



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

**DECOHERENCIA CON ENTORNOS DE ESPINES
ANIDADOS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
CARLOS ANDRÉS GONZÁLEZ GUTIÉRREZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. THOMAS H. SELIGMAN
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. JOSÉ F. RÉCAMIER
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DR. PABLO BARBERIS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS

CUERNAVACA, MORELOS - JUNIO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi madre Adela,
mi abuelita Donatila
y a mi hermana Ena Luz.*

Agradecimientos

A todos mis familiares, por su apoyo desde Colombia a lo largo de toda la maestría.

A Adriana Lozano por su confianza, amor y apoyo en toda mi carrera.

A mi asesor, el Dr. Thomas Seligman por aceptarme como su estudiante y por ser un excelente tutor.

Al Dr. Carlos Pineda, mi segundo tutor, por su amistad, valiosos consejos y ayuda incondicional en el desarrollo de este trabajo.

Al Dr. José Récamier, por sus sabios consejos e invaluable atención en cada momento de la maestría.

Al Dr. Rafael Mendez, por brindarme su confianza y un hermoso hogar durante mis estudios.

A los Dres. Pablo Barberis, Luis Benet y Markus Müller por revisar mi trabajo y realizar valiosas sugerencias en el escrito de esta tesis.

Al Dr. Thomas Gorin por su colaboración y disposición para aclarar dudas y generar nuevas ideas.

A todos mis amigos y compañeros de batalla en el Instituto de Ciencias Físicas, en especial a Ricardo, Natalia, César, Mota, Arturo, Cristina Salto, David (el pollito), May y Luisana.

A mis compañeros del grupo, Yenni, Diego, Paulino, Adrian, Héctor y Mosisés.

A México, un país hermoso, lleno de personas espectaculares y al apoyo económico brindado a través del CONACyT y el proyecto “*Sistemas abiertos clásicos y cuánticos*” IG101113 DGAPA-UNAM durante mis estudios de maestría.

Resumen

En este trabajo se estudia la decoherencia y el decaimiento del entrelazamiento de un par de Bell en presencia de un ambiente de espines anidados. El ambiente de espines está constituido por dos sistemas de espines distintos, a los cuales llamamos ambiente cercano y ambiente lejano, respectivamente. El modelo base usado en este trabajo es el modelo de Ising pateado, el cual presenta distintos regímenes dinámicos según los valores de los parámetros que involucra. La decoherencia es medida a través de la pureza y se analiza el efecto de distintos acoplamientos ambiente cercano-lejano sobre su evolución en el tiempo, observando una interesante disminución en la tasa de decoherencia para el régimen de acoplamiento fuerte ambiente cercano-lejano en el caso de ambientes caóticos. El decaimiento del entrelazamiento es cuantificado mediante la concurrencia de Wootters para dos qubits, mostrando resultados similares al caso de la pureza. Finalmente, explotamos la flexibilidad dinámica del modelo y analizamos distintas combinaciones para las dinámicas en cada ambiente y su influencia sobre la decoherencia.

Índice general

1. Introducción y conceptos fundamentales	1
1.1. Estados puros	3
1.2. Estados mezclados	4
1.3. Entrelazamiento	5
1.4. Entropía de von Neumann	8
1.5. El operador de densidad reducido	8
1.6. Entrelazamiento de formación y concurrencia	9
1.7. Decoherencia	11
1.8. La esfera de Bloch	14
1.9. El efecto Zeno cuántico	16
2. Decoherencia con entornos de espines	19
2.1. Introducción	19
2.2. El modelo de Ising pateado (MIP)	20
2.3. Regímenes dinámicos del MIP	21
2.4. Decoherencia de un qubit en un entorno de espines	25
2.5. Evolución de la pureza y de la entropía de von Neumann	27
2.6. Desfasamiento	28
2.7. Decoherencia en la esfera de Bloch	32
3. Decoherencia con entornos de espines anidados	35
3.1. Introducción	35
3.2. Modelos	36
3.3. Evolución de la pureza	38
3.4. Evolución de la Concurrencia	45
3.5. Evolución en el plano CP	47
3.6. Ambientes con dinámicas distintas	49
4. Conclusiones	53

[Bibliografía](#)

55

Índice de figuras

1.1. Vectores de polarización en la esfera unitaria de Bloch. Los vectores verde (con extremo en la superficie de la esfera) y amarillo (dentro de la esfera) representan un estado puro y mezclado respectivamente.	16
2.1. Distribución de espaciamiento de niveles a primeros vecinos para el MIP con $L = 12$. En la gráfica de arriba se muestran las curvas analíticas en color azul para el caso integrable (Poisson), en rojo el caso caótico (Wigner surmise) y en negro el resultado de la simulación para el MIP con $\phi = \pi/2$. En la gráfica de abajo se muestran los mismos resultados para $\phi = \pi/4$. De esta manera confirmamos la dependencia del régimen dinámico del MIP con el parámetro ϕ	23
2.2. Distribución de espaciamiento de niveles a primeros vecinos para el MIP con $\phi = \pi/6$, $L = 12$	24
2.3. Topología estrella. El sistema central está representado por el círculo blanco y el entorno por círculos rojos. La línea de trazo significa acoplamiento de Ising más débil que la línea continua.	26
2.4. a) Evolución temporal de la pureza y b) evolución temporal de la entropía de von Neumann.	28
2.5. Decaimiento del valor absoluto de la amplitud de fidelidad en el ambiente y las coherencias del qubit central como función del tiempo. Hemos escogido $L = 16$, $b^q_z = 1.4$, $\phi = \pi/4$ y $J_{\text{int}} = 0.01$	32
2.6. Evolución temporal del extremo del vector de polarización en la esfera de Bloch para el ambiente en el régimen a) integrable con $\phi = \pi/2$, b) mixto con $\phi = \pi/6$ y c) caótico con $\phi = \pi/4$. Para todos los casos hemos usado $J = 1$, $J_{\text{int}} = 0.01$, $L = 16$	33

3.1. Configuraciones propuestas en un ambiente de espines anidados.	37
3.2. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica de los ambientes (cercano y lejano) es caótica con $J_e = J_{e'} = 1.0$ y $\phi = \pi/4$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$	39
3.3. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica de los ambientes (cercano y lejano) es integrable con $J_e = J_{e'} = 1.0$ y $\phi = \pi/2$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$	42
3.4. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica de los ambientes (cercano y lejano) es intermedia con $J_e = J_{e'} = 1.0$ y $\phi = \pi/6$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$	43
3.5. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la entropía de von Neumann del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. Los parámetros son los mismos que en la Figura 3.2.	44
3.6. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la Concurrencia del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. Los parámetros son los mismos que en la Figura 3.2.	46
3.7. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución del par de Bell para 3000 pasos de tiempo en el plano CP para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. Los parámetros son los mismos que en 3.2.	48

<p>3.8. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica en el ambiente cercano es integrable con $\phi = \pi/2$ y en el lejano es caótico con $\phi = \pi/4$. $J_e = J_{e'} = 1.0$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.</p> <p>3.9. Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica en el ambiente cercano es caótica con $\phi = \pi/4$ y en el lejano es integrable con $\phi = \pi/2$. $J_e = J_{e'} = 1.0$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.</p>	<p>50</p> <p>52</p>
---	---------------------

Capítulo 1

Introducción y conceptos fundamentales

El hecho de que ningún sistema físico está totalmente aislado del resto del universo ha preocupado a los físicos desde hace mucho tiempo. En 1874 W. Thomson escribió un artículo titulado “*The kinetic theory of the dissipation of energy*”, donde discutía la conducción de calor y el equilibrio térmico en el contexto de la paradoja de Loschmidt. En éste trabajo, Thomson atribuyó la irreversibilidad a la interacción de cualquier sistema físico con todas las otras moléculas del universo [Tho74]. En los sistemas físicos descritos por la teoría cuántica (sistemas cuánticos), la interacción con el ambiente que los rodea da lugar a la pérdida de coherencia de dicho sistema, lo que se conoce como el fenómeno de la *decoherencia*. La interacción ineludible de los sistemas cuánticos con su ambiente natural es hoy en día el principal enemigo en la implementación de tecnologías cuánticas [Joo03, DiV00]. En particular, el control y manipulación de superposiciones coherentes de estados (incluyendo estados entrelazados), representa un gran desafío experimental [SKK⁺00, HSKH⁺05, HHR⁺05, YE09, AdMHM⁺07]. La teoría de la decoherencia está también íntimamente relacionada con los aspectos fundamentales de la teoría cuántica, como lo es el problema de la medición y la frontera entre el mundo cuántico y el clásico [Zur03, Sch05]. Desde los dos puntos de vista; fundamental y tecnológico, es preciso entender, explicar y atacar este fenómeno que afecta virtualmente a todos los sistemas físicos. La evolución no unitaria de los sistemas cuánticos es descrita mediante la teoría de sistemas cuánticos abiertos, donde se consideran diferentes suposiciones acerca de la naturaleza del acoplamiento

y/o del ambiente, ya que una descripción completa de los grados de libertad de éste no sería factible [BP02]. Si suponemos que la dinámica es Markoviana, es decir, que podemos despreocupar los efectos de memoria del ambiente, entonces es posible describir la dinámica de nuestro sistema a través de una ecuación de movimiento para el operador de densidad reducido en la forma de una ecuación maestra llamada ecuación maestra de GKLS (Gorini-Kossakowski-Lindblad-Sudarshan) [Lin76, GKS08]. Por otro lado, si consideramos explícitamente el ambiente, la dinámica del sistema cuántico abierto será no-Markoviana. El límite Markoviano en este caso se alcanza para una dimensión muy grande del ambiente con dinámica muy rápida. Los modelos de ambientes que estudiaremos en este trabajo (modelos de espines) son claramente no-Markovianos, pero no discutiremos aquí este aspecto de los modelos ya que se encuentra fuera de nuestros objetivos.

Entre los modelos de ambiente usados en este contexto, destacan principalmente aquellos en los que los grados de libertad del ambiente son simulados por un baño de osciladores armónicos a temperatura finita [FJ63, CL83]. Para muchos ambientes físicos esta descripción resulta muy adecuada, sin embargo, no todos los ambientes pueden ser bien representados por esta dinámica. Por ejemplo, a bajas temperaturas y para el régimen de acoplamiento fuerte sistema-ambiente, el ambiente puede ser apropiadamente descrito por una colección de sistemas de dos niveles, comúnmente referido como un *ambiente de espines* [PS00, DS01]. Se ha demostrado que estos dos modelos de ambientes conllevan a diferentes comportamientos de la decoherencia [Sch05]. En particular, la tasa de decoherencia generalmente incrementa con la temperatura en un ambiente de osciladores armónicos, mientras que lo opuesto puede suceder con un ambiente de espines.

En este trabajo estamos interesados en estudiar la decoherencia y el entrelazamiento de un sistema cuántico central (un par de qubits) en interacción con un ambiente compuesto, esto es, un ambiente formado por dos ambientes: *i*) el ambiente cercano, que interactúa directamente con el sistema central, y *ii*) el ambiente lejano, que no interactúa directamente con el sistema central, pero se encuentra en interacción con el ambiente cercano. Para modelar dichos ambientes usaremos un modelo de espines basado en el modelo de Ising pateado (MIP) [Pro02], el cual adicionalmente nos permite observar la influencia del régimen dinámico del ambiente sobre la decoherencia del sistema central.

Sobre la estructura de la tesis – Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el presente capítulo se da una breve revisión de los conceptos principales usados a lo largo de la tesis. En el segundo capítulo se introduce el estudio de la decoherencia inducida con entornos constituidos por sistemas de dos niveles (espines), revisando el modelo principal usado en éste trabajo e ilustrando que nuestra implementación numérica es correcta. El tercer capítulo muestra nuestros resultados al extender el modelo para el estudio la decoherencia usando un sistema tripartita que consta de un par de Bell en presencia de un ambiente de espines compuesto por dos ambientes (ambiente de espines anidados). Exploramos los distintos regímenes dinámicos para cada uno de los ambientes y finalmente en el capítulo cuatro presentamos las conclusiones y las perspectivas del trabajo a futuro.

1.1. Estados puros

En mecánica cuántica, un estado puro está descrito mediante un vector $|\psi\rangle$ (en la notación de Dirac) que pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si \mathcal{H} es finito, siempre podemos escoger una base ortonormal $\{|i\rangle\} \in \mathcal{H}$ y expresar cualquier vector de estado como una combinación lineal de los elementos de dicha base en la siguiente forma

$$|\psi\rangle = \sum_i^N c_i |i\rangle, \quad (1.1)$$

donde los coeficientes $c_i \in \mathbb{C}$ y $N = \dim \mathcal{H}$ denota la dimensión del espacio.

El valor esperado de un observable \mathcal{O} , cuyo operador Hermitiano asociado es O , respecto del estado general $|\psi\rangle$ puede ser obtenido de la forma

$$\langle O \rangle = \langle O \rangle_\psi = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (1.2)$$

El sistema cuántico no trivial más simple es el sistema de dos niveles o *qubit*, como se le conoce en el contexto de la información y computación cuántica. El vector de estado más general de un qubit es de la forma

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.3)$$

donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forman una base ortonormal llamada *base computacional* y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

1.2. Estados mezclados

En la práctica, el estado de un sistema físico a menudo no está perfectamente determinado. Si el sistema considerado posee un conjunto de probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ de estar en un estado tomado del ensemble $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_l\rangle\}$, entonces hablamos de un estado mezclado. En este caso nuestra información acerca del sistema es incompleta y no es posible describir el ensemble estadístico de estados puros por medio de un solo vector de estado, por lo tanto, un nuevo formalismo es necesario ¹ [NC00]. Definimos un *operador de densidad* o matriz de densidad², como una suma convexa de proyectores de estados puros pesados con sus correspondientes probabilidades en la forma

$$\rho = \sum_{k=1}^l p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_{k=1}^l p_k \rho_k, \quad (1.4)$$

con

$$\sum_{k=1}^l p_k = 1 \quad \text{y} \quad p_k \geq 0. \quad (1.5)$$

Si el estado es puro, entonces solo tenemos un estado posible con probabilidad uno y el operador de densidad se reduce a un proyector

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.6)$$

mientras que para un operador de densidad general no es tan fácil encontrar la descomposición 1.4. Es conveniente introducir una medida de pureza para un estado cuántico definida como

$$\mathcal{P}(\rho) \equiv \text{Tr} \rho^2, \quad (1.7)$$

con las propiedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\rho) &= 1, & \text{para estados puros} \\ \mathcal{P}(\rho) &< 1, & \text{para estados mezclados.} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nótese que la pureza está también acotada por debajo, $1/N \leq \mathcal{P} \leq 1$. Para garantizar que ρ es un operador de densidad, éste debe satisfacer las siguientes propiedades:

¹El formalismo del operador o matriz de densidad fue introducido independientemente por John von Neumann y Lev Landau en 1927. Éste formalismo resulta muy útil en la descripción de subsistemas de sistemas compuestos y en la medición de sistemas cuánticos.

²Estrictamente hablando, la matriz de densidad es la representación matricial del operador de densidad, pero en la literatura comúnmente se refieren indistintamente a estos dos términos.

1. *Hermiticidad.* Como hemos mencionado, siempre podemos desarrollar cualquier estado puro $|\psi_k\rangle$ sobre una base ortonormal $\{|i\rangle\}$ en la forma

$$|\psi_k\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} |i\rangle, \quad (1.9)$$

por lo tanto tenemos que

$$\rho_{ij}^* = \left(\sum_{k=1}^l p_k \langle i|\psi_k\rangle \langle \psi_k|j\rangle \right)^* = \sum_{k=1}^l p_k c_i^{(k)*} c_j^{(k)} = \rho_{ji}. \quad (1.10)$$

2. *Positividad.* El operador de densidad es no negativo, esto es, para cualquier vector $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_{k=1}^l p_k |\langle \phi | \psi_k \rangle|^2 \geq 0. \quad (1.11)$$

3. *Normalización.* Usando la expresión 1.10 tenemos

$$\text{Tr } \rho = \sum_{i=1}^n \rho_{ii} = \sum_{k=1}^l p_k \sum_{i=1}^n |c_i^{(k)}|^2 = \sum_{k=1}^l p_k = 1. \quad (1.12)$$

El valor esperado de un observable O con respecto a un estado mezclado puede ser calculado como

$$\langle O \rangle = \langle O \rangle_\rho = \sum_{k=1}^l p_k \langle \psi_k | O | \psi_k \rangle = \text{Tr}(\rho O). \quad (1.13)$$

En lo que sigue trataremos con estados generales y describiremos el estado de un sistema haciendo uso del operador de densidad.

1.3. Entrelazamiento

La historia del entrelazamiento comienza en 1935 con los trabajos de Einstein, Podolsky, Rosen [EPR35] y Schrödinger [Sch35], quienes se dieron cuenta de algo extraño y misterioso en la mecánica cuántica. Esta característica poco intuitiva de los sistemas cuánticos compuestos a la cual Schrödinger llamó en alemán “*Verschränkung*” (entrelazamiento), surge como consecuencia del principio de superposición e implica la existencia de estados cuánticos globales que no pueden ser escritos como

un producto tensorial de estados de subsistemas individuales. En la actualidad el entrelazamiento es considerado un recurso fundamental para el procesamiento de información cuántica, por ejemplo, para la teleportación de estados cuánticos [NC00]. Podríamos decir que es la característica más distintiva entre los sistemas clásicos y cuánticos.

Para estados puros es sencillo definir matemáticamente un estado entrelazado como aquel que no se puede escribir en la siguiente forma

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (1.14)$$

donde $|\psi_i\rangle$ es el vector de estado del i -ésimo subsistema, por ejemplo, estados de espín de un electrón. Los estados que si se pueden representar en la forma 1.14 son llamados estados productos.

La definición de entrelazamiento puede ser extendida para estados mixtos de la siguiente manera. Consideremos el caso más sencillo, el de sistemas bipartitas, esto es, sistemas cuánticos constituidos por solo dos subsistemas que usualmente etiquetamos con A y B (Alice y Bob) y cuyo estado global representamos con un operador de densidad ρ_{AB} que actúa sobre $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Los estados mixtos son llamados separables si admiten la siguiente descomposición convexa de productos

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}, \quad (1.15)$$

donde $p_i \in [0, 1]$ y $\sum_i p_i = 1$, ρ_A y ρ_B son operadores de densidad sobre los espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Los estados cuánticos entrelazados son simplemente aquellos que no son separables.

Los estados mixtos separables no contienen entrelazamiento, ya que por definición son una mezcla de estados producto y por lo tanto pueden ser creados mediante operaciones locales y comunicación clásica³ (LOCC) de estados producto puros. Un problema no trivial es, dado un operador de densidad de un sistema cuántico compuesto, no siempre es posible decir si este es entrelazado o no, esto constituye lo que se llama el problema

³Como un ejemplo de LOCC consideremos lo siguiente. Dos observadores Alice y Bob comparten dos estados de Bell: $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ y $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ y un canal de comunicación clásica (teléfono o internet). Alice y Bob pueden escoger uno de los dos estados compartidos, pero la información de cual estado es exactamente no está disponible. Usando LOCC Alice y Bob pueden distinguir cual estado comparten. Alice solo tiene que medir su qubit y enviar el resultado de la medición a Bob. Luego que Bob reciba el mensaje de Alice tendrá que realizar una medición sobre su qubit y así ambos sabrán que estado tienen realmente.

de separabilidad de estados cuánticos y es un tema de mucha actividad actualmente. Una condición necesaria para la separabilidad de estados mixtos fue dada por A. Peres y los Horodecki [Per96, HHH96], en la cual se dice que si el estado 1.15 es separable entonces su traspuesta parcial es positiva, esto es, el operador de densidad reducido que resulta de esta operación es físicamente aceptable. Se ha mostrado que el criterio PPT (como se le llama en la literatura por sus siglas en inglés Positive Partial Transpose) es necesario y suficiente para sistemas bipartitas de dimensión baja como 2×2 y 2×3 , aunque en variable continua el problema ya ha sido resuelto para el caso de estados Gaussianos bipartitas de número arbitrario de modos [GKLC01].

1.3.1. Descomposición de Schmidt

Para la clasificación del entrelazamiento, es útil escribir un estado puro en su descomposición de Schmidt [Pre98]

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^d \lambda_k |u_k, v_k\rangle, \quad (1.16)$$

donde

$$d = \min\{N_A, N_B\}, \quad (1.17)$$

$$\lambda_k > 0, \quad \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 = 1. \quad (1.18)$$

El número d en la expresión 1.16 es conocido como número de Schmidt, el conjunto de valores positivos $\{\lambda_k\}$ son los coeficientes de Schmidt y las bases locales ortonormales $\{|u_k\rangle\} \in \mathcal{H}_A$ y $\{|v_k\rangle\} \in \mathcal{H}_B$ son llamadas bases de Schmidt. De la descomposición se sigue que los operadores de densidad reducidos para cada subsistema son

$$\rho_A = \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 |u_k\rangle\langle u_k|, \quad (1.19)$$

$$\rho_B = \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 |v_k\rangle\langle v_k|. \quad (1.20)$$

Podemos ver que los estados producto están automáticamente escritos en la forma de Schmidt con $d = 1$, esto es, los operadores de densidad reducidos corresponden a estados puros. Por otro lado, si un estado admite

una descomposición de Schmidt con solo un coeficiente, entonces este es necesariamente un estado producto. Se puede entonces formular un criterio para el entrelazamiento de estados puros. Un estado $|\psi\rangle$ que describe a un sistema bipartita, es entrelazado, si y solo si, los operadores de densidad reducidos de cada subsistema describen estados mixtos,

$$|\psi\rangle \text{ es entrelazado} \Leftrightarrow d > 1. \quad (1.21)$$

Lo anterior pone de manifiesto la equivalencia entre el entrelazamiento y la presencia de mezclas locales.

1.4. Entropía de von Neumann

Una medida frecuentemente usada para cuantificar la información de un estado cuántico es la *entropía de von Neumann*, la cual fue introducida en 1927 por el matemático John von Neumann [Neu55]. Esta entropía puede verse como una generalización de la entropía de la mecánica estadística clásica al caso de operadores de densidad en mecánica cuántica. Está definida como

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr} \rho \log_2 \rho \equiv -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i. \quad (1.22)$$

Si ρ representa un estado puro, entonces todos los $\lambda_i = 0$ excepto uno, el cual debe tomar el valor de uno y por lo tanto $S(\rho) = 0$. Por otro lado, para un estado máximamente mezclado, el cual refleja nuestra completa ignorancia acerca de cual de los estados puros del ensemble ha sido preparado, tenemos que $\lambda_i = p_i = 1/N$ y entonces $S(\rho) = \log_2(N)$, el cual es el máximo valor que puede tomar la entropía. Básicamente, la pureza \mathcal{P} y la entropía S nos brindan información similar sobre el estado cuántico en el caso de estados muy puros o muy mezclados. La ventaja de la pureza es que es mucho más fácil de calcular. La definición de la entropía 1.22 implica la diagonalización del operador de densidad, lo cual, para sistemas de dimensión grande es una tarea numérica más costosa en términos de tiempo.

1.5. El operador de densidad reducido

Los operadores de densidad reducidos juegan un papel importante en el formalismo de la decoherencia. La motivación para introducir tales

operadores es la descripción de un sistema cuántico \mathcal{S} que se encuentra entrelazado con otro sistema \mathcal{B} (ambiente). En este caso, el estado cuántico del sistema total puede ser puro, y por lo tanto, en principio se tiene acceso a toda información contenida en este, o es posible que el observador solo pueda tener acceso a un subsistema (por ejemplo \mathcal{S}), esto es, este puede realizar mediciones sobre \mathcal{S} pero no sobre \mathcal{B} . Cualquier inferencia acerca del estado total del sistema compuesto debe ser derivable de operaciones locales sobre \mathcal{S} , lo cual permitirá conocer la distribución de probabilidad de tales resultados de la medición. El objeto matemático que nos permite tener acceso a toda la información a partir de la observación del sistema \mathcal{S} es el operador de densidad reducido, dado por

$$\rho_{\mathcal{S}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}} \rho. \quad (1.23)$$

donde $\text{Tr}_{\mathcal{B}}$ significa tomar la traza sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} . Esta operación es conocida como traza parcial y se puede interpretar como un promedio sobre los grados de libertad del sistema no observado (el ambiente) [Sch05].

1.6. Entrelazamiento de formación y concurrencia

Una característica importante del estado definido en 1.16 es que los coeficientes de Schmidt son invariantes cuando las partes del sistema son sometidas a transformaciones unitarias separadas. Por lo tanto, cualquier intento de cuantificar el entrelazamiento de $|\psi\rangle$, debe depender solo de estos coeficientes. Definimos el entrelazamiento de formación $E(|\psi\rangle)$ como la entropía parcial de von Neumann asociada al subsistema A (1.19) o al B (1.20) en la forma

$$E(|\psi\rangle) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = - \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 \log_2 \lambda_k^2. \quad (1.24)$$

La definición anterior puede ser extendida a estados mezclados. Para un estado mezclado de un sistema bipartita, la entropía de von Neumann de un subsistema ya no es una buena medida de entrelazamiento, debido a que cada subsistema puede ahora tener una entropía no nula incluso si no existe entrelazamiento. El entrelazamiento de formación en este caso está diseñado para identificar el entrelazamiento irreducible del estado mezclado. Definimos el entrelazamiento de formación para un estado

mezclado ρ como

$$E(\rho) = \min_k \sum_k p_k E(|\psi_k\rangle), \quad (1.25)$$

para todas las posibles realizaciones del ensemble $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. La medida 1.25 satisface todos los requerimientos esenciales de una buena medida de entrelazamiento: convexidad, no incremento bajo operaciones cuánticas locales y comunicación clásica, no incremento bajo mediciones locales, continuidad asintótica y otras propiedades [Bru02, PV07]. Es un desafío calcular la ecuación 1.25 para estados mezclados generales debido a la minimización que ésta conlleva. Hasta ahora se han obtenido formulas explicitas para $E(\rho)$ solo para algunos casos especiales.

Para el caso de un estado puro $|\psi\rangle$ que describe a dos qubits, podemos definir una cantidad C llamada *conurrencia* como

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|, \quad (1.26)$$

donde $|\tilde{\psi}\rangle$ representa el estado resultante de aplicar la operación de “spin flip” sobre el complejo conjugado de $|\psi\rangle$ en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, esto es, $|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\psi^*\rangle$, con σ_y el operador de Pauli. En este caso la ecuación 1.24 puede ser escrita como

$$E(|\psi\rangle) = \mathcal{E}(C(|\psi\rangle)), \quad (1.27)$$

donde la función $\mathcal{E}(C)$ está definida por

$$\mathcal{E}(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (1.28)$$

con

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x). \quad (1.29)$$

Vemos que la función \mathcal{E} es monótonamente creciente para $0 \leq C \leq 1$; así la concurrencia puede ser considerada como una medida de entrelazamiento por sí misma, aunque no en el sentido del entrelazamiento de formación, la concurrencia no es una medida basada en información. La conexión entre la concurrencia y el entrelazamiento es más clara si expresamos el estado $|\psi\rangle$ en la base computacional

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle. \quad (1.30)$$

Uno puede mostrar que $|\psi\rangle$ es separable si y solo si $ad = bc$. Una medida de entrelazamiento puede ser la diferencia entre ad y bc . En efecto, esto es lo que hace la concurrencia

$$C(|\psi\rangle) = 2|ad - bc|. \quad (1.31)$$

Para el caso de un estado mezclado ρ , el cálculo de la ecuación 1.25 se reduce a encontrar el correspondiente mínimo de la expresión

$$C(\rho) = \min \sum_k p_k C(|\psi_k\rangle), \quad (1.32)$$

lo cual simplifica el procedimiento. La función $\mathcal{E}(C)$ definida en 1.28 además de ser monótonamente creciente de C , es también convexa, por lo que tenemos

$$\mathcal{E}(C(\rho)) = \min \mathcal{E} \left(\sum_k p_k C(|\psi_k\rangle) \right) \leq \min \sum_k p_k \mathcal{E}(C(|\psi_k\rangle)) = E(\rho), \quad (1.33)$$

lo cual quiere decir que $\mathcal{E}(C(\rho))$ es la cota inferior de $E(\rho)$. Hasta este punto hemos considerado (sin probarlo) dos hechos acerca de la concurrencia. Primero, siempre existe una descomposición de ρ que puede minimizarse en 1.32 con un conjunto de estados puros que tienen la misma concurrencia. Este hecho hace la desigualdad en 1.33 una igualdad, así que $\mathcal{E}(C)$ nos da el entrelazamiento de formación. Segundo, uno puede encontrar una expresión explícita para $C(\rho)$ [Woo98], la cual resulta ser

$$C(\rho) = \max\{0, \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_4\}, \quad (1.34)$$

donde $\tilde{\lambda}_i$ son las raíces cuadradas de los valores propios del operador $\rho\tilde{\rho}$ en orden descendiente. Aquí $\tilde{\rho}$ es el resultado de aplicar la operación de “spin flip” a ρ , esto es, $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ y la conjugación compleja es tomada en la base computacional. De esta manera, la concurrencia es una medida de entrelazamiento que nos permite dar una expresión analítica del entrelazamiento de formación para un par de qubits.

1.7. Decoherencia

La decoherencia puede interpretarse como la creación no reversible de correlaciones cuánticas de un sistema con su ambiente [Zur03]. Dichas correlaciones contienen información acerca del sistema y hacen imposible la descripción separada de sistema y entorno.

Antes de considerar la influencia de un ambiente sobre el sistema central y las correlaciones entre ellos, vamos a describir un ejemplo simple que ayudará a tener una idea intuitiva del fenómeno de la decoherencia. Consideremos una partícula microscópica (por ejemplo un electrón), que

puede estar en dos estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$, con energías E_1 y E_2 respectivamente. La evolución temporal de los estados está entonces dada por $|\phi_n\rangle \rightarrow e^{-iE_n t} |\phi_n\rangle$. El estado inicial $|\phi\rangle$ es una superposición de los dos estados, esto es, $|\phi\rangle = c_1 |\phi_1\rangle + c_2 |\phi_2\rangle$. La evolución unitaria de dicho estado viene dada por

$$|\phi\rangle \rightarrow e^{-iE_1 t} c_1 |\phi_1\rangle + e^{-iE_2 t} c_2 |\phi_2\rangle. \quad (1.35)$$

Podemos factorizar uno de los dos términos exponenciales, lo cual resulta en una fase global del estado que no es interesante

$$|\phi\rangle \rightarrow e^{-iE_1 t} (c_1 |\phi_1\rangle + e^{-i\omega t} c_2 |\phi_2\rangle), \quad (1.36)$$

donde $\omega = E_2 - E_1$. Para tener una idea del orden de magnitud de ω y del periodo de oscilación, podemos asumir que nuestra partícula se ve afectada por el campo gravitacional terrestre. Entonces tenemos que $\omega = mg\Delta z$. Para un electrón y una separación del paquete de ondas de $\Delta z = 1\text{nm}$ obtenemos que $\omega = 10^{-4}\text{s}^{-1}$, y si $\Delta z = 1\text{m}$ entonces $\omega = 10^5\text{s}^{-1}$; para una masa de 1g , los valores anteriores son $\omega = 10^{23}\text{s}^{-1}$ y 10^{32}s^{-1} . Como dato de comparación, 10^{-22}s es el tiempo que le toma a la luz pasar a través de un núcleo atómico.

De lo anterior concluimos que para masas y distancias macroscópicas, la fase ωt en la ecuación 1.36 oscila tan rápido que durante una medición solo registramos su promedio. En otra forma de verlo, si la fase está cambiando rápidamente, entonces podremos detectar uno de los dos estados: $|\phi_1\rangle$ o $|\phi_2\rangle$. Cual de estos dos estados es de hecho una pregunta abierta.

Podemos usar la descripción en términos del operador de densidad. De la ecuación 1.36 tenemos

$$\rho = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* e^{i\omega t} \\ c_1^* c_2 e^{-i\omega t} & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Otra vez vemos el rápido cambio que sufren las coherencias (elementos no diagonales del operador de densidad). Si queremos realizar alguna medición sobre este sistema, debemos recordar que toda medición requiere una cantidad de tiempo finito T , aunque este puede ser muy pequeño. Entonces podemos promediar el operador de densidad sobre este tiempo de medición T y obtener

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \rho = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* s(T) \\ c_1^* c_2 s^*(T) & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

con

$$s(T) = \lim_{\omega T \rightarrow \infty} e^{i\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \rightarrow 0. \quad (1.39)$$

Por lo tanto, para tiempos de promedio suficientemente grandes, podemos escribir

$$\rho \approx \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Por ejemplo, si $\omega = 10^{32}\text{s}^{-1}$ y el tiempo de medición es de $T = 10^{-16}\text{s}$, tenemos que $|s(T)| \sim 10^{-16}$. Bajo estas circunstancias, efectivamente no podremos observar las coherencias en una superposición, ya que desaparecen extremadamente rápido. Esta es una forma en la que una mezcla estadística surge de un estado puro como consecuencia de la decoherencia. Cabe notar que el procedimiento anterior es bastante heurístico, pero nos ayuda a entender cualitativamente y de una manera sencilla el fenómeno de la decoherencia.

Hemos mencionado anteriormente que la decoherencia de un sistema cuántico puede ser interpretada como entrelazamiento con el ambiente [Zur03]. Consideremos un sistema cuántico compuesto de un qubit y un ambiente en interacción. Un ambiente típico se caracteriza por: dimensión muy grande, dinámica no controlable y la imposibilidad de realizar mediciones sobre él. Asumimos que inicialmente el qubit se encuentra en su estado más general y el estado inicial global es separable, esto es,

$$|\psi(t=0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\phi\rangle, \quad (1.41)$$

donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forman una base ortonormal para el qubit con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $|\phi\rangle$ es el estado inicial del ambiente. Podemos suponer que la interacción depende del estado del qubit, por ejemplo, que está representada por una compuerta CNOT² y elegimos $|\phi\rangle = |0\rangle$. Después de cierto tiempo, debido a la interacción con el ambiente, el estado del sistema global es

$$|\psi'\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle. \quad (1.42)$$

Note que la interacción CNOT ha entrelazado el qubit con el ambiente, ya que el estado 1.42 no es separable. El operador de densidad reducido (del

²La compuerta CNOT cambia el segundo qubit (target qubit) si y solo si el primer qubit está en 1 (control qubit). La operación CNOT puede representarse por medio de la siguiente matriz en la base computacional:

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

qubit), después del proceso de decoherencia, se obtiene trazando sobre los grados de libertad del ambiente

$$\rho' = \text{Tr}_{\text{env}} |\psi'\rangle\langle\psi'| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

El proceso de decoherencia anterior tiene una interpretación particularmente atractiva: es evidente de la ecuación 1.42 que el ambiente ha ganado información acerca del estado del qubit a través de la interacción CNOT. En efecto, si el estado del qubit es $|0\rangle$, el estado del ambiente se mantiene en $|0\rangle$; por otro lado, si el estado del qubit es $|1\rangle$, el estado del ambiente se vuelve $|1\rangle$. Por lo tanto, la operación CNOT es básicamente una medición realizada por el ambiente sobre el qubit. La información de las fases relativas de los coeficientes α y β que aparecen en el estado inicial están ahora escondidas en forma de correlaciones cuánticas entre el qubit y el ambiente. Dado que no mantuvimos registros del estado del ambiente, esta información la hemos perdido. En resumen, la información fluye desde el qubit hacia el mundo exterior.

1.8. La esfera de Bloch

El operador de densidad para un qubit se representa por medio de una matriz Hermitiana de 2×2

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Los términos diagonales positivos, ρ_{00} y ρ_{11} , son llamados *poblaciones*, y son las probabilidades de encontrar al qubit en el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$, respectivamente. Su suma es la unidad: $\rho_{00} + \rho_{11} = 1$. Como ya se hizo notar antes, los términos no diagonales $\rho_{01} = \rho_{10}^*$, llamados *coherencias*, son nulos para una mezcla estadística de $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Debido a que ρ es un operador definido semipositivo, las coherencias satisfacen la desigualdad

$$|\rho_{10}| = |\rho_{01}| \leq \sqrt{\rho_{00}\rho_{11}}, \quad (1.45)$$

donde la igualdad se cumple para estados puros.

El operador de densidad 1.44 se puede desarrollar con coeficientes reales en la base de operadores de Pauli y la identidad en la siguiente forma

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}), \quad (1.46)$$

donde \vec{P} es un vector tridimensional, $\vec{P} = (u, v, w)$, y $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Las componentes del vector \vec{P} están relacionadas con las poblaciones y las coherencias mediante

$$u = \rho_{01} + \rho_{10}, \quad v = i(\rho_{01} - \rho_{10}), \quad w = \rho_{00} - \rho_{11}. \quad (1.47)$$

El vector \vec{P} es llamado *polarización* del qubit. Su módulo está acotado por uno: $P \leq 1$, cumpliéndose la igualdad solo para estados puros. La entropía de von Neumann de ρ en términos del vector de polarización es

$$S = -\frac{1+P}{2} \log\left(\frac{1+P}{2}\right) - \frac{1-P}{2} \log\left(\frac{1-P}{2}\right). \quad (1.48)$$

Para cada ρ podemos asociar un punto, el extremo del correspondiente vector \vec{P} , el cual está dentro o sobre la esfera de Bloch (ver Figura 1.1). La superficie de la esfera ($P = 1$) es el lugar geométrico de los estados puros (con $S = 0$). Las mezclas estadísticas corresponden al interior de la esfera ($P < 1$). Entre más cercano el punto al centro, mayor es la entropía de von Neumann. El centro de la esfera ($\vec{P} = 0$) corresponde al estado de máxima entropía totalmente no polarizado cuyo operador de densidad es $\mathbb{1}/2$.

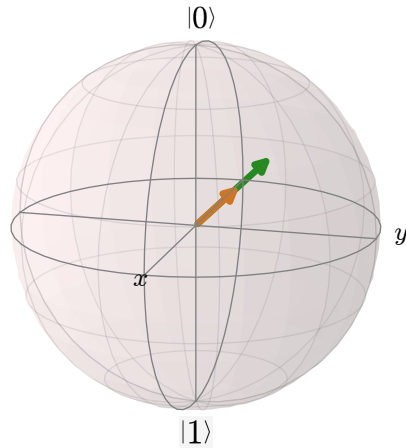


Figura 1.1: Vectores de polarización en la esfera unitaria de Bloch. Los vectores verde (con extremo en la superficie de la esfera) y amarillo (dentro de la esfera) representan un estado puro y mezclado respectivamente.

1.9. El efecto Zeno cuántico

El efecto Zeno cuántico (QZE) fue descubierto por Misra y Sudarshan [MS77]. En su artículo se describe una partícula radiactiva, o como se dice en el artículo original, un sistema cuántico inestable. Según este efecto, es posible congelar la dinámica del sistema cuántico realizando mediciones frecuentes sobre él. La primera observación experimental del QZE se reportó en [IHBW90], y desde el punto de vista fundamental ha despertado gran debate acerca del importante papel que juegan las mediciones en la teoría cuántica [PN94]. Por otro lado, desde el punto de vista práctico se ha usado el QZE para proteger y controlar estados cuánticos, lo cual es esencial para el desarrollo de la información y la computación cuántica [DGR06, FP02]. El QZE también puede ser usado para proteger el entrelazamiento del efecto de la decoherencia y controlar la muerte súbita del

entrelazamiento, tal como se muestra en [MFZ⁺08, ORN08]. En estos casos el QZE es inducido por mediciones frecuentes en el sistema. No obstante, se sabe desde la década anterior que la medición no es una condición necesaria para la observación del QZE. Pascazio y Namiki [PN94] mostraron que la interacción con el dispositivo de medición y el solo hecho de que la información se vuelve disponible (aunque no necesariamente registrada) es suficiente para la manifestación del QZE.

El trabajo de Bosco de Magalhães *et al.* [dMJN11] muestra que incluso no se necesita la interacción directa con un dispositivo de medición para el QZE, sino que el ambiente puede ser un agente alternativo a éste, en lo que se llama QZE *inducido por el ambiente*. El efecto es mostrado en un sistema que involucra dos cavidades de microondas acopladas, con una de estas en contacto con un reservorio térmico. El reservorio interactúa con los fotones de la cavidad ganando así información sobre el estado de la cavidad y la información (contenida en forma de correlaciones) hace las veces de procesos de detección no observados (mediciones no registradas), dando así lugar a un QZE.

A continuación veremos como surge el QZE de la teoría cuántica [BP02]. Consideremos la medición de un observable A cuyo espectro, por simplicidad, se supone discreto y no degenerado

$$A = \sum_n a_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \quad (1.49)$$

Una serie de mediciones ideales e instantáneas del observable A son realizadas, de tal manera que dos mediciones sucesivas están separadas por un intervalo de tiempo fijo θ . Entre dos mediciones sucesivas el vector de estado evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle, \quad (1.50)$$

con H el Hamiltoniano del sistema. En el límite $\theta \rightarrow 0$, podemos decir que estamos realizando una medición continua del observable A . Supongamos que el sistema se encuentra inicialmente en un estado propio $|\psi_n\rangle$ de A ,

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_n\rangle. \quad (1.51)$$

Para un tiempo suficientemente pequeño t tenemos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi_n\rangle = \left(\mathbb{1} - iHt - \frac{1}{2}H^2t^2 + \dots \right) |\psi_n\rangle. \quad (1.52)$$

La primera medición de A es llevada a cabo al tiempo $t = \theta$. La probabilidad de obtener el valor propio a_n en esta medición está dada por

$$p_{nn}(\theta) = |\langle \psi_n | \psi(0) \rangle|^2 = 1 - (\Delta E)_n^2 \theta^2 + \dots, \quad (1.53)$$

donde

$$(\Delta E)_n^2 = \langle \psi_n | H^2 | \psi_n \rangle - \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle^2, \quad (1.54)$$

es la incertidumbre en la energía del estado ψ_n . $p_{nn}(\theta)$ es la probabilidad de que el sistema permanezca en el estado inicial $|\psi_n\rangle$ después de un tiempo θ . Después de un tiempo $\tau = k\theta$, esto es después de k mediciones, esta probabilidad se vuelve

$$p_{nn}(\tau) \approx \left(1 - (\Delta E)_n^2 \theta^2\right)^k. \quad (1.55)$$

Para un k grande y un τ fijo, es decir, en el límite $\theta = \tau/k \rightarrow 0$, tenemos que

$$p_{nn}(\tau) \approx \left(1 - (\Delta E)_n^2 \frac{\tau}{k} \theta\right)^k \approx \exp\left(-(\Delta E)_n^2 \tau \theta\right) \rightarrow 1. \quad (1.56)$$

La ecuación 1.56 nos dice que el sistema se mantendrá en el estado inicial con probabilidad 1 si una medición ideal continua del observable A es llevada a cabo sobre el sistema. Como resultado de la reducción continua del estado inducida por las mediciones, el sistema no puede abandonar su estado inicial.

Capítulo 2

Decoherencia con entornos de espines

2.1. Introducción

En este capítulo introduciremos el modelo principal que usaremos para describir los entornos de espines estudiados en este trabajo, el *modelo de Ising pateado* (MIP) [Pro02]. Este modelo fue usado con éxito en el estudio del decaimiento de la fidelidad y la pureza en la dinámica de eco en todos los regímenes dinámicos: integrable, intermedio y caótico [PS02]. Así como también en el estudio de la decoherencia y decaimiento del entrelazamiento de un par de Bell como sistema central [PS06]. El modelo de Ising pateado fue introducido en su forma original por Tomaž Prosen como un sistema donde se demuestra la relación general entre la fidelidad de la dinámica cuántica y las funciones de correlación de un observable que genera la perturbación, mostrando que dentro del régimen caótico, entre más rápida sea la tasa de decaimiento de dichas funciones, más lento es el decaimiento de la fidelidad en contraste con la dinámica integrable [Pro02]. Este hecho implica que la dinámica caótica es típicamente más estable que la integrable, y en cierto sentido más atractiva para una posible implementación experimental del procesamiento de información y computación cuántica con memorias cuánticas basadas en modelos de espines.

Aparte de la flexibilidad dinámica, otra razón importante del uso de este modelo radica en la eficiencia computacional que permite su

implementación numérica, haciendo posible cálculos con espacios de Hilbert considerablemente grandes.

2.2. El modelo de Ising pateado (MIP)

En su forma original, el MIP consiste de un anillo de L partículas de espín $1/2$ que interactúan con sus vecinos más cercanos mediante un acoplamiento homogéneo y adimensional de tipo Ising J y son periódicamente pateadas con un campo magnético uniforme adimensional \vec{b} . El Hamiltoniano para el MIP está dado por

$$H = \sum_j^L J \sigma_z^j \sigma_z^{j+1} + K(t) \sum_j^L \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^j, \quad (2.1)$$

donde $K(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$ es un tren infinito de funciones delta de Dirac de periodo T . $\sigma_{x,y,z}^j$ son las matrices de Pauli asociadas a la partícula j y $\vec{\sigma}^j = (\sigma_x^j, \sigma_y^j, \sigma_z^j)$. Con el propósito de cerrar el anillo de partículas, imponemos la condición de periodicidad: $\vec{\sigma}^{L+1} \equiv \vec{\sigma}^1$.

2.2.1. Evolución temporal: el operador de Floquet

La evolución de sistemas cuánticos pateados periódicamente en el tiempo está dada por el operador de Floquet U , el cual es simplemente el operador de evolución temporal en un periodo de la patada T . La solución a la ecuación de Schrödinger al tiempo nT viene dada por

$$|\psi(nT)\rangle = U^n |\psi(0)\rangle. \quad (2.2)$$

La evolución sobre un periodo de tiempo es entonces ($\hbar = 1$)

$$U = \exp\left(-i \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} dt H(t)\right) \exp\left(-i \int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} dt H(t)\right). \quad (2.3)$$

Si usamos el Hamiltoniano 2.1 del MIP, el cual claramente es periódico, el primer factor de 2.3 se integra sobre el intervalo de tiempo $\epsilon \leq t \leq T - \epsilon$ donde la delta de Dirac no actúa y la evolución está dada por la interacción de Ising, esto es

$$U_{\text{Ising}}(J) = \exp\left(-iJ \sum_j^L \sigma_z^j \sigma_z^{j+1} T\right). \quad (2.4)$$

En el segundo factor de 2.3 se integra sobre $T - \epsilon \leq t \leq T + \epsilon$ en un periodo infinitesimal de tiempo 2ϵ en el cual la delta de Dirac está actuando. La influencia de la interacción de Ising sobre este periodo infinitesimal de tiempo es cero y el sistema evoluciona instantáneamente con el operador

$$U_{\text{Kick}}(\vec{b}) = \exp\left(-i \sum_j^L \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^j\right). \quad (2.5)$$

El operador de Floquet para el MIP es entonces

$$U_{\text{KI}} = U_{\text{Ising}}(J)U_{\text{Kick}}(\vec{b}). \quad (2.6)$$

En lo sucesivo y para los cálculos numéricos usaremos patadas de periodo $T = 1$.

2.3. Regímenes dinámicos del MIP

El régimen dinámico del MIP depende de los valores de los parámetros involucrados. En particular, de la dirección del campo magnético \vec{b} que da la patada a las partículas. Si el campo magnético es paralelo a la dirección de la interacción de Ising ($\phi = 0$, donde ϕ es el ángulo que forma el vector de campo magnético con el eje z) el modelo es integrable, esto es, analíticamente soluble, lo cual es trivial de ver del Hamiltoniano 2.1. Lo que no es trivial, es la integrabilidad del modelo aún cuando el campo magnético es perpendicular a la interacción de Ising ($\phi = \pi/2$). La solución analítica en este caso fue encontrada por T. Prosen en [Pro01]. Si $\phi = \pi/4$ el modelo se vuelve no integrable y su estadística espectral queda descrita por la teoría de matrices aleatorias (RMT en inglés). Según la conjetura del caos cuántico [CVGG80, BGS84], los sistemas cuánticos no integrables que poseen un límite clásico definido y que tienen dinámica suficientemente compleja dan lugar a fluctuaciones cuánticas cuya estadística puede ser descrita por un ensemble universal de matrices aleatorias. Sin embargo esta situación no es clara para sistemas cuánticos sin límite clásico, por ejemplo, sistemas de espines (qubits) interactuantes como el descrito por el MIP. Un estudio para responder si la conjetura es válida en este tipo de sistemas y en que límites fue realizado por C. Pineda y T. Prosen en [PP07], demostrando así que el MIP es caótico en el sentido de RMT para $\phi = \pi/4$. Para valores intermedios de ϕ , el sistema presenta una dinámica mixta que comparte características del caso integrable y caótico, éste es el régimen intermedio,

es decir, el modelo es no integrable pero posee caos no completamente desarrollado.

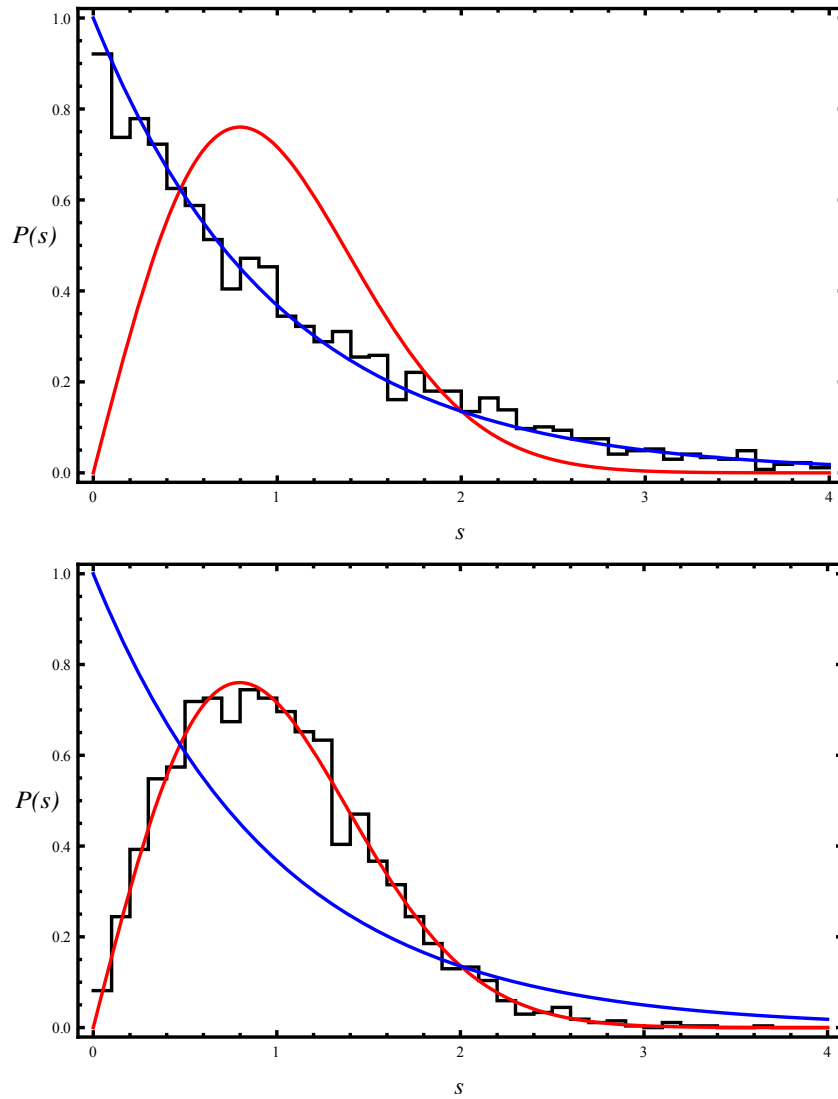


Figura 2.1: Distribución de espaciamiento de niveles a primeros vecinos para el MIP con $L = 12$. En la gráfica de arriba se muestran las curvas analíticas en color azul para el caso integrable (Poisson), en rojo el caso caótico (Wigner surmise) y en negro el resultado de la simulación para el MIP con $\phi = \pi/2$. En la gráfica de abajo se muestran los mismos resultados para $\phi = \pi/4$. De esta manera confirmamos la dependencia del régimen dinámico del MIP con el parámetro ϕ .

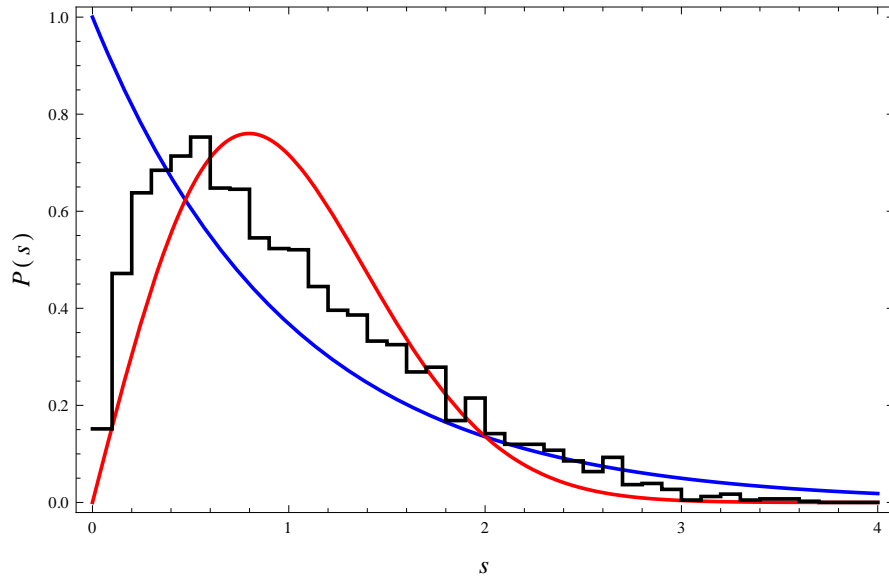


Figura 2.2: Distribución de espaciamiento de niveles a primeros vecinos para el MIP con $\phi = \pi/6$, $L = 12$.

Una generalización natural del Hamiltoniano 2.1 es dejar que la interacción de Ising a primeros vecinos J varíe en intensidad. Así, el Hamiltoniano tendría la siguiente forma

$$H = \sum_j^L J_j \sigma_z^j \sigma_z^{j+1} + K(t) \sum_j^L \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^j. \quad (2.7)$$

En la Figura 2.1 se muestra la distribución de espaciamiento de niveles a primeros vecinos $P(s)$ para el Hamiltoniano 2.7 con interacciones de Ising J_j escogidas aleatoriamente en el intervalo $(0, 1)$. Se compara con las curvas analíticas que se conocen para el caso de sistemas integrables (distribución de Poisson) y para el caso de un ensemble Gaussiano ortogonal de matrices de 2×2 (Wigner surmise, como se conoce en la literatura de RMT). En la Figura 2.2 mostramos la misma distribución en el régimen intermedio ($\phi = \pi/6$). Se puede observar que en este caso la estadística no es integrable ni caótica. Existen formulas aproximadas para la estadística intermedia, un ejemplo es la distribución de Brody que puede ir del régimen integrable, pasar por uno intermedio y finalmente realizar la transición al caso caótico variando cierto parámetro de la distribución conocido como parámetro de Brody [BMFB73].

Nótese que la estadística espectral presentada en las Figuras 2.1 y 2.2 fue obtenida con el modelo 2.7 y no con el MIP original. Lo hemos hecho de esta forma ya que debido a las simetrías presentes en el Hamiltoniano del MIP (simetría de rotación y reflexión) la estadística debe hacerse en cada sector de simetría, lo cual es una tarea numérica mas complicada. Para evitarnos separar las cuasienergías según su sector, hemos decidido arbitrariamente romper las simetrías dejando que los acoplamientos de Ising sean variables usando un Hamiltoniano del tipo 2.7. Naturalmente, la estadística mostrada no es del todo buena, pero cumple con el propósito de ilustrar las distintas dinámicas (en el sentido de RMT) presentes en el MIP. Para una discusión detallada de las simetrías presentes en el MIP véase la referencia [PP07].

2.4. Decoherencia de un qubit en un entorno de espines

En esta sección describiremos como se induce la decoherencia en un qubit como sistema central usando el MIP para describir el ambiente con el cual interactúa. No introduciremos ningún grado de libertad adicional que describa la dinámica del qubit, en lugar de esto, consideraremos al primer espín del MIP como nuestro sistema central, esto es, el qubit, y al resto de los espines como el entorno. Estamos interesados en la evolución unitaria de un estado puro, inicialmente separable que pertenece al espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_e$, donde \mathcal{H}_c (de dimensión 2) y \mathcal{H}_e (de dimensión 2^L) denotan los espacios de Hilbert del qubit y el ambiente, respectivamente. Cuando el tiempo transcurre, el estado compuesto qubit-ambiente se vuelve cada vez más entrelazado, lo cual da lugar (después de trazar sobre los grados de libertad del ambiente) a que inicie el proceso de decoherencia del sistema central. El comportamiento de la decoherencia dependerá de la dinámica propia del ambiente, en nuestro caso, del sistema de espines. En general, el Hamiltoniano para este tipo de sistemas tiene la siguiente estructura formal

$$H_\lambda = H_c \otimes \mathbb{1}_e + \mathbb{1}_c \otimes H_e + \lambda V_{ce} \equiv H_c + H_e + \lambda V_{ce}. \quad (2.8)$$

H_c representa el Hamiltoniano que describe al qubit, H_e el Hamiltoniano del ambiente y V_{ce} la interacción del qubit con el ambiente. El parámetro real λ controla la intensidad del acoplamiento. En nuestro caso la dinámica del ambiente está descrita por medio del MIP y la interacción estará dada por el producto tensorial de dos operadores, uno que pertenece al sistema central y otro al ambiente, esto es, $V_{ce} = V_c \otimes V_e$, donde $V_c \in \mathcal{H}_c$ y $V_e \in \mathcal{H}_e$.

Estudiaremos la evolución temporal de un estado puro e inicialmente separable

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_c\rangle \otimes |\psi_e\rangle, \quad (2.9)$$

donde $|\psi_c\rangle \in \mathcal{H}_c$ y $|\psi_e\rangle \in \mathcal{H}_e$. Al n -ésimo paso de tiempo, el estado del sistema completo está dado por la evolución unitaria $|\psi(n)\rangle = U_{\text{KI}}^n |\psi(0)\rangle$, y el estado del qubit es $\text{Tr}_e |\psi(n)\rangle \langle \psi(n)|$.

Otra generalización del MIP, en la cual se permiten acoplamientos arbitrarios entre cualquier par de partículas y además el campo magnético es en general dependiente de la posición de la partícula puede usarse [PS06]. En este caso el Hamiltoniano es

$$H = \sum_{j>k}^L J_{jk} \sigma_z^j \sigma_z^k + K(t) \sum_j^L \vec{b}^j \cdot \vec{\sigma}^j. \quad (2.10)$$

La ventaja principal de trabajar con 2.10 es la variedad de topologías que podemos usar para conectar a las partículas. Con el propósito de estudiar un sistema cuántico compuesto, vamos a dividir el espacio de Hilbert del sistema gobernado por el Hamiltoniano 2.10 en subespacios correspondientes a el sistema central y al entorno, de tal forma que tenemos un sistema cuántico bipartita cuyo Hamiltoniano es de la forma 2.8.

Como ejemplo consideremos la topología que se muestra en la Figura 2.3, en la cual el qubit central (representado por el círculo blanco en el centro) interactúa con todos los espines que constituyen el ambiente (círculos rojos) mediante J_{int} (líneas punteadas). A esta configuración la llamaremos *topología estrella*. La interacción de Ising entre qubits del entorno es J y es en general de mayor intensidad que J_{int} .

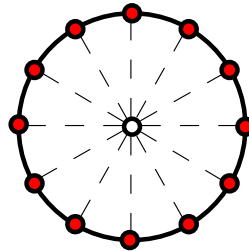


Figura 2.3: Topología estrella. El sistema central está representado por el círculo blanco y el entorno por círculos rojos. La línea de trazo significa acoplamiento de Ising más débil que la línea continua.

2.5. Evolución de la pureza y de la entropía de von Neumann 27

El Hamiltoniano 2.8 para la topología estrella es

$$\begin{aligned}
 H &= K(t) \vec{b}^q \cdot \vec{\sigma}_z^q && \text{sistema central (qubit)} \\
 &+ J \sum_{j,k \in \text{env}}^L \sigma_z^j \sigma_z^k + K(t) \sum_{j \in \text{env}}^L \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^j && \text{entorno} \quad (2.11) \\
 &+ J_{\text{int}} \sum_{j \in \text{env}}^L \sigma_z^q \sigma_z^j && \text{interacción}
 \end{aligned}$$

El primer término es la patada magnética en el qubit como sistema central, el segundo es el Hamiltoniano correspondiente al MIP que describe el entorno, y el último término es la interacción entre el sistema central y el entorno.

Como se mencionó antes, el operador de densidad reducido al n -ésimo paso de tiempo está dado por

$$\rho_c(n) = \text{Tr}_e |\psi(n)\rangle \langle \psi(n)|. \quad (2.12)$$

Supondremos que el estado inicial del sistema central puede ser una superposición de estados propios del operador σ_z . El estado inicial del ambiente $|\psi_e\rangle$ es un estado aleatorio puro, esto con el objetivo de simular un entorno a alta temperatura. Una vez obtenido el operador de densidad reducido a cada paso de tiempo, podemos ver como evoluciona la pureza 1.7 o la entropía de von-Neumann 1.22 del sistema central.

2.5. Evolución de la pureza y de la entropía de von Neumann

En esta sección presentamos los resultados del cálculo numérico para la pureza y la entropía de von Neumann como función del tiempo en el caso de un qubit como sistema central en la configuración estrella mostrada anteriormente. En la Figura 2.4 se muestra la evolución de ambas cantidades en el tiempo.

El comportamiento es el esperado. Al incrementar el acoplamiento de Ising entre el sistema central y su entorno, J_{int} , el decaimiento de la pureza es más pronunciado y la entropía se acerca más rápidamente a uno (el estado máximamente mezclado).

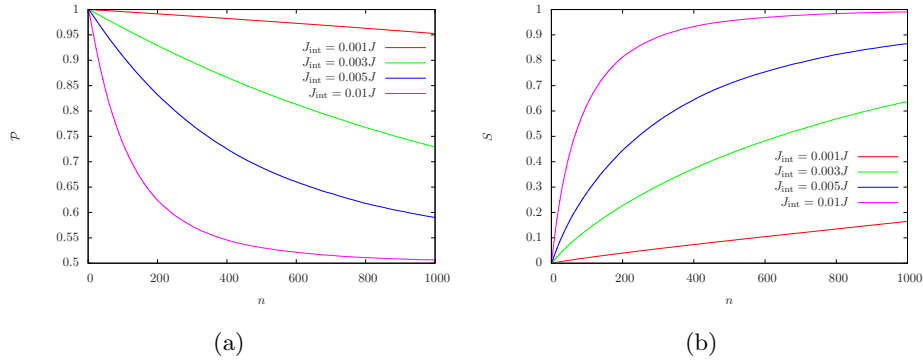


Figura 2.4: a) Evolución temporal de la pureza y b) evolución temporal de la entropía de von Neumann.

2.6. Desfasamiento

El Desfasamiento (o dephasing en inglés) es el nombre que se le da a un tipo particular de decoherencia. Este proceso se caracteriza porque conlleva al decaimiento de los elementos no diagonales del operador de densidad reducido (las coherencias), mientras que los elementos diagonales (poblaciones) se mantienen constantes.

Para que el sistema cuántico pierda coherencia por desfasamiento, el Hamiltoniano del sistema central debe conmutar con el Hamiltoniano total y su interacción con el entorno debe ser separable. Más precisamente expresamos esto como

$$[H_c, H] = 0, \quad (2.13)$$

y

$$H_{\text{int}} = V_c \otimes V_e, \quad (2.14)$$

donde H_c y H son los Hamiltonianos del sistema central y sistema total, V_c y V_e son operadores en el sistema central y el entorno respectivamente. Podemos considerar que el Hamiltoniano de interacción 2.14 se puede escribir como

$$H_{\text{int}} = \sum_j |\phi_j\rangle \langle \phi_j| \otimes V_e^j, \quad (2.15)$$

con $\{|\phi_j\rangle\}$ un conjunto completo de estados propios de H_c . Naturalmente, el Hamiltoniano del sistema central en su representación diagonal es $H_c =$

$\sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \epsilon_j$, con ϵ_j sus energías propias. Si escribimos el Hamiltoniano completo, éste se verá como

$$H = \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \otimes (\epsilon_j \mathbb{1} + H_e + V_e^j). \quad (2.16)$$

En general, un estado inicial separable $|\psi\rangle = |\phi_c\rangle \otimes |\chi_e\rangle$, no se mantendrá así durante su evolución temporal. Si el estado inicial del sistema central es una superposición de la forma $|\phi_c\rangle = \sum_j c_j |\phi_j\rangle$ entonces el estado del sistema total al tiempo t es un estado entrelazado

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j c_j e^{-i\epsilon_j t} |\phi_j\rangle \otimes |\chi_j(t)\rangle. \quad (2.17)$$

De la ecuación 2.17 se sigue que el operador de densidad del sistema total al tiempo t es $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, del cual podemos tomar su traza parcial sobre los grados de libertad del ambiente y encontrar el operador de densidad reducido que describe al sistema central

$$\rho^c(t) = \text{Tr}_e \rho(t) = \text{Tr}_e \sum_{jk} c_j c_k^* e^{-i(\epsilon_j - \epsilon_k)t} |\phi_j\rangle\langle\phi_k| \otimes |\chi_j(t)\rangle\langle\chi_k(t)|. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, las coherencias entre estados propios $|\phi_j\rangle$ y $|\phi_k\rangle$ del sistema central están dadas por los elementos de matriz

$$\rho_{jk}^c(t) = e^{-i(\epsilon_j - \epsilon_k)t} \langle\chi_k(t)|\chi_j(t)\rangle \rho_{jk}^c(0). \quad (2.19)$$

Este resultado nos dice que las coherencias del operador de densidad reducido están directamente relacionadas con la amplitud de fidelidad en el espacio de Hilbert del ambiente, la cual podemos reescribir en términos del operador de eco como

$$\langle\chi_k(t)|\chi_j(t)\rangle = \langle\chi|M(t)|\chi\rangle, \quad (2.20)$$

donde $M(t) = \tilde{U}_0^\dagger(t)\tilde{U}(t)$ es el llamado operador de eco, mientras que $\tilde{U}_0(t)$ y $\tilde{U}(t)$ son operadores de evolución correspondientes a los Hamiltonianos

$$\tilde{H}_0 = H_e + V_e^k, \quad \tilde{H} = H_0 + V_e^j - V_e^k. \quad (2.21)$$

Un caso de especial interés es cuando el operador V_e^j es proporcional al Hamiltoniano del ambiente, esto es $V_e^j = \lambda_j H_e$, con $\lambda_j \in \mathbb{R}$. En este caso la ecuación 2.20 toma la forma

$$\langle\chi_k(t)|\chi_j(t)\rangle = \langle\chi|e^{-i(\lambda_k - \lambda_j)H_e t}|\chi\rangle, \quad (2.22)$$

la cual es precisamente la función de autocorrelación en el ambiente con una evolución temporal reescalada.

Ahora aplicaremos el procedimiento general anterior para encontrar la relación entre las coherencias y el decaimiento de la fidelidad en el ambiente para el caso de la topología estrella en presencia de desfaseamiento. Para esto, la patada magnética en el sistema central solo debe poseer componente en la dirección z debido a que la energía de éste debe conservarse. Note que la interacción en 2.11 es separable y de la forma $\sigma_z^q \otimes \sum_j \sigma_z^j$. El operador de Floquet 2.6 para un periodo de tiempo es

$$U = U_q U_{\text{KI}} U_{\text{int}}, \quad (2.23)$$

donde

$$U_q = \exp(-\iota b_z^q \sigma_z^q), \quad (2.24)$$

es el operador de Floquet correspondiente al Hamiltoniano del qubit (patada magnética), U_{KI} es el operador de Floquet del MIP definido anteriormente (ecuación 2.1) y U_{int} es el operador de Floquet de la interacción sistema central y ambiente dado por

$$\begin{aligned} U_{\text{int}} &= \exp\left(-\iota J_{\text{int}} \sum_{j \in \text{env}} \sigma_z^q \sigma_z^j\right) \\ &= \exp(-\iota J_{\text{int}} \sigma_z^q S_z) \\ &= |0\rangle\langle 0| \exp(-\iota J_{\text{int}} S_z) + |1\rangle\langle 1| \exp(\iota J_{\text{int}} S_z), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde hemos introducido a $S_z = \sum_{j \in \text{env}} \sigma_z^j$ como la componente z total del espin del ambiente. En la última igualdad hemos usado la identidad $\exp(PA) = P \exp(A) + (1 - P)$ con P un operador de proyección unidimensional. De nuevo, iniciamos con un estado separable y lo propagamos con el operador 2.23 obteniendo el operador de densidad al n -ésimo paso de tiempo. Tomando la traza parcial de éste sobre los grados de libertad del ambiente, obtenemos que las coherencias del qubit para la topología estrella están dadas por

$$\rho_{01}^c(n) = e^{-2\iota b_z^q n} \rho_{01}^c(0) f(n), \quad (2.26)$$

donde $f(n)$ es la amplitud de fidelidad en el espacio de Hilbert del ambiente dada por

$$f(n) = \langle \psi_e(0) | (e^{-\iota J_{\text{int}} S_z} U_{\text{KI}}^\dagger)^n (U_{\text{KI}} e^{-\iota J_{\text{int}} S_z})^n | \psi_e(0) \rangle. \quad (2.27)$$

Para confirmar el resultado anterior y asegurarnos de que nuestra implementación numérica es correcta, en la Figura 2.5 mostramos el decaimiento de la fidelidad en el ambiente y del elemento no diagonal de la matriz densidad del el sistema central, las cuales deben coincidir debido al resultado anterior.

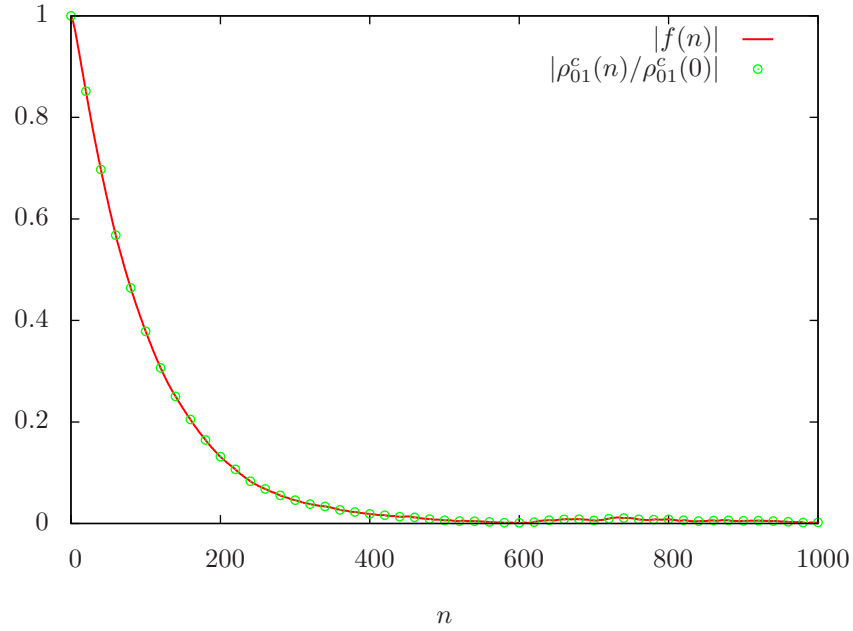


Figura 2.5: Decaimiento del valor absoluto de la amplitud de fidelidad en el ambiente y las coherencias del qubit central como función del tiempo. Hemos escogido $L = 16$, $b_z^q = 1.4$, $\phi = \pi/4$ y $J_{\text{int}} = 0.01$.

2.7. Decoherencia en la esfera de Bloch

Usando las relaciones 1.47, podemos aprovechar los resultados numéricos obtenidos anteriormente para el operador de densidad reducido en la topología estrella, esto con el fin de observar la evolución del vector de polarización en la esfera de Bloch. A continuación mostramos dicha evolución para los distintos regímenes dinámicos del ambiente

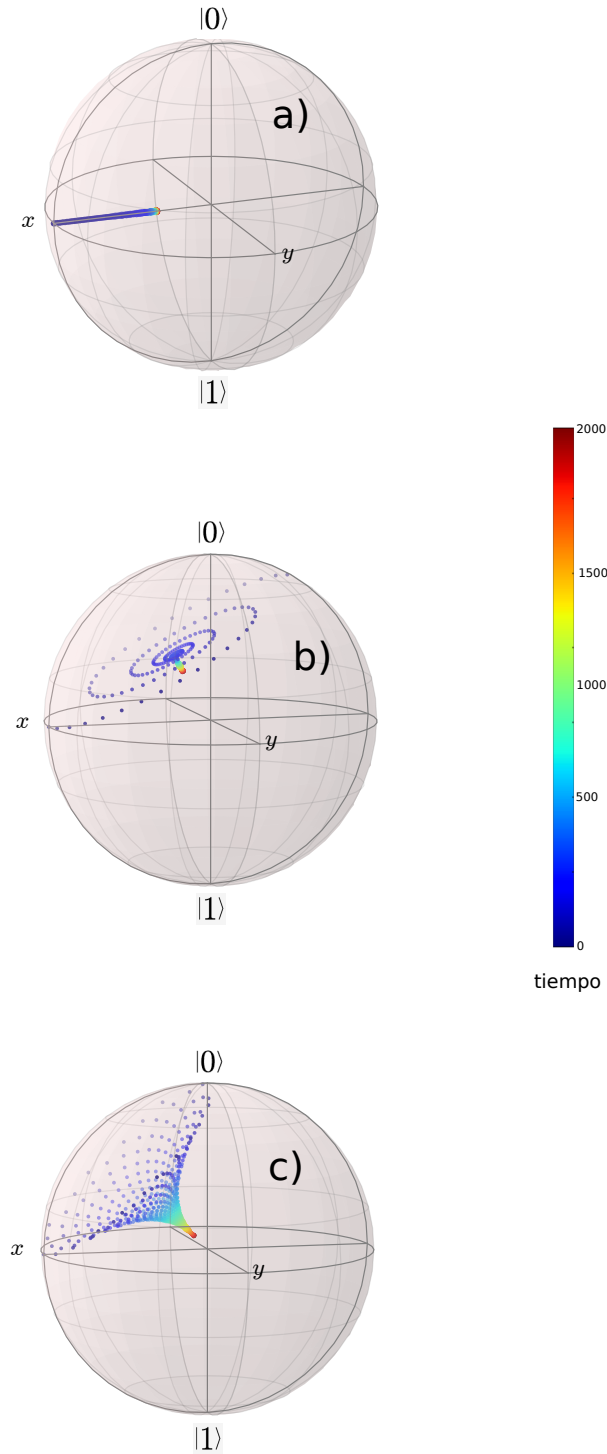


Figura 2.6: Evolución temporal del extremo del vector de polarización en la esfera de Bloch para el ambiente en el régimen a) integrable con $\phi = \pi/2$, b) mixto con $\phi = \pi/6$ y c) caótico con $\phi = \pi/4$. Para todos los casos hemos usado $J = 1$, $J_{\text{int}} = 0.01$, $L = 16$.

Capítulo 3

Decoherencia con entornos de espines anidados

3.1. Introducción

Estudiar de la decoherencia de un sistema cuántico abierto en interacción con un ambiente compuesto, esto es, un ambiente formado por dos o más partes, puede resultar en un modelo más realista de decoherencia. Tiene sentido pensar que la interacción del sistema abierto con el ambiente macroscópico se realiza a través de un primer ambiente con menos grados de libertad. Al transcurrir el tiempo, el primer ambiente ganará información acerca del sistema abierto y de la misma manera (en forma de correlaciones cuánticas) el ambiente macroscópico del ambiente mas pequeño, y por lo tanto del sistema abierto.

En la literatura existen varios trabajos relacionados con decoherencia en entornos compuestos [CG14, LV05, Mor13], en particular, es de relevancia el trabajo de H. Moreno y T. Gorin [Mor13], en donde se tiene un sistema cuántico central, el cual interactúa con un primer ambiente (ambiente cercano) de tipo caótico que se encuentra en contacto directo con un baño térmico. En dicho modelo se hace uso de una descripción en términos de matrices aleatorias (más precisamente matrices de un Ensemble Gaussiano Ortogonal, GOE por sus siglas en inglés) para modelar el ambiente cercano, y luego el baño térmico es inducido mediante una ecuación maestra de tipo Caldeira-Leggett [CL83]. Un interesante y no trivial efecto que causa disminución en la rapidez de la tasa de decoherencia del sistema central

con este tipo de ambientes es observado. En éste capítulo presentamos un modelo dinámico tripartita donde se ejemplifica el efecto, brindando así una opción más específica para su posible confirmación experimental.

3.2. Modelos

Describiremos los modelos usados para estudiar la decoherencia de dos qubits no interactuantes acoplados a un ambiente de espines compuesto, el cual está constituido por dos sistemas de espines. El hecho de escoger como sistema central un par de qubits no sólo nos da la oportunidad de estudiar la decoherencia del sistema central, sino también el decaimiento del entrelazamiento interno de éste, a través de la concurrencia $C(\rho)$ definida en 1.32.

El ambiente compuesto que usaremos en este capítulo lo llamaremos *ambiente de espines anidado*, y en lo que sigue, nos referiremos al primer sistema de L_e espines como *ambiente cercano* y al segundo de $L_{e'}$ espines (con mayor número de grados de libertad) como *ambiente lejano*. Vamos a usar el MIP para modelar la dinámica en cada uno de estos ambientes. Como se discutió en el capítulo anterior, nos interesa la evolución temporal de un estado puro, inicialmente separable, que en el presente caso pertenece al espacio de Hilbert tripartita $\mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_e \otimes \mathcal{H}_{e'}$, donde \mathcal{H}_c (de dimensión 4), \mathcal{H}_e (de dimensión 2^{L_e}) y $\mathcal{H}_{e'}$ (de dimensión $2^{L_{e'}}$) denotan los espacios de Hilbert del sistema central, ambiente cercano y ambiente lejano, respectivamente. Los Hamiltonianos que describen cada ambiente serán Hamiltonianos del MIP y las interacciones entre el sistema central, ambiente cercano y ambiente lejano serán del tipo Ising (ver ecuación 2.10). Las configuraciones propuestas para este sistema tripartita se muestran en la Figura 3.1. Los círculos blancos, azules y rojos representan al sistema central, ambiente cercano y ambiente lejano, respectivamente. Las líneas que unen a los círculos representan interacciones de Ising. Note que la línea que une al sistema central con el ambiente cercano es más delgada, lo que significa una interacción de Ising más débil. La línea verde es la interacción de Ising entre el ambiente cercano y el lejano cuya intensidad será variable en los cálculos numéricos que mostraremos en la siguiente sección. A continuación describiremos cada una de las configuraciones propuestas. En la configuración a) uno de los qubits del sistema central interactúa débilmente con el ambiente cercano a través de un acoplamiento de Ising denotado con el parámetro λ . De igual manera, el ambiente cercano con el ambiente lejano mediante γ . Debido a que uno de los qubits del sistema

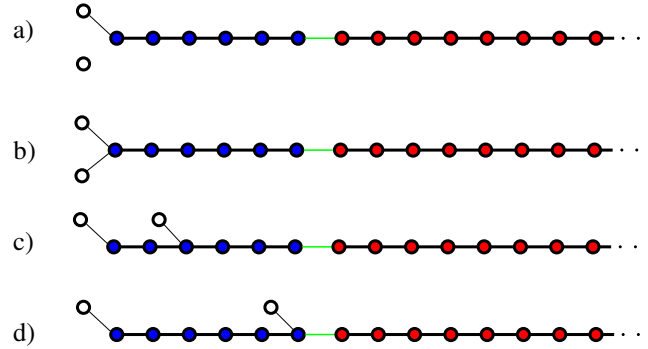


Figura 3.1: Configuraciones propuestas en un ambiente de espines anidados.

central no se encuentra en interacción con ningún otro qubit decimos que actúa de “*espectador*”, y por lo tanto, a la configuración a) se le llama configuración de espectador. En la configuración b) el qubit deja de ser espectador e interactúa con el primer qubit del ambiente cercano, en c) con el qubit de la mitad y en d) con el ultimo qubit del ambiente cercano. Note que en ninguna de la configuraciones existe una interacción que acople al sistema central y al ambiente lejano, lo cual no quiere decir que el sistema central está aislado de éste, de hecho, el entrelazamiento y excitaciones en el sistema central pueden transferirse al ambiente lejano a través del ambiente cercano.

En general, el Hamiltoniano del sistema tripartita propuesto es

$$H = H_c + H_e + H_{e'} + H_{ce} + H_{ee'}, \quad (3.1)$$

donde H_c , H_e , $H_{e'}$, H_{ce} y $H_{ee'}$ representan a los Hamiltonianos del sistema central, ambiente cercano, ambiente lejano, interacción sistema central-ambiente cercano e interacción ambiente cercano-ambiente lejano, respectivamente. Como ejemplo, escribamos las partes del Hamiltoniano 3.1 para la configuración de espectador (configuración a))

$$H_c = K(t) \sum_{i=1}^2 \vec{b} \cdot \vec{\sigma}_i, \quad (3.2)$$

$$H_e = J_e \sum_{i=3}^{L_e+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + K(t) \sum_{i=3}^{L_e+2} \vec{b} \cdot \vec{\sigma}_i, \quad (3.3)$$

$$H_{e'} = J_{e'} \sum_{i=L_e+3}^{L-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + K(t) \sum_{i=L_e+3}^L \vec{b} \cdot \vec{\sigma}_i, \quad (3.4)$$

$$H_{ce} = \lambda \sigma_2^z \sigma_3^z, \quad (3.5)$$

$$H_{ee'} = \gamma \sigma_{L_e+2}^z \sigma_{L_e+3}^z. \quad (3.6)$$

Los qubits en las topologías de la Figura 3.1 se enumeran partiendo del qubit inferior del sistema central. Note que la interacción de Ising entre los dos qubits centrales es nula, como puede verse en 3.2. Esto con el fin de no afectar el entrelazamiento del par de Bell con la interacción interna del sistema central.

3.3. Evolución de la pureza

A continuación se presentan los resultados numéricos obtenidos para la pureza en cada una de las configuraciones mostradas anteriormente con el ambiente cercano y lejano en los tres regímenes: integrable, intermedio o mixto y caótico, según los valores del parámetro ϕ mencionado en el capítulo 2. El sistema central inicia en un estado puro y máximamente entrelazado, esto es, un estado de Bell ρ_{Bell} (no entrelazado con el ambiente, $C(\rho_{\text{Bell}}) = 1$) y el ambiente en un estado aleatorio separable, producto de un estado aleatorio puro en el ambiente cercano ρ_e con uno en el ambiente lejano $\rho_{e'}$. El estado inicial del sistema total es entonces $\rho(0) = \rho_{\text{Bell}} \otimes \rho_e \otimes \rho_{e'}$. Cuando el sistema evoluciona el operador de densidad reducido del sistema central se obtiene como $\rho_{\text{Bell}}(n) = \text{Tr}_e [\text{Tr}_{e'} (U^{n\dagger} \rho(0) U^n)]$, donde U es el operador de Floquet asociado al Hamiltoniano general 3.1.

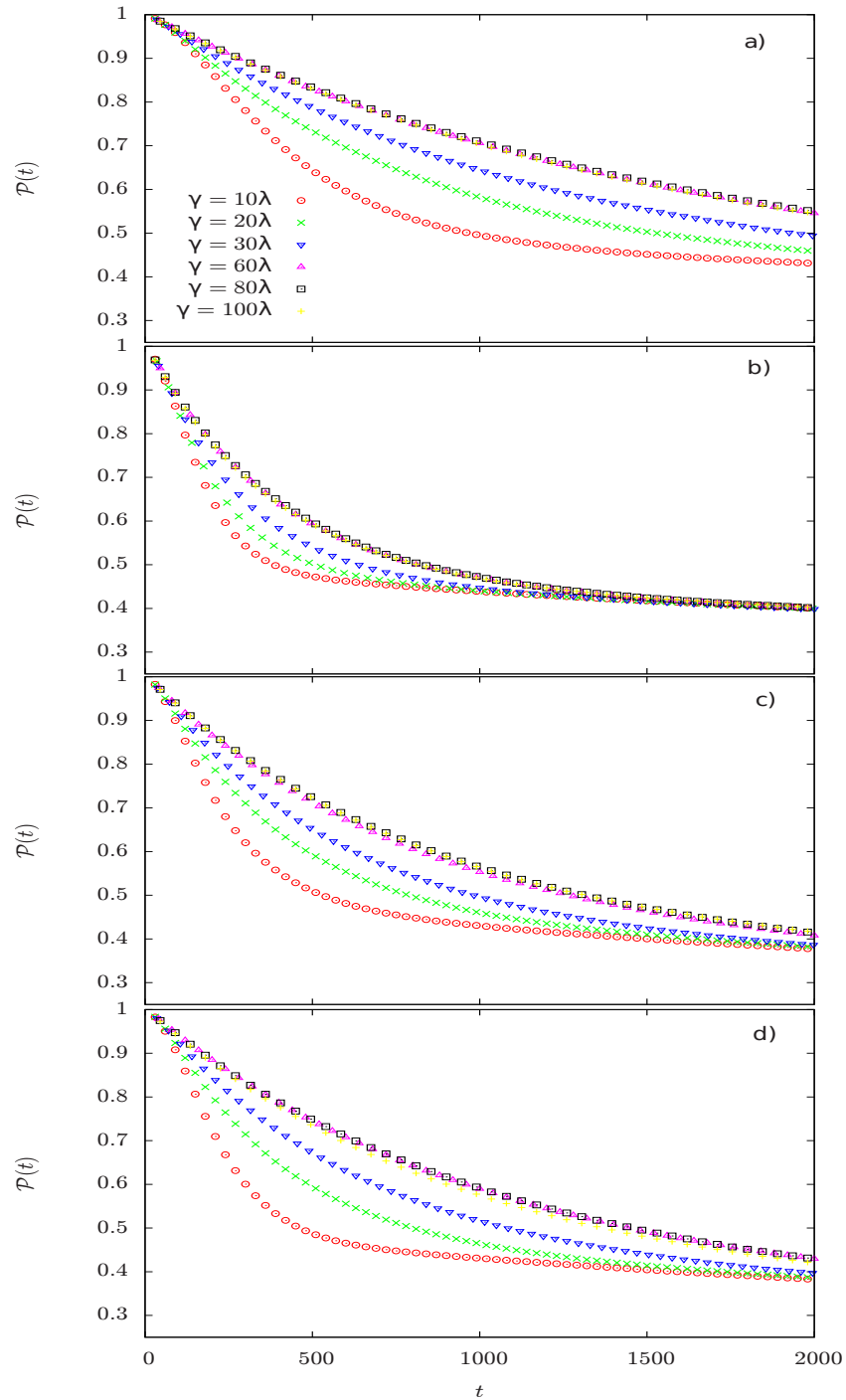


Figura 3.2: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica de los ambientes (cercano y lejano) es caótica con $J_e = J_{e'} = 1.0$ y $\phi = \pi/4$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.

Empezaremos describiendo el caso donde los ambientes presentan dinámica caótica (Figura 3.2). La primera observación de los resultados numéricos en 3.2 es la forma del decaimiento de la pureza en todas las configuraciones. Para los acoplamientos γ más pequeños considerados entre el ambiente cercano y el lejano, el decaimiento de la pureza es Gaussiano, y para el caso de acoplamientos más fuertes, $\gamma \gg \lambda$, el decaimiento resulta ser exponencial. Ocurre algo más interesante e inesperado desde nuestro punto de vista. A medida que se aumenta el acoplamiento γ entre el ambiente cercano y el lejano, la tasa de decoherencia disminuye (o equivalentemente, el tiempo de decoherencia aumenta) hasta cierto valor de γ ($\gamma_c \approx 80\lambda$) donde el aumento en la pureza se satura. Este comportamiento se observa para todas las configuraciones propuestas y parece ser un efecto genérico en este tipo de sistemas tripartitas. Un efecto similar ha sido observado en trabajos relacionados [VL98] y algunos autores se refieren a él como un mecanismo de frustración de la decoherencia. Por ejemplo, en [VL98] se estudia un qubit gobernado por un Hamiltoniano de control al cual se le aplica una secuencia de pulsos de radiofrecuencia que cambian el estado del qubit repetidamente con un método llamado *Quantum bang-bang control*. Como consecuencia de los pulsos, la decoherencia debida a la interacción del qubit con el ambiente, es suprimida completamente en el límite de pulsos continuos y es sustancialmente controlada cuando el intervalo de tiempo entre pulsos es comparable con los tiempos de correlación del ambiente. De ésta manera el modelo sugiere una estrategia para combatir decoherencia complementaria a las ya existentes en corrección cuántica de errores. En nuestro caso, el campo magnético también es pulsado y el efecto observado podría entonces interpretarse como una realización del método anterior en un sistema de espines, aunque no resulta claro el hecho de que el efecto depende de la intensidad del parámetro γ .

La configuración donde es más notorio el efecto mencionado es la de espectador (gráfica a)). En la configuración b) el efecto es menos notorio y desaparece más rápido debido al acoplamiento del segundo qubit del sistema central al mismo qubit del ambiente cercano. Los casos c) y d) son bastante parecidos aunque la saturación de la pureza para c) ocurre para un valor de γ ligeramente mayor que en los casos anteriores.

Desde el punto de vista práctico, este efecto es atractivo para posibles realizaciones experimentales, usando sistemas que puedan ser descritos por esta clase de modelos, y que además, permitan un control bastante preciso de los parámetros que éste involucra, resultando así en un sistema cuántico

abierto donde el ambiente deja de ser su enemigo y se convierte en un protector de la coherencia. Es importante mencionar que hemos verificado que los resultados no cambian de manera apreciable si aumentamos la dimensión de los ambientes.

En las Figuras 3.3 y 3.4 vemos los resultados para el caso donde la dinámica en cada uno de los ambientes (cercano y lejano) es integrable e intermedia, respectivamente. Para el caso integrable observamos decaimiento Gaussiano de la pureza, seguido de reactivaciones completas para las configuraciones a) y b). Este comportamiento periódico ha sido observado en [Pin07, CGS14] y se ha notado que que éstas oscilaciones en la pureza implican el incremento en algunas funciones de correlación [Pin07]. Resulta interesante que dichas oscilaciones son independientes del valor de γ para la λ escogida y hasta el momento no sabemos la razón de esto, aunque sospechamos que existe algún efecto resonante que impide ver la influencia de γ para estas configuraciones, lo que contrasta con la configuración d) en donde el cambio de la pureza con el aumento de γ es pequeño pero se puede observar.

Para la configuración c) el resultado cambia drásticamente y ya no existe periodicidad en la pureza. El en caso d) de nuevo hay oscilaciones (de mayor amplitud) que se amortiguan durante un tiempo finito a medida que γ aumenta y que luego se reactivan. Para acoplamientos muy fuertes ($\gamma = 100\lambda$) el comportamiento de la pureza es oscilatorio y decae exponencialmente hasta su valor mínimo. Notemos que ya no existe la disminución en el decaimiento de la pureza con el aumento de γ , esta vez, la decoherencia aumenta proporcional a ésta. Para el régimen intermedio (Figura 3.4), las configuraciones a) y b) muestran comportamientos similares con oscilaciones lentas y rápidas respectivamente, como vimos también en el caso integrable. La disminución de la decoherencia es observada de manera sustancial en el primer incremento de γ y se satura rápidamente para un valor de $\gamma < 80\lambda$. Para valores de $\gamma \geq 80\lambda$ la decoherencia del sistema central incrementa. En las configuraciones c) y d) también existe un fuerte incremento en la tasa de disminución de la decoherencia pero en menor grado que en a) y b), además la saturación del efecto ocurre para $\gamma > 10\lambda$.

Para complementar, en la Figura 3.5 mostramos la evolución de la entropía de von Neumann para las distintas configuraciones y para los mismos parámetros de la Figura 3.2.

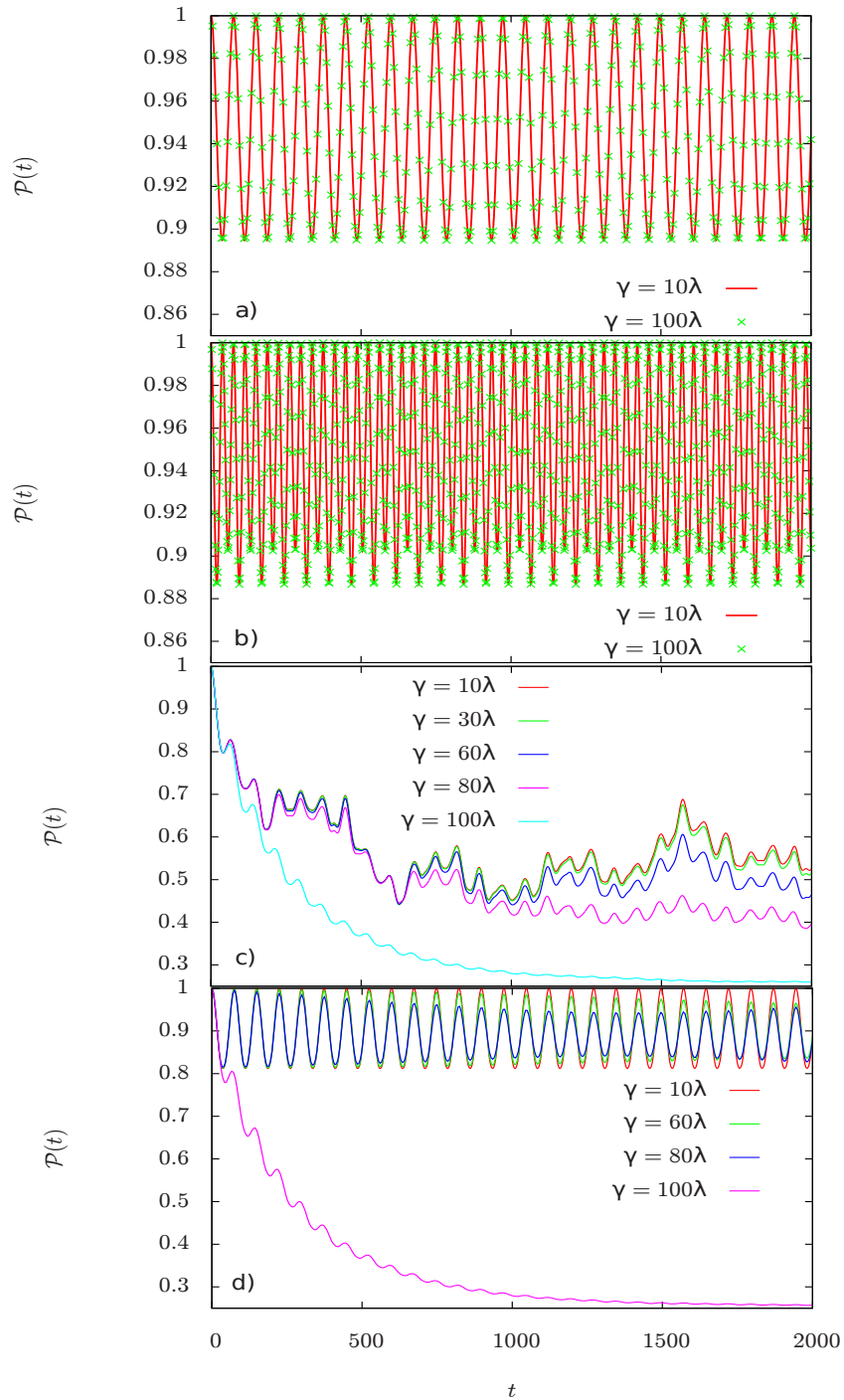


Figura 3.3: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica de los ambientes (cercano y lejano) es integrable con $J_e = J_{e'} = 1.0$ y $\phi = \pi/2$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.

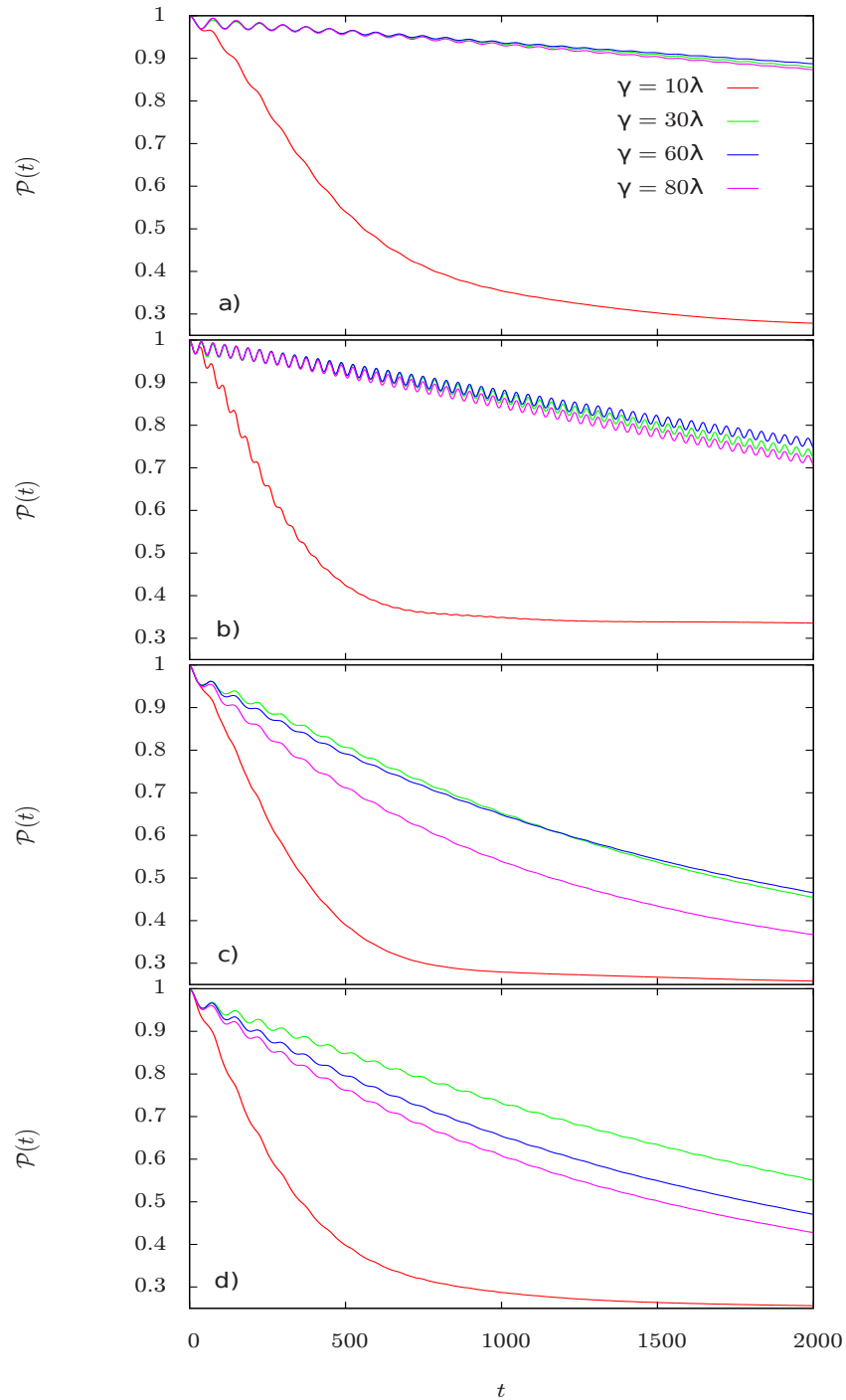


Figura 3.4: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica de los ambientes (cercano y lejano) es intermedia con $J_e = J_{e'} = 1.0$ y $\phi = \pi/6$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.

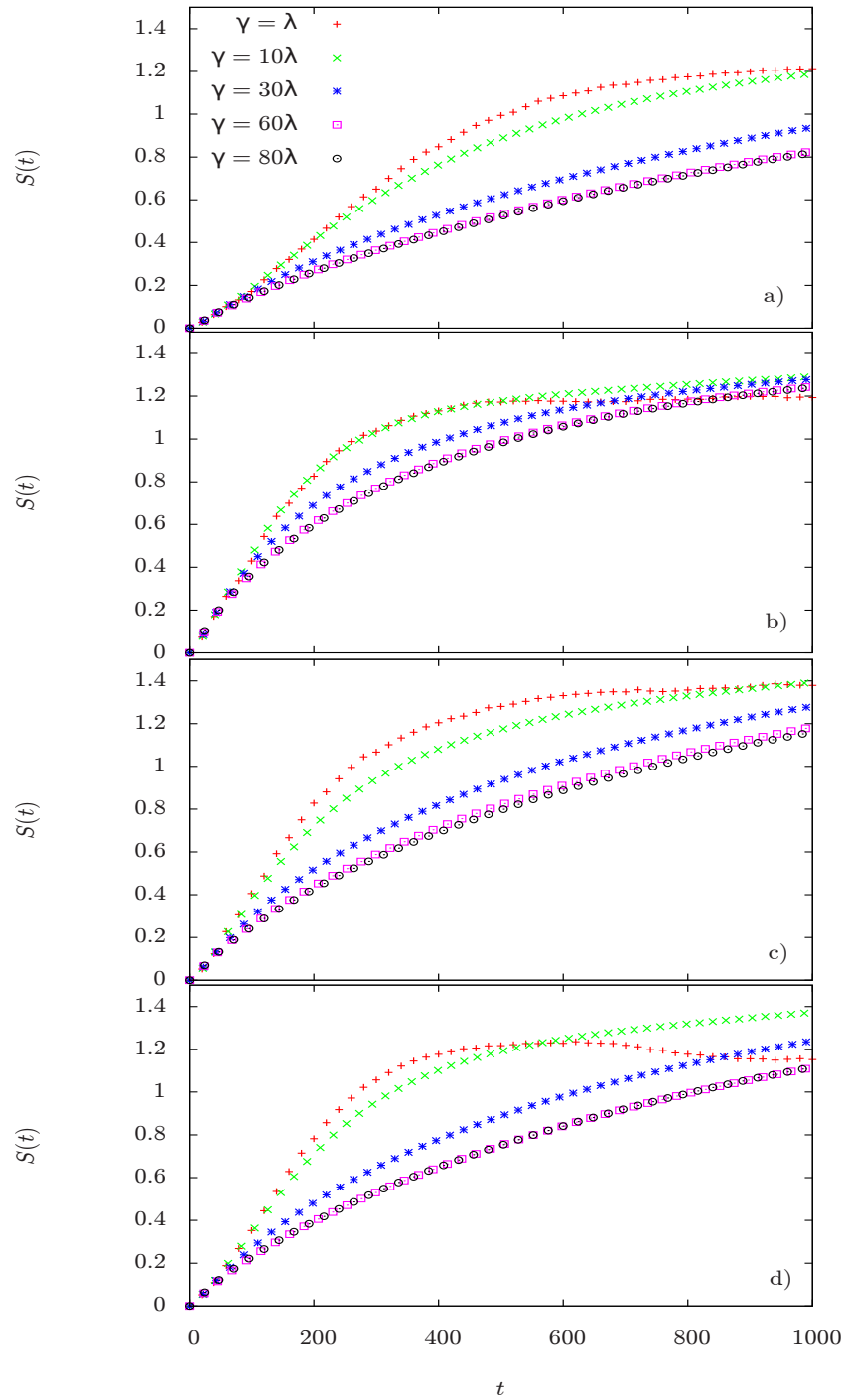


Figura 3.5: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la entropía de von Neumann del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. Los parámetros son los mismos que en la Figura 3.2.

3.4. Evolución de la Concurrencia

En la Figura 3.6 mostramos los resultados numéricos de la evolución temporal de la concurrencia del sistema central para cada configuración con los ambientes en el régimen caótico. Como en el caso de la pureza, la configuración en que más se mantiene el entrelazamiento del par de Bell es la de espectador, y como es de esperarse, cae más rápidamente para la configuración b). Para todas las configuraciones vemos que se presenta la muerte súbita del entrelazamiento (ESD). Éste efecto consiste en que el decaimiento de la concurrencia no es asintótico, sino que decae a cero en un tiempo finito [YE09]. Lo interesante de nuestro resultado es que podemos retrasar la muerte del entrelazamiento teniendo suficiente control sobre el parámetro γ , en particular al aumentarlo en cierto intervalo. La explicación física de la razón de este efecto no está del todo clara aún, pero la más llamativa desde nuestro punto de vista es que el ambiente lejano puede inducir un QZE sobre el sistema central. Así el decaimiento de las correlaciones en el par de Bell es retrasado con el aumento de γ hasta cierto valor crítico donde el efecto se satura.

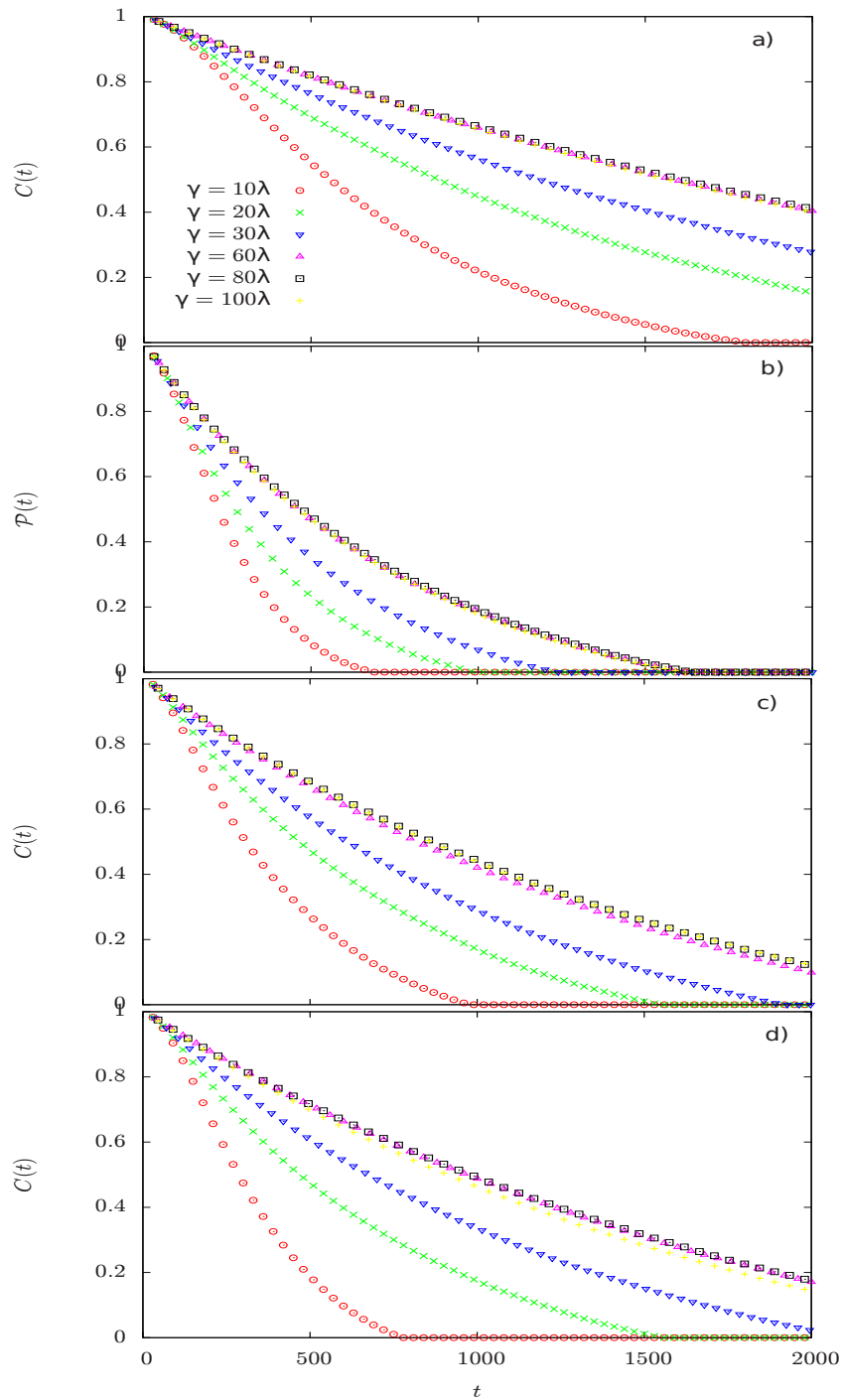


Figura 3.6: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la Concurrencia del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. Los parámetros son los mismos que en la Figura 3.2.

3.5. Evolución en el plano CP

Resulta útil visualizar la evolución simultánea de la pureza y la concurrencia usando el tiempo como parámetro en el plano CP [PS06]. En la Figura 3.7 se muestran dichos diagramas para las configuraciones anteriores y para los mismos parámetros que en 3.2 para el caso de ambientes caóticos. La región en color gris representa todos los estados físicamente aceptables y la región blanca en medio de las zonas grises representa el área ocupada por todas las transformaciones unitales sobre un estado de Bell [Pin07]. La línea negra más intensa corresponde a la relación entre pureza y concurrencia para los estados de Werner. Se puede claramente ver que el aumento de γ acerca la evolución de los estados hacia la curva de Werner en todas la configuraciones.

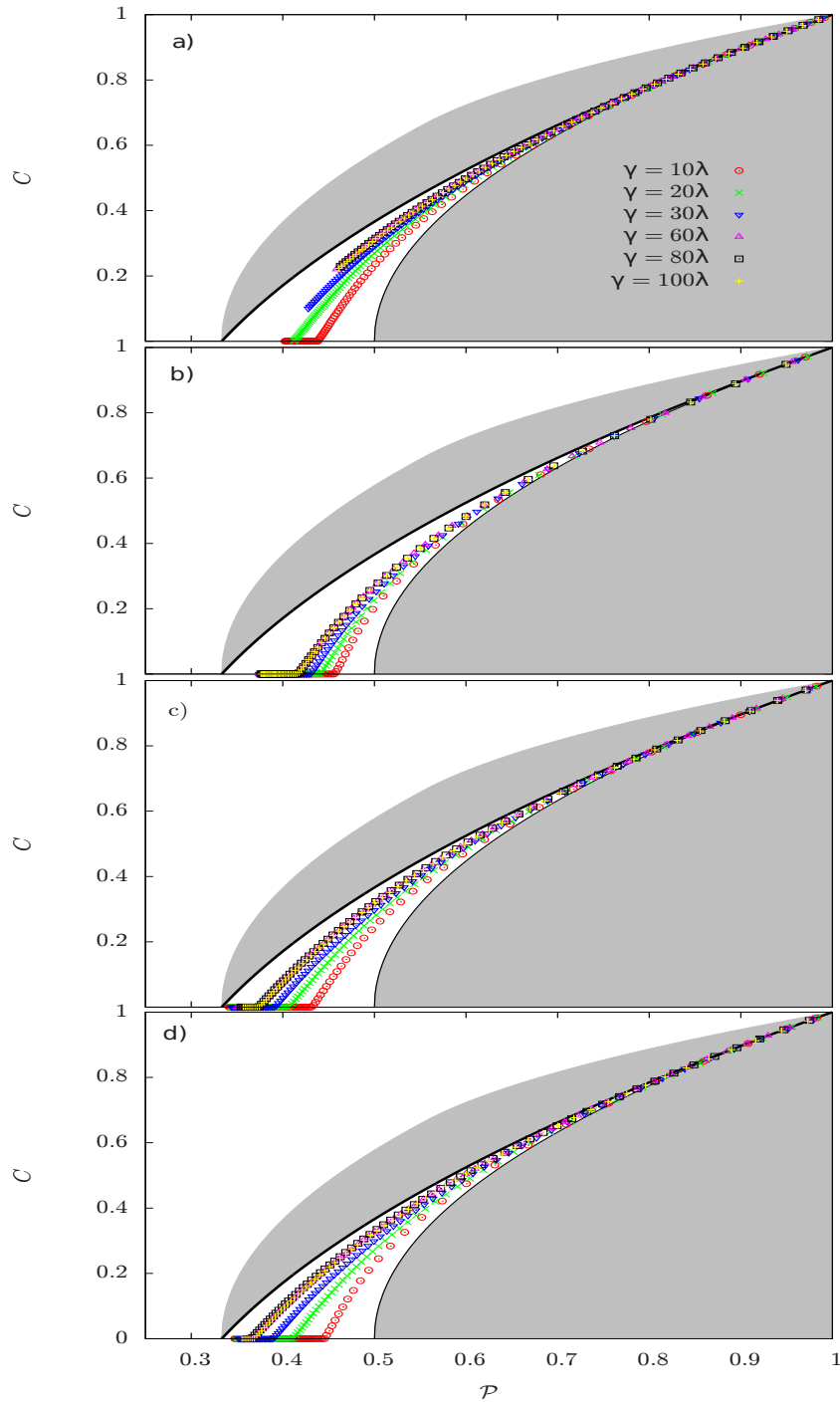


Figura 3.7: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución del par de Bell para 3000 pasos de tiempo en el plano CP para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. Los parámetros son los mismos que en 3.2.

3.6. Ambientes con dinámicas distintas

3.6.1. El caso integrable-caótico

Si aprovechamos el hecho de que nuestra implementación numérica permite que el campo magnético pueda depender de la posición de un qubit arbitrario, podemos tener distintas dinámicas en cada ambiente (cercano y lejano). Por ejemplo, si dejamos que $\phi = \pi/2$ para el ambiente cercano y $\phi = \pi/4$ para el ambiente lejano, tendremos una situación en donde nuestro par de Bell está en presencia de un ambiente integrable-caótico. En la Figura 3.8 mostramos los resultados para este caso. Para las dos primeras configuraciones tenemos exactamente el mismo resultado en el caso de ambos ambientes integrables, esto es, oscilaciones periódicas en la pureza independientes de γ . Para c) tenemos también resultados parecidos al caso integrable para acoplamientos pequeños, mientras que para γ 's grandes existen diferencias apreciables en el decaimiento de la pureza, por ejemplo, para $\gamma = 100\lambda$ la pureza sigue la tendencia de las demás curvas y no decae a su valor mínimo. En éste sentido, la coherencia se mantiene más tiempo en el caso integrable-caótico que el caso integrable-integrable para acoplamientos fuertes, lo cual, como hemos mencionado antes, confirma la tendencia de los ambientes caóticos a retrasar los tiempos de decoherencia de un sistema cuántico abierto. Para la configuración d) se presentan oscilaciones que decaen exponencialmente, lo cual es de esperarse, ya que la integrabilidad del ambiente cercano contribuye con oscilaciones en la pureza y el ambiente caótico lejano hace que dichas oscilaciones decaigan exponencialmente, dando lugar a un comportamiento con características de ambos ambientes. El hecho de que esto sólo se presente en ésta configuración es debido a que el par de Bell está siendo influenciado directamente por ambos ambientes.

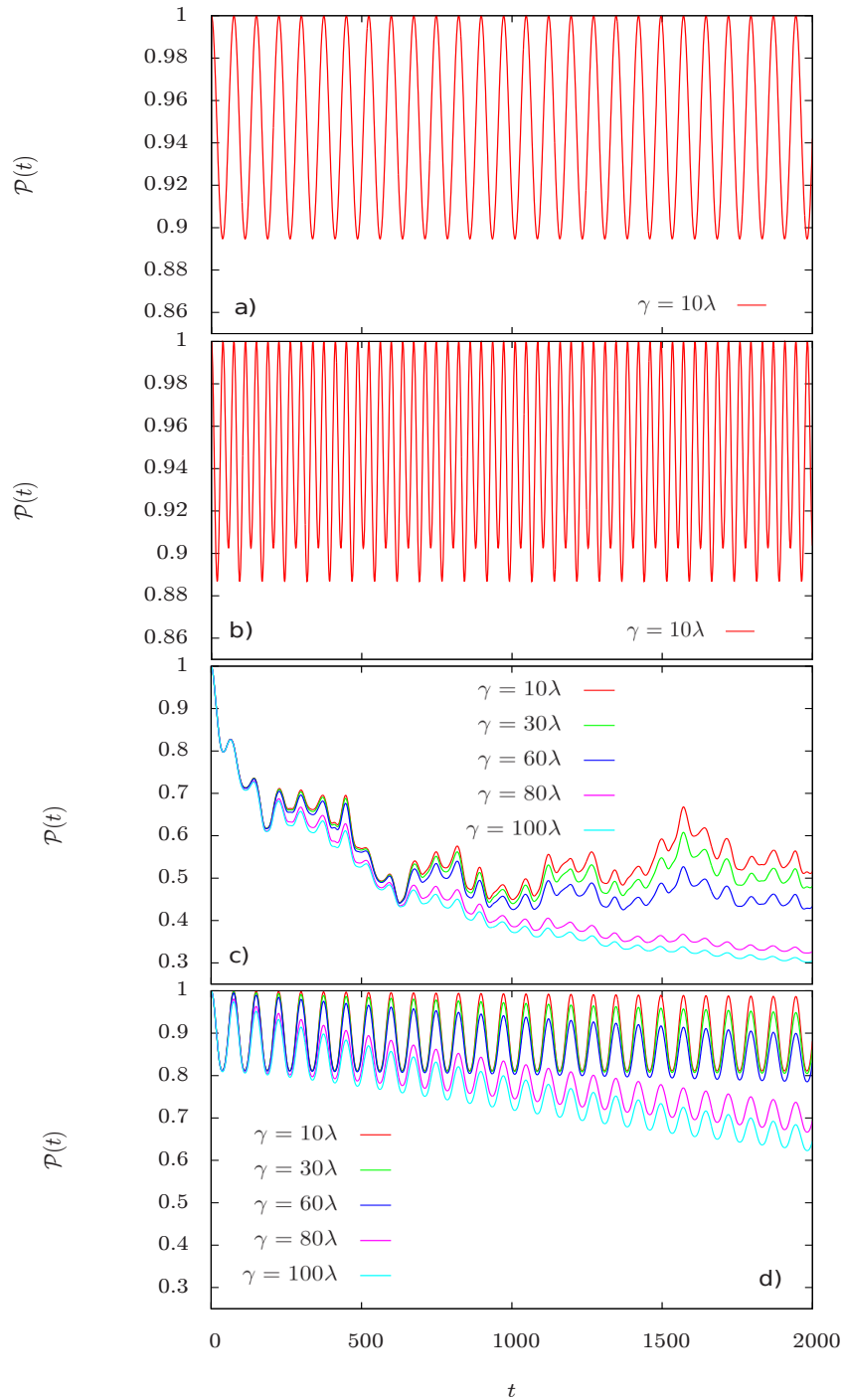


Figura 3.8: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica en el ambiente cercano es integrable con $\phi = \pi/2$ y en el lejano es caótico con $\phi = \pi/4$. $J_e = J_{e'} = 1.0$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.

3.6.2. El caso caótico-integrable

En este caso fijamos $\phi = \pi/4$ en el ambiente cercano y $\phi = \pi/2$ en el ambiente lejano. Los resultados de la simulación para las distintas configuraciones se muestran en la Figura 3.9. Podemos notar que el efecto observado anteriormente donde el tiempo de decoherencia aumenta en cierto intervalo de tiempo con γ ahora se observa mucho menos y parece oscilar a medida que ésta aumenta. En general el comportamiento no varía de manera apreciable según la configuración y se observa que predomina el ambiente caótico aunque es de mucho menor dimensión que el integrable. La situación aquí descrita es análoga a la de [Mor13] y los resultados son similares para el caso espectador, que es el único caso comparable al estudiado en esta tesis.

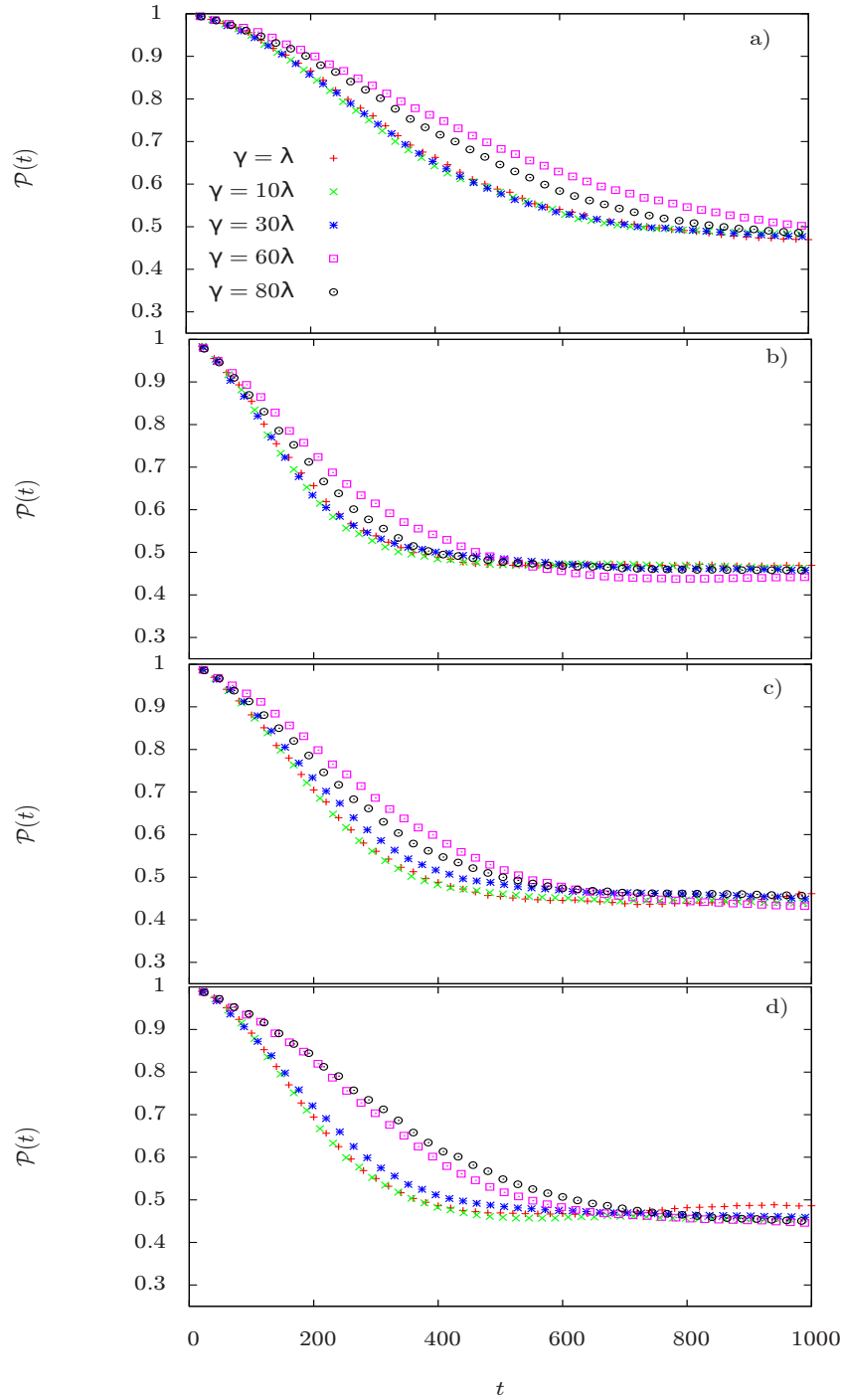


Figura 3.9: Las gráficas a), b), c) y d) muestran la evolución temporal de la pureza del par de Bell para las configuraciones correspondientes de la Figura 3.1. En este caso la dinámica en el ambiente cercano es caótica con $\phi = \pi/4$ y en el lejano es integrable con $\phi = \pi/2$. $J_e = J_{e'} = 1.0$. Para cada configuración hemos variado el parámetro de acoplamiento γ entre los ambientes. Hemos escogido $\lambda = 0.01$, $L_e = 6$ y $L_{e'} = 10$.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la decoherencia de un sistema cuántico en presencia de un ambiente constituido de sistemas de dos niveles o qubits. La realización física de los ambientes ha sido llevada a cabo a través de espines modelados por medio del Hamiltoniano de Ising pateado con un campo magnético, el cual nos dio la flexibilidad de observar el efecto de la dinámica interna de los ambientes sobre la decoherencia del sistema de interés. En el caso de un qubit como sistema central, hemos estudiado la evolución de la pureza y de la entropía de von Neumann como medida de la decoherencia en los tres regímenes dinámicos del ambiente: integrable, intermedio y caótico para una configuración específica (configuración estrella), así como también la evolución del vector de polarización en la esfera de Bloch. Encontramos comportamientos muy distintos dependiendo de la dinámica del ambiente, oscilaciones en la pureza para un ambiente integrable, oscilaciones amortiguadas en el caso de un ambiente intermedio y un decaimiento Gaussiano o exponencial dependiendo de la intensidad del acoplamiento con el ambiente para el caso caótico. Tales resultados ya habían sido encontrados en trabajos relacionados, pero fueron útiles como punto de partida para obtener los resultados del capítulo 3 y para corroborar que nuestra implementación numérica de los modelos funciona perfectamente. En particular se verificó numéricamente que cuando existe desfaseamiento, el decaimiento de la fidelidad en el ambiente concuerda con el decaimiento de las coherencias en el sistema central (qubit) como predice la teoría. Los resultados más importantes e interesantes desde nuestro punto de vista están contenidos en el capítulo 3, donde hemos propuesto un sistema central compuesto de dos qubits no interactuantes en presencia de un ambiente compuesto de dos

ambientes de espines, al cual hemos llamado ambiente de espines anidado. Un efecto de frustración o retraso de la decoherencia del sistema central ha sido observado cuando los ambientes de espines se encuentran en el régimen caótico al aumentar el parámetro que acopla los ambientes γ . Es la primera vez que se observa este efecto en este tipo de sistemas y confiamos que con la tecnología presente sea posible confirmarlo en un experimento. Un efecto similar ocurre para el entrelazamiento cuantificado por la concurrencia. Según nuestros resultados, es posible retrasar la muerte súbita del entrelazamiento controlando en un cierto rango el parámetro γ , lo cual resultaría muy útil en la implementación de algoritmos cuánticos con sistemas de espines en los cuales mantener el entrelazamiento el mayor tiempo posible es un gran desafío. Este efecto parece ser genérico de los sistemas tripartitas y posiblemente tenga una explicación del hecho bien conocido de la monogamia del entrelazamiento, en el cual no se puede distribuir el entrelazamiento de forma arbitraria en sistemas multipartitas. Otra posible explicación a dicho fenómeno es la existencia de un tipo de efecto Zeno cuántico inducido por el ambiente lejano, el cual causaría la disminución en el decaimiento de las correlaciones en el sistema central a medida que γ aumenta. Ésta explicación parece haber tenido éxito en el caso de dos cavidades ópticas acopladas con una de ellas en contacto con un baño de osciladores armónicos.

La explicación analítica de los resultados encontrados es sin duda un gran desafío y es parte del trabajo a futuro que nos queda por hacer en el estudio de la decoherencia con estos modelos. Creemos que es posible confirmar nuestro resultado con alguna de las realizaciones de sistemas de qubits existentes, en particular en experimentos de NMR o de iones en trampas magneto-ópticas.

Bibliografía

- [AdMHM⁺07] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and L. Davidovich. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, 316(5824):579–582, 2007. [1](#)
- [BGS84] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1–4, Jan 1984. [21](#)
- [BMFB73] T.A. Brody, P.A. Mello, J. Flores, and O. Bohigas. Doorway states and nuclear-spectrum statistics. *Lettere Al Nuovo Cimento Series 2*, 7(15):707–712, 1973. [24](#)
- [BP02] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford university press, 2002. [2](#), [17](#)
- [Bru02] Dagmar Bruß. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 43(9):4237–4251, 2002. [10](#)
- [CG14] Adam Zaman Chaudhry and Jiangbin Gong. Decoherence induced by a composite environment. *Phys. Rev. A*, 89:014104, Jan 2014. [35](#)
- [CGS14] M Carrera, T Gorin, and T H Seligman. Single qubit decoherence under a separable coupling to a random matrix environment. *arXiv preprint arXiv:1405.4448*, 2014. [41](#)
- [CL83] A.O Caldeira and A.J Leggett. Quantum tunnelling in a dissipative system. *Annals of Physics*, 149(2):374 – 456, 1983. [2](#), [35](#)

- [CVGG80] G. Casati, F. Valz-Gris, and I. Guarneri. On the connection between quantization of nonintegrable systems and statistical theory of spectra. *Lettere al Nuovo Cimento*, 28(8):279–282, 1980. [21](#)
- [DGR06] Deepak Dhar, L. K. Grover, and S. M. Roy. Preserving quantum states using inverting pulses: A super-zeno effect. *Phys. Rev. Lett.*, 96:100405, Mar 2006. [16](#)
- [DiV00] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, 48(9-11):771–783, 2000. [1](#)
- [dMJN11] A.R. Bosco de Magalhães, R. Rossi Jr., and M.C. Nemes. Environment induced quantum zeno effect in coupled microwave cavities. *Physics Letters A*, 375(16):1724 – 1728, 2011. [17](#)
- [DS01] M. Dubé and P.C.E. Stamp. Mechanisms of decoherence at low temperatures. *Chemical Physics*, 268(1–3):257 – 272, 2001. [2](#)
- [EPR35] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935. [5](#)
- [FJ63] R.P Feynman and F.L Vernon Jr. The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Annals of Physics*, 24(0):118 – 173, 1963. [2](#)
- [FP02] P. Facchi and S. Pascazio. Quantum zeno subspaces. *Phys. Rev. Lett.*, 89:080401, Aug 2002. [16](#)
- [GKLC01] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein, and J. I. Cirac. Entanglement criteria for all bipartite gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 87:167904, Oct 2001. [7](#)
- [GKS08] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski, and Ennackal Chandy George Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 17(5):821–825, 2008. [2](#)
- [HHH96] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1–2):1 – 8, 1996. [7](#)

- [HHR⁺05] H Häffner, W Hänsel, CF Roos, J Benhelm, M Chwalla, T Körber, UD Rapol, M Riebe, PO Schmidt, C Becher, et al. Scalable multiparticle entanglement of trapped ions. *Nature*, 438(7068):643–646, 2005. [1](#)
- [HSKH⁺05] H. Häffner, F. Schmidt-Kaler, W. Hänsel, C.F. Roos, T. Körber, M. Chwalla, M. Riebe, J. Benhelm, U.D. Rapol, C. Becher, and R. Blatt. Robust entanglement. *Applied Physics B*, 81(2-3):151–153, 2005. [1](#)
- [IHBW90] Wayne M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland. Quantum zeno effect. *Phys. Rev. A*, 41:2295–2300, Mar 1990. [16](#)
- [Joo03] E Joos. *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*. Springer, Berlin New York, 2003. [1](#)
- [Lin76] G. Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2):119–130, 1976. [2](#)
- [LV05] Fernando C. Lombardo and Paula I. Villar. Decoherence induced by a composite environment. *Phys. Rev. A*, 72:034103, Sep 2005. [35](#)
- [MFZ⁺08] Sabrina Maniscalco, Francesco Francica, Rosa L. Zaffino, Nicola Lo Gullo, and Francesco Plastina. Protecting entanglement via the quantum zeno effect. *Phys. Rev. Lett.*, 100:090503, Mar 2008. [17](#)
- [Mor13] H. Moreno. Decoherencia y entrelazamiento en sistemas acoplados a un entorno compuesto y un baño térmico. Master’s thesis, Universidad de Guadalajara, México, 2013. [35](#), [51](#)
- [MS77] B. Misra and E. C. G. Sudarshan. The Zeno’s paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics*, 18:756–763, April 1977. [16](#)
- [NC00] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. Quantum computation and quantum information. 2000. [4](#), [6](#)
- [Neu55] John Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Number 2. Princeton university press, 1955. [8](#)

- [ORN08] J. G. Oliveira, R. Rossi, and M. C. Nemes. Protecting, enhancing, and reviving entanglement. *Phys. Rev. A*, 78:044301, Oct 2008. [17](#)
- [Per96] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aug 1996. [7](#)
- [Pin07] Carlos Pineda. One, two, and n qubit decoherence. *arXiv preprint arXiv:0711.4642*, 2007. [41](#), [47](#)
- [PN94] Saverio Pascazio and Mikio Namiki. Dynamical quantum zeno effect. *Phys. Rev. A*, 50:4582–4592, Dec 1994. [16](#), [17](#)
- [PP07] Carlos Pineda and Tomaž Prosen. Universal and nonuniversal level statistics in a chaotic quantum spin chain. *Phys. Rev. E*, 76:061127, Dec 2007. [21](#), [25](#)
- [Pre98] J. Preskill. Quantum information and computation. *Lectures Notes for Physics*, 229, 1998. [7](#)
- [Pro01] Tomaž Prosen. Ergodic properties of quantum spin chains: Kicked transverse ising model. In Janez Bonča, Peter Prelovšek, Anton Ramšak, and Sarben Sarkar, editors, *Open Problems in Strongly Correlated Electron Systems*, volume 15 of *NATO Science Series*, pages 317–322. Springer Netherlands, 2001. [21](#)
- [Pro02] Tomaž Prosen. General relation between quantum ergodicity and fidelity of quantum dynamics. *Phys. Rev. E*, 65:036208, Feb 2002. [2](#), [19](#)
- [PS00] NV Prokof'ev and PCE Stamp. Theory of the spin bath. *Reports on Progress in Physics*, 63(4):669, 2000. [2](#)
- [PS02] Tomaz Prosen and Thomas H Seligman. Decoherence of spin echoes. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(22):4707, 2002. [19](#)
- [PS06] Carlos Pineda and Thomas H. Seligman. Evolution of pairwise entanglement in a coupled n -body system. *Phys. Rev. A*, 73:012305, Jan 2006. [19](#), [26](#), [47](#)
- [PV07] Martin B. Plenio and Shashank Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Information and Computation*, 7(1):1–51, 2007. [10](#)

-
- [Sch35] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31,32:555–563,446–451, 1935. [5](#)
- [Sch05] Maximilian Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 76:1267–1305, Feb 2005. [1](#), [2](#), [9](#)
- [SKK⁺00] CA Sackett, D Kielpinski, BE King, C Langer, V Meyer, CJ Myatt, M Rowe, QA Turchette, WM Itano, DJ Wineland, et al. Experimental entanglement of four particles. *Nature*, 404(6775):256–259, 2000. [1](#)
- [Tho74] W. Thompson. The kinetic theory of energy dissipation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 8:325–334, 1874. [1](#)
- [VL98] Lorenza Viola and Seth Lloyd. Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems. *Phys. Rev. A*, 58:2733–2744, Oct 1998. [40](#)
- [Woo98] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998. [11](#)
- [YE09] Ting Yu and J. H. Eberly. Sudden death of entanglement. *Science*, 323(5914):598–601, 2009. [1](#), [45](#)
- [Zur03] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75:715–775, May 2003. [1](#), [11](#), [13](#)