumple con la igualdad:

$$g l_h \delta_m = \|\tau_{\rho_{per}}\|_{\text{máx}}$$

con variación máxima en gramos de

$$\delta_m = \frac{0.0168 [Nm]}{g l_h} = 9.7 [g].$$

Teniendo en cuenta que a la distancia l_h del eje de inclinación se encuentran los propulsores del helicóptero, se puede suponer que debido a la perturbación su masa varía con cota máxima

$$M_f = M_b = 713 \pm 9.7 [g].$$

- La perturbación que afecta al sistema dinámico en función del *error de elevación* es w_s , es acoplada a la señal de control y dada su cota máxima, produce el par en torno al eje de elevación:

$$\|\tau_{\varepsilon_{per}}\|_{\text{máx}} = K_f l_a \|\dot{w}_s\| = 0.0627 [Nm], \quad (4.4)$$

podemos suponer que dicho par es generado por una masa δ_w variante con el tiempo, que a la distancia l_w del eje de elevación cumple con la igualdad:

$$g l_w \delta_w = \|\tau_{\varepsilon_{per}}\|_{\text{máx}},$$

con variación máxima en gramos de

$$\delta_w = \frac{0.0627 [Nm]}{g l_w} = 13.6 [g].$$

Teniendo en cuenta que a la distancia l_w del eje de elevación se encuentra el contrapeso M_w , la perturbación por software representa una variación en el parámetro con cota máxima

$$M_w = 1870 \pm 13.6 [g].$$

Cabe señalar que la interpretación anterior de las perturbaciones, es para dar una idea clara de la magnitud de éstas.

4.1. Ubicación de Polos

Como se mencionó anteriormente, con este método se pueden diseñar superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario, utilizando una fórmula que permite ubicar los polos de lazo cerrado de la dinámica de la superficie, en la intersección de los planos $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$. Si el polinomio deseado es Hurwitz nos aseguramos de que los estados convergen exponencialmente a cero cuando $\sigma \equiv 0$.

Con ayuda de este método se diseñarán superficies de deslizamiento de grado relativo $r = 1$ y $r = 2$, para implementar los controladores STA y 3-STA sobre el helicóptero, mostrando en simulación el desempeño del sistema cuando se incrementa de orden del controlador.

4.1.1. Grado Relativo Uno

El controlador Súper-Twisting es de segundo orden y está diseñado para ser aplicado en sistemas con grado relativo $r = 1$, obteniendo como ventaja principal la atenuación del *chattering* mediante una señal de control continua. Para implementarlo se necesita diseñar una superficie en cuya primer derivada temporal aparezca el control:

$$\dot{\sigma} = h(\sigma, t) + g(\sigma, t)u. \quad (4.5)$$

A continuación se diseñarán superficies de deslizamiento de la forma (4.5) para los subsistemas dinámicos (4.1) y (4.2), que conforman el modelo del helicóptero en función del error.

Superficie: Error de Inclinación

El sistema lineal en función del *error de inclinación* (4.1) tiene tres polos en el origen

$$\det(sI - A_\rho) = s^3,$$

para que la salida virtual sea de grado relativo $r = 1$, el polinomio deseado es $\gamma_1(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$. Entonces la función de transferencia toma la forma

$$G_\rho(s) = C_1(sI - A_\rho)^{-1}B_\rho = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3},$$

donde la matriz de ganancias constante C_1 , se obtiene con la fórmula de Ackermann-Utkin (2.4):

$$C_1 = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 0.577 & 0 \\ 0.577 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} [6I + 5A_\rho + A_\rho^2] = [10.386 \ 8.655 \ 1.731],$$

la variable de deslizamiento como combinación lineal de los estados es

$$\sigma_\rho = C_1 e_\rho,$$

entonces la dinámica de orden reducido en el modo deslizante

$$\sigma_\rho = 10.386e_{\rho_1} + 8.655e_{\rho_2} + 1.731e_{\rho_3} = 0,$$

↓

$$e_{\rho_3} = -(6e_{\rho_1} + 5e_{\rho_2}),$$

↓

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{\rho_1} \\ \dot{e}_{\rho_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\rho_1} \\ e_{\rho_2} \end{bmatrix},$$

es de Segundo Orden con respuesta sobreamortiguada.

Con la definición de Control Equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 10.386e_{\rho_1} + 8.655e_{\rho_2} + 1.731e_{\rho_3}, \\ \dot{\sigma}_\rho &= \underbrace{10.386e_{\rho_2} + 8.655e_{\rho_3}}_{-u_{eqn1}} + (1.731) \underbrace{(0.577)}_{\frac{K_f l_h}{J_p}} (u_d + w_d), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal* para compensar la dinámica conocida

$$u_{eqn1} = -(10.386e_{\rho_2} + 8.655e_{\rho_3}),$$

la señal de control queda definida por

$$u_d = u_{eqn1} + u_{STA_1}.$$

el término u_{STA_1} se diseña con el algoritmo Super-Twisting:

$$\begin{aligned} u_{STA_1} &= -k_1|\sigma_\rho|^{1/2} \text{sign}(\sigma_\rho) + v_1, \\ \dot{v}_1 &= -k_2 \text{sign}(\sigma_\rho), \end{aligned} \quad (4.6)$$

las ganancias k_1 y k_2 de la ecuación (4.6) se calculan

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.5\sqrt{\Delta_1}, \\ k_2 &= 1.1\Delta_1, \end{aligned}$$

donde $\|\dot{w}_d(t)\| + \|\ddot{r}_{c\rho}\| \leq \Delta_1$, de esta forma $\sigma_\rho = \dot{\sigma}_\rho = 0$ en tiempo finito.

Superficie: Error de Elevación

El sistema lineal en función del *error de elevación* (4.2) tiene tres polos en el origen

$$\det(sI - A_\varepsilon) = s^3,$$

para diseñar una superficie de grado relativo $r = 1$ el polinomio deseado es $\gamma(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$, dando lugar a la función de transferencia

$$G_\varepsilon(s) = C_2(sI - A_\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3},$$

la matriz C_2 se obtiene con la fórmula de Ackermann-Utkin (2.4):

$$C_2 = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.086 \\ 0 & 0.086 & 0 \\ 0.086 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} [6I + 5A_\rho + A_\rho^2] = [69.635 \ 58.029 \ 11.606],$$

la variable de deslizamiento diseñada es

$$\sigma_\varepsilon = C_2 e_\varepsilon,$$

4. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

entonces la dinámica de orden reducido en el modo deslizante

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon &= 69.635e_{\varepsilon_1} + 58.029e_{\varepsilon_2} + 11.606e_{\varepsilon_3} = 0, \\ &\quad \downarrow \\ e_{\varepsilon_3} &= -(6e_{\varepsilon_1} + 5e_{\varepsilon_2}), \\ &\quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{e}_{\varepsilon_1} \\ \dot{e}_{\varepsilon_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\varepsilon_1} \\ e_{\varepsilon_2} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

corresponde con un sistema de Segundo Orden con respuesta sobreamortiguada.

Con la definición de Control Equivalente

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon &= = 69.635e_{\varepsilon_1} + 58.029e_{\varepsilon_2} + 11.606e_{\varepsilon_3}, \\ \dot{\sigma}_\varepsilon &= = \underbrace{69.635e_{\varepsilon_2} + 58.029e_{\varepsilon_3}}_{-u_{eqn2}} + (11.606) \underbrace{(0.086)}_{\frac{K_f l_a}{J_e}} (u_s + w_s),\end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal* para compensar la dinámica conocida

$$u_{eqn2} = -(69.635e_{\varepsilon_2} + 58.029e_{\varepsilon_3}),$$

la señal de control queda definida por

$$u_s = u_{eqn2} + u_{STA_2},$$

el término u_{STA_1} se diseña con el algoritmo Super-Twisting:

$$\begin{aligned}u_{STA_2} &= -k_3 |\sigma_\varepsilon|^{1/2} \text{sign}(\sigma_\varepsilon) + v_2, \\ \dot{v}_2 &= -k_4 \text{sign}(\sigma_\varepsilon),\end{aligned}\tag{4.7}$$

las ganancias k_3 y k_4 del algoritmo (4.7) se calculan

$$\begin{aligned}k_3 &= 1.5\sqrt{\Delta_2}, \\ k_4 &= 1.1\Delta_2,\end{aligned}$$

donde $\|\dot{w}_s(t)\| \leq L_2$ es la cota de la derivada de las perturbaciones acopladas, de este modo $\sigma_\varepsilon = \dot{\sigma}_\varepsilon = 0$ en tiempo finito.

Simulaciones

El objetivo del controlador es llevar al helicóptero a las posiciones angulares deseadas $\varepsilon_d = 5^\circ$ y $\theta_d = 60^\circ$, esta última al tratarse de la dinámica subactuada, mediante una señal de referencia calculada en línea. Las simulaciones se obtuvieron con un paso de muestreo de $\tau = 1$ [ms] y las condiciones iniciales:

$$X_0 = (-1^\circ, 0^\circ, 5^\circ, 0, 0, 0),$$

de acuerdo con el vector de estados de la ecuación (3.1). En $t = 5$ [s] la elevación deseada se modifica a $\varepsilon_d = 5^\circ$, mientras que en $t = 10$ [s] el desplazamiento deseado es $\theta_d = 60^\circ$.

Las ganancias de los controladores (4.6) y (4.7) se calcularon considerando la cota máxima de la derivada temporal de las perturbaciones. Para estimar la derivada de las superficies se utilizaron Diferenciadores Robustos y Exactos de tercer orden (3.44) con sus respectivas cotas Λ_ρ y Λ_ε , ver Tabla 4.1.

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 5 &\Rightarrow \Delta_1 \geq \|\dot{w}_d\| + \|\ddot{r}_{c\rho}\|, \\ \Delta_2 = 6 &\Rightarrow \Delta_2 \geq \|\dot{w}_s\|. \end{aligned}$$

La Figura 4.1 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas,

Tabla 4.1: Ganancias STA Ubicación de Polos

Inclinación	Elevación
$k_1 = 3.354$	$k_3 = 3.674$
$k_2 = 5.5$	$k_4 = 6.6$
$\Lambda_\rho = 30$	$\Lambda_\varepsilon = 30$

así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de inclinación. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 4.2, las cuales son cero una vez que se alcanza el punto de operación.

En las Figuras 4.3 y 4.4 se muestra el comportamiento de las variables de deslizamiento, en ambos casos hay convergencia a una vecindad en torno a cero, además de que presentan oscilaciones de alta frecuencia y baja amplitud.

4. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

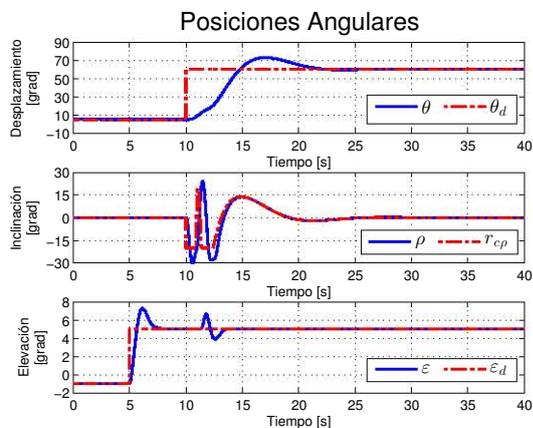


Figura 4.1: Posiciones Angulares.

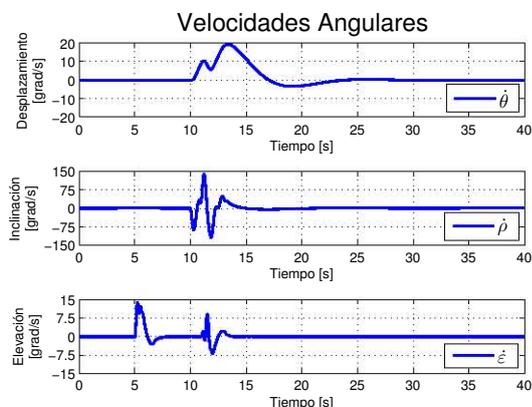


Figura 4.2: Velocidades Angulares.

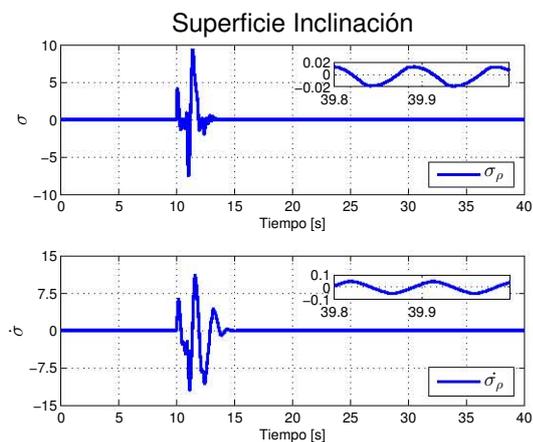


Figura 4.3: Superficie Inclinación.

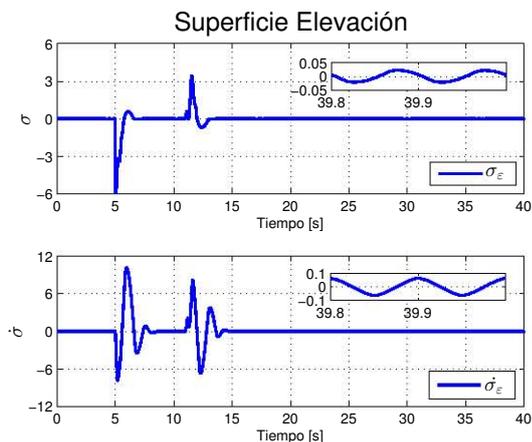


Figura 4.4: Superficie Elevación.

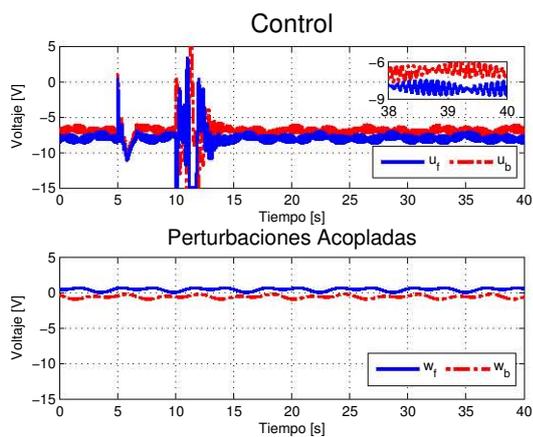


Figura 4.5: Señales de Control y Perturbaciones.

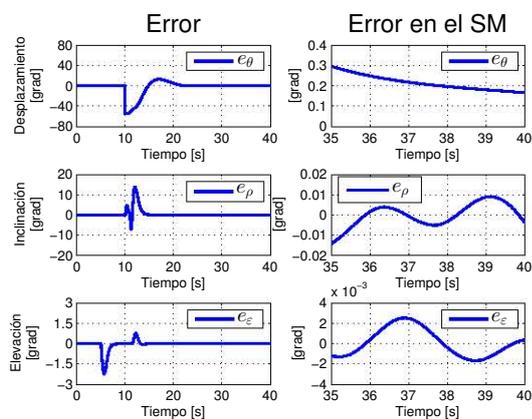


Figura 4.6: Errores.

Las señales de control expresadas en voltaje se muestran en la Figura 4.5, son funciones continuas y están definidas en el intervalo $[-15, 15]$ [V]; en el modo deslizante oscilan con amplitud de 1 [V] y frecuencia de 12 [Hz], aproximadamente.

Las señales de error de la Figura 4.6 convergen a cero en forma exponencial, el *desplazamiento* es el que presenta mayor magnitud en el error debido a que su dinámica es controlada por un algoritmo PID. La variación del ángulo de inclinación modificó la elevación del sistema, el sobrepaso en los ángulos de elevación y desplazamiento fue aceptable.

Ahora se diseñarán superficies de deslizamiento de grado relativo $r = 2$ para mostrar el desempeño del sistema con el aumento de orden del controlador.

4.1.2. Grado Relativo Dos

El controlador Super-Twisting de Tercer Orden, puede ser aplicado a sistemas con grado relativo $r = 2$, obteniendo una señal de control continuo y atenuando el efecto del *chattering*. Para implementarlo se necesita diseñar una superficie en cuya segunda derivada temporal aparezca el control:

$$\ddot{\sigma} = h(\sigma, \dot{\sigma}, t) + g(\sigma, \dot{\sigma}, t)u. \quad (4.8)$$

A continuación se diseñarán superficies de deslizamiento de la forma (4.8) para los subsistemas dinámicos (4.1) y (4.2), que conforman el modelo del helicóptero en función del error.

Superficie: Error de Inclinación

Como sabemos el sistema de la ecuación (4.1) tiene tres polos en el origen, para que la salida virtual sea de grado relativo $r = 2$, el polinomio deseado es $\gamma(\lambda) = \lambda + 3$. Entonces la función de transferencia toma la forma

$$G_\rho(s) = C_1(sI - A_\rho)^{-1}B_\rho = \frac{s + 3}{s^3},$$

donde la matriz de ganancias constante C_1 , se obtiene con la fórmula de Ackermann-Utkin (2.4):

$$C_1 = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.577 \\ 0 & 0.577 & 0 \\ 0.577 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} [6I + A_\rho] = [5.193 \ 1.731 \ 0],$$

la variable de deslizamiento para el sistema dinámico del *error de inclinación* es

$$\sigma_\rho = C_1 e_\rho,$$

cuya dinámica de orden reducido en el modo deslizante

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 5.193e_{\rho_1} + 1.731e_{\rho_2} + 0e_{\rho_3} = 0, \\ &\Downarrow \\ e_{\rho_2} &= -3e_{\rho_1}, \\ &\Downarrow \\ \dot{e}_{\rho_1} &= -3e_{\rho_1}, \end{aligned}$$

da lugar a un sistema de Primer Orden.

Con la definición de Control Equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= 5.193e_{\rho_1} + 1.731e_{\rho_2} + 0e_{\rho_3}, \\ \dot{\sigma}_\rho &= 5.193e_{\rho_2} + 1.731e_{\rho_3}, \\ \ddot{\sigma}_\rho &= \underbrace{5.193e_{\rho_3}}_{-u_{eqn1}} + (1.731) \underbrace{(0.577)}_{\frac{K_f l_h}{J_p}} (u_d + w_d), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal* para compensar la dinámica conocida

$$u_{eqn1} = -5.193e_{\rho_3},$$

la señal de control queda definida por

$$u_d = u_{eqn1} + u_{3STA_1}, \quad (4.9)$$

el término u_{3STA_1} se diseña con el algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

$$\begin{aligned} u_{3STA_1} &= -k_1 |\phi|^{1/2} \text{sign}(\phi) + \Gamma_1, \\ \dot{\Gamma}_1 &= -k_3 \text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde

$$\phi = \dot{\sigma}_\rho + k_2 |\sigma_\rho|^{2/3} \text{sign}(\sigma_\rho),$$

las ganancias k_1 , k_2 y k_3 fueron seleccionadas de tal forma que $\sigma_\rho = \dot{\sigma}_\rho = \ddot{\sigma}_\rho = 0$ en tiempo finito.

Superficie: Error de Elevación

El sistema (4.2) tiene tres polos en el origen, para que la salida virtual sea de grado relativo $r = 2$, el polinomio deseado es $\gamma(\lambda) = \lambda + 6$. Entonces la función de transferencia es

$$G_\varepsilon(s) = C_2(sI - A_\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon = \frac{s + 6}{s^3},$$

donde la matriz de ganancias constante C_2 , se obtiene con la fórmula de Ackermann-Utkin (2.4):

$$C_2 = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.086 \\ 0 & 0.086 & 0 \\ 0.086 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} (6I + A_\varepsilon) = [69.635 \ 11.606 \ 0],$$

la variable de deslizamiento para el sistema dinámico del *error de elevación* es

$$\sigma_\varepsilon = C_2 e_\varepsilon,$$

cuya dinámica de orden reducido en el modo deslizante

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon &= 69.635e_{\varepsilon_1} + 11.606e_{\varepsilon_2} + 0e_{\varepsilon_3} = 0, \\ &\Downarrow \\ e_{\varepsilon_2} &= -6e_{\varepsilon_1}, \\ &\Downarrow \\ \dot{e}_{\varepsilon_1} &= -6e_{\varepsilon_1}, \end{aligned}$$

da lugar a un sistema de Primer Orden.

Con la definición de Control Equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon &= 69.635e_{\varepsilon_0} + 11.606e_{\varepsilon_1} + 0e_{\varepsilon_2}, \\ \dot{\sigma}_\varepsilon &= 69.635e_{\varepsilon_1} + 11.606e_{\varepsilon_2}, \\ \ddot{\sigma}_\varepsilon &= \underbrace{69.635e_{\varepsilon_2}}_{-u_{eqn2}} + (11.606) \underbrace{(0.086)}_{\frac{K_f l_a}{J_e}} (u_s + w_s), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal* para compensar la dinámica conocida

$$u_{eqn2} = -69.635e_{\varepsilon_2},$$

la señal de control queda definida por

$$u_s = u_{eqn2} + u_{3STA_2},$$

4. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

el término u_{3STA_2} se diseña con el algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

$$\begin{aligned} u_{3STA_2} &= -k_4|\phi|^{1/2} \text{sign}(\phi) + \Gamma_2, \\ \Gamma_2 &= -k_6 \text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde

$$\phi = \dot{\sigma}_\varepsilon + k_5|\sigma_\varepsilon|^{2/3} \text{sign}(\sigma_\varepsilon),$$

las ganancias k_4 , k_5 y k_6 fueron seleccionadas de tal forma que $\sigma_\varepsilon = \dot{\sigma}_\varepsilon = \ddot{\sigma}_\varepsilon = 0$ en tiempo finito.

Simulaciones

Utilizando el mismo escenario de simulación, las ganancias de los controladores (4.10) y (4.11) se eligieron de tal modo que el sistema presentó un buen desempeño. Para estimar la derivada de las superficies se utilizaron Diferenciadores Robustos y Exactos de tercer orden (3.44) con sus respectivas cotas Λ_ρ y Λ_ε , ver Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Ganancias 3-STA Ubicación de Polos

Inclinación	Elevación
$k_1 = 1.2$	$k_4 = 2.5$
$k_2 = 1$	$k_5 = 2$
$k_3 = 0.8$	$k_6 = 0.8$
$\Lambda_\rho = 30$	$\Lambda_\varepsilon = 30$

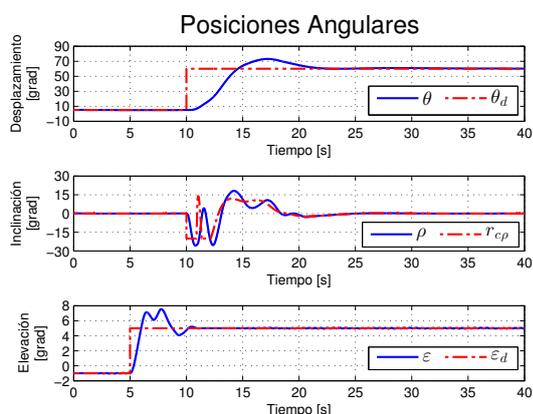


Figura 4.7: Posiciones Angulares.

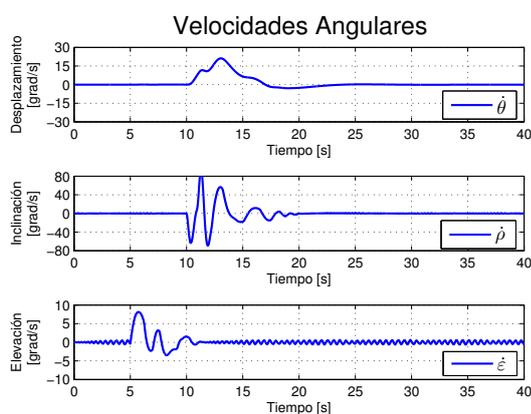


Figura 4.8: Velocidades Angulares.

En $t = 5 [s]$ la elevación deseada se modifica a $\varepsilon_d = 5^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el desplazamiento deseado es $\theta_d = 60^\circ$. La Figura 4.7 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de inclinación. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 4.8, las cuales presentan oscilaciones de baja amplitud una vez que se alcanza el punto de operación.

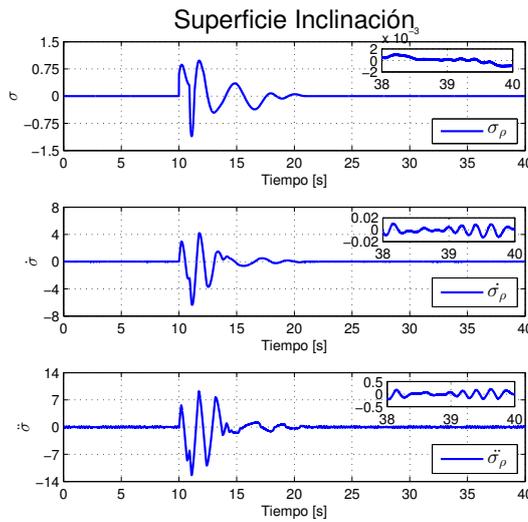


Figura 4.9: Superficie Inclinación.

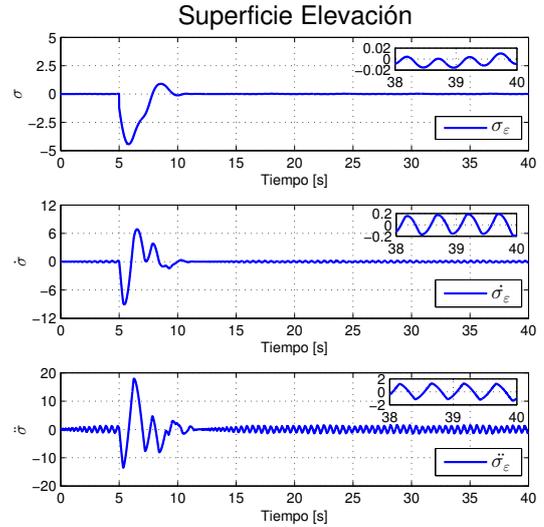


Figura 4.10: Superficie Elevación.

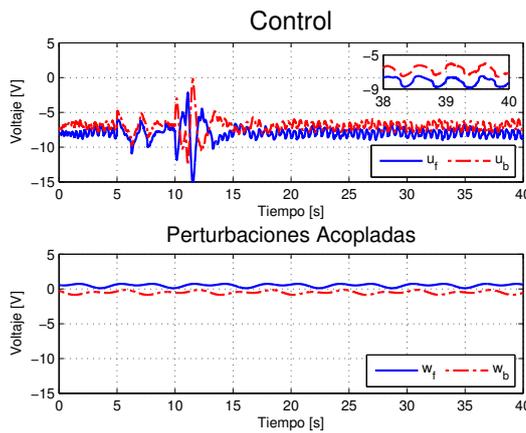


Figura 4.11: Señales de Control y Perturbaciones.

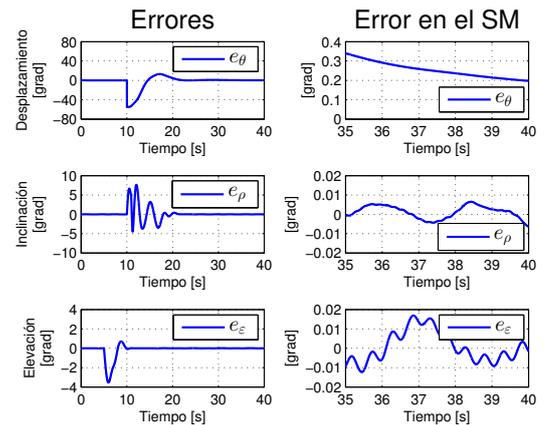


Figura 4.12: Errores.

En las Figuras 4.9 y 4.10 se muestra el comportamiento de las variables de deslizamiento, en ambos casos hay convergencia a una vecindad en torno a cero, además de

4. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

que presentan oscilaciones de alta frecuencia y baja amplitud en el modo deslizante. Las señales de error de la Figura 4.12 convergen a cero en forma exponencial, en el modo deslizante los errores de inclinación y elevación tuvieron oscilaciones de baja amplitud.

Las señales de control expresadas en voltaje corresponden a la Figura 4.11, son funciones continuas y están definidas en el intervalo $[-15, 15]$ [V]; en el modo deslizante oscilan con amplitud de 2 [V] y frecuencia de 2 [Hz], aproximadamente. La dinámica de elevación presentó un sobrepaso elevado pero la regulación al punto de operación fue rápida. La referencia PID fue seguida correctamente por el ángulo de inclinación.

4.1.3. Análisis de Resultados

Después de observar el comportamiento del sistema en lazo cerrado con los controladores de orden dos y tres, bajo el diseño de superficies de deslizamiento por Ubicación de Polos, es claro que en ambos casos la regulación fue eficiente. Se presentaron oscilaciones de alta frecuencia pero muy baja amplitud, por lo que el *chattering* fue atenuado.

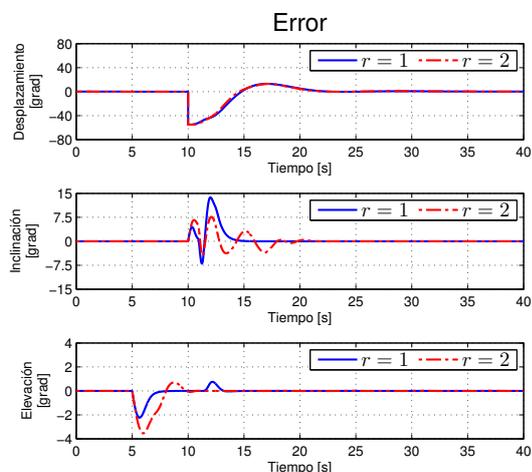


Figura 4.13: Errores.

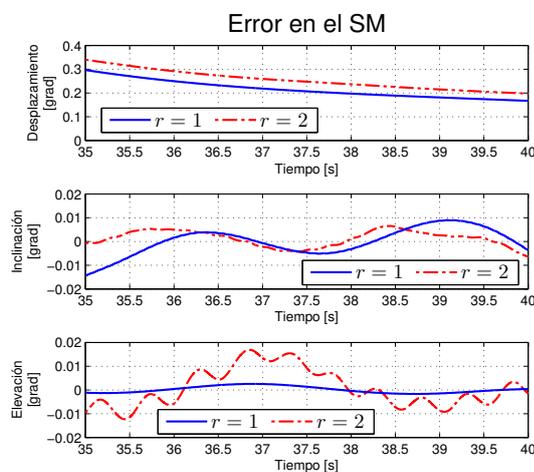


Figura 4.14: Precisión en el Modo Deslizante.

Debido a que el ángulo de *desplazamiento* es controlado por un algoritmo PID, su desempeño no cambió en gran medida. El ángulo de *inclinación* presentó más oscilaciones con el incremento de orden del controlador, pero el crecimiento del error fue más acotado.

La Tabla 4.3 muestra la precisión en grados, el 3-STA minimizó el error de seguimiento PID y logró que la dinámica de inclinación no perturbara la elevación del helicóptero, ver Figuras 4.13 y 4.14.

Tabla 4.3: Errores Máximos en el Modo Deslizante [grad]

Error	$r = 1$	$r = 2$
e_θ	0.296	0.340
e_ρ	0.014	0.006
e_ε	0.003	0.017

Con el método de Ubicación de Polos se diseñaron superficies de grado relativo uno y dos para los controladores STA y 3-STA, respectivamente, logrando una buena regulación de los estados del sistema al punto de operación deseado. En seguida se pondrá en práctica el segundo método de diseño de superficies, con el que se esperan resultados similares.

4.2. LQ Singular

Como se ha mencionado antes, la teoría de Control Óptimo Singular, permite diseñar superficies de deslizamiento con grado relativo arbitrario y dinámica deseada en el modo deslizante. Mediante un control virtual óptimo con respecto a un criterio de desempeño regular.

4.2.1. Grado Relativo Uno

Con el conocimiento de antemano de las matrices de ponderación $Q_{\rho,\varepsilon}$, se diseñarán superficies de deslizamiento para los sistemas lineales (4.1) y (4.2) de grado relativo $r = 1$

$$\dot{\sigma} = h(\sigma, t) + g(\sigma, t)u,$$

con el fin de utilizar el algoritmo Super-Twisting y así atenuar el efecto del *chattering*, mediante el uso de señales de control continuo.

Superficie: Error de Inclinación

El sistema dinámico en función del *error de inclinación* de la ecuación (4.1), está en su forma canónica de controlador; basta con identificar el escalar $Q_{\rho_{22}} \neq 0$ de la matriz de ponderación

$$Q_{\rho} = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 \end{array} \right], \quad (4.12)$$

como no hay columnas iguales a cero, $k = 0$ y el *Orden de Singularidad* es $i = 1$. Se hacen las particiones de sistema de la misma forma que en la expresión (4.12), resultando

$$\begin{aligned} Q_{\rho_{11}} &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; & A_{\rho_{11}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ Q_{\rho_{12}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & A_{\rho_{12}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ Q_{\rho_{22}} &= 6; & A_{\rho_{22}} &= 0. \end{aligned}$$

Se definen los subconjuntos de variables de estado

- $\bar{x}_1 = [e_{\rho_1} \ e_{\rho_2}]^T$: formarán la dinámica de orden reducido.
- $\bar{x}_2 = [e_{\rho_3}]$: control virtual.
- $\bar{x}_3 = 0$.

y se identifican los términos de la Ecuación de Algebraica Riccati, es decir:

- $\hat{A}_{\rho} = A_{\rho_{11}} + A_{\rho_{12}}(Q_{\rho_{22}})^{-1}Q_{\rho_{12}}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
- $\hat{B}_{\rho} = A_{\rho_{12}} = [0 \ 1]^T$.
- $\hat{Q}_{\rho} = Q_{\rho_{11}} - Q_{\rho_{12}}(Q_{\rho_{22}})^{-1}Q_{\rho_{12}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $\hat{R}_{\rho} = Q_{\rho_{22}} = 6$,

al sustituirlos en la ecuación (2.15), resulta

$$\hat{A}_{\rho}^T P_{\rho} + P_{\rho} \hat{A}_{\rho} - P_{\rho} \hat{B}_{\rho} (\hat{R}_{\rho})^{-1} \hat{B}_{\rho}^T P_{\rho} + \hat{Q}_{\rho} = 0 \Rightarrow P_{\rho} = \begin{bmatrix} 9.486 & 6 \\ 6 & 9.486 \end{bmatrix},$$

con la solución se construye el control virtual estabilizante

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= -K_{\rho} \bar{x}_1, \\ &= -(\hat{R}_{\rho})^{-1} (\hat{B}_{\rho}^T P_{\rho} + Q_{\rho_{12}}^T) \bar{x}_1, \\ &= -[1 \ 1.581] \bar{x}_1. \end{aligned}$$

Se puede seleccionar una superficie de deslizamiento de la forma

$$\sigma_\rho = \bar{x}_2 + K_\rho \bar{x}_1,$$

de tal manera que en el modo deslizante

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{\rho_{11}} - A_{\rho_{12}}K_\rho)\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.581 \end{bmatrix} \bar{x}_1,$$

la dinámica de orden reducido corresponde con una respuesta sobreamortiguada.

Con la definición de control equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= e_{\rho_3} + e_{\rho_1} + 1.581e_{\rho_2}, \\ \dot{\sigma}_\rho &= \underbrace{e_{\rho_2} + 1.581e_{\rho_3}}_{-u_{eqn1}} + \underbrace{(0.577)}_{\frac{K_f l_h}{J_p}}(u_d + w_d), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal*

$$u_{eqn1} = -(e_{\rho_2} + 1.581e_{\rho_3}),$$

la señal de control queda definida por

$$u_d = \frac{1}{0.577}(u_{eqn1} + u_{STA_1}).$$

Utilizando el algoritmo Súper-Twisting sobre la variable de deslizamiento:

$$\begin{aligned} u_{STA_1} &= -k_1|\sigma_\rho|^{1/2} \text{sign}(\sigma_\rho) + v_1, \\ \dot{v}_1 &= -k_2 \text{sign}(\sigma_\rho), \end{aligned} \tag{4.13}$$

las ganancias k_1 y k_2 de la ecuación (4.13) se calculan

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.5\sqrt{\Delta_1}, \\ k_2 &= 1.1\Delta_1, \end{aligned}$$

donde $\|\dot{w}_d(t)\| + \|\ddot{r}_{c\rho}\| \leq \Delta_1$, de esta forma $\sigma_\rho = \dot{\sigma}_\rho = 0$ en tiempo finito.

Superficie: Error de Elevación

El sistema dinámico en función del *error de Elevación* (4.2) está en su forma canónica de controlador, por lo que basta con identificar el escalar $Q_{\rho_{22}} \neq 0$ de la matriz de ponderación

$$Q_\varepsilon = \left[\begin{array}{cc|c} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array} \right], \quad (4.14)$$

en este caso el *Orden de Singularidad* es $i = 1$ y las particiones de sistema son

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon_{11}} &= \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}; & A_{\varepsilon_{11}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ Q_{\varepsilon_{12}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & A_{\varepsilon_{12}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ Q_{\varepsilon_{22}} &= 3; & A_{\varepsilon_{22}} &= 0, \end{aligned}$$

se definen los subconjuntos de variables de estado

- $\bar{y}_1 = [e_{\varepsilon_1} \ e_{\varepsilon_2}]^T$: formarán la dinámica de orden reducido.
- $\bar{y}_2 = [e_{\varepsilon_3}]$: control virtual.
- $\bar{y}_3 = 0$.

Luego se identifican los términos de la Ecuación de Algebraica de Riccati, es decir:

- $\hat{A}_\varepsilon = A_{\varepsilon_{11}} + A_{\varepsilon_{12}}(Q_{\varepsilon_{22}})^{-1}Q_{\varepsilon_{12}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $\hat{B}_\varepsilon = A_{\varepsilon_{12}} = [0 \ 1]^T$.
- $\hat{Q}_\varepsilon = Q_{\varepsilon_{11}} - Q_{\varepsilon_{12}}(Q_{\varepsilon_{22}})^{-1}Q_{\varepsilon_{12}}^T = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.
- $\hat{R}_\varepsilon = Q_{\varepsilon_{22}} = 3$,

al sustituirlos en la ecuación (2.15) resulta

$$\hat{A}_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon \hat{A}_\varepsilon - P_\varepsilon \hat{B}_\varepsilon (\hat{R}_\varepsilon)^{-1} \hat{B}_\varepsilon^T P_\varepsilon + \hat{Q}_\varepsilon = 0 \Rightarrow P_\varepsilon = \begin{bmatrix} 15.1 & 6 \\ 6 & 7.55 \end{bmatrix},$$

con la solución se construye el control virtual estabilizante

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= -K_\varepsilon \bar{y}_1, \\ &= -(\hat{R}_\varepsilon)^{-1} (\hat{B}_\varepsilon^T P_\varepsilon + Q_{\varepsilon_{12}}^T) \bar{y}_1, \\ &= -[2 \ 2.516] \bar{y}_1. \end{aligned}$$

La superficie diseñada es

$$\sigma_\varepsilon = \bar{y}_2 + K_\varepsilon \bar{y}_1,$$

y en el modo deslizante

$$\dot{\bar{y}}_1 = (A_{\varepsilon_{11}} - A_{\varepsilon_{12}} K_\varepsilon) \bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2.516 \end{bmatrix} \bar{y}_1,$$

el sistema es de Segundo Orden con respuesta sobreamortiguada.

Con la definición de control equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon &= e_{\varepsilon_3} + 2e_{\varepsilon_1} + 2.516e_{\varepsilon_2} \\ \dot{\sigma}_\varepsilon &= \underbrace{2e_{\varepsilon_2} + 2.516e_{\varepsilon_3}}_{-u_{eqn2}} + \underbrace{(0.086)}_{\frac{K_f l_a}{J_e}} J_\varepsilon (u_s + w_s), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal*

$$u_{eqn2} = -(2e_{\varepsilon_2} + 2.516e_{\varepsilon_3}),$$

y la señal de control queda definida por

$$u_s = \frac{1}{0.086} (u_{eqn1} + u_{STA_2}).$$

Utilizando el algoritmo Súper-Twisting sobre la superficie diseñada:

$$\begin{aligned} u_{STA_2} &= -k_3 |\sigma_\varepsilon|^{1/2} \text{sign}(\sigma_\varepsilon) + v_2, \\ \dot{v}_2 &= -k_4 \text{sign}(\sigma_\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.15}$$

las ganancias k_3 y k_4 de (4.15) se calculan

$$\begin{aligned} k_3 &= 1.5 \sqrt{\Delta_2} \\ k_4 &= 1.1 \Delta_2, \end{aligned}$$

donde $\|\dot{w}_s(t)\| \leq \Delta_2$ es la cota de la derivada de las perturbaciones acopladas, de este modo $\sigma_\varepsilon = \dot{\sigma}_\varepsilon = 0$ en tiempo finito.

Simulaciones

Utilizando el mismo escenario de simulación, las ganancias de los controladores (4.13) y (4.15) se calcularon considerando la cota máxima de la derivada temporal de las perturbaciones. Para estimar la derivada de las superficies se utilizaron Diferenciadores Robustos y Exactos de tercer orden (3.44) con sus respectivas cotas Λ_ρ y Λ_ε , ver Tabla 4.4.

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 4 &\Rightarrow \Delta_1 \geq \|\dot{w}_d\| + \|\ddot{r}_{c\rho}\|, \\ \Delta_2 = 0.8 &\Rightarrow \Delta_2 \geq \|\dot{w}_s\|. \end{aligned}$$

Tabla 4.4: Ganancias STA LQ Singular

Inclinación	Elevación
$k_1 = 3$	$k_3 = 1.341$
$k_2 = 4.4$	$k_4 = 0.88$
$\Lambda_\rho = 30$	$\Lambda_\varepsilon = 30$

En $t = 5 [s]$ la elevación deseada se modifica a $\varepsilon_d = 5^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el desplazamiento deseado es $\theta_d = 60^\circ$. La Figura 4.15 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de inclinación. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 4.16, las cuales son cero una vez que se alcanza el punto de operación.

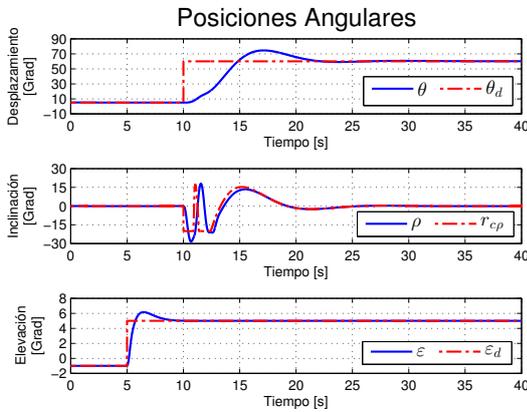


Figura 4.15: Posiciones Angulares.

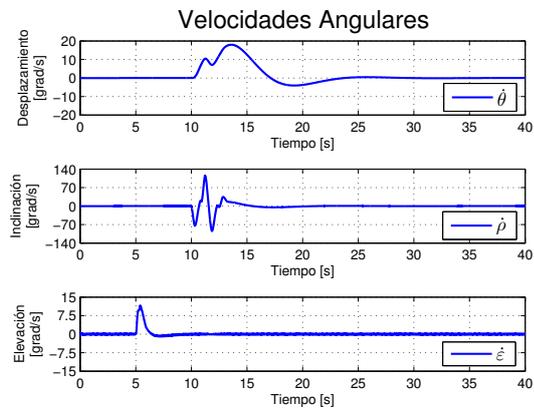


Figura 4.16: Velocidades Angulares.

El seguimiento de la referencia PID por parte del ángulo de inclinación fue bueno y en consecuencia el desplazamiento se reguló correctamente. La elevación del helicóptero presentó un sobrepaso aceptable.

En las Figuras 4.17 y 4.18 se muestra el comportamiento de las variables de deslizamiento, en ambos casos hay convergencia a una vecindad en torno a cero, además de que presentan oscilaciones de alta frecuencia y baja amplitud.

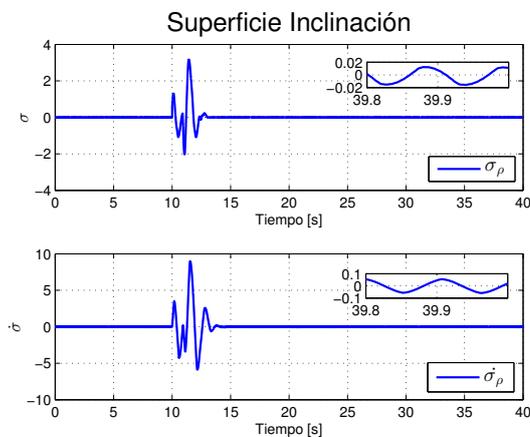


Figura 4.17: Superficie Inclinación.

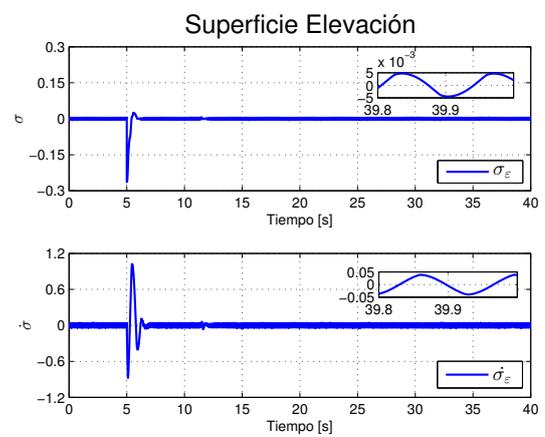


Figura 4.18: Superficie Elevación.

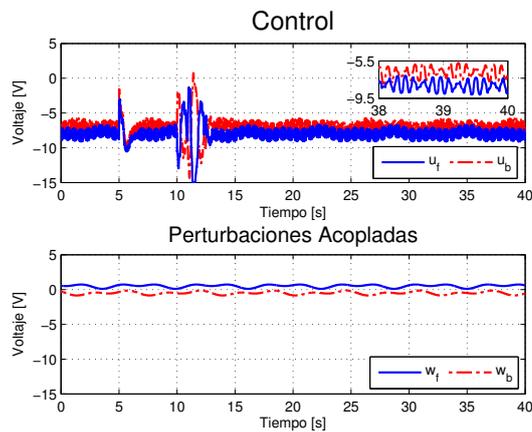


Figura 4.19: Señales de Control y Perturbaciones.

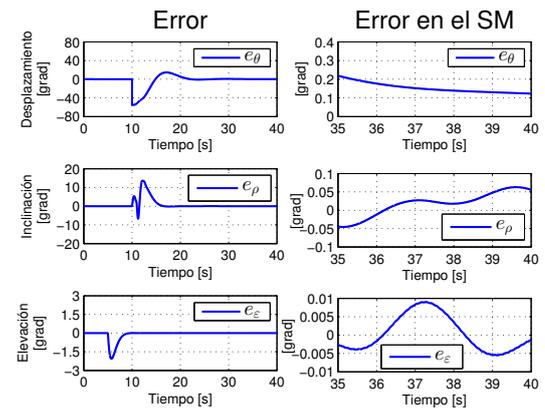


Figura 4.20: Errores.

Las señales de error de la Figura 4.20 convergen a cero en forma exponencial, en el modo deslizante se logró buena precisión.

Las señales de control expresadas en voltaje se muestran en la Figura 4.19, son funciones continuas y están definidas en el intervalo $[-15, 15]$ [V]; en el modo deslizante oscilan con amplitud de 1 [V] y frecuencia de 10 [Hz], aproximadamente.

Ahora se diseñarán superficies de deslizamiento de grado relativo $r = 2$ para mostrar el desempeño del sistema con el aumento de orden del controlador.

4.2.2. Grado Relativo Dos

Nuevamente partiendo de las matrices de ponderación $Q_{\rho,\varepsilon}$, se diseñarán superficies de deslizamiento para los sistemas lineales (4.1) y (4.2) de grado relativo $r = 2$

$$\ddot{\sigma} = h(\sigma, \dot{\sigma}, t) + g(\sigma, \dot{\sigma}, t)u.$$

con el fin de utilizar el algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden y así atenuar el efecto del *chattering*, mediante el uso de señales de control continuo.

Superficie: Error de Inclinación

De la matriz de ponderación

$$Q_{\rho} = \left[\begin{array}{c|cc} 36 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (4.16)$$

se identifica el escalar $Q_{\rho_{22}} \neq 0$, como $k = 1$ el *Orden de Singularidad* es $i = 2$. Se hacen las particiones de sistema de la misma forma que en la expresión (4.16), resultando

$$\begin{aligned} Q_{\rho_{11}} &= 36; & A_{\rho_{11}} &= 0, \\ Q_{\rho_{12}} &= 0; & A_{\rho_{12}} &= 1, \\ Q_{\rho_{22}} &= 1; & A_{\rho_{22}} &= 0. \end{aligned}$$

Se definen los subconjuntos de variables de estado

- $\bar{x}_1 = e_{\rho_1}$: formarán la dinámica de orden reducido.
- $\bar{x}_2 = e_{\rho_2}$: control virtual.
- $\bar{x}_3 = e_{\rho_2}$: el resto de variables de estado.

y se calculan los términos de la Ecuación de Algebraica Riccati, es decir:

- $\hat{A}_\rho = A_{\rho 11} + A_{\rho 12}(Q_{\rho 22})^{-1}Q_{\rho 12}^T = 0.$
- $\hat{B}_\rho = A_{\rho 12} = 1.$
- $\hat{Q}_\rho = Q_{\rho 11} - Q_{\rho 12}(Q_{\rho 22})^{-1}Q_{\rho 12}^T = 36.$
- $\hat{R}_\rho = Q_{\rho 22} = 1,$

al sustituirlos en ecuación (2.15) resulta

$$\hat{A}_\rho^T P_\rho + P_\rho \hat{A}_\rho - P_\rho \hat{B}_\rho (\hat{R}_\rho)^{-1} \hat{B}_\rho^T P_\rho + \hat{Q}_\rho = 0 \Rightarrow P_\rho = 6,$$

con la solución se construye el control virtual estabilizante

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= -K_\rho \bar{x}_1, \\ &= -(\hat{R}_\rho)^{-1} (\hat{B}_\rho^T P_\rho + Q_{\rho 12}^T) \bar{x}_1, \\ &= -6\bar{x}_1. \end{aligned}$$

Se puede seleccionar una superficie de deslizamiento de la forma

$$\sigma_\rho = \bar{x}_2 + K \bar{x}_1,$$

de tal manera que en el modo deslizante

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{\rho 11} - 6A_{\rho 12})\bar{x}_1 = -6\bar{x}_1,$$

el sistema tiene dinámica de Primer Orden.

Con la definición de Control Equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= e_{\rho 2} + 6e_{\rho 1}, \\ \dot{\sigma}_\rho &= 6e_{\rho 2} + e_{\rho 3}, \\ \ddot{\sigma}_\rho &= \underbrace{6e_{\rho 3}}_{-u_{eqn1}} + \underbrace{(0.577)}_{\frac{K_f t_h}{J_p}} (u_d + w_d), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal*

$$u_{eqn1} = -6e_{\rho 3},$$

la señal de control queda definida por

$$u_d = \frac{1}{0.577}(u_{eqn1} + u_{3STA_1}).$$

Utilizando un Súper Twisting de Tercer Orden sobre la variable de deslizamiento diseñada

$$\begin{aligned} u_{3STA_1} &= -k_1|\phi|^{1/2} \text{sign}(\phi) + \Gamma_1, \\ \dot{\Gamma}_1 &= -k_3 \text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde

$$\phi = \dot{\sigma}_\rho + k_2|\sigma_\rho|^{2/3} \text{sign}(\sigma_\rho),$$

las ganancias k_1 , k_2 y k_3 fueron seleccionadas de tal forma que $\sigma_\rho = \dot{\sigma}_\rho = \ddot{\sigma}_\rho = 0$ en tiempo finito.

Superficie: Error de Elevación

Al identificar el escalar $Q_{\rho 22} \neq 0$ de la matriz de ponderación

$$Q_\varepsilon = \left[\begin{array}{c|cc} 0.64 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (4.18)$$

el *Orden de Singularidad* es $i = 2$. Se hacen las particiones de sistema de la misma forma que en la expresión (4.18), resultando

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon 11} &= 0.64; & A_{\varepsilon 11} &= 0, \\ Q_{\varepsilon 12} &= 0; & A_{\varepsilon 12} &= 1, \\ Q_{\varepsilon 22} &= 1; & A_{\varepsilon 22} &= 0. \end{aligned}$$

Se definen los subconjuntos de variables de estado

- $\bar{y}_1 = e_{\varepsilon_1}$: formarán la dinámica de orden reducido.
- $\bar{y}_2 = e_{\varepsilon_2}$: control virtual.
- $\bar{y}_3 = e_{\varepsilon_3}$: el resto de variables de estado.

y se calculan los términos de la Ecuación de Algebraica de Riccati

- $\hat{A}_\varepsilon = A_{\varepsilon 11} + A_{\varepsilon 12}(Q_{\varepsilon 22})^{-1}Q_{\varepsilon 12}^T = 0.$
- $\hat{B}_\varepsilon = A_{\varepsilon 12} = 1.$

- $\hat{Q}_\varepsilon = Q_{\varepsilon_{11}} - Q_{\varepsilon_{12}}(Q_{\varepsilon_{22}})^{-1}Q_{\varepsilon_{12}}^T = 0.64.$
- $\hat{R}_\varepsilon = Q_{\varepsilon_{22}} = 1,$

al sustituirlos en la ecuación (2.15) resulta

$$\hat{A}_\varepsilon^T P_\varepsilon + P_\varepsilon \hat{A}_\varepsilon - P_\varepsilon \hat{B}_\varepsilon (\hat{R}_\varepsilon)^{-1} \hat{B}_\varepsilon^T P_\varepsilon + \hat{Q}_\varepsilon = 0 \Rightarrow P_\varepsilon = 0.8,$$

con la solución se construye el control virtual estabilizante

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= -K_\varepsilon \bar{y}_1, \\ &= -(\hat{R}_\varepsilon)^{-1} (\hat{B}_\varepsilon^T P_\varepsilon + Q_{\varepsilon_{12}}^T) \bar{y}_1, \\ &= -0.8 \bar{y}_1. \end{aligned}$$

La superficie diseñada es

$$\sigma_\varepsilon = \bar{y}_2 + K_\varepsilon \bar{y}_1,$$

de tal manera que en el modo deslizante

$$\dot{\bar{y}}_1 = (A_{\varepsilon_{11}} - 0.8A_{\varepsilon_{12}}) \bar{y}_1 = -0.8 \bar{y}_1,$$

el sistema tiene dinámica de Primer Orden.

Con la definición de control equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon &= e_{\varepsilon_2} + 0.8e_{\varepsilon_1}, \\ \dot{\sigma}_\varepsilon &= 0.8e_{\varepsilon_2} + e_{\varepsilon_3}, \\ \ddot{\sigma}_\varepsilon &= \underbrace{0.8e_{\varepsilon_3}}_{-u_{eqn2}} + \underbrace{(0.086)}_{\frac{K_f l_a}{J_e}} (u_s + w_s), \end{aligned}$$

se obtiene el *Control Equivalente Nominal*

$$u_{eqn2} = -0.8e_{\varepsilon_3}, \quad (4.19)$$

la señal de control queda definida por

$$u_s = \frac{1}{0.086} (u_{eqn2} + u_{3STA_2}).$$

Utilizando un Súper Twisting de Tercer Orden sobre la variable de deslizamiento diseñada

$$\begin{aligned} u_{3STA_2} &= -k_4 |\phi|^{1/2} \text{sign}(\phi) + \Gamma_2, \\ \dot{\Gamma}_2 &= -k_6 \text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (4.20)$$

4. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

donde

$$\phi = \dot{\sigma}_\varepsilon + k_5 |\sigma_\varepsilon|^{2/3} \text{sign}(\sigma_\varepsilon),$$

las ganancias k_4 , k_5 y k_6 fueron seleccionadas de tal forma que $\sigma_\varepsilon = \dot{\sigma}_\varepsilon = \ddot{\sigma}_\varepsilon = 0$ en tiempo finito.

Simulaciones

Utilizando el mismo escenario de simulación, las ganancias de los controladores (4.17) y (4.20) se eligieron de tal modo que el sistema presentó un buen desempeño. Para estimar la derivada de las superficies se utilizaron Diferenciadores Robustos y Exactos de tercer orden (3.44) con sus respectivas cotas Λ_ρ y Λ_ε , ver Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Ganancias 3-STA LQ Singular

Inclinación	Elevación
$k_1 = 1.2$	$k_4 = 1$
$k_2 = 1$	$k_5 = 1.2$
$k_3 = 0.8$	$k_6 = 0.8$
$\Lambda_\rho = 30$	$\Lambda_\varepsilon = 30$

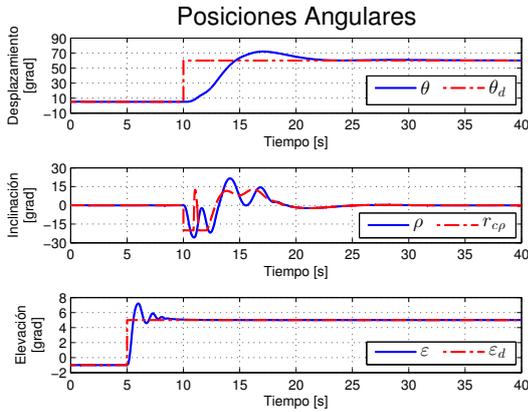


Figura 4.21: Posiciones Angulares.

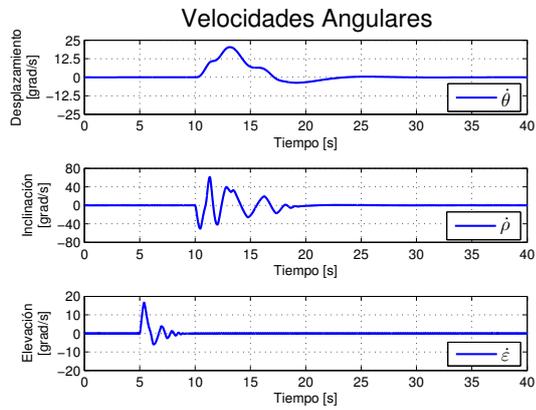


Figura 4.22: Velocidades Angulares.

En $t = 5 [s]$ la elevación deseada se modifica a $\varepsilon_d = 5^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el desplazamiento deseado es $\theta_d = 60^\circ$. La Figura 4.21 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de inclinación. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura

4.22, las cuales presentan oscilaciones de baja amplitud una vez que se alcanza el punto de operación. El seguimiento de la referencia PID por parte del ángulo de inclinación fue bueno y en consecuencia el desplazamiento se reguló correctamente. La elevación del helicóptero presentó un sobrepaso aceptable.

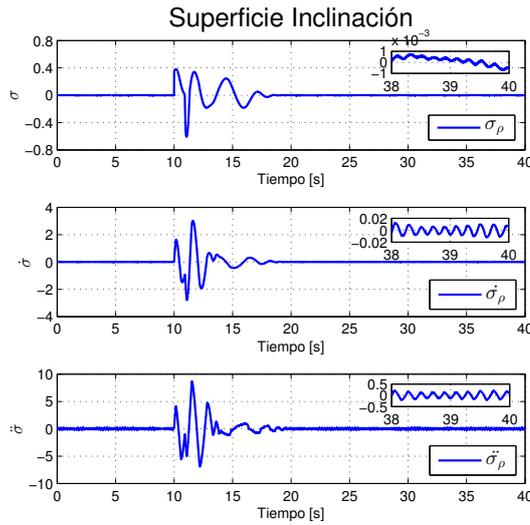


Figura 4.23: Superficie Inclinación.

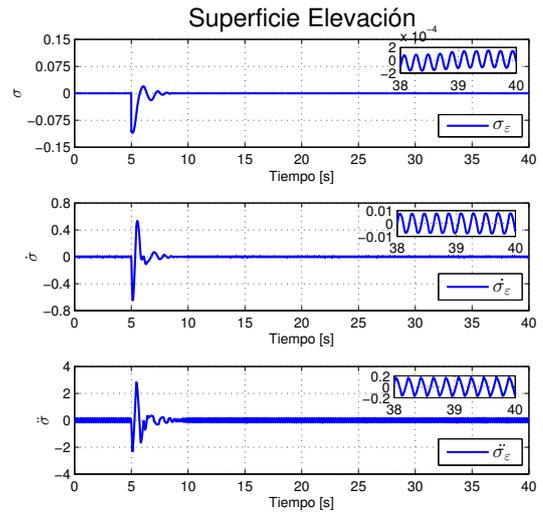


Figura 4.24: Superficie Elevación.

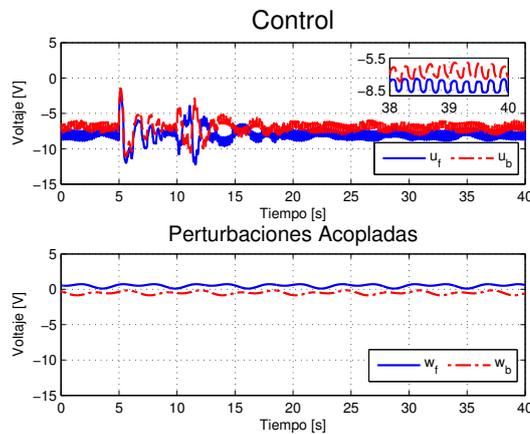


Figura 4.25: Señales de Control y Perturbaciones.

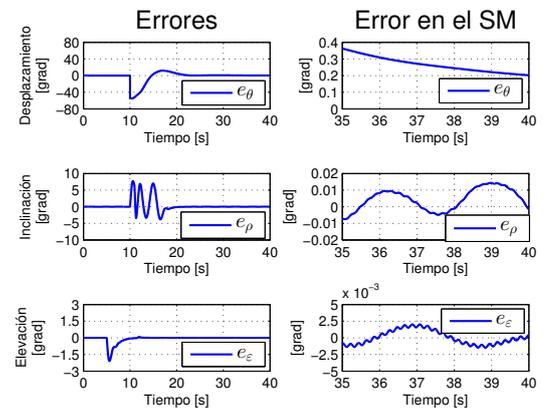


Figura 4.26: Errores.

En las Figuras 4.23 y 4.24 se muestra el comportamiento de las superficies de deslizamiento, en ambos casos hay convergencia a una vecindad en torno a cero, además de que presentan oscilaciones de alta frecuencia y baja amplitud en el modo deslizante.

4. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

Las señales de error de la Figura 4.26 convergen a cero en forma exponencial, en el modo deslizante se logró buena precisión.

Las señales de control expresadas en voltaje corresponden a la Figura 4.25, son funciones continuas y están definidas en el intervalo $[-15, 15]$ [V]; en el modo deslizante oscilan con amplitud de 3 [V] y frecuencia de 5 [Hz], aproximadamente.

4.2.3. Análisis de Resultados

Después de observar el comportamiento del sistema en lazo cerrado con los controladores de orden dos y tres, bajo el diseño de superficies de deslizamiento LQ Singular, es claro que en ambos casos la regulación fue eficiente. Se presentaron oscilaciones de alta frecuencia pero muy baja amplitud, por lo que el *chattering* fue atenuado.

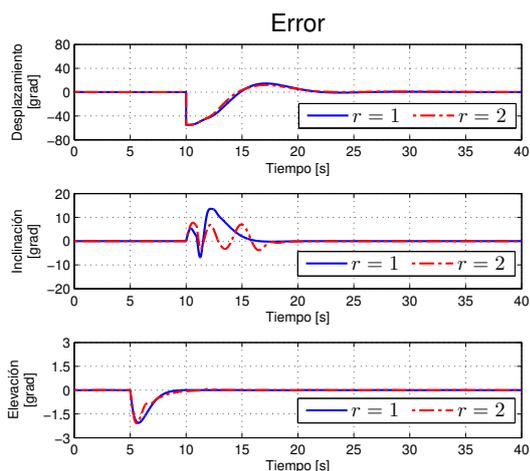


Figura 4.27: Errores.

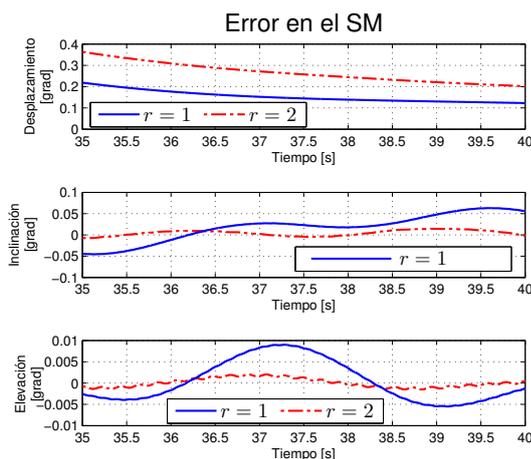


Figura 4.28: Precisión en el Modo Deslizante.

Tabla 4.6: Errores Máximos en el Modo Deslizante [grad]

Error	$r = 1$	$r = 2$
e_θ	0.218	0.362
e_ρ	0.063	0.005
e_ε	0.009	0.002

La Tabla 4.6 muestra la precisión en grados, en este caso es clara la mejoría obtenida con el incremento de orden del controlador.

Resultados Experimentales

En este capítulo se presentan las pruebas experimentales hechas con el Helicóptero 3DoF. Es necesario identificar los elementos necesarios para la implementación del esquema de control, éstos son:

1. *Matlab y Simulink*: Con ayuda del software Matlab y su complemento Simulink, fue posible generar un diagrama de bloques en el que se expresan todos los elementos que intervienen para obtener la señal de control. También se estiman variables en línea y otras simplemente se escalan, finalmente se traduce a lenguaje de programación C.
2. *Control Desk*: Este software es el encargado de la prueba en tiempo real, ya que en él se pueden desplegar las gráficas de las señales de control, estados, errores, etc. También permite modificar en línea algunos parámetros como las ganancias en los controladores y diferenciadores para alcanzar un mejor desempeño.
3. *Tarjeta dSPACE 1103*: en esta tarjeta se descarga el programa en lenguaje C obtenido con Matlab. Está encargada de la comunicación entre la estación de trabajo (PC) y la planta. Las mediciones angulares entran por puertos digitales, son transferidos a la computadora que calcula las señales de control y produce una salida analógica en un rango de $[-5, 5]$ V.
4. *Etapa de potencia*: Como las salidas de voltaje analógico están escaladas y la corriente que se le puede demandar a la tarjeta dSPACE es baja (del orden de 60 mA), las señales de control deben pasar a una etapa de potencia para amplificar la señal de voltaje y suministrar la corriente demandada por los motores de corriente directa.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

5. *Fuentes de Alimentación:* Con el fin de amplificar las señales de control tanto en voltaje como en corriente, el circuito de potencia es alimentado con tensión simétrica de ± 15 [V], proveniente de dos fuentes de alimentación con demanda máxima de corriente de 10 [A] cada una.

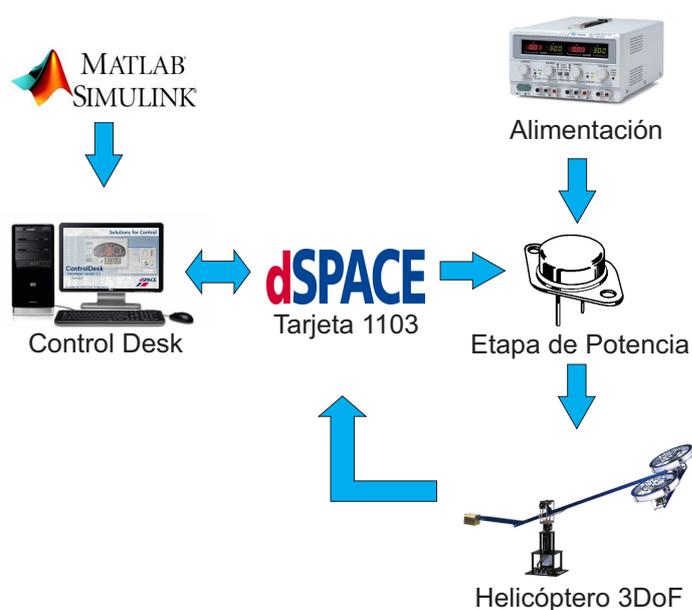


Figura 5.1: Esquema de Control.

El objetivo del controlador es llevar al helicóptero a las posiciones angulares deseadas ε_d y θ_d , esta última al tratarse de la dinámica subactuada, mediante una señal de referencia calculada en línea. Los experimentos se realizaron bajo un paso de muestreo $\tau = 1$ [ms]. Con dos pruebas se mostrará el desempeño del sistema de control, para las superficies de deslizamiento diseñadas en el Capítulo 4, por los métodos de

- Ubicación de Polos.
- LQ Singular Óptimo.

Se mostrará el comportamiento del sistema ante el incremento de orden del controlador, comparando los errores en el modo deslizante y el sobrepaso de cada ángulo a controlar. Cabe señalar que las superficies de grado relativo $r = 1$ corresponden al controlador STA, mientras que las de grado relativo $r = 2$ son para el 3-STA.

5.1. Ubicación de Polos

5.1.1. Grado Relativo Uno

Prueba 1: Considerando condiciones iniciales nulas, aproximadamente en $t = 5$ [s], la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 2^\circ$, mientras que en $t = 10$ [s] el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 30^\circ$. La Figura 5.2 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *pitch*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.3.

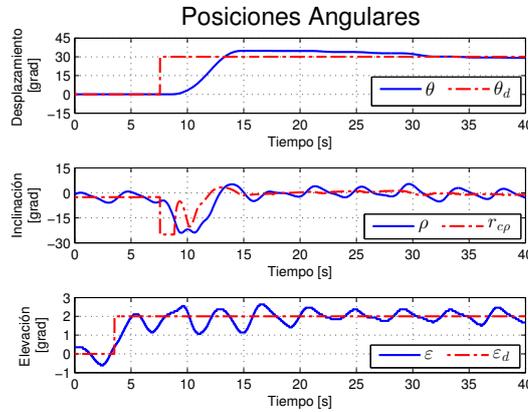


Figura 5.2: Estados del Sistema.

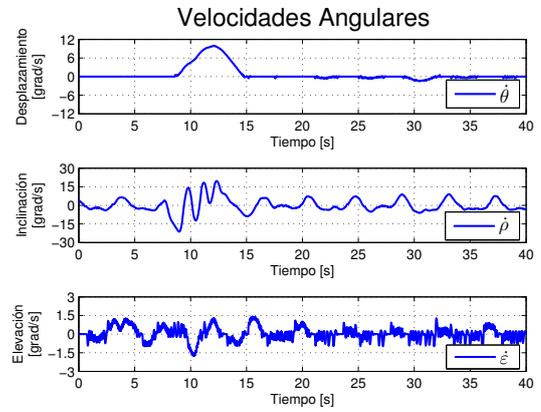


Figura 5.3: Velocidades Angulares.

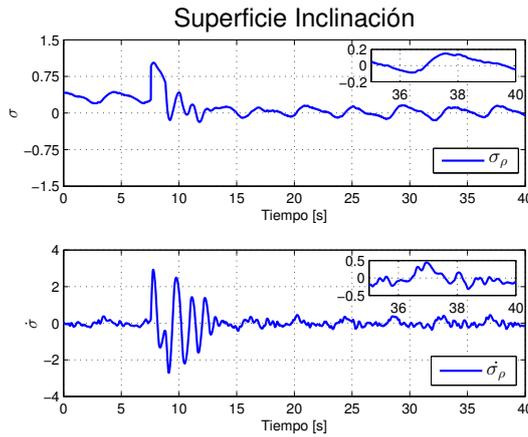


Figura 5.4: Superficie Pitch.

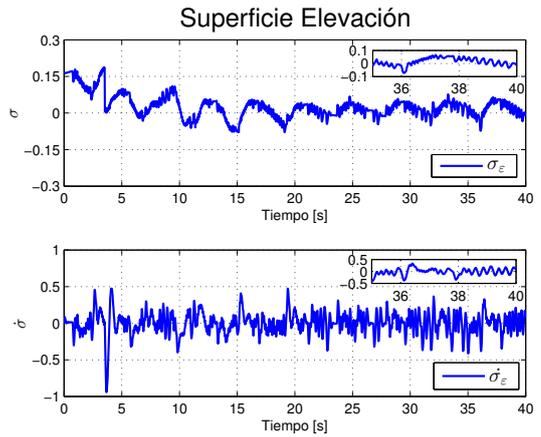


Figura 5.5: Superficie Elevación.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave y con poco sobrepaso, la elevación del helicóptero se vio afectada por la dinámica de inclinación.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* está en la Fig. 5.4, presenta oscilaciones en torno a cero que se reflejan directamente en el seguimiento de la referencia PID; su derivada temporal converge a una vecindad de cero. En la Fig. 5.5, la superficie del *error de Elevación* y su derivada temporal convergen a cero rápidamente, pero con oscilaciones sostenidas en el modo deslizante. Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.6, las cuales son adecuadas para los motores.

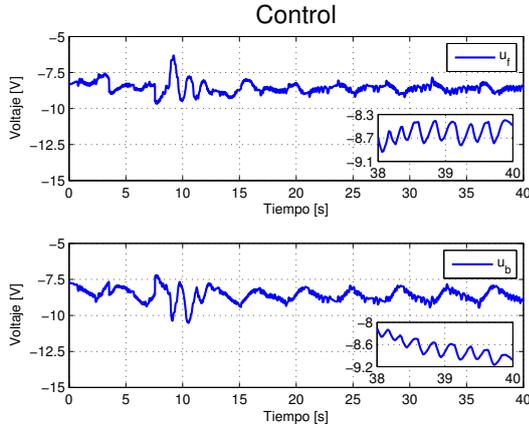


Figura 5.6: Señales de Control.

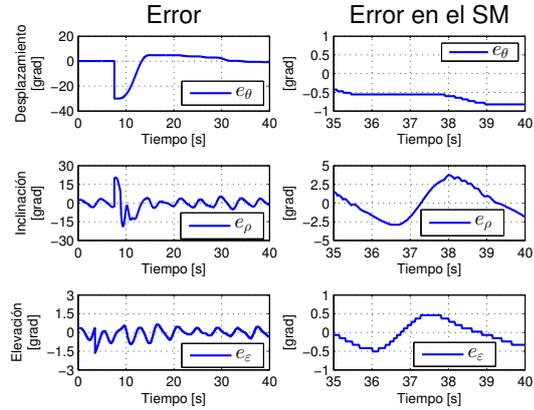


Figura 5.7: Errores.

En la Fig. 5.7 se muestran las señales de error. En ellas se puede apreciar la magnitud del error para cada grado de libertad y medir la amplitud de las oscilaciones en torno al punto de operación deseado. La precisión en grados obtenida, en el modo deslizante es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 0.425 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 3.774 \quad ; \quad \|e_\epsilon\|_{\text{máx}} = 0.461,$$

en el caso de los ángulos de inclinación y desplazamiento el desempeño es adecuado. En la elevación, oscilaciones de casi 1/2 grado son excesivas.

Prueba 2: Considerando la condición inicial $X_0 = [2^\circ \ 0 \ 30^\circ \ 0 \ 0 \ 0]$. Aproximadamente en $t = 5 [s]$, la *elevación* deseada se modifica a $\epsilon_d = 4^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 60^\circ$.

La Figura 5.8 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.9.

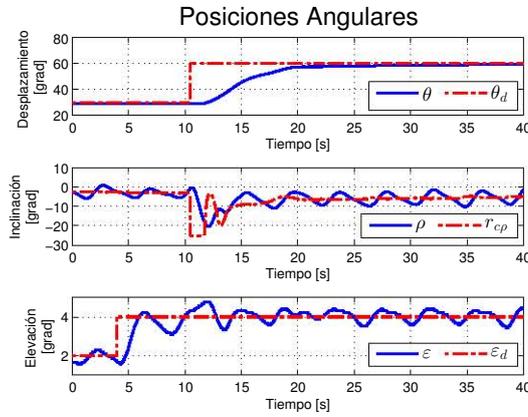


Figura 5.8: Estados del Sistema.

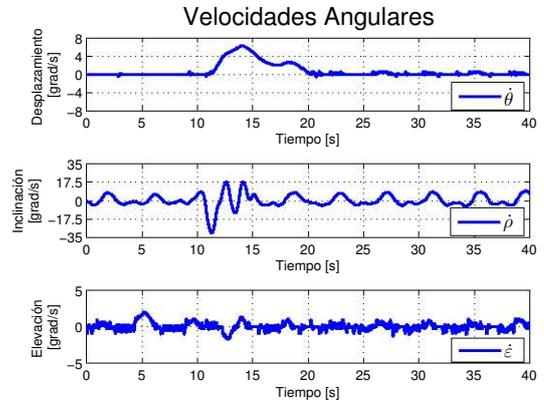


Figura 5.9: Velocidades Angulares.

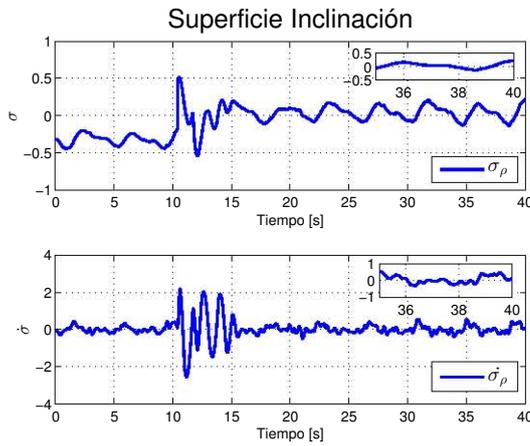


Figura 5.10: Superficie Inclinación.

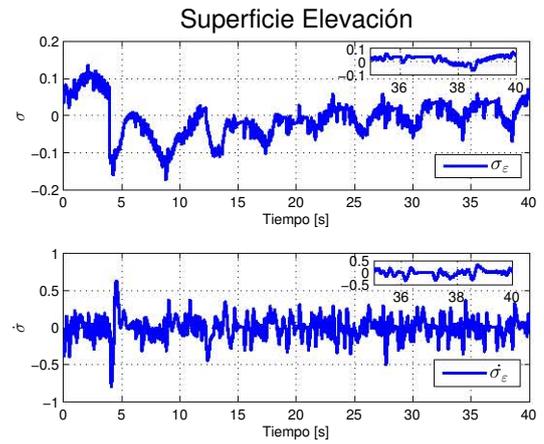


Figura 5.11: Superficie Elevación.

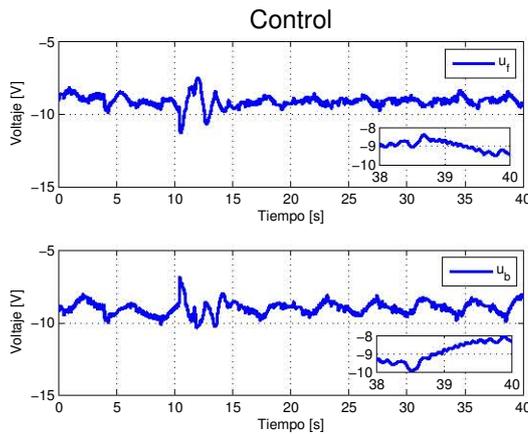


Figura 5.12: Señales de Control.

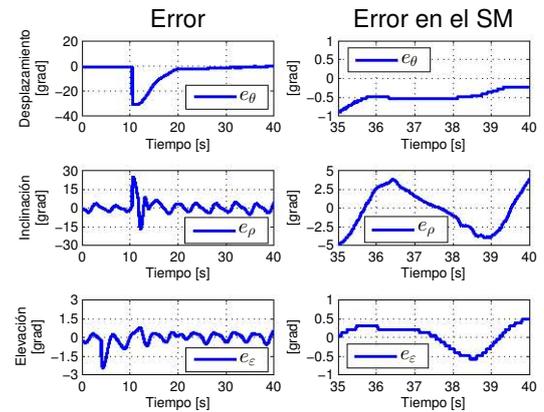


Figura 5.13: Errores.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave y sin sobrepaso. Se logró un seguimiento de la señal de referencia PID eficiente, aunque el ángulo de inclinación presentó oscilaciones en el modo deslizante. La elevación del helicóptero se vio afectada por el fuerte acoplamiento con la dinámica de inclinación.

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* está en la Fig. 5.10, converge a una vecindad de cero, al igual que su derivada temporal. En la Fig. 5.11, la superficie del *error de Elevación* y su derivada temporal convergen a cero con vibraciones de alta frecuencia y baja amplitud en el modo deslizante. Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.12, las cuales son adecuadas para los motores.

En la Fig. 5.13 se muestran las señales de error, en ellas se puede medir la amplitud de las oscilaciones en torno al punto de operación deseado. La precisión obtenida en el modo deslizante en grados es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 0.234 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 3.853 \quad ; \quad \|e_\varepsilon\|_{\text{máx}} = 0.483,$$

en el caso de los ángulos de inclinación y desplazamiento el desempeño es adecuado. En la elevación, oscilaciones con amplitud de casi 1/2 grado son excesivas.

A continuación se mostrará el desempeño del sistema cuando se incrementa el orden del controlador.

5.1.2. Grado Relativo Dos

Prueba 1: Considerando condiciones iniciales nulas, aproximadamente en $t = 5$ [s], la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 2^\circ$, mientras que en $t = 10$ [s] el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 30^\circ$. La Figura 5.14 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.15.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave y sin sobrepaso, debido a que la señal de referencia PID fue seguida correctamente. La dinámica de elevación si vio afectada levemente por la variación del ángulo de inclinación, pero se estabilizó rápidamente y se obtuvo una buena regulación a la posición deseada.

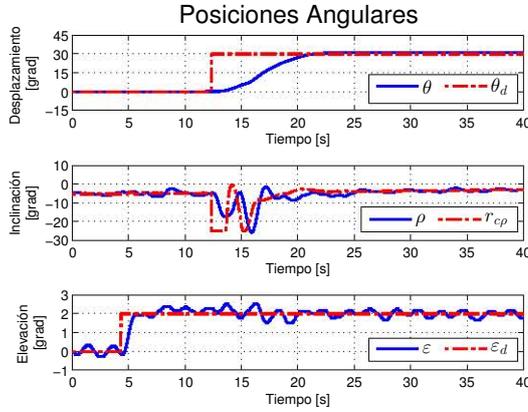


Figura 5.14: Estados del Sistema.

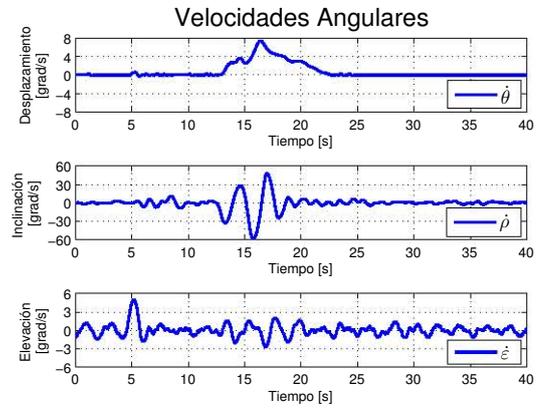


Figura 5.15: Velocidades Angulares.

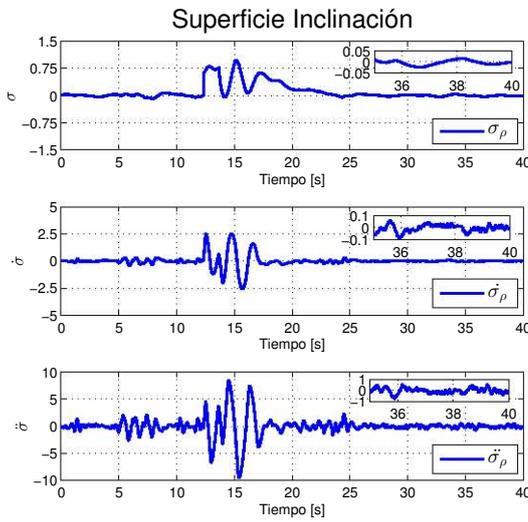


Figura 5.16: Superficie Inclinación.

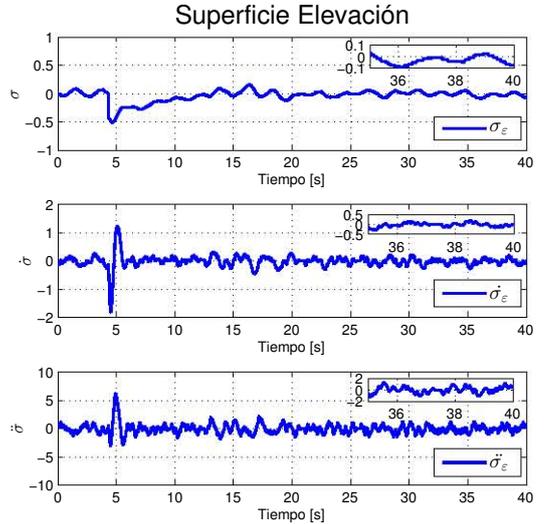


Figura 5.17: Superficie Elevación.

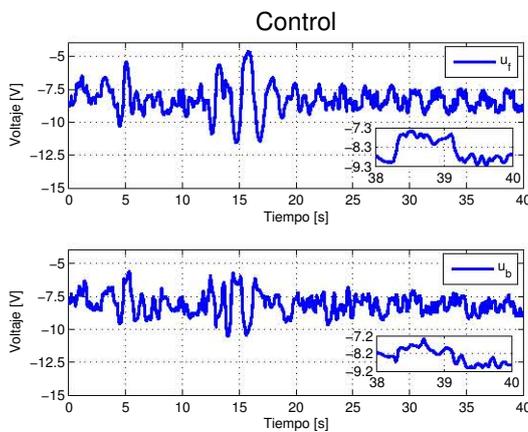


Figura 5.18: Señales de Control.

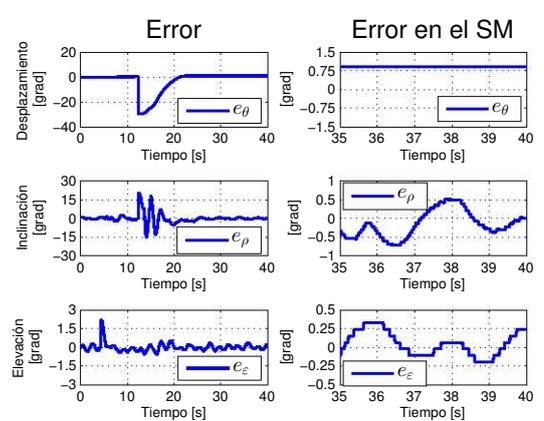


Figura 5.19: Errores.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* está en la Fig. 5.16, presenta oscilaciones de baja amplitud en torno a cero, al igual que sus dos primeras derivadas temporales. En la Fig. 5.17, la superficie del *error de elevación* y sus dos primeras derivadas temporales convergen a cero con vibraciones de baja amplitud.

Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.18, las cuales son adecuadas para los motores. En la Fig. 5.19 se muestran las señales de error, la precisión obtenida en el modo deslizante en grados es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 0.893 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 0.515 \quad ; \quad \|e_\varepsilon\|_{\text{máx}} = 0.197,$$

que corresponde con un desempeño adecuado de todo el sistema.

Prueba 2: Considerando la condición inicial $X_0 = [2^\circ \ 0 \ 30^\circ \ 0 \ 0 \ 0]$. Aproximadamente en $t = 5 [s]$, la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 4^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 60^\circ$. La Figura 5.20 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.21.

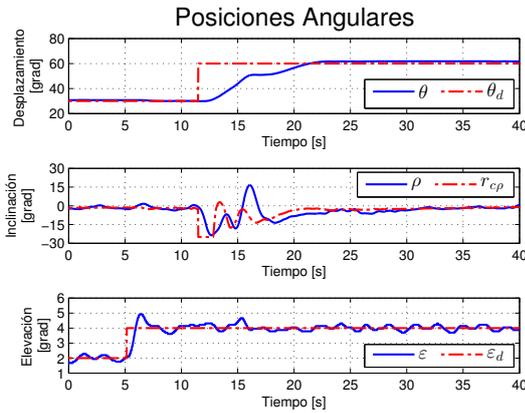


Figura 5.20: Estados del Sistema.

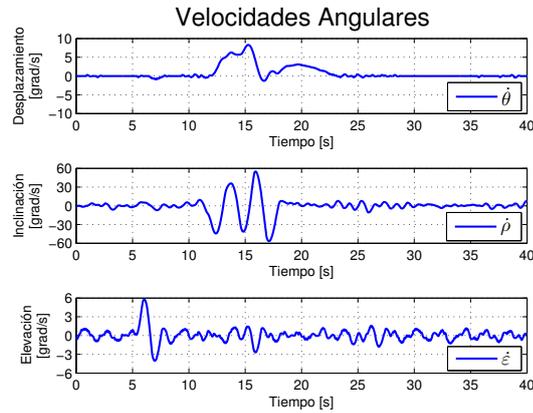


Figura 5.21: Velocidades Angulares.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave y con sobrepaso mínimo, la dinámica de elevación tuvo un sobrepaso aceptable y no se vio afectada por la variación en el ángulo de inclinación.

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* así como sus dos primeras derivadas temporales, presentan vibraciones de alta frecuencia y baja amplitud en el modo deslizante, ver Fig. 5.22. En la Fig. 5.23, la superficie del *error de Elevación* y su derivada temporal convergen a cero, pero con vibraciones de baja amplitud.

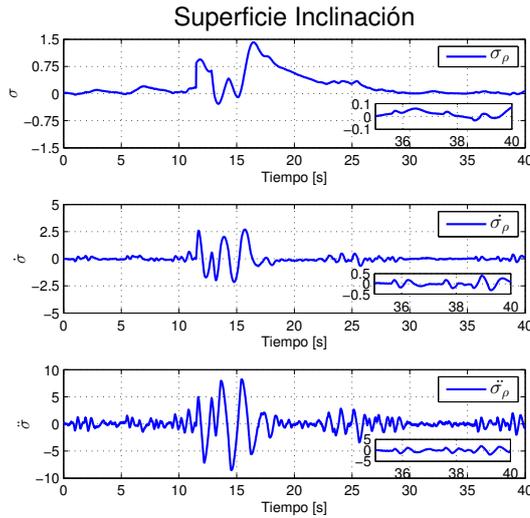


Figura 5.22: Superficie Inclinación.

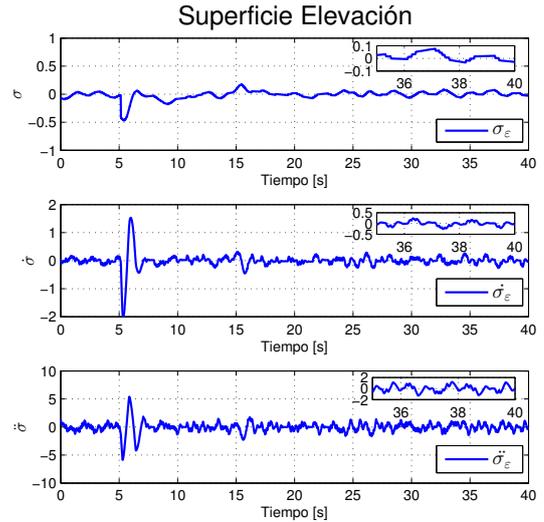


Figura 5.23: Superficie Elevación.

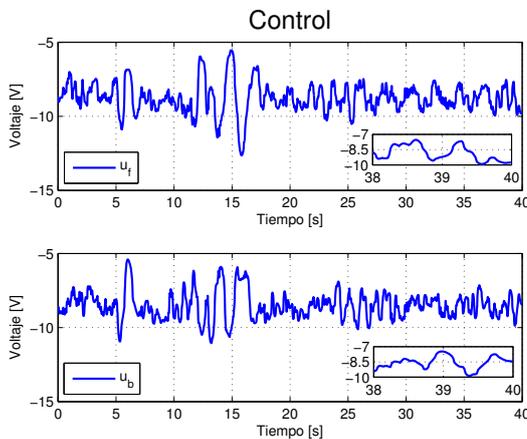


Figura 5.24: Señales de Control.

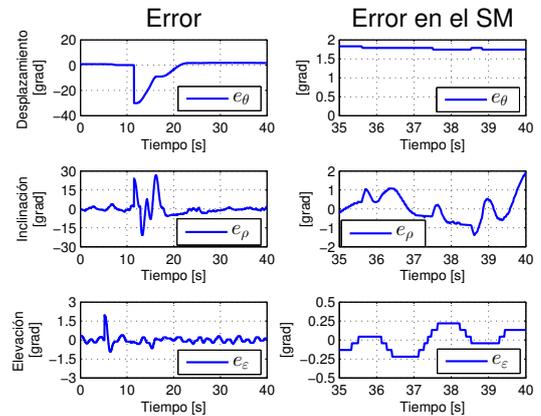


Figura 5.25: Errores.

Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.24, las cuales son adecuadas para los motores. En la Fig. 5.25 se muestran las señales de error, en ellas se puede medir la amplitud de las oscilaciones en torno al punto de operación deseado.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La precisión obtenida en el modo deslizante en grados es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 1.831 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 1.924 \quad ; \quad \|e_\varepsilon\|_{\text{máx}} = 0.219,$$

que corresponde con un desempeño adecuado de todo el sistema.

5.1.3. Análisis de Resultados

Después de observar el comportamiento del sistema en lazo cerrado con los controladores de orden dos y tres, bajo el diseño de superficies de deslizamiento por Ubicación de Polos, es claro que en ambos casos la regulación fue eficiente.

Analizando el comportamiento del error, se intentará mostrar el desempeño alcanzado con el incremento de orden del controlador.

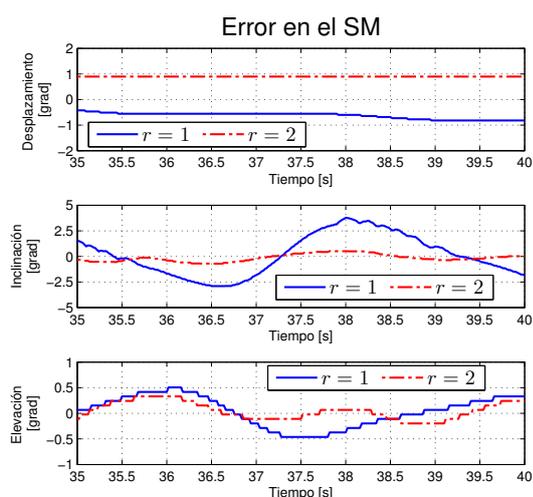


Figura 5.26: Prueba 1.

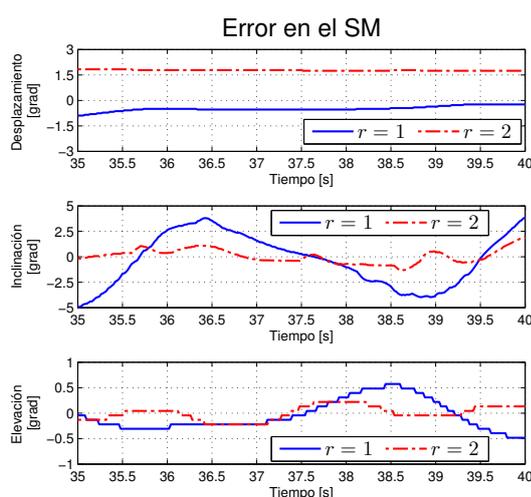


Figura 5.27: Prueba 2.

La precisión en grados obtenida con los controladores STA y 3-STA en el modo deslizante, se muestra gráficamente en las Figuras 5.26 y 5.27.

Error	$r = 1$	$r = 2$
e_θ	0.425	0.893
e_ρ	3.774	0.515
e_ε	0.461	0.197

Prueba 1

Error	$r = 1$	$r = 2$
e_θ	0.234	1.831
e_ρ	3.853	1.924
e_ε	0.483	0.219

Prueba 2

En ambas pruebas es claro que con grado relativo $r = 1$ el error de desplazamiento es menor, pero existe mayor desviación en los ángulos de inclinación y elevación. El mejor desempeño fue el obtenido con el algoritmo Súper-Twisting de Tercer Orden, ya que tiene control de la superficie de deslizamiento y de sus dos primeras derivadas temporales, minimizando el error en el modo deslizante.

Con el método de Ubicación de Polos se diseñaron superficies de grado relativo uno y dos para los controladores STA y 3-STA, respectivamente, logrando una buena regulación de los estados del sistema al punto de operación deseado. En seguida se pondrá a prueba el segundo método de diseño de superficies, con el que se esperan resultados similares.

5.2. LQ Singular

5.2.1. Grado Relativo Uno

Prueba 1: Considerando la condición inicial $X_0 = [4^\circ \ 0 \ 60^\circ \ 0 \ 0 \ 0]$. Aproximadamente en $t = 5 [s]$, la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 6^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 120^\circ$. La Figura 5.28 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.29.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave, debido a que la referencia PID fue seguida correctamente por el ángulo de inclinación. La elevación del helicóptero se vio levemente afectada por la dinámica fuertemente acoplada.

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* está en la Fig. 5.30, presenta oscilaciones en torno a cero que se reflejan directamente en el seguimiento de la referencia PID; su derivada temporal converge a una vecindad de cero. En la Fig. 5.31, la superficie del *error de elevación* y su derivada temporal convergen a cero rápidamente, pero con oscilaciones sostenidas en el modo deslizante. Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.32, las cuales son adecuadas para los motores.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

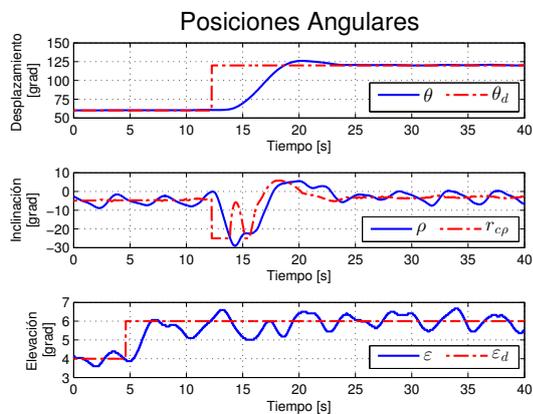


Figura 5.28: Estados del Sistema.

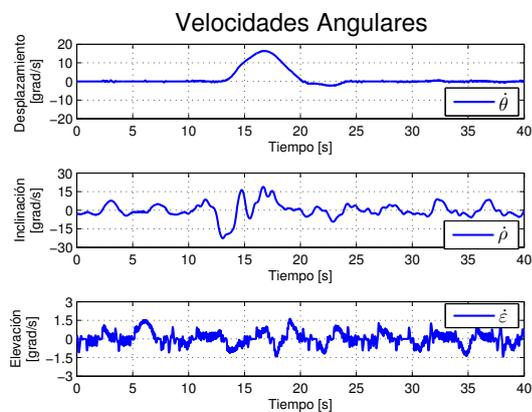


Figura 5.29: Velocidades Angulares.

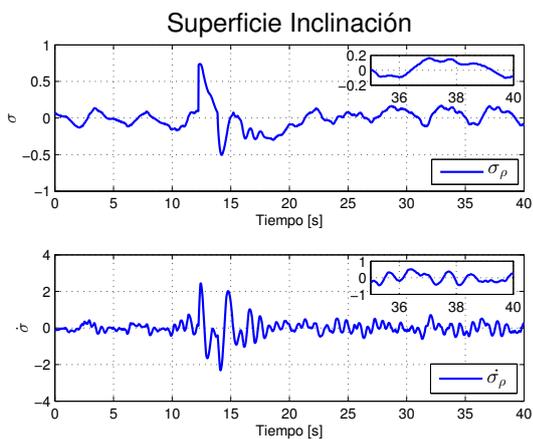


Figura 5.30: Superficie Inclinación.

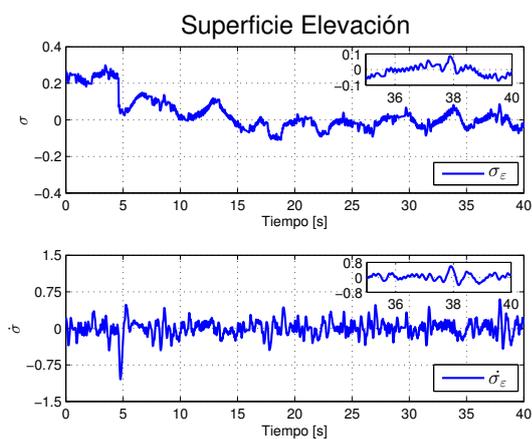


Figura 5.31: Superficie Elevación.

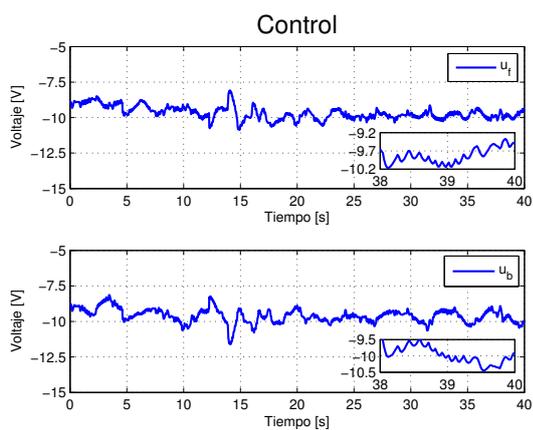


Figura 5.32: Señales de Control.

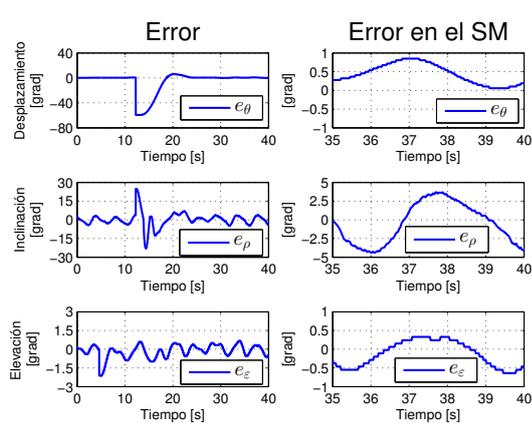


Figura 5.33: Errores.

En la Fig. 5.33 se muestran las señales de error; en ellas se puede apreciar la mag-

nitudo del error para cada grado de libertad y medir la amplitud de las oscilaciones en torno al punto de operación deseado. La precisión en grados obtenida, en el modo deslizando es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 0.849 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 3.700 \quad ; \quad \|e_\varepsilon\|_{\text{máx}} = 0.638, \quad (5.1)$$

en el caso de los ángulos de inclinación y desplazamiento el desempeño es adecuado. En la elevación un error mayor a 1/2 grado es excesivo.

Prueba 2: Considerando la condición inicial $X_0 = [6^\circ \ 0 \ 120^\circ \ 0 \ 0 \ 0]$. Aproximadamente en $t = 5 [s]$, la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 0^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 0^\circ$. La Figura 5.34 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.35.

La superficie de deslizamiento del *error de inclinación* está en la Fig. 5.36, converge a una vecindad de cero, al igual que su derivada temporal. En la Fig. 5.37, la superficie del *error de elevación* y su derivada temporal convergen a cero con vibraciones de alta frecuencia y baja amplitud en el modo deslizando.

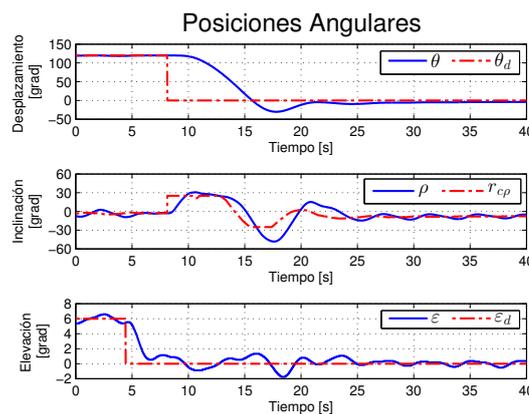


Figura 5.34: Estados del Sistema.

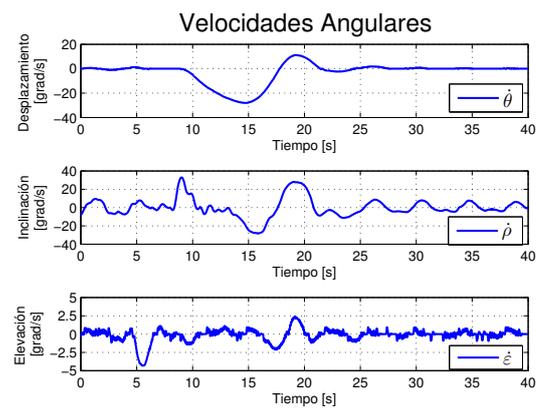


Figura 5.35: Velocidades Angulares.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

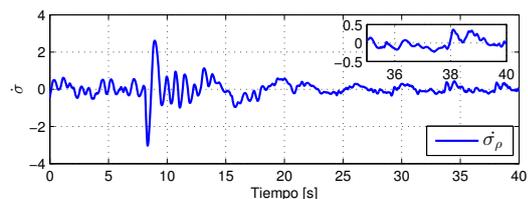
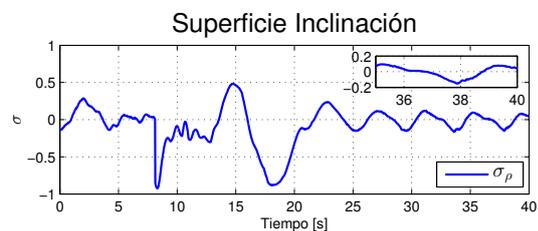


Figura 5.36: Superficie Inclinación.

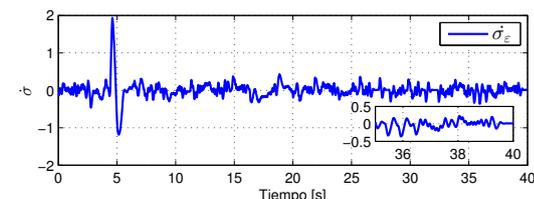
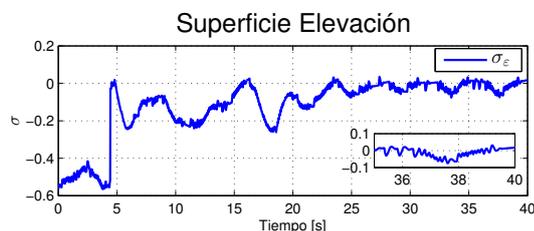


Figura 5.37: Superficie Elevación.

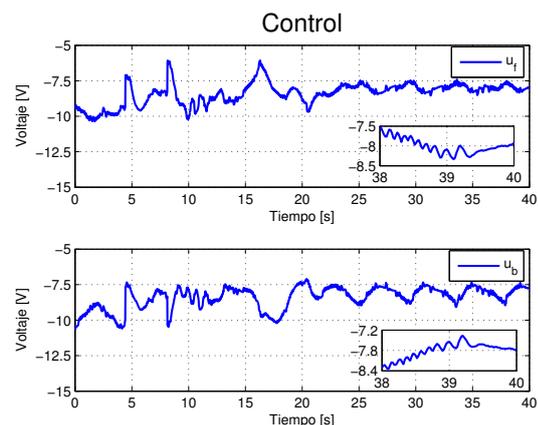


Figura 5.38: Señales de Control.

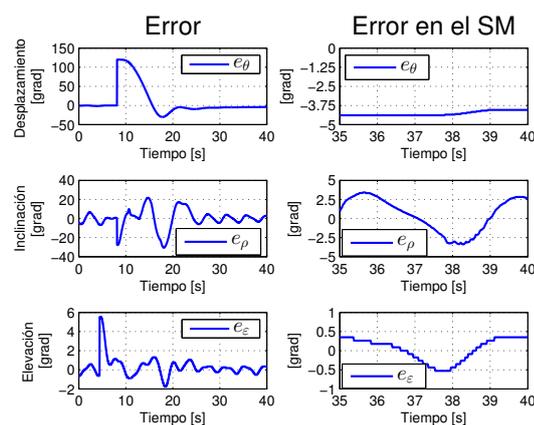


Figura 5.39: Errores.

Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.38, las cuales son adecuadas para los motores. En la Fig. 5.39 se muestran las señales de error, la precisión obtenida en el modo deslizante en grados es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 4.043 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 3.418 \quad ; \quad \|e_\epsilon\|_{\text{máx}} = 0.527,$$

en el caso de los ángulos de inclinación y desplazamiento el desempeño es adecuado, en la elevación, oscilaciones con amplitud de 1/2 grado son excesivas.

A continuación se mostrará el desempeño del sistema cuando se incrementa el orden del controlador.

5.2.2. Grado Relativo Dos

Prueba 1: Considerando la condición inicial $X_0 = [4^\circ \ 0 \ 60^\circ \ 0 \ 0 \ 0]$. Aproximadamente en $t = 5 [s]$, la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 6^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 120^\circ$. La Figura 5.40 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares son presentadas en la Figura 5.41.

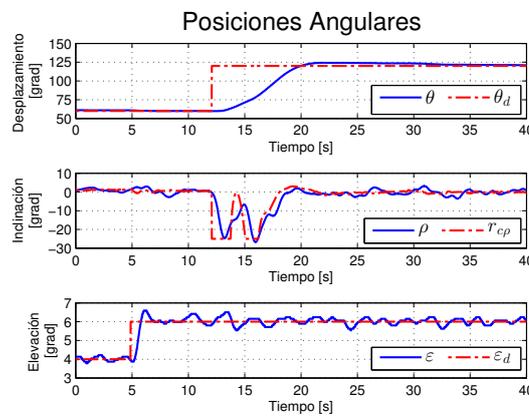


Figura 5.40: Estados del Sistema.

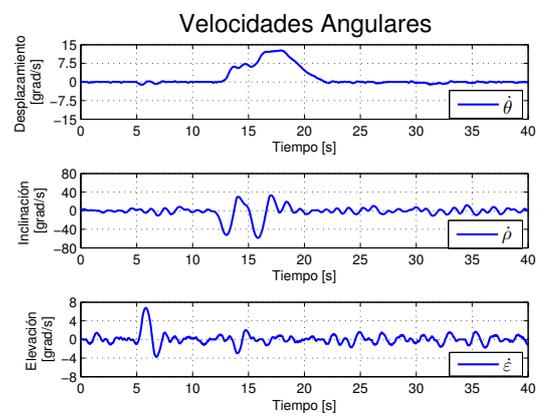


Figura 5.41: Velocidades Angulares.

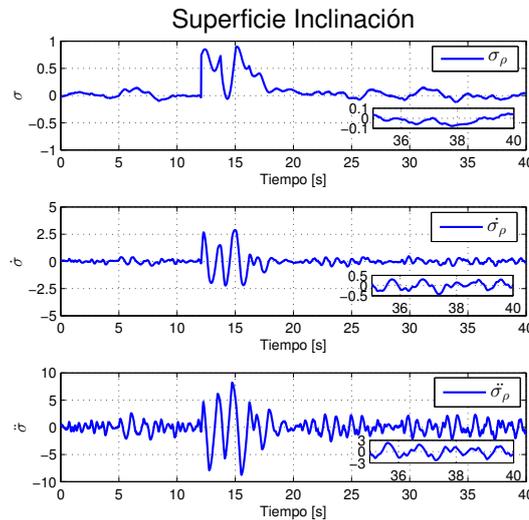


Figura 5.42: Superficie Inclinación.

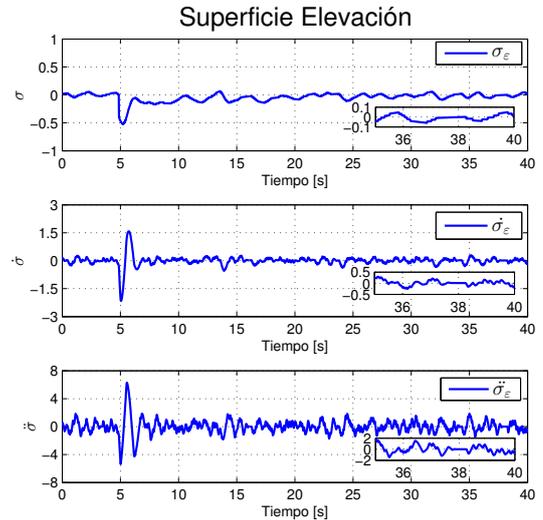


Figura 5.43: Superficie Elevación.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave y con sobrepaso mínimo, debido a que la señal de referencia PID fue seguida correctamente. La

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

dinámica de elevación si vio afectada levemente por la variación del ángulo de inclinación, pero se estabilizó rápidamente y se obtuvo una buena regulación a la posición deseada.

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* está en la Fig. 5.42, presenta vibraciones de baja amplitud en torno a cero, al igual que sus dos primeras derivadas temporales. En la Fig. 5.43, la superficie del *error de elevación* y sus dos primeras derivadas temporales convergen a cero rápidamente, con oscilaciones de baja amplitud en el modo deslizante.

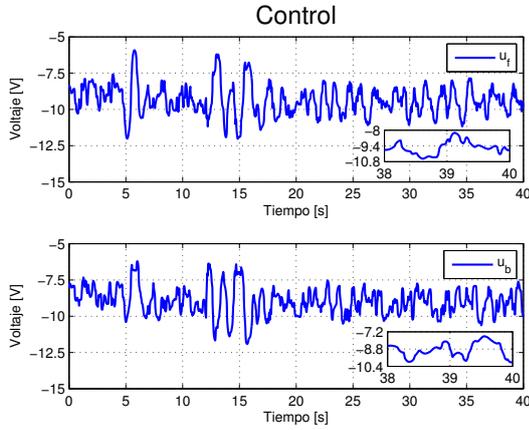


Figura 5.44: Señales de Control.

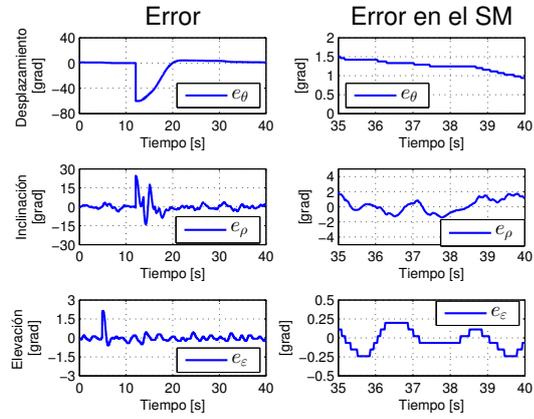


Figura 5.45: Errores.

Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.44, las cuales son adecuadas para los motores. En la Fig. 5.45 se muestran las señales de error, la precisión obtenida en grados es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 1.509 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 1.962 \quad ; \quad \|e_\varepsilon\|_{\text{máx}} = 0.198,$$

que corresponde con un desempeño adecuado de todo el sistema.

Prueba 2: Considerando la condición inicial $X_0 = [2^\circ \ 0 \ 30^\circ \ 0 \ 0 \ 0]$. Aproximadamente en $t = 5 [s]$, la *elevación* deseada se modifica a $\varepsilon_d = 4^\circ$, mientras que en $t = 10 [s]$ el *desplazamiento* deseado es $\theta_d = 60^\circ$. La Figura 5.46 muestra la regulación de los estados a las posiciones angulares deseadas, así como el seguimiento de referencia por parte del ángulo de *inclinación*. Las velocidades angulares están en la Figura 5.47.

El desplazamiento deseado θ_d fue alcanzado con un movimiento suave y con poco sobrepaso. La dinámica de elevación fue afectada por la variación del ángulo de inclinación, debido a que este último superó la restricción impuesta para evitar perder elevación durante el desplazamiento.

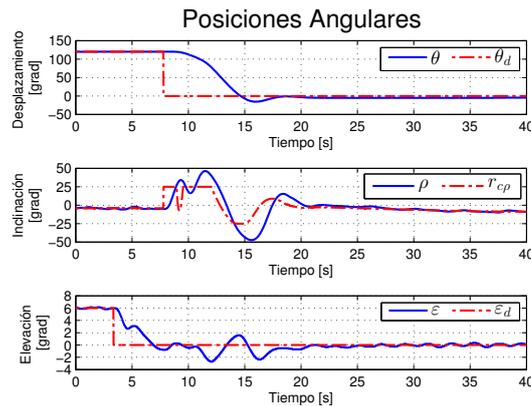


Figura 5.46: Estados del Sistema.

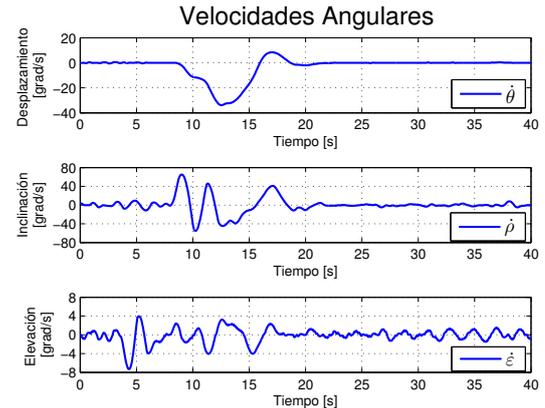


Figura 5.47: Velocidades Angulares.

La variable de deslizamiento del *error de inclinación* así como sus dos primeras derivadas temporales, presentan vibraciones de alta frecuencia y baja amplitud en el modo deslizante, ver Fig. 5.48. En la Fig. 5.49, la superficie del *error de elevación* y su derivada temporal convergen a cero, pero con oscilaciones sostenidas en el modo deslizante.

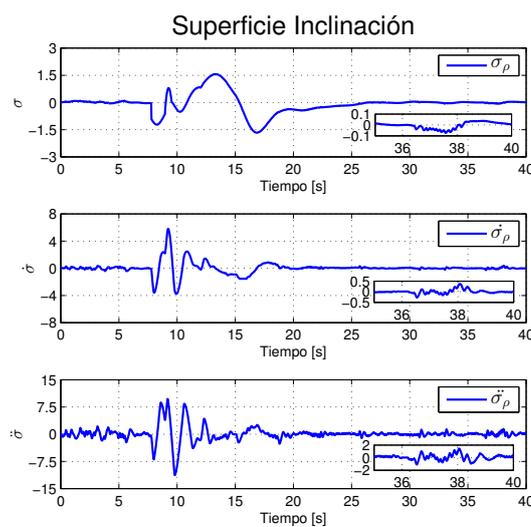


Figura 5.48: Superficie Inclinación.

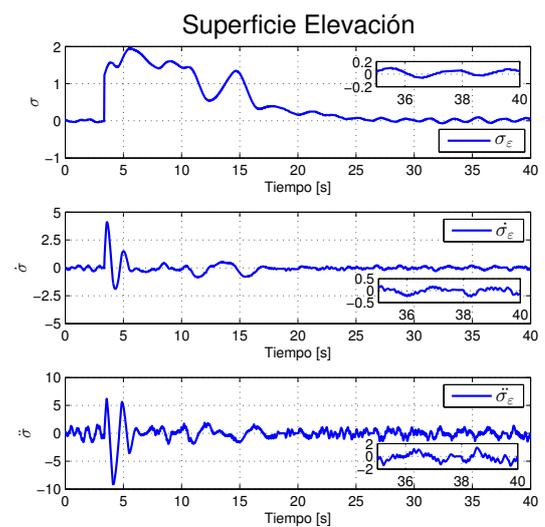


Figura 5.49: Superficie Elevación.

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Las señales de control continuo se pueden ver en la Fig. 5.50, las cuales son adecuadas para los motores.

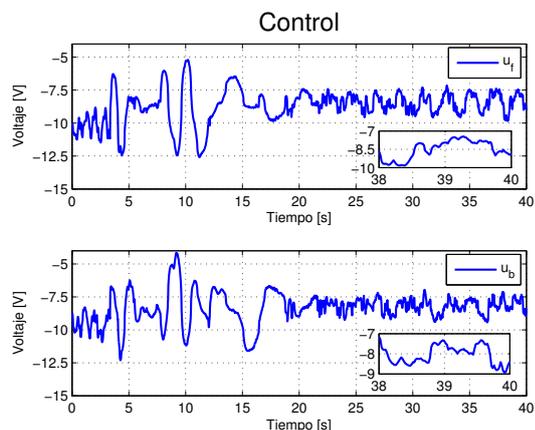


Figura 5.50: Señales de Control.

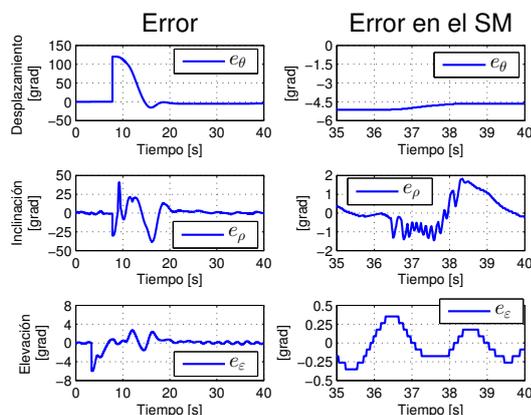


Figura 5.51: Errores.

En la Fig. 5.51 se muestran las señales de error, en ellas se puede medir la amplitud de las oscilaciones en torno al punto de operación deseado. La precisión obtenida en el modo deslizante en grados es

$$\|e_\theta\|_{\text{máx}} = 4.658 \quad ; \quad \|e_\rho\|_{\text{máx}} = 1.832 \quad ; \quad \|e_\varepsilon\|_{\text{máx}} = 0.351, \quad (5.2)$$

que corresponde con un desempeño adecuado de todo el sistema.

5.2.3. Análisis de Resultados

Después de observar el comportamiento del sistema en lazo cerrado con los controladores de orden dos y tres, bajo el diseño de superficies de deslizamiento LQ Singular, es claro que en ambos casos la regulación fue eficiente.

Analizando el comportamiento del error, se intentará mostrar el desempeño alcanzado con el incremento de orden del controlador. La amplitud máxima del error en el modo deslizante se presenta a continuación

Error	$r = 1$	$r = 2$
e_θ	0.849	1.509
e_ρ	3.700	1.962
e_ε	0.638	0.198

Prueba 1

Error	$r = 1$	$r = 2$
e_θ	4.073	4.658
e_ρ	3.418	1.832
e_ε	0.527	0.351

Prueba 2

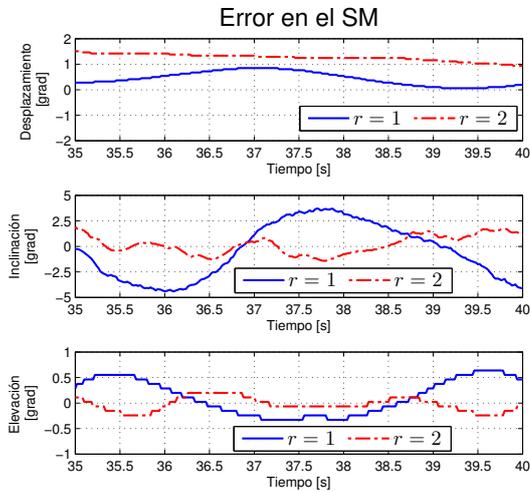


Figura 5.52: Prueba 1.

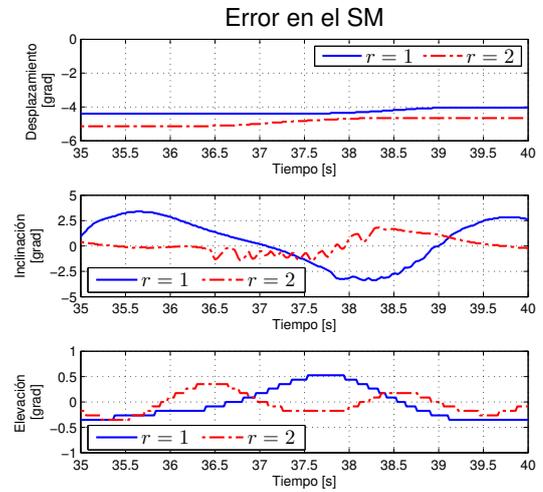


Figura 5.53: Prueba 2.

En ambas pruebas es claro que con grado relativo $r = 1$ el error de desplazamiento es menor, pero existe mayor desviación en los ángulos de inclinación y elevación. El mejor desempeño fue el obtenido con el algoritmo Súper-Twisting de Tercer Orden, ya que logró un seguimiento de referencia más eficiente por parte del ángulo de inclinación y la elevación alcanzó el punto de operación de manera más robusta.

Conclusiones

En este trabajo se mostraron métodos para obtener superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario, para controladores por modos deslizantes de orden superior y se implementaron de manera práctica. Las señales de control continuo que se obtuvieron con el STA y el 3-STA atenuaron los efectos del *chattering*, con esto los estados del sistema únicamente presentaron leves vibraciones en el modo deslizante.

El objetivo de controlar un helicóptero de tres grados de libertad se logró y el desempeño obtenido fue bueno; las posiciones angulares deseadas se alcanzaron en poco tiempo y con movimientos suaves debido a la convergencia exponencial de los errores a cero. Se demostró en forma experimental que al incrementar el orden del controlador, el máximo de los errores en el modo deslizante disminuye.

Fue necesario implementar un algoritmo de diferenciación para obtener las velocidades del sistema y las derivadas temporales de las variables de deslizamiento. El Diferenciador Robusto y Exacto de tercer orden, realizó una buena estimación de estas variables y al producir señales continuas, no contribuyó en el aumento del *chattering*.

El modelo matemático utilizado para el diseño de las superficies, permitió comprobar la robustez de los algoritmos de control por modos deslizantes, ya que no contempla dinámicas no lineales ni términos gravitatorios. El desacople en dos subsistemas *Elevación y Inclinación* y *Desplazamiento*, permitió diseñar leyes de control por separado, pero quedó claro que la dinámica entre ellos es fuertemente acoplada.

Modos Deslizantes Convencionales

Como es de esperarse, siempre habrá discrepancia entre la planta real y el modelo matemático utilizado para el diseño del controlador. Estas discrepancias (o desajustes) surgen de perturbaciones externas desconocidas, incertidumbre en los parámetros de la planta, dinámicas parasitarias (no modeladas) o aproximaciones de sistemas no lineales mediante modelos lineales. El diseño de leyes de control que alcanzan desempeños deseados en lazo cerrado, en presencia de perturbaciones/incertidumbres es de gran interés en el desarrollo de los llamados métodos de control robusto [14]. Un enfoque particular de diseño es la denominada técnica de control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés). Para mostrar de forma sencilla el enfoque clásico y las ventajas de utilizar esta técnica, se propone como ejemplo el sistema de segundo orden que representa un motor de corriente directa:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{J} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} F_r(t), \quad (\text{A.1})$$

- θ [rad]: posición angular de la flecha.
- ω $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$: velocidad angular de la flecha.
- $u(t)$ es la señal de voltaje.
- $F_r(t)$ representan los efectos dinámicos de fricción o carga.
- $K_t = 0.225 \left[\frac{\text{Nm}}{\sqrt{\text{W}}} \right]$: constante del motor.
- $J = 0.5$ [$\text{Kg}m^2$]: inercia de la flecha.

A.1. Conceptos Principales

El control por modos deslizantes en términos generales consiste en seleccionar una superficie de deslizamiento en el espacio de estados de acuerdo a la dinámica deseada en lazo cerrado. Se diseña una ley de control que lleve las trayectorias del sistema hacia la superficie y una vez alcanzada, mantenerse sobre ella. La superficie en el espacio de estados se define:

$$S = \{x : \sigma(x) = 0\}. \quad (\text{A.2})$$

Un modo deslizante ideal toma lugar en la superficie (A.2), si el estado $x(t)$ evoluciona con el tiempo de tal forma que se alcanza la superficie en $t = t_r$, es decir, $\sigma(x(t_r)) = 0$ para algún $t_r \in \mathfrak{R}^+$ finito y se cumple que $\sigma(x(t)) = 0$ para todo $t > t_r$ [1].

Para el ejemplo del Motor de DC (A.1), la dinámica de los estados es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{K_t}{J}u(t) + \frac{F_r(t)}{J}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$F_r(t)$ es un término de perturbación que comprende a la fricción seca, viscosa y otras fuerzas resistivas que se asumen acotadas; $|\frac{F_r(t)}{J}| \leq L$.

Se elige la variable deslizante como una combinación lineal de los estados

$$\sigma = x_2 + cx_1 ; \quad c > 0, \quad (\text{A.4})$$

cuya dinámica es

$$\dot{\sigma} = cx_2 + \frac{K_t}{J}u(t) + \frac{F_r(t)}{J}. \quad (\text{A.5})$$

Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (\text{A.6})$$

para garantizar estabilidad asintótica de (A.5), por lo que se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. $\dot{V} < 0$ para $\sigma \neq 0$.
2. $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$.

La condición número 2 se satisface en (A.6). Para lograr convergencia en tiempo finito (estabilidad global en tiempo finito), la condición 1 se modifica a

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2}, \quad \alpha > 0, \quad (\text{A.7})$$

al resolver la desigualdad (A.7) por el método de separación de variables

$$\begin{aligned} \int_0^t V^{-1/2} dV &\leq -\alpha \int_0^t dt \\ V^{1/2}(t) &\leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{1/2}(0), \end{aligned}$$

se llega a que el tiempo en el que $V(t)$ alcanza cero es finito

$$t_r \leq \frac{2V^{1/2}(0)}{\alpha}.$$

Tomando la derivada temporal de V en (A.6):

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma \left(cx_2 + \frac{K_t}{J} u(t) + \frac{F_r(t)}{J} \right),$$

si la señal de control tiene la siguiente forma

$$u(t) = -\frac{J}{K_t} cx_2 + \frac{J}{K_t} v, \quad (\text{A.8})$$

se debe cumplir la desigualdad

$$\dot{V} = \sigma \left(\frac{F_r(t)}{J} + v \right) = \sigma \frac{F_r(t)}{J} + \sigma v \leq |\sigma|L + \sigma v. \quad (\text{A.9})$$

Un controlador por modos deslizantes clásico (de primer orden) consiste en una función signo

$$v = -\rho \text{sign}(\sigma), \quad \text{con } \rho > 0, \quad (\text{A.10})$$

al sustituir (A.10) en (A.9), es clara la influencia de la ganancia ρ con respecto a la cota de la perturbación L para hacer cumplir la condición 1:

$$\dot{V} \leq |\sigma|L - |\sigma|\rho = -|\sigma|(\rho - L). \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo (A.6) en la condición (A.7), se puede reescribir como

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma|, \quad (\text{A.12})$$

A. MODOS DESLIZANTES CONVENCIONALES

que en ocasiones se denomina *condición de existencia del modo deslizante*, e implica que las trayectorias del sistema son llevadas a la superficie y permanecen en ella, una vez que ésta se alcanza [1]. Combinando las ecuaciones (A.11) y (A.12) se obtiene

$$-|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|,$$

finalmente la ganancia del controlador es

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.13})$$

el primer término en la ganancia (A.13) está designado a compensar la perturbación $F_r(t)/J$, mientras que el segundo término determina el tiempo de alcance de la superficie de deslizamiento. Conforme más grande sea α , el tiempo de alcance disminuye.

Si consideramos como señal de perturbación $F_r(t) = 0.5 + \cos(t) + \sin(2t)$, la ganancia $\rho = 8$ en (A.10) y un controlador de la forma (A.8). La simulación del sistema (A.1) con la variable deslizante (A.4) bajo el paso de muestreo $\tau = 10^{-3}$ es

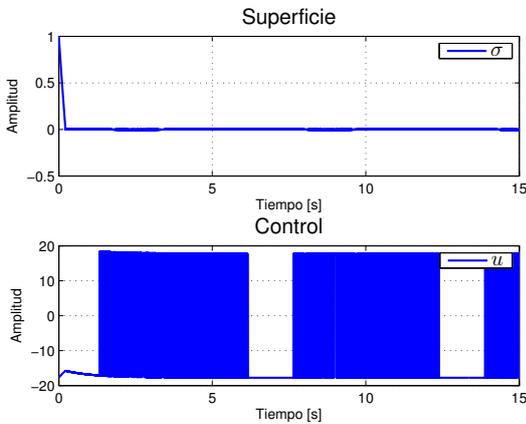


Figura A.1: Superficie y Control.

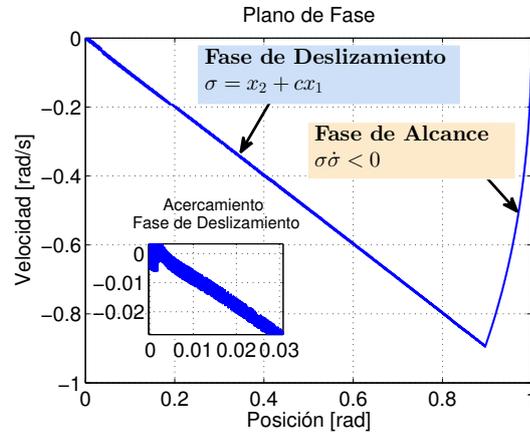


Figura A.2: Plano de Fase.

La Figura (A.1) ilustra la convergencia en tiempo finito de la superficie, además es claro el efecto de la conmutación de la señal de control que causa un "Zigzag" en la superficie. A este efecto se le conoce como Chattering y puede ser muy perjudicial para los actuadores por la amplitud y cambio de signo de $u(t)$.

El plano de fase de la Figura A.2 muestra dos fenómenos que exhiben los SMC: la *fase de alcance*, cuando las trayectorias del sistema son conducidas a la superficie deslizante y la *fase de deslizamiento*, cuando las trayectorias del sistema convergen a cero a través de la superficie de deslizamiento.

A.2. Control Equivalente

El control equivalente es la acción de control *continuo* necesaria para mantener una dinámica de deslizamiento ideal en la superficie S . En modos deslizantes convencionales, dicha dinámica toma lugar en $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ [1], esto es:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

en el ejemplo del motor de DC, se busca la condición que cumpla con la igualdad por lo tanto de (A.5)

$$cx_2 + \frac{K_t}{J}u_{eq}(t) + \frac{F_r(t)}{J} = 0, \quad (\text{A.14})$$

se puede despejar el control equivalente

$$u_{eq}(t) = -\frac{J}{K_t} \left(cx_2 + \frac{F_r(t)}{J} \right). \quad (\text{A.15})$$

Características principales:

- La expresión del control equivalente (A.15) se puede obtener de forma algebraica al resolver (A.14). La señal de control aplicada físicamente a la planta es de naturaleza discontinua sin embargo $u_{eq}(t)$ es siempre suave.
- La acción de control equivalente describe un efecto "promedio" de la conmutación de alta frecuencia en la señal de control, debida a la función signo.

El control equivalente (A.15) depende del conocimiento de la perturbación $F_r(t)$ normalmente desconocida, en consecuencia no puede ser aplicado físicamente. Sin embargo se define el **control equivalente nominal**, como la parte conocida del sistema:

$$u_{eqn}(t) = -\frac{J}{K_t}cx_2,$$

de esta forma el control por modos deslizantes únicamente se encarga de la perturbación, de ahí que la señal de control tenga la forma (A.8).

A.3. Ecuaciones de Modos Deslizantes

Sustituyendo el SMC (A.8) en el sistema dinámico (A.3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \rho \operatorname{sign}(x_2 + cx_1) + \frac{F_r(t)}{J}, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

la ecuación (A.16) es de naturaleza discontinua ya que pierde continuidad en cada punto en el que $\sigma = 0$, sin embargo el control equivalente es el encargado de mantener las trayectorias del sistema en la superficie. Para obtener las ecuaciones compensadas del sistema dinámico en el modo deslizante ($\sigma \equiv 0$), se sustituye el control equivalente (A.15) en (A.3), además se cumple que $x_2 = -cx_1$, entonces:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \underbrace{\left(-cx_2 - \frac{F_r(t)}{J}\right)}_{u_{eq}} + \frac{F_r(t)}{J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \end{cases}.$$

Finalmente el sistema con dinámica compensada en el modo deslizante se reduce a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1 \\ x_2 = -cx_1 \end{cases} \quad x_1(t_r) = x_{1r}, \quad (\text{A.17})$$

para todo $t \geq t_r$ el sistema compensado tiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1r} e^{-c(t-t_r)} \\ x_2(t) &= -cx_{1r} e^{-c(t-t_r)}, \end{aligned}$$

es claro que el parámetro $c > 0$ modifica la tasa de convergencia de los estados a cero, por tanto lo llamaremos *ganancia de la superficie*.

De la simulación anterior con $c = 1$, la Figura (A.3) exhibe la convergencia exponencial de los estados del sistema a cero, a pesar de la perturbación acoplada $F_r(t)$.

En resumen:

- El diseño de SMC convencionales se reduce a dos tareas: Primero, seleccionar una superficie de deslizamiento de grado relativo $r = 1$. Segundo, diseñar una ley de control $u(t)$ que lleve a la variable deslizante a cero y la mantenga ahí.

- A pesar de que la superficie es cero en tiempo finito, los estados convergen en forma exponencial.
- El sistema original (A.1) es de orden dos, mientras que su dinámica en el modo deslizante es de orden uno. Por tanto se dice que *la dinámica del sistema en el modo deslizante es de orden reducido*.
- La dinámica del sistema en el modo deslizante no depende de la perturbación $F_r(t)$, es decir que está compensada. Sin embargo su cota debe ser considerada para el diseño de la ganancia del controlador.
- Las señales de control en las Figuras A.1 y ?? son discontinuas y cambian de polaridad con una frecuencia muy alta, si se aplicaran al motor de corriente directa le causarían daños.

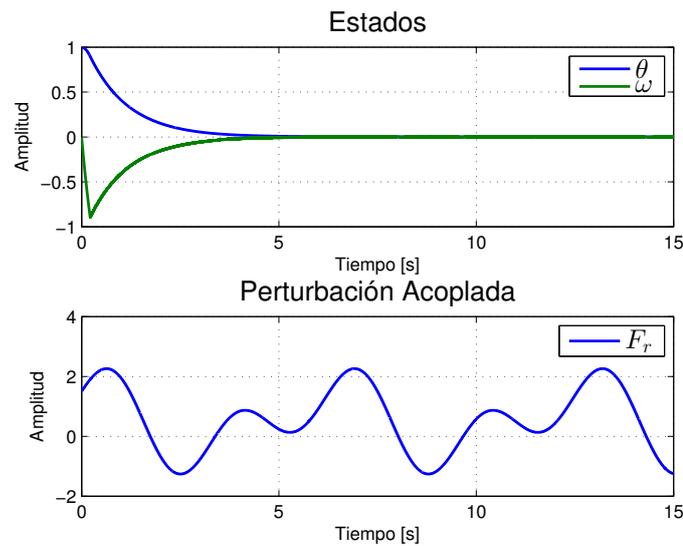


Figura A.3: Estados y Perturbación.

Cálculo de las Ganancias

En este Apéndice se muestra cómo calcular las ganancias de los controladores STA y 3-STA a partir de funciones de Lyapunov, obteniéndose condiciones suficientes para la estabilidad en lazo cerrado.

B.1. Super-Twisting

El algoritmo Super-Twisting [22] (STA por sus siglas en inglés), es de segundo orden y tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v \\ \dot{v} &= -k_2 \text{sign}(\sigma). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Este algoritmo fue diseñado para ser aplicado principalmente a sistemas con grado relativo $r = 1$, o bien con una superficie diseñada de la forma:

$$\dot{\sigma} = h(t, \sigma) + g(t, \sigma)u_1,$$

donde $g(t, \sigma) \neq 0$ es la función de entradas y $h(t, \sigma)$ es una función de perturbación incierta, de la que se conoce la cota máxima $\|\frac{dh(t, \sigma(t))}{dt}\| \leq \Delta$. Suponiendo que $g(t, \sigma)$ es conocida, la dinámica en la superficie con $u_1 = (g(t, \sigma))^{-1} u$ es

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = h(t, \sigma) - k_1|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v \\ \dot{v} = -k_2 \text{sign}(\sigma), \end{cases} \tag{B.2}$$

de esta forma la parte integral v se convierte en la perturbación $h(t, \sigma)$ en tiempo finito

$$h(t, \sigma) = -v = \int_T^t k_2 \text{sign}(\sigma) d\tau,$$

B. CÁLCULO DE LAS GANANCIAS

donde T es el tiempo de convergencia de $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. La idea detrás de este algoritmo es agregar un término extra $\text{sign}(\sigma)$ integrado, para compensar la perturbación.

La función candidata de Lyapunov propuesta en [22], escrita en su forma cuadrática es

$$V(\sigma) = \zeta^T P \zeta, \quad (\text{B.3})$$

donde $\zeta^T = [|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) \quad \dot{\sigma}]$. Las condiciones con las cuáles (B.3) es una función de Lyapunov para el sistema (B.2), se expresan en el siguiente teorema.

Teorema B.1 *Para cada valor positivo $\Delta > 0$ cota de la perturbación $h(t, \sigma)$, existen las ganancias k_1 y k_2 tales que el origen $\sigma = 0$ es globalmente estable en tiempo finito. Por otra parte existe una matriz $P = P^T > 0$ tal que (B.3) es una función de Lyapunov para el sistema perturbado (B.2) y se satisface*

$$\dot{V} \leq -|\sigma|^{-1/2} \zeta^T Q_R \zeta$$

para alguna matriz $Q_R = Q_R^T > 0$. Tomando en cuenta la condición inicial σ_0 , el tiempo de convergencia puede ser estimado por:

$$T(\sigma_0) \leq \frac{2}{\tilde{\sigma}} V^{1/2}(\sigma_0), \quad \tilde{\sigma} = \frac{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\} \lambda_{\min}\{Q_R\}}{\lambda_{\max}\{P\}}.$$

Las reglas para obtener las ganancias k_1 y k_2 son: i) seleccionar las constantes positivas $0 < \beta < 1$ y $\gamma > 1$. ii) Calcular las constantes positivas

$$\alpha_c = \frac{\beta - \frac{1}{\gamma}}{1 - \beta^2}, \quad \kappa_c = \frac{(\beta - \frac{2}{\gamma})\beta + 1}{1 - \beta^2}.$$

iii) Finalmente las ganancias se calculan

$$k_1 = \kappa \sqrt{\frac{2\gamma}{(1-\beta)\alpha_c}} \sqrt{\Delta}, \quad k_2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Delta$$

y los elementos que conforman a las matrices P y Q_R son:

$$p_{11} = 1, \quad p_{22} = \frac{(1-\beta)\alpha_c}{2\Delta}, \quad p_{12} = -\sqrt{\frac{p_{22}}{\gamma}},$$

$$q_{R11} = k_1 + 2p_{12}(k_2 + \Delta) + 2\Delta(1 - k_1 p_{12}) \frac{p_{22}}{p_{12}},$$

$$q_{R12} = -\frac{1}{2}(1 - k_1 p_{12}) + (k_2 + \Delta)p_{22}, \quad q_{R22} = -p_{12}.$$

B.2. Super-Twisting de Tercer Orden

El algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden [23] (3-STA por sus siglas en inglés) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\phi|^{1/2}\text{sign}(\phi) + \Gamma \\ \dot{\Gamma} &= -k_3\text{sign}(\phi), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\phi = \dot{\sigma} + k_2|\sigma|^{2/3}\text{sign}(\sigma),$$

Este algoritmo fue diseñado para ser aplicado principalmente a sistemas con grado relativo $r = 2$, o bien con una superficie diseñada de la forma:

$$\ddot{\sigma} = h(\sigma, \dot{\sigma}, t) + g(\sigma, \dot{\sigma}, t)u_1,$$

donde $g(t, \sigma, \dot{\sigma}) \neq 0$ es la función de entradas y $h(t, \sigma, \dot{\sigma})$ es una función de perturbación incierta, de la que se conoce la cota máxima $\|\frac{dh(t, \sigma(t), \dot{\sigma}(t))}{dt}\| \leq \Delta$. Suponiendo que $g(t, \sigma, \dot{\sigma})$ es conocida, la dinámica en la superficie con $u_1 = (g(t, \sigma, \dot{\sigma}))^{-1}u$, es

$$\begin{cases} \ddot{\sigma} = h(t, \sigma, \dot{\sigma}) - k_1|\phi|^{1/2}\text{sign}(\phi) + \Gamma \\ \dot{\Gamma} = -k_3\text{sign}(\phi) \end{cases}$$

de esta forma la parte integral Γ se convierte en la perturbación $h(t, \sigma, \dot{\sigma})$ en tiempo finito

$$h(t, \sigma, \dot{\sigma}) = -\Gamma = \int_T^t k_3\text{sign}(\dot{\sigma} + k_2|\sigma|^{2/3}\text{sign}(\sigma)) d\tau,$$

donde T es el tiempo de convergencia de $\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = 0$. La idea detrás de este algoritmo es agregar un término extra $\text{sign}(\phi)$ integrado, que reconstruye la perturbación y además la elimina.

Se define la variable auxiliar $\rho = h(\sigma, \dot{\sigma}, t) + \Gamma$, entonces la dinámica toma la forma

$$\begin{cases} \ddot{\sigma} = \rho - k_1|\phi|^{1/2}\text{sign}(\phi) \\ \dot{\rho} = \dot{h}(t, \sigma, \dot{\sigma}) - k_3\text{sign}(\phi) \end{cases}, \quad (\text{B.5})$$

la función candidata de Lyapunov propuesta en [23] escrita en su forma cuadrática es

$$V(\sigma) = \Xi^T P \Xi, \quad \text{donde } P = \begin{bmatrix} p_1 & -\frac{1}{2}p_{12} & \frac{1}{2}p_{13} \\ -\frac{1}{2}p_{12} & p_2 & -\frac{1}{2}p_{23} \\ \frac{1}{2}p_{13} & -\frac{1}{2}p_{23} & p_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

donde $\Xi^T = [|\sigma|^{2/3}\text{sign}(\sigma) \quad \phi \quad |\rho|^2\text{sign}(\rho)]$. Las condiciones con las cuáles (B.6) es una función de Lyapunov para el sistema (B.5), se expresan en el siguiente teorema.

Teorema B.2 *Considerando la función de Lyapunov (B.6). $V(x)$ es positiva definida y radialmente no acotada sí y solo sí $P > 0$, esto es*

$$\begin{aligned} p_1 &> 0 \\ p_1 p_2 &> \frac{1}{4} p_{12}^2 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$p_1 \left(p_2 p_3 - \frac{1}{4} p_{23}^2 \right) + \frac{p_{12}}{2} \left(-\frac{p_{12} p_3}{2} + \frac{p_{13} p_{23}}{4} \right) + \frac{p_{13}}{2} \left(\frac{p_{12} p_{23}}{4} - \frac{p_2 p_{13}}{2} \right) > 0$$

además $\dot{V}(\sigma)$ es negativa definida para cada valor de la perturbación, que satisfaga $h(\sigma, \dot{\sigma}, t) = 0$ si

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 k_2^2 &> k_2 p_{12} \\ p_{12} &= 2 p_2 k_2 \\ p_{23} k_2 &= p_{13} \\ p_{12} &> 2 p_{13} k_3 \\ 2 p_2 &> 2 p_{23} k_3 \\ k_3 &> 0 \end{aligned} \tag{B.8}$$

En este caso $V(\sigma)$ satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V} = -\kappa V^{3/4}$$

para alguna κ positiva y las trayectorias del sistema convergen al origen en tiempo finito. Tomando en cuenta la condición inicial σ_0 , el tiempo de convergencia puede ser estimado por:

$$T(\sigma_0) \leq \frac{4}{\kappa} V^{1/4}(\sigma_0).$$

El Teorema B.2, proporciona condiciones suficientes para la existencia de una función de Lyapunov del sistema (B.5). Sin embargo no es trivial obtener un conjunto de ganancias (k_1, k_2, k_3) , con un conjunto de parámetros $(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ en el caso nominal (con $h(t; \sigma; \dot{\sigma}) = 0$); o bien el escalamiento con un número real $l > 0$ suficientemente grande, tanto para el caso nominal como para el caso perturbado propuesto en [23]. Debido a lo anterior la obtención de las ganancias del controlador (B.4) será en forma empírica.

Instrumentación

C.1. Tarjeta dSPACE 1103

La tarjeta dSPACE 1103 cuenta con una memoria EPROM para guardar y ejecutar el algoritmo de control, previamente traducido de diagrama de bloques a lenguaje C. Tiene como unidad central de procesamiento (CPU) un procesador digital de señales (DSP) PPC750GX de la marca Texas Instruments, que tiene la capacidad de realizar una gran cantidad de instrucciones o cálculos numéricos. Los periféricos de entrada y salida son gestionados por un procesador TMS320F240 de Texas Instruments, cuenta con 8 puertos DAC's, 20 ADC's, 7 puertos para lectura de codificadores y un puerto generador de señales PWM.

La tarjeta 1103 produce un señal de control en un rango de -1 [V] a 1 [V], pero en la salida analógica esta tensión se amplifica por diez, es decir que la salida está en un rango de -10 [V] a 10 [V]. La Figura C.1 muestra dicha tarjeta.

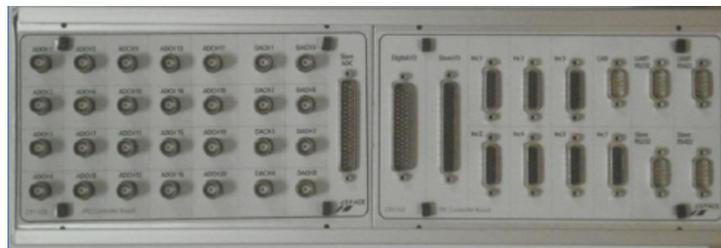


Figura C.1: Tarjeta dSPACE 1103.

C.2. Etapa de potencia

Con la finalidad de alcanzar posiciones angulares de elevación arriba de los 10° , los motores se alimentaran con tensión simétrica de $\pm 15V$. Por software, se satura la ley de control en $\pm 0.5V$ que al ser multiplicado por diez a la salida de la tarjeta dSPACE se tienen $\pm 5V$. El circuito de potencia C.2 deberá amplificar la señal de tensión y suministrar la corriente requerida por los motores. Está dividido en tres secciones:

- *Acoplamiento*: Mediante un amplificador operacional en configuración de seguidor de voltaje, se acopla una salida analógica de la tarjeta dSPACE con el circuito de potencia minimizando la demanda de corriente al puerto.
- *Ganancia*: Como sabemos la señal de control a la salida de la tarjeta dSPACE está en el intervalo $\pm 5V$, un OPAMP en configuración inversor amplifica la señal de voltaje a $\pm 15V$.
- *Push Pull*: Finalmente una etapa push-pull se encarga de suministrar la corriente a los motores, la configuración Darlington sirve para proporcionar una gran ganancia (el producto de las ganancias de ambos transistores). De igual forma la configuración del amplificador es inversora, la ganancia de voltaje es unitaria.

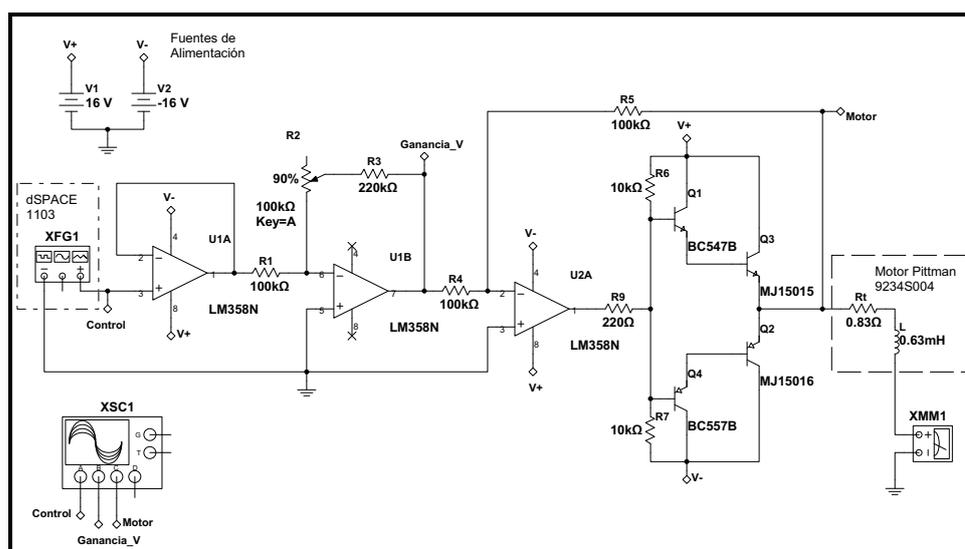


Figura C.2: Etapa de Potencia.

C.3. Encoders

Para medir la posición angular del helicóptero se utilizan tres codificadores incrementales (encoders), éstos permiten medir el desplazamiento angular alrededor de un eje. La lectura se lleva a cabo por medio de un emisor y un receptor de luz, en medio de estos se encuentra un disco con franjas opacas acoplado al eje de giro, de esta forma cuando se presenta un movimiento angular, el disco se mueve y permite o no el paso de luz, obteniéndose como salida un tren de pulsos cuando se presenta movimiento. Además para determinar el sentido de giro, se produce otro tren de pulsos pero desfasado con respecto al primero. Estos *encoders* no pueden medir posiciones absolutas, por lo que se requiere una posición inicial de referencia a partir de la cual se tomarán las mediciones.

El helicóptero cuenta con tres *encoders* encargados de medir los ángulos de elevación y pitch tienen una resolución de 4096 cuentas en cuadratura, mientras que el de desplazamiento tiene 8192 también en cuadratura. La resolución es el número de pulsos eléctricos por vuelta. La salida de los codificadores es un tren de pulsos, la tarjeta 1103 de dSPACE realiza la conversión a grados, mediante un escalamiento programado previamente en Matlab y traducido a lenguaje C, junto con el algoritmo de control. La conversión está dada por:

$$\phi [^\circ] = \frac{\text{No. de pulsos medidos} \times 360^\circ}{\text{Resolución}}. \quad (\text{C.1})$$

Bibliografía

- [1] Y. SHTESEL C. EDWARDS L. FRIDMAN AND A. LEVANT. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, 2013. 1, 8, 16, 82, 84, 85
- [2] D. HERNÁNDEZ F. CASTAÑOS AND L. FRIDMAN. **Pole-placement in higher-order sliding-mode control**. *arXiv preprint arXiv:1309.3317*, 2013. 2, 8, 9
- [3] I. CASTILLO C. VÁZQUEZ AND L. FRIDMAN. **MATLAB Toolbox for Singular LQ based Sliding Mode Control Design**. *Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on*, pp. 4242-4247, 2013. 2, 10, 11
- [4] Z. FENG L. DENGHUA AND X. PEIRONG. **Research of fuzzy control for elevation attitude of 3-dof helicopter**. *In Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics. IHMSC'09. International Conference on*, 1, pp. 367-370. IEEE, 2009. 2
- [5] QUANSER. **3DOF Helicopter Reference Manual**. *Revisión 2.1*. 2, 17, 23
- [6] L. RENQUAN D. WEI Z. WEIHONG AND X. ANKE. **Robust h_∞ optimal tracking control for 3-dof helicopter**. *In Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, pp. 7327-7332. IEEE, 2008. 2
- [7] A. FERREIRA DE LOZA H. RÍOS AND A. ROSALES. **Robust regulation for a 3-DOF helicopter via sliding-mode observation and identification**. *Journal of the Franklin Institute* 349 (2), pp. 700-718, 2012. 2
- [8] H. RÍOS A. ROSALES AND A. DÁVILA. **Global non-homogeneous quasi-continuous controller for a 3-DOF helicopter**. *In Variable Structure Systems (VSS), 11th International Workshop on IEEE*, pp. 475-480, 2010. 2
- [9] I. MEZA-SANCHEZ Y. ORLOV AND L. AGUILAR. **Periodic motions stabilization of a virtually constrained 3-dof underactuated helicopter using second order sliding modes**. *In Variable Structure Systems (VSS), 2012 12th International Workshop on*, pages 422-427. IEEE, 2012. 3

BIBLIOGRAFÍA

- [10] F. PLESTAN AND A. CHRIETTE. **A robust controller based on adaptive super-twisting algorithm for a 3dof helicopter.** In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 7095-7100. IEEE, 2012. 3
- [11] D. CANEDO. **Control por modos deslizantes con ganancias variables para un helicóptero de tres grados de libertad.** *Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México*, 2012. 3
- [12] H. FRANCO. **Control por Modos Deslizantes de Tercer Orden para un Helicóptero de Prueba de Tres grados de Libertad.** *Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México*, 2014. 3
- [13] A. LEVANT. **Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control.** *International Journal of Control*, 76 (9/10), 924-941, 2003. 7
- [14] V. UTKIN. *Slides Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlang, 1992. 10, 81
- [15] A. LUK'YANOV AND V. UTKIN. **Design of Optimal Linear Systems With Degenerated Criterion.** *Automation and Remote Control*, no. 7, pp. 42-50, 1982. 10
- [16] C. EDWARDS AND S. SPURGEON. *Slides Modes in Control and Optimization*. London: Taylor and Francis, 1998. 10
- [17] A. POZNYAK Y. SHTESSEL AND C. JIMENEZ. **Min-Max Sliding-Mode Control for Multimodel Linear Time Varying Systems.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 2141-2150, 2003. 10
- [18] H. J. KELLEY. **A Transformation Approach to Singular Subarcs in Optimal Trajectory and Control Problems.** *SIAM J. Control, Ser. A*, vol. 2, no. 2, pp. 234-240, 1964. 10
- [19] J. SPEYER AND D. JACOBSON. **Necessary and Sufficient Conditions for Optimality for Singular Control Problems.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 33, pp. 163-187, 1971. 10
- [20] R. GABASOV AND N. CHOKSY. *Slides Modes in Control and Optimization*. Kluwer Academic Pub, 2001, 2001. 10
- [21] B. ANDERSON AND J. B. MOORE. *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall Inc, 1971. 12
- [22] J. MORENO AND M. OSORIO. **Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm.** *IEEE Transactions On Automatic Control*, 2012. 14, 89, 90
- [23] S. KAMAL A. CHALANGA B. BANDYOPADHYAY J. MORENO AND L. FRIDMAN. **Third order sliding mode super-twisting algorithm.** *Sometido al Congreso Automatica*, 2014. 15, 91, 92
- [24] KATSUHIKO OGATA. **Ingeniería de control Moderna.** *Prentice Hall, Mexico*, 2003. 28