



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

H-NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. en C. INGRID CHANTAL TORRES RAMOS

DIRECTORA DE LA TESIS
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F. FEBRERO DEL 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
mis padres, hermanos y Ulises.*

Prefacio

La teoría de gráficas es una de las ramas más importantes de las matemáticas discretas y aplicadas que unifica diversas áreas como combinatoria, álgebra, ciencias de la computación, telecomunicaciones, etcétera.

La teoría de gráficas surge en el siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg, ve figura 1, el cual consiste en cruzar cada uno de los siete puentes una única vez (cerrar el ciclo o concluir la trayectoria (camino) euleriano). En 1736, Leonhard Euler demuestra en su trabajo intitulado "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición) que esto no es posible, por lo cual Leonhard Euler es considerado pionero de la teoría de gráficas.

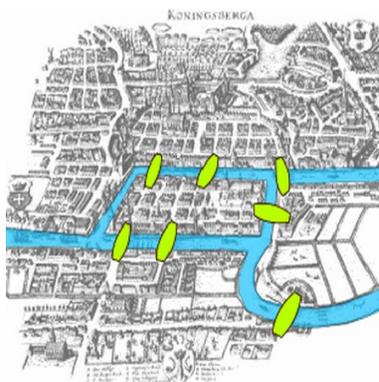


Figura 1: Los puentes del río Pregel en Königsberg, actualmente Kaliningrado.

En 1847, Gustav Kirchhoff utilizó la teoría de gráficas para el análisis de redes eléctricas y publicó las leyes de los circuitos, las cuales son utilizadas para calcular la tensión eléctrica y la intensidad eléctrica en los circuitos eléctricos, esta es considerada la primera aplicación de la teoría de gráficas a un problema de ingeniería.

Francis Guthrie, en 1852, planteó la siguiente conjetura: Es posible colorear cualquier mapa con cuatro colores sin que dos países vecinos sean coloreados con colores iguales. Este problema fue resuelto un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en

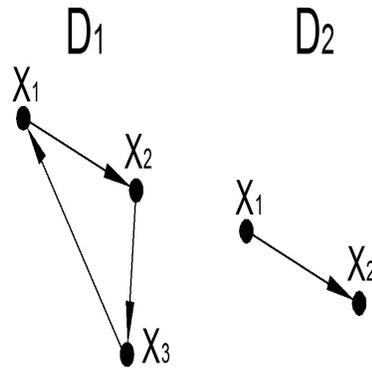


Figura 2: D_1 no tiene núcleo. D_2 si tiene núcleo, más aún $\{x_2\}$ es núcleo de la digráfica .

1976, quienes utilizaron un programa para la demostración.

En la actualidad la teoría de gráficas tiene diversas aplicaciones tanto teóricas como prácticas.

En este trabajo, nosotras nos enfocamos en la generalización de los resultados obtenidos en [37] ¹, nuestra propuesta inicial era cambiar las definiciones de trayectorias monocromáticas (camino monocromático y ciclo monocromático) y γ -ciclos por H -trayectorias (H -camino y H -ciclo) y $\gamma - H$ -ciclos respectivamente, con el objetivo de dar condiciones suficientes para asegurar la existencia de un H -núcleo por trayectorias. Esto nos dio gratas consecuencias ya que no sólo obtuvimos los resultados planeados, además mejoramos las hipótesis.

Cabe mencionar que no toda digráfica tiene núcleo, como se puede ver en la figura 2, por tal motivo es importante el estudio de la existencia de este.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos: el primer capítulo consiste en definiciones básicas para el lector que está incursionando en esta área, el lector experto puede comenzar la lectura desde la sección 1.1; en el segundo capítulo daremos antecedentes históricos de los núcleos; y en los otros tres capítulos se encuentran desarrollados de manera amplia los resultados obtenidos durante mi trabajo doctoral, la herramienta necesaria para su comprensión y algunas aplicaciones.

¹si no conoces los siguientes conceptos no te preocupes ya que en el próximo capítulo serán definidos

Agradecimientos

Primero agradezco a CONACyT por el apoyo brindado, por medio de la beca; a la Universidad Nacional Autónoma de México por abrirme sus puertas desde la licenciatura hasta el doctorado, sin este apoyo no sería la persona que soy, a mis profesores quienes han sido fuente de inspiración para la búsqueda del conocimiento y contribuyeron en mi formación como matemática. También les agradezco el brindarme su amistad y consejos, los recuerdo con gran aprecio. Al Instituto de Matemáticas, por la beca, que fue mi segunda casa, en donde conocí a grandes amigos.

Gracias a Hortensia por aceptarme como alumna, por brindarme su apoyo tanto académico como personal, sus consejos y paciencia. Es una excelente investigadora y estoy muy contenta de trabajar con ella.

Gracias a mis sinodales por el tiempo dedicado a la revisión de mi trabajo y por las observaciones que hicieron para mejorar la redacción final del trabajo: Eugenia, Isidoro, Mika y en especial a Bernardo.

Gracias a mis amigos, que he conocido desde la licenciatura hasta el doctorado, por hacer más agradable esta época y con los que he vivido muchas aventuras tanto dentro de la universidad como fuera.

Agradezco por último y más importante a mis padres, Francisca y Everardo por la educación, tiempo, apoyo, consejos y cariño que nos han dado a mis hermanos y a mí, de lo contrario todo sería más difícil, los amo mucho.

Gracias a mis hermanos Yisel, Irvin y Liu por su apoyo y cariño incondicional. Por ser una parte esencial en mi vida hoy y siempre.

Agradezco a Ulises por estos años de compañía en donde hemos vivido muchas cosas, por ser una parte muy importante de mi vida, por sus consejos y su amor, me haces muy feliz.

Índice general

Prefacio	V
Agradecimientos	VII
Lista de figuras	XIV
1. Preliminares.	1
1.1. Núcleos en digráficas	4
1.2. Digráficas H-coloreadas.	5
2. Historia del núcleo	7
3. H-ciclos y H-trayectorias.	19
3.1. Primer resultado	29
4. $\gamma - H$-ciclos	49
4.1. Configuraciones	52
4.2. Segundo resultado	55
5. Otros Resultados de $\gamma - H$-ciclos	85
5.1. Aplicaciones	85

Conclusiones

91

Índice de figuras

1.	Los puentes del río Pregel en Königsberg, actualmente Kaliningrado.	V
2.	D_1 no tiene núcleo. D_2 si tiene núcleo, más aún $\{x_2\}$ es núcleo de la digráfica .	VI
1.1.	Ejemplo de una digráfica	1
1.2.	a) Una digráfica D . b) D' una subdigráfica generadora de D . c) $D'' = D[x_1, x_2, x_3, x_5]$	2
1.3.	Ejemplo de una digráfica simétrica	3
1.4.	Ejemplo de una digráfica fuertemente transitiva	3
1.5.	Ejemplo de una digráfica H -coloreada	5
2.1.	Ejemplo de $C(D)$	12
2.2.	D es una digráfica H -coloreada.	13
2.3.	H es la digráfica que consiste únicamente de lazos.	17
3.1.	T_0, T_1 son dos trayectorias que no se intersectan	20
3.2.	T_0, T_1 son dos trayectorias que se intersectan	21
3.3.	$(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un ciclo	22
3.4.	$T'_0 = (u_0, T_0, v)$ y $T'_{j_0} = (v, T_{j_0}, u_{j_0+1})$ son H -trayectorias	22
3.5.	H una digráficas fuertemente transitiva y D digráfica H -coloreada.	25
3.6.	D_1, D_2 subdigráficas generadoras de D	25
3.7.	$(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$	31

3.8. Figura a) Caso i). Figura b) Caso ii)	33
3.9. Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$	34
3.10. a) α_3 interseca primero a v y posteriormente a x . b) α_3 interseca primero a x y posteriormente a v	35
3.11. $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$	35
3.12. a) Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$. b) Caso ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$	37
3.13. Caso i)	37
3.14. a) Caso I) α_1 interseca primero a v y posteriormente a x . b) Caso II) α_1 interseca primero a x y posteriormente a v	39
3.15. (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3	40
3.16. $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$	41
3.17. a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$; b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$	42
3.18. Caso i)	43
3.19. a) Caso I) α_3 interseca primero a α_2 y posteriormente a α_1 . b) Caso II) α_3 interseca primero a α_1 y posteriormente a α_2	44
3.20. $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$	45
3.21. a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$. b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$	46
3.22. Caso i)	47
3.23. a) α_1 interseca primero a α_2 y posteriormente a α_3 . b) α_1 interseca primero a α_3 y posteriormente a α_2	48
4.1. Configuraciones	54
4.2. $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \in F(H)$	58
4.3. $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es un $\widehat{P}_3[u, z, w, x_0]$	60
4.4. a) Caso a.2). b) Caso a.3)	61
4.5. I) r es anterior a s en α_3 . II) s es anterior a r en α_3	62
4.6. $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un $\widehat{P}_3[u, x, w, x_0]$	63

4.7. I) x es anterior a v en α_1 . II) v es anterior a x en α_1	64
4.8. Caso b.3)	65
4.9. I) Caso I). II) Caso II)	66
4.10. i) $v \neq s$. ii) $v = s$	68
4.11. Construcción de $\widehat{C}_3[x_0, z, w, x_0]$	68
4.12. i) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \in F(H)$. ii) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \in F(H)$	70
4.13. i) $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \in F(H)$. ii) $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \in F(H)$	70
4.14. a) Caso a.1), b) Caso a.2)	72
4.15. Caso a.3)	73
4.16. a) Caso I) x es anterior a v en α_3 , b) Caso II) v es anterior a x en α_3	74
4.17. Caso b.1)	75
4.18. a) Caso I) r es anterior a x en α_1 , b) Caso II) x es anterior a r en α_1	76
4.19. a) Caso I) x es anterior a v en α_2 , b) Caso II) v es anterior a x en α_2	77
4.20. i) Caso i) $r = w$, ii) Caso ii) $r \neq w$	78
4.21. Caso i) $s = p$	79
4.22. Caso I.1)	80
4.23. i) Caso I.2.1) $x = m$, ii) Caso I.2.2) $x \neq m$	81
4.24. Caso II) $x \in Y^*$	82
4.25. Caso i) $x = q$	83
4.26. I) Caso I) $x \notin Y^*$, II) Caso II) $x \in Y^*$	84
5.1. T_4	86
5.2. \widetilde{T}_6 . En esta figura supondremos que el color 1 es el color rojo y el color 2 es el color azul.	86
5.3. En esta figura supondremos que el color 1 es el color rojo y el color 2 es el color azul.	87

5.4. H es la digráfica que consiste únicamente de lazos. 88

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo daremos una pequeña introducción al mundo de las digráficas. Definiremos algunos conceptos básicos y resultados que nos serán de gran utilidad posteriormente, aunque no incluiremos sus demostraciones ya que no es el objetivo de la tesis. En los libros de Berge [5] y Chartrand y Lesniak [10] puedes encontrar un desarrollo más amplio del presente capítulo.

Definición 1.0.1. Una *digráfica* D consiste de un conjunto finito no vacío de vértices $V(D)$, y un conjunto de pares ordenados de vértices a cuyos elementos les llamaremos flechas, que denotaremos por $F(D)$, ve figura 1.1.

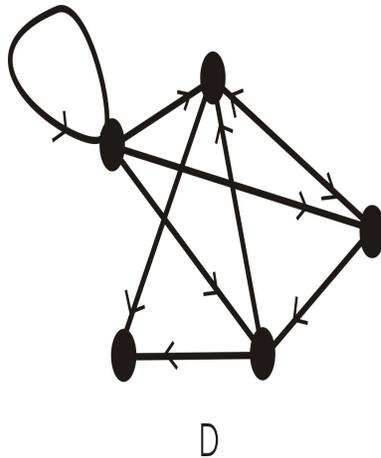


Figura 1.1: Ejemplo de una digráfica

Definición 1.0.2. El *orden* de una digráfica D es la cardinalidad de $V(D)$ y el *tamaño* de D es la cardinalidad de $F(D)$.

Notación. Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$ tal que $f = (u, v) \in F(D)$ diremos que f es incidente desde u e incidente hacia v o diremos que u es adyacente hacia v y que v es adyacente desde u .

Definición 1.0.3. Sean D una digráfica y $v \in V(D)$. El ingrado o grado interior de v , denotado por $\delta_D^-(v)$, es el número de vértices adyacentes hacia v .

Definición 1.0.4. Sean D una digráfica y $v \in V(D)$. El exgrado o grado exterior de v , denotado por $\delta_D^+(v)$, es el número de vértices adyacentes desde v .

Definición 1.0.5. Sean D una digráfica y $v \in V(D)$. El grado de v , denotado por $\delta_D(v) = \delta_D^-(v) + \delta_D^+(v)$.

Definición 1.0.6. Sean D y D' digráficas, D' es una subdigráfica de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. D' es una subdigráfica propia de D si $V(D') \subsetneq V(D)$ o $F(D') \subsetneq F(D)$.

Definición 1.0.7. Una subdigráfica D' de una digráfica D es una subdigráfica generadora de D si $V(D') = V(D)$, ve figura 1.2.

Definición 1.0.8. Una subdigráfica D' de una digráfica D es una subdigráfica inducida de D si $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D')$ consiste de todas las flechas de D entre vértices de D' y que pertenecen a D . Denotaremos por $D[U]$ a la subdigráfica de D inducida por $U \subseteq V(D)$, ve figura 1.2.

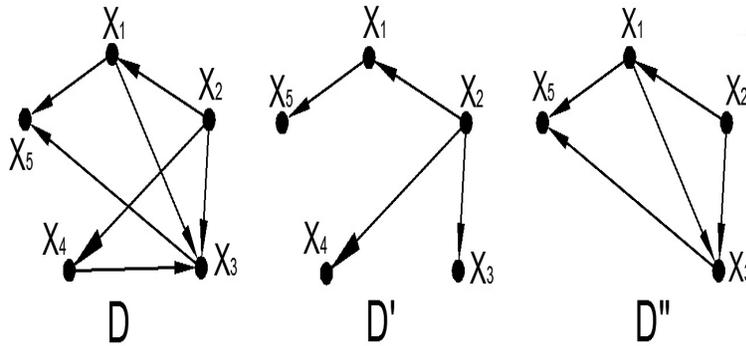


Figura 1.2: a) Una digráfica D . b) D' una subdigráfica generadora de D . c) $D'' = D[x_1, x_2, x_3, x_5]$.

Definición 1.0.9. Sean D una digráfica y $f = (u, v) \in F(D)$. Entonces f es una flecha simétrica de D si $(v, u) \in F(D)$.

Definición 1.0.10. La parte simétrica de una digráfica D , denotada por $Sim(D)$, es la subdigráfica inducida por las flechas simétricas de D .

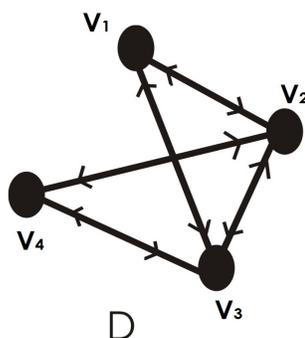


Figura 1.3: Ejemplo de una digráfica simétrica

Definición 1.0.11. Una digráfica D es una digráfica simétrica si cada flecha de D es una flecha simétrica, ve figura 1.3.

Definición 1.0.12. Una digráfica D es una digráfica transitiva si para cualesquiera tres vértices $u, v, w \in V(D)$ tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, tenemos que $(u, w) \in F(D)$. Diremos que D es una digráfica fuertemente transitiva si para cualesquiera vértices $u, v, w \in V(D)$ (posiblemente $u = w$) tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, tenemos que $(u, w) \in F(D)$ (cuando $u = w$ y $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$, tenemos que $\{(u, u), (v, v)\} \subseteq F(D)$), ve figura 1.4.

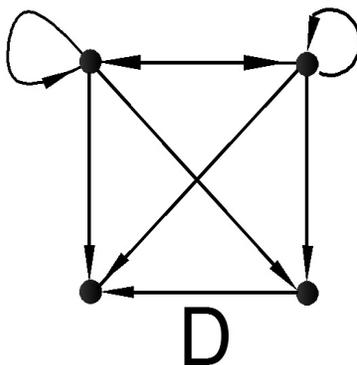


Figura 1.4: Ejemplo de una digráfica fuertemente transitiva

Observación. La digráfica D de la figura 1.3 no es transitiva ya que las aristas $\{(v_1, v_4), (v_4, v_1)\} \not\subseteq F(D)$.

Definición 1.0.13. Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$ (no necesariamente distintos). Diremos que un uv -camino en D es una sucesión de vértices $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ tal que para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$. Denotaremos por $l(W)$ a la longitud de W , en este caso $l(W) = n$.

Definición 1.0.14. Un camino W es un camino cerrado si $u_0 = u_n$.

Definición 1.0.15. Una sucesión de vértices $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ es un uv -camino dirigido de una digráfica D si para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$ se satisface que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.

Definición 1.0.16. Una uv -trayectoria dirigida en una digráfica D es un uv -camino dirigido que no repite vértices.

Definición 1.0.17. Un ciclo dirigido C de una digráfica D es una sucesión de vértices $(u_0, u_1, \dots, u_m = u_0)$ en donde para cada $i, j \in \{1, \dots, m\}$ con $i \neq j$ se tiene que $u_i \neq u_j$ (una trayectoria cerrada). Denotaremos por C_m al ciclo dirigido de longitud m , con $m \geq 2$.

Notación. Sea $W = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ un camino de una digráfica D y $1 \leq i, j \leq n$. Denotamos por (u_i, W, u_j) al $u_i u_j$ -subcamino contenido en W , es decir $(u_i, W, u_j) = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$.

Definición 1.0.18. Sea D una digráfica no vacía, una subdivisión elemental de D es una digráfica obtenida de D al sustituir alguna flecha $f \in F(D)$ por una trayectoria dirigida con la misma orientación. Una subdivisión de D es una digráfica obtenida de D por una sucesión de subdivisiones elementales.

Teorema 1.0.1. Sean D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Todo uv -camino dirigido en D contiene una uv -trayectoria dirigida en D .

Teorema 1.0.2. Todo camino dirigido cerrado en una digráfica D contiene un ciclo dirigido.

Teorema 1.0.3. Sea D una digráfica. Si D no contiene ciclos, entonces tiene al menos un vértice de exgrado cero.

Teorema 1.0.4. Sea D una digráfica. Si para cada vértice $v \in V(D)$ se cumple que $\delta_D^+(v) \geq 1$ ($\delta_D^-(v) \geq 1$), entonces D contiene un ciclo dirigido.

1.1. Núcleos en digráficas

Definición 1.1.1. Sea D una digráfica, $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si:

1. Para cada $u, v \in N$ se tiene que $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$ (N es independiente).
2. Si $x \in V(D) \setminus N$, entonces $(x, y) \in F(D)$ para alguna $y \in N$ (N es absorbente).

Observemos que no toda digráfica tiene núcleo, un ejemplo clásico son los ciclos dirigidos de longitud impar.

figura 1.5 es $(x_2, x_7, x_3, x_2, x_3)$. Notemos que en la figura 1.5 (x_1, x_2, x_7) es una trayectoria en D pero no una H -trayectoria. (x_1, x_2, x_3) es un ciclo en D pero no una H -ciclo y $(x_3, x_{24}, x_7, x_3, x_2)$ es un camino en D pero no un H -camino.

Denotaremos por $uv - H$ -camino (trayectoria o ciclo) al H -camino (trayectoria o ciclo) de u a v .

Lema 1.2.1. [33] *Sea H una digráfica fuertemente transitiva. Si C es un camino dirigido de u a v en H de longitud al menos uno (posiblemente $u = v$), entonces $(u, v) \in F(H)$.*

Lema 1.2.2. [33] *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada. Para $u, v \in V(D)$ con $u \neq v$ cada H -camino en D de u a v contiene una H -trayectoria en D de u a v .*

Capítulo 2

Historia del núcleo

La teoría de núcleos es una importante rama dentro de la teoría de gráficas debido a las aplicaciones que tiene en la teoría de juegos, en juegos tipo Nim [5], en teoría de decisiones y lógica [3, 4], por nombrar algunas.

Un conjunto N , $N \subseteq V(D)$ es núcleo de D si: 1) N es independiente (para cada $u, v \in N$ se tiene que $(u, v) \notin F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$); 2) N es absorbente (si $x \in V(D) \setminus N$, entonces $(x, y) \in F(D)$ para alguna $y \in N$).

Este concepto fue introducido por Von Neumann y Morgenstern en el área de teoría de juegos [54].

En un principio al núcleo se le llamó "solución", ya que querían encontrar principios matemáticos que definieran el comportamiento racional para los participantes de una economía social o un juego. Para ser precisos, en juegos de cooperación entre n personas: supongamos que n personas, denotadas por $1, 2, \dots, n$ tienen que discutir la selección de un solo punto o elemento de X , llamado el conjunto de las situaciones. Si el jugador i prefiere la situación a a la situación b , se denotara por $a \geq^i b$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Las preferencias individuales pueden no ser compatibles, pero recordemos que se está haciendo una elección de grupo, así que la preferencia individual no será tomada en cuenta. Por lo que la preferencia unánime de una situación será la mejor solución, aunque esto rara vez sucede. Así que será necesario introducir el concepto de "preferencia efectiva". La situación a se dice que es efectivamente preferida a b , si existe un grupo dentro de las n personas que prefieren a a de b y ellas juntas son capaces de imponer la preferencia de a sobre b . Notemos que la preferencia efectiva no es transitiva. Ahora consideremos la digráfica D , con X como el conjunto de vértices de D y en donde $N^-(x)$ denota el conjunto de las situaciones efectivamente preferidas a x , es decir ab es una flecha de D si b es efectivamente preferida sobre a . Si la digráfica D tiene un núcleo S , la selección será confinada a los elementos

de S . Ya que S es independiente, ninguna situación de S es efectivamente preferida a otra de S . Y por ser absorbente, para cada situación $x \notin S$, existirá una situación en S que es efectivamente preferida a x , así que x puede ser inmediatamente descartado. Von Neumann y Morgenstern llamaban a S "solución".

Un ejemplo de juego tipo Nim es el siguiente: Dada una digráfica D y los jugadores A y B , podemos definir el siguiente juego. Se fija un punto inicial x_0 , el jugador A selecciona un vértice x_1 entre el conjunto de vértices a los que les llega una flecha desde x_0 (la vecindad de x_0 , denotada por $N^+(x_0)$), el jugador B selecciona cualquier vértice x_2 en $N^+(x_1)$ y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que no pueda elegir un vértice. Observemos que si la digráfica tiene núcleo, entonces el jugador que escoge un elemento en el núcleo nunca pierde.

Como hemos visto, este concepto tiene diversas aplicaciones. En [40, 41, 53] puedes encontrar más.

Berge fue el primero en aplicar este concepto en diversas áreas de las matemáticas, definiendo el núcleo de una digráfica.

Notemos que el concepto de núcleo y el concepto de solución son duales direccionalmente, ya que S es solución de una digráfica D si y sólo si S es un núcleo de la digráfica obtenida de D al cambiar la dirección de todas las flechas de D .

Una gráfica es *perfecta* si y sólo si no contiene un ciclo de longitud impar inducido de orden mayor o igual a 5, ni su complemento. Una *orientación de una gráfica* $G = (V, E)$ es una digráfica $D = (V, F)$ obtenida de orientar cada arista de G , en una o dos direcciones. Una orientación de una gráfica G es llamada *clan acíclica* si cada clan C de G tiene núcleo. Una gráfica es llamada *núcleo soluble* si cada una de sus orientaciones clan acíclicas tienen núcleo.

Berge y Duchet [7] relacionaron la teoría de núcleos y la teoría de gráficas perfectas con la siguiente conjetura: G es una gráfica perfecta si y sólo si G es una gráfica núcleo soluble.

Una implicación de esta conjetura fue demostrada por Boros y Gurvich [9] y el inverso es una consecuencia del teorema fuerte de la gráfica perfecta [11].

La teoría de núcleos ha sido utilizada para demostrar algunos casos particulares de otra conjeturas famosa como la siguiente: En toda digráfica existe un conjunto independiente máximo que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima, propuesta por Laborde, Pagan y Xuong [39]. Aunque esta conjetura todavía no se ha demostrado. Se han demostrado algunos casos particulares. Berge [5] demostró que: Si S es un núcleo de una digráfica D , entonces S es un conjunto independiente máximo y absorbente mínimo.

Galeana-Sánchez, Gómez, Montellano-Ballesteros [24] dan varios resultados concernientes a la conjetura Laborde-Payan-Xuan, en donde observan que en cada digráfica existe un conjunto independiente de vértices que intersecta a las trayectorias de longitud máxima. Las digráficas que consideran satisfacen los conceptos de localmente semicompleta y transitividad local. También consideran las gráficas orientadas de longitud a lo más 4. En particular, demuestran: Sea D una gráfica. Si cada trayectoria es de longitud a lo más 4, entonces existe un conjunto independiente $B \subset L^-(D)$ que intersecta a las trayectorias de longitud máxima (es la conjetura Laborde-Payan-Xuan para trayectorias de longitud a lo más 4).

Galeana-Sánchez, Arroyo [2] dan condiciones suficientes para que una digráfica satisfaga la conjetura de partición de trayectorias. Dicha conjetura tiene su origen en 1966, en uno de los primeros artículos publicados por László Lovász [43]. Stiebitz [51] demostró un resultado similar que consideraba el grado mínimo δ como parámetro. La versión no dirigida de la conjetura de partición de trayectorias fue discutida por primera vez por Lovász y Mihók en el año de 1981 en Szeged, Hungría; fue mencionada en la tesis de Hajnal [38] y Vronka [55] y fue presentada por primera vez en 1983 por Laborde-Payan-Xuan.

Por lo antes mencionado, un problema clásico en la teoría de digráficas es encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para que una digráfica contenga núcleo (ya que es una propiedad que no satisface toda digráfica). Diversos matemáticos han estudiado este problema, algunos resultados importantes han sido obtenidos por Blidia, Duchet, Jacob, Maffray y Meyniel [8], Topp [52], Galeana-Sánchez [18], Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [35, 36].

Algunos algoritmos para construir todos los núcleos de una digráfica D han sido desarrollados por Roy [48] y Rundeanu [49]. En general, hay pocos resultados algorítmicos concernientes a núcleo. Chvátal [12] probó que decidir si una digráfica tiene núcleo es un problema NP-completo. Posteriormente Fraenkel [17] demostró que el problema de decidir si una digráfica tiene núcleo es NP-completo, aún para digráficas planas D con restricciones de grado $d_D^+(x) \leq 2$, $d_D^-(x) \leq 2$ y $d(x) \leq 3$ para todo vértice x . Con esto, podemos observar que aún en digráficas relativamente sencillas, es difícil saber si tiene núcleo o no.

Aunque no todas las digráficas tienen núcleo, se ha demostrado que casi todas las digráficas tienen uno. Sea $D(n, p)$ una digráfica aleatoria de n vértices, donde cada flecha dirigida xy tiene probabilidad p de estar en la digráfica. Fernández de la Vega [16] dio el siguiente resultado: Sea p fijo, $0 \leq p \leq 1$. La probabilidad de que una digráfica aleatoria $D(n, p)$ tenga núcleo tiende a 1 cuando $n \rightarrow \infty$.

Como hemos mencionado, el encontrar núcleos es un problema NP-completo, así que varios investigadores han restringido su investigación a ciertas familias de digráficas, por mencionar algunas: digráficas transitivas, digráficas acíclicas, digráficas simétricas (pro-

iedades hereditarias ¹), digráficas quasitransitivas, digráficas pretransitivas, etcétera.

Los primeros resultados que establecen condiciones suficientes para la existencia de al menos un núcleo son los siguientes:

1. (Von Neumann [54]) Si D es una digráfica sin ciclos, entonces D tiene núcleo.
2. (Richardson [47]) Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.

Notemos que el teorema de Richardson es una generalización del teorema de Von Neumann. Posteriormente varias generalizaciones del teorema de Richardson han sido encontradas, como las siguiente:

3. (Duchet [15]) Si D es una digráfica tal que todo ciclo de longitud impar tiene dos flechas simétricas, entonces D tiene núcleo.
4. (Duchet [15]) Si D es una digráfica tal que todo ciclo tiene una flecha simétrica entonces D tiene núcleo. Este último es de gran importancia dentro de la teoría de núcleos.

Notemos que las hipótesis que se piden en cada uno de los teoremas anteriores son hereditarias, por lo que cada subdigráfica inducida de D tiene núcleo. Diremos que una digráfica D es *núcleo perfecta* si D y todas sus digráficas inducidas tienen núcleo. Con esta definición tenemos como consecuencia los siguientes resultados clásicos:

1. (Berge [4]) Una digráfica simétrica es núcleo perfecta.
2. (Von Neumann [54]) Si D es una digráfica sin ciclos, entonces D es núcleo perfecta y su núcleo es único.
3. (Richardson [47]) Una digráfica sin ciclos de longitud impar es núcleo perfecta.
4. (Duchet [15]) Si D es una digráfica tal que cada ciclo de longitud impar tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.

En la literatura de núcleos puedes encontrar varias generalizaciones del concepto y una de ellas (con la que nosotros trabajamos) se define sobre una digráfica a la cual le asignamos colores a sus flechas.

En [50] Sands, Sauer y Woodrow plantearon lo siguiente:

¹Una propiedad P es hereditaria si para cualquier digráfica D que cumple la propiedad P , cada subdigráfica inducida de D también satisface la propiedad P .

Teorema 2.0.3. *Toda digráfica D cuyas flechas están coloreadas con dos colores sin trayectorias monocromáticas infinitas exteriores tiene un subconjunto S de vértices tal que: 1) Para cualquier par de vértices en S no existe trayectorias monocromáticas entre ellos; 2) Para cualquier vértice $x \in V(D) \setminus S$ existe un vértice $y \in S$ tal que existe una trayectoria monocromática de x hacia y .*

El teorema de Sands, Sauer y Woodrow es válido también para digráficas infinitas.

Corolario 2.0.4. *Todo torneo finito T cuyas flechas están coloreadas con dos colores tiene un vértice v tal que para cada $w \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de w hacia v .*

Conjetura 2.0.5. *Sea T un torneo cuyas flechas están coloreadas con tres colores, el cual no contiene triángulos dirigidos 3-coloreados. Entonces T tiene un vértice v tal que para cada vértice $w \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de w hacia v .*

Diremos que una digráfica D es m -coloreada si las flechas de D están coloreadas con m -colores. Una digráfica es *monocromática* si todas sus flechas están coloreadas con el mismo color. Una digráfica es *heterocromática* si todas sus flechas tienen distintos colores. Diremos que D es *casimonocromática* si, con a lo más una excepción, todas sus flechas tienen el mismo color.

Inspirado en la Conjetura 2.0.5 Shen Minggang en [44] demostró lo siguiente:

Teorema 2.0.6. *Si T es un torneo finito m -coloreado tal que T no contiene triángulos dirigidos 3-coloreados ni torneos transitivos de orden 3 3-coloreados, entonces T contiene un vértice v tal que para cada vértice $w \in V(T) \setminus \{v\}$ existe una trayectoria monocromática de w hacia v .*

Notemos que como consecuencia del resultado anterior se demuestra el Corolario 2.0.4.

Posteriormente, en 1996 Galeana-Sánchez introduce el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas en [20] con el fin de encontrar una respuesta a la Conjetura 2.0.5. En este artículo, Galeana-Sánchez da algunas condiciones suficientes para que un torneo m -coloreado tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Sea D una digráfica m -coloreada. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es *núcleo por trayectorias monocromáticas* si: 1) Para cualesquiera dos vértices $u, v \in N$ no existe una trayectoria dirigida monocromática de u a v ; 2) Para cada vértice $x, x \in V(D) \setminus N$ existe un vértice $y, y \in N$ tal que existe una trayectoria dirigida monocromática de x a y .

Utilizando la definición anterior podemos reescribir el teorema de Shen Minggang de la siguiente forma: Si T es un torneo finito m -coloreado tal que T no contiene triángulos

dirigidos 3-coloreados ni torneos transitivos de orden 3 3-coloreados, entonces T tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. También demostró que: Para cada $m \geq 5$ existe un torneo T m -coloreado tal que T no tiene triángulos dirigidos 3-coloreados y T no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Cabe mencionar que la Conjetura 2.0.5 aún no se ha resuelto. Sin embargo, en 2004 Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy [25] dieron un torneo T 4-coloreado el cual no tiene triángulos dirigidos 3-coloreados y T no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Observemos que el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo, ya que si a la digráfica D le asignamos un color distinto a cada una de sus flechas, entonces un conjunto de vértices es núcleo de la digráfica si y sólo si es un núcleo por trayectorias monocromáticas. Más aún, existe una estrecha relación entre estos conceptos, dada por la cerradura transitiva de una digráfica D m -coloreada. La *cerradura transitiva* de una digráfica D m -coloreada, denotada por $\mathcal{C}(D)$ es la digráfica definida como sigue, ve figura 2.1: $V(\mathcal{C}(D)) = V(D)$ y $F(\mathcal{C}(D)) = F(D) \cup \{(u, v) \text{ con color } i: \text{ existe una trayectoria } uv\text{-monocromática de color } i \text{ contenido en } D\}$.

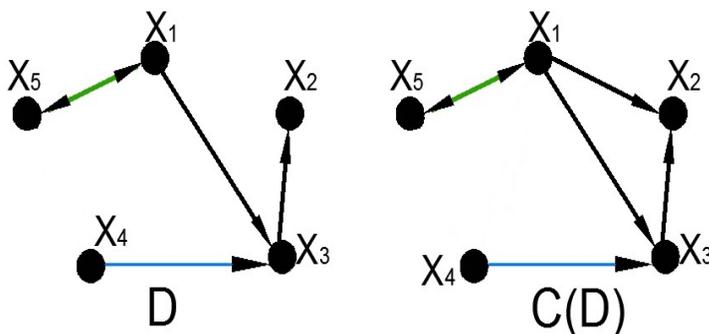


Figura 2.1: Ejemplo de $\mathcal{C}(D)$

De la siguiente definición se puede probar que:

1. Para cualquier color i la subdigráfica de $\mathcal{C}(D)$ inducida por todas las flechas de color i es una digráfica transitiva.
2. En cualquier digráfica D m -coloreada se cumple que $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(D))$.
3. Sea D una digráfica m -coloreada. D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo (este resultado es una generalización del teorema de Berge-Duchet).

obtenidos por Reid [46] y algunos de los resultados de Linek y Sands [42]. El trabajo de Arpin y Linek motivó el siguiente concepto:

Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un H -núcleo por caminos (trayectorias) en D si:

1. Para cada $u, v \in N$ no existe un H -camino (trayectoria) de u a v (N es H -independiente por caminos (trayectorias)).
2. Para cada $x \in V(D) - N$ existe un $xy - H$ -camino (trayectoria) para algún $y \in N$ (N es H -absorbente por caminos (trayectorias)).

En [13], Delgado-Escalante y Galeana-Sánchez introducen este concepto en donde prueban la existencia de H -núcleos en digráficas H -coloreadas posiblemente infinitas. También establecen una correspondencia uno a uno entre la existencia de un H -núcleo en una digráfica H -coloreada y la existencia de un núcleo en la digráfica de D al eliminar el color de cada flecha de D .

Observemos que este concepto es una generalización del concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas, cuando H consiste únicamente de lazos.

En 2010, Galeana-Sánchez, Rojas-Monroy y Zavala [32] prueban la existencia de H -núcleos por caminos en digráficas H -coloreadas posiblemente infinitas para cada digráfica, H posiblemente infinita. También, consideraron algunas condiciones suficientes para la unicidad de H -núcleos por caminos.

Włoch [58] da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en la D -suma de digráficas. También da condiciones suficientes para la existencia de núcleos perfectos monocromáticos para la D -suma. Más aún, calcula el número total de núcleos por trayectorias monocromáticas en este producto.

Galeana-Sánchez y Sánchez-López [33] dan condiciones suficientes y necesarias para la existencia de H -núcleos en la D -suma de digráficas.

En el capítulo 3 de esta tesis daremos una extensión de los resultados expuestos por Galeana-Sánchez, Gaytán-Gómez y Rojas-Monroy [23].

El resultado principal obtenido en [23] es el siguiente:

Teorema 2.0.7. *Sea D una digráfica finita m -coloreada. Si existe una partición $C = C_1 \cup C_2$ del conjunto de colores de D tal que:*

1. *Cada ciclo en la subdigráfica $D[C_i]$ generada por las flechas con colores en C_i es monocromático con $i \in \{1, 2\}$.*

2. $\mathbf{C}(D)$ no contiene triángulos heterocromáticos ni P_3 heterocromáticos con los colores de la partición C .

Entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Un resultado particular del teorema anterior es: [23] Sea D una digráfica m -coloreada tal que todo ciclo dirigido en D es monocromático. Entonces $\mathbf{C}(D)$ tiene núcleo.

Notemos que el teorema 2.0.7 implica el teorema de Sands, Sauer y Woodrow en el caso finito tomando como clases de equivalencia de la partición cada color.

Ellos demuestran en [50] que: Si D es una digráfica cuyas flechas se colorean con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces existe un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas S de vértices de D tal que, para cada vértice X que no está en S , existe una trayectoria dirigida monocromática de X a un vértice de S .

Observemos que el teorema de Sands, Sauer y Woodrow puede escribirse en términos de núcleos de la siguiente manera: Si D es una digráfica cuyas flechas están coloreadas con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces la cerradura transitiva de D , $\mathbf{C}(D)$ contiene núcleo. Más aún, $\mathbf{C}(D)$ es núcleo perfecta.

El teorema de Sands, Sauer y Woodrow se puede escribir de la siguiente manera para el caso finito: Sea D una digráfica. Si existen dos subdigráficas transitivas D_1 y D_2 de la digráfica D tales que $D = D_1 \cup D_2$, $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$. Entonces D tiene núcleo.

Notemos que para cada digráfica D , $\mathbf{C}(\mathbf{C}(D)) \cong \mathbf{C}(D)$ y D tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $\mathbf{C}(D)$ tiene un núcleo. Diremos que H es una digráfica *fuertemente transitiva* si para cualesquiera vértices $u, v, w \in V(H)$ (posiblemente $u = w$) tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(H)$ tenemos que $(u, w) \in F(H)$ (cuando $u = w$ y $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(H)$ tenemos que $\{(u, u), (v, v)\} \subseteq F(H)$).

Definición. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Sean D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D . Diremos que $P = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D si:

1. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$.
2. Cada H -trayectoria de D está contenida en D_1 o está contenida en D_2 .

Las siguientes definiciones implican las definiciones de H -subdivisión de C_3 y H -subdivisión de P_3 .

Definición. Diremos que $[u, v, w, u]$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 si existen:

1. T_1 : H -trayectoria de u a v contenida en D_1 ,
2. T : H -trayectoria de v a w contenida en D y
3. T_2 : H -trayectoria de w a u contenida en D_2 .

que satisfacen:

- i) $(c(\text{flecha final de } T_1), c(\text{flecha inicial de } T)) \notin F(H)$, $(c(\text{flecha final de } T), c(\text{flecha inicial de } T_2)) \notin F(H)$ y $(c(\text{flecha final de } T_2), c(\text{flecha inicial de } T_1)) \notin F(H)$;
- ii) $T_1 \cup T \cup T_2$ es un ciclo contenido en D .

Definición. Diremos que $[u, v, w, x]$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 si existen:

1. T_1 : H -trayectoria de u a v contenida en D_1 ,
2. T : H -trayectoria de v a w contenida en D y.
3. T_2 : H -trayectoria de w a x contenida en D_2 .

tal que:

- i) $(c(\text{flecha final de } T_1), c(\text{flecha inicial de } T)) \notin F(H)$ y $(c(\text{flecha final de } T), c(\text{flecha inicial de } T_2)) \notin F(H)$;
- ii) $T_1 \cup T \cup T_2$ es una trayectoria contenida en D .

Con ayuda de estas definiciones probaremos el resultado principal del capítulo 3:

Teorema 2.0.8. *Sean H una digráfica fuertemente transitiva, D una digráfica H -coloreada y $P = \{D_1, D_2\}$ una H -separación de D y se satisface lo siguiente:*

1. *Cada ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo con $i \in \{1, 2\}$.*
2. *D no contiene una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 .*
3. *Si $[u, z, w, x_0]$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 entonces existe alguna de las siguientes H -trayectorias: una H -trayectoria de u a x_0 o una H -trayectoria de x_0 a u .*

Entonces D tiene H -núcleo por trayectorias.

Notemos que las condiciones que se piden en el teorema 2.0.8 implican las condiciones del teorema 2.0.7 ya que:

1. i) Sean H y D dos digráficas. Una digráfica D m -coloreada es una digráfica H -coloreada. ii) En particular, si H es la digráfica que consiste únicamente de lazos, ve figura 2.3, se satisface que todo H -camino (H -trayectoria o H -ciclo) en D es un camino monocromático (trayectoria monocromática o ciclo monocromático) en D y viceversa. Claramente H es una digráfica fuertemente transitiva.

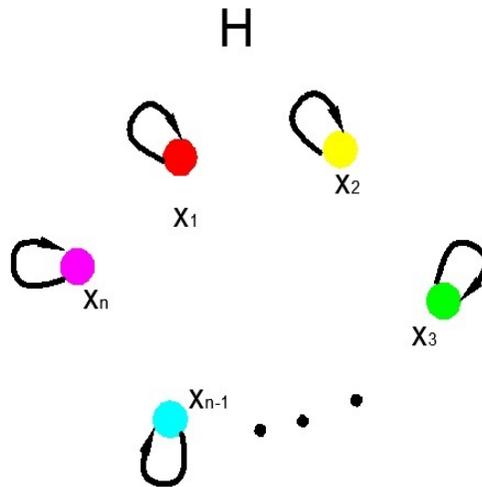


Figura 2.3: H es la digráfica que consiste únicamente de lazos.

2. En la literatura de digráficas m -coloreadas cuando se haga referencia que dos caminos monocromáticos (ciclos monocromáticos o trayectorias monocromáticas), digamos T_1 y T_2 son coloreados con distinto color, diremos que esto será interpretado en digráficas H -coloreadas como dos H -caminos (H -ciclos o H -trayectorias) T_1 y T_2 tal que $(c(\text{flecha final de } T_1), c(\text{flecha inicial de } T_2)) \notin F(H)$.
3. Si $C(D)$ no contiene triángulos heterocromáticos ni P_3 heterocromáticos esto se interpretará como que D no contiene una (D_1, D, D_2) subdivisión de C_3 3-coloreada ni una (D_1, D, D_2) subdivisión de P_3 3-coloreada.

Cabe mencionar que en este trabajo introduciremos el siguiente concepto:

Un γ - H -ciclo en D es una sucesión de vértices distintos de D , $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n = u_0)$ tal que cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ satisface: 1) Existe una $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria contenida en D . 2) No existe una $u_{i+1} u_i$ - H -trayectoria contenida en D .

El objetivo del capítulo 4 en un principio era realizar una generalización del teorema 2 al sustituir la definición de H -ciclo por la definición de γ - H -ciclo, pero observamos que podíamos obtener un mejor resultado si definíamos ciertas estructuras. En este momento

no daremos dichas estructuras ni el teorema porque ambos son muy técnicos, pero en el desarrollo del capítulo están explicadas formalmente.

En el capítulo 5, damos una lista de teoremas previos que satisfacen no contener $\gamma - H$ -ciclos los cuales pueden ser aplicados al teorema principal del capítulo 4.

Capítulo 3

H -ciclos y H -trayectorias.

En este capítulo se dará una generalización del resultado de H. Galeana-Sánchez, G. Gaytán-Gómez y R. Rojas-Monroy [23], este es una extensión del teorema de Sands, Sauer y Woodrow [50], el cual se puede escribir en términos de núcleos: Si D es una digráfica cuyas flechas son coloreadas con dos colores, tal que D no contiene trayectorias infinitas exteriores monocromáticas, entonces la cerradura transitiva de D , $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo. Más aún, $\mathcal{C}(D)$ es núcleo perfecta.

A partir de este capítulo, cuando hagamos referencia a un camino (ciclo o trayectoria) nos referiremos a un camino dirigido (ciclo dirigido o trayectoria dirigida). Denotaremos por \triangleleft el final de la demostración de una afirmación. Utilizaremos ff y fi para denotar flecha final y flecha inicial, respectivamente.

Los siguientes lemas serán de gran utilidad en la demostración del teorema principal de este capítulo.

Definición 3.0.4. Sean C_1 un uv -camino, $C_1 = (u = u_0, \dots, u_n = v)$ y C_2 un vw -camino, $C_2 = (v = v_0, \dots, v_n = w)$. La concatenación de C_1 y C_2 , denotada por $C_1 \mathring{\cup} C_2$, es el uw -camino $(u = u_0, \dots, u_n = v = v_0, \dots, v_n = w)$.

Teorema 3.0.9. Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada tal que todo ciclo en D es un H -ciclo. Si $C = (u_0, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión de $n \geq 2$ vértices distintos dos a dos, tal que para cada $i \in \{0, \dots, n-1\} \pmod{n}$ existe alguna $u_i u_{i+1}$ - H -trayectoria, llamémosle T_i , entonces la concatenación de las H -trayectorias T_0, \dots, T_{n-1} ($T_0 \mathring{\cup} T_1 \mathring{\cup} \dots \mathring{\cup} T_{n-1}$) es un H -camino cerrado.

Demostración. Probaremos que $(c(ff \text{ de } T_i), c(fi \text{ de } T_{i+1})) \in F(H)$.

Procederemos por inducción sobre n ($n \geq 2$, el número de vértices en la sucesión C distintos dos a dos). Supongamos que $n = 2$.

Caso i) $(V(T_0) \cap V(T_1)) - \{u_0, u_1\} = \emptyset$.

Como $(V(T_0) \cap V(T_1)) - \{u_0, u_1\} = \emptyset$, entonces en D , $T_0 \dot{\cup} T_1$ es un ciclo, el cual por hipótesis es un H -ciclo. Así, la concatenación $T_0 \dot{\cup} T_1$ es un H -camino cerrado, ve figura 3.1.

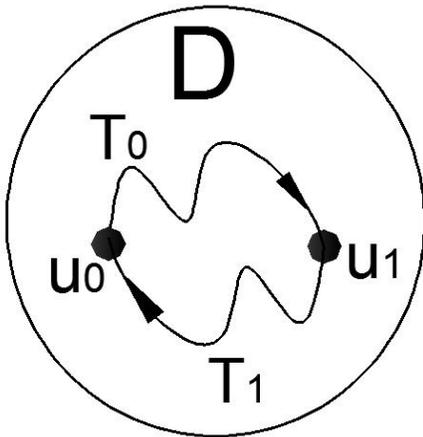


Figura 3.1: T_0, T_1 son dos trayectorias que no se intersectan

Caso ii) $(V(T_0) \cap V(T_1)) - \{u_0, u_1\} \neq \emptyset$.

Basta probar que: $(c(\text{ff de } T_0), c(\text{fi de } T_1)) \in F(H)$ y $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_0)) \in F(H)$.

Sean w el primer vértice de T_0 que está en T_1 distinto de u_0 y v el último vértice de T_0 que está en T_1 distinto de u_1 (posiblemente $v = w$). Entonces $(w, T_1, u_0) \cup (u_0, T_0, w)$ y $(v, T_0, u_1) \cup (u_1, T_1, v)$ son ciclos, los cuales por hipótesis son H -ciclos. Luego, la concatenación $T_0 \dot{\cup} T_1$ es un H -camino cerrado, ve figura 3.2.

De los casos i) y ii) concluimos la base de inducción para $n = 2$.

Supongamos que el teorema 3.0.9 es cierto para sucesiones C' como en la hipótesis, con a lo más $n - 1$ vértices. Sea C una sucesión de n vértices que satisface las hipótesis del teorema 3.0.9.

Analizaremos dos posibles casos:

Caso 1) Existe una concatenación $T_i \dot{\cup} T_{i+1}$ para alguna $i \in \{0, \dots, n - 1\} \pmod{n}$ tal que es un H -camino, es decir, que $(c(\text{ff de } T_i), c(\text{fi de } T_{i+1})) \in F(H)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 0$. Entonces en D , $T_0 \dot{\cup} T_1$ es un $u_0 u_2 - H$ -

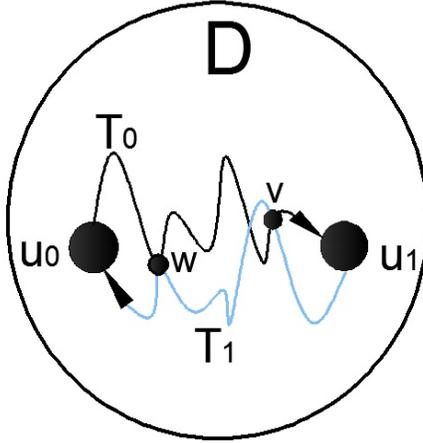


Figura 3.2: T_0, T_1 son dos trayectorias que se intersectan

camino y por el lema 1.2.2, contiene una $u_0u_2 - H$ -trayectoria en D , llamémosle T'_0 a la $u_0u_2 - H$ -trayectoria.

Sea $C' = (u_0, u_2, u_3, \dots, u_{n-1})$ una sucesión de $n - 1$ vértices distintos dos a dos y $T'_0, T_2, \dots, T_{n-1}$ es una sucesión de trayectorias que satisfacen las hipótesis del teorema 3.0.9. Entonces por la hipótesis de inducción, la concatenación $T'_0 \mathring{\cup} T_2 \mathring{\cup} \dots \mathring{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino cerrado. Luego, la concatenación $T_0 \mathring{\cup} T_1 \mathring{\cup} T_2 \mathring{\cup} \dots \mathring{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino cerrado.

Caso 2) Para cada $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, la concatenación $T_i \mathring{\cup} T_{i+1} \pmod{n}$ no es un H -camino.

Afirmación 1. $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) = \emptyset$ para cada $i \in \{0, \dots, n - 1\} \pmod{n}$

Demostración de la Afirmación 1. Procederemos por contradicción. Supongamos que para alguna $i \in \{0, \dots, n - 1\} \pmod{n}$, $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) \neq \emptyset$.

Sea v el último vértice de T_i que está en T_{i+1} distinto de u_{i+1} entonces $(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un ciclo, el cual por hipótesis es un H -ciclo. Entonces, la concatenación $T_i \mathring{\cup} T_{i+1}$, que es un $u_i u_{i+2} - H$ -camino, esto contradice la suposición del Caso 2). Así, $(V(T_i) - \{u_{i+1}\}) \cap V(T_{i+1}) = \emptyset$ para toda $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, ve figura 3.3. \triangleleft

Afirmación 2. $V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset$ para cualesquiera i, j tales que $j - i \geq 2 \pmod{n}$.

Demostración de la Afirmación 2. Procederemos por contradicción. Supongamos que $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$ para algunas i, j tales que $j - i \geq 2 \pmod{n}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 0$ y sea $j_0 = \max\{j : V(T_0) \cap V(T_j) \neq \emptyset\}$; notemos que $2 \leq j_0 \leq n - 2$, ya que j_0 no puede ser 1 ni $n - 1$ (por la suposición del Caso 2). Sea $v \in V(T_0) \cap V(T_{j_0})$ entonces en D tenemos que $T'_0 = (u_0, T_0, v)$ es

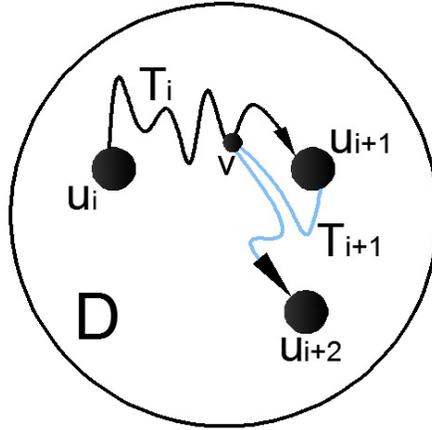


Figura 3.3: $(v, T_i, u_{i+1}) \cup (u_{i+1}, T_{i+1}, v)$ es un ciclo

una H -trayectoria y $T'_{j_0} = (v, T_{j_0}, u_{j_0+1})$ es una H -trayectoria, ve figura 3.4. Así $C' = (u_0, v, u_{j_0+1}, u_{j_0+2}, \dots, u_{n-1})$ es una sucesión de a lo más $n - 1$ vértices distintos dos a dos y $T'_0, T'_{j_0}, T_{j_0+1}, \dots, T_{n-1}$ es una sucesión de trayectorias que satisfacen las hipótesis del teorema 3.0.9. Por hipótesis de inducción, la concatenación $T'_0 \dot{\cup} T'_{j_0} \dot{\cup} T_{j_0+1} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino cerrado. Como $j_0 \leq n - 2$, entonces la concatenación $T_{n-2} \dot{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino (esto contradice la suposición del Caso 2)). Queda demostrada la Afirmación 2. \triangleleft

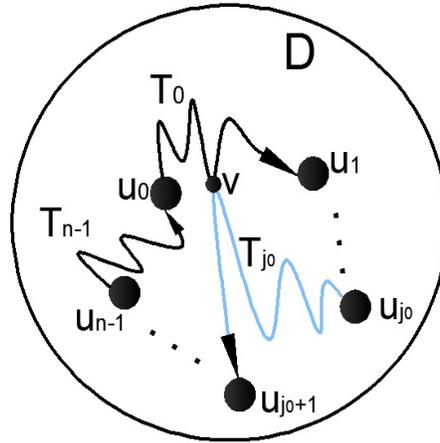


Figura 3.4: $T'_0 = (u_0, T_0, v)$ y $T'_{j_0} = (v, T_{j_0}, u_{j_0+1})$ son H -trayectorias

Por la Afirmación 1, tenemos que cualesquiera dos trayectorias T_i, T_{i+1} no tienen vértices en común excepto al vértice u_{i+1} . Por la Afirmación 2, tenemos que cualesquiera dos trayectorias T_i, T_j para todas i, j tales que $j - i \geq 2 \pmod n$ no se intersectan en ningún vértice, entonces en D , $\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i$ es un ciclo el cual por hipótesis es un H -ciclo. Así, la concatenación $T_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino cerrado.

De los casos 1) y 2) concluimos que la concatenación $T_0 \dot{\cup} T_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino

cerrado, lo que demuestra el teorema. \square

Lema 3.0.10. *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica finita H -coloreada tal que todo ciclo en D es un H -ciclo. Entonces no existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, \dots) tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en D .*

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que existe una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para toda $i \in \{0, 1, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en D .

Como D es una digráfica finita, existe $i < j$ con $i, j \in \{0, 1, \dots\}$ tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j : x_j = x_i \text{ para alguna } i < j\}$ e $i_0 \in \{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$ tales que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único ya que de lo contrario existiría $x_{k_0} = x_{i_0} = x_{j_0}$ con $k_0 \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $i_0 < k_0 < j_0$, esto contradice el hecho que x_{j_0} sea el primer vértice igual a x_i con $i < j_0$. Así, i_0 es único.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$ y $j_0 = n$. Así que $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ es una sucesión de n vértices distintos dos a dos, tales que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ existe una $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria en D . Sea T_i alguna $x_i x_{i+1}$ - H -trayectoria contenida en D . Por el teorema 3.0.9, se sigue que toda concatenación $T_0 \hat{\cup} T_1 \hat{\cup} \dots \hat{\cup} T_{n-1}$ es un H -camino cerrado.

Por lo tanto, la concatenación $T_1 \hat{\cup} T_2 \hat{\cup} \dots \hat{\cup} T_{n-1}$ es un $x_1 x_0$ - H -camino en D . Por el lema 1.2.2, contiene una $x_1 x_0$ - H -trayectoria en D , esto es una contradicción a la suposición de que no existe ninguna $x_{i+1} x_i$ - H -trayectoria contenida en D . El lema queda demostrado. \square

Lema 3.0.11. *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada tal que todo ciclo en D es un H -ciclo. Entonces existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$, si existe una $x_0 z$ - H -trayectoria contenida en D , entonces existe una $z x_0$ - H -trayectoria contenida en D .*

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que para cada $x_0 \in V(D)$ existe $z \in V(D) - \{x_0\}$ tal que existe una $x_0 z$ - H -trayectoria contenida en D y no existe una $z x_0$ - H -trayectoria contenida en D .

Sea $x_0 \in V(D)$, se sigue de la suposición que existe $x_1 \in V(D) - \{x_0\}$ tal que existe una $x_0 x_1$ - H -trayectoria contenida en D y no existe una $x_1 x_0$ - H -trayectoria contenida en D . De nuevo, por la suposición existe $x_2 \in V(D) - \{x_1\}$ tal que existe una $x_1 x_2$ - H -trayectoria y no existe una $x_2 x_1$ - H -trayectoria en D . Una vez elegidos de este modo $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, y dada nuestra suposición, podemos elegir $x_{n+1} \in V(D) - \{x_n\}$ de tal forma que existe una

$x_n x_{n+1} - H$ -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{n+1} x_n - H$ -trayectoria en D . De este modo, obtenemos una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_i x_{i+1} - H$ -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{i+1} x_i - H$ -trayectoria en D . Pero esto contradice el lema 3.0.10.

Así que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$ existe una $x_0 z - H$ -trayectoria contenida en D y entonces existe una $z x_0 - H$ -trayectoria contenida en D , por lo que queda demostrado el lema. \square

Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada tal que existen dos subdigráficas generadoras de D , D_1 y D_2 tales que $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y $c(D_1) \cap c(D_2) = \emptyset$.

Definición 3.0.5. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $N \subseteq V(D)$. Diremos que N es un H -núcleo por trayectorias (caminos) en D si:

1. Para cada $u, v \in N$ no existe una H -trayectoria (camino) de u a v (N es H -independiente por trayectorias (caminos)).
2. Para cada $x \in V(D) \setminus N$ existe una $xy - H$ -trayectoria (camino) para algún $y \in N$ (N es H -absorbente por trayectorias (caminos)).

Notación. Sean D una digráfica, $s \in S \subseteq V(D)$, $z \in V(D) - S$ y α una $sz - H$ -trayectoria. Diremos que α es una $Sz - H$ -trayectoria.

Como se comento en el capítulo 2, no toda digráfica tiene núcleo, aunque se ha demostrado que casi todas las digráficas tienen uno. También se han definido generalizaciones del concepto de núcleo como las de seminúcleo y seminúcleo módulo F , esto ha llevado a obtener condiciones más débiles pero suficiente para la existencia de núcleo en una digráfica.

Neumann-Lara [45], introduce el concepto de seminúcleo y da condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta.

Definición 3.0.6. Sean H una digráfica, D una digráfica H -coloreada y $S \subseteq V(D)$. Diremos que S es un H -seminúcleo por trayectorias módulo D_2 (respectivamente D_1) de D si:

1. S es H -independiente por trayectorias.
2. Para cada $z \in V(D) - S$, si existe una $Sz - H$ -trayectoria contenida en D_1 (respectivamente D_2), entonces existe una $zS - H$ -trayectoria contenida en D .

Teorema 3.0.12. (Neumann-Lara, [45]) *Todas las subdigráficas inducidas de una digráfica tienen seminúcleo si y sólo si la digráfica es núcleo perfecta.*

Posteriormente, Galeana-Sánchez [21] introduce el concepto de seminúcleo módulo F , D_2 , de una digráfica D , con F un conjunto de flechas de D , es un conjunto de vértices independientes tal que si existe una (S, u) -flecha en el complemento de F , entonces existe una (u, S) -flecha en D . Geleana-Sánchez también da condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta.

Ejemplo 2. Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada, ve figura 3.5. Dadas D_1, D_2 subdigráficas generadoras de D , ve figura 3.6. Es fácil verificar que $S = \{x_2, x_4, x_6\}$ es un H -seminúcleo por trayectorias módulo D_2 de D para H .

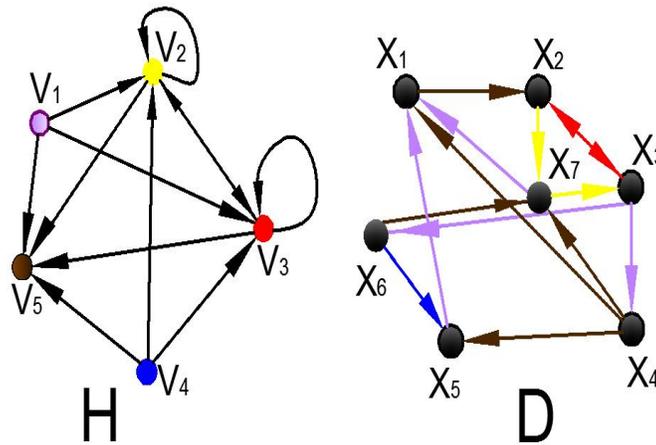


Figura 3.5: H una digráficas fuertemente transitiva y D digráfica H -coloreada.

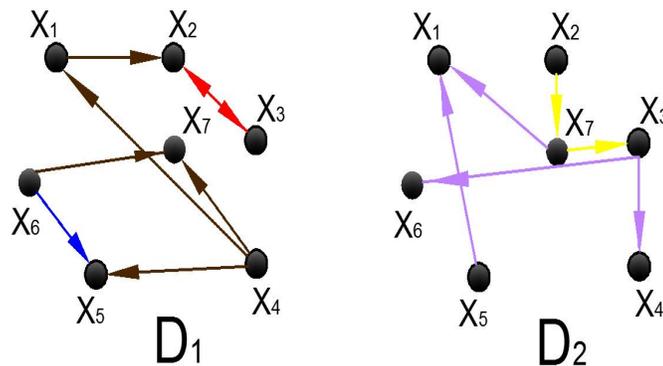


Figura 3.6: D_1, D_2 subdigráficas generadoras de D

Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada que contiene al menos un H -seminúcleo no vacío por trayectorias mod D_2 de D y $\mathbf{S} = \{ \emptyset \neq S \subseteq V(D) : S$

es H -seminúcleo por trayectorias mod D_2 de D . Denotaremos por $D_{\mathbf{S}}$ la digráfica definida como sigue: $V(D_{\mathbf{S}}) = \mathbf{S}$ (es decir, por cada elemento de \mathbf{S} ponemos un vértice en $D_{\mathbf{S}}$) y $(S_1, S_2) \in F(D_{\mathbf{S}})$ si y sólo si para cada $s_1 \in S_1$ existe $s_2 \in S_2$ tal que $s_1 = s_2$ o existe una $s_1 s_2 - H$ -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $s_2 S_1 - H$ -trayectoria contenida en D .

Lema 3.0.13. *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada tal que:*

1. *existen dos subdigráficas generadoras D_1 y D_2 de D tales que $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$ y $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y*
2. *todo ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo con $i \in \{1, 2\}$.*

Entonces D tiene un H -seminúcleo no vacío módulo D_2 (respectivamente D_1).

Demostración. Por hipótesis, tenemos que todo ciclo contenido en D_1 es un H -ciclo. Como se satisfacen las hipótesis del lema 3.0.11. En particular, para la subdigráfica D_1 , entonces existe $x \in V(D_1)$ tal que para cada $y \in V(D_1) - \{x\}$, si existe una $xy - H$ -trayectoria contenida en D_1 , entonces existe una $yx - H$ -trayectoria en D_1 . Así que existe una $yx - H$ -trayectoria en D . Y claramente $\{x\}$ es H -independiente por trayectorias.

Por lo tanto, existe $N = \{x\} \subseteq V(D)$ que satisface que es un H -seminúcleo no vacío mod D_2 . De manera análoga, se concluye que existe $N = \{x\} \subseteq V(D)$ que satisface que es un H -seminúcleo no vacío mod D_1 . \square

Lema 3.0.14. *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada tal que:*

1. *existen dos subdigráficas generadoras de D , D_1 y D_2 tales que $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$ y*
2. *todo ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo con $i \in \{1, 2\}$.*

Entonces $D_{\mathbf{S}}$ es una digráfica que no contiene ciclos.

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $D_{\mathbf{S}}$ es una digráfica que contiene algún ciclo. Sea $C = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_0)$ un ciclo en $D_{\mathbf{S}}$ de longitud $n \geq 2$. Como C es un ciclo en $D_{\mathbf{S}}$, tenemos que $S_i \neq S_j$ siempre que $i \neq j$ con $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Afirmación 1. Existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que para alguna $z \in S_{i_0}$, $z \notin S_{i_0+1} \pmod{n}$.

Demostración de la Afirmación 1. Procederemos por contradicción. Supongamos que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y para cada $z \in S_i$ se tiene que $z \in S_{i+1} \pmod{n}$. Entonces $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0$. Así que $S_0 \subseteq S_k \subseteq S_0$ para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$ y se sigue que $S_0 = S_k$ para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Así, $S_i = S_j$ para toda $i, j \in \{0, \dots, n-1\} \pmod{n}$. Así que $C = (S_0)$, lo cual es una contradicción ya que un ciclo posee al menos 2 vértices. \triangleleft

Afirmación 2. Si existe $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que para algunos $z \in S_{i_0}$ y $w \in S_{i_0+1} \pmod{n}$ se tiene que existe una $zw-H$ -trayectoria contenida en D , entonces existe $j_0 \neq i_0$, $j_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1} \pmod{n}$.

Demostración de la Afirmación 2. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $i_0 = 0$. Sean $z \in S_0$ y $w \in S_1$ tales que existe una $zw-H$ -trayectoria contenida en D . Si $w \notin S_2$ habremos probado la Afirmación 2 con $j_0 = 1$. Podemos suponer que $w \in S_2$. Si $w \notin S_3$ habremos probado la Afirmación 2 con $j_0 = 2$. De nuevo podemos suponer que $w \in S_3$, si $w \notin S_4$ se tendría probada la Afirmación 2 con $j_0 = 3$. Repitiendo este procedimiento $n-1$ veces, podemos suponer que $w \in S_0$ (ya que de lo contrario $w \notin S_0$ y habríamos demostrado la Afirmación 2 con $j_0 = n-1$). Por hipótesis de la Afirmación 2, existe una $zw-H$ -trayectoria con $z, w \in S_0$, esto es una contradicción ya que por hipótesis, S_0 es H -independiente por trayectorias. Con esto queda demostrada la Afirmación 2. \triangleleft

Por la Afirmación 1, tenemos que existe $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ y $t_0 \in S_{i_0}$ tal que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Como $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in F(D_{\mathbf{S}})$, se tiene que existe $t_1 \in S_{i_0+1}$ tal que existe una t_0t_1-H -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $t_1S_{i_0}-H$ -trayectoria en D . Por la Afirmación 2, se sigue que existe un índice $i_1 \neq i_0$, $i_1 \in \{0, \dots, n-1\}$, tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1} \pmod{n}$. Como $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in F(D_{\mathbf{S}})$, entonces existe un $t_2 \in S_{i_1+1}$ tal que existe una t_1t_2-H -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $t_2S_{i_1}-H$ -trayectoria contenida en D . De nuevo por la Afirmación 2, tenemos que existe un índice $i_2 \neq i_1$, $i_2 \in \{0, \dots, n-1\}$, tal que $t_2 \in S_{i_2}$ y $t_2 \notin S_{i_2+1}$. Como $(S_{i_2}, S_{i_2+1}) \in F(D_{\mathbf{S}})$, tenemos que existe un $t_3 \in S_{i_2+1}$ tal que existe una t_2t_3-H -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $t_3S_{i_2}-H$ -trayectoria contenida en D . Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de vértices (t_0, t_1, \dots) tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots\}$ existe una $t_it_{i+1}-H$ -trayectoria contenida en D (ya que existe una $t_it_{i+1}-H$ -trayectoria contenida en D_2) y no existe ninguna $t_{i+1}t_i-H$ -trayectoria contenida en D (ya que no existe ninguna $t_{i+1}S_i-H$ -trayectoria contenida en D). Esto contradice el lema 3.0.10, por lo que $D_{\mathbf{S}}$ es una digráfica que no contiene ciclos. \square

Definición 3.0.7. Diremos que $[u, v, w, u]$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 si existen:

1. T_1 : H -trayectoria de u a v contenida en D_1 ,

2. T : H -trayectoria de v a w contenida en D y
3. T_2 : H -trayectoria de w a u contenida en D_2 .

que satisfacen:

- i) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T)) \notin F(H)$, $(c(\text{ff de } T), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$ y $(c(\text{ff de } T_2), c(\text{fi de } T_1)) \notin F(H)$;
- ii) $T_1 \cup T \cup T_2$ es un ciclo contenido en D .

Definición 3.0.8. Diremos que $[u, v, w, x]$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 si existen:

1. T_1 : H -trayectoria de u a v contenida en D_1 ,
2. T : H -trayectoria de v a w contenida en D y
3. T_2 : H -trayectoria de w a x contenida en D_2 .

tal que:

- i) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T)) \notin F(H)$ y $(c(\text{ff de } T), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$;
- ii) $T_1 \cup T \cup T_2$ es una trayectoria contenida en D .

Definición 3.0.9. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Sean D_1 y D_2 subdigráficas generadoras de D . Diremos que $P = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D si:

1. $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$.
2. Cada H -trayectoria de D está contenida en D_1 o está contenida en D_2 .

Lema 3.0.15. Sean H una digráfica fuertemente transitiva, D una digráfica H -coloreada y $P = \{D_1, D_2\}$ una H -separación de D . Entonces para cualesquiera vértices $u, v \in V(D)$ no existe un $uv - H$ -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 .

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que existen $u, v \in V(D)$ tal que existe un $uv - H$ -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 . Por el lema 1.2.2, D contiene una $uv - H$ -trayectoria que interseca a D_1 e interseca a D_2 , esto no es posible ya que $P = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D .

Por lo tanto, no existe un $uv - H$ -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 . \square

3.1. Primer resultado

Teorema 3.1.1. Sean H una digráfica fuertemente transitiva, D una digráfica H -coloreada y $P = \{D_1, D_2\}$ una H -separación de D tal que:

1. Cada ciclo de D contenido en D_i es un H -ciclo con $i \in \{1, 2\}$.
2. D no contiene una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 .
3. Si $[u, z, w, x_0]$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 , entonces existe una H -trayectoria entre u y x_0 .

Entonces D tiene un H -núcleo por trayectorias.

Demostración. Idea general de la demostración. Vamos a construir un seminúcleo S' que es exvecino de $S \in V(D_S)$, esto contradice que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$.

Como la digráfica D satisface las hipótesis del lema 3.0.13, tenemos que D tiene al menos un H -seminúcleo no vacío mod D_i con $i \in \{1, 2\}$. Entonces podemos considerar la digráfica D_S de la digráfica D . Como D_S es una digráfica finita y no contiene ciclos, por el lema 3.0.14, se sigue del teorema 1.0.3, que D_S contiene al menos un vértice de exgrado cero. Sea $S \in V(D_S)$ tal que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$.

Afirmación 1 S es un H -núcleo por trayectorias en D .

Procederemos por contradicción. Supongamos que S no es H -núcleo por trayectorias en D . Como $S \in V(D_S)$, tenemos que S es H -independiente por trayectorias.

Sea $X = \{z \in V(D) : \text{no existe } zS - H\text{-trayectoria contenida en } D\}$.

Se sigue de nuestra suposición que $X \neq \emptyset$ (ya que S no es H -núcleo por trayectorias). Consideremos a $D[X]$. Como $D[X]$ satisface las hipótesis del teorema y en particular la subdigráfica de $D_1[X]$ en $D[X]$ satisface las hipótesis del lema 3.0.11, tenemos que existe $x_0 \in X$ tal que para cada $z \in X - \{x_0\}$ se satisface que si existe una $x_0z - H$ -trayectoria contenida en $D_1[X]$, entonces existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en $D_1[X]$.

Sea $T = \{u \in S : \text{no existe } ux_0 - H\text{-trayectoria contenida en } D_2\}$.

Por como definimos T , tenemos que para cada $w \in (S - T)$ existe $wx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 .

Afirmación 2. $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente por trayectorias.

Demostración. Claramente T es H -independiente por trayectorias (ya que $T \subseteq S$ y $S \in \mathbf{S}$) y $\{x_0\}$ es H -independiente por trayectorias.

Afirmación 2.1) No existen $T\{x_0\}$ – H -trayectorias contenidas en D .

Demostración de la Afirmación 2.1). Procederemos por contradicción. Supongamos que existe alguna $u\{x_0\}$ – H -trayectoria contenida en D , digamos γ con $u \in T$. Como definimos T (tenemos que $\gamma \not\subseteq D_2$) y ya que $P = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D , tenemos que $\gamma \subseteq D_1$. Como $T \subseteq S$ y $S \in \mathbf{S}$, se sigue que existe una $\{x_0\}S$ – H -trayectoria contenida en D . Así que $x_0 \notin X$ por como definimos X , esto es una contradicción ya que $x_0 \in X$. Esto demuestra la Afirmación 2.1). \triangleleft

Afirmación 2.2) No existen $\{x_0\}T$ – H -trayectorias contenidas en D .

Demostración de la Afirmación 2.2). Como $T \subseteq S$ y $x_0 \in X$, se sigue que no existe ninguna $\{x_0\}T$ – H -trayectoria contenida en D . Esto demuestra la Afirmación 2.2). \triangleleft

De las Afirmaciones 2.1) y 2.2) queda demostrada la Afirmación 2. \triangleleft

Afirmación 3. Si existe una $(T \cup \{x_0\})z$ – H -trayectoria en D_1 , entonces existe una $z(T \cup \{x_0\})$ – H -trayectoria contenida en D .

Demostración.

Caso 1) Existe una Tz – H -trayectoria contenida en D_1 .

Como $T \subseteq S$ y $S \in \mathbf{S}$, entonces existe una zS – H -trayectoria contenida en D . Si existe una zT – H -trayectoria en D , habremos demostrado la Afirmación 3. Podemos suponer que existe una $z(S - T)$ – H -trayectoria contenida en D . Sean α_1 una uz – H -trayectoria contenida D_1 con $u \in T$ y α_2 una zw – H -trayectoria contenida en D con $w \in (S - T)$. Como $w \in (S - T)$, tenemos por la definición de T que existe α_3 una wx_0 – H -trayectoria contenida en D_2 .

Podemos suponer que $x_0 \notin V(\alpha_2)$, en caso contrario, (z, α_2, x_0) es una zx_0 – H -trayectoria contenida en D y por lo tanto existe una $z(T \cup \{x_0\})$ – H -trayectoria contenida en D con lo que habríamos demostrado la Afirmación 3. También, podemos suponer que $z \notin V(\alpha_3)$, pues de lo contrario (z, α_3, x_0) es una zx_0 – H -trayectoria en D_2 . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\})$ – H -trayectoria contenida en D , con lo que habríamos demostrado la Afirmación 3.

Observación 1) $\{(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3))\} \not\subseteq F(H)$.

Podemos suponer que $(c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)) \notin F(H)$ de otro modo $(c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)) \in F(H)$, entonces $W = (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un zx_0 – H -camino. Por el lema 1.2.2,

W contiene una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D , así habríamos demostrado la Afirmación 3.

Demostración de la Observación 1). Ahora demostraremos que $(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)) \notin F(H)$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)) \in F(H)$. Entonces existe un $uw - H$ -camino contenido en D y por el lema 1.2.2, existe una $uw - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, esto no es posible ya que $S \in \mathbf{S}$ (S es H -independiente por trayectorias). Con lo que queda demostrada la primera parte y así la Observación 1).

Ahora analizaremos dos posibles casos: $\alpha_2 \subseteq D_1$ y $\alpha_2 \subseteq D_2$.

Caso 1.1) $\alpha_2 \subseteq D_1$.

Primero probaremos que $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$, ve figura 3.7.

Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_1 distinto de z ; $v \neq u$ de lo contrario, existe una $uw - H$ -trayectoria, esto no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias. De manera análoga se demuestra que $v \neq w$. Entonces $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v)$ es un ciclo contenido en D_1 , el cual por hipótesis, es un H -ciclo. Por lo tanto $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w)$ es el $uw - H$ -camino contenido en D_1 . Por el lema 1.2.2, tenemos que existe una $uw - H$ -trayectoria contenida en D_1 . Así que existe una $uw - H$ -trayectoria en D con $\{u, w\} \subseteq S$, esto no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias.

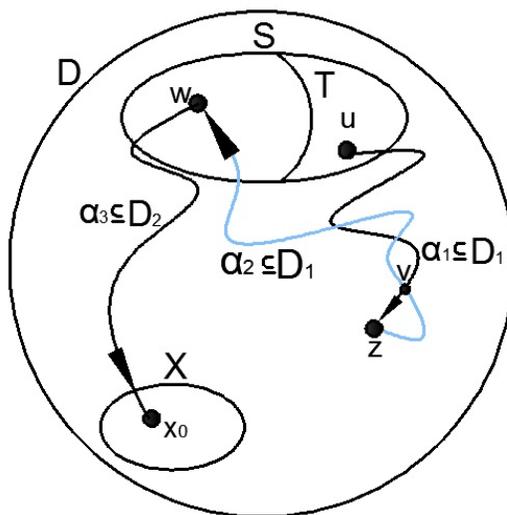


Figura 3.7: $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$

- Ahora analizaremos dos posibles casos: a) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$;
 b) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$.

Caso a) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$.

Consideraremos los siguientes casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$ y ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Como $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D (por construcción), tenemos que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una $(D_1, D, D_2) - H$ -subdivisión de P_3 . Se sigue de las hipótesis, que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $x_0u - H$ -trayectoria contenida en D . Entonces existe una $\{x_0\}T - H$ -trayectoria contenida en D , esto no es posible ya que $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente por trayectorias en D ; **) Existe $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Entonces existe una $T\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , esto no es posible ya que $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente por trayectorias, ve figura 3.8 a).

Caso ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 distinto de z pues ya demostramos que $z \notin V(\alpha_3)$; $v \neq u$ ya que de lo contrario, (w, α_3, u) es una $wu - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, esto no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias. Además $v \neq w$, pues de lo contrario, tendríamos que (u, α_1, w) es una $uw - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, contradiciendo el hecho que S es H -independiente por trayectorias.

Consideremos $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$ y $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, z)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$, ya que de lo contrario existe un $wz - H$ -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Como $\{(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)), (c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3))\} \notin F(H)$ y $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D , por construcción. Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_3$ es una $(D_1, D, D_2) - H$ -subdivisión de C_3 , contradiciendo las hipótesis, ve figura 3.8 b).

Caso b) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$.

Consideremos dos posibles casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$; ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w ; $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ y $v \neq x_0$, ya que $x_0 \notin V(\alpha_2)$.

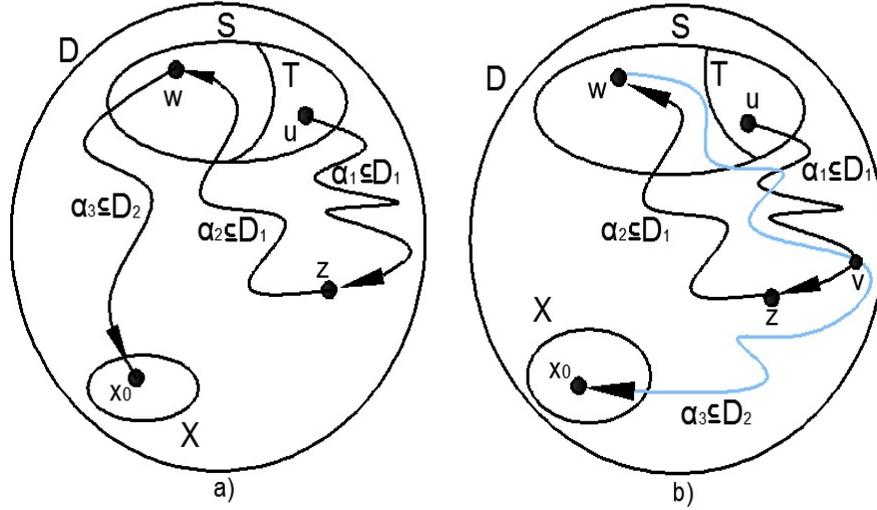


Figura 3.8: Figura a) Caso i). Figura b) Caso ii)

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$ y $\alpha'_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$, ya que de lo contrario, $(z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es un $zx_0 - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , esto contradice el lema 3.0.15.

Así que $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D , por construcción. Entonces $\alpha_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 . Se sigue de las hipótesis, que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una H -trayectoria contenida en D entre u y x_0 . Entonces existe una $T\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , esto contradice la Afirmación 2; **) Existe una H -trayectoria entre x_0 y u . Entonces existe una $\{x_0\}T - H$ -trayectoria contenida en D , esto contradice la Afirmación 2, ve figura 3.9.

Caso ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea v el último vértice de α_3 que está en α_2 distinto de w (notemos que $v \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$ y $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$). Sea x el último vértice de α_3 que está en α_1 con $x \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$. Además $x \neq u$ (pues de lo contrario existe una $wu - H$ -trayectoria contenida en D_2 con $\{u, w\} \subseteq S$, esto no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias).

Caso I) α_3 intersecta primero a v y posteriormente a x .

Consideremos $\alpha'_3 = (v, \alpha_3, x)$, $\alpha'_1 = (x, \alpha_1, z)$ y $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$.

Observemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x)$ es un $zx - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15. También $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(v, \alpha_3, x) \cup (x, \alpha_1, z)$ es

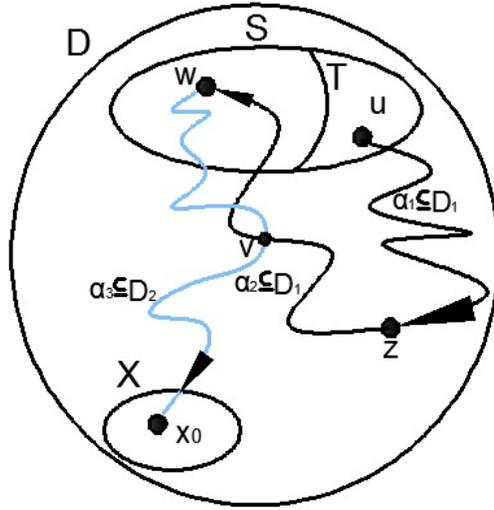


Figura 3.9: Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$

un $vz - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(x, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.10 a).

Caso II) α_3 intersecta primero a x y posteriormente a v .

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$ y $\alpha'_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es un $zx_0 - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice al lema 3.0.15.

Así que $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D (por construcción). Entonces $\alpha_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 . Se sigue de las hipótesis, que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $x_0u - H$ -trayectoria contenida en D . Entonces existe una $T\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2; **) Existe $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Entonces existe una $T\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2, ve figura 3.10 b).

Caso 1.2) $\alpha_2 \subseteq D_2$.

Caso 1.2.1) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_2 distinto de w . Entonces $(v, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$

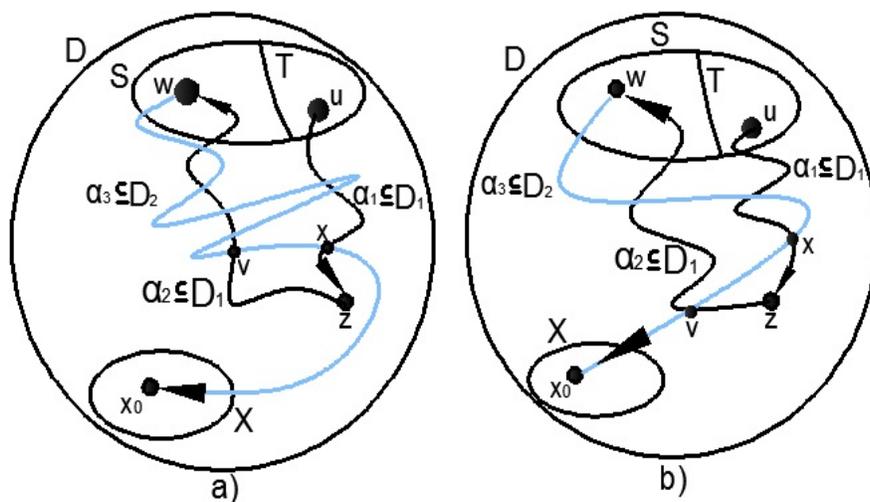


Figura 3.10: a) α_3 intersecta primero a v y posteriormente a x . b) α_3 intersecta primero a x y posteriormente a v .

es un ciclo contenido en D_2 , el cual por hipótesis, es un H -ciclo. Así que $(z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un $zx_0 - H$ -camino contenido en D_2 . Por el lema 1.2.2, tenemos que existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 . Entonces existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D y habríamos demostrado la Afirmación 3, ve figura 3.11.

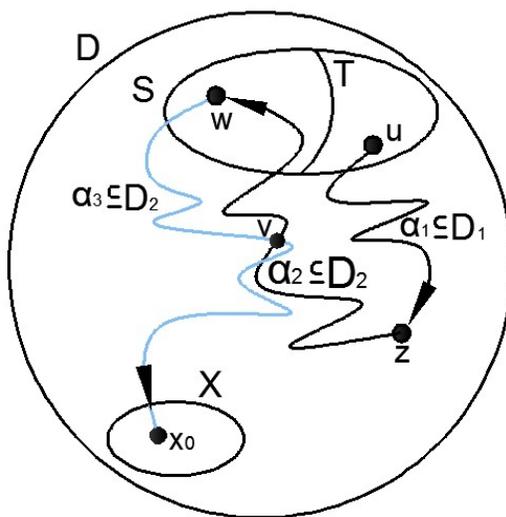


Figura 3.11: $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$.

Caso 1.2.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$.

Consideremos los siguientes casos: a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$; b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$.

Caso a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Tenemos los siguientes casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Como $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, tenemos que $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D .

Así que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 y se sigue de las hipótesis que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una H -trayectoria contenida en D entre u y x_0 . Entonces existe $T\{x_0\}$ – H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2; **) Existe una H -trayectoria entre x_0 y u . Entonces existe $\{x_0\}T$ – H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2, ve figura 3.12 a).

Caso ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 con $v \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$; $v \neq u$ pues de lo contrario existe una wu – H -trayectoria contenida en D_2 con $\{w, u\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H - independiente por trayectorias.

Consideremos $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$ y $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, z)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, z)$ es un wz – H -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D . Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.12 b).

Caso b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$.

Consideremos los siguientes casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$; ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$.

Sea v el último vértice de α_2 que está en α_1 .

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, v)$ y $\alpha'_2 = (v, \alpha_2, w)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario $(u, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, w)$ es un uw – H -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(u, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D por construcción. Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 . Se sigue de las

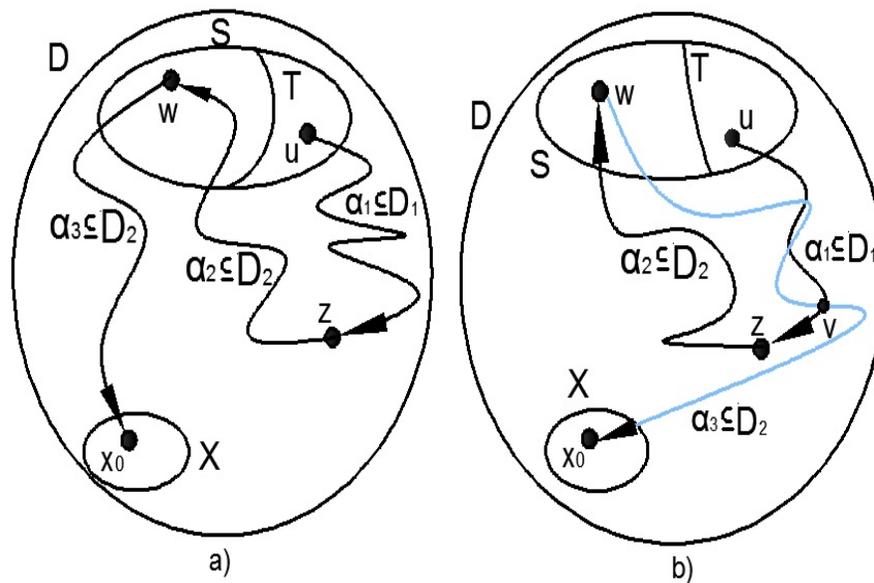


Figura 3.12: a) Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$. b) Caso ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

hipótesis, que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una H -trayectoria contenida en D entre u y x_0 . Entonces existe $T\{x_0\}$ - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2; **) Existe una H -trayectoria entre x_0 y u . Entonces existe $\{x_0\}T$ - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2, ve figura 3.13.

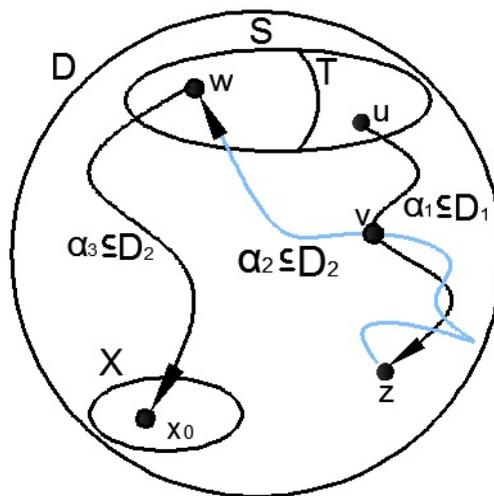


Figura 3.13: Caso i)

Caso ii) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_1 que está en α_3 . Además $v \neq x_0$ ya que de lo contrario, existe una ux_0 - H -trayectoria contenida en D y entonces existe una $T\{x_0\}$ - H -trayectoria

contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2. Por otro lado, $v \neq w$ ya que de lo contrario, existe una $uw - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias. Se tiene que $v \neq u$ pues de lo contrario, existe una $wu - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias. Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 (posiblemente $x = z$; $x \neq w$, de lo contrario existe una $uw - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias; $x \neq u$, de lo contrario existe una $uw - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $\{u, w\} \subseteq S$ ya que S es H -independiente por trayectorias).

Caso I) α_1 intersecta primero a v y posteriormente a x .

Consideremos $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$, $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, x)$ y $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, x)$ es un $wx - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15. También, $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w)$ es un $vw - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.14 a).

Caso II) α_1 intersecta primero a x y posteriormente a v .

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, x)$ y $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w)$ es un $uw - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D por construcción. Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de P_3 . Se sigue de las hipótesis, que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una H -trayectoria contenida en D entre u y x_0 . Entonces existe $T\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2; **) Existe una H -trayectoria entre x_0 y u . Entonces existe $\{x_0\}T - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 2, ve figura 3.14 b).

Caso 2: Existe $x_0z - H$ -trayectoria contenida en D_1 .

Sea α_1 una $x_0z - H$ -trayectoria contenida en D_1 .

Si $z \in X$ y por como elegimos a $x_0 \in X$, tenemos que existe una $zx_0 - H$ -trayectoria

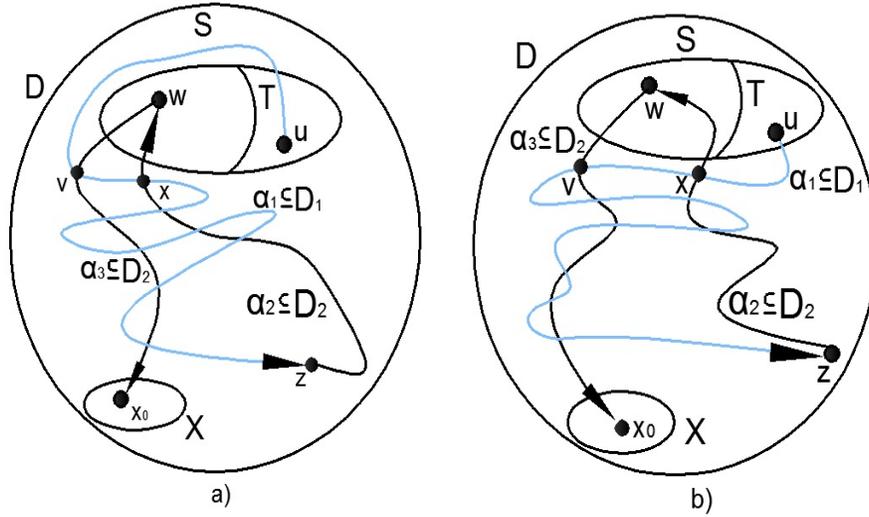


Figura 3.14: a) Caso I) α_1 intersecta primero a v y posteriormente a x . b) Caso II) α_1 intersecta primero a x y posteriormente a v

contenida en D_1 y habremos demostrado la Afirmación 3.

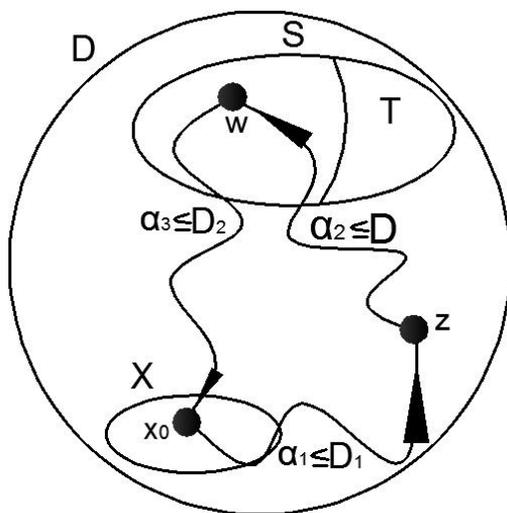
Podemos suponer que $z \notin X$ y por como definimos X , tenemos que existe una $zS - H$ -trayectoria contenida en D . Si existe una $zT - H$ -trayectoria habremos demostrado la Afirmación 3. Así que supongamos que existe una $z(S - T) - H$ -trayectoria contenida en D .

Sea α_2 una $zw - H$ -trayectoria contenida en D con $w \in (S - T)$. Como $w \in (S - T)$ y por la definición de T , tenemos que existe una $wx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 , digamos α_3 , ve figura 3.15.

Podemos suponer que $x_0 \notin V(\alpha_2)$ ya que de lo contrario, (z, α_2, x_0) es una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Entonces existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D con lo que habríamos demostrado la Afirmación 3. También, podemos suponer que $z \notin V(\alpha_3)$ pues de lo contrario, (z, α_3, x_0) es una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D , con lo que habríamos demostrado la Afirmación 3.

Observación 2) $\{(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)), (c(\text{ff de } \alpha_3), c(\text{fi de } \alpha_1))\} \cap F(H) = \emptyset$.

Podemos suponer que $(c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)) \notin F(H)$ ya que de otro modo, $(c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)) \in F(H)$. Entonces existe un $W = zx_0 - H$ -camino contenido en D . Por el lema 1.2.2, contiene una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Así existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D y habríamos demostrado la Afirmación 3.

Figura 3.15: (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3

Demostración de la Observación 2). Primero demostraremos que $(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)) \notin F(H)$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)) \in F(H)$. Entonces existe un x_0w - H -camino contenido en D y por el lema 1.2.2, contiene una x_0w - H -trayectoria contenida en D . Luego existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D con $w \in S$ y $x_0 \in X$, lo cual no es posible por como definimos X . Concluimos que $(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)) \notin F(H)$.

Sólo falta demostrar que $(c(\text{ff de } \alpha_3), c(\text{fi de } \alpha_1)) \notin F(H)$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(c(\text{ff de } \alpha_3), c(\text{fi de } \alpha_1)) \in F(H)$. Entonces existe un wz - H -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15. Con lo que queda demostrada la Observación 2).

Analizaremos 2 posibles casos: 2.1) $\alpha_2 \subseteq D_1$; 2.2) $\alpha_2 \subseteq D_2$.

Caso 2.1) $\alpha_2 \subseteq D_1$.

Primero probaremos que $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$, ve figura 3.16.

Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_1 distinto de z ($v \neq w$ pues de lo contrario, existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D_1). Entonces existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D con $x_0 \in X$ y $w \in S$, lo cual no es posible por como definimos X . Además

$v \neq x_0$ ya que $x_0 \notin V(\alpha_2)$). Así $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v)$ es un ciclo contenido en D_1 , el cual por hipótesis es un H -ciclo y entonces $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w)$ es el x_0w - H -camino contenido en D_1 . Por el lema 1.2.2, tenemos que existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D . Así que existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D con $x_0 \in X$ y $w \in S$, lo cual no es posible por como definimos X .

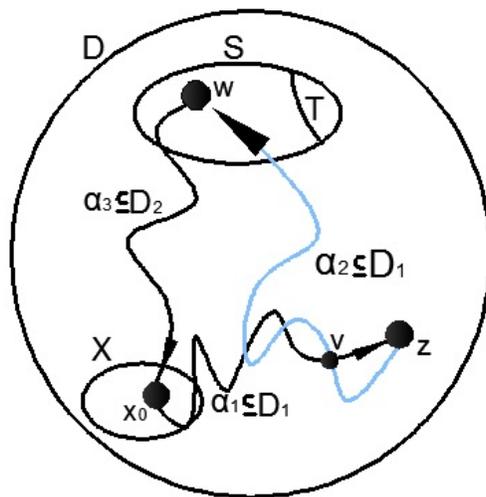


Figura 3.16: $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$

Analizaremos dos posibles casos: a) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y b) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$.

Caso a) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$.

Consideremos los siguientes casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$; ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$.

Como $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$, $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, entonces $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un ciclo contenido en D (por construcción).

Así que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.17 a).

Caso ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 ($v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$). Además $v \neq w$ pues de lo contrario, existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D_1 , entonces existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D con $x_0 \in X$ y $w \in S$, lo cual no es posible por como definimos X).

Consideremos $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$ y $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, z)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, existe un wz - *H*-camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Como $\{(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)), (c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3))\} \not\subseteq F(H)$, entonces $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Así que $\alpha'_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) *H*-subdivisión de C_3 , contradiciendo las hipótesis, ve figura 3.17 b).

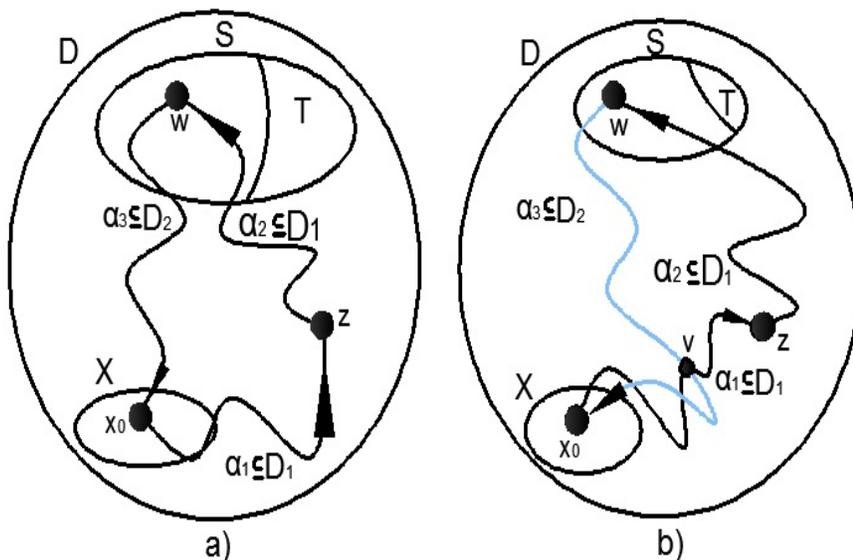


Figura 3.17: a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$; b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso b) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$.

Consideremos dos posibles casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$; ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$.

Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w ($v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$). Además $v \neq x_0$ ya que $x_0 \notin V(\alpha_2)$.

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$ y $\alpha'_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(z, \alpha'_2, v) \cup (v, \alpha'_3, x_0)$ es un zx_0 - *H*-camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.18.

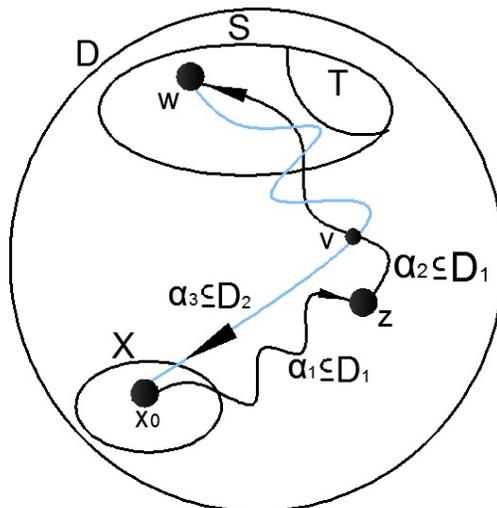


Figura 3.18: Caso i)

Caso ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso I) α_3 intersecciona primero a α_2 y posteriormente a α_1 .

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 ($v \neq w$ ya que de lo contrario, existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D_1). Entonces existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D con $x_0 \in X$ y $w \in S$, lo cual no es posible por como definimos X . Además $v \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$. Sea x el primer vértice de α_3 anterior a v que está en α_2 distinto de w ($x \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$).

Consideremos $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, z)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$ y $\alpha'_3 = (x, \alpha_3, v)$.

Observemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(z, \alpha_2, x) \cup (x, \alpha_3, v)$ es un zv - H -camino que intersecciona a D_1 e intersecciona a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15. También $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(x, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, z)$ es un xz - H -camino que intersecciona a D_1 e intersecciona a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, x) \cup (x, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.19 a).

Caso II) α_3 intersecciona primero a α_1 y posteriormente a α_2 .

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 ($v \neq w$ ya que de lo contrario,

existe una x_0w – H -trayectoria contenida en D_1 . Entonces existe una x_0S – H -trayectoria contenida en D con $x_0 \in X$ y $w \in S$, lo cual no es posible por como definimos X . Además $v \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$.

Consideremos $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, z)$ y $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, z)$ es un wz – H -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Por lo tanto $\alpha'_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.19 b).

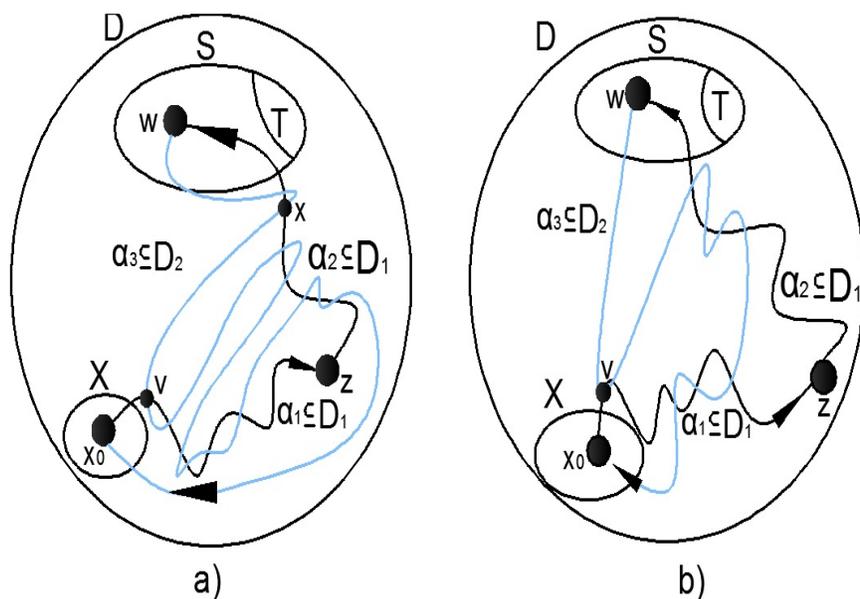


Figura 3.19: a) Caso I) α_3 interseca primero a α_2 y posteriormente a α_1 . b) Caso II) α_3 interseca primero a α_1 y posteriormente a α_2 .

Caso 2.2) $\alpha_2 \subseteq D_2$.

Primero probaremos que $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$, ve figura 3.20.

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_2 distinto de w ($v \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$). Además $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$). Entonces $(v, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D_2 , el cual por hipótesis es un H -ciclo. Así que $(c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)) \in F(H)$, lo cual

contradice la Observación 2. Así, queda demostrada la Afirmación.

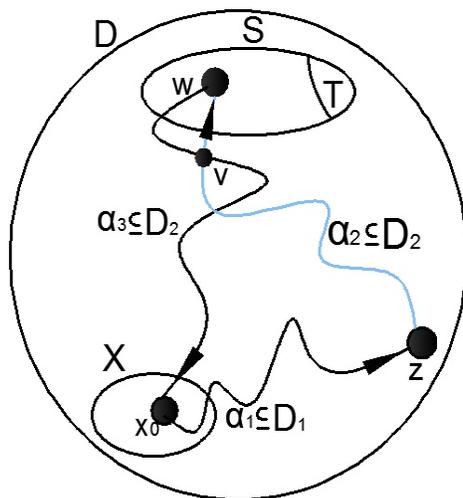


Figura 3.20: $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$

Caso a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Tenemos los siguientes casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$; ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$.

Como $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ y $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$, tenemos que $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un ciclo contenido en D .

Así que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.21 a).

Caso ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 ($v \neq z$ ya que $z \notin V(\alpha_3)$). Además $v \neq w$ pues de lo contrario, existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D_1 con $w \in S$ y $x_0 \in X$. Entonces existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible por como definimos X .

Consideremos $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, z)$ y $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, z)$ es un wz - H -camino que intersecciona a D_1 e intersecciona a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las

hipótesis, ve figura 3.21 b).

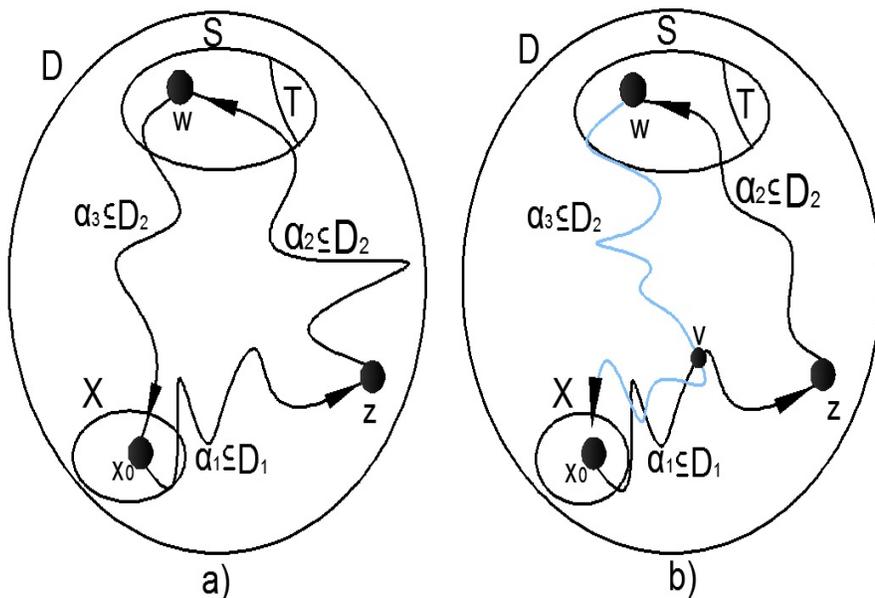


Figura 3.21: a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$. b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$.

Consideremos dos posibles casos: i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$;
 ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso i) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$.

Sea v el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z ($v \neq w$ pues de lo contrario, existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D_1 con $w \in S$ y $x_0 \in X$. Entonces existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible por como definimos X . Además $v \neq x_0$ ya que $x_0 \notin V(\alpha_2)$).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, v)$ y $\alpha'_2 = (v, \alpha_2, w)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(x_0, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, w)$ es un x_0w - H -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(x_0, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.22.

Caso ii) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

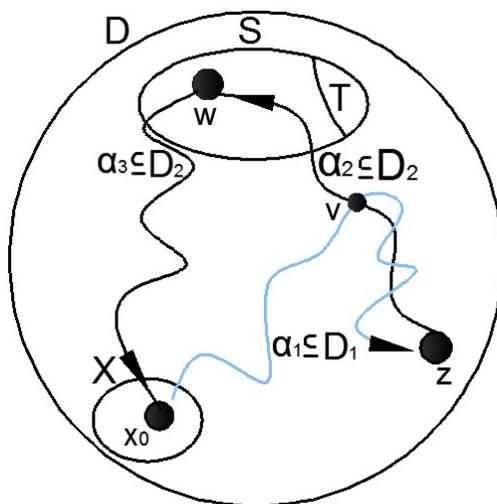


Figura 3.22: Caso i)

Caso I) α_1 intersecta primero a α_2 y posteriormente a α_3 .

Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z ($x \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$). Además $x \neq w$ ya que de lo contrario, existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $w \in S$ y $x_0 \in X$. Por lo tanto existe una $x_0S - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible por como definimos X).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$ y $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$.

Observemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(x_0, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w)$ es un $x_0w - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(x_0, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.23 a).

Caso II) α_1 intersecta primero a α_3 y posteriormente a α_2 .

Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z ($x \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$). Además $x \neq w$ ya que de lo contrario, existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $w \in S$ y $x_0 \in X$, entonces existe una $x_0S - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible por como definimos X). Sea v el primer vértice de α_1 anterior a x que está en α_3 distinto de x_0 ($v \neq w$, de lo contrario existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D_1 con $w \in S$ y $x_0 \in X$). Entonces existe una $x_0S - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible por como definimos X).

Consideremos $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$ y $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, $(v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w)$ es un $vw - H$ -camino que intersecta a D_1 e intersecta a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Así que $(v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$ es un ciclo contenido en D (por construcción). Entonces $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es una (D_1, D, D_2) H -subdivisión de C_3 , lo cual contradice las hipótesis, ve figura 3.23 b).

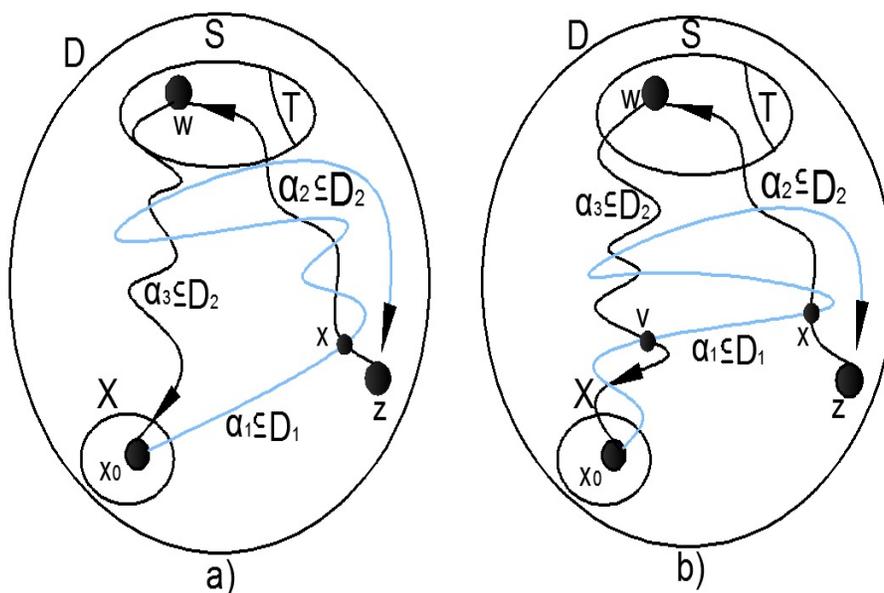


Figura 3.23: a) α_1 intersecta primero a α_2 y posteriormente a α_3 . b) α_1 intersecta primero a α_3 y posteriormente a α_2

Con lo que habremos concluido la demostración de la Afirmación 3. \triangleleft

De las Afirmaciones 2) y 3) concluimos que $T \cup \{x_0\} \in \mathbf{S}$. Por lo tanto $T \cup \{x_0\} \in V(D_{\mathbf{S}})$.

Así que $(S, T \cup \{x_0\}) \in F(D_{\mathbf{S}})$ ya que $T \subseteq S$, $x_0 \in X$ y para cada $s \in S$ tal que $s \notin T$ existe una $sx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $x_0s - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice el hecho de que $\delta_{D_{\mathbf{S}}}^+(S) = 0$.

Por lo tanto S es un H -núcleo por trayectorias en D y el teorema queda demostrado. \square

Capítulo 4

$\gamma - H$ -ciclos

En este capítulo vamos a introducir un nuevo concepto " $\gamma - H$ -ciclo".^{el} cual ha sido estudiado muy poco. Por lo que nosotros seremos los pioneros en este concepto. Los siguientes lemas dan resultados acerca de digráficas que no contienen $\gamma - H$ -ciclos y serán de gran utilidad en la demostración del teorema principal de este capítulo.

Definición 4.0.1. Sean H una digráfica y D una digráfica H -coloreada. Un $\gamma - H$ -ciclo en D es una sucesión de vértices distintos de D , $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n = u_0)$ tal que cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ satisface:

1. Existe una $u_i u_{i+1} - H$ -trayectoria contenida en D
2. No existe una $u_{i+1} u_i - H$ -trayectoria contenida en D

Toda la notación que se usará a continuación es mod n .

Lema 4.0.2. Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada que no contiene $\gamma - H$ -ciclos. Existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$, si existe una $x_0 z - H$ -trayectoria contenida en D , entonces existe una $z x_0 - H$ -trayectoria contenida en D .

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que para cada $x_0 \in V(D)$ existe $z \in V(D) - \{x_0\}$ tal que existe una $x_0 z - H$ -trayectoria contenida en D y no existe una $z x_0 - H$ -trayectoria contenida en D .

Sea $x_0 \in V(D)$, se sigue de la suposición que existe $x_1 \in V(D) - \{x_0\}$ tal que existe una $x_0 x_1 - H$ -trayectoria contenida en D y no existe una $x_1 x_0 - H$ -trayectoria contenida en D . De nuevo, por la suposición existe $x_2 \in V(D) - \{x_1\}$ tal que existe una $x_1 x_2 - H$ -trayectoria

y no existe una $x_2x_1 - H$ -trayectoria en D . Una vez elegidos de este modo $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ y dada nuestra suposición, podemos elegir $x_{n+1} \in V(D) - \{x_n\}$ de tal forma que existe una $x_nx_{n+1} - H$ -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{n+1}x_n - H$ -trayectoria en D . De este modo, obtenemos una sucesión de vértices (x_0, x_1, x_2, \dots) tal que para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ existe una $x_ix_{i+1} - H$ -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{i+1}x_i - H$ -trayectoria en D .

Como D es una digráfica finita, existe $i < j$ con $i, j \in \{0, 1, \dots\}$ tal que $x_i = x_j$. Sean $j_0 = \min\{j : x_j = x_i \text{ para alguna } i < j\}$ e $i_0 \in \{0, 1, \dots, j_0 - 1\}$ tales que $x_{i_0} = x_{j_0}$. Notemos que i_0 es único ya que de lo contrario, existiría $x_{k_0} = x_{i_0} = x_{j_0}$ con $k_0 \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $i_0 < k_0 < j_0$, lo cual contradice el hecho que x_{j_0} sea el primer vértice igual a x_i con $i < j_0$. Así, i_0 es único.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 0$ y $j_0 = n$. Así que $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ es una sucesión de n vértices distintos tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, existe una $x_ix_{i+1} - H$ -trayectoria en D y no existe ninguna $x_{i+1}x_i - H$ -trayectoria en D (los índices de los vértices están tomados mod n). Por lo tanto $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_0)$ es un $\gamma - H$ -ciclo de D , lo cual contradice las hipótesis.

Así que existe $x_0 \in V(D)$ tal que para cada $z \in V(D) - \{x_0\}$, si existe una $x_0z - H$ -trayectoria contenida en D . Entonces existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D .

□

Lema 4.0.3. *Sea H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada. Supóngase que existe $D_1(D_2)$ una subdigráfica generadora de D que no contienen $\gamma - H$ -ciclos. Entonces D tiene un H -seminúcleo por trayectorias no vacío mod D_2 (respectivamente D_1).*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que D_1 no contiene $\gamma - H$ -ciclos. Como se satisfacen las hipótesis del lema 4.0.2, entonces existe $x \in V(D)$ tal que para cada $y \in V(D_1) - \{x\}$, si existe una $xy - H$ -trayectoria contenida en D_1 , entonces existe una $yx - H$ -trayectoria contenida en D_1 . Así que existe una $yx - H$ -trayectoria en D . Y claramente $\{x\}$ es H -independiente por trayectorias.

Por lo tanto, existe $N = \{x\} \subseteq V(D)$ que satisface que es un H -seminúcleo no vacío mod D_2 . De manera análoga, se concluye que existe $N = \{x\} \subseteq V(D)$ que satisface que es un H -seminúcleo no vacío mod D_1 . □

Lema 4.0.4. *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada tal que:*

1. *existen D_1 y D_2 dos subdigráficas generadoras de D tal que $F(D_1) \cap F(D_2) = \emptyset$, $F(D_1) \cup F(D_2) = F(D)$, $c(D_1) \cap c(D_2) = \emptyset$ y*

2. D_i no contiene $\gamma - H$ -ciclos con $i \in \{1, 2\}$.

Entonces $D_{\mathbf{S}}$ es una digráfica que no contiene ciclos.

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $D_{\mathbf{S}}$ es una digráfica que contiene algún ciclo. Sea $C = (S_0, S_1, \dots, S_{n-1}, S_0)$ un ciclo en $D_{\mathbf{S}}$ de longitud $n \geq 2$. Como C es un ciclo en $D_{\mathbf{S}}$, tenemos que $S_i \neq S_j$ siempre que $i \neq j$ con $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Afirmación 1. Existe $i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que para alguna $z \in S_{i_0}$, $z \notin S_{i_0+1} \pmod{n}$.

Demostración de la Afirmación 1. Procederemos por contradicción. Supongamos que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y para cada $z \in S_i$ se tiene que $z \in S_{i+1} \pmod{n}$. Entonces $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0$. Así que $S_0 \subseteq S_k \subseteq S_0$ para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$ y se sigue que $S_0 = S_k$ para toda $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Así $S_i = S_j$ para toda $i, j \in \{0, \dots, n-1\} \pmod{n}$. Así que $C = (S_0)$, lo cual es una contradicción ya que un ciclo posee al menos 2 vértices. \triangleleft

Afirmación 2. Si existe $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que para algunos $z \in S_{i_0}$ y $w \in S_{i_0+1} \pmod{n}$ se tiene que existe una $zw - H$ -trayectoria contenida en D , entonces existe $j_0 \neq i_0$, $j_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $w \in S_{j_0}$ y $w \notin S_{j_0+1} \pmod{n}$.

Demostración de la Afirmación 2. Supongamos sin pérdida de generalidad, que $i_0 = 0$. Sean $z \in S_0$ y $w \in S_1$ tales que existe una $zw - H$ -trayectoria contenida en D . Si $w \notin S_2$ habremos probado la Afirmación 2 con $j_0 = 1$. Podemos suponer que $w \in S_2$. Si $w \notin S_3$ habremos probado la Afirmación 2 con $j_0 = 2$. De nuevo, podemos suponer que $w \in S_3$, si $w \notin S_4$ se tendría probada la Afirmación 2 con $j_0 = 3$. Repitiendo este procedimiento $n-1$ veces, podemos suponer que $w \in S_0$ (ya que de lo contrario, $w \notin S_0$ y habríamos demostrado la Afirmación 2 con $j_0 = n-1$). Por hipótesis de la Afirmación 2, existe una $zw - H$ -trayectoria con $z, w \in S_0$, lo cual es una contradicción ya que por hipótesis, S_0 es H -independiente por trayectorias. Con esto queda demostrada la Afirmación 2. \triangleleft

Por la Afirmación 1, existe $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ y $t_0 \in S_{i_0}$ tal que $t_0 \notin S_{i_0+1}$. Como $(S_{i_0}, S_{i_0+1}) \in F(D_{\mathbf{S}})$, se tiene que existe $t_1 \in S_{i_0+1}$ tal que existe una $t_0t_1 - H$ -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $t_1S_{i_0} - H$ -trayectoria en D . Por la Afirmación 2, se sigue que existe un índice $i_1 \neq i_0$, $i_1 \in \{0, \dots, n-1\}$, tal que $t_1 \in S_{i_1}$ y $t_1 \notin S_{i_1+1} \pmod{n}$. Como $(S_{i_1}, S_{i_1+1}) \in F(D_{\mathbf{S}})$, entonces existe un $t_2 \in S_{i_1+1}$ tal que existe una $t_1t_2 - H$ -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $t_2S_{i_1} - H$ -trayectoria contenida en D . De nuevo por la Afirmación 2, tenemos que existe un índice $i_2 \neq i_1$, $i_2 \in \{0, \dots, n-1\}$, tal que $t_2 \in S_{i_2}$ y $t_2 \notin S_{i_2+1}$. Como $(S_{i_2}, S_{i_2+1}) \in F(D_{\mathbf{S}})$, tenemos que existe un $t_3 \in S_{i_2+1}$ tal que existe una $t_2t_3 - H$ -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $t_3S_{i_2} - H$ -trayectoria

contenida en D . Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de vértices (t_0, t_1, \dots) tal que para cada $i \in \{0, 1, \dots\}$ existe una $t_i t_{i+1} - H$ -trayectoria contenida en D (ya que existe una $t_i t_{i+1} - H$ -trayectoria contenida en D_2) y no existe ninguna $t_{i+1} t_i - H$ -trayectoria contenida en D (ya que no existe ninguna $t_{i+1} S_i - H$ -trayectoria contenida en D). Entonces D_2 contiene $\gamma - H$ -ciclos, esto contradice las hipótesis. Así, D_S es una digráfica que no contiene ciclos. \square

4.1. Configuraciones

En un principio se deseaba que el resultado principal de este capítulo fuera una extensión del resultado del capítulo anterior. Pero nos dimos cuenta que el teorema debía ser modificado (para que continuáramos trabajando con H -trayectorias) y además necesitaríamos mas herramienta por lo que definimos las siguientes configuraciones.

Notación. Ahora, introduciremos algunas digráficas especiales, estas serán utilizadas en el capítulo.

I) $\widehat{C}_3[u, v, w, u]$ es un ciclo $C = (u = u_0, \dots, u_k = v = v_0, \dots, v_m = w = w_0, \dots, w_n = u_0 = u)$ tal que: 1) $T_1 = (u, C, v)$ es una H -trayectoria en D_1 , $T_2 = (v, C, w)$ es una H -trayectoria en D , $T_3 = (w, C, u)$ es una H -trayectoria en D_2 ; 2) $(c(u_{k-1}, v), c(v, v_1)) \notin F(H)$, $(c(v_{m-1}, w), c(w, w_1)) \notin F(H)$ y $(c(w_{n-1}, u), c(u, u_1)) \notin F(H)$, ve figura 4.1 (a).

II) $\widehat{P}_3[u, v, w, x]$ es una trayectoria $P = (u = u_0, \dots, u_k = v = v_0, \dots, v_m = w = w_0, \dots, w_n = x)$ tal que: 1) $T_1 = (u, P, v)$ es una H -trayectoria en D_1 , $T_2 = (v, P, w)$ es una H -trayectoria en D , $T_3 = (w, P, x)$ es una H -trayectoria en D_2 ; 2) $(c(u_{k-1}, v), c(v, v_1)) \notin F(H)$ y $(c(v_{m-1}, w), c(w, w_1)) \notin F(H)$, ve figura 4.1 (b).

III) $\widehat{B}[u, v] \cup [w, v] \cup [z, v] \cup [v, x]$ es la unión $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ tal que: 1) T_1 es una $uv - H$ -trayectoria en D_1 , T_2 es una $wv - H$ -trayectoria en D_2 , T_3 es una $zv - H$ -trayectoria en D , T_4 es una $vx - H$ -trayectoria en D_2 ; 2) $(c(\text{ff de } T_i), c(\text{fi de } T_4)) \notin F(H)$, para $i \in \{1, 3\}$ y $(T_j \cap T_t) = \{v\}$ con $j \neq t$ y $j, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, ve figura 4.1 (c).

IV) $\widehat{T}[w, s, p] \cup [z, s] \cup [x, p]$ es la unión $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ tal que: 1) T_1 es una $ws - H$ -trayectoria en D_2 , T_2 es una $sp - H$ -trayectoria en D_2 , T_3 es una $zs - H$ -trayectoria en D , T_4 es una $xp - H$ -trayectoria en D_1 ; 2) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$ y $(T_j \cap T_t) - \{s, p\} = \emptyset$ con $j \neq t$ y $j, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, ve figura 4.1 (d).

V) $\widehat{X}[w, s, p] \cup [z, s] \cup [x, p]$ es la digráfica $\widehat{T}[w, s, p] \cup [z, s] \cup [x, p]$ con $T_3 \subseteq D_1$ y $T_4 \subseteq D$, ve figura 4.1(e).

VI) $\widehat{C}[q, m, x] \cup [m, z] \cup [q, w]$ es la unión $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ tal que: 1) T_1 es una $qm - H$ -

trayectoria en D_2 , T_2 es una $mx - H$ -trayectoria en D_2 , T_3 es una $mz - H$ -trayectoria en D_1 , T_4 es una $qw - H$ -trayectoria en D ; 2) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_3)) \notin F(H)$, ve figura 4.1(f).

VII) $\widehat{A}[w, t, m] \cup [z, t] \cup [x, m]$ es la unión $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ tal que: 1) T_1 es una $wt - H$ -trayectoria en D_2 , T_2 es una $tm - H$ -trayectoria en D_2 , T_3 es una $zt - H$ -trayectoria en D , T_4 es una $xm - H$ -trayectoria en D_1 ; 2) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$, ve figura 4.1(g).

VIII) $K[v, s, r, v] \cup [w, a]$ es la unión $\widehat{C}_3[v, s, r, v] \cup T_4$ tal que: 1) T_4 es una $wa - H$ -trayectoria en D_1 con $a \in \{v, r\}$; 2) $(c(\text{ff de } T_4), c(\text{fi de } T_i)) \notin F(H)$ para $i \in \{1, 3\}$ y $|V(\widehat{C}_3[v, s, r, v]) \cap V(T_4)| = 1$, ve figura 4.1(h).

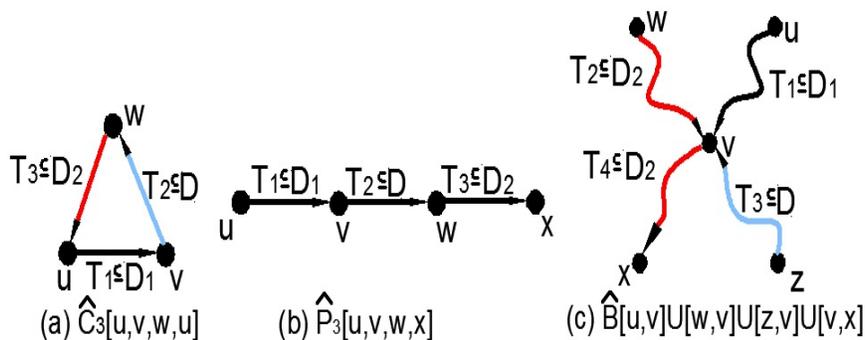
IX) $L[w, r, v, s, r]$ es la digráfica VIII) con $a = r$ y $T_4 \subseteq D_2$, ve figura 4.1(i).

X) $V[x, r, v, s, r] \cup [s, w]$ es la unión $T_1 \cup \widehat{C}_3[s, r, v, s] \cup T_5$ tal que: 1) T_1 es una $xr - H$ -trayectoria en D y T_5 es una $sw - H$ -trayectoria en D_2 ; 2) $(T_i \cap T_j) - \{s, r\} = \emptyset$ con $i \neq j$, $i \in \{1, 5\}$ y $j \in \{2, 3, 4\}$, $(T_1 \cap T_5) = \emptyset$, ve figura 4.1 (j).

XI) $H[w, s, r, v, s] \cup [x, r]$ es la digráfica X) con T_5 una $ws - H$ -trayectoria en D_1 , ve figura 4.1 (k).

XII) $S[z, t] \cup [w, t] \cup [x, t]$ es la unión $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ tal que: 1) T_1 es una $zt - H$ -trayectoria en D_1 , T_2 es una $wt - H$ -trayectoria en D , T_3 es una $xt - H$ -trayectoria en D_2 ; 2) $(T_i \cap T_j) = \{t\}$ con $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, ve figura 4.1(l).

XIII) $T[u, r] \cup [w, r] \cup [p, r] \cup [p, x] \cup [z, p]$ es la unión $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$ tal que: T_1 es una $ur - H$ -trayectoria en D_1 , T_2 es una $wr - H$ -trayectoria en D_2 , T_3 es una $pr - H$ -trayectoria en D , T_4 es una $px - H$ -trayectoria en D_2 , T_5 es una $zp - H$ -trayectoria en D ; 2) $c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_4) \notin F(H)$, $(T_i \cap T_j) - \{p, r\} = \emptyset$ con $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ve figura 4.1 (m).



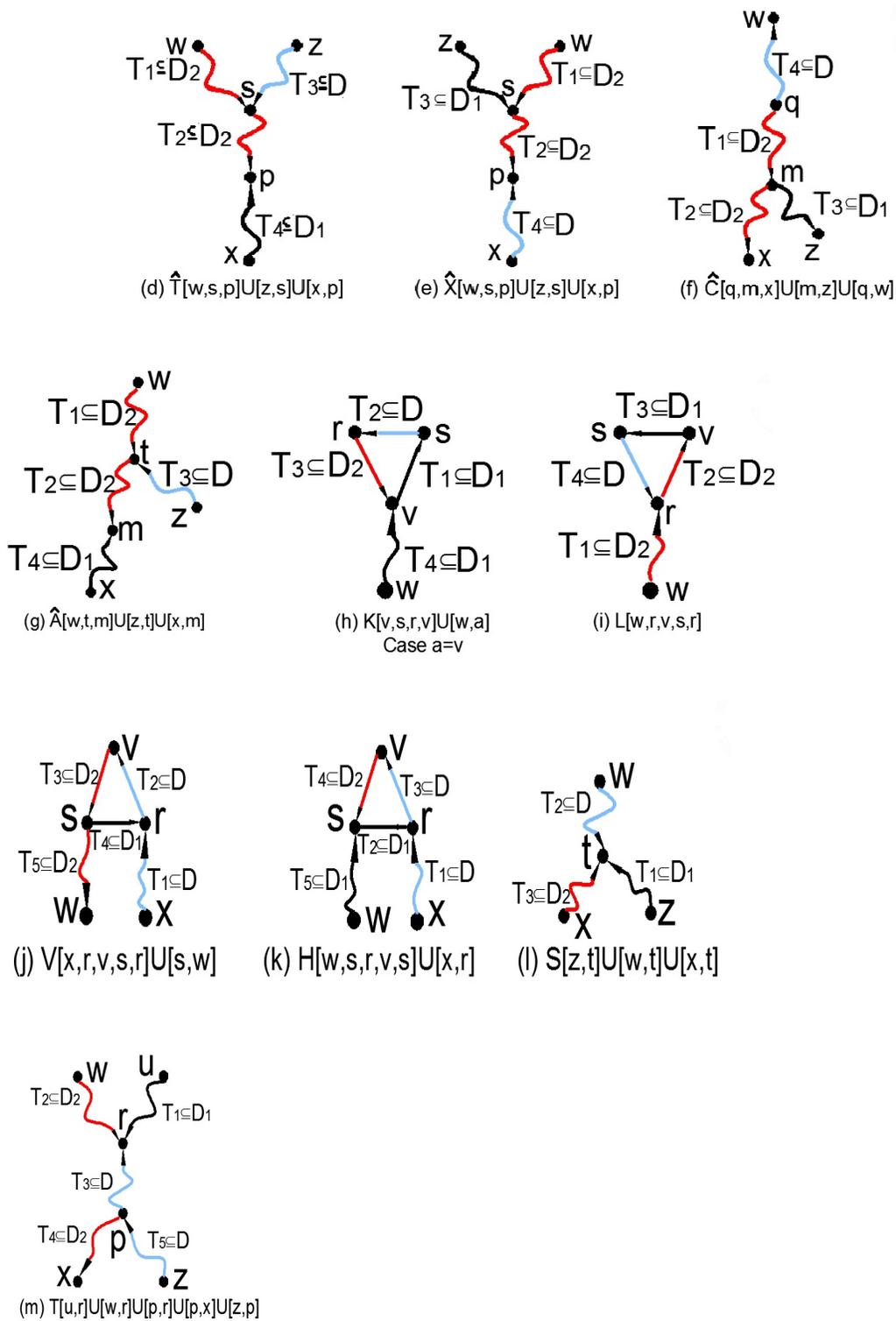


Figura 4.1: Configuraciones

4.2. Segundo resultado

Teorema 4.2.1. *Sea H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada. Si $P = \{D_1, D_2\}$ una H -separación de D que satisface lo siguiente:*

1. D_i no contiene $\gamma - H$ -ciclos para $i \in \{1, 2\}$.
2. Si D contiene un $\widehat{C}_3[x, v, w, x]$ o un $L[w, v, x, z, v]$, entonces existe una $xw - H$ -trayectoria contenida en D .
3. Si D contiene un $\widehat{P}_3[u, v, w, x]$, entonces existe una $ux - H$ -trayectoria contenida en D .
4. Si D contiene alguna de las siguientes configuraciones: $H[u, v, x, p, v] \cup [z, x]$ o $K[r, z, w, r] \cup [u, r]$, entonces existe una $zu - H$ -trayectoria contenida en D .
5. Si D contiene alguna de las siguientes configuraciones: $\widehat{T}[w, s, p] \cup [z, s] \cup [x, p]$, $V[z, r, w, s, r] \cup [s, x]$, $S[x, t] \cup [z, t] \cup [w, t]$, $\widehat{X}[w, s, p] \cup [x, s] \cup [z, p]$, $\widehat{A}[w, t, m] \cup [z, t] \cup [x, w]$ o $\widehat{C}[q, m, x] \cup [m, z] \cup [q, w]$, entonces existe alguna de las siguientes H -trayectorias: una $zx - H$ -trayectoria contenida en D o una $xw - H$ -trayectoria contenida en D .
6. Si D contiene un $\widehat{B}[u, v] \cup [w, v] \cup [z, v] \cup [v, x]$, entonces existe alguna de las siguientes H -trayectorias: una H -trayectoria entre w y u contenida en D ; una H -trayectoria entre u y x contenida en D ; una $zx - H$ -trayectoria contenida en D ; o una $xw - H$ -trayectoria contenida en D .
7. Si D contiene un $T[u, r] \cup [w, r] \cup [p, r] \cup [p, x] \cup [z, p]$, entonces existe alguna de las siguientes H -trayectorias: una $ux - H$ -trayectoria contenida en D ; una $zx - H$ -trayectoria contenida en D ; o una $xw - H$ -trayectoria contenida en D .

Entonces D tiene un H -núcleo por trayectorias.

Demostración. Idea general de la demostración. Vamos a construir un seminúcleo S' que es exvecino de $S \in V(D_{\mathbf{S}})$, lo cual contradice que $\delta_{D_{\mathbf{S}}}^+(S) = 0$.

Como la digráfica D satisface las hipótesis del lema 4.0.3, tenemos que D tiene al menos un H -seminúcleo no vacío mod D_i con $i \in \{1, 2\}$. Entonces podemos considerar la digráfica $D_{\mathbf{S}}$ de la digráfica D . Como $D_{\mathbf{S}}$ es una digráfica finita y por el lema 4.0.4 no contiene ciclos, se sigue del teorema 1.0.3, que $D_{\mathbf{S}}$ contiene al menos un vértice de exgrado cero. Sea $S \in V(D_{\mathbf{S}})$ tal que $\delta_{D_{\mathbf{S}}}^+(S) = 0$.

Vamos a probar que S es un H -núcleo por trayectorias en D .

Procederemos por contradicción. Supongamos que S no es un H -núcleo por trayectorias en D . Como $S \in V(D_{\mathbf{S}})$, tenemos que S es H -independiente por trayectorias.

Sea $X = \{z \in V(D) : \text{no existe } zS - H\text{-trayectoria contenida en } D\}$.

Se sigue de nuestra suposición que $X \neq \emptyset$ (ya que S no es H -núcleo por trayectorias). Consideremos a $D[X]$. Como $D[X]$ satisface las hipótesis del teorema y en particular la subdigráfica de $D_1[X]$ en $D[X]$ satisface las hipótesis del lema 4.0.2, tenemos que existe $x_0 \in X$ tal que para cada $z \in X - \{x_0\}$ se satisface que si existe una $x_0z - H$ -trayectoria contenida en $D_1[X]$, entonces existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en $D_1[X]$.

Sea $T = \{u \in S : \text{no existe } ux_0 - H\text{-trayectoria contenida en } D_2\}$.

Por como definimos T , tenemos que para cada $w \in (S - T)$ existe una $wx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 .

Afirmación 1. $T \cup \{x_0\}$ es H -independiente por trayectorias.

Demostración. Claramente T es H -independiente por trayectorias (ya que $T \subseteq S$ y $S \in \mathbf{S}$) y $\{x_0\}$ es H -independiente por trayectorias.

Afirmación 1.1) No existen $T\{x_0\} - H$ -trayectorias contenidas en D .

Demostración de la Afirmación 1.1). Procederemos por contradicción. Supongamos que existe alguna $u\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , digamos γ con $u \in T$. Como definimos T (tenemos que $\gamma \not\subseteq D_2$) y ya que $P = \{D_1, D_2\}$ es una H -separación de D , tenemos que $\gamma \subseteq D_1$. Como $T \subseteq S$ y $S \in \mathbf{S}$, se sigue que existe una $\{x_0\}S - H$ -trayectoria contenida en D . Así que $x_0 \notin X$ por como definimos X , lo cual es una contradicción ya que $x_0 \in X$. Esto demuestra la Afirmación 1.1).

Afirmación 1.2) No existen $\{x_0\}T - H$ -trayectorias contenidas en D .

Demostración de la Afirmación 1.2). Como $T \subseteq S$ y $x_0 \in X$, se sigue que no existe ninguna $\{x_0\}T - H$ -trayectoria contenida en D . Que queda demostrada la Afirmación 1.2).

De las Afirmaciones 1.1) y 1.2) queda demostrada la Afirmación 1. \triangleleft

Afirmación 2. Si existe una $(T \cup \{x_0\})z - H$ -trayectoria en D_1 , entonces existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D .

Demostración.

Caso 1) Existe una $Tz - H$ -trayectoria contenida en D_1 .

Como $T \subseteq S$ y $S \in \mathbf{S}$, entonces existe una $zS - H$ -trayectoria contenida en D . Si existe una $zT - H$ -trayectoria en D , habremos demostrado la Afirmación 2. Podemos suponer que existe una $z(S - T) - H$ -trayectoria contenida en D . Sean α_1 una $uz - H$ -trayectoria contenida D_1 con $u \in T$ y α_2 una $zw - H$ -trayectoria contenida en D con $w \in (S - T)$. Como $w \in (S - T)$, tenemos por la definición de T que existe α_3 una $wx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 .

Afirmación 3: (a) $x_0 \notin V(\alpha_2)$, (b) $z \notin V(\alpha_3)$ y (c) $x_0 \notin V(\alpha_1)$.

Demostración de la Afirmación 3. (a) Procedemos por contradicción. Supongamos que $x_0 \in V(\alpha_2)$, entonces (z, α_2, x_0) es una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Por lo tanto existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D , lo que demuestra la Afirmación 2.

(b) Procedemos por contradicción. Supongamos que $z \in V(\alpha_3)$, entonces (z, α_3, x_0) es una $zx_0 - H$ -trayectoria en D_2 . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D , lo que demuestra la Afirmación 2.

(c) Procedemos por contradicción. Supongamos que $x_0 \in V(\alpha_1)$, entonces existe una $wx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_1 . Así que existe una $T\{x_0\} - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 1.

Para cualquier selección fija de vértices $b \in V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)$, $e \in V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)$ y $x, h \in V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)$. Denotaremos por: $T_1 = (u, \alpha_1, b)$, $T_2 = (b, \alpha_2, w)$, $T_3 = (z, \alpha_2, e)$, $T_4 = (e, \alpha_3, x_0)$, $T_5 = (u, \alpha_1, x)$, $T_6 = (x, \alpha_3, x_0)$, $T_7 = (w, \alpha_3, h)$ y $T_8 = (h, \alpha_1, z)$.

Observación 1) a) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$, b) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \notin F(H)$, c) $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \notin F(H)$ y d) $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \notin F(H)$.

Demostración de la Observación 1). Procederemos por contradicción, en cada uno de los cuatro casos.

a) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$.

Supongamos que $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \in F(D)$, entonces existe un $uw - H$ -camino contenido en D . Por el lema 1.2.2, existe una $uw - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que $S \in \mathbf{S}$ (S es H -independiente por trayectorias). Lo que demuestra la primera parte.

b) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \notin F(H)$.

Supongamos que $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \in F(H)$, entonces $(z, \alpha_2, e) \cup (e, \alpha_3, x_0)$ es un $zx_0 - H$ -camino. Por el lema 1.2.2 contiene una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D y habríamos demostrado la

Afirmación 2. Con lo que queda demostrado este caso.

c) $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \notin F(H)$.

Supongamos que $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \in F(H)$, entonces existe un ux_0 - H -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15, ve figura 4.2.

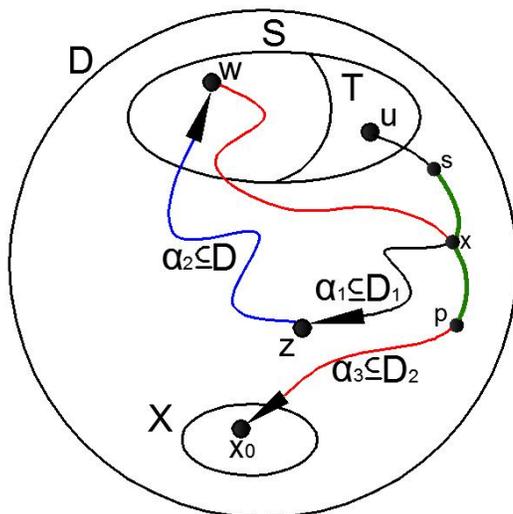


Figura 4.2: $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \in F(H)$

d) $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \notin F(H)$.

Supongamos que $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \in F(H)$, entonces existe un wz - H -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15.

Con lo que queda demostrada la Observación 1.

Observación 2) Notemos que ninguna de las siguientes H -trayectorias existen en D .

1. No existe una uw - H -trayectoria contenida en D .

Ya que S es H -independiente por trayectorias.

2. No existe una wu - H -trayectoria contenida en D .

Ya que S es H -independiente por trayectorias.

3. No existe una x_0u - H -trayectoria contenida en D .

De lo contrario, existe una $T\{x_0\}$ - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Afirmación 1.

4. No existe una $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D .

Por la misma razón que en el inciso anterior.

5. No existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D .

De lo contrario, existe una $x_0S - H$ -trayectoria contenida en D con $w \in S$ y $x_0 \in X$, lo cual no es posible por como definimos X .

6. No existe una $zu - H$ -trayectoria contenida en D .

De lo contrario, existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D , con lo que habríamos demostrado la Afirmación 2.

7. No existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D .

Por la misma razón que en el inciso anterior.

Observación Ω) a) Sea x un vértice de α_3 que está en α_1 , entonces $x \neq u$ (o $x \neq w$).

Demostración de la Observación Ω) a) Procederemos por contradicción. Supongamos que $x = u$, entonces (w, α_3, u) es una $wu - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias.

Ahora demostraremos el caso $x \neq w$. Procederemos por contradicción. Supongamos que $x = w$, entonces (u, α_1, w) es una $uw - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual contradice el hecho que S es H -independiente por trayectorias.

b) Sea x un vértice de α_1 que está en α_2 , entonces $x \neq u$ (o $x \neq w$).

Demostración de la Observación Ω) b) Procederemos por contradicción. Supongamos que $x = u$, entonces (u, α_2, w) es una $uw - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias.

Ahora demostraremos el caso $x \neq w$. Procederemos por contradicción. Supongamos que $x = w$, entonces (u, α_1, w) es una $uw - H$ -trayectoria con $\{u, w\} \subseteq S$, lo cual no es posible ya que S es H -independiente por trayectorias.

Ahora analizaremos los siguientes posibles casos: a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$;

b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$

Caso a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Consideraremos los siguientes casos: a.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$; a.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$; a.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$; y a.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Caso a.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, ve figura 4.3.

Como $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D (por construcción). Entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es un $\widehat{P}_3[u, z, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 3 que existe una ux_0 - H -trayectoria contenida en D , lo cual no es posible por la Observación 2 inciso 4).

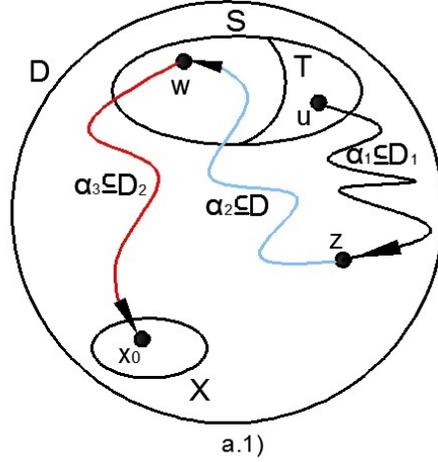


Figura 4.3: $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es un $\widehat{P}_3[u, z, w, x_0]$

Caso a.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$, ve figura 4.4 a).

Sea x el primer vértice de α_3 que está en α_1 . Notemos que $x \neq z$, pues $z \notin V(\alpha_3)$, por la Afirmación 3 inciso (b). Además $x \neq u$, de lo contrario se contradice la Observación Ω a). Por otro lado, $x \neq w$ de lo contrario se contradice la Observación Ω a).

Consideremos $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, x)$, $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, x)$ y $\alpha''_1 = (x, \alpha_1, z)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha''_1)) \notin F(H)$ pues de lo contrario, contradice la Observación 1 inciso d).

Así, el camino $(x, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x)$ es un $\widehat{C}_3[x, z, w, x]$. Entonces $\alpha''_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha'_3 \cup \alpha'_1$, por construcción, es un $K[x, z, w, x] \cup [u, x]$ y por la hipótesis 4 existe una zu - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 6).

Caso a.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, ve figura 4.4 b).

Sea x el último vértice de α_3 que está en α_2 . Notemos que $x \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b). Además $x \neq x_0$, pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 3 inciso (a).

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$ y $\alpha'_3 = (x, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 inciso b).

Así, $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, x) \cup (x, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D , entonces tenemos un $\widehat{P}_3[u, z, x, x_0]$ (por construcción). Se sigue de la hipótesis 3 que existe una $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4).

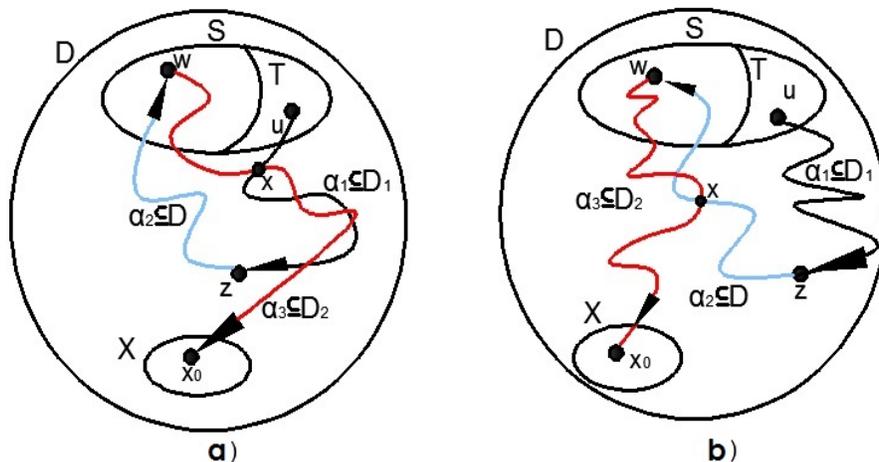


Figura 4.4: a) Caso a.2). b) Caso a.3)

Caso a.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea r el último vértice de α_3 que está en α_1 . Observemos que $r \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b). Además $r \neq u$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω a). Sea s el último vértice de α_3 que está en α_2 . Notemos que $s \neq z$, pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b). Además $s \neq x_0$, pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 3 inciso (a).

Caso I) r es anterior a s en α_3 , ve figura 4.5 I).

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, s)$ y $\alpha'_3 = (s, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)) \notin F(H)$ pues de lo contrario, contradice la Observación 1 inciso b).

Así que $(u, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, s) \cup (s, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D , por construcción. Entonces tenemos un $\widehat{P}_3[u, z, s, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 3 que existe una $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4.

Caso II) s es anterior a r en α_3 , ve figura 4.5 II).

Sea x el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de z pues $z \notin V(\alpha_3)$, por la Afirmación 3 inciso (b). Además $x \neq u$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω a) (posiblemente $r = x$). Sea v el último vértice de α_3 que está en α_2 y que es anterior a x . Notemos que $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$, por la Afirmación 3 inciso (b). Por otro lado, $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$, por la Afirmación 3 inciso (a), (posiblemente $v = s$ ó $v = w$).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, x)$, $\alpha''_1 = (x, \alpha_1, z)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$ y $\alpha'_3 = (v, \alpha_3, x)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha''_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 incisos b) y d) respectivamente.

Así que el camino $(x, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x)$ es un $\widehat{C}_3[x, z, v, x]$. Entonces $\alpha''_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3 \cup \alpha'_1$, por construcción, es un $K[x, z, v, x] \cup [u, x]$ y por la hipótesis 4 existe una $zu - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 6.

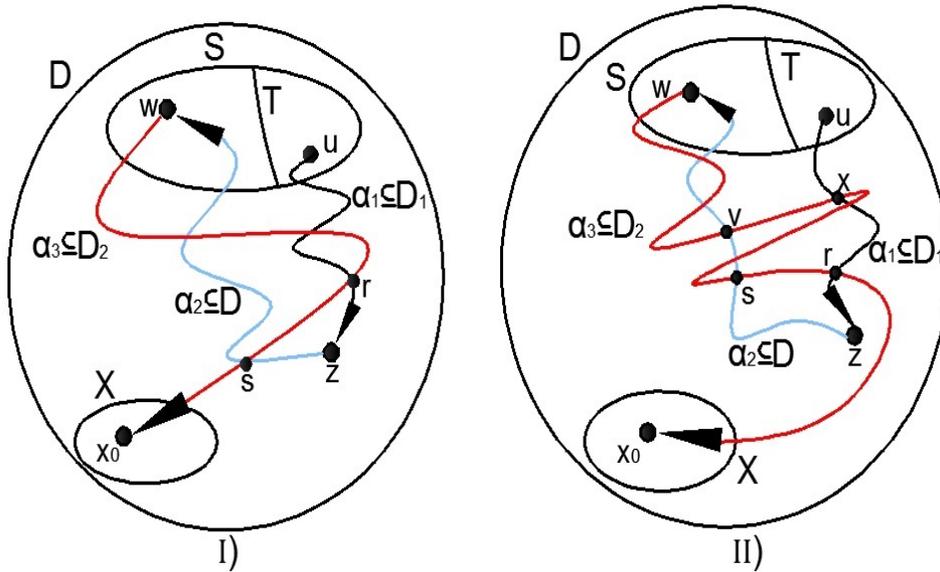


Figura 4.5: I) r es anterior a s en α_3 . II) s es anterior a r en α_3 .

Caso b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$.

Consideraremos los siguientes casos: b.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$; b.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$; b.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$; y b.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Caso b.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, ve figura 4.6.

Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Notemos que $x \neq w$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω b). Además $x \neq u$ pues de lo contrario, contradice

la Observación Ω b).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, x)$ y $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ pues de lo contrario, contradice la Observación 1 inciso a).

Así que $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D , por construcción. Entonces tenemos un $\widehat{P}_3[u, x, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 3 que existe una $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4.

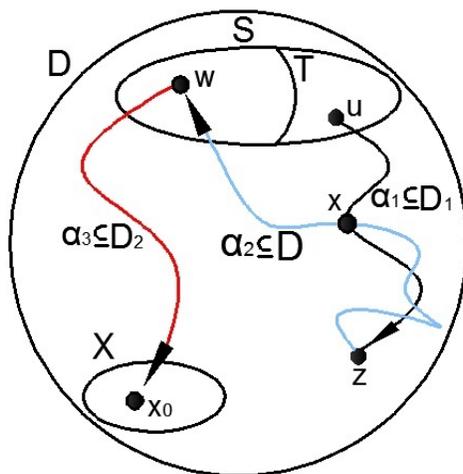


Figura 4.6: $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un $\widehat{P}_3[u, x, w, x_0]$

Caso b.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Notemos que $x \neq w$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω b). Además $x \neq u$ de lo contrario, se contradice la Observación Ω b). Sea v el primer vértice de α_1 que está en α_3 distinto de u . Notemos que $v \neq w$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω a). Por otro lado, $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 3 inciso (c).

Caso I) x es anterior a v en α_1 , ve figura 4.7 i).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, x)$ y $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 inciso a).

Así que $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D (por construcción). Entonces tenemos un $\widehat{P}_3[u, x, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 3 que existe una

$ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4.

Caso II) v es anterior a x en α_1 , ve figura 4.7 ii).

Consideremos $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$, $\alpha''_2 = (x, \alpha_2, w)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$ y $\alpha''_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1)), (c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha''_2)), (c(\text{ff de } \alpha''_2), c(\text{fi de } \alpha'_3))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 incisos d), a) y b) respectivamente.

Así que $(z, \alpha_2, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, x) \cup (v, \alpha_3, x_0)$, por construcción, es un $V[z, x, w, v, x] \cup [v, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 7; **) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 5.

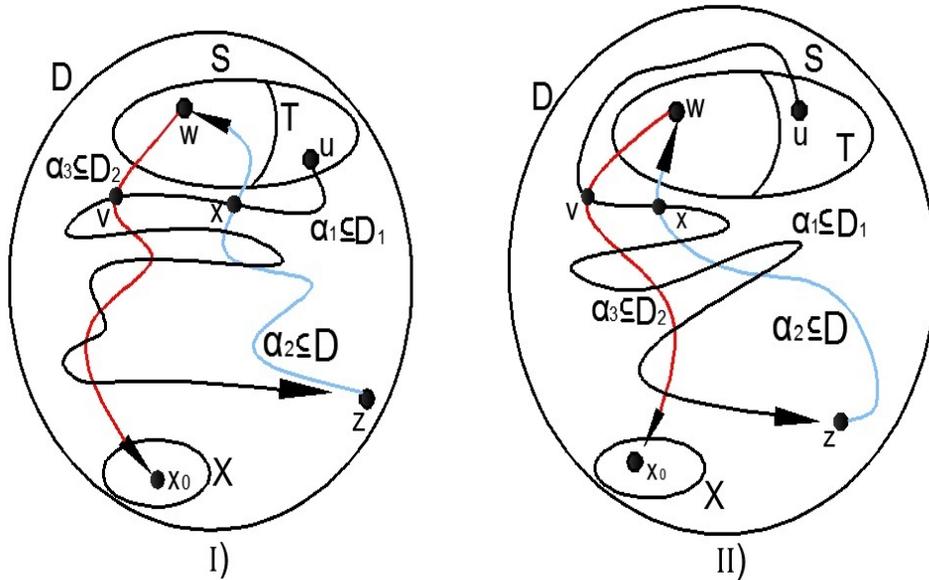


Figura 4.7: I) x es anterior a v en α_1 . II) v es anterior a x en α_1 .

Caso b.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \emptyset$, ve figura 4.8.

Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Notemos que $x \neq w$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω b). Además $x \neq u$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω b). Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_3 posterior a x . Notemos que $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 3 inciso (a). Por otro lado, $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b) (posiblemente $v = w$).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, v)$ y $\alpha'_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3))\} \cap F(H) = \emptyset$ pues de lo contrario, contradice la Observación 1 incisos a) y b).

Así que $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D , por construcción. Entonces tenemos un $\widehat{P}_3[u, x, v, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 3 que existe una $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4.

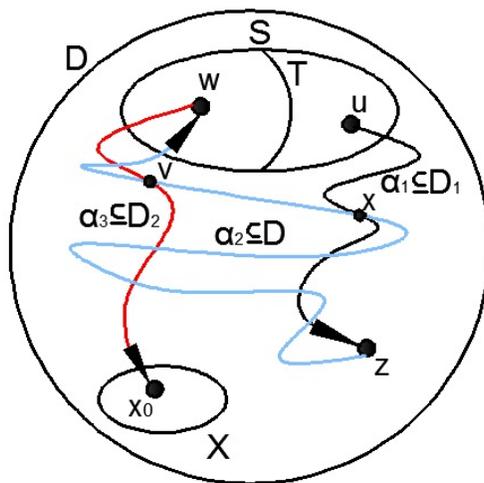


Figura 4.8: Caso b.3)

Caso b.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) \neq \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_1 que está en α_3 . Notemos que $u \neq v$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω a). Además que $v \neq w$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω a). Por otro lado, $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b) y $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_1)$, por la Afirmación 3 inciso (c). Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Notemos que $x \neq w$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω b). Además $x \neq u$ pues de lo contrario, contradice la Observación Ω b).

Caso I) v es anterior a x en α_1 , ve figura 4.9 I).

Sea p el primer vértice de α_2 que está en α_3 anterior a v . Notemos que $p \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 3 inciso (a). Además $p \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b) (posiblemente $p = w$).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, v)$, $\alpha''_1 = (v, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, p)$, $\alpha''_2 = (z, \alpha_2, x)$ y $\alpha'_3 = (p, \alpha_3, v)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha_1''), c(\text{fi de } \alpha_2')), (c(\text{ff de } \alpha_2'), c(\text{fi de } \alpha_3')), (c(\text{ff de } \alpha_3'), c(\text{fi de } \alpha_1''))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 incisos a), b) y d) respectivamente.

Así que $(u, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, p) \cup (p, \alpha_3, v) \cup (z, \alpha_2, x)$, por construcción, es un $H[u, v, x, p, v] \cup [z, x]$. Se sigue de la hipótesis 4 que existe una zu - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 6.

Caso II) x es anterior a v en α_1 , ve figura 4.9 II).

Sea r el primer vértice de α_2 que está en α_3 posterior a x . Notemos que $r \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 3 inciso (a). Además $r \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b) (posiblemente $r = w$).

Consideremos $\alpha_1' = (u, \alpha_1, x)$, $\alpha_2' = (x, \alpha_2, r)$ y $\alpha_3' = (r, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha_1'), c(\text{fi de } \alpha_2')), (c(\text{ff de } \alpha_2'), c(\text{fi de } \alpha_3'))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 incisos a) y b) respectivamente.

Así que $(u, \alpha_1, x) \cup (x, \alpha_2, r) \cup (r, \alpha_3, x_0)$ es una trayectoria contenida en D , por construcción. Entonces tenemos un $\widehat{P}_3[u, x, r, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 3 que existe una ux_0 - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4.

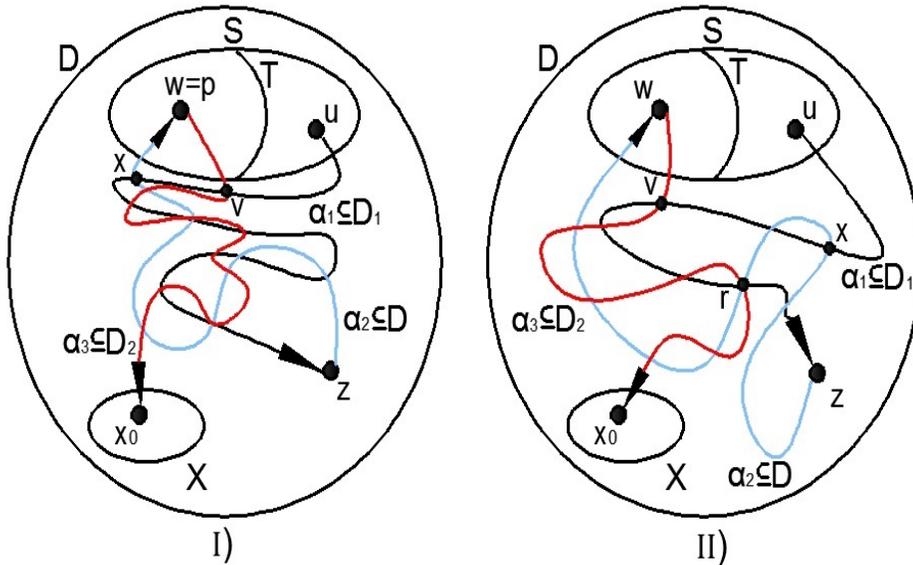


Figura 4.9: I) Caso I). II) Caso II)

Caso III) $x = v$.

Sea s el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w . Notemos que $s \neq x_0$ pues

$x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 3 inciso (a). Además $s \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 3 inciso (b) (posiblemente $v = s = x$).

Caso i) $v \neq s$, ve figura 4.10 i).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, v)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, s)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$, $\alpha''_3 = (v, \alpha_3, s)$ y $\alpha'''_3 = (s, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha''_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'''_3))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 incisos c) y b) respectivamente.

Así que $(u, \alpha_1, v) \cup (w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_3, s) \cup (z, \alpha_2, s) \cup (s, \alpha_3, x_0)$, por construcción, es un $T[u, v] \cup [w, v] \cup [v, s] \cup [s, x_0] \cup [z, s]$. Se sigue de la hipótesis 7 que existe alguna de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $ux_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 4; *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 7; *) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 5.

Caso ii) $v = s$, ve figura 4.10 ii).

Consideremos $\alpha'_1 = (u, \alpha_1, v)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$, $\alpha''_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha''_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 1 inciso c).

Así que $(u, \alpha_1, v) \cup (w, \alpha_3, v) \cup (z, \alpha_2, v) \cup (v, \alpha_3, x_0)$, por construcción, es un $\widehat{B}[u, v] \cup [w, v] \cup [z, v] \cup [v, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 6 que existe alguna de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una H -trayectoria entre w y u contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 incisos 2 y 1 respectivamente; *) Existe una H -trayectoria entre u y x_0 contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 incisos 4 y 3 respectivamente; *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 7; *) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 2 inciso 5.

Caso 2) Existe una $x_0z - H$ -trayectoria contenida en D_1 .

Sea α_1 una $x_0z - H$ -trayectoria contenida en D_1 .

Supongamos primero que $z \in X$. Por la definición de X , tenemos que existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_1 y habremos demostrado la Afirmación 2.

Así que podemos suponer que $z \notin X$ y por la definición de X , tenemos que existe una $zS - H$ -trayectoria contenida en D . Si existe una $zT - H$ -trayectoria habremos demostrado la Afirmación 2. Así que supondremos que existe una $z(S - T) - H$ -trayectoria contenida

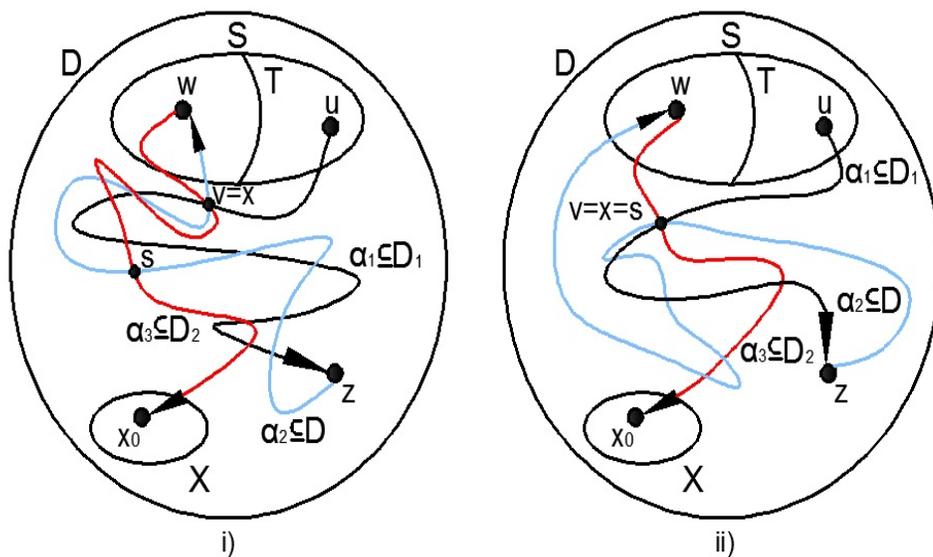


Figura 4.10: i) $v \neq s$. ii) $v = s$

en D .

Sea α_2 una zw - H -trayectoria contenida en D con $w \in (S - T)$. Como $w \in (S - T)$ se tiene que existe una wx_0 - H -trayectoria contenida en D_2 , digamos α_3 , ve figura 4.11.

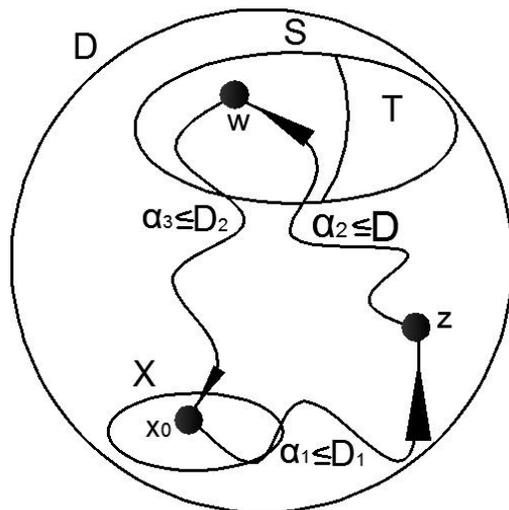


Figura 4.11: Construcción de $\widehat{C}_3[x_0, z, w, x_0]$

Afirmación 4: (a) $x_0 \notin V(\alpha_2)$, (b) $z \notin V(\alpha_3)$ y (c) $w \notin V(\alpha_1)$.

Demostración de la Afirmación 4. (a) Procedemos por contradicción. Supongamos que

$x_0 \in V(\alpha_2)$, entonces (z, α_2, x_0) es una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D y habríamos demostrado la Afirmación 2.

(b) Procedemos por contradicción. Supongamos que $z \in V(\alpha_3)$, entonces (z, α_3, x_0) es una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D y habríamos demostrado la Afirmación 2.

(c) Procedemos por contradicción. Supongamos que $w \in V(\alpha_1)$, entonces (x_0, α_1, w) es una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , entonces existe una $x_0S - H$ -trayectoria contenida en D con $w \in S$ y $x_0 \in X$, lo cual contradice la definición de X .

Para cualquier selección fija de vértices $v \in V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)$, $a \in V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)$ y $d, g \in V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)$. Denotaremos por: $T_1 = (x_0, \alpha_1, v)$, $T_2 = (v, \alpha_2, w)$, $T_3 = (z, \alpha_2, a)$, $T_4 = (a, \alpha_3, x_0)$, $T_5 = (w, \alpha_3, d)$, $T_6 = (d, \alpha_1, z)$, $T_7 = (x_0, \alpha_1, g)$ y $T_8 = (g, \alpha_3, x_0)$.

Observación 3) a) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$, b) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \notin F(H)$, c) $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \notin F(H)$ y d) $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \notin F(H)$.

Demostración de la Observación 3). Procederemos por contradicción, en cada uno de los cuatro casos.

a) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$, ve figura 4.12 i).

Procederemos por contradicción. Supongamos que $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \in F(H)$, entonces existe un $x_0w - H$ -camino contenido en D y por el lema 1.2.2 contiene una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D . Así que existe una $x_0S - H$ -trayectoria contenida en D con $w \in S$ y $x_0 \in X$, lo cual no es posible por la definición de X . Por lo tanto $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$.

b) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \notin F(H)$, ve figura 4.12 ii).

Supongamos que $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \in F(H)$, entonces existe un $zx_0 - H$ -camino contenido en D y por el lema 1.2.2 contiene una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D . Así que existe una $z(T \cup \{x_0\}) - H$ -trayectoria contenida en D , y habríamos demostrado la Afirmación 2. Por lo que $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \notin F(H)$.

c) Supongamos que $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \in F(H)$, entonces existe un $wz - H$ -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15, ve figura 4.13 i).

d) Supongamos que $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \in F(H)$, entonces existe un H -camino que interseca a D_1 e interseca a D_2 , lo cual contradice el lema 3.0.15, ve figura 4.13 ii).

Con lo que queda demostrada la Observación 3).

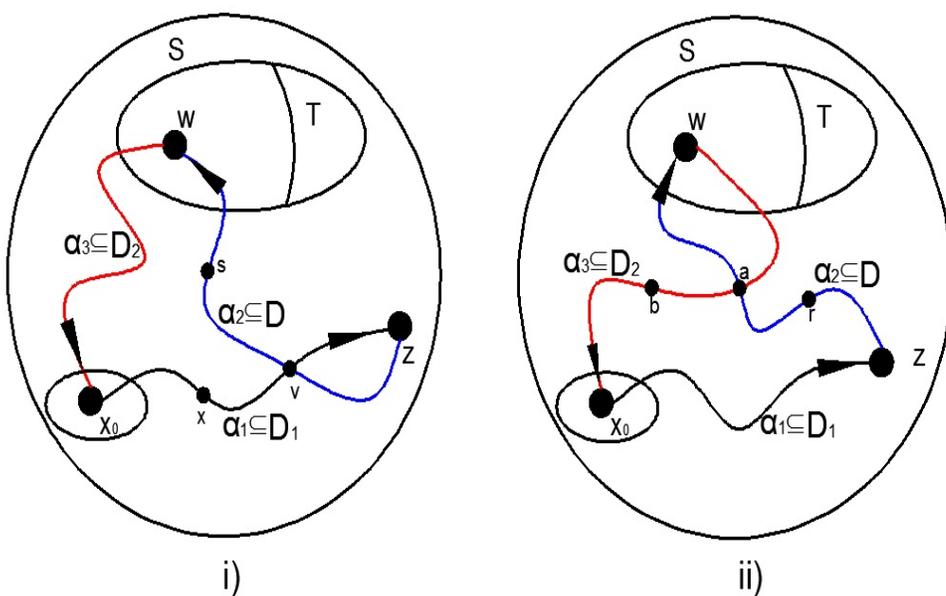


Figura 4.12: i) $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \in F(H)$. ii) $(c(\text{ff de } T_3), c(\text{fi de } T_4)) \in F(H)$

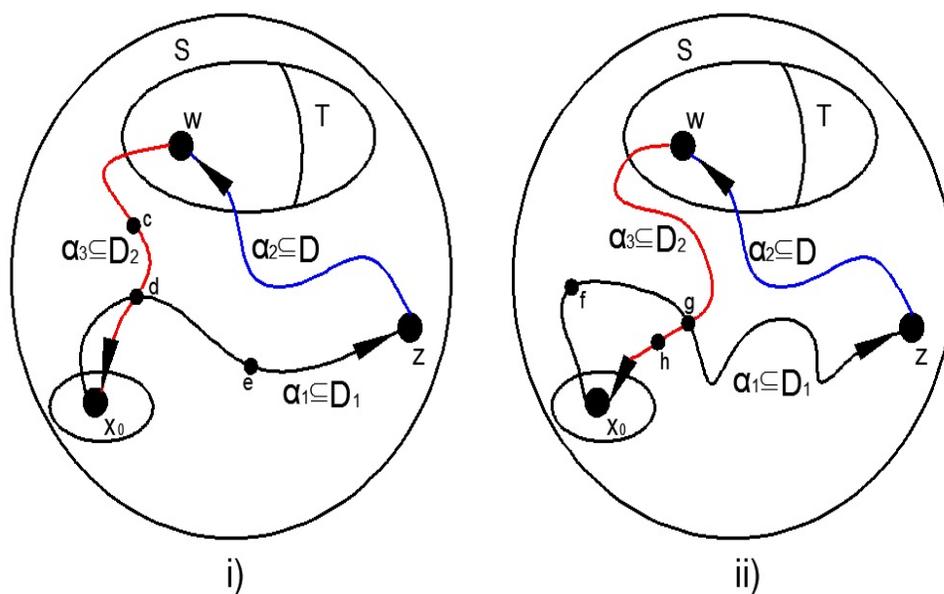


Figura 4.13: i) $(c(\text{ff de } T_5), c(\text{fi de } T_6)) \in F(H)$. ii) $(c(\text{ff de } T_7), c(\text{fi de } T_8)) \in F(H)$

Observación 4) Notemos que ninguna de las siguientes H -trayectorias existen en D .

1. No existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D .

Pues de lo contrario, existe una x_0S - H -trayectoria contenida en D con $w \in S$ y $x_0 \in X$, lo cual no es posible por la definición de X .

2. No existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D .

Por la misma razón que en el inciso anterior.

Analizaremos los siguientes posibles casos: a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$ y

b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$.

Caso a) $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$.

Consideremos los siguientes casos: a.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, a.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, a.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$ y a.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Caso a.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, ve figura 4.14 a).

Como $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{z\}$, $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$. Entonces $(x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, x_0)$ es un ciclo contenido en D (por construcción).

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha_3)), (c(\text{ff de } \alpha_3), c(\text{fi de } \alpha_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es un $\widehat{C}_3[x_0, z, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

Caso a.2) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, ve figura 4.14 b).

Sea v el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 . Notemos que $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $v \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, v)$, $\alpha''_1 = (v, \alpha_1, z)$ y $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha''_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha''_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(x_0, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v)$, por construcción, es un $K[v, z, w, v] \cup [x_0, v]$. Se sigue de la hipótesis 4 que existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso a.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, ve figura 4.15.

Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w . Notemos que $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Además $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación

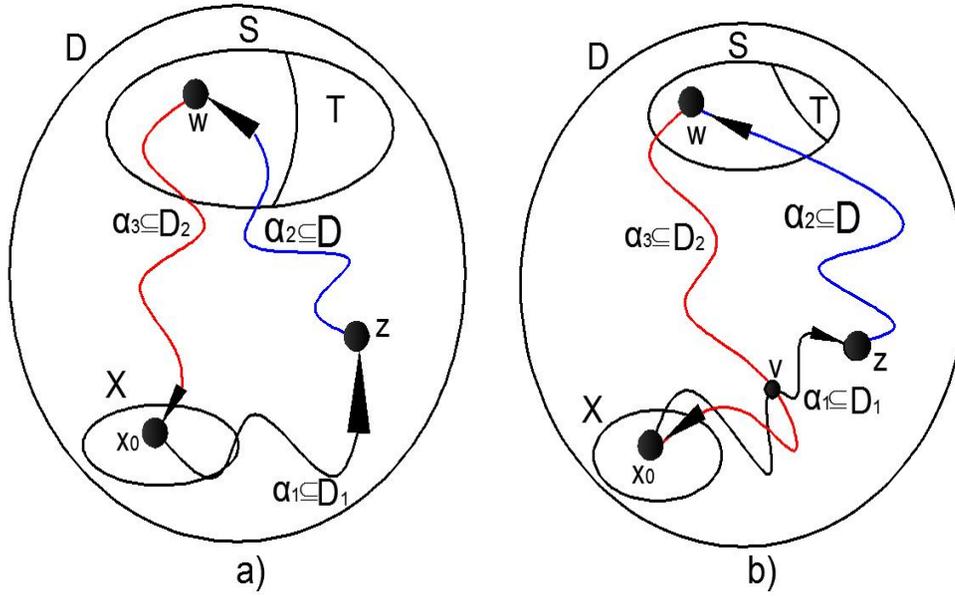


Figura 4.14: a) Caso a.1), b) Caso a.2)

4 inciso (b).

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, v)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$ y $\alpha''_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha''_3)), (c(\text{ff de } \alpha''_3), c(\text{fi de } \alpha_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_3, x_0) \cup (x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, v)$, por construcción, es un $L[w, v, x_0, z, v]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

Caso a.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Sea x el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w . Notemos que $x \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Además $x \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Sea v el último vértice de α_1 que está en α_3 distinto de x_0 . Notemos que $v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Por otro lado, $v \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c).

Caso I) x es anterior a v en α_3 , ve figura 4.16 a).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, v)$, $\alpha''_1 = (v, \alpha_1, z)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$ y $\alpha'_3 = (x, \alpha_3, v)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha''_1)), (c(\text{ff de } \alpha''_1), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c)

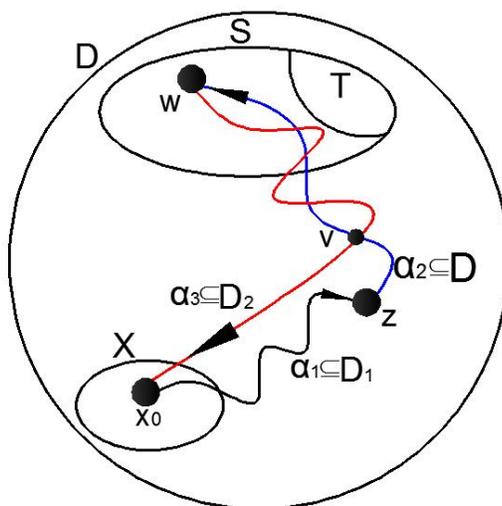


Figura 4.15: Caso a.3)

respectivamente.

Así que $(x_0, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, x) \cup (x, \alpha_3, v)$, por construcción, es un $K[v, z, x, v] \cup [x_0, v]$. Se sigue de la hipótesis 4 que existe una zx_0-H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso II) v es anterior a x en α_3 , ve figura 4.16 b).

Sea r el primer vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 . Notemos que $r \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $r \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c) (posiblemente $r = v$).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, r)$, $\alpha''_1 = (r, \alpha_1, z)$ y $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, r)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha_2)), (c(\text{ff de } \alpha_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha''_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(x_0, \alpha_1, r) \cup (r, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, r)$, por construcción, es un $K[r, z, w, r] \cup [x_0, r]$. Se sigue de la hipótesis 4 que existe una zx_0-H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso b) $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2)) - \{z\} \neq \emptyset$.

Consideremos los siguientes casos: b.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, b.2) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) = \{w\}$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$, b.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$ y b.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

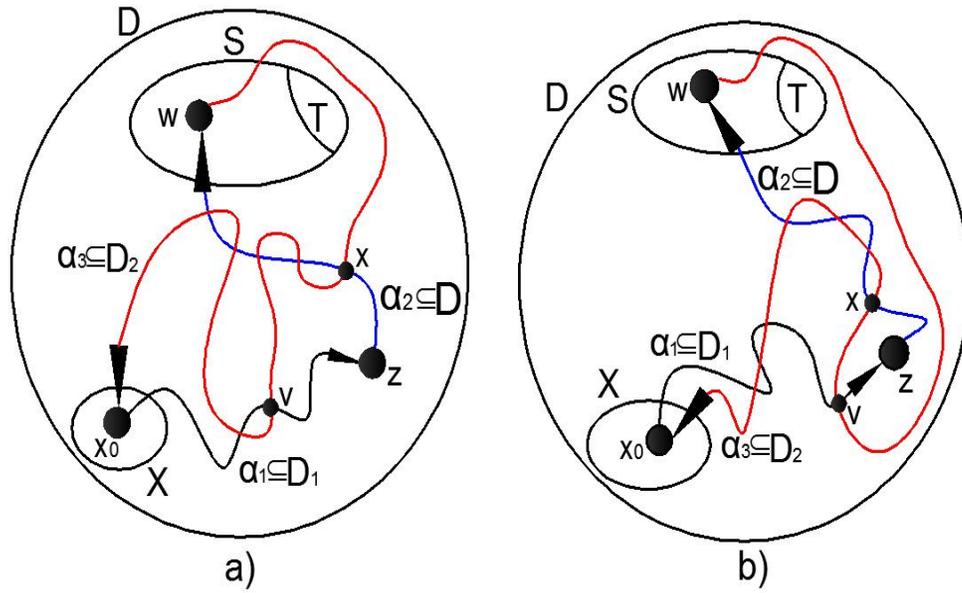


Figura 4.16: a) Caso I) x es anterior a v en α_3 , b) Caso II) v es anterior a x en α_3 .

Caso b.1) $V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3) = \{w\}$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$, ve figura 4.17.

Sea v el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Notemos que $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Por otro lado, $v \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, v)$ y $\alpha'_2 = (v, \alpha_2, w)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha_3)), (c(\text{ff de } \alpha_3), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3$ es un $\widehat{C}_3[x_0, v, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

Caso b.2) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) = \{w\}$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Sea r el primer vértice de α_1 que está en α_3 distinto de x_0 . Notemos que $r \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $r \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c). Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Observemos que $x \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Por otro lado, $x \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c).

Caso I) r es anterior a x en α_1 , ve figura 4.18 a).

Sea v el primer vértice anterior a x de α_1 que está en α_3 distinto de x_0 . Notemos que

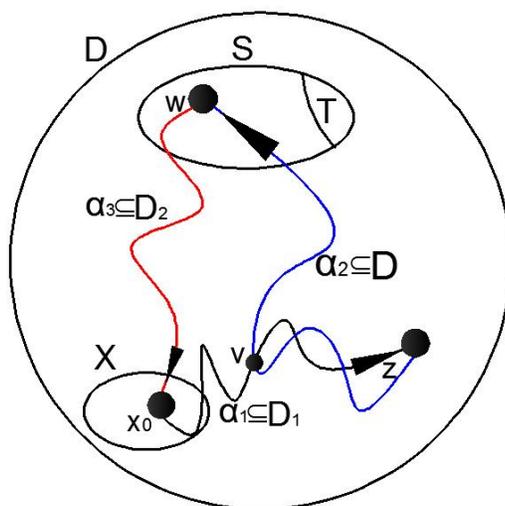


Figura 4.17: Caso b.1)

$v \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $v \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c) (posiblemente $v = r$).

Consideremos $\alpha'_1 = (v, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$, $\alpha''_2 = (x, \alpha_2, w)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, v)$ y $\alpha''_3 = (v, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha''_2)), (c(\text{ff de } \alpha''_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(z, \alpha_2, x) \cup (x, \alpha_2, w) \cup (w, \alpha_3, v) \cup (v, \alpha_1, x) \cup (v, \alpha_3, x_0)$, por construcción, es un $V[z, x, w, v, x] \cup [v, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una zx_0 - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso II) x es anterior a r en α_1 , ve figura 4.18 b).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$ y $\alpha'_2 = (x, \alpha_2, w)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha_3)), (c(\text{ff de } \alpha_3), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha_3$ es un $\widehat{C}_3[x_0, x, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

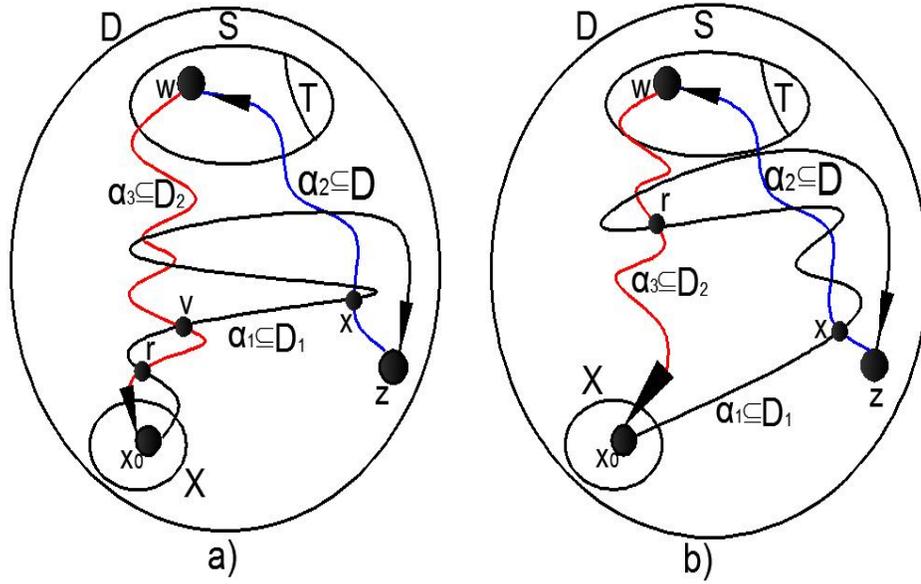


Figura 4.18: a) Caso I) r es anterior a x en α_1 , b) Caso II) x es anterior a r en α_1 .

Caso b.3) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3) = \{x_0\}$.

Sea x el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w . Notemos que $x \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Además $x \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Sea v el primer vértice de α_2 que está en α_1 distinto de z . Observemos que $v \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Por otro lado, $v \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c).

Caso I) x es anterior a v en α_2 , ve figura 4.19 a).

Consideremos $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, x)$ y $\alpha''_3 = (x, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha''_3)), (c(\text{ff de } \alpha''_3), c(\text{fi de } \alpha_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(w, \alpha_3, x) \cup (x, \alpha_3, x_0) \cup (x_0, \alpha_1, z) \cup (z, \alpha_2, x)$, por construcción, es un $L[w, x, x_0, z, x]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

Caso II) v es anterior a x en α_2 , ve figura 4.19 b).

Sea s el primer vértice de α_2 que está en α_1 anterior a x distinto de z . Notemos que $s \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Además $s \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c) (posiblemente $s = v$).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, s)$, $\alpha'_2 = (s, \alpha_2, x)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, x)$ y $\alpha''_3 = (x, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha''_3)), (c(\text{ff de } \alpha''_3), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(w, \alpha_3, x) \cup (x, \alpha_3, x_0) \cup (x_0, \alpha_1, s) \cup (s, \alpha_2, x)$, por construcción, es un $L[w, x, x_0, s, x]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

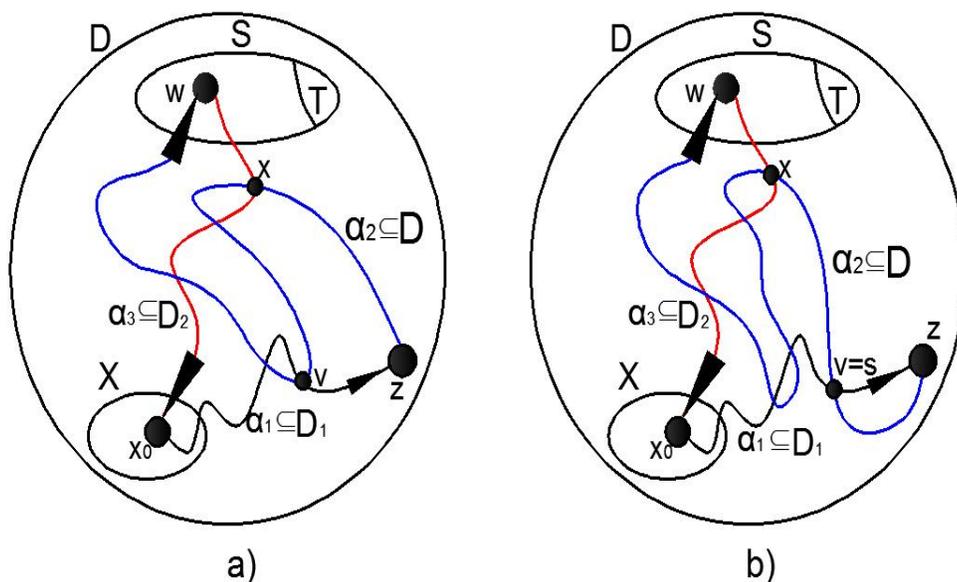


Figura 4.19: a) Caso I) x es anterior a v en α_2 , b) Caso II) v es anterior a x en α_2 .

Caso b.4) $(V(\alpha_2) \cap V(\alpha_3)) - \{w\} \neq \emptyset$ y $(V(\alpha_1) \cap V(\alpha_3)) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

Sea v el primer vértice de α_1 que está en α_2 distinto de z . Notemos que $v \neq x_0$, pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Por otro lado, $v \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c). Sea x el primer vértice de α_1 que está en α_3 distinto de x_0 . Notemos que $x \neq z$, pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $x \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c).

Caso *) v es anterior a x en α_1 .

Sea r el primer vértice de α_2 posterior a v que está en α_3 . Observemos que $r \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Además $r \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b) (posiblemente $r = x$ ó $r = w$).

Caso i) $r = w$, ve figura 4.20 i).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, v)$, $\alpha'_2 = (v, \alpha_2, r)$ y $\alpha'_3 = (r, \alpha_3, x_0)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $\alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3$ es un $\widehat{C}_3[x_0, v, w, x_0]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

Caso ii) $r \neq w$, ve figura 4.20 ii).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, v)$, $\alpha'_2 = (v, \alpha_2, r)$, $\alpha'_3 = (r, \alpha_3, x_0)$ y $\alpha''_3 = (w, \alpha_3, r)$.

Notemos que $\{(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha'_2)), (c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha'_3)), (c(\text{ff de } \alpha'_3), c(\text{fi de } \alpha'_1))\} \cap F(H) = \emptyset$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 incisos a), b) y c) respectivamente.

Así que $(w, \alpha_3, r) \cup (r, \alpha_3, x_0) \cup (x_0, \alpha_1, v) \cup (v, \alpha_2, r)$, por construcción, es un $L[w, r, x_0, v, r]$. Se sigue de la hipótesis 2 que existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1.

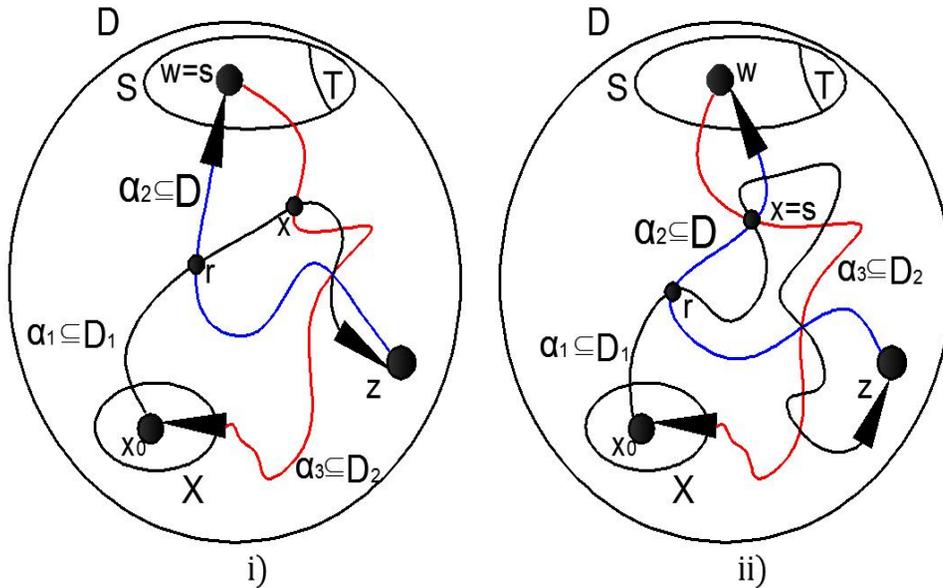


Figura 4.20: i) Caso i) $r = w$, ii) Caso ii) $r \neq w$.

Caso **) x es anterior a v en α_1 .

Sea s el primer vértice anterior a v de α_1 que está en α_3 distinto de x_0 . Observemos que $s \neq z$, pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $s \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por

Caso I) $x \notin Y^*$.

Consideremos $Y^{**} = (q, \alpha_3, x_0)$ y $Z^* = (z, \alpha_2, q)$.

Caso I.1) $Y^{**} \cap Z^* = \{q\}$, ve figura 4.22.

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, q)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, q)$ y $\alpha''_3 = (q, \alpha_3, x)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha''_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 inciso b).

Así que $(w, \alpha_3, q) \cup (q, \alpha_3, x) \cup (z, \alpha_2, q) \cup (x_0, \alpha_1, x)$, por construcción, es un $\widehat{T}[w, q, x] \cup [z, q] \cup [x_0, x]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una zx_0 - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

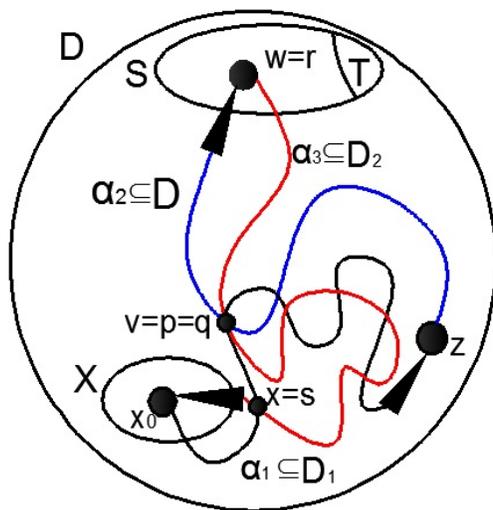


Figura 4.22: Caso I.1)

Caso I.2) $(Y^{**} \cap Z^*) - \{q\} \neq \emptyset$.

Sea m el último vértice de α_3 que está en α_1 distinto de x_0 . Observemos que $m \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b). Además $m \neq w$ pues $w \notin V(\alpha_1)$ por la Afirmación 4 inciso (c) (posiblemente $m = x$).

Caso I.2.1) $x = m$, ve figura 4.23 i).

Sea t el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w . Notemos que $t \neq x_0$, pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Por otro lado, $t \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, m)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, t)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, t)$ y $\alpha''_3 = (t, \alpha_3, m)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha''_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 inciso b).

Así que $(w, \alpha_3, t) \cup (t, \alpha_3, m) \cup (z, \alpha_2, t) \cup (x_0, \alpha_1, m)$, por construcción, es un $\widehat{A}[w, t, m] \cup [z, t] \cup [x_0, m]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso I.2.2) $x \neq m$, ve figura 4.23 ii).

Consideremos $\alpha'_1 = (m, \alpha_1, z)$, $\alpha'_2 = (q, \alpha_2, w)$, $\alpha'_3 = (q, \alpha_3, m)$ y $\alpha''_3 = (m, \alpha_3, x_0)$.

Así que $(q, \alpha_3, m) \cup (m, \alpha_3, x_0) \cup (m, \alpha_1, z) \cup (q, \alpha_2, w)$, por construcción, es un $\widehat{C}[q, m, x_0] \cup [m, z] \cup [q, w]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

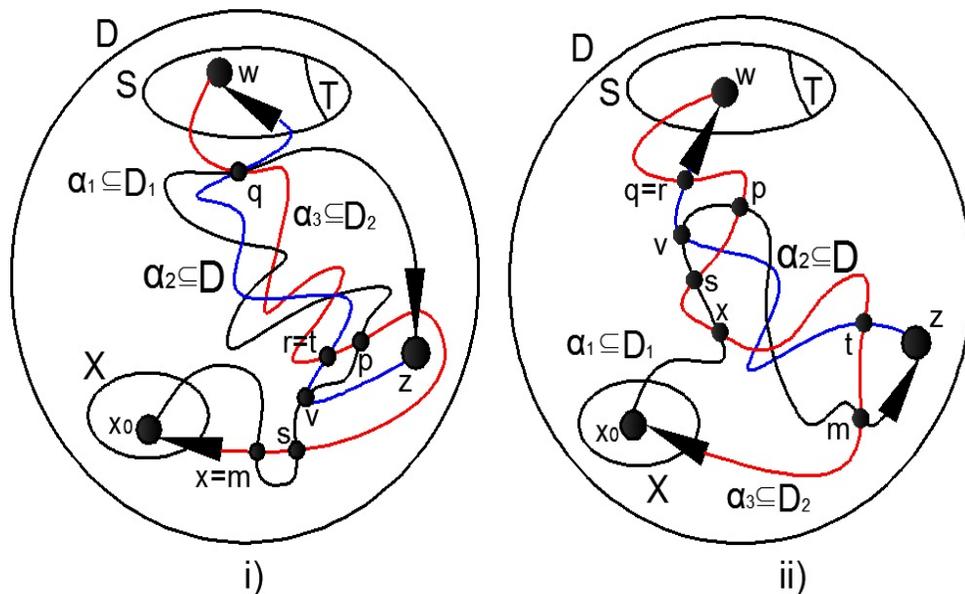


Figura 4.23: i) Caso I.2.1) $x = m$, ii) Caso I.2.2) $x \neq m$.

Caso II) $x \in Y^*$, ve figura 4.24.

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, q)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, x)$ y $\alpha''_3 = (x, \alpha_3, q)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha''_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 inciso d).

Así que $(w, \alpha_3, x) \cup (x, \alpha_3, q) \cup (x_0, \alpha_1, x) \cup (z, \alpha_2, q)$, por construcción, es un $\widehat{X} [w, x, q] \cup [x_0, x] \cup [z, p]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

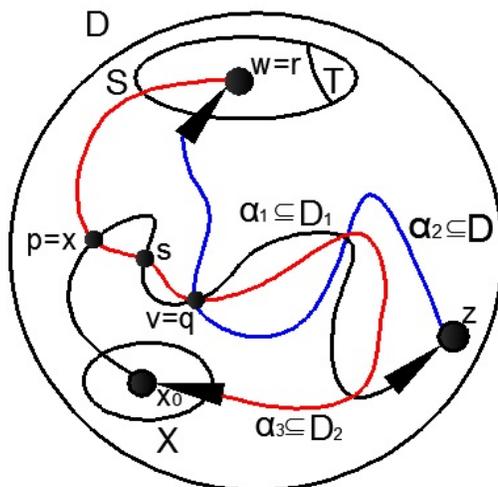


Figura 4.24: Caso II) $x \in Y^*$

Caso * * *) $x = v$.

Sea q el primer vértice de α_2 que está en α_3 distinto de w . Notemos que $q \neq x_0$ pues $x_0 \notin V(\alpha_2)$ por la Afirmación 4 inciso (a). Además $q \neq z$ pues $z \notin V(\alpha_3)$ por la Afirmación 4 inciso (b).

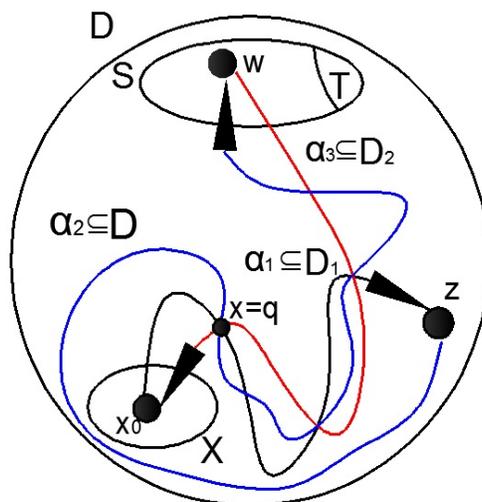
Caso i) $x = q$, ve figura 4.25.

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, x)$ y $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, x)$.

Así que $(x_0, \alpha_1, x) \cup (z, \alpha_2, x) \cup (w, \alpha_3, x)$, por construcción, es un $S [x_0, x] \cup [z, x] \cup [w, x]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una $x_0w - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una $zx_0 - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso ii) $x \neq q$.

Consideremos $Y^* = (w, \alpha_3, q)$.

Figura 4.25: Caso i) $x = q$.

Caso I) $x \notin Y^*$, ve figura 4.26 I).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, q)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, q)$ y $\alpha''_3 = (q, \alpha_3, x)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_2), c(\text{fi de } \alpha''_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 inciso b).

Así que $(w, \alpha_3, q) \cup (q, \alpha_3, x) \cup (z, \alpha_2, q) \cup (x_0, \alpha_1, x)$, por construcción, es un $\widehat{T}[w, q, x] \cup [z, q] \cup [x_0, x]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una zx_0 - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Caso II) $x \in Y^*$, ve figura 4.26 II).

Consideremos $\alpha'_1 = (x_0, \alpha_1, x)$, $\alpha'_2 = (z, \alpha_2, q)$, $\alpha'_3 = (w, \alpha_3, x)$ y $\alpha''_3 = (x, \alpha_3, q)$.

Notemos que $(c(\text{ff de } \alpha'_1), c(\text{fi de } \alpha''_3)) \notin F(H)$ ya que de lo contrario, contradice la Observación 3 inciso d).

Así que $(w, \alpha_3, x) \cup (x, \alpha_3, q) \cup (x_0, \alpha_1, x) \cup (z, \alpha_2, q)$, por construcción, es un $\widehat{X}[w, x, q] \cup [x_0, x] \cup [z, p]$. Se sigue de la hipótesis 5 que existe una de las siguientes H -trayectorias: *) Existe una x_0w - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 1; *) Existe una zx_0 - H -trayectoria contenida en D , lo cual contradice la Observación 4 inciso 2.

Con lo que habremos concluido la demostración de la Afirmación 2. \triangleleft

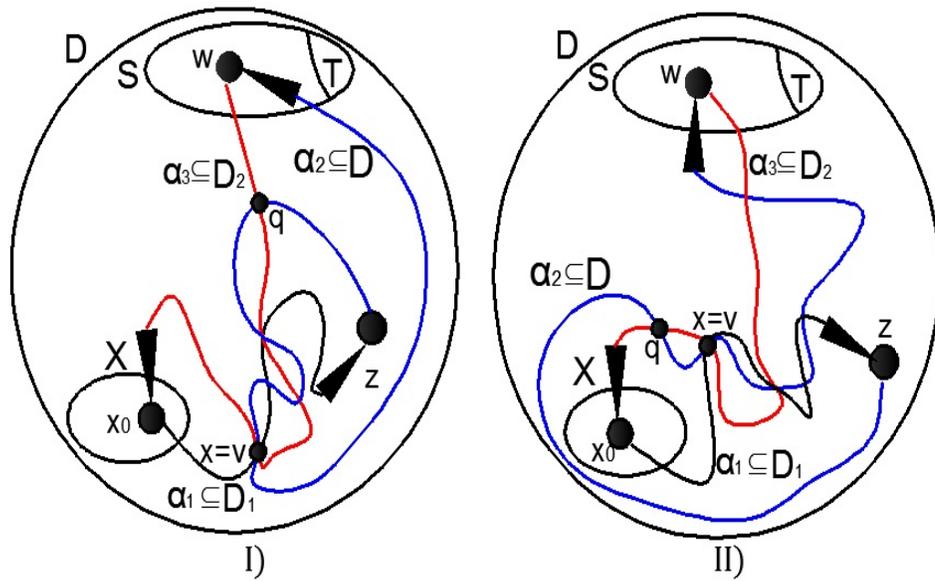


Figura 4.26: I) Caso I) $x \notin Y^*$, II) Caso II) $x \in Y^*$.

De las Afirmaciones 1) y 2) concluimos que $T \cup \{x_0\} \in \mathbf{S}$. Por lo tanto $T \cup \{x_0\} \in V(D_S)$.

Así que $(S, T \cup \{x_0\}) \in F(D_S)$ ya que $T \subseteq S$, $x_0 \in X$ y para cada $s \in S$ tal que $s \notin T$ existe una $sx_0 - H$ -trayectoria contenida en D_2 y no existe ninguna $x_0s - H$ -trayectoria contenida en D , lo cual contradice el hecho de que $\delta_{D_S}^+(S) = 0$. Por lo tanto S es un H -núcleo por trayectorias en D y el teorema queda demostrado.

□

Capítulo 5

Otros Resultados de $\gamma - H$ -ciclos

5.1. Aplicaciones

Notemos que el teorema 4.2.1 puede ser aplicado a todas aquellas digráficas que no contienen $\gamma - H$ -ciclos. Generalizaciones de resultados previos son obtenidos como consecuencia directa del teorema 4.2.1.

A continuación daremos algunas definiciones para después dar una lista de teoremas para digráficas que satisfacen no contener $\gamma - H$ -ciclos.

Definición 5.1.1. Una digráfica D es policromática si D es al menos 3-coloreada.

Definición 5.1.2. Una digráfica D es casitransitiva si para $\{u, v, w\} \subseteq V(D)$ tales que $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$ implica que $(u, w) \in F(D)$ ó $(w, u) \in F(D)$.

Definición 5.1.3. Sea D una digráfica y $u \in V(D)$ denotaremos por:

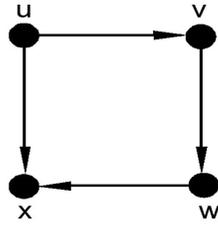
$$F^+(u) = \{(u, v) \in F(D) \mid u \in V(D)\}$$

$F^+(u)$ es monocromático si todos sus elementos tienen el mismo color.

Definición 5.1.4. Decimos que D es 3-casitransitiva si para cada $u, v \in V(D)$ tal que existe una uv -trayectoria de longitud 3 se tiene que $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$

Definición 5.1.5. Denotaremos por T_4 a la siguiente digráfica, ve figura 5.1:

1. $V(T_4) = \{u, v, w, x\}$
2. $F(T_4) = \{(u, v), (v, w), (w, x), (u, x)\}$

Figura 5.1: T_4

Definición 5.1.6. Denotaremos por \tilde{T}_6 al torneo bipartito definido como sigue, ve figura 5.2:

1. $V(\tilde{T}_6) = \{u, v, w, x, y, z\}$ y
2. $F(\tilde{T}_6) = \{(u, w), (v, w), (w, x), (w, z), (x, y), (y, u), (y, v), (z, y)\}$ con $\{(u, w), (w, x), (y, u), (z, y)\}$ de color 1 y $\{(v, w), (w, z), (x, y), (y, v)\}$ de color 2.

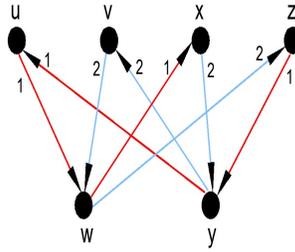


Figura 5.2: \tilde{T}_6 . En esta figura supondremos que el color 1 es el color rojo y el color 2 es el color azul.

Definición 5.1.7. Definimos \vec{T}_8 como la siguiente digráfica, ve figura 5.3:

1. $V(\vec{T}_8) = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$ y
2. $F(\vec{T}_8) = \{(s, t), (s, x), (t, u), (t, y), (u, v), (u, z), (v, w), (v, s), (w, x), (w, t), (x, y), (x, u), (y, z), (y, v), (z, s), (z, w)\}$ con $\{(s, t), (s, x), (t, u), (u, v), (u, z), (v, w), (x, u), (z, w)\}$ de color 1 y todas las demás flechas de \vec{T}_8 color 2.

Definición 5.1.8. Una $(2, k - 2)$ -subdivisión de \mathcal{C}_2 -bicolor es un ciclo $C = T_1 \cup T_2$ tal que:

1. T_1 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud 2 de color a
2. T_2 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud $k - 2$ de color b

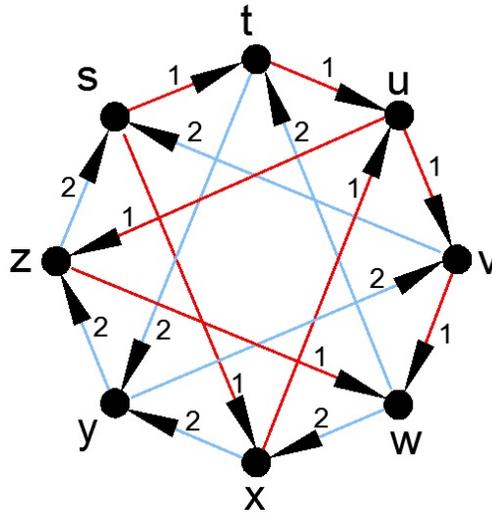


Figura 5.3: En esta figura supondremos que el color 1 es el color rojo y el color 2 es el color azul.

y satisfacen que $a \neq b$.

Definición 5.1.9. Sea T un torneo m -coloreado. Diremos que T tiene la propiedad PI_k si cumple una de las siguientes condiciones:

1. Cada $C_k \subseteq T$ es a lo más bicolor y no es una $(2, k - 2)$ -subdivisión de \mathcal{C}_2 -bicolor
2. Cada $C_t \subseteq T$ es a lo más bicolor con $t < k$ (de manera que no es policromático).

Definición 5.1.10. Una $(1, 1, k - 2)$ -subdivisión de \mathcal{C}_3 3-coloreado es un ciclo $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ tal que:

1. T_1 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud 1 de color a ,
2. T_2 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud 1 de color b ,
3. T_3 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud $k - 2$ de color c

y satisfacen que $a \neq b$, $b \neq c$ y $a \neq c$.

Definición 5.1.11. Una $(1, 1, k - 2)$ -subdivisión de T_3 3-coloreado es una trayectoria $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ tal que:

1. T_1 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud 1 de color a ,
2. T_2 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud 1 de color b ,

3. T_3 es una trayectoria dirigida monocromática de longitud $k - 2$ de color c

y satisfacen que $a \neq b, b \neq c$ y $a \neq c$.

Definición 5.1.12. Sean T un torneo m -coloreado. Diremos que T satisface la propiedad PII_k para algún entero fijo $k \geq 3$ si:

1. No existe alguna $(1, 1, k - 2)$ -subdivisión de C_3 3-coloreado en T
2. No existe alguna $(1, 1, k - 2)$ -subdivisión de T_3 3-coloreado en T
3. No existe alguna $(1, 1, t - 2)$ -subdivisión de C_3 3-coloreado en T , con $t < k$ y $t \geq 3$.

Observación. Notemos que:

1. Sean H y D dos digráficas. Una digráfica D m -coloreada es una digráfica H -coloreada.
2. En particular, si H es la digráfica que consiste únicamente de lazos, ve figura 5.4, se satisface que todo H -camino (H -trayectoria o H -ciclo) en D es un camino monocromático (trayectoria monocromática o ciclo monocromático) en D y viceversa. Claramente H es una digráfica fuertemente transitiva.

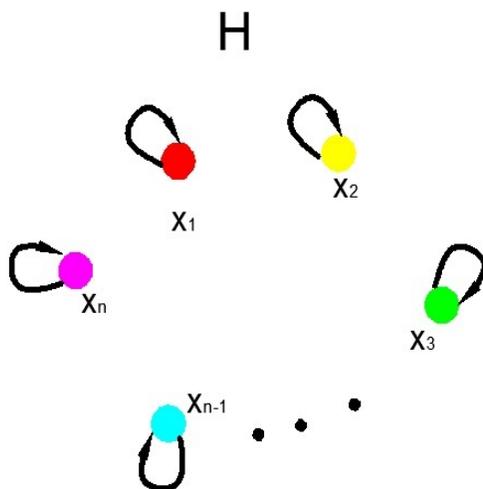


Figura 5.4: H es la digráfica que consiste únicamente de lazos.

Observación. Notemos que en la literatura de digráficas m -coloreadas cuando hagan referencia que dos caminos monocromáticos (ciclos monocromáticos o trayectorias monocromáticas), digamos T_1 y T_2 están coloreados con distinto color, diremos que esto será interpretado en digráficas H -coloreadas como dos H -caminos (H -ciclos o H -trayectorias) T_1 y T_2 tal que $(c(\text{ff de } T_1), c(\text{fi de } T_2)) \notin F(H)$.

A continuación daremos una lista de teoremas para digráficas que no contienen $\gamma - H$ -ciclos. Cuando hagamos referencia en estos a la digráfica H , nos referiremos a la H dada en la observación 5.1.

Teorema 5.1.1. [34] *Sean H una digráfica fuertemente transitiva y D una digráfica H -coloreada tal que todo ciclo en D es un H -ciclo, entonces D no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.2. [30] *Sea D una digráfica m -coloreada casitransitiva tal que para cada $u \in V(D)$, $F^+(u)$ es monocromático y D no contiene una $(1, 1, k - 2)$ -subdivisión de C_3 3-coloreado. Entonces D no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.3. [31] *Sea D una digráfica m -coloreada 3-casitransitiva tal que para cada $u \in V(D)$, $F^+(u)$ es monocromático. Si cada C_3 , C_4 y T_4 contenido en D es casimonocromático, entonces D no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.4. [19] *Sea T un torneo m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático. Entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.5. [19] *Sea T un torneo m -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es un ciclo casimonocromático. Entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.6. [20] *Sea D una digráfica m -coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u, v) de algún torneo T m -coloreado (es decir, $D \cong T \setminus (u, v)$). Si cada ciclo dirigido contenido en D de longitud a lo más 4 es casimonocromático, entonces D no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.7. [26] *Sea T un torneo bipartito m -coloreado tal que cada ciclo de longitud 4 es casimonocromático, cada ciclo de longitud 6 es monocromático y T no contiene subtorneos isomorfos a \tilde{T}_6 . Entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.8. [27] *Sea T un torneo bipartito m -coloreado. Si cada ciclo dirigido de longitud 4 en D es monocromático, entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.9. [14] *Sea T un torneo m -coloreado. Si T satisface la propiedad PI_k para algún entero $k \geq 4$, entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.10. [14] *Sea T un torneo m -coloreado. Si T satisface la propiedad PII_k para algún entero $k \geq 3$, entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.11. [28] *Sea T un torneo bipartito m -coloreado tal que cada C_4 es casimonocromática, cada T_4 es casimonocromática y T no contiene subdigráficas inducidas isomorfas a \vec{T}_8 . Entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Teorema 5.1.12. [22] *Sea D una digráfica m -coloreada obtenida de la eliminación de una única flecha (u, v) de algún torneo T m -coloreado. Si D no contiene $(1, 1, k - 2)$ -subdivisión de C_3 ni de T_3 3-coloreados, entonces T no contiene $\gamma - H$ -ciclos.*

Conclusiones

Come hemos visto a lo largo de este trabajo el estudio de los núcleos es muy amplio y aunque no toda digráfica tiene núcleo hay bases muy importantes.

Con la culminación de este trabajo publicamos dos artículos el primero que consiste del capítulo 3, el cual fue aceptado en "Graphs and Combinatorics" (se encuentra en versión digital). Y el segundo que consiste de los capítulos 4 y parte del 5 el cual fue enviado a la revista "Discussiones Mathematicae" (estamos en espera que sea aceptado), ambas son revistas indexadas que cuentan con reconocimiento internacional.

También introducimos cuatro conceptos: H-separación, H-subdivisión de C_3 , H-subdivisión de P_3 y $\gamma - H$ -ciclos.

Para la demostración de nuestros teoremas utilizamos una técnica similar a la empleada en [37] .

Para finalizar podemos decir que estamos muy satisfechas por la importancia de los resultados obtenidos. Más aún, dejamos un primer resultado del concepto de $\gamma - H$ -ciclos que tiene diversas aplicaciones (vistas en la sección 5.1), aunque este es muy técnico.

Bibliografía

- [1] P. Arpin, V. Linek, Reachability problems in edge colored digraphs, *Discrete Mathematics*, 307 (2007) 2276-2289.
- [2] A. Arroyo y H. Galeana-Sánchez, The Path Partition Conjecture is true for some generalizations of tournaments, *Discrete Mathematics* 313 (2013) 293-300.
- [3] C. Berge, A combinatorial problem in logic, *Discrete Mathematics*, 17 (1977) 23-26.
- [4] C. Berge, Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux. *Publ. Econométriques*, Vol. 6 (1977).
- [5] C. Berge, *Graph*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6 (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [6] C. Berge y P. Duchet, Recent problems and results about kernels in directed graphs. *Discrete Mathematics*, 86 (1-3) (1990), 27-31.
- [7] C. Berge y P. Duchet, Problème, Séminaire MSH, Paris, January 1983, 14.
- [8] M. Blidia, P. Duchet, H. Jacob y F. Maffray, Some operations preserving the existence of kernels, *Discrete Mathematics.*, 205 (1999) 211-216.
- [9] E. Boros y V. Gurvich, Perfect graphs are Kernel-Solvable, *Discrete Mathematics*, 159 (1996) 35-55.
- [10] G. Chartrand y L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, California, 1986.
- [11] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, The Strong Perfect Graph Theorem, *Annals of Mathematics*. 164 (2006) 51-229.
- [12] V. Chvátal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [13] P. Delgado-Escalante y H. Galeana-Sánchez, Restricted domination in arc-colored digraphs, *Discret Applied Mathematics*, en revisión.

- [14] P. Delgado-Escalante y H. Galeana-Sánchez, Kernels and cycles subdivisions in arc-colored tournaments, *Discussiones Mathematicae* 29 (2009) 101-117.
- [15] P. Duchet, Graphes Noyau-Parfaits, *Ann. Discrete Math.* 9 (1980) 93-101.
- [16] W. Fernández de la Vega, Kernels in random graphs. *Discrete Mathematics*, 82 (1990) 213-217.
- [17] A. Fraenkel, Planar kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 2$ are NP-complete, *Discrete Appl. Math.* 3 (1981) 257-262.
- [18] H. Galeana-Sánchez, A new method to extend KP-digraphs to CKI-digraphs, *Discrete Mathematics*, 69 (1988) 207-209.
- [19] H. Galeana-Sánchez, On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments, *Discrete Math.* 156 (1996), 103-112.
- [20] H. Galeana-Sánchez, Kernels in edge-coloured digraphs, *Discrete Mathematics*, 184 (19-20) (1998), 87-99.
- [21] H. Galeana-Sánchez, Semikernels modulo F and kernels in digraphs, *Discrete Mathematics*, 218 (1-3) (2000) 61-71.
- [22] H. Galeana-Sánchez y J.J. García-Ruvalcaba, Kernels in the closure of coloured digraphs, *Discussiones Mathematicae, Graph Theory* 20 (2000), 103-110.
- [23] H. Galeana-Sánchez, G. Gaytán-Gómez y R. Rojas-Monroy, Monochromatic cycles and monochromatic paths in arc-colored digraphs, *Discussiones Mathematicae*, 31 (2011) 283-295.
- [24] H. Galeana-Sánchez, R. Gómez, J.J. Montellano-Ballesteros, Independent transversals of longest paths in locally semicomplete and transitive digraphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29 (3) (2009) 469-480.
- [25] H. Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments, *Discrete Math.* 282 (2004) 275-276.
- [26] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy, Monochromatic paths and quasi-monochromatic cycles in edge-coloured bipartite tournaments, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 28 (2008) 285-306.
- [27] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy, On monochromatic paths and monochromatic 4-cycles in edge coloured bipartite tournaments, *Discrete Mathematicae* 285 (2004) 313-318.

- [28] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy, Independent domination by monochromatic paths in arc coloured bipartite tournaments, en revisión.
- [29] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy, Monochromatic paths and most 2-coloured arc sets in edge-coloured tournaments, *Graphs and Combinatorics* 21 (2005) 307-317.
- [30] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy y B. Zavala, Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in quasi-transitive digraphs, en revisión.
- [31] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy y B. Zavala, Monochromatic paths and monochromatic sets of arcs in 3-quasitransitive digraphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 29 (2009) 337-347.
- [32] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy and B. Zavala, Restricted domination in the subdivision digraph, *Discrete Math.*, en impresión.
- [33] H. Galeana-Sánchez y R. Sánchez-López, H -kernels in the D -join, *Ars Combinatoria*, 98 (2011) 353-377.
- [34] H. Galeana-Sánchez e I. Torres-Ramos, H -paths and H -cycles in H -coloured digraphs, *Graphs and Combinatorics*, en impresión.
- [35] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, On kernel-perfect critical digraphs, *Discrete Mathematics*, 59 (1986) 257-265.
- [36] H. Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara, Extending kernel perfect digraphs to kernel perfect critical digraphs, *Discrete Mathematics*, 94 (1991) 181-187.
- [37] Gaytán Gómez G.(2011), Conjuntos Independientes y absorbentes por trayectorias monocromáticas (Tesis de doctorado), UNAM, México, D.F.
- [38] P. Hajnal, Graph partitions, Thersis, J. A. University, Szeged, 1984 (supervisada por L.Lovász).
- [39] J. Laborde, C. Payan y N. Xuong, Independent sets and longest path in digraphs, *Graphs and other combinatorial topics Prague*, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium of Graph Theory, 15 (1982) 173-177.
- [40] J. M. Le Bars. Counterexample of the 0-1 law for fragments of existential second-order logic; an overview. *Bull. Association for Symbolic Logic*, 6 (2000) 67-82.
- [41] J. M. Le Bars. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. *Logic in Computer Science*, Proceedings of the 17th Annual IEEE Symposium on, (2002) 2225-234.

- [42] V. Linek y B. Sands. A note on paths in edge-coloured tournaments, *Ars Combinatoria* 44 (1996) 225-228.
- [43] L. Lovász, On decomposition of graphs, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1 (1966) 237-238.
- [44] Shen Minggang, On monochromatic paths in m -coloured tournaments, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B* 45 (1) (1988) 108-111 .
- [45] V. Neumann-Lara, Seminúcleos de una digráfica, *An Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México*, II (1971) 55-62.
- [46] B. Reid, Monotone reachability in arc-colored tournaments, *Congressus Numerantium*, 146 (2000) 131-141.
- [47] M. Richardson, On weakly ordered systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946) 113-116.
- [48] B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales. Volume 2: Applications et problèmes spécifiques.* Dunod, Paris (1970).
- [49] S. Rudeanu, Notes sur l'existence et l'unicité du noyau d'un graphe. *Reveu Française Rech. Operat.*, 33 (1964) 20-26.
- [50] N. Sauer, B. Sands y R. Woodrow, On monochromatic paths in edge coloured digraphs, *Journal Combinatorial Theory, Ser. B* 33 (3) (1982) 271-275.
- [51] M. Stiebitz, Decomposing graphs under degree constraints. *J. Graph Theory* 23 (1996) 321-324.
- [52] J. Topp, Kernels of digraphs formed by some unary operations from other digraphs, *J. Rostock Math. Kolloq.* 21 (1982) 73-81.
- [53] J. Von Leeuwen, Having a Grundy numbering is NP-complete. Report 207 Computer Science Department, Pennsylvania State University. University Park, PA, (1976).
- [54] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, (1944).
- [55] J. Vronka, Vertex sets of graphs with prescribed properties Thesis, P. J. Safárik University, Košice, 1986 (supervisada por P. Mihók).
- [56] A. Włoch, I. Włoch, On (k, l) -kernels in generalized products, *Discrete Mathematics* 164 (1997) 295-301.
- [57] I. Włoch, On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs, *Cent. Eur. J. Math.* 6 No. 4 (2008) 537-542.

- [58] I. Włoch: On kernels by monochromatic paths in D -join. *Ars. Combinatoria* 98 (2011) 215-224.