



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y**  
**DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA**

## **LA CONJETURA $Z$ PARA ALGUNOS NUDOS PRETZEL**

**T E S I S**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A :**  
**JESÚS RODRÍGUEZ VIORATO**

**DIRECTOR DE LA TESIS:**  
**DR. FRANCISCO J. GONZÁLEZ ACUÑA**  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:**  
**DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ**  
INSITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM  
**DR. VICTOR NUÑEZ HERNÁNDEZ**  
MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Vías de tren orientadas . . . . .	9
2.2. Los nudos de Montesinos . . . . .	12
2.3. Superficies incompresibles en nudos de Montesinos . . . . .	15
2.4. El modelo de caminos . . . . .	18
2.5. Las superficies candidatas . . . . .	20
2.6. Cálculo de las pendientes . . . . .	23
2.7. Cómo encontrar los sistema de caminos $\gamma_i$ . . . . .	25
<b>3. Las superficies ICON</b>	<b>29</b>
3.1. Diagrama de orientaciones . . . . .	29
3.2. Orientación de cada $F_i$ . . . . .	32
3.2.1. Camino de longitud menor o igual 1 . . . . .	34
3.2.2. Caminos monocromáticos . . . . .	36
3.2.3. Caminos no monocromáticos . . . . .	38
3.3. Pegado final . . . . .	40
<b>4. Los nudos pretzel <math>P(p,q,-r)</math></b>	<b>45</b>
4.1. Superficies candidatas de tipo II . . . . .	46
4.2. Superficies candidatas de tipo III . . . . .	47
4.3. Superficies candidatas de tipo I . . . . .	49
<b>5. La conjetura Z para los pretzel <math>P(p,q,-r)</math></b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En el área de la teoría combinatoria de grupos, una conjetura muy conocida es la llamada conjetura de Kervaire (ver [8]).

**Conjetura 1** (Conjetura de Kervaire). *Sea  $G$  un grupo no trivial. Entonces  $\mathbb{Z} * G$  no puede ser normalmente generado por un solo elemento.*

F. González-Acuña y A. Ramírez construyeron en [3] una conjetura planteada en términos de teoría de nudos y equivalente a la conjetura de Kervaire, a la cuál llamaron Conjetura  $\mathbb{Z}$ .

**Conjetura 2** ( $\mathbb{Z}$ -conjecture). *Si  $F$  es una superficie orientable, compacta y no separante propiamente encajada en el exterior de un nudo  $E$ , entonces  $\pi_1(E/F) \approx \mathbb{Z}$ .*

En ese mismo trabajo, ellos probaron que la Conjetura  $\mathbb{Z}$  es cierta cuando la frontera de  $F$  ( $\partial F$ ) es conexa (ver Proposición 11 en [3]). Por lo que restaría probar los casos en que  $\partial F$  sea disconexa.

Diremos que la Conjetura  $\mathbb{Z}$  es cierta para una superficie  $F$  en el exterior  $E$  de un nudo cuando se satisfaga que  $\pi_1(E/F) \approx \mathbb{Z}$  para esa superficie específica. Pero, cuando digamos que la Conjetura  $\mathbb{Z}$  es cierta para un nudo  $K$ , querremos decir que  $\pi_1(E/F) \approx \mathbb{Z}$  para cada superficie orientable, compacta y no separante  $F$  en el exterior  $E$  de ese nudo  $K$ .

Por otro lado, por el Lema 27 podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $F$  es incompresible. Esto quiere decir que si somos capaces de demostrar que  $\pi_1(E/F) \approx \mathbb{Z}$  para cada superficie *incompresible*, compacta, orientable y no separante (superficie ICON)  $F$  en el exterior  $E$  de un nudo  $K$ , entonces la conjetura  $\mathbb{Z}$  se seguirá para  $K$ . Es por eso que las superficies ICON tendrán un papel central en este trabajo.

Ahora bien, por lo visto anteriormente, es natural preguntarse si existen las superficies ICON con frontera disconexa. M. Eudave-Muñoz respondió a esta pregunta en [2]. De hecho, para cada número impar  $n$  encontró con una familia de superficies ICON con  $n$  componentes en su frontera. También demostró que la conjetura  $\mathbb{Z}$  es cierta para esas superficies.

La siguiente pregunta que surge es sobre la existencia de familias de nudos que satisfagan la Conjetura  $\mathbb{Z}$ . F. González-Acuña y A. Ramírez en [3] señalaron la existencia de dos familias:

- La conjetura es cierta para los nudos fibrados. Esto se debe a que  $\pi_1(E)$  tiene un epimorfismo sobre  $\pi_1(E/F) \cong \mathbb{Z} * P$  donde  $P$  es un grupo perfecto. Demostrando por contrapositiva, si  $P$  no es trivial entonces el subgrupo conmutador de  $\mathbb{Z} * P$  no es finitamente generado, lo que implica que el subgrupo conmutador de  $\pi_1(E)$  tampoco será finitamente generado, lo que implica que  $E$  no puede ser el exterior de un nudo fibrado.
- La Conjetura  $\mathbb{Z}$  es cierta si el grupo fundamental de  $E$  tiene rango dos. Esto se debe a que rango dos implica que  $\mathbb{Z} * P$  tiene rango a lo sumo dos, pero rango exactamente dos es imposible porque los grupos perfectos no triviales tienen rango mayor a dos; por lo que  $P$  debe ser trivial.

El propósito de esta tesis será mostrar la existencia de otra familia de nudos que satisfacen la Conjetura  $\mathbb{Z}$ . La familia que inmediatamente vino a nuestra mente fue la de nudos de Montesinos. Ya que para esta familia existe una clasificación de superficies incompresibles desarrollada por A. Hatcher y U. Oertel en [4].

Usando dicha clasificación, hemos sido capaces de encontrar superficies ICON con frontera disconexa en algunos nudos de Montesinos. Más aún, fuimos capaces de clasificar las superficies ICON con frontera disconexa en la familia de los nudos de pretzel  $P(p, q, -r)$  donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  son números impares positivos (véase el Teorema 26). En esta familia de nudos existen ejemplos de superficies ICON con tantas componentes en la frontera como queramos.

También pudimos demostrar que todos esos pretzels ( $P(p, q, -r)$  donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  son números impares positivos) satisfacen la Conjetura  $\mathbb{Z}$  (véase Teorema 30).

Ninguno de estos nudos pretzel es un nudo fibrado (véase M. Hirasawa y K. Murasugi en [6]). Y, por los resultados de E. Klimenko y M. Sakuma en [9], todos estos nudos son de rango mayor que dos, excepto posiblemente los pretzels  $p(3, 3, -r)$  con  $r \not\equiv 0 \pmod{3}$ ; y únicamente  $P(3, 3, -1)$  tiene número de túnel uno. Entonces, ésta es una nueva familia de nudos que satisface la Conjetura  $\mathbb{Z}$ .

En la primera parte de la tesis repasaremos algunos elementos fundamentales sobre la clasificación de superficies incompresibles hecha por Hatcher y Oertel en [4]. Aprovecharemos para definir vías de tren orientadas y diagrama de orientaciones; estos nuevos conceptos serán pieza clave en el resto de la tesis.

Posteriormente, analizaremos alguna de las condiciones que debe cumplir el algoritmo de Hatcher y Oertel para construir superficies ICON. Cabe señalar, que Hatcher y Oertel hablan de superficies candidatas y éstas podrían tratarse de 2-variedades no conexas, sin embargo, fuimos capaces de identificar en muchos casos cuáles de estas superficies candidatas en verdad eran conexas.

En el capítulo 3 aplicaremos los resultados obtenidos en el capítulo 2 al caso de los nudos pretzel  $P(p, q, -r)$  con el objeto de clasificar sus superficies ICON con frontera disconexa.



## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Vías de tren orientadas

En este capítulo veremos la versión topológica de vía de tren desarrollada por A.E. Hatcher en [5]. Y extenderemos este concepto al de vía de tren orientada.

Con el objeto de aligerar las definiciones, hemos creado la definición de cuasi vía de tren, que no es más que el dibujo o diagrama de las vías de tren.

**Definición 3.** *Una cuasi vía de tren  $T$  en un superficie  $F$  es una gráfica que satisface lo siguiente:*

1. *Los vértices de  $T$  son de valencia uno o tres.*
2.  *$T$  está propiamente encajada en  $F$ . Es decir,  $\partial F \cap T$  es el conjunto de vértices de  $T$  de valencia uno.*
3. *Todos los vértices de valencia tres son localmente difeomorfos a la siguiente imagen:*

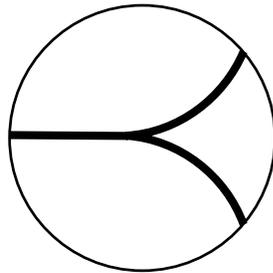


Figura 2.1: Vértices de valencia 3 en unas cuasi vías de tren

Para tener una definición completa de las vía de tren, necesitamos asignar pesos a la cuasi vía de tren. Esta asignación de pesos, la hacemos de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 4.** Denotemos con  $T$  a una cuasi vía de tren, decimos que una función  $f : \text{aristas}(T) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , es una asignación de peso compatible con  $T$  si  $f(c) = f(a) + f(b)$  para todas los tríos de aristas  $a$ ,  $b$  y  $c$ , alrededor de un vértice de valencia tres, acomodados en la manera en que se muestra en la figura (2.2).

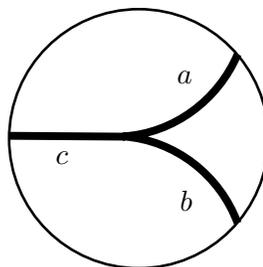


Figura 2.2: Aristas alrededor de una vía de tren

Con estos conceptos podemos entonces definir a las vías de tren como sigue.

**Definición 5.** Una vía de tren en una superficie  $F$  es una cuasi vía de tren  $T$  de  $F$  con una asignación de pesos compatible con  $T$ .

Esta asignación de pesos a las aristas son las que permitirán construir *sistemas de curvas* en la superficie  $F$  (curvas y arcos ajenos propiamente encajados en  $F$ ).

Para construir el sistema de curvas asociado a una vía de tren  $T$  tomamos copias paralelas a cada arco de  $T$ , tantas copias como peso tenga la arista. Luego, en un vértice de valencia tres, unimos dos de los conjuntos de copias paralelas con el tercer conjunto aprovechando la regla de pesos en la definición 4. En la figura 2.3 se muestra un ejemplo con pesos 5, 3 y 2.

Como  $T$  sólo tiene vértices de valencia uno o tres, el resultado de la operación anterior será un conjunto de curvas y arcos simples paralelos a la cuasi-vía de tren.

Ahora, vamos a generalizar este concepto de asignación de pesos. En lugar de usar enteros como pesos, vamos a usar elementos del semigrupo de rango dos  $\mathbb{P}_2$ ; por conveniencia, los elementos de este semigrupo los representaremos con vectores de 1's y  $-1$ 's y la multiplicación será la operación concatenación  $\oplus$ . Por ejemplo,  $(1, -1) \oplus (-1, -1, 1) = (1, -1, -1, -1, 1)$ .

Para la definición necesitaremos de la función  $J : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  definida como

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_n, \epsilon_{n-1}, \dots, \epsilon_1)$$

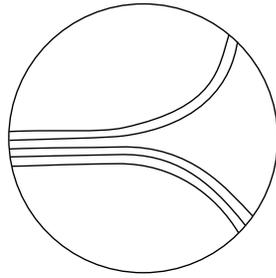


Figura 2.3: Unión de arcos en un vértice de valencia tres.

Denotemos con  $aristas\_dirigidas(T)$  al conjunto de aristas de  $T$  pero con sus dos posibles direcciones. Más precisamente,

$$aristas\_dirigidas(T) = \{(v_1, v_2) | v_1, v_2 \in \text{vértices}(T) \text{ y } v_1v_2 \in \text{aristas}(T)\}.$$

De esta manera, si  $a = (v_1, v_2) \in aristas\_dirigidas(T)$  entonces  $a^{-1} = (v_2, v_1)$  también estará en  $aristas\_dirigidas(T)$ .

**Definición 6.** Consideremos una cuasi vía de tren  $T$  propiamente encajada en una 2-variedad orientada  $F$ . Entonces, una función  $f : aristas\_dirigidas(T) \rightarrow \mathbb{P}_2$  es una orientación de  $T$  si  $f(a^{-1}) = -J \cdot f(a)$  para toda arista dirigida  $a$ . Y además, para toda terna  $a, b$  y  $c$  de aristas dirigidas como en la figura 2.4, la imagen vista desde el lado positivo de  $F$ , se tiene que

$$f(c) = (f(a), f(b)) = f(a) \oplus f(b)$$

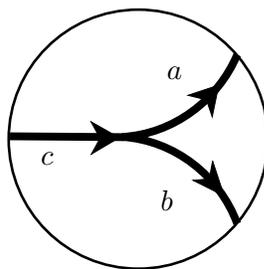


Figura 2.4: Aristas orientadas en un vértice de valencia 3

Decimos que  $T$  es una vía de tren orientada por  $f$ .

Cabe hacer notar que hay una función  $|\cdot| : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{Z}^+$  que asigna a cada vector su dimensión, por ejemplo,  $|(1, -1, 1)| = 3$ . La composición de esta función con una orientación  $f$  da como resultado una asignación de pesos compatible con  $T$ . En otras palabras, unas vías de tren orientadas determinan unas vías de tren comunes.

Al igual que el concepto de *vías del tren* es bastante útil para trabajar con sistemas de curvas, las *vías de tren orientadas* nos ayudarán a trabajar con sistemas de curvas orientados. En particular, unas vías de tren orientadas determinan un *sistema de curvas orientado* (ver figura 2.7).

Más detalladamente, para construir un sistema de curvas orientado a partir de una vía de tren orientada, para cada arista  $a$  de  $\text{arista\_orientada}(T)$ . Con esa orientación, a cada arista  $a \in T$  le corresponde un único elemento  $v_a \in \mathbb{P}_2$ . Luego, en una pequeña vecindad de  $a$ , construimos  $|v_a|$  copias paralelas de  $a$  y las enumeramos de izquierda a derecha. Entonces, a la  $i$ -ésima copia de  $a$  la orientamos igual o en sentido contrario que  $a$  de acuerdo a si la  $i$ -ésima entrada de  $v_a$  es 1 o  $-1$ , respectivamente (ver figura 2.5).

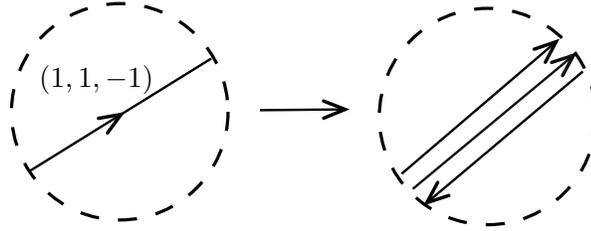


Figura 2.5: Primer paso en la construcción de sistemas de curvas orientados a partir de unas vías de tren orientadas.

No es muy difícil de ver que la construcción anterior es independiente de la elección de la orientación de cada una de las aristas. Esta independencia, se debe principalmente a que, por definición, el vector asociado a  $a^{-1}$  ( $a$  orientado en la otra dirección) es  $-J(v_a)$ . En el ejemplo, al usar la orientación opuesta  $a^{-1}$  del arco  $a$  en la figura 2.5 tendremos  $v_{a^{-1}} = -J(v_a) = -J(1, 1, -1) = (1, -1, -1)$ . Con esta orientación, la construcción será la misma figura de arcos orientados (ver figura 2.6).

Entonces, una vez observado que es independiente de la orientación, se puede suponer que los tres arcos que llegan a un vértice de valencia tres se ven como en la figura 2.4 y, por lo tanto, las  $|v_c| = |v_a| + |v_b|$  copias paralelas y orientadas de  $c$  se puede pegar apropiadamente con las  $|v_a|$  y  $|v_b|$  copias paralelas y orientadas de  $a$  y  $b$  respectivamente.

## 2.2. Los nudos de Montesinos

Ahora veremos una definición de Nudo o Enlace de Montesinos. Incluiremos la notación usada por Hatcher y Oertel en ([4]) para la descripción de estos nudos; esta notación

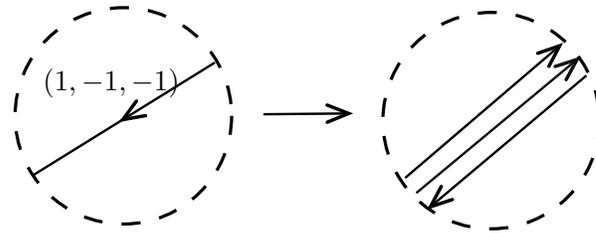


Figura 2.6: Construcción de sistemas de curvas orientados con la orientación al revés.

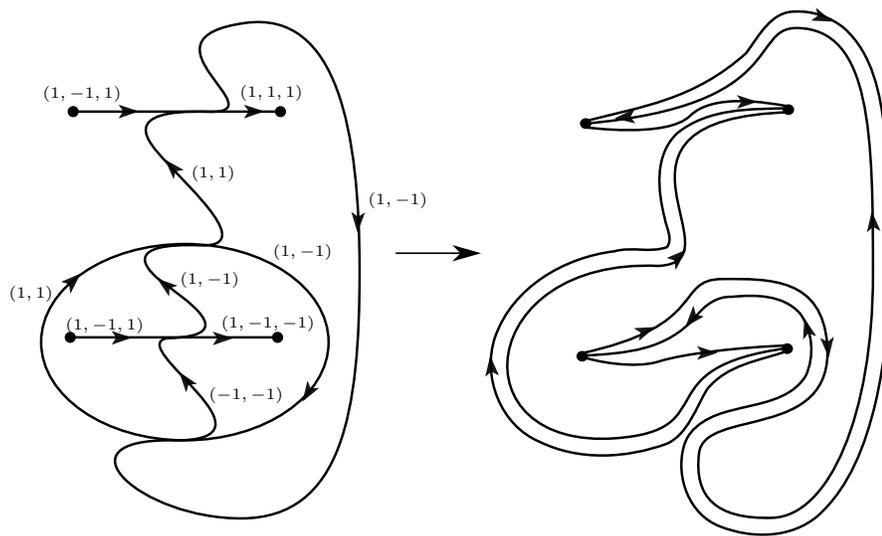


Figura 2.7: Relación entre sistemas de curvas orientados y vías de tren orientadas

será usada durante el resto de esta tesis.

Primero consideremos  $S^3$  (la esfera de dimensión 3) como la conexión<sup>1</sup> de dos circunferencias  $A$  y  $B$ , la circunferencia  $B$  la consideramos subdividida como un polígono de  $n$  lados. La conexión de  $A$  con el  $i$ -ésimo lado de  $B$  es una bola que denotaremos como  $B_i$ . De esta manera,  $S^3$  será igual a  $\cup_{i=1}^n B_i$ .

Si pensamos a  $S^3$  como  $\mathbb{R}^3$  con un punto al infinito, y suponemos que dicho punto se encuentra sobre  $A$ , entonces la descomposición anterior la podemos ilustrar con la figura 2.8. Debido a esta figura, es que frecuentemente nos referiremos a la circunferencia  $A$  como el eje  $Z$  o simplemente *el eje* del nudo de Montesinos.

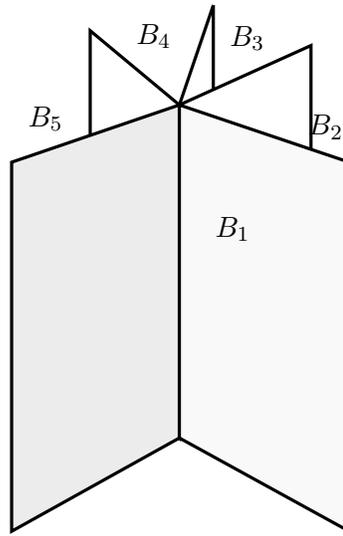


Figura 2.8: Dibujo de la descomposición de  $S^3$  como unión de  $n$  3-bolas

Para cada bola  $B_i$  tomamos una 3-bola  $B_i^0$  en el interior de  $B_i$  y a la cerradura del complemento la llamaremos collar  $C_i$ , esto es,  $C_i = \partial B_i \times [0, 1]$ , donde  $\partial B_i = \partial B_i \times \{1\}$  y  $\partial B_i^0 = \partial B_i \times \{0\}$ .

Dados  $n$  números racionales  $p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_n/q_n$ , ponemos dentro de cada  $B_i$  un ovillo racional  $K_i$  de pendiente  $p_i/q_i$  de tal manera que en  $C_i$  se encuentran cuatro arcos de  $K_i$  paralelos a la estructura producto de  $C_i$  (es decir,  $\{\text{Cuatro puntos ajenos}\} \times [0, 1]$ ) y el resto de  $K_i$  son dos arcos de pendiente  $p_i/q_i$  sobre  $\partial B_i^0$  (ver figura 2.9).

Además, los ovillos  $K_i$  son tomados de tal manera que dos de sus extremos están sobre un hemisferio de  $\partial B_i$  (la circunferencia  $A$  tomado como ecuador) y los otros dos en el

<sup>1</sup>Usaremos conexión como la traducción de *joint* del inglés.

segundo hemisferio. Estos puntos de contacto con los hemisferios coincide con los del ovillo vecino  $K_{i+1}$  (el subíndice tomado módulo  $n$ ). Entonces,  $K = \cup_{i=1}^n K_i$  es un enlace en  $S^3$  conocido como *enlace de Montesinos*, se denota como  $K(p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_n/q_n)$ .

Cuando algunos denominador  $q_i$ 's son iguales a 1, podemos sumarlos todos en una sola fracción con  $q_i = 1$  y obtendremos el mismo nudo o enlace. Además, este número entero puede sumarse a cualquiera de las fracciones con  $q_i > 1$ , y tendremos el mismo nudo de montesinos con  $n$  más pequeño. Entonces, sin pérdida de generalidad supondremos que  $q_i > 1$  para toda  $i$ .

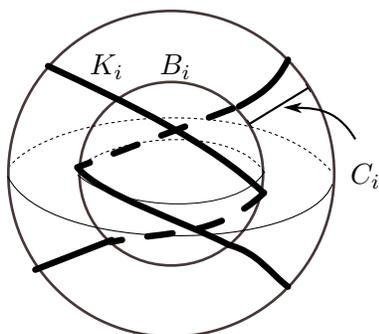


Figura 2.9: Dibujo del ovillo dentro de  $B_i$ .

No es muy difícil convencerse de que  $K$  se tratará de un nudo si y sólo si pasa alguno de los siguientes casos:

- Existe exactamente un  $i$  para el cuál  $q_i$  es par.
- $q_i$  es impar para toda  $i$  y la cantidad de  $p_i$ 's impares es impar.

Como es requerido por la conjetura  $\mathbb{Z}$  restringiremos nuestra atención al caso en que  $K$  es un nudo. Cuando  $n \leq 2$  el nudo  $K$  resulta un nudo de dos puentes, que para fines de la conjetura  $\mathbb{Z}$  ya fue probado en [3] en el caso general de los nudos de rango dos. Entonces, estudiaremos los casos  $n \geq 3$  y asumiremos que  $|q_i| \geq 2$  para toda  $i$ .

### 2.3. Superficies incompresibles en nudos de Montesinos

Para clasificar a las superficies incompresibles en el exterior de un nudo de Montesinos, Hatcher y Oertel isotopan las superficies a una posición “normal” y después las descomponen en piezas que serán más fácil de estudiar. En esta sección veremos cuál es esa posición “normal” y cuáles son los pedazos a estudiar. Después, en los subsecuentes secciones, veremos el algoritmo con el que se construyen todas estas superficies.

Consideremos una superficies  $F$  incompresible y  $\partial$ -incompresible en  $E = \overline{S^3 - \nu(K)}$ , el exterior de un nudo de Montesinos  $K$ . Y como es nuestro interés, también supondremos que  $\partial F \neq \emptyset$ .

El objetivo ahora será descomponer a  $F$  en piezas pequeñas que nos sea posible estudiar. Empecemos por isotopar  $F$  de tal manera que  $\partial F$  sea transversal a todos los meridianos pequeños de  $K$  y que interseque a cada uno de ellos en la misma cantidad de puntos, a esa cantidad la denotaremos con  $m$  y la llamaremos el *número de hojas* de  $F$ .

Después isotopemos  $F$  para que sea transversal al eje del nudo de Montesinos  $K$ , esta isotopía nos garantiza que  $F$  cortará transversalmente al eje de  $K$  en un número finito de puntos. Además mantendremos este número de intersecciones al mínimo posible.

Luego, recordemos que el nudo  $K$  dentro de cada 3-bola  $B_i$  se ve como en la figura 2.9, entonces, podemos mover  $F$  de tal manera que  $\partial F$  quede fuera del interior de  $B_i^0$ . Ya que, las vueltas meridionales que realice  $F$  sobre  $K$  dentro de  $B_i^0$  las podemos mover hacia la parte de  $K$  que se encuentra en el collar  $\mathcal{C}_i$  de  $B_i$ .

Ahora bien, la intersección  $F \cap B_i^0$  podrá reducirse a una colección ajena (posiblemente vacía) de círculos paralelos isotópicos a discos meridionales del ovillo racional. El cómo se realiza esta reducción está explicado por Hatcher y Oertel en [4]. Básicamente lo que ellos hacen es considerar las curvas de  $\partial B_i^0 \cap F$  en  $\partial B_i^0 \setminus K$  y deshacerse de las de más adentro, esto se, se aprovecha la incompresibilidad de  $F$  y que  $\partial B_i^0 \setminus K$  es isotópico a un anillo.

Después de todas las isotopías, el resto de  $F$  quedará dentro del collar  $C_i$ . Por último ponemos a  $F$  transversal a la función de Morse  $C_i \rightarrow [0, 1]$  dada por la proyección sobre  $[0, 1]$  en la estructura producto de  $C_i$ . Entonces, ahora sólo necesitaremos entender cómo  $F$  interseca a los diferentes niveles de la función de Morse, es decir, cómo  $F$  interseca a  $\partial B_i \times \{t\} - \nu(K)$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Denotaremos como  $S_i^t = \partial B_i \times \{t\} - \nu(K)$ , que no es más que una esfera con cuatro agujeros.

Observaremos que  $S_i^t \cap F$  es un sistema de arcos y curvas simples ajenos y propiamente encajados en  $S_i^t$ , excepto tal vez, para un número finito de valores  $t_0, t_1, \dots$  en los cuales  $F$  tendrá puntos silla y  $S_i^t \cap F$  tendrá una singularidad.

A cada sistema de curvas  $S_i^t \cap F$  está asociado una vía de tren (ver capítulo anterior). Si  $F$  se tratase de una superficie orientada, entonces podremos asociar una vía de tren orientada a  $S_i^t \cap F$ .

Los sistemas de curvas  $S_i^t \cap F$  entre dos puntos sillan (i.e,  $t_k < t < t_{k+1}$ ) son todos homotópicos entre sí relativos a la frontera de  $S_i^t$ . Por lo que, para estudiar cómo es  $F$  bastará con conocer un sistema de curvas para cada intervalo de  $[0, 1] \setminus \{t_0, t_1, \dots\}$

Usando las técnicas desarrolladas por Hatcher en [5] es posible describir los sistemas de curvas con vías de tren. En el caso de la esfera con cuatro agujeros, los sistemas de curvas esenciales se pueden obtener de alguna de las cuasi vías de tren mostradas en la figura 2.10.

Si suponemos que la superficie  $F$  está orientada, entonces al sistema de curvas  $S_k^t \cap F$ , lo podemos orientar con la orientación inducida por  $F$  sobre  $S_k^t$  (a  $S_k^t$  lo orientamos con el vector normal apuntando hacia afuera de  $B_k^0$ ).

Como se trata de un sistema de curvas esenciales en la esfera con cuatro agujeros

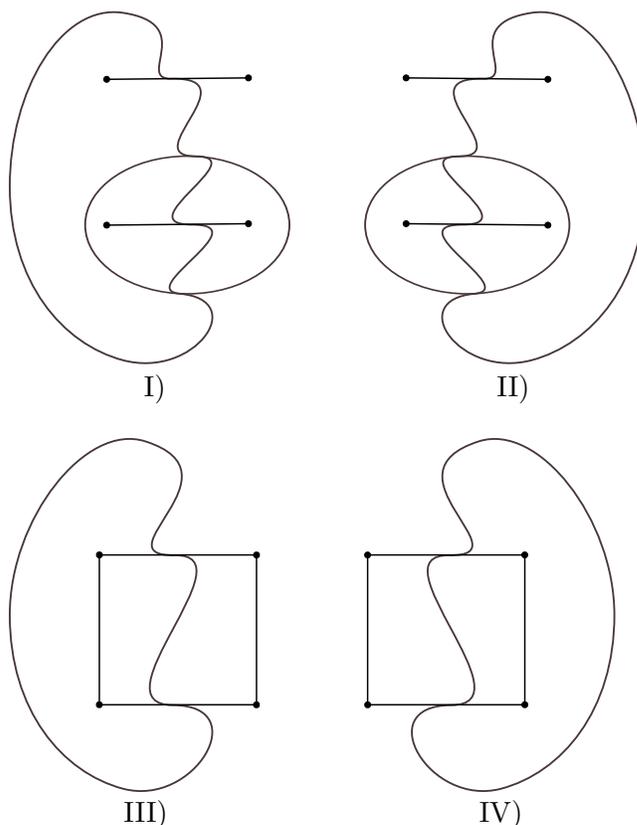


Figura 2.10: Cuasi vías de tren que determinan todos los sistemas de curvas en la esfera con cuatro agujeros

entonces lo podemos obtener poniendo pesos a alguna de las cuasi vías de tren de la figura 2.10, a este mismo sistema de curvas ahora orientado, lo podemos obtener a partir de una vía de tren orientada usando esas misma cuasi vías de tren.

La forma de lograrlo, es cambiando los pesos asignados en la cuasi vías de tren por pesos de  $\mathbb{P}_2$ , de tal manera que hora se obtenga el sistema de curvas orientado. Tomemos una arista  $vw$  de la vía de tren (orientada de  $v$  a  $w$ ), a ésta le está asociada a un conjunto de arcos (o curvas) paralelas de  $S_k^t \cap F$ , estos arcos están orientados, pues así lo está el sistema de curvas. Luego, consideramos un arco  $\ell$  transversal a todas las curvas; orientado de tal manera que cruce a  $vw$  de izquierda a derecha, es decir, que  $\ell$ ,  $vw$  y el normal a  $S_k^t$  estén orientados de forma positiva. Luego, vamos recorriendo  $\ell$  y formando un arreglo de números, por cada curva que intersequemos ponemos 1 si la interseca de izquierda a derecha y -1 si la interseca en sentido contrario; con ello formamos un elemento de  $\mathbb{P}_2$ . Otra manera de describir este peso, es que vamos poniendo un 1 si el arco va en la misma

dirección que  $vw$  y  $-1$  si va en la dirección opuesta.

Es fácil ver que esta forma de definir la asignación de pesos sobre la cuasi vía de tren, satisface las condiciones de asignación orientada de pesos compatibles. Por lo que, nuestro sistema de curvas define unas vías de tren orientada en cada nivel no singular  $S_k^t$ .

De esta manera, estudiar superficies orientadas en un nudo de Montesinos, se asocia a estudiar vías de tren orientadas sobre las cuasi vías de tren de la figura 2.10.

## 2.4. El modelo de caminos

Para trabajar con más detalle las vías de tren, los autores (H y O) crearon un diagrama en  $\mathbb{R}^2$  al que denotaron  $\mathcal{D}$ . En este diagrama se representarán a las vías de tren como puntos. De hecho, dos vías de tren representarán el mismo punto si una es “múltiplo” de la otra, aquí “múltiplo” querrá decir que los pesos de una vía de tren se obtienen de multiplicar por una constante a los pesos de la otra. Además, en el diagrama  $\mathcal{D}$  se querrá que dos vías de tren que se pueden unir por una silla, estén muy cerca.

Empecemos por el dibujo del diagrama. El dibujo consta de todos los puntos  $(1 - 1/n, m/n)$  y  $(1, m/n)$  con  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  y  $(m, n) = 1$ . Usaremos la notación  $\langle m/n \rangle = (1 - 1/n, m/n)$  y  $\langle m/n \rangle_0 = (1, m/n)$ .

Al diagrama  $\mathcal{D}$  le agregaremos los segmentos que unen  $\langle m_1/n_1 \rangle$  con  $\langle m_2/n_2 \rangle$  cuando  $m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1$ . A tal segmento lo denotaremos como  $\langle m_1/n_1, m_2/n_2 \rangle$ . Además agregaremos los segmentos horizontales que unen  $\langle m/n \rangle$  con  $\langle m/n \rangle_0$ . Con esto tenemos casi por completo al diagrama  $\mathcal{D}$ , falta agregar el punto  $\langle \infty \rangle = (-1, 0)$  y los segmentos  $\langle \infty, n/1 \rangle$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . El diagrama finalmente se verá como en la figura 2.11. Si al diagrama  $\mathcal{D}$  le agregamos  $\langle \infty \rangle_0 = (-2, 0)$  y  $\langle \infty, \infty \rangle_0$  le llamaremos el diagrama aumentado y lo denotaremos como  $\hat{\mathcal{D}}$ .

A los segmentos del diagrama  $\mathcal{D}$  los llamaremos aristas. Al remover las aristas  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbb{R}^2$  queda dividido en regiones, varias de las cuáles serán triángulos, a la cerradura de estas regiones triangulares son a las que llamaremos triángulos de  $\mathcal{D}$  y para tener coherencia, se los agregamos a  $\mathcal{D}$ . Con estos triángulos, aristas y vértices (los puntos  $\langle x \rangle$  y  $\langle x \rangle_0$ ) el diagrama  $\mathcal{D}$  lo podemos entender como un complejo simplicial, de hecho es un complejo simplicial infinito numerable y las aristas  $\langle x, x \rangle_0$  son todas retraíbles (pelos del complejos simplicial).

Ahora pasemos a la relación entre las vías de tren y el diagrama  $\mathcal{D}$ . Para cada una de las vías de tren de la figura (2.10) asociamos un punto de  $\mathcal{D}$  de la siguiente manera:

- Si las vías de tren son del tipo I con número  $(a, b, c)$ , se asocia al punto  $(\frac{b}{a+b}, \frac{c}{a+b})$ .
- Si las vías de tren son del tipo II con número  $(a, b, c)$ , se asocia al punto  $(\frac{b}{a+b}, -\frac{c}{a+b})$ . En este caso diremos que la terna asociada es  $(a, b, -c)$
- Si las vías de tren son del tipo III con número  $(a, b, c)$ , se asocia al punto  $(-\frac{b}{a+b}, \frac{c}{a+b})$ .

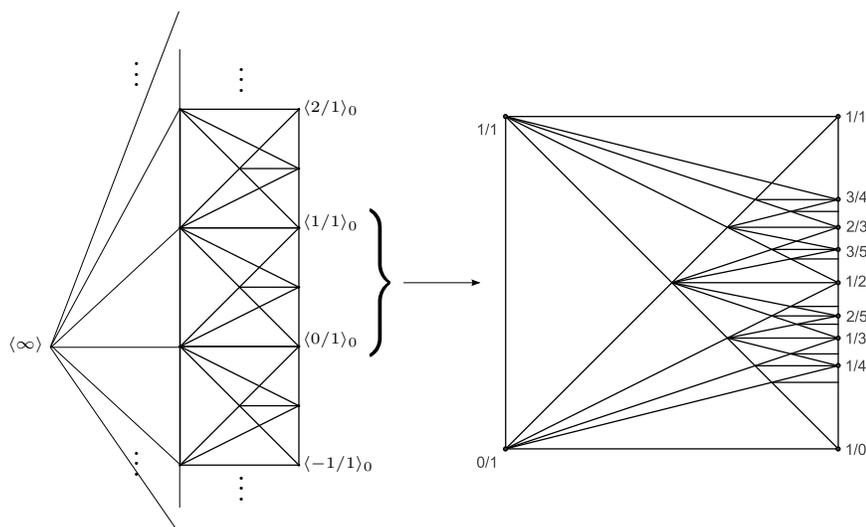


Figura 2.11: Diagrama  $\mathcal{D}$

- Si las vías de tren son del tipo IV con número  $(a, b, c)$ , se asocia al punto  $(-\frac{b}{a+b}, -\frac{c}{a+b})$ .

Esta asignación de ternas a puntos de  $\mathcal{D}$  puede parecer algo artificial, pero para darle sentido veamos algunas propiedades. Primero que nada, observemos que se trata de una relación “proyectiva”, es decir, el punto asociado a una vía de tren y los múltiplos de ésta son el mismo. Esto también se vale en el sentido inverso, es decir, dos vías de tren están asignadas al mismo punto si y sólo si una es múltiplo de la otra.

Por otro lado, una pareja de arcos de pendiente  $p/q > 0$  en la esfera con cuatro agujeros (en el sentido de que metidas en el interior forman un ovillo racional de pendiente  $p/q$ ) se puede obtener de la cuasi-vía de tren de tipo I con pesos  $(1, q - 1, p)$ , por lo que le corresponderá el punto  $\langle p/q \rangle$ . Lo mismo es cierto cuando  $p/q < 0$ . Y también, cuando consideramos una curva cerrada de pendiente  $p/q > 0$  ésta se puede obtener de la cuasi-vía de tren de tipo I con pesos  $(0, q, p)$  y por lo tanto le estará asignado el punto  $\langle p/q \rangle_0$  (lo mismo ocurre cuando la fracción es negativa).

Por otro lado, dos parejas de arcos de pendientes  $p/q$  y  $r/s$  se pueden poner en la misma esfera con cuatro agujero sin generar ninguna intersección si y sólo si  $ps - qr = \pm 1$ . Entonces, podemos construir un sistema de curvas tomando  $\alpha$  copias de  $p/q$  y  $\beta$  copias de  $r/s$ ; este sistema de curvas estará asociado a un punto sobre  $\langle p/q, r/s \rangle$  con las siguientes coordenadas:

$$\left( 1 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha q + \beta s}, \frac{\alpha p + \beta r}{\alpha q + \beta s} \right) \in \langle p/q, r/s \rangle$$

Tal punto lo denotaremos como  $\alpha' \langle p/q \rangle + \beta' \langle r/s \rangle$ , donde  $\alpha' = \alpha / (\alpha + \beta)$  y  $\beta' =$

$\beta/(\alpha + \beta)$ . La razón de esta normalización de  $\alpha$  y  $\beta$  es para mantener coherencia con la “proyectivización” de los sistemas de curvas.

Una vez definido el diagrama  $\mathcal{D}$  y su asociación con sistemas de curvas en las esferas con cuatro agujeros, nos podemos dar cuenta que el estudio de superficies incompresibles se puede cambiar a estudiar sucesiones de puntos en el diagrama  $\mathcal{D}$  (ver sección anterior 2.3).

Estas sucesiones de puntos en  $\mathcal{D}$  están asociados a caminos lineales por pedazos; los caminos se construyen uniendo puntos consecutivos de la sucesión con un segmento de recta en  $\mathbf{R}^2$ . Más adelante veremos, que conociendo el número de hojas de la superficie y el camino lineal por pedazos en  $\mathcal{D}$ , podemos reconstruir la sucesión de puntos y por lo tanto la superficie  $F$ .

Al subconjunto de  $\mathcal{D}$  que se encuentra en la región del plano con  $x > 0$  le llamaremos  $\mathcal{S}$ . Y si a  $\mathcal{D}$  le agregamos el segmento que une  $\langle \infty \rangle_0 = (-2, 0)$  con  $\langle \infty \rangle$ , lo llamaremos diagrama extendido y lo denotaremos como  $\hat{\mathcal{D}}$ .

## 2.5. Las superficies candidatas

Diremos que un camino en el diagrama  $\mathcal{D}$  es un camino por aristas si está contenido en el 1-esqueleto de  $\mathcal{D}$ , y su puntos de inicio y fin pueden o no ser vértices de  $\mathcal{D}$ .

**Definición 7.** Consideremos ahora  $n$  caminos por aristas  $\gamma_i$  en  $\mathcal{D}$ , con las siguientes condiciones:

- (E1) El vértice inicial de  $\gamma_i$  se encuentra sobre la arista  $\langle p_i/q_i, p_1/q_i \rangle$ . Y si el vértice inicial no es el vértice  $\langle p_i/q_i \rangle$ , entonces el camino  $\gamma_i$  es constante.
- (E2) El camino  $\gamma_i$  es mínimo, esto es, nunca pasa dos veces por donde mismo y nunca pasa sucesivamente por dos lados del mismo triángulo en  $\mathcal{D}$ .
- (E3) Los puntos finales de los caminos  $\gamma_i$  son puntos de coordenadas racionales en  $\mathcal{D}$ , que coinciden en su coordenada en  $x$  y que sus coordenadas en  $y$  suman cero.
- (E4) Los caminos  $\gamma_i$  avanzan de forma monótona de derecha a izquierda, donde “monótona” es entendida en el sentido débil, es decir, son permitidos los movimientos verticales.

Ahora bien, a estos  $n$  caminos por aristas que satisfacen las condiciones E1-E4 los asociaremos una familia de superficies. Pero antes veamos un par de definiciones más.

Supongamos que el vértice final de un camino  $\gamma_i$  termina en alguno punto sobre una arista de  $\mathcal{D}$ , digamos sobre  $\langle p/q, r/s \rangle$ . Como el punto final de  $\gamma_i$  tiene coordenadas racionales, entonces éste se puede escribir de forma única como:

$$\alpha \langle p/q \rangle + \beta \langle r/s \rangle$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}^+$  y  $\alpha + \beta = 1$ . A  $\beta$  lo llamaremos la *fracción de arista recorrida* por  $\gamma_i$ . Denotaremos con  $\langle p/q \rangle \rightarrow \alpha \langle p/q \rangle + \beta \langle r/s \rangle$  para indicar que primero pasó por  $\langle p/q \rangle$  y después avanzó hacia  $\langle r/s \rangle$  una fracción  $\beta$ .

Por último, llamaremos *longitud* de  $\gamma_i$  al número de aristas completas por las que pasa  $\gamma_i$  más la fracción de arista que recorre al final. Denotaremos este número como  $|\gamma_i|$ . Por lo que,  $|\gamma_i| = 0$  si y sólo si  $\gamma_i$  es el camino constante.

Para la construcción de una superficie a partir del sistema de caminos que satisface las condiciones E1-E4 primero elegiremos un entero positivo  $m$  de tal manera que cada sistema de curvas asociado a los puntos finales de cada  $\gamma_i$  tenga exactamente  $m$  puntos incidentes en los agujeros. Esta  $m$  se puede encontrar como un múltiplo común de todos los  $a_i$ , donde  $(a_i, b_i, c_i)$  es una tripleta asociada al punto final de  $\gamma_i$  con ordenada positiva o bien, como un múltiplo de  $a_i + b_i$  cuando los puntos finales de las  $\gamma_i$  tienen ordenada negativa. Por su definición, este número  $m$  corresponderá al número de hojas de la superficies que construiremos.

Ahora bien, a cada camino  $\gamma_i$  le asociaremos un conjunto finito de 2-variedades  $F_i$  en  $B_i$  de tal manera que  $\partial F_i \subset K_i \cup \partial B_i$  y tal que los discos meridianos de  $K_i$  intersecan a  $F_i$  en  $m$  puntos.

Si el camino  $\gamma_i$  es constante, entonces su punto inicial se encuentra sobre  $\langle p_i/q_i \rangle, \langle p_i/q_i \rangle_0$  y entonces a este punto está asociado a un único sistemas de arcos y curvas en  $B_i^0$ , tal sistema se forma de  $m$  copias paralelas de la pareja de arcos de pendiente  $p_i/q_i$  y otras copias paralelas a la curva meridiano, la cantidad de copias paralelas al meridiano depende de la ubicación del punto inicial en el segmento  $\langle p_i/q_i, p_i/q_i \rangle_0$ . Entonces, elegiremos  $F_i$  como el sistema de curvas antes mencionado producto cartesiano con el intervalo  $I$  del collar  $C_i$  en  $B_i$ . Parte de la frontera de esta 2-variedad serán las curvas meridianas de pendiente  $p_i/q_i$  en  $\partial B_i^0$ , estas curvas meridianas las taparemos con disco meridianos del ovrillo racional. Terminaremos entonces con una 2-variedad en  $F_i$  con frontera sobre  $K_i \cup \partial B_i$ . Notemos que en el caso de  $\gamma_i$  constante  $F_i$  será única.

Si el camino no es constante habrá más posibilidades para  $F_i$ . Construiremos  $F_i$  de tal manera que  $F_i$  vivirá en  $C_i = \partial B_i \times [0, 1]$  (el collar de  $B_i$ ) y la proyección en  $[0, 1]$  será una función de Morse en  $F_i$ . Entonces, todos los puntos críticos de la proyección serán sillars de  $F_i$ . Ahora bien, queremos que la secuencia de secciones transversales  $S_i \cap (\partial B_i \times \{u\})$  cuando  $u$  va en aumento sea un sistema de curvas ajenas y que correspondan a puntos de  $\gamma_i$ . Tales sistemas de curvas corresponderán a los dados por los puntos de la forma  $k/m \langle p/q \rangle + (m - k)/m \langle r/s \rangle$  en el orden en que  $\gamma_i$  los recorra. Para pasar de un sistema de curvas al siguiente se hará uso de una silla, que será elegida (salvo isotopía que preserve niveles) de dos formas distintas (ver figura 2.12). Esto nos da un número finito de posibilidades para  $F_i$ .

Gracias a la condición (E3) en la definición 7 es que las 2-variedades  $F_i$  se pueden pegar perfectamente para formar una 2-variedad en el exterior de  $K$ . Ésta superficies



Figura 2.12: Las sillas pueden ser elegidas de dos maneras posibles.

fueron llamadas, por los autores Hatcher y Oertel, *superficie candidata*<sup>2</sup>.

Hay que notar que para los caminos que terminan en la arista  $\langle \infty, \infty \rangle_0$ , los satélites que se pueden usar son de cuatro tipos (ver figura 2.13) y para un sólo ovrillo  $B_i$  tomaremos uno sólo de los cuatro satélites y los círculos de pendiente infinita creados por ésta silla se colocaran del otro lado del eje al de donde fueron creados. Adicionalmente, para que todas las 2-variedades  $F_i$  embonen se tendrán que agregar uno o varios anillos paralelos entre si y paralelos eje (es decir, al removerlos de  $B_i$  queda una componente toro solido que contiene al eje), la 2-variedad  $F$  construida a partir de estos caminos también se le llamará superficie candidata. Los autores Hatcher y Oertel afirman que estos casos no son necesarios para clasificar todas las superficies cuando  $n = 3$  (cuando el nudo de Montesinos consta de sólo tres ovillos racionales) o cuando se quiere encontrar la lista de todas las pendientes de las superficies incompresibles.

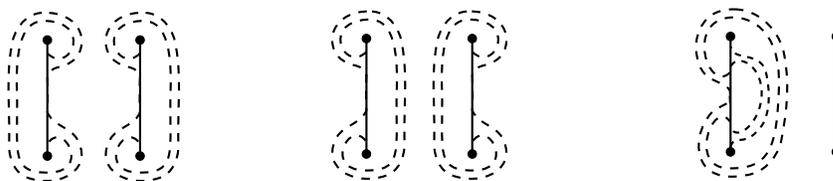


Figura 2.13: Las sillas para la arista al infinito.

Cerramos esta sección con el teorema que explica la importancia de las superficies candidatas.

**Teorema 8** (Hatcher y Oertel). *Toda superficie incompresible y  $\partial$ -incompresible en el exterior de un nudo de Montesinos  $K$  con frontera no vacía y de pendiente finita, es isotópica a una de las superficies candidatas.*

<sup>2</sup>Los autores Hatcher y Oertel usan el término superficie como sinónimo de 2-variedad. La conexidad de las superficies candidatas es algo que no les preocupaba ni molestaba.

## 2.6. Cálculo de las pendientes

En esta sección veremos cómo calcular la pendiente de una superficie candidata. El cálculo se basa en medir qué tanto se tuerce  $\partial F$  a lo largo de  $K$  dentro de cada ovillo, y esta medida se toma exclusivamente en la parte de  $\partial F$  (y  $K$ ) que se encuentra en el collar  $C_i$  de  $B_i$ , pues la parte de  $\partial F$  que se encuentra sobre  $B_i^0$  no se tuerce e incluso podemos suponer que es paralelo a una longitud de  $K$ .

Para calcular dicha torcedura basta estudiar cómo cambia  $\partial F$  al pasar por un punto silla. Al pasar por un silla, el sistema de curvas en  $F \cup \partial B_i \times \{u\}$  modifica un par de arcos de pendiente  $p/q$  por otro par de arcos de pendiente  $r/s$  (recordemos que  $ps - qr = \pm 1$ ). Este cambio entre parejas de arcos se puede entender mejor pensando a la esfera con cuatro agujeros como una *almohada*, es decir, como el orbifold<sup>3</sup>  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ , donde  $\Gamma$  es el grupo generado por las rotaciones de  $180^\circ$  con centro en puntos de coordenadas enteras.

Las líneas rectas de pendiente  $p/q$  que pasan por coordenadas enteras se proyectan sobre la almohada como un par de arcos de pendiente  $p/q$ . Entonces, las rectas de pendiente  $p/q$  y las de  $r/s$  que pasan por coordenadas enteras delimitan varios paralelogramos, entre ellos, uno con vértice en  $(0, 0)$ ,  $(q, p)$ ,  $(q+s, p+r)$ ,  $(s, r)$  y otro con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(q, p)$ ,  $(q-s, p-r)$ ,  $(-s, -r)$ . Dichos paralelogramos forman una región fundamental para la acción  $\Gamma$  sobre  $\mathbf{R}^2$ . Los paralelogramos pueden ser entendidos como el resultado de cortar la almohada por las parejas de arcos  $p/q$  y  $r/s$  y después estirar sobre el plano las dos componentes resultantes (ver figura 2.14).

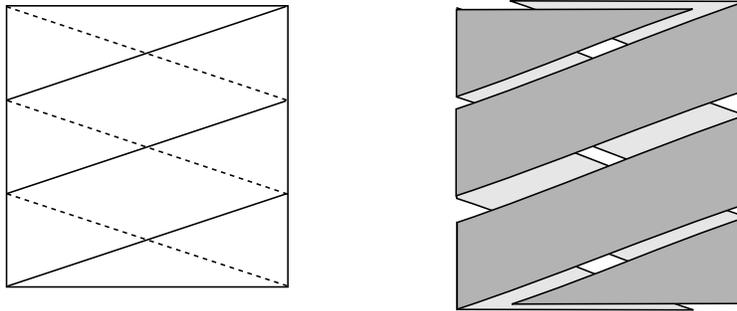


Figura 2.14: Resultado después de cortar por dos parejas de arcos.

Ahora bien, entonces los dos paralelogramos representan las dos posibles sillas que se pueden usar en  $F$  para convertir una pareja de arcos de pendiente  $p/q$  en una de pendiente  $r/s$ . Pero no importa cuál de los dos paralelogramos se elija, habrá dos vértices donde el arco que cambia pasa por la pendiente infinito, y en esos vértices es donde contaremos las torceduras. No es difícil convencerse de que si  $p/q > r/s$ , la torcedura se hará en contra de las manecillas del reloj y en caso contrario se hará a favor. Eligiendo la convención de que

<sup>3</sup>Del inglés *orbifold*.

en sentido contrario de las manecillas del reloj es positivo, podemos determinar el número total de torceduras de  $F$  con la fórmula:

$$\tau(F) = 2(s_- - s_+)/m$$

donde  $s_+$  ( $s_-$ ) es el número de sillas de  $F$  que incrementan (reducen) la pendiente de los arcos. Las sillas que producen pendiente infinito no afectan en nada el valor de  $\tau(F)$ .

Una fórmula más directa en términos de los caminos  $\gamma_i$  es

$$\tau(F) = 2(e_- - e_+)$$

donde  $e_+$  ( $e_-$ ) es el número de aristas de los  $\gamma_i$ 's que incrementan (reducen) la pendiente, y permitiremos que  $e_{\pm}$  tome valores racionales correspondientes a la fracción de arista recorrida al final de cada camino  $\gamma_i$ .

Este valor  $\tau(F)$  nos calcula qué tanto se tuerce  $\partial F$  a lo largo de  $K$ , pero para calcular la pendiente necesitamos compararlo con las torceduras que produce un superficie de Seifert, es decir, la pendiente estará dada por la fórmula:

$$m(F) = \tau(F) - \tau(F_0)$$

donde  $F_0$  es alguna superficie de Seifert en el exterior de  $K$ .

Para calcular la pendiente de  $F$ , entonces es necesario construir una superficie de Seifert  $F_0$  a partir de un sistema de caminos. Esto se puede hacer de la siguiente manera. Primero hay que notar que para una superficie de Seifert se tiene que  $m = 1$  (el número de hojas es uno). Entonces, los caminos  $\gamma_i$  deberán avanzar por aristas completas, es decir, todos los caminos deben terminar en vértices.

Por otro lado,  $F_0$  debe ser orientable y por lo tanto  $F_0$  deberá ser orientable dentro de cada  $B_i$ . Esta condición de orientabilidad nos restringe a caminos  $\gamma_i$  que no pasen por tres vértices distintos módulo 2; esto es, que nos queden tres pendientes  $p/q$  distintas después de reducir  $p$  y  $q$  módulo 2 (sólo hay tres posibilidades  $1/1$ ,  $0/1$  y  $1/0$ ). En otros términos, cada caminos  $\gamma_i$  deberá pasar exclusivamente por un sólo tipo de arista  $\langle 1/1 - 0/1 \rangle$ ,  $\langle 0/1, 1/0 \rangle$  o  $\langle 1/0, 1/1 \rangle$ , a éste tipo de caminos son a los que de ahora en adelante llamaremos monocromáticos.

Para ver porqué un camino  $\gamma_i$  no debe pasar por los tres vértices, basta con observar que no es posible asignar una orientación compatible a la tres parejas de arcos, una pareja de arcos en cada nivel. La compatibilidad implica que se conservará el tipo de incidencia en cada vértice (si llega o sale el arco del vértice). Por ejemplo, si en uno de los cuatro vértices el arco siempre "sale" del vértice sin importar la pareja de arcos, entonces, en los otros tres puntos deberán "llegar" los arcos, esto es una contradicción a la orientabilidad. Más adelante veremos un razonamiento similar a esto, pero para el caso general con  $m \geq 1$ .

Regresando al cálculo de la torsión de  $F_0$ , tenemos que  $F_0$  debe estar asociada a caminos monocromáticos  $\gamma_i$  que sólo pasan por aristas completas. Con éstas condiciones, sólo nos

quedan dos caminos posibles a seguir, hasta antes de llegar  $x = 0$ , para cada  $\gamma_i$ . Pues al salir del vértice inicial  $\langle p_i/q_i \rangle$  hay dos aristas por donde se puede salir, que están dados por las dos soluciones de  $yp_i - xq_i = \pm 1$  con  $0 < y < q_i$ . Al tomar cualquiera de ellas, debemos permanecer en un sólo color, dejando determinado el resto del recorrido hasta antes de  $x = 0$ .

Para la construcción de  $F_0$  consideraremos dos casos. El primero es cuando uno de los  $q_i$ 's es par. Entonces para cada  $i$ , elegimos  $\gamma_i$  como el camino mínimo que llega hasta  $\langle \infty \rangle$ . Este camino es único cuando  $q_i$  es impar, pues con el otro camino habrá cambio de color al momento de querer avanzar hasta el vértice  $\langle \infty \rangle$ . Y cuando  $q_i$  es par los dos caminos llegan a  $\langle \infty \rangle$  sin cambiar de color. Sólo una de estas dos opciones hará la superficie final orientable.

Para aclarar esta cuestión sobre la orientabilidad, en la imagen 2.15 hemos puesto la dos posibles orientaciones de los arcos de pendiente infinito para las dos posibles elecciones de colores de los caminos  $\gamma_i$ . Recordemos que los caminos con  $q_i$  impar sólo les corresponde una única columna de la figura, si al primer  $q_i$  impar le fijamos uno de estos diagramas (o sea, una orientación a su superficie correspondiente) entonces a los demás  $q_i$ 's impares tendrán forzada su elección de orientación, y al pegarlos todos, sólo uno de estos cuatro diagrama servirá para cerrar nudo de Montesinos, y gracias a que el  $q_i$  par puede elegir cualquier color, se podrá elegir el diagrama conveniente.

Una forma más precisa de identificar la elección de color es como sigue. Se elegirá  $\langle 1/0, 1/1 \rangle$  cuando la cantidad de  $p_i/q_i$  de la forma  $1/1$  módulo 2 sea impar y se elegirá el camino de color  $\langle 1/0, 0/1 \rangle$  en caso contrario.

Finalmente, con los caminos  $\gamma_i$ 's definidos, podemos ya calcular  $\tau(F_0)$ .

La otra posibilidad es cuando todos los denominadores  $q_i$ 's sean impares. En tal caso, el procedimiento anterior no funcionará. Para este caso elegiremos los caminos  $\gamma_i$  que llegan al eje Y ( $x = 0$ ) pasando por aristas de color  $\langle 1/1, 0/1 \rangle$ . Esto permitirá que al extender los caminos de forma vertical no se afecte la orientación, y haremos dichas extensiones verticales para asegurar que las coordenadas en  $y$  sumen cero. La superficie asociada a éstos caminos será orientable y por tanto de Seifert. Usaremos estos caminos para calcular  $\tau(F_0)$  en este caso.

## 2.7. Cómo encontrar los sistema de caminos $\gamma_i$

Para encontrar todos los sistemas de caminos  $\gamma_i$  Hatcher y Oertel ([4]) construyeron un algoritmo que podía ser ejecutado velozmente por una computadora ordinaria. Nathan M. Dunfield en [1] reprogramó este algoritmo y logró corregir unos errores en los resultado de Hatcher y Oertel. Nathan M. Dunfield hizo público su programa escrito en lenguaje Python, facilitando así el reuso del algoritmo de Hatcher y Oertel.

La base del algoritmo consiste en primero encontrar un sistema de curvas  $\gamma_i$  que satisfaga las condiciones E1-E4. Después, usar los criterios que aparecen en el artículo [4] para

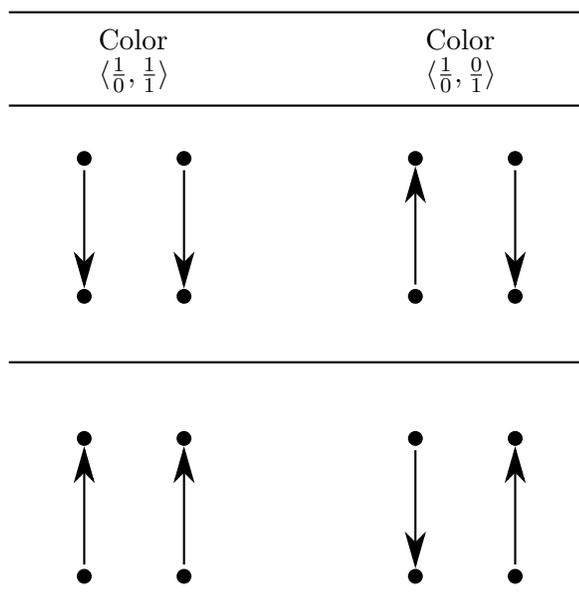


Figura 2.15: Las opciones de orientación de la pareja de arcos de pendiente infinito, asociada a las superficies para cada tipo de pendiente  $p_i/q_i$  con  $q_i$  impar.

decidir si alguna de las superficies asociadas a tales caminos es incompresible. Si el sistema de caminos pasa los criterios, se agrega su pendiente a la lista de pendientes del nudo.

El programa de Dunfield despliega información extra de la superficie, como el número de componentes en la frontera, la lista de caminos y la característica de Euler, lo que lo hace útil para hacer estudios sobre superficies incompresible de Nudos de Montesinos.

El algoritmo está basado en la siguiente idea. Primero se determina el espacio cociente  $T_i$  de la unión ajena de todos los caminos que inician en  $\langle p_i/q_i \rangle$  identificando los segmentos iniciales comunes. Nos limitaremos primero a los caminos que se encuentran dentro de  $\mathcal{S}$ . El espacio  $T_i$  está inmerso de forma natural en  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ .

Para construir al conjunto  $T_i$  empezamos primero por agregar al segmento  $\langle p_i/q_i, p_i/q_i \rangle_0$ . Posteriormente se calculan las dos posibles aristas  $\langle x/y, p_i/q_i \rangle$  a la izquierda de  $\langle p_i/q_i \rangle$  por donde puede avanzar  $\gamma_i$ : esto se logra resolviendo la ecuación  $yp_i - xq_i = \pm 1$  con  $0 < y < q_i$ , que no requiere nada sofisticado, sólo el algoritmo de Euclides. Se agregan a  $T_i$  las dos aristas calculadas y se procede de forma recursiva con los nuevos dos vértices, cuidando desechar aquellas aristas que no representen caminos minimales. Esto se hace hasta llegar al eje Y. La unión ajena de estas aristas sera  $T_i$ . Cabe hacer notar que a cada vértice de  $T_i$  le está asociado un único camino  $\gamma_i$ . Una vez definido  $T_i$  se dividen los posibles sistemas de curvas en tres casos

El primero de los casos son los de *tipo I*, serán aquellos en los que los vértices finales

quedan todos sobre una recta vertical con  $x > 0$ , es decir, en el interior de  $\mathcal{S}$ . Entonces, el vértice final de  $\gamma_i$  estará sobre  $T_i$  para cada  $i$ .

Ahora bien, en los casos de tipo I, los caminos los podemos entender como n-tuplas de puntos  $t_i \in T_i$ , con la misma coordenada en  $x$  y con la propiedad de que la suma de sus abscisas (que denotaremos como  $y(t_i)$ ) sea cero. Luego, para valores de  $x$  entre racionales consecutivos  $r_k = k/(k+1)$  y  $r_{k+1} = (k+1)/(k+2)$  no hay vértices de  $T_i$ , entonces para cada intervalo de éstos consideramos todas las aristas de  $T_i$  que intersecan a la franja vertical  $r_k < x \leq r_{k+1}$ . Estos segmentos los podemos ver como funciones lineales en  $x$ . Elijamos un segmento en cada  $T_i$  y formemos una ecuación lineal  $\sum y(t_i) = 0$ , la cuál podría tener o no solución en  $x$ . Cuando la solución exista, habremos encontrado un sistema de curvas. Si la solución que existe no es aislada, no es difícil ver que todas las soluciones corresponderán a superficies con la misma pendiente. Para los objetivos de esta tesis necesitaremos estudiar todas éstas posibles soluciones, y desechar las posibilidad de que en esas soluciones exista una superficie ICON.

El segundo caso, es el de *tipo II*, que son las superficies obtenidas a partir de sistemas de caminos con puntos finales en el eje Y, es decir, con  $x = 0$ . Para encontrar caminos de este tipo bastará estudiar los valores  $t_i$  al final de  $T_i$  y determinar si es posible extender estos valores verticalmente para que se satisfaga E1-E4. En general esto no es posible, por ejemplo, si todos los caminos terminan con la arista  $\langle 1/2, 1/1 \rangle$  no se puede extender hacia abajo, pues implicaría romper la condición de minimalidad. También puede haber infinitas formas de extender los caminos, pero todas ellas dan superficies con la misma pendiente. Sin embargo, para los intereses de esta tesis, éste caso será complicado de resolver, pues habrá que desechar que en toda esa infinidad de posibilidades no existen superficies ICON.

El caso de *tipo III* son los sistemas de curvas restantes, donde todos los caminos tienen puntos finales con  $x < 0$ , o sea, los caminos terminan en alguna parte hacia el vértice  $\langle \infty \rangle$ , sobre él o en la arista  $\langle \infty, \infty \rangle_0$ . Si los caminos no llegan al vértice  $\langle \infty \rangle$ , quiere decir que terminan en puntos cuyas coordenadas en  $y$  suman cero, por lo que, podemos truncar estos caminos justo en  $x = 0$ , y también satisfecerán las condiciones E1-E4, este truncado no afecta en nada al valor de la pendiente de la superficie, sin embargo, para esta tesis, nuevamente implica un espacio para la aparición de superficies ICON.



## Capítulo 3

# Las superficies ICON

Las superficies<sup>1</sup> en las que estamos interesados son incompresibles compactas orientables y no separantes; para abreviar escribiremos *superficies ICON*.

En el capítulo anterior vimos cómo a las superficies incompresibles les está asociado un sistema de caminos  $\gamma_i$  con  $i = 1, \dots, n$  el diagrama  $\mathcal{D}$ , el cuál satisface las condiciones E1-E4. Más aun, vimos como construir todos los posibles sistemas de caminos para un nudo de Montesinos dado.

Con un sistema de caminos en la mano y un número de hojas  $m$ , es posible construir un número finito de superficies candidatas<sup>2</sup>. En este capítulo trataremos de determinar cuáles de éstas superficies candidatas resulta ser ICON.

Nuestra herramienta básica para determinar si la superficie candidata es orientable y conexa será el Diagrama de orientaciones que veremos en la primera sección.

### 3.1. Diagrama de orientaciones

Recordemos que una superficie candidata  $F$  se forma de pegar 2-variedades  $F_i \subset B_i$ . Cada  $F_i$  es una 2-variedad por lo general no conexa. Entonces, para determinar si la superficie  $F$  es orientable y conexa será necesario verificar que cada  $F_i$  sea una 2-variedad orientable y que al pegarlas quede una única componente orientada.

A las componentes de cada  $F_i$  las llamaremos piezas de  $F$ . Para determinar la conexidad y orientabilidad de  $F$  a groso modo podemos hacer lo siguiente:

1. Tomar una pieza  $L_0$  de  $F$  y orientarla. De no poder realizar este paso,  $F$  será no orientable.
2. A  $L_0$  le pegamos todas las piezas de  $F$  que lo intersequen, es decir, las piezas  $L'$  de  $F$  tales que  $L' \cap L_0$  sea una 1-variedad en  $\partial L_0$ . A cada pieza  $L'$  la orientamos acorde

---

<sup>1</sup>El término superficie lo estamos dejando exclusivamente para 2-variedades conexas

<sup>2</sup>En el sentido de Hatcher y Oertel, las superficies candidatas podrían ser no conexas

a la orientación de  $K$ . Si una de las piezas  $L$  no se puede orientar acorde (pues al pegarla aparece una banda de Möbius), entonces  $F$  será no orientable.

3. De las piezas anteriores, podrían existir  $L'$  y  $L''$  tales que  $L' \cap L''$  es una 1-variedad. De existir, las pegamos. Si las orientaciones de  $L'$  y  $L''$  no concuerdan en su intersección, entonces la variedad  $F$  será no orientable.
4. Si no se presentó un caso de no orientabilidad en los pasos anteriores, terminaremos con una superficie orientada (posiblemente con frontera)  $L_1$ .
5. Entonces, tenemos tres casos:
  - La superficie  $L_1$  tiene todas las piezas de  $F$ . Entonces,  $F$  será conexa y orientable.
  - Hay piezas de  $F$  que no están en  $L_1$  y ninguna de ellas interseca a  $L_1$ . Entonces,  $F$  será no conexa.
  - Hay piezas de  $F$  que no están en  $L_1$  pero al menos una ellas interseca a  $L_1$ . Entonces, iteramos este proceso para  $L_0 = L_1$  desde el paso 2.

El proceso anterior es realmente complicado de llevar a cabo en la práctica, para el caso de nudos de Montesinos. Pues nosotros sólo contamos con un sistema de caminos para describir cada  $F_i$ , lo cuál, en principio, no nos dice ni cómo ni cuántas piezas están dentro de  $B_i$ .

Para registrar cómo son las piezas de  $F_i$  sólo nos fijaremos en el sistema de curvas  $F_i \cap \partial B_i$ . En dicho sistema anotaremos cuáles curvas pertenecen a la misma pieza de  $F$ , más aun, marcaremos cómo la orientación de una pieza de  $F_i$  afecta simultáneamente a dos o más curvas de  $F_i \cap \partial B_i$ .

Esta información la podemos obtener de la siguiente manera. Primero asignamos una orientación a cada componente de  $F_i$ , entonces esto nos definirá unas vías de tren orientadas en  $\partial B_i$ . Al cambiar la orientación de una componente  $K_j$  de  $F_i$  se cambiará la orientación de varias curvas o arcos de  $F_i \cap \partial B_i$ . Estas dos posibles orientaciones de  $K_j$  puede ser registrada con una variable  $x_j \in \{1, -1\}$ ;  $x_j = 1$  representa la orientación originalmente asignada a  $K_j$ , y  $x_j = -1$  representa la orientación opuesta.

Usando esta variable, podemos sustituir los 1's y -1's afectados por el cambio de orientación en  $K_j$  por  $x_j$  y  $-x_j$ , respectivamente.

Si hacemos esta asignación de variables para cada componente de  $F_i$ , terminaremos con una familia de vías de tren orientadas, parametrizadas por las variables  $x_j$ 's. A esta familia parametrizada de vías de tren la llamaremos *diagrama de orientaciones de  $F_i$*  y debido a su importancia la resumimos a continuación.

**Definición 9.** *El diagrama de orientaciones de una 2-variedad orientable  $F_i$ , son las vías de tren en  $\partial B_i$  definidas por las curvas  $F_i \cap \partial B_i$  junto con la familia de orientaciones inducidas por las posibles orientaciones de  $F_i$ .*

Esta familia puede ser parametrizada por los elementos de  $\{1, -1\}^{|F_i|}$  (donde  $|F_i|$  es la cantidad de componentes de  $F_i$ ).

La figura 3.1 muestra un ejemplo de un diagrama de orientaciones. Básicamente es una vía de tren orientada, pero en lugar de 1's y -1's se usan variables que  $x_i$ 's.

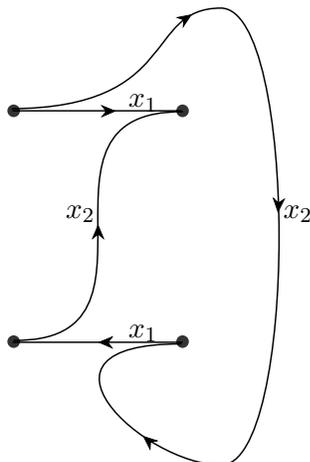


Figura 3.1: Ejemplo de diagrama de orientaciones

Ahora bien, asumiendo la orientabilidad de cada  $F_i \subset F$ , estará definido su diagrama de orientaciones en  $\partial B_i$ . Luego, para garantizar la orientabilidad de la superficie que resulta de pegar  $F_i$  con  $F_{i+1}$  se deben de cumplir una serie de relaciones entre sus diagrama de orientaciones. Cada relación es del tipo  $x_j = \pm y_l$ , donde  $x_j$  es la variable asignada a un pedazo de arco en la frontera de la componente  $K_j \subset F_i$  y  $y_l$  es la variables correspondiente que va pegarse y que vive en la frontera  $K_l \subset F_{i+1} \cap B_{i+1}$ .

Entonces, al pegar todas las  $F_i$ 's terminaremos con un extenso sistema de ecuaciones que sus soluciones pueden ser interpretadas como sigue:

- Existe solución en  $\{1, -1\}$  si y sólo si  $F$  es orientable.
- Existen a lo más tres<sup>3</sup> soluciones en  $\{-1, 0, 1\}$  si y sólo si  $F$  es conexa.

En algunas ocasiones hablaremos sólo del diagrama de orientaciones de un camino  $\gamma_i$ , esto sólo será posible cuando el diagrama de orientaciones no dependa de las distintas superficies asociadas a  $\gamma_i$ .

---

<sup>3</sup>Una de ellas es la idénticamente cero, que siempre existe. Y de ser la única solución,  $F$  será conexa y no orientable.

### 3.2. Orientación de cada $F_i$

Otro problema que hay que resolver es el de determinar si las 2-variedades  $F_i$  son orientables. Esto no será posible de determinar por completo, pues a un camino  $\gamma_i$  le están asociadas varias superficies, y en algunos casos, como veremos más adelante, habrá de los dos tipos: orientables y no orientables.

Empecemos por ir paso a paso repasando la construcción de  $F_i$  poniendo especial atención en su orientación. En este análisis aparecerá el diagrama de orientaciones que explicamos en la sección (3.1).

Lo que lograremos, será una descripción del diagrama de orientaciones de  $F_i$  de cerca de cada uno de los cuatro agujeros de  $\partial B_i$ . Como vimos, el diagrama de orientaciones está descrito por una vía de tren junto con  $|F_i|$  variables. Entonces, si podemos determinar cuáles son las variables asociadas a cada uno de los cuatro arcos, prácticamente habremos determinado todo el diagrama de orientaciones.

Empecemos analizando el caso más sencillo, y es cuando el camino  $\gamma_i$  tiene longitud menor o igual a 1. Supongamos entonces que  $\gamma_i$  termina en un punto de coordenadas racionales sobre  $\langle p_i/q_i, u/v \rangle$ , donde el racional  $u/v$  satisface que  $p_i v - q_i u = \pm 1$ .

Recordemos que para construir  $F_i$  a partir de  $\gamma_i$  necesitamos primero elegir el número de hojas de  $F$  como un entero  $m$  (las condiciones sobre  $m$  se explicaron en 2.5). En el caso que nos interesa, en que  $F$  sea no separante,  $m$  deberá ser un número impar.

Ahora bien, existe un entero  $0 < \alpha < m$  tal que  $\gamma_i$  termina en el punto:

$$\frac{m - \alpha}{m} \langle p_i/q_i \rangle + \frac{\alpha}{m} \langle u/v \rangle \quad (3.1)$$

Es decir, para construir  $F_i$  serán necesarios  $m$  sillas. Cada silla cambiará una pareja de arcos de pendiente  $p_i/q_i$  en una pareja de arcos de pendiente  $u/v$ . Y como recordamos, salvo isotopía, hay únicamente dos tipos de elecciones para las sillas en cada momento (ver 2.12). Las dos parejas de arcos delimitan dos regiones del plano, una que contiene al punto al infinito y otra que no, si la silla se encuentra dentro de la región con el punto al infinito la llamaremos *silla no acotada* (la segunda silla de la figura 2.12) y a la otra la llamaremos *silla acotada* (primera opción de la figura 2.12).

Estos dos tipos de sillas son intercambiables de nivel, es decir, una silla acotada seguida de una no acotada puede cambiarse a la sucesión silla no acotada silla acotada. Por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que primero se eligen las sillas acotadas y después las no acotadas.

Por otro lado, es posible mover la primera silla de un cierto tipo a través de la bola  $B^0$  y transformarlo en una silla del otro tipo. Otra manera de decirlo, es que las diferentes opciones de sillas al inicio de la construcción de  $F_i$  dan lugar a superficies isotópicas. Por lo que podemos suponer que todas las sillas son del mismo tipo, es decir, todas las sillas son paralelas.

Tomando todas las sillas paralelas, es fácil ver que el número de componentes conexas de  $F_i$  es exactamente  $2m - \alpha$ . Pues cerca del nivel cero,  $F_i$  consta de  $2m$  discos y cada silla

conecta un par de discos, y un par diferente cada vez, de donde se infiere que la cantidad de componentes conexas después de  $\alpha$  sillas será  $2m - \alpha$ .

Ahora trataremos de determinar el diagrama de orientaciones de las superficies asociadas a  $\gamma_i$ . Recordemos que el punto final de  $\gamma_i$  es el dado por la fórmula 3.1. Para describir las posibles orientaciones que inducen las  $2m - \alpha$  componentes de  $F_i$  en el sistema de curvas  $\partial B_i$  usaremos una vía de tren orientada.

El camino  $\gamma_i$  inicia en el vértice  $\langle p/q \rangle$  y está asociado a  $m$  copias paralelas de dos arcos de pendiente  $p/q$  y después de meter los  $\alpha$  puntos sillas terminaremos con  $\alpha$  copias paralelas a la pareja de arcos de pendiente  $u/v$  y  $m - \alpha$  copias paralelas a la pareja de arcos de pendiente  $p/q$ .

Entonces, para entender cuáles son las posibles orientaciones de esta familia de arcos, tendremos que analizar cómo las sillas conectan a dos pareja de arcos de pendiente  $p/q$  y  $u/v$ , respectivamente. Y después arrastrar este análisis a un diagrama de orientaciones. Empecemos por estudiar el efecto de las sillas en el levantamiento de los arcos bajo el cubriente ramificado  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \partial B_i$  dado por la acción de las rotaciones de  $180^\circ$  con centro en puntos de coordenadas enteras.

Los arcos de pendiente  $p/q$  en  $\partial B_i$  se levantan a  $\mathbb{R}^2$  en líneas paralelas de pendiente  $p/q$  que pasan por coordenadas enteras.

Coloquemos los dos pares de arcos de pendiente  $p/q$  y  $u/v$  en el mismo nivel, ese nivel es isomorfo a  $\partial B_i$ , por lo que podemos identificarlo con  $\partial B_i$  y tomar el cubriente ramificado antes mencionado. Al tomar la preimagen de los cuatro arcos, se dibujan dos grupos numerables de rectas paralelas de pendiente  $p/q$  y  $u/v$ , estas rectas delimitan una infinidad numerable de paralelogramos, tomando dos de los paralelogramos que tocan  $(0, 0)$  se forma un región fundamental (ver figura 3.2). Entonces, la imagen de éstos dos paralelogramos bajo la aplicación cubriente  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \partial B_i$  cubren a  $\partial B_i$ . Entonces, cada silla (la acotada y no acotada) se levantan en el interior de uno de estos paralelogramos, cada una en un paralelogramo distinto.

Hay que tomar en cuenta que bajo este cubriente los puntos de coordenadas enteras en  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  se proyectan al mismo punto si y sólo si son congruentes módulo 2 entrada por entrada. Dando por resultado que los puntos de  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  se proyectan en cuatro puntos, dichos puntos los hemos marcado en la figura 3.3 con coordenadas de ceros y unos, de tal manera que la imagen de un punto  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  será  $(a, b) \pmod{2}$ .

Luego, estudiando la conectividad creada por estas sillas en los arcos, se ve que si orientamos el arco que va desde  $(0, 0)$  al punto  $(q, p)$  (en la figura 3.2 es el arco  $a_0$ ), el otro arco de pendiente  $p/q$  debe quedar orientado de  $(q + v, p + u)$  a  $(v, u)$  (arco  $b_0$  en 3.2) para que la silla una dos lados de orientación opuesta.

Esta observación, al proyectar se traduce como sigue. Si a la componente de la pareja de arcos  $p/q$  que une  $(0, 0)$  con  $(q, p) \pmod{2}$  la orientamos de  $(0, 0)$  a  $(q, p) \pmod{2}$  entonces, el otro arco debe quedar orientado de  $(q + v, p + u) \pmod{2}$  a  $(v, u) \pmod{2}$ .

Esto describe perfectamente las posibles orientaciones de una de las componentes conexas de  $F_i$ , pero faltaría describir todo el conjunto, es decir, cómo quedan entrelazadas

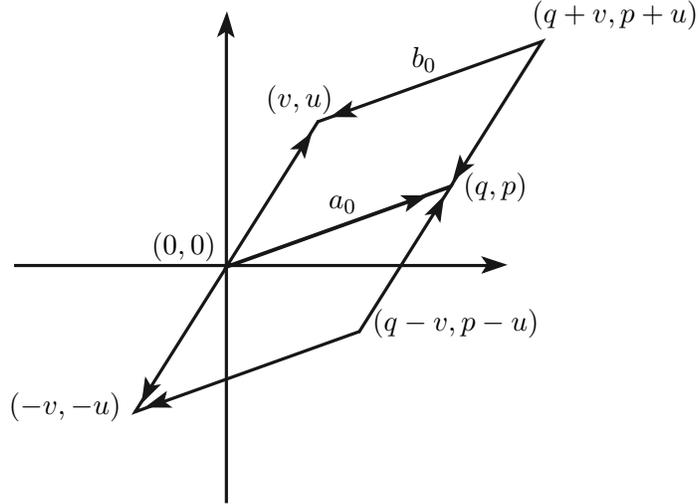


Figura 3.2: Figura del diagrama de los dos paralelogramos y sus puntos sillars.

las  $\alpha$  componentes de  $F_i$  formadas por las sillars y sus  $m - \alpha$  parejas de discos contraíbles a arcos de pendiente  $p/q$ . La respuesta a esta pregunta la queremos representar en una vía de tren orientada como la de la figura 3.3

En la figura 3.2 podemos pensar a los arcos  $a_0$  y  $b_0$  como dos familias de  $m$  arcos paralelos y orientados de igual manera. Hasta antes del primer punto silla, Entonces, si tomamos la silla contenida en el paralelogramo superior, ésta unirá un arco a la izquierda<sup>4</sup> de  $a_0$  con un arco a la izquierda de  $b_0$  y los convertirá en una pareja de arcos de pendiente  $u/v$ . Si tomamos la otra silla, se unirá un arco a la derechas de  $a_0$  y  $b_0$  respectivamente. Al transformar una parejas de arcos en otra, como vimos en la sección 2.6, los arcos se tuercen alrededor del nudo: en sentido contrario o favor de las manecillas del reloj, dependiendo si  $p/q > u/v$  o viceversa, además se tuercen en los vértices  $(0,0)$  y  $(q+v,p+u)$  o bien, en los vértices  $(q,v)$  y  $(v,u)$  dependiendo del tipo de silla elegida.

### 3.2.1. Camino de longitud menor o igual 1

Ahora sí, traduciendo todas estas observaciones al cálculo de diagrama de orientaciones obtenemos el siguiente resultado. Pero para enunciarlo necesitaremos de la función  $\rho : \{1, -1\}^n \rightarrow \{1, -1\}^n$  dada por  $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$ .

**Teorema 10.** *Consideremos  $\gamma_i$  un camino de longitud menor o igual a 1 y sea  $F_i$  su superficie asociada. Además, consideremos  $\alpha$ ,  $m$ ,  $p/q$  y  $u/v$  como antes. Entonces se tendrá que:*

<sup>4</sup>La izquierda de un arco orientado en  $\mathbb{R}^2$  es hacia donde apunta el vector  $\vec{v}$  tal que  $\vec{d} \times \vec{v} > 0$ , donde  $\vec{d}$  es un vector que apunta en la misma dirección que el arco

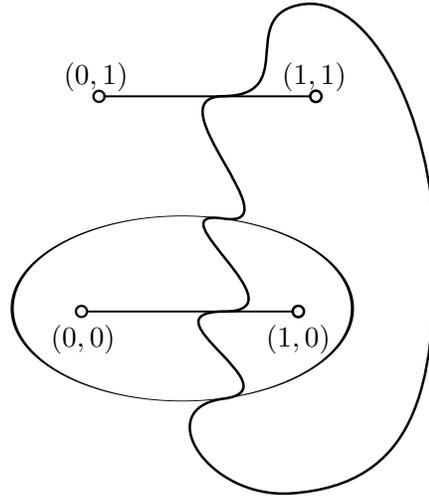


Figura 3.3: Figura mostrando qué puntos de la esfera con cuatro agujeros corresponden a la proyección de coordenadas enteras.

1. La superficie  $F_i$  es única salvo isotopía y es orientable.
2.  $F_i$  tiene exactamente  $2m - \alpha$  componentes.
3. Además, el diagrama de orientaciones, en cada una de las cuatro aristas que tocan los vértices de  $\partial B_i$ , tiene la orientación descrita por la siguiente tabla.

Vértice	Orientación	Peso
$(0, 0)$	Salida	$\rho^{\pm\alpha}(\vec{x})$
$(q + v, p + u) \text{ mód } 2$	Salida	$\rho^{\pm\alpha}(\vec{y})$
$(q, p) \text{ mód } 2$	Llegada	$\vec{x}$
$(v, u) \text{ mód } 2$	Llegada	$\vec{y}$

El signo en el exponente de  $\rho$  será positivo si  $p/q > u/v$ , y negativo en caso contrario. Aquí,  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  son vectores de longitud  $m$  y sus correspondientes primeras  $\alpha$  entradas son iguales si  $p/q > u/v$ , en caso contrario serán iguales las últimas  $\alpha$  entradas.

*Demostración.* La prueba ya la tenemos casi completa. La parte 1) y 2) ya fue probado, sólo falta explicar cómo obtenemos la tabla.

Recordemos que tenemos un sistema de curvas  $F_i \cap (S_i \times \{t\}) \subset B_i$  en una esfera con cuatro agujeros  $S_i \times \{t\} \setminus K$ . Esto, exceptuando un número finito de valores de  $t$ , que en este caso serán exactamente  $\alpha$  excepciones.

Ahora bien, estudiaremos el sistema de curvas de  $t = 0$  hasta  $t = 1$ . Primero que nada, al sistema de curvas muy cerca de  $t = 0$  lo podemos ver como una vía de tren orientada, tomando a una pareja de arcos de pendiente  $p/q$  como la cuasi-vía de tren. Luego, al arco que va de  $(0, 0)$  a  $(q, p) \bmod 2$  le asignamos los pesos  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  y al arco que va de  $(q + v, p + u) \bmod 2$  a  $(v, u) \bmod 2$  le asignamos los pesos  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Luego, como vimos en la sección 2.3, podemos identificar esta vía de tren orientada con una de la figura 2.10.

Hasta el momento no hay restricciones sobre los valores que  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  pueden tomar. Pero después de pasar el primer punto silla, una pareja de arcos de pendiente  $p/q$  se convertirá en una pareja de arcos de pendiente  $u/v$ , y por lo que analizamos antes de enunciar el teorema se observa que esto mete una restricción a los valores de  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ . Esa restricción será que  $x_1 = y_1$  o bien  $x_n = y_n$  dependiendo de la elección de la silla. Además, una torcedura en sentido contrario de las manecillas del reloj sobre el vértice  $(0, 0)$  se traduce en cambiar la variable  $\vec{x}$  asignada al arco que sale de  $(0, 0)$  por la variable  $\rho(\vec{x})$ , y a favor de las manecillas del reloj se cambiaría por  $\rho^{-1}(\vec{x})$ . Entonces, de aquí se sigue la tabla. □

Una versión de este corolario que será importante para lo que sigue es cuando la longitud del camino es exactamente 1, y pues en ese caso  $\alpha = m$  y por lo tanto  $\rho^{\pm\alpha}(\vec{x}) = \vec{x}$  y  $\rho^{\pm\alpha}(\vec{y}) = \vec{y}$ .

**Corolario 11.** *Consideremos  $\gamma_i$  un camino que va de  $p/q$  a  $u/v$  y sea  $F_i$  su superficie asociada. Además, consideremos  $m$  el número de hojas de  $F_i$ . Entonces se tendrá que:*

1. *La superficie  $F_i$  es única salvo isotopía y es orientable.*
2.  *$F_i$  tiene exactamente  $m$  componentes.*
3. *Además, el diagrama de orientaciones, en cada una de las cuatro aristas que tocan los vértices de  $\partial B_i$ , tiene la orientación descrita por la siguiente tabla.*

Vértice	Orientación	Peso
$(0, 0)$	Salida	$\vec{x}$
$(q + v, p + u) \bmod 2$	Salida	$\vec{x}$
$(q, p) \bmod 2$	Llegada	$\vec{x}$
$(v, u) \bmod 2$	Llegada	$\vec{x}$

Donde  $\vec{x}$  es un vector de longitud  $m$ .

### 3.2.2. Caminos monocromáticos

En el caso de caminos de longitud mayor a 1 podrían aparecer problemas de orientación. Tales problemas ocurrirán cuando existan cambios de color en las aristas de  $\gamma_i$ . Aquí, el

“color” será entendido como en la sección 2.6, es decir, el color de una arista será la pareja de fracciones en los extremos reducidas módulo 2, en total serán tres colores distintos:  $\langle 1/1, 0/1 \rangle$ ,  $\langle 0/1, 1/0 \rangle$  y  $\langle 1/0, 1/1 \rangle$ .

En esta sección veremos el caso en que no hay cambios de color. A los caminos  $\gamma_i$  donde no hay cambios de color los llamaremos *monocromáticos*.

Cuando se recorre la primera arista, la parte de  $F_i$  que representada por esa arista tendrá el diagrama de orientaciones descrito en el corolario 11. Esto es, en cada una de las cuatro arista que tocan un vértice, el peso asignado será el vector  $\vec{x}$  de dimensión  $m$  y la orientación de la arista es la dada por la siguiente tabla (que depende del color de la arista).

$\langle 1/1, 0/1 \rangle$		$\langle 0/1, 1/0 \rangle$		$\langle 1/0, 1/1 \rangle$	
Vértice	Orient.	Vértice	Orient.	Vértice	Orient.
(0, 0)	Salida	(0, 0)	Salida	(0, 0)	Salida
(0, 1)	Salida	(1, 1)	Salida	(1, 0)	Salida
(1, 1)	Llegada	(1, 0)	Llegada	(0, 1)	Llegada
(1, 0)	Llegada	(0, 1)	Llegada	(1, 1)	Llegada

Si después de la primera arista se sigue avanzando por aristas del mismo color, entonces no habrá aumento de componentes. De hecho, podemos determinar los pesos en cada una de las aristas que tocan los vértices. Supongamos que la última arista es  $\langle p/q, u/v \rangle$ , y que se usan  $r$  que provocan torcedura en el vértice  $(0, 0)$  y  $s$  sillas del otro tipo.

3.1.

Vértice	Orientación	Peso
(0, 0)	Salida	$\rho^{\pm r}(\vec{x})$
$(q, p) \text{ mód } 2$	Llegada	$\rho^{\mp s}(\vec{x})$
$(v, u) \text{ mód } 2$	Llegada	$\rho^{\mp s}(\vec{x})$
$(q + v, p + u) \text{ mód } 2$	Salida	$\rho^{\pm r}(\vec{x})$

Cuadro 3.1: Orientaciones del diagrama de orientaciones de un camino monocromático que termina en el vértice  $(1 - t)\langle p/q \rangle + t\langle u/v \rangle$  con  $t = \alpha/m$  y  $r + s = \alpha$ . Donde hay  $r$  puntos sillas de un tipo y  $s$  del otro.

Esta tabla se obtiene, haciendo el mismo análisis hecho en la sección . Si hacemos cambio de variable  $\vec{y} = \rho^{\pm r}(\vec{x})$  el diagrama de orientaciones se reescribe así:

Podemos finalmente concluir de la tabla 3.2 el siguiente teorema.

**Teorema 12.** *Las 2-variedades  $F_i$  obtenidas a partir de un camino monocromático  $\gamma_i$  tienen como diagrama de orientaciones al descrito por la tabla 3.2. Por lo que, el diagrama de orientaciones es independiente de la elección de las sillas.*

Vértice	Orientación	Peso
$(0, 0)$	Salida	$\vec{y}$
$(q, p) \text{ mód } 2$	Llegada	$\rho^{\mp\alpha}(\vec{y})$
$(v, u) \text{ mód } 2$	Llegada	$\rho^{\mp\alpha}(\vec{y})$
$(q + v, p + u) \text{ mód } 2$	Salida	$\vec{y}$

Cuadro 3.2: Orientaciones del diagrama de orientaciones después del cambio de variable  $\vec{y} = \rho^{\pm r}(\vec{x})$  en la tabla 3.1.

También cabe señalar que cuando el camino termina en vértice, se tendrá que  $\alpha = m$  y por lo tanto  $\rho^{\pm\alpha}(\vec{y}) = \rho^{\pm m}(\vec{y}) = \vec{y}$ . En consecuencia, el diagrama de orientaciones para caminos que terminan en vértices está dado por el siguiente corolario.

**Corolario 13.** *Consideremos un camino monocromático que termina en vértice y es de color  $\langle \alpha_0/\beta_0, \alpha_1/\beta_1 \rangle$  con  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  en  $\mathbf{Z}_2$  para  $k = 0, 1$ . El diagrama de orientaciones se puede parametrizar con un vector  $\vec{x}$  de dimensión  $m$ . De tal manera que, el peso asignado a las aristas que tocan vértice será  $\vec{x}$  y la orientación de dichos arcos será de salida en  $(0, 0)$  y  $(\alpha_0 + \alpha_1, \alpha_0 + \beta_1) \text{ mód } 2$  y de llegada en los otros dos.*

### 3.2.3. Caminos no monocromáticos

Cuando el camino  $\gamma_i$  no es monocromático se reduce considerablemente la conexidad de la 2-variedad  $F_i$ . Es precisamente en estos casos donde cobra relevancia la ambigüedad de puntos sillas en la construcción de  $F_i$ .

Estudiemos qué pasa en el primer momento en que  $\gamma_i$  cambia de color. Supongamos que este cambio ocurre en el vértice  $\langle u_1/v_1 \rangle$ ; entonces  $\gamma_i$  recorre una arista  $\langle u_0/v_0, u_1/v_1 \rangle$  de un cierto color y luego avanza por otra arista  $\langle u_1/v_1, u_2/v_2 \rangle$  de otro color. Este cambio de colores se puede resumir en la identidad 3.2.

$$(v_0 + v_1, u_0 + u_1) \equiv (v_2, u_2) \pmod{2} \quad (3.2)$$

Hasta el vértice  $\langle u_1/v_1 \rangle$ , el diagrama de orientaciones estará descrito por el corolario 13. Esto quiere decir que cerca de los vértices, el diagrama de orientaciones tendrá como peso a un vector  $\vec{x}$  de dimensión  $m$  y las orientaciones de las aristas serán de salida para los vértices  $(0, 0)$  y  $(v_0 + v_1, u_0 + u_1) \text{ mód } 2 = (v_2, u_2) \text{ mód } 2$ .

Ahora bien, consideremos como antes el cubriente ramificado  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \partial B_i$  generado por las rotaciones de  $180^\circ$  con centro en puntos de coordenadas enteras. En este cubriente tomamos la región fundamental que contiene al cero y que está delimitada por los levantamientos de las dos parejas de arcos de pendiente  $u_1/v_1$  y  $u_2/v_2$ . Esto es, consideramos un paralelogramo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(v_0, u_0)$ ,  $(v_2 + v_1, u_2 + u_1)$  y  $(v_2, u_2)$ , y el otro con vértices  $(0, 0)$ ,  $(-v_2, -u_2)$ ,  $(v_1 - v_2, u_1 - v_1)$  y  $(v_1, u_1)$ . Luego, como acabamos de decir, las orientaciones

de los arcos de pendiente  $u_1/v_1$  deben ser de salida en  $(0,0)$  y en  $(u_2, v_2) \pmod 2$ , en consecuencia, en su levantamiento a  $\mathbb{R}^2$  deben quedar de salida en cada vértice  $(x, y) \equiv (u_2, v_2) \pmod 2$ . En particular, la orientación es de salida en los puntos  $(u_2, v_2)$  y  $(-u_2, -v_2)$  y  $(0,0)$  (ver figura 3.4).

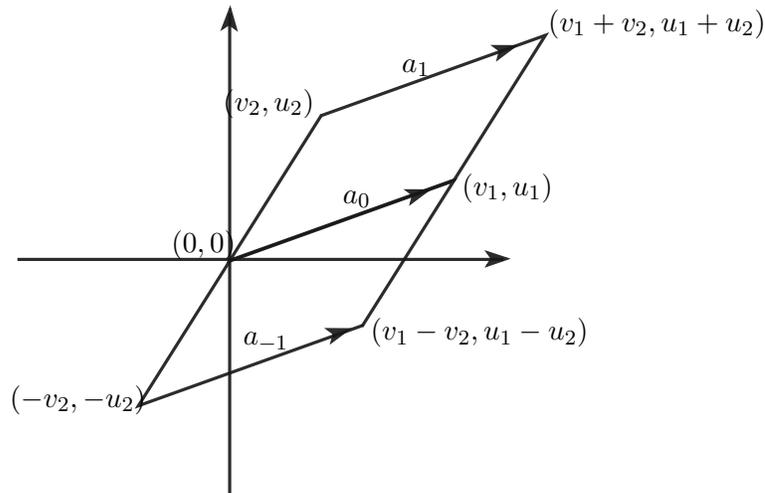


Figura 3.4: Levantamiento de  $u_1/v_1$  y  $u_2/v_2$ .

Al arco de pendiente  $u_1/v_1$  que sale del  $(0,0)$  lo llamaremos  $a_0$  y el otro paralelo que sale de  $(v_2, u_2)$  lo llamaremos  $a_1$  y el que sale de  $(-v_2, -u_2)$  lo llamaremos  $a_{-1}$ . Ahora bien, la silla que conecta  $a_0$  con  $a_1$  une el lado izquierdo de  $a_0$  con el lado derecho de  $a_1$ , además de que esta unión requiere que uno de los arcos cambie de orientación. En el diagrama de orientaciones sobre  $\partial B_i$  lo que tendremos es que la primera entrada de  $\vec{x}$  deberá ser igual al negativo de su última entrada. Lo mismo ocurrirá con la otra silla, pero ahora será el lado derecho de  $a_0$  con el izquierdo de  $a_{-1}$ . Y si seguimos pasando por sillas, seguirán apareciendo las relaciones  $x_i = -x_{m+1-i}$  donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Entonces, si ponemos  $r$  sillas que unen  $a_0$  con  $a_1$  y  $s$  sillas del otro tipo, tendremos que se deben satisfacer las relaciones  $x_i = -x_{m+1-i}$  para  $1 \leq i \leq \max\{r, s\}$ .

Por otro lado, faltaría revisar las torceduras, pero éstas siguen satisfaciendo la regla de torcerse alrededor de los agujeros de  $\partial B_i$  que corresponden a puntos opuestos en el paralelogramo de la figura 3.4. Además, la dirección de la torcedura dependerá de si la última arista aumenta o reduce la pendiente de los arcos. En conclusión, se torcerá simultáneamente en  $(0,0)$  y  $(v_0, u_0) \pmod 2$ , o bien,  $(v_1, u_1) \pmod 2$  y  $(v_2, u_2) \pmod 2$  dependiendo del tipo de silla. Las torceduras se reflejan en la variable  $\vec{x}$  como la aplicación de  $\rho$ .

Entonces podemos resumir todo lo visto en el siguiente teorema 14.

**Teorema 14.** *Sea  $\gamma$  un camino que es monocromático a excepción de la última arista.*

Supongamos que las últimas dos aristas por las que pasa son  $\langle u_0/v_0, u_1/v_1 \rangle$  y  $\langle u_1/v_1, u_2/v_2 \rangle$ , la última tal vez no la recorre completamente.

Entonces, el diagrama de orientaciones se puede describir con la siguiente tabla:

Vértice	Orientación	Peso
$(0, 0)$	salida	$\rho^{\varepsilon r}(\vec{x})$
$(v_0, u_0) \bmod 2$	Llegada	$\rho^{-\varepsilon r}(\vec{x})$
$(v_1, u_1) \bmod 2$	Llegada	$\rho^{-\varepsilon s}(\vec{x})$
$(v_2, u_2) \bmod 2$	Salida	$\rho^{\varepsilon s}(\vec{x})$

Donde  $r$  es la cantidad de sillas que causan torcedura en  $(0, 0)$  y  $s$  son la cantidad de sillas del otro tipo,  $\varepsilon$  es el signo de  $u_1/v_1 - u_2/v_2$ . Y además,  $x_i = -x_{m+1-i}$  para  $i = 1, \dots, \max\{r, s\}$ .

Una consecuencia inmediata del teorema 14 es que las 2-variedades  $F_i$  generadas a partir de uno de éstos caminos no monocromáticos, tendrá  $m - \max\{r, s\}$  componentes conexas si  $r, s \leq m/2$  y exactamente  $\lfloor m/2 \rfloor$  en caso contrario. Una consecuencias menos trivial es la enunciada en el siguiente corolario.

**Corolario 15.** *Los caminos asociados a una superficie ICON no pueden recorrer dos aristas completas de diferente color.*

*Demostración.* Si la última arista del teorema anterior se recorriera completamente, entonces se tendría que  $r + s = m$ . Además, como se trata de una superficie ICON,  $m$  debe ser impar. Entonces, alguno de los  $r$  o  $s$  debe ser mayor o igual que la mitad de  $m$ . Esto es,  $\max\{r, s\} \geq (m + 1)/2$ .

De aquí que la identidad  $x_i = -x_{m+1-i}$  debe satisfacerse para  $i = (m + 1)/2$ , esto es,  $x_{(m+1)/2} = -x_{(m+1)/2}$ . Por lo tanto,  $x_{(m+1)/2}$  debe ser cero, impidiendo que existan soluciones en  $\{1, -1\}$ .  $\square$

### 3.3. Pegado final

En esta sección estudiaremos el paso final en la construcción de superficies candidatas para un caso simple, ayudándonos a desechar varias posibilidades en los siguientes capítulos. Ya vimos algunas condiciones en los caminos para que la 2-variedad  $F_i$  sea orientable y además dimos una descripción general del diagrama de orientaciones.

Como ya comentamos, el diagrama de orientaciones es todo lo que necesitamos para saber si la superficie candidata será orientable y conexa. Ahora veremos más a detalle esta cuestión con los diagramas de orientación hasta el momento descritos.

Empecemos por suponer que tenemos caminos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  con las condiciones de la definición 2.5. Y que para cada uno tenemos su diagrama de orientaciones, de hecho, somos capaces de determinar las orientaciones cerca de los vértices. Por ejemplo como en la tabla 3.2.

El caso que veremos es cuando todos los caminos son monocromáticos de color  $\langle 1/1, 0/1 \rangle$  y cuando todos los caminos terminan en el eje  $y$  del diagrama  $\mathcal{D}$ , es decir, la superficie es del tipo II.

**Teorema 16.** *Las superficies candidatas de tipo II generadas a partir de caminos monocromáticos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  de color  $\langle 1/1 \rangle - \langle 0/1 \rangle$  son conexas si y sólo si el número de hojas  $m$  es uno.*

*Demostración.* Como los caminos son monocromáticos tendremos que la configuración de orientaciones se describe a partir de la tabla 3.2 y el signo de  $\alpha$  depende de si en el último segmento el camino sube o baja. Pero como se trata de caminos que terminan en el eje  $y$ , entonces deben terminar en un punto del tipo

$$\frac{m-a}{m} \langle k \rangle + \frac{a}{m} \langle k+1 \rangle$$

con  $k$  un entero y  $a$  un entero menor que  $m$ . Ahora bien, si al final el camino sube, entonces tendremos que  $\alpha = a$  y, en el segundo y cuarto renglón de la tabla 3.2, tendremos que la orientación será  $\rho^a(\vec{x})$ . Pero si el camino bajara, tendríamos que  $\alpha = m-a$  y el signo sería negativo, quedándonos ahora  $\rho^{-(m-a)}(\vec{x}) = \rho^a(\vec{x})$ ; ya que  $\rho^m(\vec{x}) = \vec{x}$ . Con esta observación tenemos que, en este caso, el diagrama de orientaciones sólo depende del punto final del camino.

Ahora bien, supongamos que el diagrama de orientaciones para cada  $F_i$  está dado por la siguiente figura.

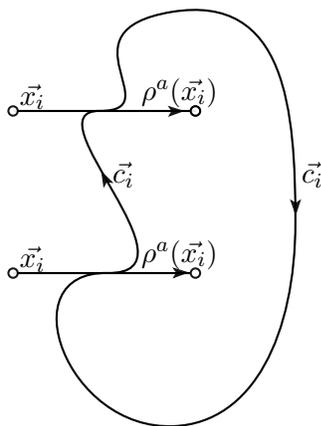


Figura 3.5: Diagrama de orientaciones para cada  $F_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$

Recordemos que el pegado de los diagramas se realizan de forma cíclica, el medio disco a la derecha del  $i$ -ésimo diagrama se pega con el medio izquierdo del  $i+1$ -ésimo diagrama.

Entonces, como los vértices se pegan con los vértices y las orientaciones de los arcos pegados deben ser opuestas, tendremos que las  $\vec{x}_i$ 's deben satisfacer las siguientes identidades:

$$\rho^{a_i}(\vec{x}_i) = \vec{x}_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

El  $i + 1$  se toma, como siempre, módulo  $n$ . Con estas identidades, observamos que cada  $\vec{x}_i$  lo podemos poner en términos de  $\vec{x}_1$ . Y que para que el sistema tenga solución, será necesario que  $\vec{x}_1$  satisfaga la identidad:

$$\rho^{a_1+a_2+\dots+a_n}(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 \quad (3.4)$$

Lo cual es cierto, pues como las ordenadas de los puntos finales tienen que sumar cero y éstas son  $k_i + \frac{a_i}{m}$ . Entonces la suma  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  tiene que ser múltiplo de  $m$ . Y como  $\rho^m$  es la identidad, tendremos que la identidad 3.4 se satisface.

Dándonos como resultado que hay  $2^m$  formas de orientar los diagramas de tal manera que coincidan todos en sus vértices. Cada una de estas orientaciones en los vértices determina una orientación global de la superficie candidata. Ya que la orientación de un medio diagrama (como el de la figura 3.6) sólo depende de cómo están las orientaciones cerca de los vértices.

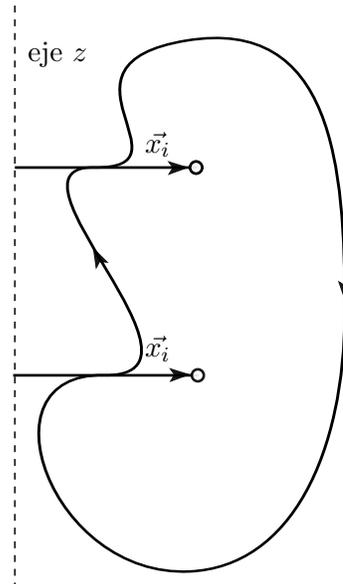


Figura 3.6: Medio diagrama con  $b = 0$

Por lo anterior, tendremos que la superficie candidata tendrá exactamente  $m$  componentes.





## Capítulo 4

# Los nudos pretzel $P(p, q, -r)$

En este capítulo estudiaremos las superficies ICON en los nudos pretzel  $P(p, q, -r)$  con  $p, q$  y  $r$  impares mayores a 1.

Usando las técnicas desarrolladas en [4], podemos analizar las superficies candidatas de éstos nudos pretzels en busca de superficies ICON con frontera disconexa.

En particular, cuando las superficies candidatas son de tipo II o III, los caminos deben llegar al eje  $y$  o más a la izquierda. Pero, para alcanzar al eje  $y$  un camino asociado a una superficie ICON sólo tienen dos posibilidades. Estos dos caminos son fáciles de describir en el caso de ovillos de pretzels (ovillos racionales del tipo  $1/p$ ).

Estos dos caminos son, uno que sube y otro que baja. En los pretzels en cuestión lo denotaremos como camino  $+$  y camino  $-$  respectivamente.

Como Hatcher y Oertel señalan en su artículo, es posible incluso calcular la pendiente de la superficie candidata una vez determinados los caminos y, en el caso de superficies de tipo II y III, sólo basta saber el camino hasta el momento de llegada al eje  $y$ . Analizando estas posibilidades podemos calcular las posibles pendientes de una superficie candidata para un pretzel  $p(p, q, -r)$ :

$-\frac{1}{r}$ $\frac{1}{q}$ $\frac{1}{p}$	II	III
+++	$4 - 2(p + q)$	$-2(p + q)$
++-	$2 - 2p$	$-2p$
+ - +	$2 - 2q$	$-2q$
+ - -	$0^*$	$0^*$
- + +	$2 - 2(p + q - r)^*$	$-2(p + q - r)$
- + -	$2(r - q)^*$	$2(r - q)^*$
- - +	$2(r - p)^*$	$2(r - p)^*$
- - -	$2r - 2$	$2r$

Las condiciones de paridad en  $p, q$  y  $r$  impiden que muchos de estos números sean cero, dando como resultado que sólo los casos marcados con  $*$  podrían referirse a superficies candidatas de pendiente cero.

### 4.1. Superficies candidatas de tipo II

Empecemos por analizar las superficies candidatas de tipo II. Como vimos anteriormente sólo cuatro posibilidades en las que la superficies candidata podría tener pendiente cero.

- + - - Los tres caminos llegan al eje  $y$  justamente en el vértice  $0/1$ .
- + + Sólo puede dar cero cuando  $p + q - r = 1$ .
- + - Es necesario que  $r = q$  para que tenga pendiente cero.
- - + Se necesita que  $r = p$ .

Como se puede observar, no hemos puesto condiciones diferentes a  $p$  y  $q$ , por lo que el estudio de los últimos dos casos resultarán análogo.

El caso más sencillo de descartar es el segundo (- + +), en él los caminos deben ser extendidos verticalmente pues las abscisas deben sumar cero (la condición iii de las superficies candidatas).

Como la suma al momento de llegar al eje  $y$  es 1, los caminos deben extenderse al menos una arista hacia abajo. Pero, esa extensión hacia abajo no puede ser realizada en los caminos  $\gamma_{1/p}$  y  $\gamma_{1/q}$  pues implicaría avanzar por dos aristas consecutivas de un mismo triángulo. Entonces, la extensión debe realizarse en el camino  $\gamma_{-1/r}$ . Pero esto implica que el camino estaría recorriendo dos aristas completas de distinto color, contradiciendo el teorema 15. Por lo tanto, la superficie de pendiente cero en este caso, no puede ser ICON.

El otro caso en orden de dificultad es el + - -, en él todos los caminos se pueden extender verticalmente en cualquier dirección (hacia arriba o hacia abajo) sin contradecir las condición de minimalidad E2 (en la definición 7) ni la de caminos monocromáticos (Teorema 15). Esto implica que tendremos muchas posibles superficies candidatas.

Como los tres caminos recorren aristas del mismo color y es una superficie de tipo II, satisfarán las condiciones del teorema 16, por lo que la superficie candidata no podrá ser ICON con frontera disconexa.

Sólo nos resta estudiar el caso - + - (que es equivalente al - - +). Para ello usaremos el teorema 14 para describir los diagramas de orientaciones de los caminos  $\gamma_{-r}$  y  $\gamma_q$ . Como el camino  $\gamma_p$  es monocromático, podemos usar la tabla 3.2 para describir su diagrama de orientaciones.

Entonces, tanto  $\gamma_{-r}$  como  $\gamma_q$  avanzan por aristas de color  $[1/0 - 1/1]$  y posiblemente al último recorren una fracción de arista del tipo  $[1/1 - 0/1]$ . Entonces, en ambos casos, el diagrama de orientaciones se ve como en la figura 4.1 a).

Como el camino  $\gamma_p$  es monocromático de color  $[1/1 - 0/1]$ , su diagrama se verá como en la figura 4.1 b).

Entonces, al pegar los dos diagramas de la figura 4.1 nos dará que deben satisfacerse las identidades 4.1.

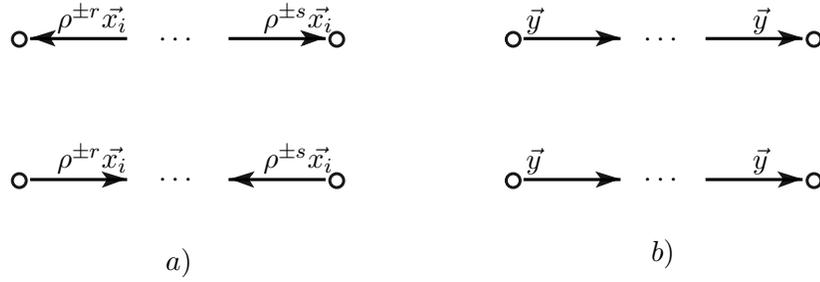


Figura 4.1: Diagrama de orientaciones cerca de los vértices para el caso  $+ - +$ .

$$\rho^{\mp s}(\vec{x}) = \vec{y} \quad \rho^{\pm s}(\vec{x}) = -J(\vec{x}) \quad (4.1)$$

Combinando ambas identidades obtenemos que:

$$\vec{x} = -J(\vec{x})$$

Pero como  $|\vec{x}| = m$  debe ser impar (para que sea ICON), entonces la entrada de en medio de  $\vec{x}$  debe valer cero. Por lo tanto, el sistema no tiene solución en  $\{1, -1\}$  y por ende la superficie candidata obtenida no será orientable.

En resumen, a lo largo de esta sección hemos probado la siguiente afirmación.

**Proposición 17.** *En los nudos pretzel  $p(p, q, -r)$ , no existen superficies candidatas de tipo II, ICON y con frontera disconexa.*

## 4.2. Superficies candidatas de tipo III

Las superficies candidatas de tipo III, para los casos  $- + -$  y  $- - +$  resultan ser compresibles por la proposición 2.5(b) en [4]. Ya que el camino  $\gamma_{-1/r}$  será completamente reversible y  $\sum_i k_i = 0$ .

Para el caso  $+ - -$  tendremos que hacer un poco más de trabajo. Primero observemos que las vías de tren orientadas obtenidas en cada camino al momento en que llegan al eje  $y$  es exactamente el descrito por la figura 4.2 a)

Como se trata de caminos asociados a una superficie de tipo III, los caminos deben terminar del lado izquierdo de  $\mathcal{L}$ , más allá del eje  $y$ . Pero como queremos superficies ICON, por la proposición 15, no podemos llegar hasta el vértice  $\langle \infty \rangle$ . Por lo tanto, los caminos deben terminar en algún punto intermedio de coordenadas racionales de la arista  $\langle 0/1 \rangle - \langle \infty \rangle$ .

Llamemos  $m$  al número de hojas, esto es, el número de intersección geométrica entre la superficie  $F$  y los meridianos pequeños de  $K$ . Como queremos una superficie no separante requerimos  $m$  impar.

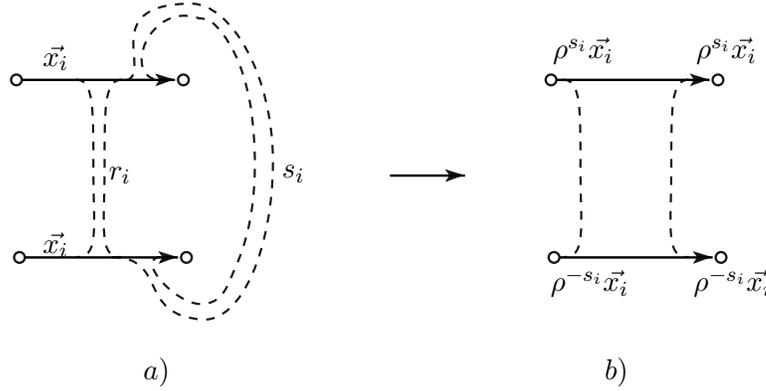


Figura 4.2: Vía de tren asociada al punto  $\frac{m-k}{m}\langle 0/1 \rangle + \frac{k}{m}\langle \infty \rangle$

Entonces, los puntos intermedios posibles para esta  $m$  son de la forma:

$$\frac{m-k}{m}\langle 0/1 \rangle + \frac{k}{m}\langle \infty \rangle$$

con  $k$  un número entero entre  $0 < k < m$ .

A tal punto, está asociada las vías de tren de la figura 4.2 a).

Para obtener las orientaciones permitidas, construiremos las vías de tren orientadas asociadas a los caminos. Hay que recordar que hay que pasar de las vías de tren orientadas descrita en la figura 4.2 a), a la vía de tren de la figura 4.2 b).

Ahora bien, todos los caminos deben terminar en el mismo punto, pero podrían diferir en tan sólo la elección de puntos sillas. Empecemos por analizar que pasa si dos caminos difieren en la elección de puntos sillas, sin pérdida de generalidad supongamos que  $m/2 > s_1 > s_2 \geq 0$ .

Entonces, al pegar tendremos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \rho^{s_1}(\vec{x}_1) &= \rho^{s_2}(\vec{x}_2) \\ \rho^{-s_1}(\vec{x}_1) &= \rho^{-s_2}(\vec{x}_2) \end{aligned}$$

De estas identidades se desprende que

$$\rho^{2(s_1-s_2)}(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$$

Esta última identidad en combinación con que  $\rho^m(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$ , nos arroja la identidad 4.2. Notemos que también podemos definir  $g = \text{m.c.d}(m, s_1 - s_2)$ , ya que  $m$  es impar.

$$\rho^g(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 \quad \text{donde } g = \text{m.c.d}(m, 2s_1 - 2s_2) \quad (4.2)$$

Por otro lado, sabemos que  $\vec{x}_1 = \vec{z}_1 \oplus \vec{y}_1 \oplus J(-\vec{z}_1)$  donde  $|\vec{z}_1| = \max\{r_1, s_1\} > g$ . Y por la identidad 4.2 sabemos que los primeros  $g$  elementos de  $\vec{x}_1$  son iguales a los últimos  $g$  elementos de  $\vec{x}_1$ , esto implica que los primeros  $g$  elementos de  $\vec{z}_1$  son iguales a los últimos  $g$  elementos de  $J(-\vec{z}_1)$ . En símbolos, si  $\vec{g}$  son los primeros  $g$  elementos de  $\vec{z}_1$  podemos escribir  $\vec{z}_1 = \vec{g} \oplus \vec{h}$ . En consecuencia,

$$\vec{x}_1 = \vec{g} \oplus \vec{h} \oplus \vec{y}_1 \oplus J(-\vec{h}) \oplus J(-\vec{g}).$$

Entonces, que los primeros y últimos  $g$  elementos de  $\vec{x}_1$  sean iguales se traduce a que  $\vec{g} = -J(\vec{g})$ , pero como  $g = |\vec{g}|$  es impar, tendremos que el elemento de en medio de  $\vec{g}$  debe ser el negativo de él mismo y por tanto igual a cero. Lo que implica que no existirá solución en  $\{1, -1\}$  al sistema de ecuaciones, impidiendo que la superficie candidata sea orientable.

Hemos probado entonces la siguiente proposición.

**Proposición 18.** *En los nudos pretzel  $p(p, q, -r)$ , no existen superficies candidatas de tipo III, ICON y con frontera disconexa.*

### 4.3. Superficies candidatas de tipo I

Hemos dejado este tipo de superficies hasta el último del capítulo pues es precisamente aquí donde aparecerán superficies ICON con frontera disconexa. Además, el tratamiento que seguiremos para este tipo será muy diferente al de los otros dos.

Empecemos por recordar que hay varias posibilidades para los caminos  $\gamma_p$ ,  $\gamma_q$  y  $\gamma_{-r}$ . Tales posibilidades sólo pueden avanzar de izquierda a derecha en la parte marcada de la figura 4.3. La figura 4.3 a) muestra las posibilidades para el camino  $\gamma_p$  (una figura similar aplica para el camino  $\gamma_q$ ) y la figura 4.3 b) muestra las posibilidades para  $\gamma_{-r}$ .

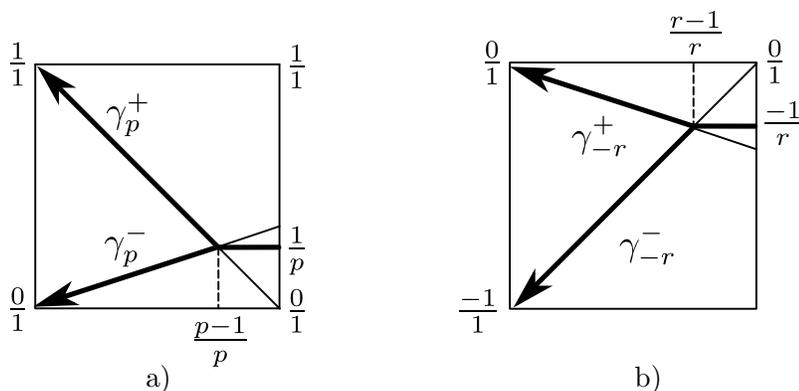


Figura 4.3: Caminos tipo I

Como estamos interesados en superficies candidatas del tipo I, los caminos no pueden llegar más allá del eje Y, así que podemos pensarlos como funciones  $\gamma_* : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, podemos escribir que lo que tratamos de encontrar son los valores  $x \in (0, 1)$  tales que  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$ .

**Proposición 19.** *Para los pretzels,  $P(p, q, -r)$  con  $p, q$  y  $r$  impares mayores a uno, no existen superficies candidatas de tipo I con todos los caminos constantes.*

*Demostración.* Bastará con probar que no existe solución de  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  cuando  $x$  satisface:

$$x \geq \max \left\{ \frac{q-1}{q}, \frac{p-1}{p}, \frac{r-1}{r} \right\}.$$

Con la condición pedida a  $x$  se tendrá que  $\gamma_p(x) = 1/p$ ,  $\gamma_q(x) = 1/q$  y  $\gamma_{-r}(x) = -1/r$ . Entonces,  $x$  será solución si y sólo si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Lo cuál es imposible debido a que  $p, q$  y  $r$  son todos impares. □

Ahora estudiemos qué pasa si ninguno de los caminos es el constante, es decir, qué pasa cuando  $x$  satisface:

$$x < \min \left\{ \frac{q-1}{q}, \frac{p-1}{p}, \frac{r-1}{r} \right\}. \quad (4.3)$$

En tal caso, cada camino  $\gamma_*$  tiene dos posibilidades, que llamaremos  $+$  a la que sube y  $-$  a la que baja. Tales caminos son funciones que su expresión está dada por la siguiente tabla.

	+	-
$\gamma_p(x)$	$1 - x$	$x/(p-1)$
$\gamma_q(x)$	$1 - x$	$x/(q-1)$
$\gamma_{-r}(x)$	$-x/(r-1)$	$x-1$

Analizando todas las combinaciones posibles podemos demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 20.** *Si ninguno de los caminos  $\gamma_*$  es constante, entonces la ecuación  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  con*

$$0 < x < \min \left\{ \frac{q-1}{q}, \frac{p-1}{p}, \frac{r-1}{r} \right\} \quad (4.4)$$

*tendrá solución sólo si  $\gamma_p(x) = x/(p-1)$  y  $\gamma_q(x) = x/(r-1)$ .*

*Demostración.* Como cada camino  $\gamma_*$  tiene dos posibilidades, tendremos 8 casos que analizar. Analizaremos todos los casos exceptuando los casos  $--+$  y  $---$ , esto bastará para la prueba de la proposición.

- Caso  $+++$ , es decir,  $\gamma_p(x) = 1 - x$ ,  $\gamma_q(x) = 1 - x$  y  $\gamma_{-r}(x) = -x/(r - 1)$ . Entonces,  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  si y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - x) + (1 - x) - \frac{x}{r - 1} \\ &= 2 - \left(2 - \frac{1}{r - 1}\right)x \\ &= 2 - \frac{2r - 1}{r - 1}x \end{aligned}$$

Al despejar  $x$  se obtiene que  $x = (2r - 2)/(2r - 1)$ . Como además necesitamos que  $x$  satisfaga la desigualdad 4.4, la cuál implica que:

$$\begin{aligned} \frac{2r - 2}{2r - 1} &< \frac{r - 1}{r} \\ \iff \frac{2}{2r - 1} &< \frac{1}{r} \\ \iff 2r &< 2r - 1 \\ \iff 0 &< -1 \end{aligned}$$

Por lo que no puede haber solución en este caso.

- Caso  $++-$ . En este caso, la única solución es  $x = 1$ , pero por hipótesis la solución debe estar en  $(0, 1)$
- Caso  $+ - +$ . Esto es,  $\gamma_p(x) = 1 - x$ ,  $\gamma_q(x) = x/(q - 1)$  y  $\gamma_{-r}(x) = -x/(r - 1)$ . Entonces,  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  si y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - x) + \frac{x}{q - 1} - \frac{x}{r - 1} \\ &= 1 + x\left(\frac{1}{q - 1} - 1 - \frac{1}{r - 1}\right) \\ &= 1 - x\left(\frac{rq - 2r + 1}{rq - (r + q) + 1}\right) \end{aligned}$$

Entonces,

$$x = \frac{rq - (r + q) + 1}{rq - 2r + 1}$$

Como además necesitamos que  $x$  satisfaga la desigualdad 4.4, el valor de  $x$  que hemos encontrado debe satisfacer la siguiente desigualdad.

$$\begin{aligned} & \frac{rq - (r + q) + 1}{rq - 2r + 1} < \frac{r - 1}{r} \\ \Leftrightarrow & \frac{q - 1}{rq - 2r + 1} < \frac{1}{r} \\ \Leftrightarrow & rq - r < rq - 2r + 1 \\ \Leftrightarrow & r < 1 \end{aligned}$$

Lo cual es imposible, ya que  $r$  es un entero positivo.

- Caso  $+-$ . En este caso la ecuación  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  se transforma en la ecuación  $x/(q-1) = 0$ , que sólo tiene solución  $x = 0$ . Por lo que no hay solución para  $x \in (0, 1)$ .
- Caso  $-++$ . Se procede de forma similar al caso  $+-$  sólo intercambiando  $q$  por  $p$ . Se llega a que no puede haber solución.
- Caso  $-+-$ . Es análogo al caso  $+-$ , pero ahora la ecuación  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  se transforma en  $x/(p-1) = 0$ , arrojando la imposibilidad de soluciones en el intervalo  $(0, 1)$ .

□

Entonces la proposición 20 nos arroja que para el caso en que ninguno de los caminos es constante, los caminos  $\gamma_p$  y  $\gamma_q$  deben decrecer. Falta determinar qué pasa con  $\gamma_{-r}$ , por lo que tenemos dos casos,  $\gamma_{-r}(x) = -x/(r-1)$  o bien  $\gamma_{-r}(x) = x-1$ .

**Proposición 21.** *Las superficies candidatas de tipo I, del pretzel  $p(p, q, -r)$  y asociadas a caminos no constantes tienen pendiente distinta de cero.*

*Demostración.* Por la proposición anterior (proposición 20), para que la ecuación  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  tenga solución es necesario que  $\gamma_p(x) = x/(p-1)$  y  $\gamma_q(x) = x/(r-1)$ .

Luego, tenemos dos posibilidades para  $\gamma_{-r}$ , empezamos por el caso  $\gamma_{-r}(x) = x-1$ .

- Caso 1:  $\gamma_{-r}(x) = x-1$ . Entonces, al resolver la ecuación  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  obtendremos que  $x = (p-1)(q-1)/(pq-1)$ , a esta solución la denotaremos como  $x_0$ . Por otro lado, es fácil verificar que las siguientes tres desigualdades son válidas para cualquier valor de  $p$  y  $q$  (impares positivos):

$$0 < x_0 < \frac{p-1}{p}, \quad x_0 < \frac{q-1}{q}$$

Entonces,  $x_0$  estará en el intervalo de caminos no constantes si y sólo si  $x_0 < (r-1)/r$ . Es decir, si sólo si,  $r > 1/(1-x_0)$ .

Suponiendo que  $r$  satisface esta última desigualdad tendremos que a  $x_0$  le está asociada una o varias superficies candidatas, todas ellas de la misma pendiente, que se calcula como

$$\text{pendiente} = 2 - 2(\tau(\gamma_p) + \tau(\gamma_q) + \tau(\gamma_{-r})) \quad (4.5)$$

Para calcular  $\tau(\gamma_p)$  hay que determinar qué fracción recorrió  $\gamma_p$  de la arista  $\langle 1/p \rangle - \langle 0/1 \rangle$ . Sin mucho problema, usando la regla 2.4, podemos observar que el punto  $(q-1)\langle 1/p \rangle + (p-1)\langle 1/0 \rangle$  tiene ordenada  $x_0$ . Entonces,  $\tau(\gamma_p) = (p-1)/(p+q-2)$  y de igual manera podemos calcular  $\tau(\gamma_q) = (q-1)/(p+q-2)$ . En consecuencia tenemos

$$\tau(\gamma_p) + \tau(\gamma_q) = 1 \quad (4.6)$$

Finalmente, de la ecuación 4.5 y 4.6 se concluye que, para que la pendiente sea cero, se deberá tener que  $\gamma_{-r} = 0$ . Esto es imposible, ya que  $\gamma_{-r}$  es decreciente y no es el camino constante.

- Caso 2:  $\gamma_{-r}(x) = -x/(r-1)$ . En este caso, tenemos la ecuación:

$$x\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{r-1}\right) = 0.$$

Como  $x$  debe pertenecer al intervalo  $(0, 1)$  sólo habrá solución cuando

$$\frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{r-1} = 0$$

y todo valor de  $x$  que satisfaga 4.4 será solución. Ahora bien, supongamos que  $x_0$  es cualquier solución, por la regla 2.4 se puede determinar que

$$\tau(\gamma_p) = 1 - \frac{x_0}{(1-x_0)(p-1)} \quad (4.7)$$

$$\tau(\gamma_q) = 1 - \frac{x_0}{(1-x_0)(q-1)} \quad (4.8)$$

$$\tau(\gamma_{-r}) = \frac{x_0}{(1-x_0)(r-1)} - 1 \quad (4.9)$$

Entonces la pendiente de una superficie  $F$  asociada a estos caminos será:

$$\begin{aligned} m(F) &= \tau(F_0) - \tau(F) \\ &= 2 - (\tau(\gamma_p) + \tau(\gamma_q) + \tau(\gamma_{-r})) \\ &= 2 - 1 + \frac{x_0}{1-x_0} \left( \frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{r-1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que  $m(F) \neq 0$

Con esto terminamos la prueba.  $\square$

Ahora nos vamos a concentrar en los casos en que hay dos caminos constantes y otro que no. Empecemos por suponer que  $\gamma_p$  y  $\gamma_q$  son constantes y  $\gamma_{-r}$  no lo es, es decir:

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{p} \quad \gamma_q(x) = \frac{1}{q} \quad (4.10)$$

Además, los valores de  $x$  sólo pueden variar en el intervalo:

$$\max\left\{\frac{p-1}{p}, \frac{q-1}{q}\right\} \leq x < 1 \quad (4.11)$$

Para que la pendiente de la variedad resultante sea 0, necesitamos que  $\tau(\gamma_{-r}) = 1$ , y esto reduce a que  $\gamma_{-r}$  es el camino que va de  $\langle -1/r \rangle$  a  $\langle -1/(r-1) \rangle$ . Por lo que,  $x = (r-2)/(r-1)$  y  $\gamma_{-r}(x) = -1/(r-1)$ . Entonces, para que exista la superficie se necesita que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r-1} = 0$$

Pero esto es imposible debido a que  $p$ ,  $q$  y  $r$  son impares.

Otro caso con dos caminos constantes y otro que no es cuando  $\gamma_p$  y  $\gamma_{-r}$  son constantes y  $\gamma_q$  no lo es. Nuevamente se debe cumplir que  $\tau(\gamma_q) = 1$  y por ende  $\gamma_q$  solo puede ser el camino que recorre la arista de  $\langle 1/q \rangle$  a  $\langle 0/1 \rangle$ . Pero esto implica que el camino será de tipo II, contradiciendo la condición 4.11.

Hemos probado la siguiente afirmación:

**Proposición 22.** *No hay superficies de pendiente cero para los pretzels  $p(p, q, -r)$  con dos caminos constantes y otro que no.*

Ya casi terminamos con los casos, falta estudiar los casos en que sólo uno de los caminos es constante, y de nuevo, como no hemos hecho diferencia entre  $p$  y  $q$ , serán casos análogos cuando  $\gamma_p$  o  $\gamma_q$  son constantes.

**Proposición 23.** *No hay superficies de pendiente cero para los pretzels  $p(p, q, -r)$  cuando el camino  $\gamma_p$  (o el  $\gamma_q$ ) es constante y los otros dos no.*

*Demostración.* Considerando todas las posibilidades para  $\gamma_q$  y  $\gamma_{-r}$  obtenemos

Caso	$\gamma_q$	$\gamma_{-r}$	Conclusión
++	$1-x$	$\frac{-x}{r-1}$	Sólo hay solución con $x > 1$
+-	$1-x$	$x-1$	No existe solución en $x$
-+	$\frac{x}{q-1}$	$\frac{-x}{r-1}$	Las soluciones no tienen pendiente cero
--	$\frac{x}{q-1}$	$x-1$	la solución no es mayor que $(p-1)/p$

□

Ahora el último caso es cuando  $\gamma_{-r}$  es constante y los otros dos no.

**Proposición 24.** *Si el pretzel  $p(p, q, -r)$  tiene una superficie incompresible en su exterior de pendiente cero y que se obtiene del camino  $\gamma_{-r}$  constante y los otros dos no, entonces:*

$$\frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} = \frac{1}{r-1}$$

*Demostración.* Como queremos que la superficie resultante sea de pendiente cero será necesario que  $\tau(\gamma_p) + \tau(\gamma_q) = 1$ . Analizando las cuatro posibilidades para la pareja de caminos  $\gamma_p$  y  $\gamma_q$ , se puede concluir que la única posibilidad factible es cuando  $\gamma_p(x) = x/(p-1)$  y  $\gamma_q(x) = x/(q-1)$ .

De aquí que, la solución al sistema  $\gamma_p(x) + \gamma_q(x) + \gamma_{-r}(x) = 0$  es

$$x_0 = \frac{(p-1)(q-1)}{r(p+q-2)} \quad (4.12)$$

Para simplicidad de las siguientes formas definamos  $\Delta$  como sigue:

$$\Delta = (p-1)r + (q-1)r - (p-1)(q-1)$$

Ahora bien, como queremos que el camino  $\gamma_{-r}$  sea constante, necesitamos que la solución  $x_0$  dada por la fórmula 4.12 debe satisfacer que  $(r-1)/r \leq x_0 < 1$ . Sustituyendo el valor de  $x_0$  por el de la fórmula en 4.12, podemos transformar las dos desigualdades en la siguiente forma equivalente:

$$p+q-2 \geq \Delta > 0 \quad (4.13)$$

Entonces, si  $p$ ,  $q$  y  $r$  satisfacen la condición 4.13, entonces existirá una superficie incompresible asociada a la solución  $x_0$  dada por 4.12.

El punto  $(x_0, \gamma_p(x_0))$  coincide con el punto  $(\Delta - q + 1)\langle 0/1 \rangle + (q-1)\langle 1/p \rangle$  por lo que el giro asociado a  $\gamma_p$  es:

$$\tau(\gamma_p) = 2 \left( \frac{\Delta - q + 1}{\Delta} \right) \quad (4.14)$$

Y de manera similar podemos calcular el giro para  $\gamma_q$ :

$$\tau(\gamma_q) = 2 \left( \frac{\Delta - p + 1}{\Delta} \right) \quad (4.15)$$

Como el giro de la variedad de Seifert para los pretzels  $P(p, q, -r)$  es 2 y el giro de  $\gamma_{-r}$  es cero (por ser constante), y con las fórmulas anteriores (4.14 y 4.15) podemos calcular la

pendiente de la superficie asociada

$$\begin{aligned} \text{pendiente}(F) &= 2\left(\frac{\Delta - q + 1}{\Delta}\right) + 2\left(\frac{\Delta - p + 1}{\Delta}\right) - 2 \\ &= \frac{2(\Delta + 2 - p - q)}{\Delta} \end{aligned} \quad (4.16)$$

En consecuencia, la pendiente será cero si y sólo si  $\Delta = p + q - 2$  o bien, si y sólo si:

$$\frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} = \frac{1}{r-1} \quad (4.17)$$

□

Ahora, antes de probar el teorema principal necesitaremos un último lema perteneciente a la teoría de los números.

**Lema 25.** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres enteros positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c},$$

entonces existen enteros  $u$ ,  $v$  y  $g$  tales que  $(u, v) = 1$  y

$$\begin{aligned} a &= gu(u+v) \\ b &= gv(u+v) \\ c &= guv \end{aligned} \quad (4.18)$$

*Demostración.* Definamos  $g = \text{mcd}(a, b, c)$ , entonces podemos escribir  $a = ga'$ ,  $b = gb'$  y  $c = gc'$  con  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  tres enteros sin factor común tal que  $1/c' = 1/a' + 1/b'$ . Luego denotemos con  $h = \text{mcd}(a', b')$  y entonces tendremos que  $a' = hu$  y  $b' = hv$  con  $u$  y  $v$  enteros tales que  $\text{mcd}(u, v) = 1$ . Haciendo las sustituciones correspondientes tendremos

$$(u+v)c' = huv \quad (4.19)$$

Como  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  no tienen factores comunes, tampoco los tendrán  $h$  y  $c'$ , por lo que  $c'$  debe dividir a  $uv$ . Ahora bien, como  $(u, v) = 1$  tendremos que  $(u+v, uv) = 1$ . En consecuencia  $u+v$  debe dividir a  $h$ . De aquí que:

$$\frac{h}{u+v} \cdot \frac{uv}{c'} = 1 \quad (4.20)$$

Como se trata del producto de dos enteros positivos, tendremos que ambos tienen que ser uno, es decir,  $h = u+v$  y  $c' = uv$ . Con lo cual concluimos la prueba.

□

Ahora estamos listos para probar nuestro teorema principal.

**Teorema 26.** *Sea  $k$  el nudo pretzel  $P(p, q, -r)$  donde  $p, q$  y  $r$  son números impares mayores que uno. Entonces  $k$  tiene en su exterior a una superficie  $F$ , ICON y con frontera disconexa si y sólo si*

$$\frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} = \frac{1}{r-1} \quad \text{and}$$

$$\frac{\text{mcd}(p-1, q-1)}{\text{mcd}(p-1, q-1, r-1)} \quad \text{is odd} \quad (4.21)$$

Más aun, el número resultante del cociente (4.21) es igual al número de componentes en la frontera de  $F$ .

*Demostración.* De la proposición 17 y 18 la superficie  $F$  sólo puede ser de tipo I. Pero por las proposiciones 19, 21, 22 y 23, no hay superficies candidatas de pendiente cero cuando todos los caminos son constantes, ni cuando ningún camino es constante, ni cuando alguno de los caminos  $\gamma_p$  o  $\gamma_q$  es constante. La única posibilidad es cuando el camino  $\gamma_{-r}$  es constante y los otros dos caminos no, pero por la proposición 24, en este caso sólo puede haber superficies de pendiente cero cuando  $p, q$  y  $r$  satisfacen  $1/(p-1) + 1/(q-1) = 1/(r-1)$ .

Por el lema anterior (25) existen tres números  $u, v$  y  $g$  tales que  $(u, v) = 1$  y

$$\begin{aligned} p-1 &= gu(u+v) \\ q-1 &= gv(u+v) \\ r-1 &= guv \end{aligned} \quad (4.22)$$

De esta expresión se sigue que  $\text{mcd}(p-1, q-1) = g(u+v)$  y  $\text{mcd}(p-1, q-1, r-1) = g$ , en consecuencia el cociente 4.21 coincide con  $u+v$ . Entonces, nuestro objetivo ahora será probar que  $u+v$  tiene que ser impar.

Primero recordemos que  $\gamma_{-r} = -1/r$  es constante,  $\gamma_p(x) = x/(p-1)$  y  $\gamma_q(x) = x/(q-1)$ . Y que por lo tanto, la única solución en  $x$  posible será

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{(p-1)(q-1)}{r(p+q-2)} \\ &= \frac{gu(u+v)gv(u+v)}{(guv+1)g(u+v)(u+v)} \\ &= \frac{guv}{guv+1} = \frac{r-1}{r} \end{aligned}$$

Entonces, no es muy difícil calcular que este valor de  $x_0$  coincide con el valor de las ordenadas de los puntos  $\frac{v}{u+v}\langle 1/p \rangle + \frac{u}{u+v}\langle 0/1 \rangle$  y  $\frac{u}{u+v}\langle 1/q \rangle + \frac{v}{u+v}\langle 0/1 \rangle$ .



$z_2$  representan vectores de longitud  $ku$ ,  $kv$ ,  $kv$ ,  $muvg$  y  $muvg$  respectivamente. Además, del diagrama podemos convencernos de que  $z_2 \oplus y_2 = y_2 \oplus z_1$  y que  $z_1 \oplus -J(y_1) = -J(y_1) \oplus z_2$ . En consecuencia

$$z_2 \oplus y_2 \oplus -J(y_1) = y_2 \oplus z_1 \oplus -J(y_1) = y_2 \oplus -J(y_1) \oplus z_2$$

Por lo tanto,  $z_2$  conmuta con  $y_2 \oplus -J(y_1)$ . Además,  $|z_2| = muvg$  es múltiplo de  $|y_2 \oplus -J(y_1)| = 2kv$ , entonces por ([7], Proposición 7.1.5)  $z_2 = (y_2 \oplus -Jy_1)^{(u+v)ug/2}$ . Y de igual manera podemos obtener que  $z_1 = (-Jy_1 \oplus y_2)^{(u+v)ug/2}$ .

Podemos hacer lo mismo para el camino  $\gamma_q$ , obtendremos que su diagrama de orientaciones queda descrito por los vectores  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  y  $c_2$  de longitudes  $kv$ ,  $ku$ ,  $ku$ ,  $muvg$  y  $muvg$ . Además tendremos que  $c_1 = (-Jb_1 \oplus b_2)^{(u+v)vg/2}$  y  $c_2 = (b_2 \oplus -Jb_1)^{(u+v)vg/2}$

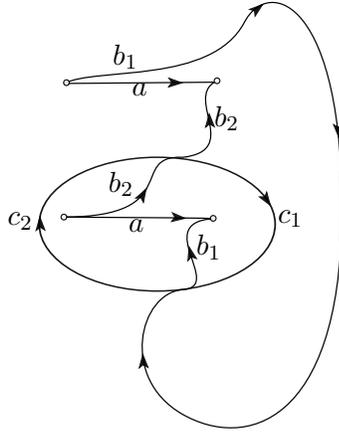


Figura 4.5: Diagrama de orientaciones de  $\gamma_q$

Luego, para pegar los diagramas de orientaciones de  $\gamma_p$  y  $\gamma_q$ , habrá que isotopar ligeramente el diagrama 4.5 como se muestra en la figura 4.6. De esta manera, se observa más claramente el pegado, dando como resultado que se deben satisfacer las siguientes relaciones para tener una superficie orientable:

$$x = b_1, \quad y_1 = a, \quad x = b_2, \quad y_2 = a, \quad z_1 = c_2$$

Esto implica que  $x = b_1 = b_2$  y  $a = y_1 = y_2$ , entonces  $z_1 = (-Ja \oplus a)^{u(u+v)g/2}$  y  $z_2 = (a \oplus -Ja)^{u(u+v)g/2}$ ,  $c_1 = (-Jx \oplus x)^{v(u+v)g/2}$  y  $c_2 = (x \oplus -Jx)^{v(u+v)g/2}$ . Además, tendremos que:

$$(-Ja \oplus a)^{u(u+v)g/2} = (x \oplus -Jx)^{v(u+v)g/2}$$

Por ([7], Proposición 7.1.6), esta identidad implica que ambos vectores  $-Ja \oplus a$  y  $x \oplus -Jx$  son múltiplos de un vector  $s$  de longitud igual al máximo común divisor de  $|-Ja \oplus a| = 2kv$

y  $|x \oplus -Jx| = 2ku$ , es decir, de longitud  $2k$ . Como, además, alguno de los vectores  $a$  o  $x$  tiene que ser de longitud par, entonces,  $s = t \oplus -Jt$  con  $t$  de longitud  $k$ .

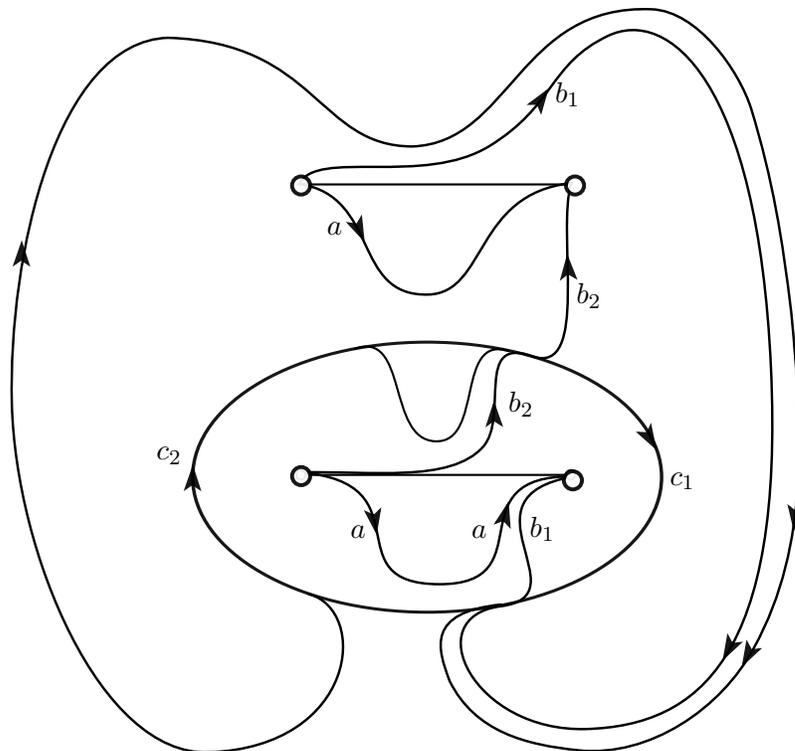
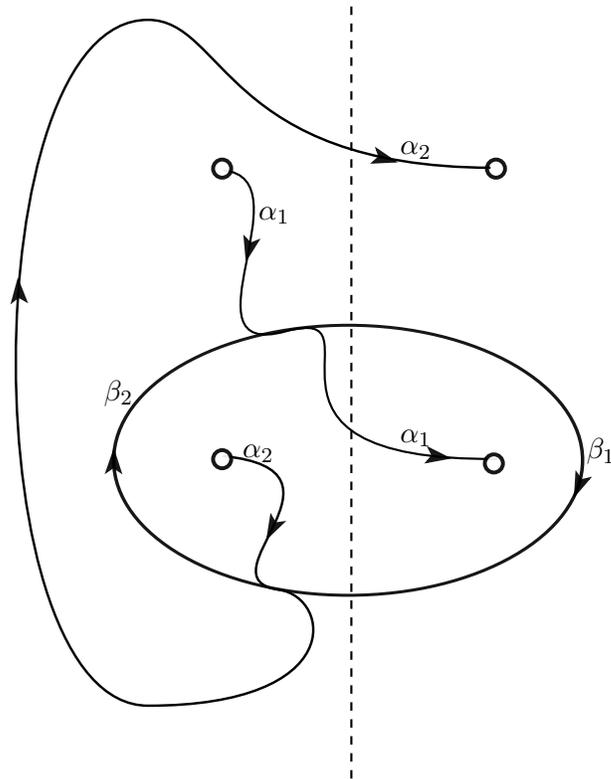


Figura 4.6: Modificación al diagrama de orientaciones de  $\gamma_q$

De esta manera, el vector  $t$  sirve para parametrizar todas las posibles orientaciones de la 2-variedad asociada al pegado de los ovillos  $1/p$  y  $1/q$ . Las vías de tren resultantes del pegado son idénticas a las vías de tren asociadas a  $\gamma_{-r}$ . Como  $\gamma_{-r}$  es un camino constante, no hay restricción alguna en cómo deba orientarse cada arco de su diagrama de orientaciones, por lo tanto, al hacer el pegado no aparece ninguna restricción mas sobre los elementos de  $t$ , entonces,  $t$  debe parametrizar todas las orientaciones posibles de la 2-variedad  $F$  obtenida. Por lo mencionado en la sección 3.1 sobre diagrama de orientaciones, sabemos entonces que  $F$  es orientable y con  $|t| = k$  componentes conexas. Como queremos que  $F$  sea conexa será necesario pedir  $k = 1$  y por lo tanto el número de hojas será  $m = k(u + v) = u + v$ , lo que prueba el “además” del teorema.

Entonces hemos terminado la prueba. □

Figura 4.7: Diagrama de orientaciones de  $\gamma_{-r}$ .



## Capítulo 5

# La conjetura Z para los pretzel $P(p, q, -r)$

En este capítulo presentaré la prueba de que las superficies ICON encontradas en la sección 4.3 satisfacen la conjetura Z.

Primero necesitamos probar un lema sobre superficies ICON.

**Lema 27.** *Dada una superficie CON (compacta, orientable y no separante)  $F$  en el exterior  $E$  de un nudo  $k$ . Entonces, existe otra superficie ICON  $F'$  de género menor o igual que  $F$  y  $|\partial F'| \leq |\partial F|$  de tal manera que hay un epimorfismo  $\pi_1(E/F') \rightarrow \pi_1(E/F)$ .*

*Demostración.* De ser  $F$  incompresible, entonces será ICON y asunto resuelto. El caso interesante es cuando  $F$  no es incompresible.

Entonces, de ser  $F$  compresible existirá un disco  $D$  en  $E$  de tal manera que  $F \cap D = \partial D$  y  $\partial E \cap D = \emptyset$ .

Al cortar  $F$  por  $D$  y pegar de nueva cuenta las tapas obtendremos una 2-variedad  $\tilde{F}$ . Esto nos arroja dos posibilidades, que  $\tilde{F}$  sea conexa o no.

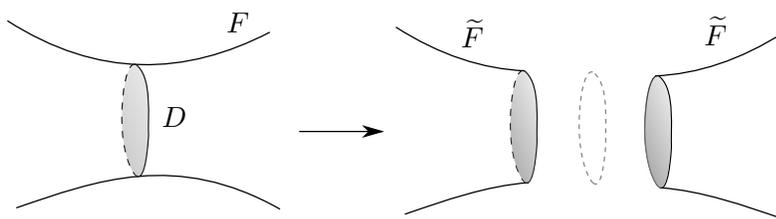


Figura 5.1: Compresión de  $F$  a partir del disco  $D$ .

Para resolver cada caso, consideremos  $B$  la vecindad regular de  $D$  dentro de la cuál se lleva acabo la cirugía. Llamemos  $E^\circ = E \setminus B$ ,  $F^\circ = F \setminus B = \tilde{F} \setminus B$  y  $S = \partial B / F^\circ (= \partial B / F = \partial B / \tilde{F})$ .

Ahora, estamos interesados en estudiar el grupo fundamental de los cocientes  $E/F$  y  $E/\tilde{F}$ . Entonces, descomponemos cada espacio usando la bola  $B$ , y aplicando Van Kampen tendremos el diagrama conmutativo 5.2

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(E^\circ/F^\circ) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \pi_1(E/F) & & \\
 \uparrow i & \searrow & \nearrow & \uparrow & \\
 & & \pi_1(E/\tilde{F}) & & \\
 \pi_1(S) & \xrightarrow{j} & \pi_1(B/\tilde{F}) & \xrightarrow{\rho} & \pi_1(B/F) \cong 1
 \end{array}$$

Figura 5.2: Diagrama a partir de los Van Kampen

En este diagrama  $\pi_1(E/\tilde{F})$  es el “pushout” de  $i$  y  $j$ . Además,  $\pi_1(E/F)$  es el “pushout” de  $i$  y  $\rho \circ j$ . Por la propiedad universal de “pushout” existe un morfismo de grupos entre  $\pi_1(E/\tilde{F})$  y  $\pi_1(E/F)$ .

No es muy difícil convencerse de que:

$$S \cong S^2 \vee S^2 \vee \left( \frac{S^2}{\{A, B\}} \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{B}{F} \cong \frac{S^2 \times I}{\{*\} \times I} \vee \frac{B^3}{\text{Un diámetro}} \quad (5.2)$$

$$\frac{B}{\tilde{F}} \cong B^3 \vee B^3 \vee \left( \frac{B^3}{\{A, B | A, B \in \partial B^3\}} \right) \quad (5.3)$$

Por lo tanto, es posible determinar los grupos fundamentales de cada espacio:  $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}$ ,  $\pi_1(B/F) \cong 1$  y  $\pi_1(B/\tilde{F}) \cong \mathbb{Z}$ . Además, resulta que  $j : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(B/\tilde{F})$  es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto, del diagrama 5.2 y las propiedades de “pushout” se observa que  $\pi_1(E^\circ/F^\circ) \rightarrow \pi_1(E/\tilde{F})$  debe ser un isomorfismo como se muestra en el diagrama 5.3

Además, el “pushout” de  $i$  y  $\rho \circ j$  debe ser isomorfo a  $\pi_1(E^\circ/F^\circ)/i(\mathbb{Z})$  ya que  $\rho \circ j$  es la proyección al grupo trivial. Por lo tanto,  $\pi_1(E^\circ/F^\circ) \rightarrow \pi_1(E/F)$  es un epimorfismo, y en consecuencia  $\pi_1(E/\tilde{F}) \rightarrow \pi_1(E/F)$  es un epimorfismo.

Entonces, la nueva 2-variedad  $\tilde{F}$  tiene menor género y satisface la condición de epimorfismo de grupos, esto casi nos lleva a una prueba. Primero necesitamos determinar la conexidad de  $\tilde{F}$ , pero eso no es posible, así que tenemos dos casos.

**Supongamos que  $\tilde{F}$  es conexa.** Observemos entonces que  $\tilde{F}$  es no separante, para demostrarlo consideremos  $\gamma$  un lazo en  $E$  que interseca a  $F$  en un sólo punto. Ahora pongamos transversales la intersecciones de  $\gamma$  con  $D$ , es decir,  $\gamma \cap D$  es un número finito de puntos.

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(E^\circ/F^\circ) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(E/F) & & \\
\uparrow i & \searrow \cong & \nearrow & & \uparrow \\
& & \pi_1(E/\tilde{F}) & & \\
& & \uparrow & & \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{j \cong} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\rho} & 1
\end{array}$$

Figura 5.3: Diagrama a partir del uso de Van Kampen y el cálculo de algunos grupos fundamentales.

Tomemos un elemento  $Q$  de  $\gamma \cap D$ . Ahora construyamos un arco  $\beta$  en  $D$  que una  $Q$  con la frontera de  $D$  sin pasar por ningún punto de  $\gamma \cap D$ . Es decir, tal que  $Q = \beta \cap (\gamma \cap D) = \partial\beta \cap (\gamma \cap D)$  y  $\partial D \cap \beta = \partial D \cap \partial\beta$  es un sólo punto.

Luego, tomemos dos puntos  $Q_+$  y  $Q_-$  sobre  $\gamma$  muy cercanos a  $Q$ , uno en cada lado de  $D$ . Proyectemos  $Q_+$  y  $Q_-$  sobre  $F$  usando dos arcos  $\beta_+$  y  $\beta_-$  paralelos a  $\beta$ . Llamemos  $\tilde{Q}_+$  y  $\tilde{Q}_-$  a las dos proyecciones. Por la conexidad de  $\tilde{F}$ , sabemos que  $\partial D$  no separa a  $F$ , por lo tanto existe un curva  $\alpha$  en  $F$  que conecta las proyecciones de  $\tilde{Q}_+$  con  $\tilde{Q}_-$  sin interseca  $\partial D$ . Entonces, podemos modificar  $\gamma$  removiendo el pedazo en ella que pasa por  $Q_-$ ,  $Q$  y  $Q_+$ ; después agregamos los arcos  $\beta_+$ ,  $\beta_-$  y  $\alpha$ ; esta nueva curva se puede empujar hacia el interior de  $E - F$  (manteniendo fijo el punto  $\gamma \cap F$ ) y ya está; hemos construido una curva  $\gamma_1$  que interseca a  $F$  en un punto y con un punto de intersección menos con  $D$ .

Siguiendo este procedimiento podemos deshacernos de todos los puntos de intersección de  $\gamma$  con  $D$ , logrando que  $\gamma$  también interseque a  $\tilde{F}$  en un sólo punto. Esto es,  $\tilde{F}$  es no separante.

Entonces, si al hacer cirugía obtenemos que  $\tilde{F}$  es una 2-variedad conexas, esta será no separante, de menor género y habrá un epimorfismo  $\pi_1(E/\tilde{F}) \rightarrow \pi_1(E/F)$ .

**Supongamos que  $\tilde{F}$  no es conexas.** Entonces  $\tilde{F}$  se descompone como dos superficies  $\tilde{F}_0$  y  $\tilde{F}_1$ . Por un análisis similar al caso anterior podemos probar que una de las componentes es separante y la otra no; digamos que la componente no separante es  $\tilde{F}_1$ .

Para lo que sigue usaremos la siguiente notación, dados  $A$  y  $B$  subespacios topológicos disjuntos de un espacio  $X$ , denotaremos con  $X/[A, B]$  al espacios topológico cociente  $(X/A)/B \cong (X/B)/A$ . Definamos ahora  $F_i^\circ = F^\circ \cap \tilde{F}_i$  para  $i = 0, 1$ . Entonces tendremos que:

$$\pi_1\left(\frac{E}{\tilde{F}}\right) \cong \pi_1\left(\frac{E}{[\tilde{F}_0, \tilde{F}_1]}\right) * \mathbb{Z} \quad (5.4)$$

$$\pi_1\left(\frac{E^\circ}{F^\circ}\right) \cong \pi_1\left(\frac{E^\circ}{[F_0^\circ, F_1^\circ]}\right) * \mathbb{Z} \quad (5.5)$$

Como además sabemos que  $\pi_1(E^\circ/F^\circ) \cong \pi_1(E/\tilde{F})$  a través del isomorfismo inducido por la inclusión de  $E^\circ/F^\circ$  en  $E/\tilde{F}$ , que puede verse como el mapeo inducido por la inclusión de  $E^\circ/[F_0^\circ, F_1^\circ]$  en  $E/[\tilde{F}_0, \tilde{F}_1]$ . Por lo tanto, tendremos que esta última inclusión induce un isomorfismo  $\pi_1(E/[\tilde{F}_0, \tilde{F}_1]) \cong \pi_1(E^\circ/[F_0^\circ, F_1^\circ])$ .

Notemos que  $i : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(E/F^\circ)$  manda al generador de  $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}$  al generador de  $\mathbb{Z}$  en el producto libre  $\pi_1(E^\circ/[F_0^\circ, F_1^\circ]) * \mathbb{Z}$ . Y como ya habíamos observado que  $\pi_1(E/F)$  es el “pushout” de  $i$  y  $\rho \circ j$ , entonces tendremos que  $\pi_1(E/F) \cong \pi_1(E^\circ/[F_0^\circ, F_1^\circ]) \cong \pi_1(E/[\tilde{F}_0, \tilde{F}_1])$ .

Además, como  $\pi_1(E/\tilde{F}_1)$  se epimorféa sobre  $\pi_1(E/[\tilde{F}_0, \tilde{F}_1])$ . Entonces, hemos logrado construir una superficie no separante  $\tilde{F}_1$  de menor género que  $F$  para la cuál existe un epimorfismo de  $\pi_1(E/\tilde{F}_1)$  sobre  $\pi_1(E/F)$ .

Entonces, empezando con  $F$  hacemos cirugía y obtenemos una superficie CON  $F_1$  de menor género, de no ser incompresibles podemos repetir el proceso y construir  $F_2$  de menor género que  $F_1$ , y así sucesivamente. Como no podemos reducir el género hasta al infinito, este proceso debe detenerse y llegar a una superficie ICON  $F_n$  tal que las flechas en el siguiente diagrama son epimorfismos:

$$\pi_1(E/F_n) \rightarrow \pi_1(E/F_{n-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(E/F_1) \rightarrow \pi_1(E/F)$$

Por lo tanto, hemos construido una superficie ICON  $F_n$  tal que  $\pi_1(E/F_n)$  se epimorféa sobre  $\pi_1(E/F)$ .  $\square$

El teorema 26 nos describe cuáles son las únicas superficies ICON en los pretzels  $P(p, q, -r)$  con  $p, q$  y  $r$  impares mayores a uno. Y por lema anterior, bastará entonces probar la conjetura  $\mathbb{Z}$  para estas superficies para completar la prueba sobre todos los pretzels  $P(p, q, -r)$ . Pero esto no será el camino exacto que seguiremos para la prueba, lo que haremos será demostrar que podemos reducir cada uno de estos ejemplos ICON a una superficie CON con menor número de componentes conexas en su frontera.

Para ello necesitaremos el siguiente lema, que no es más que una variante de la conjetura A hecha por Arturo Ramírez y Francisco González Acuña en [3].

**Lema 28.** *Consideremos una superficie CON  $F$  con frontera disconexa en el exterior  $E$  de un nudo  $K$  y supongamos que existe un arco  $\alpha$  en  $\partial E$  tal que  $\alpha \cap F = \partial\alpha$ . Supongamos además que  $\alpha$  toca  $F$  del mismo lado y que representa al elemento trivial en  $\pi_1(E/F)$ , entonces tendremos que  $\pi_1(E/F) \cong \pi_1(E/F')$  donde  $F'$  es la superficie obtenida de hacer cirugía en  $F$  con el anillo  $A \subset \partial E$  que contiene a  $\alpha$ .*

*Demostración.* Llamemos  $\tilde{E} = E/F$ ,  $\tilde{A} = A/\partial A$  y  $\tilde{\alpha} = \alpha/\partial\alpha$ , notemos que  $\partial A = A \cap F$  y que  $\partial\alpha = \alpha \cap \partial A$ , por lo que  $\tilde{\alpha} \subset \tilde{A} \subset \tilde{E}$ .

Por hipótesis  $\tilde{\alpha}$  es contraíble en  $\tilde{E}$  y por lo tanto  $\tilde{E}/\tilde{\alpha} \simeq \tilde{E} \vee S\tilde{\alpha}$ <sup>1</sup>, pero como  $\tilde{\alpha}$  es homeomorfo a una circunferencia, entonces  $S\tilde{\alpha}$  es isomorfo a una esfera. En consecuencia tenemos que  $\pi_1(\tilde{E}) \cong \pi_1(\tilde{E}/\tilde{\alpha})$ .

<sup>1</sup> $SX$  denota la suspensión de  $X$

Por otro lado,  $\tilde{A} = \tilde{A}/\tilde{\alpha}$  es homeomorfo a una esfera, en consecuencia  $\pi_1((\tilde{E}/\tilde{\alpha})/\tilde{A}) \cong \pi_1(\tilde{E}/\tilde{\alpha}) \cong \pi_1(\tilde{E})$ . Notemos además que  $(\tilde{E}/\tilde{\alpha})/\tilde{A} \cong \tilde{E}/\tilde{A} \cong E/(F \cup A)$ . Por último, no es difícil convencerse de que  $E/(F \cup A) \simeq (E \cup A \times I)/(F \cup A)$  ya que  $(E \cup A \times I)/(F \cup A) \cong E/(F \cup A) \cup CA$  pero como  $CA$  es contractible se sigue la equivalencia homotópica deseada.

Finalmente, la pareja  $(E \cup A \times I, F \cup A)$  es equivalente a la pareja  $(E, F')$  donde  $F'$  es la variedad que resulta de empujar  $A$  hacia el interior de  $E$  y hacer cirugía sobre  $F$ , es decir,  $F'$  será una superficie propiamente encajada en  $E$  y homotópica a  $F \cup A$ . Las equivalencias hasta el momento probadas nos arrojan que  $\pi_1(E/F') \cong \pi_1(E/F)$ .  $\square$

Ahora pasemos al caso de nuestro interés, la conjetura  $\mathbb{Z}$  en los nudos pretzels.

**Teorema 29.** *Para toda superficie ICON  $F$  de frontera disconexa en el exterior de un nudo pretzel  $P(p, q, -r)$  existe otra superficie CON  $F'$  con  $|\partial F'| < |\partial F|$  tal que existe un isomorfismo  $\pi_1(E/F') \rightarrow \pi_1(E/F)$*

*Demostración.* Consideremos  $F$  la superficie ICON que nos garantiza el teorema 26. Tal superficie está compuesta de tres partes como las que se indican en la figura 5.4. Llamemos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  a los diagramas de las vías de tren orientadas que se encuentran sobre los semiplanos que logran la división de la  $S^3$  (figura 5.4). Las vías de tren orientadas  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  serán las inducidas por la parte de  $F$  que se encuentran en el ovillo  $1/p$ ,  $1/q$  y  $-1/r$  respectivamente.

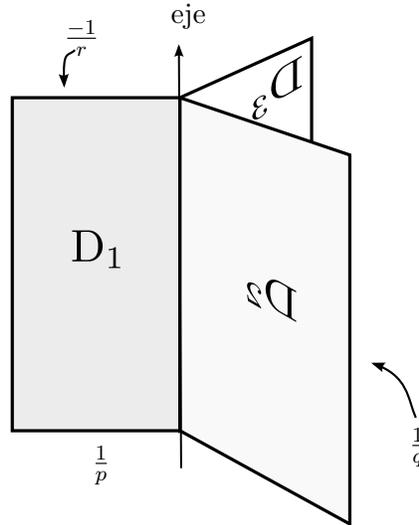


Figura 5.4: Semiplanos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  que dividen a  $S^3$

De la prueba del teorema 26 podemos determinar las orientaciones de las vías de tren de cada diagrama. Estas orientaciones las podemos observar en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7.

En todas ellas,  $a = ((-1)^v, (-1)^{v-1}, \dots, 1, -1)$  y  $x = (1, -1, \dots, (-1)^{u-1})$ .

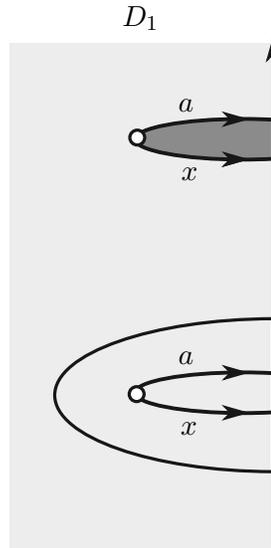


Figura 5.5: Vía de tren orientada para  $D_1$

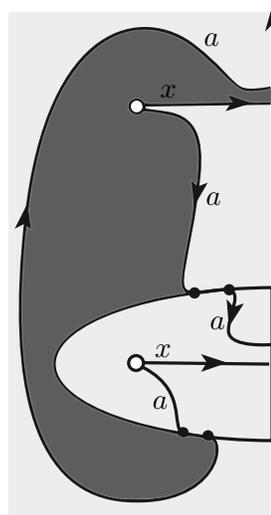


Figura 5.6: Vía de tren orientada para  $D_2$

Como podemos ver, la superficie  $F$  llega al toro en  $u + v$  curvas que van alternando de dirección excepto en un par de ellas, esto se debe a que  $u + v$  es impar. Al arco contenido

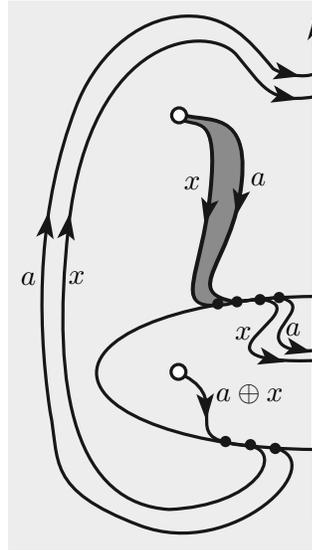


Figura 5.7: Vía de tren orientada para  $D_3$

en esas curva lo llamaremos  $\beta$  y lo tomaremos como referencia, es fácil de identificar en los diagramas por ser justamente el arco que, al ir recorriendo los arcos que inciden en un vértice y en sentido contrario a las manecillas, une la última arista etiquetada por  $x$  y con la primera arista etiquetada por  $a$ .

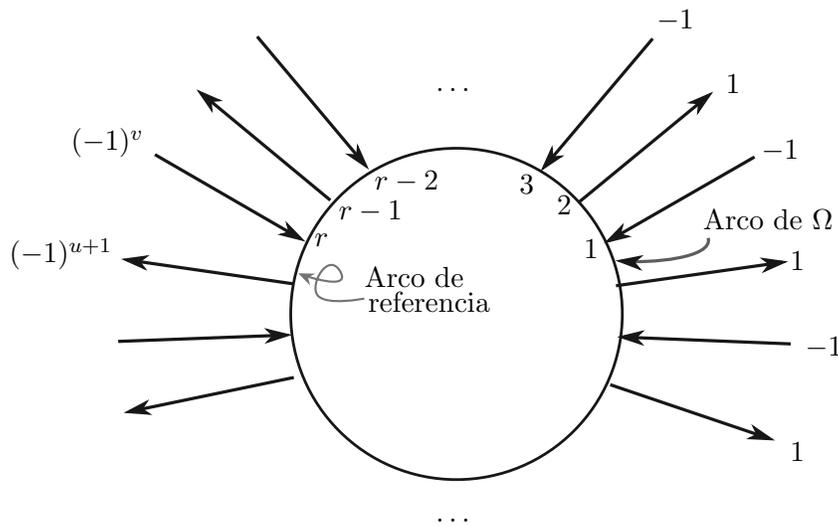


Figura 5.8: Arco de  $\beta$  y arco  $\alpha$

Ahora bien, los pedazos sombreado en cada figura forman un hexágono  $\Omega$ , cuyos tres de sus lados alternado están sobre  $F$  y los otros tres sobre  $T$  (el toro que contiene al nudo). Además, como podemos observar los tres arcos que están sobre  $T$  están justo en la misma posición cíclica sobre los meridianos respecto al arco de referencia  $\beta$ . Uno de ellos, tiene la dirección opuesta. Entonces, en el cociente  $\Omega$  lo podemos ver como una homotopía que manda el producto de las aristas en la identidad, esto es,  $\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$  en  $\pi_1(E/F)$  donde  $\alpha$  es el arco que está a distancia  $v$  de  $\beta$ , como ya se había mencionado.

Entonces,  $\alpha$  satisface las condiciones del lema 28 podemos reducir  $F$  como queríamos.  $\square$

De este teorema es ahora evidente que las superficies ICON encontradas en la sección 4.3 satisfacen la conjetura  $\mathbb{Z}$  y por ende los nudos pretzel  $p(p, q, -r)$  con  $p, q, r$  impares mayores a uno, también lo satisfacen. Pero por si hay alguna duda, vamos a enunciar y probar esta afirmación.

**Teorema 30.** *Sea  $k$  un nudo pretzel  $p(p, q, -r)$  con  $p, q$  y  $-r$  impares mayores a uno. Entonces, para toda superficie  $F$  compacta, orientable y no separante en el exterior  $E$  de  $k$ , se tiene que  $\pi_1(E/F) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Bueno, por el lema 27 bastará probar este teorema para el caso en que  $F$  es una superficie ICON. Si  $|\partial F| > 1$  entonces, por el teorema 29 sabemos que podemos modificar  $F$  a una superficie CON  $F'$  tal que  $|\partial F'| < |\partial F|$  y conservando el grupo fundamental, es decir,  $\pi_1(E/F') \cong \pi_1(E/F)$ .

Pero, aplicando nuevamente el lema 27 podemos cambiar a  $F'$  por una superficie ICON  $F''$  tal que  $\pi_1(E/F'')$  se epimorfea sobre  $\pi_1(E/F')$ , además  $|\partial F''| \leq |\partial F'|$ . Entonces, siguiendo este procesos iteradamente llegaremos a una superficie ICON  $\tilde{F}$  tal que  $|\partial \tilde{F}| = 1$  y  $\pi_1(E/\tilde{F})$  se epimorfea sobre  $\pi_1(E/F)$ .

Ahora bien, en [3] González-Acuña y Ramírez demostraron que toda superficie CON con frontera conexa, como  $\tilde{F}$ , satisface la conjetura  $\mathbb{Z}$ . Es decir,  $\pi_1(E/\tilde{F}) \cong \mathbb{Z}$ . Y por lo tanto, tenemos un epimorfismo de  $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(E/F)$ .

Por otro lado, recordemos que  $\pi_1(E/F) \cong \pi_1(E - F)^\# * \mathbb{Z}$ . Entonces, esto aunado al epimorfismo de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\pi_1(E/F)$  nos da como consecuencia que  $\pi_1(E/F) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] Nathan M. Dunfield. A table of boundary slopes of montesinos knots. *Topology*, 40(2):309–315, 2001.
- [2] Mario Eudave-Muñoz. On knots with icon surfaces. *Osaka Journal of Mathematics*, 50(1):271–285, 03 2013.
- [3] Francisco González-Acuña and Arturo Ramírez. A knot-theoretic equivalent of the Kervaire conjecture. *J. Knot Theory Ramifications*, 15(4):471–478, 2006.
- [4] A. Hatcher and U. Oertel. Boundary slopes for Montesinos knots. *Topology*, 28(4):453–480, 1989.
- [5] A.E. Hatcher. Measured lamination spaces for surfaces, from the topological viewpoint. *Topology and its Applications*, 30(1):63–88, 1988.
- [6] Mikami Hirasawa and Kunio Murasugi. Genera and fibredness of Montesinos knots. *Pacific J. Math.*, 225(1):53–83, 2006.
- [7] John M. Howie. *Fundamentals of semigroup theory*, volume 12 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. Oxford Science Publications.
- [8] Michel A. Kervaire. On higher dimensional knots. In *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, pages 105–119. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965.
- [9] Elena Klimenko and Makoto Sakuma. Two-generator Discrete Subgroups of  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  Containing Orientation-reversing Elements. *Geometriae Dedicata*, 72(3):247–282, 1998.

# Índice alfabético

Caminos monocromáticos, 24, 37

Diagrama de orientaciones, 30

Enlace de Montesinos, 15

Fracción de arista, 21

Longitud de un camino, 21

Número de hojas, 16

Nudo de Montesinos, 12

eje de , 14

Silla acotada, 32

Silla no acotada, 32

Sistemas de curvas, 10

Superficie ICON, 29

Superficies candidatas, 22

de tipo I, 26

de tipo II, 27

de tipo III, 27

Vía de tren, 9, 10

cuasi, 9

orientación de una, 11