



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

**“Oscilación de neutrinos con  $E \sim \text{GeV}$  en  
un perfil de densidad realista de la  
Tierra.”**

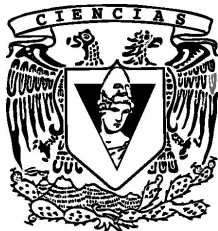
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

P R E S E N T A:

**Yaithd Daniel Olivas Arcos**



DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Sarira Sahu  
2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Datos generales.

## 1. Datos del alumno

Olivas  
Arcos  
Yaithd Daniel  
62-36-25-93  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
306209750

## 2. Datos del tutor.

Dr  
Sarira  
Sahu

## 3. Datos del sinodal 1.

Dr  
Dany Pierre  
Page  
Rollinet

## 4. Datos del sinodal 2.

Dr  
Lukas  
Nellen  
Filla

## 5. Datos del sinodal 3.

Dr  
Luis Gustavo  
Cabral  
Rosetti

## 6. Datos del sinodal 4.

Dr

Manuel  
Torres  
Labansat

“A mis padres: Diana María Carolina Arcos Martínez, María de Lourdes Martínez Laguna y Eduardo Arcos Manzano.”

# Agradecimientos.

Primero quiero agradecer a mi madre Diana María Carolina Arcos Martínez por sus enseñanzas durante estos 24 años de vida, también agradezco su apoyo incondicional ya que gracias a ella pude completar varias etapas de mi vida en especial esta etapa de titulación. Finalmente quiero decir que no tengo palabras para agradecer que siempre hicieras lo imposible por mi.

Quiero agradecer a mi madre María de Lourdes Martínez Laguna por su cariño y atenciones que me ha brindado a lo largo de mi vida, la verdad no sé como hubiera llegado a esta etapa de mi vida sin ella.

Agradezco a mi padre Eduardo Arcos Manzano por el apoyo que siempre me ha dado, gracias a él soy una persona íntegra y con valores, por ti puedo decir que soy una persona responsable. Agradezco que siempre me apoyaras con todas mis metas.

Quiero agradecer de todo corazón a Alejandra Liliana Gómez Paz, mi alma gemela, por la revisión ortográfica de esta tesis. Por estar conmigo en las buenas y en las malas, siempre aprenderemos como resolver los problemas juntos. Por soportarme cuando el mal humor invadía mi ser y por escucharme siempre que lo necesitara.

Agradezco al Dr. Sarira Sahu por todo el apoyo que siempre me brindó desde que lo conocí. Agradezco enormemente las discusiones que me permitieron enriquecer esta tesis y por supuesto agradezco los consejos que me dio ya que gracias a estos tengo una idea más clara de lo que implica ser un buen físico.

Agradezco a mis sinodales Dr. Dany Page, Dr. Manuel Torres, Dr. Gustavo Cabral y Dr. Lukas Nellen por los valiosos comentarios que me hicieron acerca de esta tesis, también quiero agradecer su apoyo ya que siempre tuvieron una buena disposición conmigo.

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>5</b>
<b>2. Física de neutrinos.</b>	<b>7</b>
2.1. Oscilación de neutrinos. . . . .	8
2.2. Neutrinos solares. . . . .	8
2.3. Neutrinos atmosféricos. . . . .	9
2.4. Neutrinos de altas energías. . . . .	11
2.4.1. Producción de neutrinos en Núcleos Activos de Galaxias. . . . .	12
<b>3. Potencial de neutrinos en la materia.</b>	<b>14</b>
3.1. Contribuciones al potencial de los neutrinos. . . . .	14
3.2. Perfil de densidad de la Tierra. . . . .	16
<b>4. Oscilación de neutrinos en la materia.</b>	<b>19</b>
4.1. Formalismo matemático. . . . .	19
4.1.1. Estados de sabor y estados de masa. . . . .	19
4.1.2. Hamiltoniano del sistema. . . . .	20
4.1.3. Cálculo del operador de evolución. . . . .	21
4.1.4. Probabilidad de transición. $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ . . . . .	28
4.2. Potenciales no uniformes. . . . .	30
<b>5. Resultados.</b>	<b>31</b>
5.1. Probabilidades de oscilación para neutrinos. . . . .	32
5.2. Probabilidades de oscilación para antineutrinos. . . . .	34
5.3. Resonancias. . . . .	37
5.4. Flujos. . . . .	38
<b>6. Conclusiones.</b>	<b>45</b>
<b>A. Operador de evolución.</b>	<b>47</b>
<b>B. Componentes, eigenvalores y propiedades de la matriz <math>T</math>.</b>	<b>49</b>
B.0.1. Eigenvalores de la matriz $T$ . . . . .	50
B.0.2. Propiedades de los eigenvalores de $T$ . . . . .	52

# Capítulo 1

## Introducción.

Los neutrinos son partículas fundamentales sin carga, con espín  $1/2$  y de masa extremadamente pequeña. Desde la primera confirmación experimental de su existencia en 1956 han sido objeto intenso de estudio a fin de revelar sus propiedades fundamentales. Una de sus propiedades más interesantes es la oscilación de sabor, que es la capacidad que tienen los neutrinos de cambiar su sabor a medida que se propagan por el vacío o por un medio material. Debido a que los neutrinos tienen una masa sumamente pequeña durante mucho tiempo se tuvo la incertidumbre acerca de si su masa era cero o no. La oscilación de sabor (confirmada en 1998 por el experimento Super Kamiokande [10] ) fue una propiedad fundamental para dar certidumbre a esta cuestión ya que la oscilación de neutrinos no se puede llevar a cabo si todos los sabores tienen masa cero, al menos un sabor debe tener masa distinta de cero para que el fenómeno pueda suceder. En 1978 L. Wolfenstein descubrió que la oscilación de sabor se ve modificada si en el trayecto de propagación del neutrino existe materia. Esto se traduce en que el neutrino siente un potencial que depende directamente de la densidad del medio, lo que dio origen a múltiples modelos en donde se calcula la probabilidad de oscilación para diversos perfiles de densidad de la materia.

Conocer las propiedades de los neutrinos es de suma importancia a fin de entender otros campos de estudio. Un ejemplo de esto es en el campo de la Astronomía en donde se han teorizado muchos modelos para el funcionamiento de estrellas, supernovas, remanentes de supernova, núcleos activos de galaxias, etc. Estos objetos astronómicos se encuentran a millones de años luz de distancia de la Tierra por lo que su estudio mediante observaciones y mediciones es una labor no trivial. Los neutrinos proveen una herramienta de observación muy útil ya que estos interactúan débilmente con la materia por lo que pueden viajar grandes distancias sin ser alterados de manera alguna. Debido a que constantemente están llegando neutrinos a la Tierra desde fuentes astronómicas se pueden crear detectores para determinar la dirección, sabor y energía de los neutrinos con el propósito de conocer el lugar de producción y sus características. Un ejemplo de estos telescopios de neutrinos es el proyecto IceCube. A fin de entender las propiedades de la fuente de producción es indispensable calcular los flujos de neutrinos que se espera lleguen a la Tierra teniendo en cuenta el fenómeno de oscilación de sabor, ya que la omisión de este factor para el caso del Sol dio origen al problema de neutrinos solares, en



donde se observó que el flujo de neutrinos provenientes del Sol (predicho por el Modelo Estándar Solar) era menor al detectado.

Los modelos más simples que describen la oscilación de sabor se basan en considerar la mezcla de sólo dos sabores de neutrinos, es decir, en este escenario sólo se dan transiciones entre dos sabores en lugar de considerar los tres tipos. En general se concidera el canal de transición  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$  pero también se pueden valorar por separado los canales de transición  $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$  y  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ . El objetivo de estudiar estos simples modelos es encontrar características del fenómeno oscilatorio que se preserven en modelos más elaborados como puede ser el modelo de oscilación de tres sabores en su aproximación de onda plana, el cual se trata en el capítulo 4 de la presente tesis. Debido a que el fenómeno oscilatorio se ve modificado por la propagación en un medio, los parámetros de mezcla de los neutrinos se ven afectados del mismo modo, lo que se refleja en los parámetros de mezcla efectivos, que se reducen a los parámetros del vacío cuando el potencial es nulo. Existe un fenómeno interesante descubierto por Mikheev, Smirnov y Wolfenstein (efecto MSW) en 1985, en el cual se alcanzan resonancias en la probabilidad de oscilación para valores específicos del potencial (condición de resonancia) por lo que se pueden identificar las densidades de materia en las cuales el fenómeno oscilatorio es de suma importancia, ya que al tener resonancias en la probabilidad de oscilación se ven modificados los flujos de neutrinos.

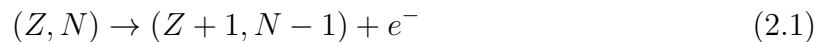
Un escenario ideal para el estudio de la oscilación de sabor en la materia es la Tierra. El proyecto IceCube, que se encuentra en operación en la Antártida, puede detectar neutrinos que hayan atravesado la Tierra y así determinar las características de los flujos de neutrinos provenientes de fuentes astronómicas. En el presente trabajo se pretende estudiar las oscilaciones de sabor para un perfil realista de densidad de la Tierra. Uno de los principales objetivos de estudio fue determinar el rango de energías para el cual la oscilación de sabor es importante y presenta cambios considerables en el flujo inicial de producción de neutrinos. Con esto se determinó si los neutrinos de altas energías tienen efectos de oscilación considerables al atravesar la Tierra. Otro objetivo planteado fue determinar, si es que existen, resonancias de transición y además tratar identificar si estas resonancias son del tipo MSW o no. Finalmente se abordaron dos tipos de flujo inicial, el primero de ellos fue el convencional basado en la producción de neutrinos por decaimiento de piones cargados y el segundo basado en la emisión inicial sólo de neutrinos muónicos(neutrino damped).

# Capítulo 2

## Física de neutrinos.

En 1914 James Chadwick descubrió que a diferencia de los procesos de decaimiento  $\alpha$  y  $\gamma$  las partículas emitidas en el proceso de decaimiento  $\beta$  no poseen un valor bien definido de la energía. Estas partículas presentan un amplio espectro que se extiende desde valores cercanos a cero hasta grandes valores de la energía. La aparición de este espectro de energías abrió una discusión importante entre los físicos de esa época poniendo en entredicho el principio de conservación de la energía. Niels Bohr sorprendido por este hecho experimental llegó a declarar: "Si ese es el resultado del experimento, entonces la Ley de la conservación de la energía no se cumple para el decaimiento  $\beta$ ".

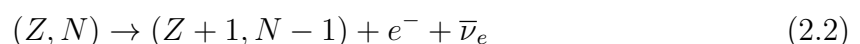
En aquellos tiempos el proceso de decaimiento  $\beta$  se representaba mediante la siguiente reacción:



El factor central de discusión en el proceso de decaimiento  $\beta$  radicaba en el hecho de que los electrones emitidos debían poseer un único valor de la energía dado por la diferencia de las energías en reposo de los núcleos  $(Z, N)$  y  $(Z + 1, N - 1)$ . Pero experimentalmente no se encontraba un solo valor sino una distribución, indicando que la energía no detectada se estaba perdiendo en el proceso.

Wolfgang Pauli, quien era una persona a la cual no se le podía catalogar como conservadora, se aferró al hecho de que el principio de conservación de la energía se cumplía en todos los procesos de la naturaleza. En 1930 postuló la existencia del neutrino electrónico ( $\nu_e$ ), una partícula sin carga y sin masa que comparte la energía total del proceso de tal manera que la suma de la energía del neutrino y el electrón permanece constante, explicando así la distribución de energías encontrada experimentalmente para el electrón.

La primera confirmación experimental se dio en 1956 por Cowan y Reines y desde entonces surgió un gran interés en el estudio de los neutrinos y sus interacciones con otras partículas. Actualmente la reacción que explica el decaimiento  $\beta$  es:



En años posteriores fue detectada otra partícula con las mismas características que  $\nu_e$  pero relacionada a un proceso diferente ec. (2.3). El entendimiento de diversas reacciones en las cuales se involucra esta partícula permitió diferenciarla de  $\nu_e$  y por tanto se reconoció la existencia de otra especie de neutrino, el neutrino muónico.



Finalmente, en el 2000, se reportó la detección de un nuevo neutrino asociado a la partícula  $\tau$  y por tanto nombrado neutrino tauónico  $\nu_\tau$ . Casi después de 70 años desde que Pauli postuló por primera vez la existencia del neutrino, los tres tipos se han detectado directamente.

## 2.1. Oscilación de neutrinos.

La oscilación de neutrinos es un fenómeno de la Mecánica Cuántica por el cual un neutrino creado con un sabor específico ( $e, \mu, \tau$ ), al propagarse por el vacío o por un medio, tiene cierta probabilidad de ser detectado a una distancia  $L$  con un estado de sabor diferente al inicial. Bruno Pontecorvo fue el primero en proponer la existencia de este fenómeno a finales de los años 50's [1] comparándolo con el fenómeno de oscilación de Kaones ( $K^0 - \bar{K}^0$ ).

En esta misma década sólo se conocía un sabor de neutrino, por lo que para discutir su oscilación B. Pontecorvo inventó el concepto de neutrino estéril, el cual se define como un fermión que no interacciona mediante la fuerza débil con otras partículas. En 1967 Pontecorvo fue capaz de predecir el problema de neutrinos solares<sup>1</sup>, debido a la transición  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ , incluso antes de la primera medición experimental de neutrinos solares.

En los artículos publicados por Pontecorvo en los 60's [2] no se daba un cálculo explícito de la probabilidad de transición ya que sus cálculos fueron realizados en analogía con la oscilación de Kaones. La teoría de oscilación de neutrinos en su aproximación de onda plana fue desarrollada entre 1975 y 1976 por Eliezer y Swift, Fritzsche y Minkowski, y elegantemente por Bilenky y Pontecorvo.

## 2.2. Neutrinos solares.

El Sol es una fuente muy poderosa de neutrinos electrónicos ( $\nu_e$ ) con energías del orden de 1 Mev. Estos neutrinos electrónicos son producidos en el núcleo del Sol mediante reacciones termonucleares y debido a que su interacción con la materia es muy

---

<sup>1</sup>"El problema de neutrinos solares es la discrepancia entre el flujo teórico de neutrinos electrónicos provenientes del sol y el flujo experimental registrado."

débil estos pueden viajar desde el núcleo hasta la superficie del Sol sin alteración alguna. El flujo de neutrinos solares sobre la Tierra es  $6 \times 10^{10} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  [1], es decir, en un centímetro cuadrado de papel u otro material están atravesando sesenta mil millones de neutrinos electrónicos cada segundo. A pesar de tener un flujo muy elevado de neutrinos su detección es una labor no trivial ya que los mecanismos de detección involucran la interacción de los neutrinos con otras partículas. Adicionalmente, debido a que la Tierra está siendo bombardeada constantemente no sólo por neutrinos sino por otras partículas las interacciones de los neutrinos se pueden ver sumergidas en un gigantesco ruido. Para evitar esto los detectores de neutrinos son construidos a grandes profundidades con el objetivo de que la capa de roca por encima del detector funcione como un escudo contra las demás partículas.

Los neutrinos solares fueron detectados por primera vez en 1970 en el experimento Homestake [3]. A finales de los años 80's el experimento Kamiokande obtuvo la primer imagen en tiempo real de neutrinos provenientes del Sol. Más tarde iniciando la década de los 90's los experimentos en el Super-Kamiokande y en el SNO (Sudbury Neutrino Observatory) arrojaron datos de alta precisión acerca de la parte más energética del flujo de neutrinos provenientes del Sol.

En 1968 los primeros datos del experimento Homestake indicaron que el flujo de neutrinos electrónicos provenientes del Sol era significativamente pequeño respecto al predicho por el SSM (Standard Solar Model). Esta pequeña discrepancia en el flujo se puede explicar mediante el mecanismo de oscilación de neutrinos: los neutrinos electrónicos al propagarse cambian a estados diferentes de sabor; por lo que el modelo que ya había propuesto Pontecorvo era un candidato ideal para resolver el problema. Algunos autores discuten la posibilidad de que la solución de Pontecorvo sea la más simple y atractiva al problema de los neutrinos solares.

## 2.3. Neutrinos atmosféricos.

La Tierra está siendo bombardeada constantemente por partículas de origen astronómico (rayos cósmicos primarios), estas producen interacciones con las partículas que forman parte de la atmósfera arrojando en su mayoría neutrinos como productos finales. Se denomina entonces neutrinos atmosféricos a los provenientes de interacciones de rayos cósmicos con la atmósfera. La importancia del estudio de estos neutrinos radica en que es una fuente natural y muy rica de neutrinos de energías altas (del orden de GeV).

Los rayos cósmicos están compuestos en su mayoría por protones (p) que al interactuar con los núcleos que conforma la atmósfera producen una gran cantidad de hadrones. Los hadrones a su vez decaen en otras partículas dando así origen a los rayos cósmicos secundarios. Estas partículas tienen un amplio espectro de energías siendo su pico principal el correspondiente a energías de GeV. Entre todos los hadrones que son producidos en los rayos cósmicos secundarios están los piones ( $\pi^\pm$ ) cargados. Como se ve en la figura (2.1)

los piones a su vez decaen en más partículas entre las cuales se encuentran los neutrinos. Los decaimientos de los piones se expresan mediante las siguientes reacciones:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (2.4)$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (2.5)$$

Los muones que decaen antes de golpear el suelo terrestre forman nuevas partículas, las cuales son electrones, positrones, neutrinos electrónicos y neutrinos tauónicos.

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (2.6)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (2.7)$$

El espectro de energías con las cuales son generados estos neutrinos va desde 100 MeV hasta 100 GeV. Estos neutrinos pueden ser detectados en laboratorios subterráneos a través de su interacción con átomos específicos.

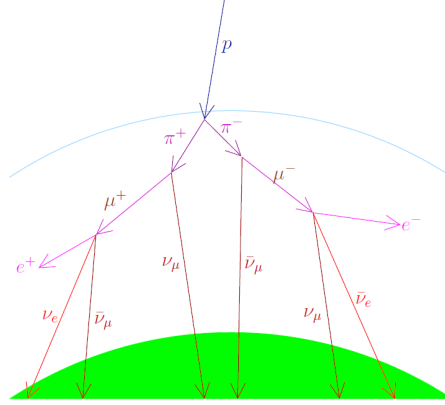


Fig 2.1. Esquema de las posibles interacciones en la atmósfera.

A energías por debajo de 1 GeV los neutrinos cumplen las siguientes relaciones de flujos:

$$r = \frac{\phi_{\nu_\mu} + \phi_{\bar{\nu}_\mu}}{\phi_{\nu_e} + \phi_{\bar{\nu}_e}} \approx 2 \quad (2.8)$$

$$\frac{\phi_{\nu_\mu}}{\phi_{\bar{\nu}_\mu}} \approx 1 \quad (2.9)$$

$$\frac{\phi_{\nu_e}}{\phi_{\bar{\nu}_e}} \approx \frac{\phi_{\mu^+}}{\phi_{\mu^-}} \quad (2.10)$$

Lo anterior se puede deducir fácilmente de las ecs. (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7). Para energías por arriba de 1 GeV el número de muones que alcanza la superficie de la Tierra antes

de decaer aumenta <sup>2</sup>, por lo que debe de aumentar la razón  $r$  de la ecuación (2.8). En la figura (2.2) se puede observar el aumento de la razón  $r$  como función de la energía.

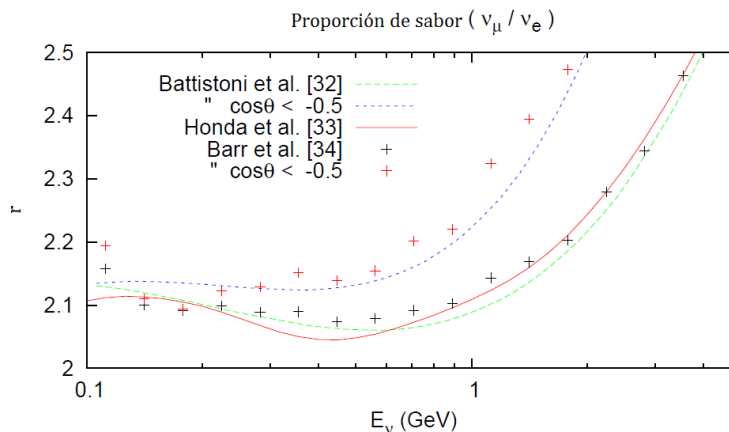


Fig 2.2. Gráfica que muestra el comportamiento de  $r$  como función de la energía.

La primera detección de neutrinos atmosféricos sucedió a inicios de los años 60's por Reines en unas minas profundas localizadas en Sudafrica y por Menon en "Kolar Gold Fields" en la India. La era moderna comenzó en los años 80's cuando se contruyeron detectores subterráneos para buscar el decaimiento del protón. En estos detectores se llevaron a cabo mediciones increíblemente precisas del flujo de neutrinos atmosféricos dando así origen al descubrimiento experimental de la oscilación de neutrinos atmosféricos debida a la transición  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ .

## 2.4. Neutrinos de altas energías.

En la literatura se han propuesto un gran número de fuentes de neutrinos con energías por arriba de 1 GeV, estas fuentes son conocidas como fuentes de altas energías en la producción de neutrinos. Entre ellas están los Núcleos Activos de Galaxias (AGN), los Brotes de Rayos Gamma (GRBs), remanentes de supernova y colapsos de núcleos de supernova. La importancia del estudio de neutrinos de altas energías radica en que propiedades como su flujo, su rango de energía, la forma del espectro de energías y su contenido de sabor dependen de las condiciones físicas de la fuente. Así los neutrinos de altas energías brindan información valiosa acerca de la naturaleza física de la fuente de producción en especial cuando los fotones no pueden escapar de ahí. Sin embargo, debido a su interacción tan débil con la materia pueden viajar desde su punto de producción hasta la Tierra.

<sup>2</sup>Los muones al poseer más energía tienen una velocidad mayor, por lo cual efecto de dilatación del tiempo se ve presente en el aumento de su vida media por lo que son capaces de alcanzar la superficie de la Tierra sin decaer."

### 2.4.1. Producción de neutrinos en Núcleos Activos de Galaxias.

Los Núcleos Activos de Galaxias (AGN por sus siglas en inglés) representan la única clase de objetos extragalácticos conocidos que emiten rayos gamma de super altas energías (VHE). Estos objetos son encontrados en el núcleo de por lo menos el 5% de todas las galaxias. Generalmente, son conocidas por su emisión espectral altamente brillante, muy variable y no térmica que se extiende desde radio frecuencias hasta rayos  $\gamma$  con energías de TeV. Se cree que son impulsados por la acreción de materia sobre un agujero negro super masivo ( $10^6 - 10^9$  masas solares). En la descripción unificada de los AGN este agujero negro es rodeado en regiones internas por un disco de acreción, y en las regiones más externas por gas y polvo en forma toroidal.

Por largo tiempo se ha presumido que los AGN son sitios de producción de neutrinos de altas energías. En el escenario de producción de neutrinos por decaimiento de mesones se asume que dentro de los AGN los protones son acelerados a través del proceso de aceleración de Fermi de primer orden y que los piones son producidos mediante los procesos:

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p + \pi^0 \quad (2.11)$$

$$p + \gamma \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+ \quad (2.12)$$

$$n + \gamma \rightarrow p + \pi^- \quad (2.13)$$

Los piones neutros decaen en rayos gamma a través del proceso:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (2.14)$$

Mientras que los piones cargados decaen en neutrinos electrónicos y muónicos mediante los procesos:

$$\pi^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+ \rightarrow \nu_\mu + e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (2.15)$$

$$\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (2.16)$$

Los rayos  $\gamma$  creados en estos procesos se pueden ver oscurecidos y dispersos debido a un medio. Además los protones podrían ser desviados por campos magnéticos extragalácticos en su trayecto a la Tierra. Pero por otro lado, los neutrinos escapan del sitio de producción virtualmente sin alteraciones que pudiera causar el medio, por eso, si su dirección puede ser reconstruida al momento de ser detectados, esta apuntaría de regreso en dirección a la fuente.

En el mecanismo convencional [6] los neutrinos son producidos por decaimiento de piones cargados, de las reacciones (2.15) y (2.16) se puede calcular el flujo de neutrinos de

un cierto sabor (sin hacer distinción con su antipartícula). Los flujos correspondientes son:

$$\phi_{\nu_e}^0 : \phi_{\nu_\mu}^0 : \phi_{\nu_\tau}^0 = 1 : 2 : 0 \quad (2.17)$$

En su trayecto hacia la Tierra los neutrinos pueden sufrir transiciones de sabor debido a la oscilación que presentan en el vacío del espacio. Este efecto de oscilación da como consecuencia la redistribución de los flujos de acuerdo a la siguiente relación:

$$\phi_{\nu_e} : \phi_{\nu_\mu} : \phi_{\nu_\tau} = 1 : 1 : 1 \quad (2.18)$$

Nuevos efectos físicos pueden causar cambios en los flujos de la ec. (2.18), tales como decoherencia, violación de la invarianza de Lorentz, etc.



# Capítulo 3

## Potencial de neutrinos en la materia.

En 1978 L. Wolfenstein descubrió que los neutrinos al propagarse en un medio material están sometidos a un potencial debido a la interacción de estos con los protones, neutrones y electrones con los cuales está constituida la materia ordinaria. Este potencial es equivalente al índice de refracción para la luz y altera de manera significativa la oscilación de neutrinos. Por esta razón es importante estudiar el efecto de materia a fin de entender su oscilación al propagarse por ambientes astronómicos como estrellas y planetas, en el caso de la presente tesis, la Tierra.

### 3.1. Contribuciones al potencial de los neutrinos.

Los neutrinos colisionan de manera elástica e inelástica con las partículas que conforman la materia. En una primera aproximación se consideran las colisiones elásticas de los neutrinos con los electrones, protones y neutrones. En la figura (3.1) se muestran los diagramas de Feynman correspondientes a las distintas colisiones elásticas posibles.

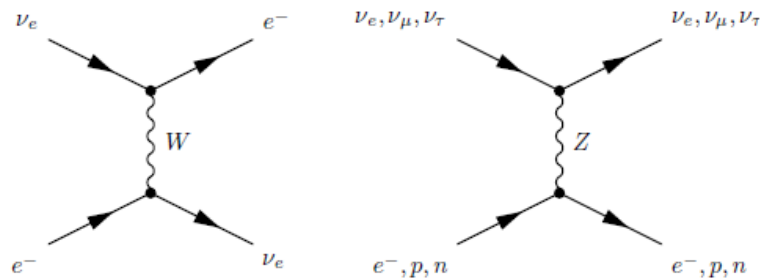


Fig 3.1. Diagramas de Feynman que muestran las posibles interacciones de los neutrinos con los electrones, protones y neutrones.

Las interacciones de los neutrinos con la materia están gobernadas por la interacción débil, por lo que los bosones de norma en este caso son  $W^\pm$  y  $Z^0$ . El Hamiltoniano de

interacción se puede escribir de la manera siguiente:

$$H_I = H_Z^n + H_Z^p + H_Z^e + H_W^e \quad (3.1)$$

Las matrices  $H_Z^n, H_Z^p, H_Z^e, H_W^e$  son diagonales, es decir:

$$H_Z^i = \begin{pmatrix} A_Z^i & 0 & 0 \\ 0 & A_Z^i & 0 \\ 0 & 0 & A_Z^i \end{pmatrix}, \quad i = e, p, n. \quad (3.2)$$

También

$$H_W^e = \begin{pmatrix} A_W^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

En donde los  $\{A_B^i\}_{B=Z,W}$  son los potenciales de materia efectivos debido a la interacción con la partícula  $i = e, p, n$  mediante el intercambio del bosón  $B = Z^0, W^\pm$ . Los coeficientes  $A_B^i$  pueden ser calculados usando la Teoría Cuántica de Campos a Temperatura finita [13]. Los valores que se pueden extraer de esta teoría son:

$$A_W^e = \pm\sqrt{2}G_F N_e \quad (3.4)$$

$$A_Z^n = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n \quad (3.5)$$

$$A_Z^p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}G_F(1 - 4\sin^2\theta_W)N_p \quad (3.6)$$

$$A_Z^e = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}G_F(1 - 4\sin^2\theta_W)N_e \quad (3.7)$$

La densidad de partículas de la especie  $i = e, p, n$  está denotada como  $N_i$  y a  $\theta_W$  se le conoce como el ángulo de Weinberg. La matriz en la ecuación (3.3) sólo contiene una componente distinta de cero, la correspondiente a la interacción de neutrinos electrónicos con electrones, esto se debe a que en la materia ordinaria las interacciones de neutrinos con muones y partículas tau no son posibles. En el subsecuente desarrollo de la Teoría de Oscilación de Neutrinos en materia se hará notar que la matriz de la ecuación (3.2) en realidad no es necesaria para ver el comportamiento oscilatorio, ya que representa una fase global en los cálculos.

Debido a que en el siguiente capítulo sólo se utiliza la contribución al potencial  $A_W^e$  es conveniente desarrollar su expresión final en términos de la densidad de medio  $\rho$ . Con el objetivo de simplificar la notación se toma  $A_W^e = A$ , con esto se sobre entiende que las contribuciones al potencial son las que provienen de la interacción mediante corrientes cargadas.

La ecuación (3.4) da el potencial que siente un neutrino al propagarse en la materia ordinaria. Esta expresión depende totalmente de la densidad de partículas en el medio, pero raramente se encuentra esta información en la literatura. Lo que se puede encontrar con más frecuencia es la densidad del medio  $\rho$  por lo que se desarrolla a continuación la conexión entre estas dos cantidades.

La primer hipótesis a tomar en cuenta es que la materia ordinaria es neutra. Lo que esto significa es que en un volumen dado la cantidad de electrones es la misma a la cantidad de protones. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$N_e = N_p \quad (3.8)$$

Donde  $N_e$  es la densidad de electrones y  $N_p$  es la densidad de protones en el medio. La segunda hipótesis que se toma es que por cada protón hay un neutrón que lo acompaña. Esto implica que por cada electrón hay dos nucleones en un volumen determinado, es decir:

$$2N_p = N_{nucleon} \quad (3.9)$$

Recuérdese que la densidad del medio es simplemente la cantidad de masa por unidad de volumen, suponiendo que la masa total del medio se debe a la contribución mayormente de los protones, ya que el electrón es aproximadamente 1800 veces menos pesado que el protón, se tiene que la densidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$\rho = N_{nucleon} m_p \quad (3.10)$$

Donde  $m_p$  es la masa del protón. Se toma la masa del protón ya que esencialmente el protón y el neutrón tienen la misma masa. Entonces despejando a  $N_p$  de esta ecuación y sustituyendo en las ecuaciones (3.8) y (3.9) se obtiene:

$$N_e = \frac{\rho}{2m_p} \quad (3.11)$$

Sustituyendo finalmente en la ecuación (3.4) se obtiene la relación entre el potencial del neutrino y la densidad del medio.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F \frac{\rho}{m_p} \quad (3.12)$$

## 3.2. Perfil de densidad de la Tierra.

Como se verá en el capítulo 4, la presencia de materia en el trayecto de propagación de los neutrinos afecta de manera significativa su comportamiento oscilatorio. Es por

esto que es de suma importancia, a fin de obtener resultados más realistas, conocer la forma explícita del potencial  $A$ . La ecuación (3.12) provee una conexión directa entre la densidad del medio y el potencial generado por dicha densidad. Entonces para conocer el comportamiento oscilatorio de los neutrinos (con ciertos parámetros ya establecidos) simplemente se necesita conocer la densidad de materia del medio. Se puede suponer como una buena aproximación que la densidad de la Tierra tiene simetría esférica de tal manera que la densidad en cualquier punto de su interior es únicamente función de su distancia al centro, es decir, sólo depende de  $r$ .

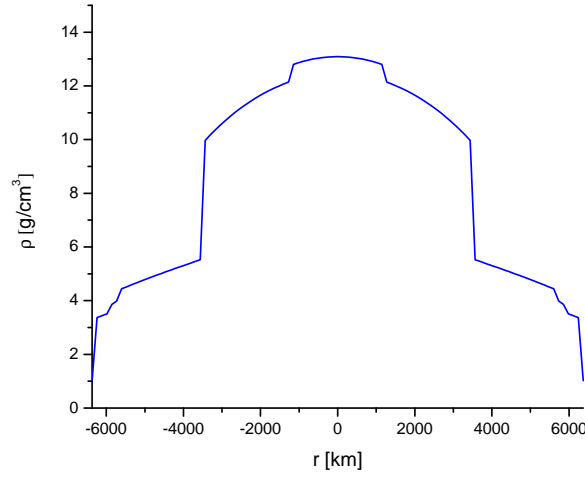


Fig 3.2. Densidad de la Tierra como función de la distancia al centro  $r$  a lo largo de uno de sus diámetros. Se utilizan distancias negativas con el objetivo de indicar la dirección opuesta.

El perfil de densidad radial [4] que se utilizará a lo largo del presente trabajo está dado por la siguiente regla de correspondencia:

$$\rho(x) = \begin{cases} 13.0885 - 8.8381x^2, & 0 \leq x \leq 0.191 \\ 12.5815 - 1.2638x - 3.6426x^2 - 5.5281x^3, & 0.191 < x \leq 0.546 \\ 7.9565 - 6.4761x + 5.5283x^2 - 3.0807x^3, & 0.546 < x \leq 0.895 \\ 5.3197 - 1.4836x, & 0.895 < x \leq 0.905 \\ 11.2494 - 8.0298x, & 0.905 < x \leq 0.937 \\ 7.1089 - 3.8045x, & 0.937 < x \leq 0.965 \\ 2.6910 + 0.6924x, & 0.965 < x \leq 0.996 \\ 2.900, & 0.996 < x \leq 0.997 \\ 2.600, & 0.997 < x \leq 0.999 \\ 1.020, & 0.999 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

En donde  $\rho$  tiene unidades de  $\text{g/cm}^3$  y  $x = r/R$  siendo  $r$  la distancia medida desde el

centro y  $R$  el radio de la Tierra ( $R = 6367\text{km}$ ). En la figura (3.2) se puede ver la gráfica del perfil de densidad de la Tierra a lo largo de un diámetro desde  $-R$  a  $R$ .

# Capítulo 4

## Oscilación de neutrinos en la materia.

### 4.1. Formalismo matemático.

#### 4.1.1. Estados de sabor y estados de masa.

Los neutrinos son partículas elementales producidas en eigen-estados de sabor  $\{|\nu_\alpha\rangle\}_{\alpha=e,\mu,\tau}$  creados por la interacción de bosones débiles (portadores de la interacción débil) con leptones cargados. Para que exista el fenómeno de oscilación entre los estados de sabor estos se identifican como combinaciones lineales de eigen-estados de masa bien definida  $\{|\nu_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ , lo que se expresa de la siguiente manera:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (4.1)$$

donde  $U_{\alpha i}$  son los elementos de la matriz CKM (Cabbibo-Kobayashi-Maskawa). La matriz CKM es una transformación lineal unitaria de cambio de base entre el espacio de sabor y el espacio de estados de masa. Una consecuencia de que la transformación  $U$  sea lineal es que su dimensión mínima de definición es  $3 \times 3$ . Si se define a la transformación  $U$  en una mayor dimensión  $n \times n$  la mezcla entre neutrinos incluye a los neutrinos estériles. Una parametrización frecuentemente usada de la matriz CKM está dada por:

$$U = (U_{\alpha i}) = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$
$$= \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}c_{12} & s_{12}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}s_{13}c_{12}e^{-i\delta_{CP}} & -s_{23}c_{12} - s_{13}s_{12}c_{23}e^{-i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}.$$

Donde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $\delta_{CP}$  es la fase de la simetría CP y los parámetros  $\theta_{ij}$  se conocen como los ángulos de mezcla en el vacío. En los subsecuentes cálculos se tomará  $\delta_{CP} = 0$ , lo que asegura que todos los elementos de la matriz CKM son reales.

$$U_{\alpha i}^* = U_{\alpha i} \quad (4.3)$$

### 4.1.2. Hamiltoniano del sistema.

La evolución de un estado cualquiera  $\phi_m$  propagándose en el vacío (en la base de estados de masa) queda determinada por la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{d}{dt} \phi_m = H_m \phi_m. \quad (4.4)$$

Debido a que  $|\nu_i\rangle$  se escoge como eigen-estado del hamiltoniano se obtiene:

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle \quad (4.5)$$

donde la energía está dada por la relación relativista  $E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$ . Nótese que se ha tomado como hipótesis que todos los eigen-estados de masa tienen el mismo momento. Entonces en la base de eigen-estados de masa el hamiltoniano del sistema en el vacío es diagonal y la forma explícita que adquiere es:

$$H_m^0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Con el objetivo de simplificar la notación se etiqueta a los estados con su respectivo índice, utilizando índices latinos para los eigen-estados de masa e índices griegos para los eigen-estados de sabor. Es decir  $|\nu_\alpha\rangle = |\alpha\rangle$  en la base de sabor y  $|\nu_i\rangle = |i\rangle$  en la base de masa.

Como ya se mencionó en el capítulo 3, al propagarse en un medio los neutrinos colisionan elásticamente con las partículas que forman parte de la materia ordinaria (protones, neutrones y electrones). El resultado de todas las colisiones se traduce en un potencial efectivo que afecta a los neutrinos al propagarse en la materia. La forma del potencial en la base de eigen-estados de sabor es:

$$V_f = \begin{pmatrix} A_{CC} + A_{NC} & 0 & 0 \\ 0 & A_{NC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{NC} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Donde  $A_{CC} = A$  es la contribución del potencial correspondiente a las corrientes cargadas y  $A_{NC}$  es el potencial correspondiente a las corrientes neutras. Nótese que el potencial total se puede separar en la suma de dos contribuciones debidas a NC y CC. En la siguiente sección se realizarán cálculos con el potencial dado por la ec. (4.7). Debido a que

el término  $A_{NC}$  es común en las interacciones de todos los sabores de neutrinos se puede omitir en cálculos posteriores ya que genera una fase global en el operador de evolución del sistema. Por tanto, el potencial que se utilizó en el resto de los cálculos es:

$$V_f = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Donde  $A_{CC} = \pm\sqrt{2}G_F N_e$ . En la expresión anterior  $G_F$  es la constante de acoplamiento de Fermi y  $N_e$  es la densidad de electrones en el medio. Se toma el signo positivo para neutrinos y el signo negativo para los antineutrinos.

### 4.1.3. Cálculo del operador de evolución.

Una vez que los neutrinos son producidos como estados de sabor estos evolucionan en el tiempo. El estado de un neutrino a un tiempo  $t$  distinto del de producción ( $t_0$ ) queda determinado por la acción del operador de evolución sobre el estado  $|\phi(t_0)\rangle$ . Entonces se tiene:

$$|\phi(t)\rangle = \Theta(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle \quad (4.9)$$

donde  $\Theta(t, t_0)$  es el operador de evolución del sistema. Sustituyendo el operador  $\Theta$  en la ecuación (4.4) se obtiene:

$$i\frac{d}{dt}\Theta(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle = H(t)\Theta(t, t_0) |\phi(t_0)\rangle. \quad (4.10)$$

Entonces la ecuación diferencial de primer orden que define al operador de evolución es:

$$i\frac{d}{dt}\Theta(t, t_0) = H(t)\Theta(t, t_0). \quad (4.11)$$

Para Hamiltonianos que no dependen del tiempo la ecuación anterior tiene una solución expresada por la exponencial del Hamiltoniano.

$$\Theta(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (4.12)$$

Entonces el estado a un tiempo  $t$  es:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\phi(t_0)\rangle. \quad (4.13)$$

Para facilitar los cálculos subsecuentes se trabajará en la base de eigen-estados de masa, ya que los resultados obtenidos son independientes de la base elegida. El Hamiltoniano



del sistema a estudiar queda expresado por la suma del Hamiltoniano de un neutrino viajando en el vacío más la contribución del potencial debida a la interacción del neutrino con la materia ordinaria. A causa de que el potencial, ec. (4.8), está descrito en la base de eigen-estados de sabor se utilizan las propiedades de transformación de la matriz de cambio de base. Entonces el Hamiltoniano total del sistema es:

$$H_m = H_m^0 + U^{-1}V_fU. \quad (4.14)$$

La primer característica del Hamiltoniano anterior es que no depende del tiempo ya que se está tratando un medio material con densidad de partículas constante y por tanto la energía potencial se mantiene constante. Por lo tanto es posible usar la expresión del operador de evolución dada por la ecuación (4.12).

$$\Theta(t, t_0) = e^{-iH_m(t-t_0)} = e^{-i(H_m^0 + U^{-1}V_fU)(t-t_0)}. \quad (4.15)$$

Nótese que el problema de encontrar el estado de un neutrino a un tiempo  $t$  se redujo al problema de encontrar la exponencial de una cierta matriz de  $3 \times 3$ .

La exponencial de una matriz se puede calcular usando la expansión de la exponencial en su serie de Taylor. Entonces:

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}. \quad (4.16)$$

Sea  $p(\lambda)$  el polinomio característico de la matriz  $M$  expresado de la siguiente manera:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + c_1\lambda + c_0. \quad (4.17)$$

Entonces la ecuación característica del sistema es:

$$\lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0. \quad (4.18)$$

El operador de evolución del sistema está expresado mediante la suma infinita de matrices, lo que hace imposible a primera instancia su cálculo analítico. Se puede abordar esta dificultad haciendo uso del Teorema de Cayley-Hamilton[16] el cual se describe por medio del siguiente enunciado:

**TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON.** Sea  $S$  un operador lineal en un espacio vectorial dimensionalmente finito  $V$  y sea  $p(\lambda)$  el polinomio característico de  $S$ . Entonces  $p(S) = 0$  (la transformación nula); es decir  $S$  satisface su polinomio característico.

Del teorema anterior se tiene para la matriz  $M$ :

$$M^N + c_{N-1}M^{N-1} + \dots + c_1M + c_0I = 0 \quad (4.19)$$

Donde  $I$  es la matriz identidad. Entonces es posible despejar  $M^N$

$$M^N = -c_{N-1}M^{N-1} - \dots - c_1M - c_0I. \quad (4.20)$$

Para  $p > N$  se tiene:

$$\begin{aligned} M^p &= M^{N+l} = M^l(-c_{N-1}M^{N-1} - \dots - c_1M - c_0I) \\ &= -c_{N-1}M^{N+l-1} - \dots - c_1M^{l+1} - c_0M^l \\ &= -c_{N-1}M^{p-1} - \dots - c_1M^{p-N+1} - c_0M^{p-N}, \quad \text{con } l = p - N. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por lo que un término de orden  $p$  en  $M$  se puede reducir a un término de orden  $p - 1$  en  $M$ . Siguiendo con este procedimiento se puede expresar el término de orden  $p$  en  $M$  como un polinomio de orden  $N - 1$  en  $M$ , es decir:

$$M^p = c_{N-1}^p M^{N-1} + \dots + c_1^p M + c_0^p I, \quad (4.22)$$

Entonces la exponencial de  $M$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} e^M &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{M^n}{n!} + \sum_{p=N}^{\infty} \frac{M^p}{p!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{M^n}{n!} + \sum_{p=N}^{\infty} \frac{(c_{N-1}^p M^{N-1} + \dots + c_1^p M + c_0^p I)}{p!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{M^n}{n!} + \left( \sum_{p=N}^{\infty} \frac{c_{N-1}^p}{p!} \right) M^{N-1} + \dots + \left( \sum_{p=N}^{\infty} \frac{c_1^p}{p!} \right) M + \left( \sum_{p=N}^{\infty} \frac{c_0^p}{p!} \right) I \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{p=N}^{\infty} \frac{c_{n-1}^p}{p!} + \frac{1}{n!} \right) M^n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n M^n. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para simplificar los cálculos es conveniente usar el hecho de que toda matriz se puede expresar como la suma de la matriz identidad multiplicada por un factor más la suma de una matriz sin traza, es decir:

$$M = M_0 + \frac{1}{N} [Tr(M)] I. \quad (4.24)$$

Siendo  $N$  la dimensión de la matriz  $M$  y  $M_0$  la matriz sin traza dada por:

$$(M_0)_{ij} = M_{ij} - \frac{[Tr(M)]}{N} \delta_{ij} \quad (4.25)$$

Finalmente, se puede concluir la posibilidad de expresar el operador de evolución del sistema como una suma finita siempre y cuando la dimensión de la matriz  $M$  sea finita. En particular para el sistema de dimensión 3 de estudio en este capítulo se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{-i\mathbf{H}_m t} &= e^{-iTt - \frac{i}{3}(\text{Tr}\mathbf{H}_m)It} \\
&= \phi e^{-iTt} \\
&= \phi [a_0 I + a_1(-iTt) + a_2(-iTt)^2] \\
&= \phi (a_0 I - ia_1 t T - a_2 t^2 T^2).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

donde  $\phi = e^{-i\text{Tr}(H)t/3}$  es una fase global del sistema y  $T$  es la matriz obtenida a partir de  $M$  con traza nula, es decir  $\text{Tr}(T) = 0$ . Se ha tomado por simplicidad  $t_0 = 0$ . La ecuación (4.26) se puede expresar en término de la distancia recorrida ( $L$ ) por el neutrino, ya que estas partículas viajan a velocidades muy cercanas a la de la luz debido a su masa pequeña. Entonces en unidades naturales ( $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ ) se tiene  $L = t$ , sustituyendo en la ecuación (4.26) resulta:

$$e^{-iTL} = (a_0 I - ia_1 LT - a_2 L^2 T^2). \tag{4.27}$$

De la ecuación anterior sólo resta por determinar los coeficientes  $\{a_i\}_{i=0,1,2}$  para completar el cálculo del operador de evolución. Debido a que  $T$  es un operador Hermitiano por tener todos sus coeficientes reales y ser una matriz simétrica todos los eigenvalores de  $T$  son números reales  $\{\lambda_j\}_{j=1,2,3}$ . Entonces sea  $R$  la matriz que diagonaliza a  $T$ , aplicando una transformación de similaridad se obtiene:

$$R^{-1}e^{-iTL}R = (a_0 R^{-1}IR - ia_1 LR^{-1}TR - a_2 L^2 R^{-1}T^2R). \tag{4.28}$$

Pero

$$R^{-1}e^{-iTL}R = e^{-iR^{-1}TRL} \tag{4.29}$$

$$R^{-1}T^2R = R^{-1}TRR^{-1}TR. \tag{4.30}$$

Entonces

$$e^{-i(R^{-1}TRL)} = [a_0(R^{-1}IR) - ia_1 L(R^{-1}TR) - a_2 L^2(R^{-1}TR)(R^{-1}TR)]. \tag{4.31}$$

Sea  $T_d = R^{-1}TR$  la matriz diagonal obtenida a partir de  $T$  cuyas componentes diagonales son sus eigenvalores, sustituyendo se obtiene:

$$e^{-iT_d L} = (a_0 I - ia_1 LT_d - a_2 L^2 T_d^2). \tag{4.32}$$

Pero la exponencial de una matriz diagonal es el exponencial de cada componente, es

decir:

$$e^{-iT_d L} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 L} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2 L} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda_3 L} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Entonces la ecuación (4.32) se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$e^{-i\lambda_1 L} = a_0 - iL\lambda_1 a_1 - L^2 \lambda_1^2 a_2, \quad (4.34)$$

$$e^{-i\lambda_2 L} = a_0 - iL\lambda_2 a_1 - L^2 \lambda_2^2 a_2, \quad (4.35)$$

$$e^{-i\lambda_3 L} = a_0 - iL\lambda_3 a_1 - L^2 \lambda_3^2 a_2. \quad (4.36)$$

Para escribir el sistema anterior de manera compacta se identifica:

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 L} \\ e^{-i\lambda_2 L} \\ e^{-i\lambda_3 L} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -iL\lambda_1 & -L^2 \lambda_1^2 \\ 1 & -iL\lambda_2 & -L^2 \lambda_2^2 \\ 1 & -iL\lambda_3 & -L^2 \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

resultando en:

$$\hat{e} = \Lambda \hat{a}. \quad (4.40)$$

Al invertir la ecuación anterior se obtiene el valor explícito de los coeficientes  $\{a_i\}_{i=0,1,2}$ .

$$\hat{a} = \Lambda^{-1} \hat{e}. \quad (4.41)$$

Componente a componente se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det(\Lambda)} \begin{pmatrix} iL^3(\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2) & iL^3(\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2) & iL^3(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2) \\ -L^2(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) & -L^2(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) & -L^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ -iL(\lambda_3 - \lambda_2) & -iL(\lambda_1 - \lambda_3) & -iL(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_1 L} \\ e^{-i\lambda_2 L} \\ e^{-i\lambda_3 L} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\Lambda)} \begin{pmatrix} iL^3[e^{-iL\lambda_1}(\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2)] \\ -L^2[e^{-iL\lambda_1}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] \\ -iL[e^{-iL\lambda_1}(\lambda_3 - \lambda_2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_3) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_2 - \lambda_1)] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

en donde:

$$\det(\Lambda) = iL^3(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_3^2\lambda_1). \quad (4.43)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes  $a_i$  en la ecuación (4.26) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-iH_m L} = \phi e^{-iLT} = \phi \left\{ \frac{iL^3}{\det(\Lambda)} [e^{-iL\lambda_1}(\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2)] I \right. \\ \left. + \frac{iL^3}{\det(\Lambda)} [e^{-iL\lambda_1}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] T \right. \\ \left. + \frac{iL^3}{\det(\Lambda)} [e^{-iL\lambda_1}(\lambda_3 - \lambda_2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_3) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_2 - \lambda_1)] T^2 \right\}. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Factorizando el término común se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{-iH_m L} = \frac{iL^3\phi}{\det(\Lambda)} \{ [e^{-iL\lambda_1}(\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2)] I \\ + [e^{-iL\lambda_1}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)] T \\ + [e^{-iL\lambda_1}(\lambda_3 - \lambda_2) + e^{-iL\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_3) + e^{-iL\lambda_3}(\lambda_2 - \lambda_1)] T^2 \}. \quad (4.45) \end{aligned}$$

Con la finalidad de simplificar se agrupan los términos comunes en las exponenciales

$$\begin{aligned} e^{-iH_m L} = \phi e^{-iLT} = \frac{iL^3\phi}{\det(\Lambda)} \{ e^{-iL\lambda_1} [(\lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2)I + (\lambda_2^2 - \lambda_3^2)T + (\lambda_3 - \lambda_2)T^2] + \\ + e^{-iL\lambda_2} [(\lambda_3\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2)I + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)T + (\lambda_1 - \lambda_3)T^2] + \\ + e^{-iL\lambda_3} [(\lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2)I + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)T + (\lambda_2 - \lambda_1)T^2] \}. \quad (4.46) \end{aligned}$$

Pero  $(\lambda_i\lambda_j^2 - \lambda_j\lambda_i^2) = \lambda_i\lambda_j(\lambda_j - \lambda_i)$  y también  $\lambda_i^2 - \lambda_j^2 = (\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)$ . Entonces de cada término se puede factorizar  $(\lambda_i - \lambda_j)$ , es decir:

$$\begin{aligned}
 e^{-iH_m L} &= \frac{iL^3 \phi}{\det(\Lambda)} \left\{ e^{-iL\lambda_1} (\lambda_3 - \lambda_2) [(\lambda_2 \lambda_3)I - (\lambda_2 + \lambda_3)T + T^2] \right. \\
 &\quad + e^{-iL\lambda_2} (\lambda_1 - \lambda_3) [(\lambda_1 \lambda_3)I - (\lambda_1 + \lambda_3)T + T^2] \\
 &\quad \left. + e^{-iL\lambda_3} (\lambda_2 - \lambda_1) [(\lambda_1 \lambda_2)I - (\lambda_1 + \lambda_2)T + T^2] \right\}. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

El determinante de  $\Lambda$  se puede expresar como el producto de tres términos

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda) &= iL^3 (\lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1^2 - \lambda_3^2 \lambda_1) \\
 &= iL^3 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2). \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo y simplificando en la ecuación (4.47)

$$\begin{aligned}
 e^{-iH_m L} &= \phi \left\{ \frac{e^{-iL\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} [(\lambda_2 \lambda_3)I - (\lambda_2 + \lambda_3)T + T^2] \right. \\
 &\quad + \frac{e^{-iL\lambda_2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} [(\lambda_1 \lambda_3)I - (\lambda_1 + \lambda_3)T + T^2] \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-iL\lambda_3}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} [(\lambda_1 \lambda_2)I - (\lambda_1 + \lambda_2)T + T^2] \right\}. \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

Efectuando los productos de los denominadores se obtiene:

$$\begin{aligned}
 e^{-iH_m L} &= \phi \left\{ \frac{e^{-iL\lambda_1}}{(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3)} [(\lambda_2 \lambda_3)I - (\lambda_2 + \lambda_3)T + T^2] \right. \\
 &\quad + \frac{e^{-iL\lambda_2}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3)} [(\lambda_1 \lambda_3)I - (\lambda_1 + \lambda_3)T + T^2] \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-iL\lambda_3}}{(\lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2)} [(\lambda_1 \lambda_2)I - (\lambda_1 + \lambda_2)T + T^2] \right\}. \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

Con ayuda de las siguientes seis relaciones demostradas en el apéndice B se puede simplificar la expresión anterior.

$$3\lambda_1^2 + c_1 = \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 \tag{4.51}$$

$$3\lambda_2^2 + c_1 = \lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 \tag{4.52}$$

$$3\lambda_3^2 + c_1 = \lambda_3^2 - \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \tag{4.53}$$

$$\lambda_1^2 + c_1 = \lambda_2 \lambda_3 \tag{4.54}$$

$$\lambda_2^2 + c_1 = \lambda_1 \lambda_3 \tag{4.55}$$

$$\lambda_3^2 + c_1 = \lambda_1 \lambda_2. \tag{4.56}$$

Además, debido a que  $T$  tiene traza nula se cumple  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (4.50) se obtiene:

$$e^{-iH_m L} = \frac{\phi e^{-iL\lambda_1}}{3\lambda_1^2 + c_1} [(\lambda_1^2 + c_1)I + \lambda_1 T + T^2] + \frac{\phi e^{-iL\lambda_2}}{3\lambda_2^2 + c_1} [(\lambda_2^2 + c_1)I + \lambda_2 T + T^2] + \frac{\phi e^{-iL\lambda_3}}{3\lambda_3^2 + c_1} [(\lambda_3^2 + c_1)I + \lambda_3 T + T^2]. \quad (4.57)$$

Finalmente el operador de evolución tiene la siguiente expresión:

$$e^{-iH_m L} = \phi \sum_{a=1}^3 \frac{e^{-iL\lambda_a}}{3\lambda_a^2 + c_1} [(\lambda_a^2 + c_1)I + \lambda_a T + T^2]. \quad (4.58)$$

Para obtener la expresión del operador de evolución en la base de eigen-estados de sabor simplemente se aplica la transformación de similaridad dada por  $U$ , entonces:

$$e^{-iH_f L} = U e^{-iH_m L} U^{-1} = \phi \sum_{a=1}^3 \frac{e^{-iL\lambda_a}}{3\lambda_a^2 + c_1} [(\lambda_a^2 + c_1)I + \lambda_a \tilde{T} + \tilde{T}^2] \quad (4.59)$$

en donde

$$\tilde{T} = U T U^{-1} \quad (4.60)$$

$$\tilde{T}^2 = U T^2 U^{-1}. \quad (4.61)$$

Este es el resultado más importante que se presenta a lo largo del capítulo ya que expresa de manera explícita al operador de evolución en términos de los coeficientes del polinomio característico de  $T$  y sus eigenvalores, los cuales son  $\{c_0, c_1, c_2\}$  y  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ . Cabe destacar que la expresión para el operador de evolución es más sencilla en la base de eigen-estados de masa, razón por la cual siempre se usó en el cálculo anterior.

#### 4.1.4. Probabilidad de transición. $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$

La amplitud de transición se define como:

$$A_{\alpha\beta} = \langle \beta | U_f(L) | \alpha \rangle, \quad (4.62)$$

en donde se ha utilizado la notación  $|\nu_\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ . Entonces empleando la expresión para

el operador de evolución en la base de sabor se obtiene:

$$A_{\alpha\beta} = \phi \sum_{a=1}^3 e^{-iL\lambda_a} \frac{1}{3\lambda_a^2 + c_1} [(\lambda_a^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_a \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}], \quad (4.63)$$

donde los subíndices hacen referencia a los elementos de cada matriz. La probabilidad de transición es el cuadrado del módulo de la amplitud, por lo que se obtiene:

$$P_{\alpha\beta} \equiv |A_{\alpha\beta}|^2 = A_{\alpha\beta}^* A_{\alpha\beta}. \quad (4.64)$$

Sustituyendo la expresión para la amplitud

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 e^{-iL(\lambda_a - \lambda_b)} \frac{(\lambda_a^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_a \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_a^2 + c_1} \frac{(\lambda_b^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_b \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_b^2 + c_1}. \quad (4.65)$$

La expresión anterior se simplifica obteniendo:

$$P_{\alpha\beta} = \left( \sum_{a=1}^3 \frac{(\lambda_a^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_a \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_a^2 + c_1} \right)^2 \quad (4.66)$$

$$- 4 \sum_{a=1}^3 \sum_{a < b}^3 \frac{(\lambda_a^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_a \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_a^2 + c_1} \frac{(\lambda_b^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_b \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_b^2 + c_1} \sin^2 \left[ \frac{(\lambda_a - \lambda_b)L}{2} \right].$$

Para simplificar la expresión anterior nótese que para  $L = 0$  el operador de evolución es el operador identidad

$$U_f(L = 0) = I = \sum_{a=1}^3 \frac{(\lambda_a^2 + c_1)I + \lambda_a \tilde{T} + \tilde{T}^2}{3\lambda_a^2 + c_1}. \quad (4.67)$$

Los correspondientes componentes de matriz son:

$$\delta_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^3 \frac{(\lambda_a^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_a \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_a^2 + c_1}. \quad (4.68)$$

Sustituyendo en la ecuación (33) se llega a la expresión para la probabilidad de transición

$$P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{a=1}^3 \sum_{a < b}^3 \frac{(\lambda_a^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_a \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_a^2 + c_1} \frac{(\lambda_b^2 + c_1)\delta_{\alpha\beta} + \lambda_b \tilde{T}_{\alpha\beta} + (\tilde{T}^2)_{\alpha\beta}}{3\lambda_b^2 + c_1} \sin^2 \left[ \frac{(\lambda_a - \lambda_b)L}{2} \right]. \quad (4.69)$$

La ecuación anterior da la probabilidad de transición de un sabor de neutrino  $\alpha$  a un sabor de neutrino  $\beta$ .



## 4.2. Potenciales no uniformes.

Potenciales no uniformes son generados por densidades que varían espacialmente de acuerdo con la ecuación (3.12). Estos potenciales causan efectos diferentes en el comportamiento oscilatorio de los neutrinos debido a que en cada punto de su trayecto experimentan un potencial diferente. Para los neutrinos  $t = L$  por lo que el Hamiltoniano total del sistema ec. (4.14) depende del tiempo si y sólo si el potencial también depende del tiempo. En una situación como esta no es posible resolver de manera trivial la ecuación funcional (4.11) para encontrar el operador de evolución, por lo que hay que emplear otros métodos de resolución. En su mayoría son aproximaciones ya que sólo en casos especiales se tendrá una solución analítica como la que se obtuvo con el potencial constante.

Para poder resolver este problema se divide la longitud del trayecto ( $L$ ) en intervalos pequeños de tal manera que el potencial prácticamente no varíe de manera significativa en ellos. Haciendo esto se obtiene un conjunto de divisiones  $\{L_0, L_1, \dots, L_N\}$ , en donde  $L_0 = 0$  y  $L_i = iL/N$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ . La ecuación (A.9) propiedad del operador de evolución establece la siguiente relación entre los intervalos:

$$\Theta(L_{i+2}, L_i) = \Theta(L_{i+2}, L_{i+1})\Theta(L_{i+1}, L_i) \quad (4.70)$$

Es decir, el operador de evolución del trayecto  $L_i \rightarrow L_{i+2}$  es simplemente la multiplicación de los operadores de evolución de los trayectos  $L_i \rightarrow L_{i+1}$  y  $L_{i+1} \rightarrow L_{i+2}$  en orden cronológico. Por lo tanto el operador de evolución correspondiente al trayecto  $0 \rightarrow L$  es:

$$\Theta(L, 0) = \prod_{i=0}^{N-1} \Theta(L_{i+1}, L_i) \quad (4.71)$$

En la ecuación anterior se debe notar la dependencia del operador de evolución en el potencial ya que para cada subintervalo el potencial es diferente. En una serie de artículos publicados por Tommy Ohlsson y Hakan Snellman [5, 11] se ha utilizado este método con el objetivo de analizar el comportamiento oscilatorio de neutrinos en ambientes como el Sol y otros sistemas que se pueden modelar mediante perfiles de escalón.

En los cálculos realizados en la presente tesis se tomó la longitud del intervalo total ( $L$ ) igual al diámetro de la Tierra y se dividió en 100 subintervalos, por lo que el operador de evolución total es la multiplicación cronológica de las 100 matrices calculadas. Es evidente que dicho cálculo no puede ser realizado de manera analítica por lo que fue importante el desarrollo un programa que calculara los 100 operadores de evolución y después los multiplicara. En el siguiente capítulo se presentan los resultados obtenidos con dicho programa y su posterior análisis de manera gráfica.

# Capítulo 5

## Resultados.

Para tener una visión clara del comportamiento oscilatorio para neutrinos y anti-neutrinos que atraviesan la Tierra por puntos antípoda se calculó la probabilidad de supervivencia ( $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha$ ) y la probabilidad de transición ( $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ ) como función de la energía. Al tratar con un perfil realista de densidad de la Tierra, ec. (3.13), se obtuvieron los valores de energía cuya probabilidad es máxima así como otras características que se pueden preservar en modelos más elaborados de oscilación. Esto permite conocer el rango de energías en donde el comportamiento oscilatorio de los neutrinos y antineutrinos es relevante.

Con el propósito de realizar los cálculos antes mencionados se elaboró un programa de computadora. Como se menciona en el capítulo anterior, para obtener el operador de evolución del perfil realista de la Tierra se necesita multiplicar tantas matrices como la precisión lo requiera. Para esta tesis se eligió hacer la aproximación multiplicando 100 matrices u operadores de evolución. Dicha labor no es posible realizarla de manera analítica por lo que el uso del programa fue de suma importancia. Básicamente el programa calcula los eigenvalores de la matriz T y con ellos construye el operador de evolución en cada iteración de acuerdo con la ec. (4.59).

Se utilizaron los parámetros estándar de oscilación para los neutrinos obtenidos de diversos experimentos[7]. Los parámetros utilizados fueron los siguientes:

$$\begin{aligned}\Delta m^2 &= 8.0 \times 10^{-5} \text{eV}^2, & \theta_{12} &= 33.8^\circ & \text{y} & \theta_{23} &= 45^\circ \\ \Delta M^2 &= 3.2 \times 10^{-3} \text{eV}^2, & \theta_{13} &= 8.8^\circ & \text{y} & \delta_{CP} &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

En las siguientes secciones se muestran las gráficas obtenidas, clasificadas en las correspondientes a neutrinos y antineutrinos; esto con el fin de caracterizar el comportamiento oscilatorio en cada caso.

## 5.1. Probabilidades de oscilación para neutrinos.

En las figuras (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) y (5.6) se encuentran las gráficas de la probabilidad de oscilación como función de la energía. Se puede observar que una característica general en todas las probabilidades de supervivencia, figuras (5.1), (5.4) y (5.6), es la tendencia de la probabilidad a tener valores más cercanos a uno conforme aumenta la energía. Esto indica lo insignificante que son los efectos oscilatorios para neutrinos con energías muy altas. En particular para neutrinos con energías  $E > 100$  GeV, en un perfil de densidad realista de la Tierra, se muestra que el comportamiento oscilatorio es prácticamente nulo.

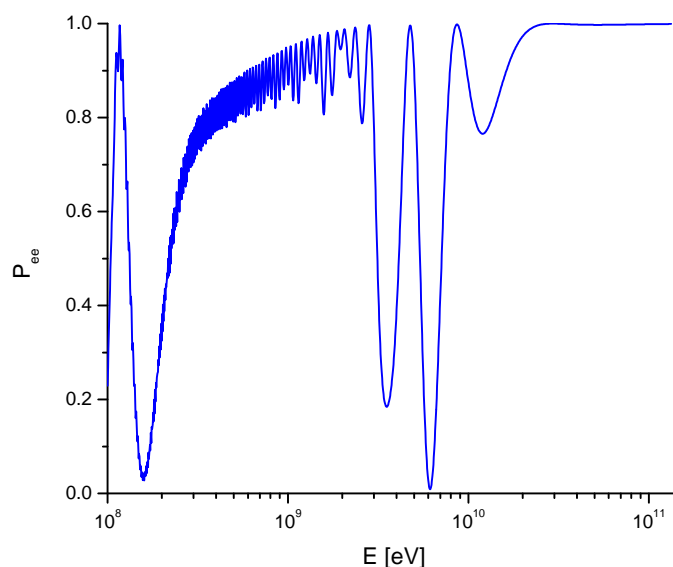


Figura 5.1:  $P_{ee}$ . Probabilidad de supervivencia para el neutrino electrónico como función de la energía.

En las figuras (5.2) y (5.3) se observan cuatro resonancias en probabilidad contrario a las demás gráficas donde esta es altamente oscilatoria destacando así estos canales de transición de los demás. En la figura (5.1) se observan 4 mínimos en probabilidad, lo que es consecuencia directa de la ec. (5.2) ya que la probabilidad de estar en alguno de los tres casos posibles siempre tiene que ser uno.

$$P_{ee} + P_{e\mu} + P_{e\tau} = 1 \quad (5.2)$$

Las tres resonancias en la probabilidad de transición  $P_{e\mu}$  se encuentran en la zona de GeV, por lo que el comportamiento oscilatorio de neutrinos con estos valores de la energía provenientes de posibles fuentes astronómicas es importante.

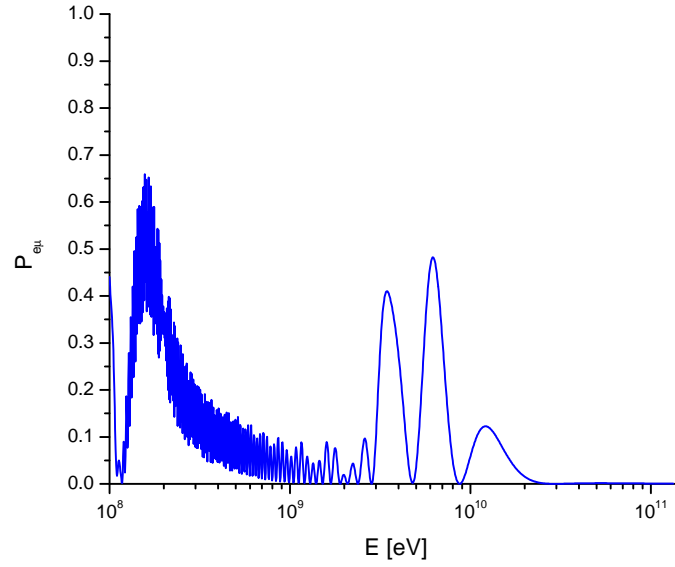


Figura 5.2:  $P_{e\mu}$ . Probabilidad de transición  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  como función de la energía.

Se puede observar de las figuras (5.2) y (5.3) que el comportamiento de la probabilidad en ambos casos es idéntico, aunque en energías cercanas a 0.1 GeV se puede ver una clara diferencia entre las dos ( $P_{e\mu}$  y  $P_{e\tau}$ ) ya que la resonancia correspondiente a estas energías difiere en magnitud.

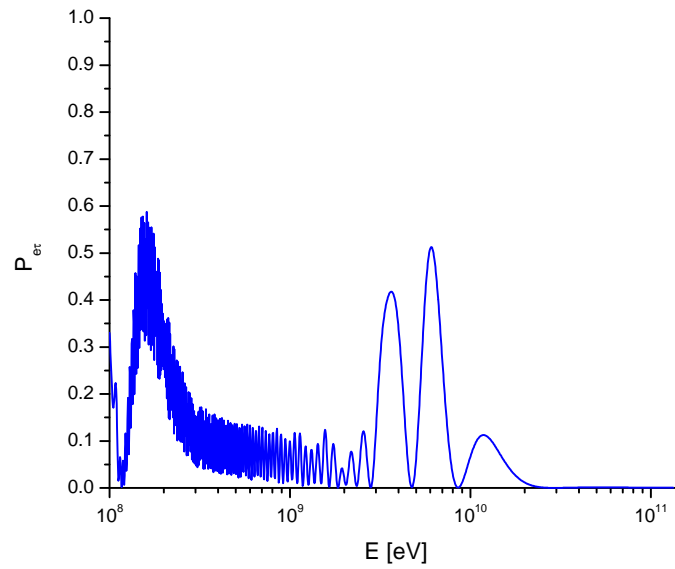


Figura 5.3:  $P_{e\tau}$ . Probabilidad de transición  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$  como función de la energía.

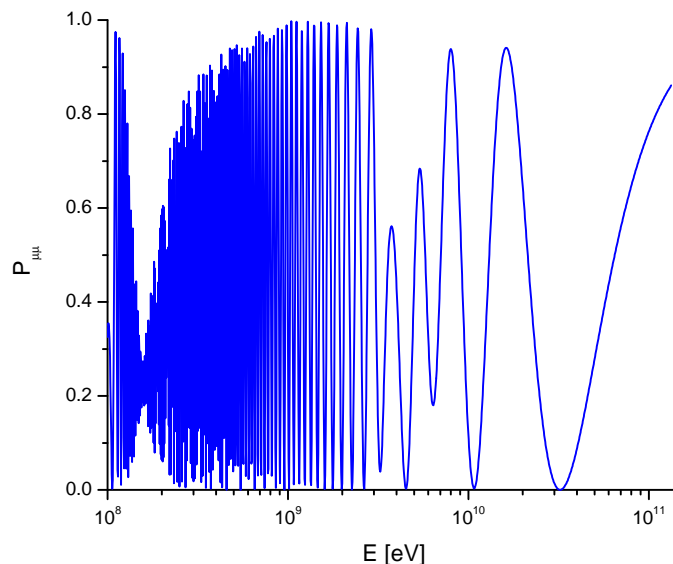


Figura 5.4:  $P_{\mu\mu}$ . Probabilidad de supervivencia para el neutrino muónico como función de la energía.

En la figura (5.4) se observa la probabilidad de supervivencia para el neutrino muónico, la cual es altamente oscilatoria: por debajo de  $E \simeq 3$  GeV, sin embargo, por arriba de esta energía la probabilidad sigue teniendo un comportamiento oscilatorio pero la separación entre cada máximo de probabilidad es mayor. Por arriba de 100 GeV la probabilidad toma valores cada vez más cercanos a uno, lo que se espera en probabilidades de supervivencia a altas energías. Prácticamente se observa el mismo comportamiento en la probabilidad de supervivencia del neutrino tauónico. En general, se puede decir que en términos sólo de probabilidades de oscilación no existe diferencia alguna entre el neutrino muónico y el neutrino tauónico.

Finalmente en la figura (5.5) se observa la gráfica de la probabilidad de oscilación  $P_{\mu\tau}$ . Se puede observar un comportamiento altamente oscilatorio en energías por debajo de 3 GeV. Por arriba de estas energías se tiene un comportamiento menos oscilatorio ya que presenta el mismo comportamiento que la probabilidad de supervivencia  $P_{\mu\mu}$  y  $P_{\tau\tau}$  en este rango de energías. Por arriba de 100 GeV se observa que la probabilidad tiene un valor cada vez más cercano a cero conforme aumenta la energía corroborando, la poca importancia que tienen los efectos oscilatorios en estas escalas de energías.

## 5.2. Probabilidades de oscilación para antineutrinos.

Para obtener la probabilidades de oscilación en el caso de los antineutrinos se tomó el signo negativo del potencial ec. (3.12). El objetivo de calcular estas probabilidades fue

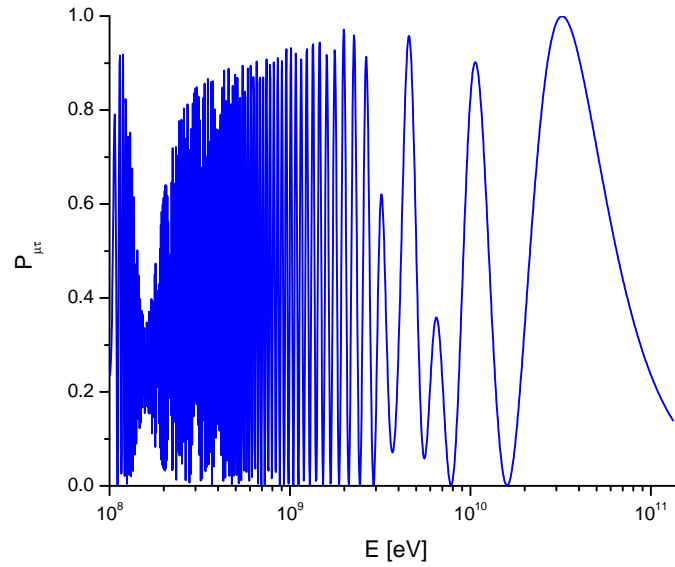


Figura 5.5:  $P_{\mu\tau}$ . Probabilidad de transición  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  como función de la energía.

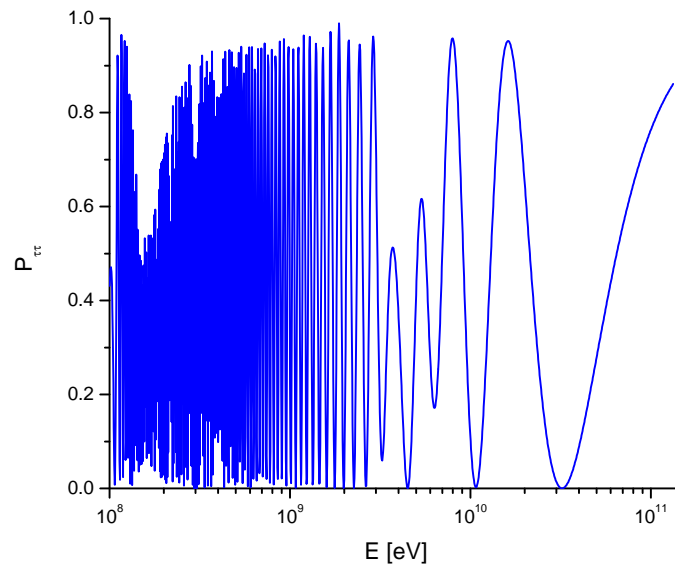


Figura 5.6:  $P_{\mu\mu}$ . Probabilidad de supervivencia para el neutrino muónico como función de la energía.

ver la importancia del fenómeno oscilatorio para los antineutrinos. Una característica general en todas las probabilidades de supervivencia es su tendencia al valor uno para energías muy elevadas por arriba de 100 GeV.

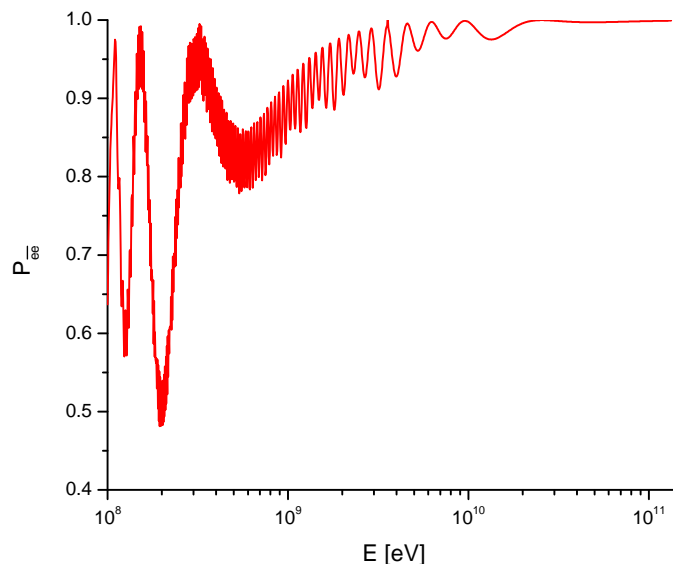


Figura 5.7:  $P_{ee}$ . Probabilidad de supervivencia para el antineutrino electrónico.

En la figura (5.7) se puede ver la gráfica de la probabilidad de supervivencia del antineutrino electrónico como función de la energía. Se observa que las resonancias ocurren para energías menores a 1 GeV por lo que al parecer el efecto oscilatorio para el caso de antineutrinos no es relevante cuando estos provienen de fuentes astronómicas de altas energías. En esta probabilidad se nota a diferencia de las demás de supervivencia que prácticamente tiende a uno desde valores para la energía por arriba de 1 GeV.

En las figuras (5.8) y (5.9) se pueden ver las probabilidades de oscilación correspondientes a las transiciones  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  y  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau$ . Lo primero que se destaca es la baja probabilidad de transición para  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau$  ya que su resonancia máxima tiene probabilidad 0.25 en comparación con la transición  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  cuya resonancia máxima tiene probabilidad 0.43, casi el doble. Para el caso de los antineutrinos sí es posible distinguir  $\bar{\nu}_\mu$  y  $\bar{\nu}_\tau$  sólo en términos de las probabilidades de oscilación.

Las figuras (5.10) y (5.12) muestran las probabilidades de supervivencia para el antineutrino muónico y el antineutrino tauónico como función de la energía. Se puede observar que ambas probabilidades son altamente oscilatorias, de las cuales se pueden distinguir tres zonas en donde la oscilación se ve reducida. La primera zona está por debajo de 1 GeV, la segunda zona se encuentra comprendida entre 1 GeV y 10 GeV, la tercera zona comprende energías por arriba de 10 GeV. Por arriba de 100 GeV la probabilidad es prácticamente uno. En las probabilidades de supervivencia de estas dos partículas no se encuentra diferencia alguna en su comportamiento y forma.

Finalmente se aprecia en la figura (5.11) la probabilidad de oscilación  $P_{\mu\tau}$ . Se observa

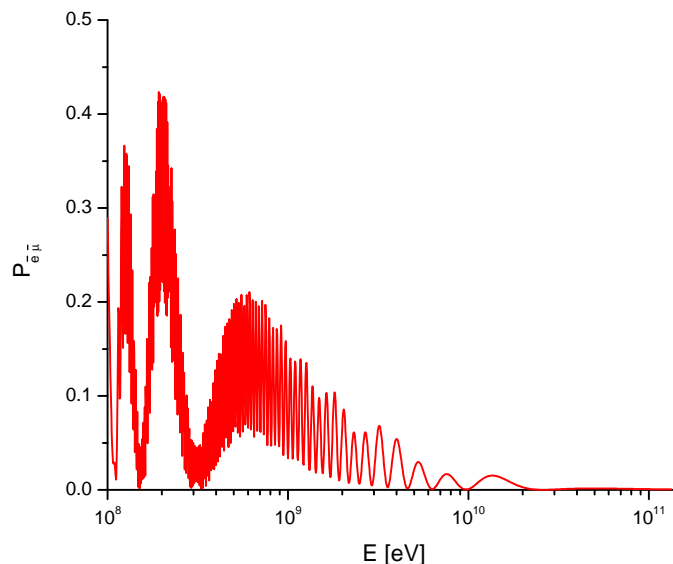


Figura 5.8:  $P_{e\mu}$ . Probabilidad de transición  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  como función de la energía.

que esta probabilidad tiene gran similitud a la probabilidad de supervivencia para el antineutrino muónico: la distinguen el mismo número de zonas de oscilación en los mismos rangos antes señalados, sólo que a medida que aumenta la energía su valor tiende a cero.

### 5.3. Resonancias.

Como se puede ver en las figuras (5.2) y (5.3) la probabilidad de transición  $P_{e\alpha}$  (con  $\alpha \neq e$ ) presenta tres resonancias en los valores de la energía siguientes: 3.45 GeV, 6.18 GeV y 12.0 GeV. En las figuras (5.13), (5.14) y (5.15) se muestra el comportamiento de  $|\lambda_i - \lambda_j|$  (con  $i \neq j$ ) para estos tres valores de la energía como función del potencial A. Esto se hizo con el objetivo de encontrar los valores de A para los cuales existen resonancias en probabilidad (denotado  $A_r$ ) a una determinada energía (efecto MSW). En la tabla (3.1) se muestran los valores de A para los cuales existen resonancias con la energía especificada, estos valores de resonancia se identifican encontrando los puntos de críticos de  $|\lambda_i - \lambda_j|$  que tienen en común el mismo valor de A.

E [GeV]	$A_r$ [eV <sup>2</sup> ]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
3.45	$4.39 \times 10^{-13}$	11.5
6.18	$2.51 \times 10^{-13}$	6.6
12.0	$1.31 \times 10^{-13}$	3.4

Tabla 3.1. Valores de A (y su respectivo valor de  $\rho$ ) para los cuales existen resonancias a una energía determinada.



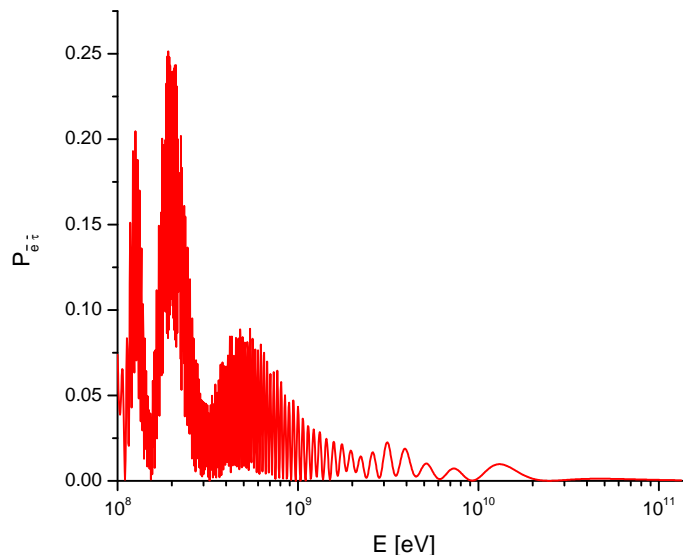


Figura 5.9:  $P_{e\tau}$ . Probabilidad de transición  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\tau$  como función de la energía.

De las resonancias encontradas sólo dos corresponden a valores de densidades que se encuentran en el perfil de la Tierra. De estas dos resonancias la primera se localiza en el núcleo y corresponde a una energía de 3.45 GeV y a una densidad de 11.5 g/cm<sup>3</sup>. La segunda resonancia que encaja dentro del perfil de la Tierra se localiza en el manto terrestre y le corresponde una energía de 12.0 GeV y una densidad de 3.4 g/cm<sup>3</sup>.

Para ver el comportamiento oscilatorio se graficó la probabilidad de oscilación como función de la energía para perfiles de densidad constantes tomando los valores de densidad antes mencionados. En la figura (5.16) se pueden ver las gráficas de  $P_{e\mu}$  para dos densidades constantes (3.4 g/cm<sup>3</sup> y 11.5 g/cm<sup>3</sup>) y el perfil realista de densidad de la Tierra.

Se puede ver de la figura (5.16) que las resonancias encontradas para densidades constantes se preservan en la gráfica del perfil realista. Por lo tanto se puede decir que estas resonancias son debidas al efecto MSW mientras que la resonancia correspondiente a 6.18 GeV se debe a la interferencia de estos dos patrones de densidad y por tanto no es del tipo MSW.

## 5.4. Flujos.

Debido al comportamiento oscilatorio que presentan los neutrinos sus respectivos flujos se pueden ver alterados en comparación al punto de producción. El telescopio IceCube[8] es un instrumento para la medición de flujos de neutrinos provenientes de

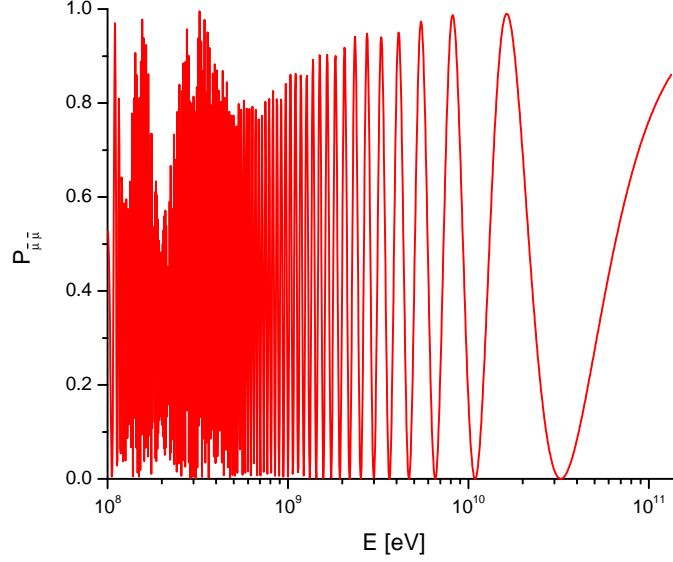


Figura 5.10:  $P_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$ . Probabilidad de supervivencia para el antineutrino del muón.

fuentes astronómicas capaz de identificar el sabor del neutrino, su dirección y energía haciendo posible la astronomía de neutrinos. Este se encuentra en el Polo Sur por lo que los cálculos realizados en la presente tesis son de suma importancia para la determinación de los flujos de neutrinos que entraron a la Tierra por el Polo Norte, por lo que existe un efecto de materia en su oscilación provocado por el perfil de densidad de la Tierra y por ende se pueden verificar experimentalmente los flujos obtenidos. Se calculó el flujo de neutrinos como función de la energía utilizando las probabilidades antes calculadas. La relación entre el flujo en el punto de producción y el punto de detección está determinada por la siguiente ecuación[9]:

$$\begin{pmatrix} \phi(\nu_e) \\ \phi(\nu_\mu) \\ \phi(\nu_\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{ee} & P_{e\mu} & P_{e\tau} \\ P_{\mu e} & P_{\mu\mu} & P_{\mu\tau} \\ P_{\tau e} & P_{\tau\mu} & P_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^0(\nu_e) \\ \phi^0(\nu_\mu) \\ \phi^0(\nu_\tau) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Donde  $P_{\alpha\beta}$  es la probabilidad de oscilación y  $\phi^0(\nu_\alpha)$  es el flujo inicial del neutrino con sabor  $\alpha$ . Se calcularon los flujos en la zona de detección de dos escenarios diferentes de producción. El primer escenario está dado por el mecanismo convencional para la producción de neutrinos de altas energías, el flujo relativo correspondiente es:

$$\phi_e^0 : \phi_\mu^0 : \phi_\tau^0 \quad 1 : 2 : 0 \quad (5.4)$$

En la ecuación anterior se tomó en cuenta el flujo total que es la suma del flujo de neutrinos más antineutrinos con el mismo sabor  $\alpha = e, \mu, \tau$ . En el segundo escenario se tomó el mecanismo de producción conocido como "neutrino damped" en el cual el flujo de neutrinos proveniente de decaimientos de muones se ve disminuido debido a la interacción de

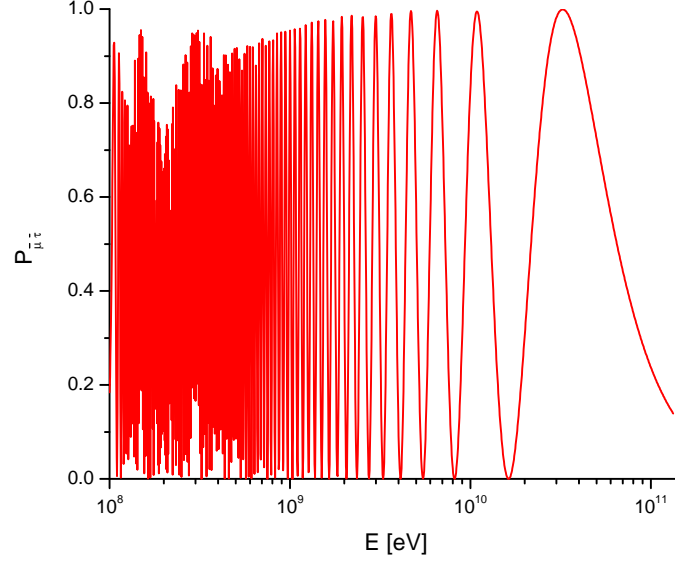


Figura 5.11:  $P_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\tau}$ . Probabilidad de transición  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\tau$  como función de la energía.

los muones con campos fuertes o con la materia. El flujo de esta fuente es:

$$\phi_e^0 : \phi_\mu^0 : \phi_\tau^0 = 0 : 1 : 0 \quad (5.5)$$

En la figura (5.17) se observa la gráfica de los flujos para tres sabores como función de la energía, usando el flujo inicial dado por la ec. (5.4). Para neutrinos de altas energías se observa que el flujo prácticamente no se altera del original, esto debido a que, como antes se había señalado, el comportamiento oscilatorio de los neutrinos no es importante en esta zona de energías. Como segunda característica se observa que el flujo es altamente oscilatorio para energías por debajo de 3 GeV, dentro de este rango se puede ver también que el flujo de los tres sabores oscila alrededor de 1. Para energías cercanas a 0.2 GeV se tiene que el flujo de los tres sabores es prácticamente 1. Las resonancias encontradas en  $P_{e\mu}$  se ven presentes en los flujos calculados ya que  $\phi_e$  presenta cambios significativos justo en los valores de la energía que tienen resonancias en la probabilidad  $P_{e\mu}$ .

Por otro lado en la figura (5.18) se muestra el comportamiento de  $\phi_\alpha$  como función de la energía para el flujo inicial dado por la ec. (5.5). Se observa que para energías menores a 3 GeV los flujos  $\phi_\mu$  y  $\phi_\tau$  oscilan fuertemente alrededor de 0.5, mientras que  $\phi_e$  se mantiene con valores cercanos a cero. Al igual que en el caso anterior se aprecia que los flujos iniciales no se ven alterados para neutrinos de altas energías por arriba de 100 GeV. En este caso también se ve que las tres resonancias de  $P_{e\mu}$  generan cambios en el flujo  $\phi_e$ .

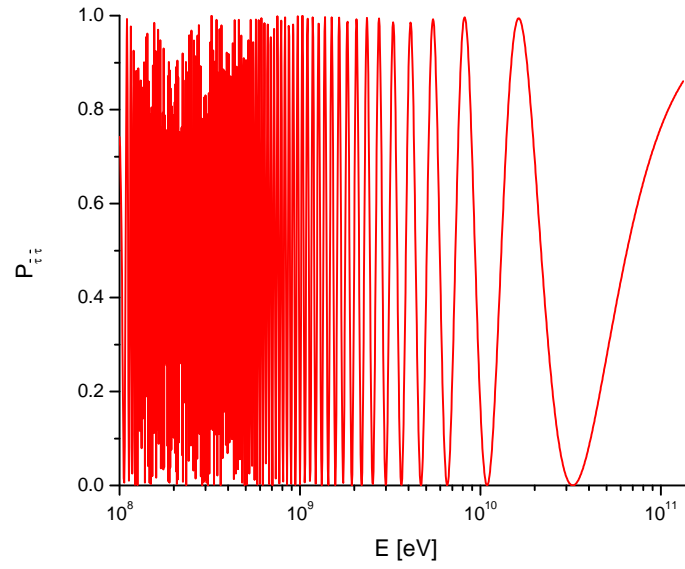


Figura 5.12:  $P_{\tau\tau}$ . Probabilidad de supervivencia para el antineutrino tauónico.

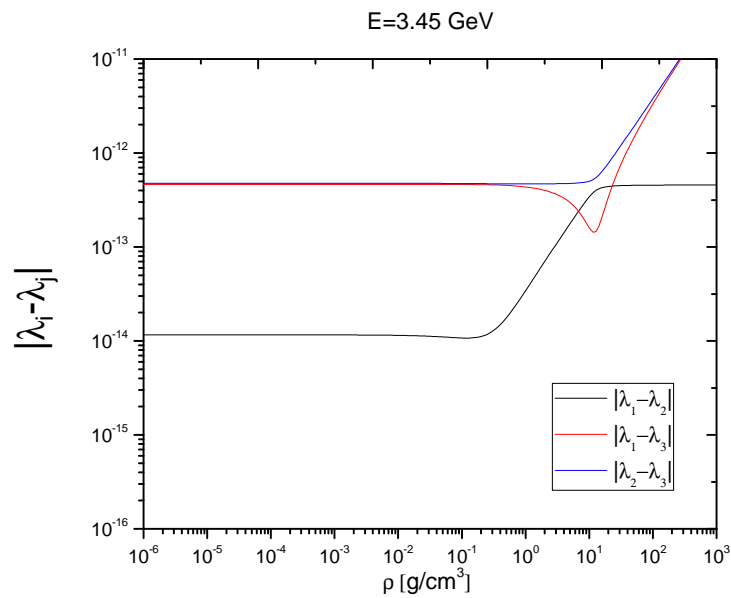


Figura 5.13: Valor absoluto de la diferencia de eigenvalores como función del potencial A con energía  $E=3.45$  GeV.

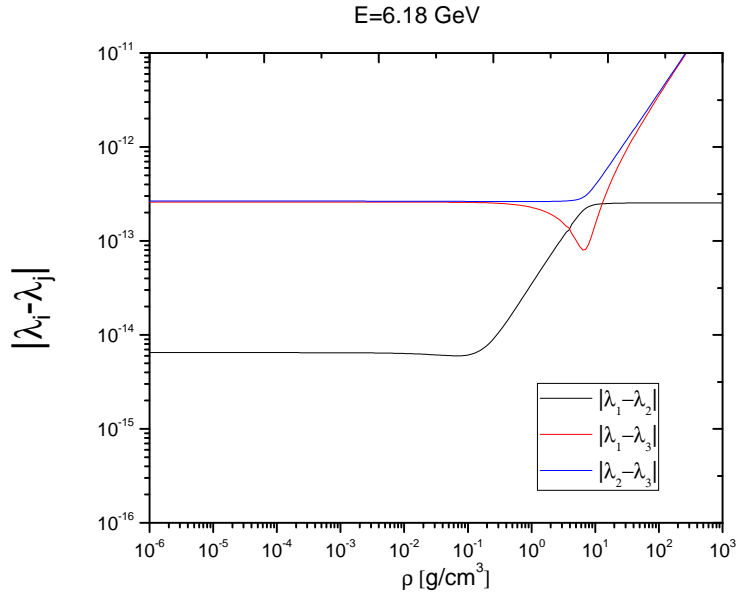


Figura 5.14: Valor absoluto de la diferencia de eigenvalores como función del potencial  $A$  con energía  $E=6.18 \text{ GeV}$ .

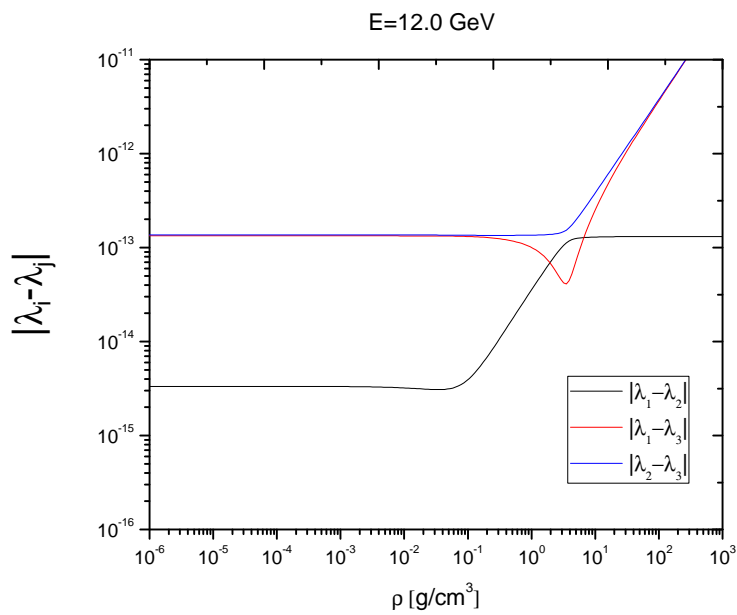


Figura 5.15: Valor absoluto de la diferencia de eigenvalores como función del potencial  $A$  con energía  $E=12.0 \text{ GeV}$ .

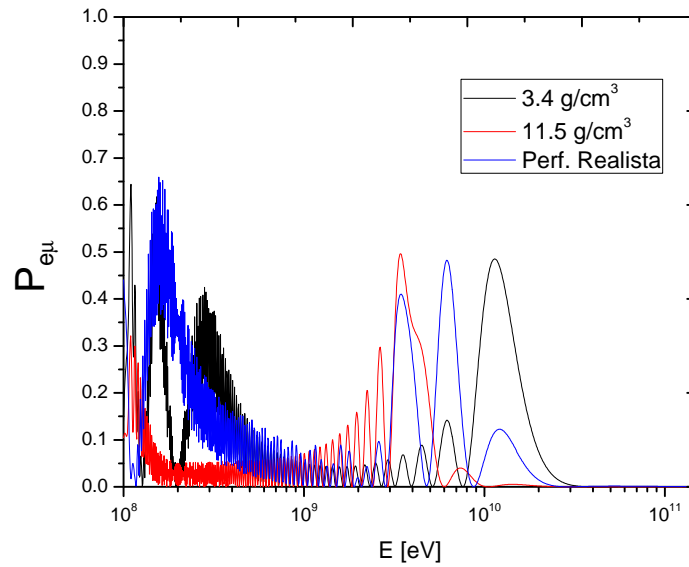


Figura 5.16: Gráfica de  $P_{e\mu}$  para tres perfiles de densidad diferentes. (Rojo) perfil constante correspondiente al núcleo. (Negro) perfil constante correspondiente al manto. (Azul) perfil realista de la Tierra.

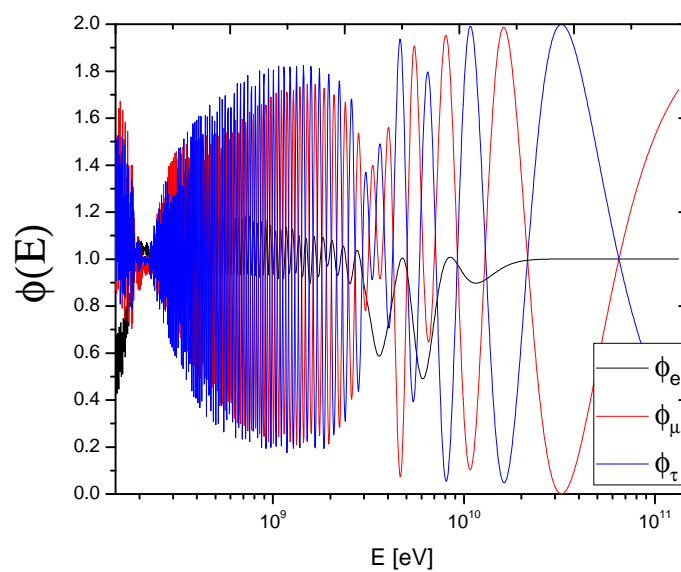


Figura 5.17: Comportamiento de  $\phi_\alpha$  como función de la energía para el flujo inicial 1:2:0.

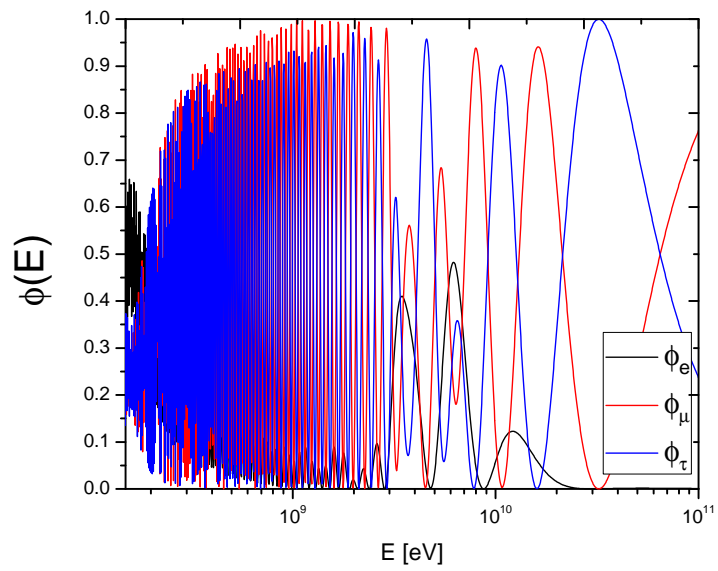


Figura 5.18: Comportamiento de  $\phi_\alpha$  como función de la energía para el flujo inicial 0:1:0.

# Capítulo 6

## Conclusiones.

Como resultado del estudio realizado se obtuvieron características generales del fenómeno oscilatorio en la materia. Una de ellas es la tendencia de los neutrinos a permanecer en su estado de sabor si su energía es lo suficientemente alta, ya que según el perfil analizado a energías por arriba de 100 GeV el fenómeno oscilatorio es despreciable. Por otro lado las probabilidades de transición entre distintos sabores tienden a cero conforme aumenta la energía, esto se debe a que un neutrino electrónico tiene tres posibilidades: permanecer en su sabor, cambiar a  $\mu$  o cambiar a  $\tau$ . La suma de las probabilidades de los tres casos tiene que ser uno, por lo que si para altas energías  $P_{ee}$  es uno, entonces  $P_{e\mu} + P_{e\tau}$  tiene que ser cero. Dicho análisis se aplica para los demás sabores ( $\mu$  y  $\tau$ ). Estas características generales sirven de guía para el estudio de la oscilación de sabor en perfiles de densidad que se puedan manejar en futuros trabajos a fin de corroborar la confiabilidad de los mismos.

En general se puede decir que las probabilidades encontradas son altamente oscilatorias, pero de todas las que se calcularon  $P_{ee}$ ,  $P_{e\mu}$  y  $P_{e\tau}$  son las que presentan un comportamiento bien definido, es decir, presentan tres resonancias en la zona GeV. Esto es un resultado de suma importancia ya que es un rango de energías muy común para neutrinos que provienen de fuentes astronómicas y también para neutrinos atmosféricos. De las resonancias encontradas fue posible identificar cuáles son del tipo MSW y cuáles se deben al perfil de densidad completo. La primer resonancia, con energía de 3.45 GeV, se debe al perfil de densidad constante correspondiente al núcleo ( $\rho_n = 11.5 \text{ g/cm}^3$ ) y la tercer resonancia, con energía de 12.0 GeV, se debe al perfil de densidad constante del manto ( $\rho_m = 3.4 \text{ g/cm}^3$ ). Es importante destacar que mediante el análisis hecho se pueden identificar el tipo de resonancias para diversos perfiles de densidad con el objetivo de conocer para qué valores del perfil se generan dichas resonancias.

Para el caso de los antineutrinos se encontró que las probabilidades de transición  $P_{\bar{e}\bar{e}}$ ,  $P_{\bar{e}\bar{\mu}}$  y  $P_{\bar{e}\bar{\tau}}$  son sumamente pequeñas y que presentan resonancias para valores de la energía por debajo de 1 GeV. Mientras que las demás probabilidades son altamente oscilatorias. Con esto se concluye que el efecto de la materia en la oscilación de los antineutrinos es insignificante.

De los flujos calculados se puede concluir que también presentan características ge-



nerales ya que se observó que los flujos, en los dos casos tratados, prácticamente no se alteran para valores de la energía muy altos. Para el primer flujo (1:2:0) se encontró que este oscila fuertemente para valores de la energía por arriba de 3 GeV y además esta oscilación se hace alrededor de uno (en cada sabor), lo que sugiere que el valor promedio del flujo es uno. También se observó que el flujo es prácticamente uno para energías cercanas a 0.2 GeV. En el segundo flujo tratado (0:1:0) se observó que el flujo oscila alrededor de 0.5 para energías menores a 3 GeV.

# Apéndice A

## Operador de evolución.

Dado un estado inicial su evolución temporal queda determinada por la ecuación de Schrödinger. Debido a que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial lineal de primer orden la conexión que existe entre un estado a un tiempo  $t_0$  y un estado a un tiempo  $t$  está dada por un operador lineal, es decir:

$$|\psi(t)\rangle = \Theta(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.1})$$

Al operador  $\Theta(t, t_0)$  se le conoce como “operador de evolución”. Nótese que si  $t = t_0$  se obtiene

$$|\psi(t_0)\rangle = \Theta(t_0, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto

$$\Theta(t_0, t_0) = I_d \quad (\text{A.3})$$

Donde  $I_d$  es el operador identidad. Sustituyendo la ecuación (A.1) en la ecuación de Schrödinger se obtiene:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Theta(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H(t) \Theta(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.4})$$

Entonces

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Theta(t, t_0) = H(t) \Theta(t, t_0) \quad (\text{A.5})$$

La ecuación anterior permite determinar al operador de evolución correspondiente al Hamiltoniano  $H(t)$ . Si el Hamiltoniano no depende del tiempo la solución de la ecuación (A.5) está dada por:

$$\Theta(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (\text{A.6})$$

Por último se desarrollará una propiedad muy importante del operador de evolución. Sean  $t_0, t_1, t_2$  de tal manera que  $t_0 < t_1 < t_2$ , entonces de acuerdo con la ecuación (A.1) se tiene lo siguiente:

$$|\psi(t_1)\rangle = \Theta(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.7})$$

$$|\psi(t_2)\rangle = \Theta(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo la ecuación (A.7) en (A.8) se obtiene la siguiente relación:

$$|\psi(t_2)\rangle = \Theta(t_2, t_1)\Theta(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.9})$$

Haciendo una comparación con la ecuación (A.1) se puede concluir

$$\Theta(t_2, t_0) = \Theta(t_2, t_1)\Theta(t_1, t_0) \quad (\text{A.10})$$

Por lo tanto el operador de evolución total se puede obtener multiplicando los operadores de evolución (de manera cronológica) correspondientes a tiempos intermedios ( $t_0$  a  $t_1$ ) y ( $t_1$  a  $t_2$ ). Esta propiedad suele ser muy importante ya que permite encontrar de manera aproximada el operador de evolución de un sistema cuyo Hamiltoniano dependa del tiempo.

## Apéndice B

# Componentes, eigenvalores y propiedades de la matriz T.

En el capítulo 4 se definió a la matriz T en la base de eigen-estados de masa de la siguiente manera:

$$T = H_m - \frac{Tr(H_m)}{3}I \quad (B.1)$$

En donde  $H_m$  es el Hamiltoniano del sistema en la base de eigen-estados de masa,  $Tr(H_m)$  es la traza del Hamiltoniano dada por:

$$Tr(H_m) = E_1 + E_2 + E_3 + A \quad (B.2)$$

Siendo  $E_i$  el valor de la energía del estado  $|i\rangle$  y  $A$  el potencial generado por el medio material. Por otro lado el Hamiltoniano  $H_m$  de acuerdo con la ecuación (4.15) se puede escribir de la siguiente forma:

$$H_m = \begin{pmatrix} E_1 + AU_{e1}^2 & AU_{e1}U_{e2} & AU_{e1}U_{e3} \\ AU_{e2}U_{e1} & E_2 + AU_{e2}^2 & AU_{e2}U_{e3} \\ AU_{e3}U_{e1} & AU_{e3}U_{e2} & E_3 + AU_{e3}^2 \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

Entonces sustituyendo en la ecuación (B.1) se obtiene:

$$T = \begin{pmatrix} E_1 + AU_{e1}^2 - \frac{E_1+E_2+E_3+A}{3} & AU_{e1}U_{e2} & AU_{e1}U_{e3} \\ AU_{e2}U_{e1} & E_2 + AU_{e2}^2 - \frac{E_1+E_2+E_3+A}{3} & AU_{e2}U_{e3} \\ AU_{e3}U_{e1} & AU_{e3}U_{e2} & E_3 + AU_{e3}^2 - \frac{E_1+E_2+E_3+A}{3} \end{pmatrix} \quad (B.4)$$

Simplificando la expresión anterior

$$T = \begin{pmatrix} AU_{e1}^2 - \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(E_{12} + E_{13}) & AU_{e1}U_{e2} & AU_{e1}U_{e3} \\ AU_{e2}U_{e1} & AU_{e2}^2 - \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(E_{21} + E_{23}) & AU_{e2}U_{e3} \\ AU_{e3}U_{e1} & AU_{e3}U_{e2} & AU_{e3}^2 - \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(E_{31} + E_{32}) \end{pmatrix} \quad (B.5)$$

En donde

$$E_{ij} = E_i - E_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{B.6})$$

La ecuación (B.5) define los componentes de la matriz T a partir de los ángulos de mezcla, el potencial (A) y las energías de los eigen-estados de masa ( $E_i$ ). A su vez la diferencia de las energías pueden ponerse en términos de la masa de los eigen-estados haciendo uso de la relación para la energía relativista. Manipulando esta expresión se tiene lo siguiente:

$$E_i = p \sqrt{1 + \frac{m_i^2}{p^2}} \quad (\text{B.7})$$

Debido a que la masa de los eigen-estados es pequeña en comparación a su momento, se tiene  $\frac{m_i^2}{p^2} \ll 1$  por lo que la raíz de la expresión anterior se puede expandir en serie de Taylor.

$$E_i = p \left( 1 + \frac{m_i^2}{2p^2} + \dots \right) \quad (\text{B.8})$$

De donde se obtiene la siguiente expresión:

$$E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \quad (\text{B.9})$$

Nótese de la expresión anterior que se ha asignado el mismo valor del momento ( $p$ ) a todos los eigen-estados de masa. Esta hipótesis se toma como una primera aproximación al problema. Tomando la diferencia entre las energías y recordando que la masa de los eigen-estados es lo suficientemente pequeña para tomar ( $E=p$ ) se obtiene:

$$E_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} \quad (\text{B.10})$$

De la expresión anterior se identifica  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ . En especial se tiene  $\Delta m^2 = \Delta m_{21}^2$  y  $\Delta M^2 = \Delta m_{32}^2$ .

### B.0.1. Eigenvalores de la matriz T

Para obtener los eigenvalores de la matriz T es de suma importancia conocer su polinomio característico. Debido a que la matriz T es de dimensión 3 su polinomio característico es de orden 3. Entonces dada una matriz cuadrada cualquiera, su ecuación característica es de la forma:

$$\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0 \quad (\text{B.11})$$

Los coeficientes  $\{c_i\}_{i=0,1,2}$  se pueden determinar a partir de la matriz T utilizando las

APÉNDICE B. COMPONENTES, EIGENVALORES Y PROPIEDADES DE LA MATRIZ T.52

siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} c_2 &= -tr(T) \\ c_1 &= T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} + T_{11}T_{33} - T_{13}T_{31} + T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32} \\ c_0 &= -det(T) \end{aligned} \quad (B.12)$$

Debido a que por construcción la matriz T tiene traza nula se tiene  $c_2 = 0$ . Las relaciones anteriores definen totalmente la ecuación característica de T por lo que para encontrar sus eigenvalores sólo basta encontrar las raíces de un polinomio de tercer grado. Se puede asegurar que existen tres raíces reales del polinomio característico debido a que la matriz T es claramente hermitiana (todas sus componentes son reales y es una matriz simétrica). Las soluciones al polinomio caraterístico se pueden escribir en términos de los coeficientes  $c_i$  [5] de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{-\frac{c_1}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arctan \left( \frac{1}{c_0} \sqrt{-c_0^2 - \frac{4}{27}c_1^3} \right) \right] \\ &\quad + \sqrt{-c_1} \sin \left[ \frac{1}{3} \arctan \left( \frac{1}{c_0} \sqrt{-c_0^2 - \frac{4}{27}c_1^3} \right) \right] \\ \lambda_2 &= -\sqrt{-\frac{c_1}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arctan \left( \frac{1}{c_0} \sqrt{-c_0^2 - \frac{4}{27}c_1^3} \right) \right] \\ &\quad - \sqrt{-c_1} \sin \left[ \frac{1}{3} \arctan \left( \frac{1}{c_0} \sqrt{-c_0^2 - \frac{4}{27}c_1^3} \right) \right] \\ \lambda_3 &= 2\sqrt{-\frac{c_1}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arctan \left( \frac{1}{c_0} \sqrt{-c_0^2 - \frac{4}{27}c_1^3} \right) \right] \end{aligned}$$

Se puede deducir de manera trivial el cumplimiento de la siguiente relación:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (B.13)$$

Esto se debe a que la operación traza es invariante ante transformaciones de similaridad (justo el tipo de transformaciones que diagonalizan a T) por lo que si T tiene traza nula también esto se preservará en la matriz diagonal asociada. También el determinante es una operación que es invariante ante transformaciones de similaridad por lo que se cumple:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -c_0 \quad (B.14)$$

Finalmente debido a que el polinomio característico es el mismo para la matriz T y su

matriz diagonal asociada se tiene la siguiente relación:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = c_1 \quad (\text{B.15})$$

### B.0.2. Propiedades de los eigenvalores de T.

En esta sección se probarán algunas identidades que son de utilidad para determinar una forma simple para la expresión de la probabilidad de oscilación en un medio con potencial constante. Primero se demostrará la siguiente propiedad:

$$3\lambda_1^2 + c_1 = \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 \quad (\text{B.16})$$

Se empezará manipulando el lado izquierdo de la igualdad. Utilizando la ec. (B.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1^2 + c_1 &= 3\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

En el último paso se ha utilizado la ec. (B.13). De la misma manera se obtienen las siguientes igualdades:

$$3\lambda_2^2 + c_1 = \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \quad (\text{B.18})$$

$$3\lambda_3^2 + c_1 = \lambda_3^2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 \quad (\text{B.19})$$

Por último se demostrará la siguiente igualdad:

$$\lambda_1^2 + c_1 = \lambda_2\lambda_3 \quad (\text{B.20})$$

Utilizando la ec. (B.15) para sustituir  $c_1$  del lado izquierdo de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + c_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

*APÉNDICE B. COMPONENTES, EIGENVALORES Y PROPIEDADES DE LA MATRIZ T.54*

En el último paso se ha utilizado la ec. (B.13). De la misma manera se obtienen las siguientes igualdades:

$$\lambda_2^2 + c_1 = \lambda_1 \lambda_3 \quad (\text{B.22})$$

$$\lambda_3^2 + c_1 = \lambda_1 \lambda_2 \quad (\text{B.23})$$



# Bibliografía

- [1] Carlo Giunti, Chung W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 1st Edition, 2007.
- [2] B. Pontecorvo, *Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge*. Sov. Phys. JETP, 26, 984988, 1968.
- [3] B. T. Cleveland et al, *Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector*. Astrophys. J., 496, 505526, 1998.
- [4] A. M. Dziewonski, D. L. Anderson, *Preliminary reference Earth model*. Phys. Earth Planet. Inter. 25 297-356.
- [5] T. Ohlsson, H. Snellman, *Three flavor neutrino oscillations in matter*. J. Math. Phys. 41, 2768.
- [6] A. C. Argüelles, M. Bustamante, A.M. Gago, *IceCube expectations for two high-energy neutrino production models at active galactic nuclei*. JCAP 1012:005, 2010.
- [7] A. F. Osorio Oliveros, S. Sahu, J. C. Sanabria, *Oscillation of high energy neutrinos in Choked GRBs*. Eur. Phys. J. C. 73, 2574.
- [8] F. Hanzel, S. R. Klein, *IceCube: An instrument for neutrino astronomy*. Rev. of Scientific Inst. 81, 081101 (2010).
- [9] K. Lai, G. Lin, T.C. Liu, *Neutrino Flavor Ratio on Earth and at Astrophysical Sources*. Progress in Particle and Nuclear Physics, 64 (2010).
- [10] B. R. Martin, *Nuclear and Particle Physics: An Introduction*. John Wiley & Sons 2006.
- [11] T. Ohlsson, H. Snellman, *Neutrino oscillations with three flavors in matter of varying density*. Eur.Phys.J C20, 507-515 (2001).
- [12] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics. Vol I*. John Wiley & Sons.
- [13] J. Linder, *Neutrino matter potentials induced by Earth*. arXiv:hep-ph/0504264.
- [14] M. Freund, T. Ohlsson, *Matter enhanced neutrino oscillations with a realistic Earth density profile*. arXiv:hep-ph/9909501.

- [15] Y. D. Olivas, S. Sahu, *GeV neutrino oscillations with a realistic matter density profile*. En preparación.
- [16] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Algebra lineal*. Publicaciones cultural, 1er Edición.