



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**ACONDICIONAMIENTO DEL ENREDAMIENTO ESPACIAL EN PAREJAS DE  
FOTONES PRODUCIDAS POR CONVERSIÓN PARAMÉTRICA DESCENDENTE**

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN CIENCIAS**  
**(FÍSICA)**

PRESENTA:  
**HÉCTOR CRUZ RAMÍREZ**

TUTOR PRINCIPAL  
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. JOSÉ IGNACIO JIMÉNEZ MIER Y TERÁN  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
DR. JOSÉ LUIS LUCIO MARTÍNEZ  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**MÉXICO, D. F. JUNIO 2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen  
Acondicionamiento del enredamiento espacial en parejas  
de fotones producidas por conversión paramétrica  
descendente

Héctor Cruz Ramírez  
Instituto de Ciencias Nucleares  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Doctor en Ciencias (Física)

Se presenta un análisis teórico y experimental del efecto conjunto de la distribución transversal del campo eléctrico y de las propiedades del cristal no lineal sobre las propiedades de las parejas de fotones generadas por conversión paramétrica descendente espontánea. Es conocido que para un cristal suficientemente delgado, la distribución del campo eléctrico, llamado bombeo, determina completamente las propiedades conjuntas del fotón señal y del fotón acompañante, pero en un cristal con longitud grande, las propiedades del cristal no lineal son importantes y deben ser consideradas. En esta tesis realizamos mediciones experimentales del espectro angular y del espectro angular condicional de la pareja de fotones producidas por conversión paramétrica descendente espontánea realizadas con detectores de fotones individuales con resolución espacial. También, en esta tesis usamos dos tipos de bombeo: una haz gaussiano y un haz Bessel-Gauss.

En el caso de un haz gaussiano, se reporta el control del régimen de funcionamiento de la fuente de las parejas de fotones, del régimen de cristal delgado al régimen de cristal largo, a través de manipular el grado de enfocamiento del bombeo. También, se muestra explícitamente el comportamiento del espectro angular y el espectro angular condicional al cambiar de régimen. Con la teoría expuesta en esta tesis se puede determinar la frontera entre los dos regímenes y predecir los diferentes comportamientos del espectro angular y del espectro angular condicional.

En el caso de un haz Bessel-Gauss, se reporta la generación de fotones anunciados adifraccionales (en el régimen de cristal delgado), esto es, se muestra que la distribución transversal de intensidad de los fotones anunciados se mantiene sin cambio mientras se propaga un intervalo de distancia. Para lograr esto, nos hemos basado en el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea para generar pareja de fotones cuando bombeamos un cristal no lineal con un haz Bessel-Gauss. En la tesis se muestra como las propiedades del bombeo Bessel-Gauss son mapeadas directamente a las propiedades del fotón señal cuando es anunciado por la detección del fotón acompañante. En resumen, podemos generar fotones individuales anunciados que son adifraccionales sin la necesidad de generar primero fotones con un haz gaussiano y después hacerlos adifraccionales mediante otros elementos ópticos, sin necesidad de una producción posterior.

Abstract  
Conditioning of spatial entanglement of photon pairs  
produced by parametric downconversion

Héctor Cruz Ramírez  
Instituto de Ciencias Nucleares  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Doctor en Ciencias (Física)

We present a theoretical and experimental analysis of the joint effects of the transverse electric field distribution and of the nonlinear crystal characteristics on the properties of photon pairs generated by spontaneous parametric downconversion. While it is known that for a sufficiently short crystal the pump electric field distribution fully determines the joint signal-idler properties, for longer crystals the nonlinear crystal properties also play an important role. In this work we present experimental measurements of the angular spectrum and of the conditional angular spectrum of photon pairs produced by spontaneous parametric downconversion, carried out through spatially resolved photon counting, and we use two pumps: a Gaussian beam and a Bessel-Gauss beam.

In the Gaussian beam case, we control whether or not the source operates in the short-crystal regime through the degree of pump focusing, and explicitly show how the angular spectrum and conditional angular spectrum measurements differ in these two regimes. Our theory provides an understanding of the boundary between these two regimes and also predicts the corresponding differing behaviors.

In the Bessel-Gauss beam case, we demonstrate the generation of non-diffracting heralded single photons (in the short-crystal regime), that is, which are characterized by a single-photon transverse intensity distribution which remains essentially unchanged over a significant propagation distance. For this purpose we have relied on the process of spontaneous parametric downconversion for the generation of signal and idler photon pairs, where our nonlinear crystal is pumped by a Bessel-Gauss beam. Our experiment shows that the well-understood non-diffracting behavior of a Bessel-Gauss beam may be directly mapped to the signal-mode, single photons heralded by the detection of a single idler photon. In our experiment, the heralded single photon is thus arranged to be non-diffracting without the need for projecting its single-photon transverse amplitude, post-generation, in any manner.

## Agradecimientos

Primero quiero agradecer al

Dr. Alfred B. U'Ren Cortés por aceptarme como mi asesor de tesis, por todos estos años de convivencia y por todo el impulso académico que me ha dado. Gracias.

En segundo lugar quiero agradecer al jurado y a mi comité tutorial:

Dr. José Luis Lucio Martínez, Dr. José Ignacio Jiménez Mier y Terán, Dra. Rocío Jáuregui Renaud, Dra. Karina Garay Palmett, Dr. Mayo Villagrán Muniz, Dr. Juan Hernández Cordero y Dr. Victor Manuel Velázquez Aguilar, quienes evaluaron mi trabajo doctoral y me dieron sugerencias importantes y constructivas para mejorar enormemente mi tesis.

En tercer lugar, agradezco al

CONACYT por la beca otorgada durante cuatro años y al ICN-UNAM que se ha vuelto como mi tercer hogar.

Le dedico mi tesis:

A mi familia, Eloina Celestina Ramírez Ramírez, Héctor Cruz Morales, Claudia Cruz Ramírez, Angélica Cruz Ramírez, Rafael Cruz Ramírez, Alberto Eden Arteaga Cruz, Natalia Yael Arteaga Cruz y Leonardo Gael Arteaga Cruz, que son mi todo; y a todos mi abuelos (Juventino, Rafaela, Eulogio y Sebastiana) que un día decidieron salir de su querido pueblo para que sus hijos y nietos tuvieran una mejor vida que ellos, así es.

Agradezco a José Luis, Octavio, Juan, Yadira, Miguel y Lorena que después de tantos años nos queremos y nos soportamos. Son mi refugio y mis compañeros de vida. A Luisa Jaime que después de todo sigue siendo mi gran amiga, te extraño. A Carlos A. Martínez por las charlas interminables y la compañía entrañable. A Gustavo que nuestra amistad no comenzó de la mejor manera. A Gabriel Luna por todos estos años de escucharnos. Gracias Karina y Yasser por soportarme, por acompañarme en momentos difíciles, los quiero. A Roberto Alarcón por su compañía en el lab. A mis compañeros de lucha, no olvidados. A mis compañeros de posgrado, por esas horas tortuosas de trabajo. Gracias Gabriela y L. Esmeralda por quererme. A David y Pedro Piza que son amigos entrañables del CICESE. A Elsie por la convivencia discontinua de muchos años. A Leticia una bella constante en mi vida. A mis padres académicos: Roberto Ortega, Carlos Román y Antonio. A Toño y Hugo a los que nos llevo a comprender.

A mi hábitat, mi querida UNAM, donde me ha pasado de todo: desde el odio hasta el amor. Gracias.

## Lista de siglas

A lo largo del texto se utilizan varias siglas. Para facilitar la lectura del texto a continuación se enlista las siglas usadas en orden de aparición.

**SPDC:** *spontaneous parametric down conversion* (conversión paramétrica descendente espontánea),

**EA:** espectro angular,

**EAC:** espectro angular condicional,

**BBO:** *beta barium borate* (cristal Beta Borato de Bario).

**PM:** *phasematching* (empatamiento de fases).

**WJA:** *wavevector joint amplitude* (función de amplitud conjunta en vectores de onda).

**TF2:** segundo plano de Fourier.

**ITFC:** intensidad transversal de fotones condicionados.

**APD:** *avalanche photodiodes detector* (fotodiodo de avalancha de silicio).

**TTL:** *transistor-transistor logic* (lógica de transistor a transistor).

**CCD:** *charge-coupled device* (cámara digital).

**PML:** platina motorizada lineal.

**TFI:** transformada de Fourier inversa.

**EO:** elementos ópticos.

# Índice general

Resumen (español)	I
Resumen (inglés)	II
Agradecimientos	III
Lista de siglas	IV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos de trabajo . . . . .	5
<b>2. Teoría del <i>SPDC</i></b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.1.1. Notación . . . . .	10
2.2. Estado cuántico del <i>SPDC</i> . . . . .	11
2.3. Cálculo de la <i>WJA</i> de la pareja de fotones . . . . .	14
2.4. Determinación de la función de <i>phasematching</i> . . . . .	18
2.4.1. Caso haz gaussiano sin <i>walkoff</i> . . . . .	18
2.4.2. Caso haz Bessel-Gauss sin <i>walkoff</i> , orden cero ( $m = 0$ )	20
2.4.3. Caso haz gaussiano con walk-off . . . . .	21
2.4.4. Caso haz Bessel-Gauss con walkoff, orden cero ( $m = 0$ )	22
2.4.5. Resumen de funciones de <i>phasematching</i> . . . . .	23
2.4.6. Estructura de la función <i>WJA</i> . . . . .	25
2.5. Espectro angular y espectro angular condicional . . . . .	25
2.5.1. Espectro angular condicional (EAC) . . . . .	27
2.5.2. EAC aproximación de bombeo de onda continua . . . . .	29
2.5.3. EAC aproximación de resolución perfecta . . . . .	29
2.6. Espectro angular (EA) . . . . .	31
2.6.1. EA aproximación de bombeo de onda continua . . . . .	32
2.6.2. EA aproximación de resolución perfecta . . . . .	32

2.7. Intensidad transversal en el <i>SPDC</i> . . . . .	33
<b>3. Simulaciones numéricas</b>	<b>36</b>
3.1. Valores de las propiedades del bombeo y del cristal . . . . .	37
3.2. Integración numérica . . . . .	40
3.2.1. EA con resolución perfecta . . . . .	40
3.2.2. EAC con resolución perfecta . . . . .	42
3.2.3. EAC completa . . . . .	43
3.3. Resultados de la simulaciones . . . . .	45
3.3.1. Caso con bombeo gaussiano . . . . .	45
3.3.2. Caso con bombeo Bessel-Gauss de orden 0 . . . . .	49
3.3.3. Intensidad transversal condicional de un fotón . . . . .	51
<b>4. Experimentos</b>	<b>54</b>
4.1. Sistema de referencia de laboratorio . . . . .	54
4.2. Conteo de fotones con resolución espacial . . . . .	54
4.2.1. Cuentas simples . . . . .	56
4.2.2. Cuentas en coincidencia . . . . .	56
4.3. Arreglo experimental: bombeo gaussiano . . . . .	57
4.3.1. Parte I: preparación del bombeo gaussiano . . . . .	58
4.3.2. Parte II: generación de las parejas de fotones . . . . .	59
4.3.3. Parte III: EA y EAC del <i>SPDC</i> . . . . .	60
4.4. Resultados experimentales con un bombeo gaussiano . . . . .	63
4.5. Criterio para aplicar la aproximación de cristal delgado . . . . .	67
4.6. Arreglo experimental: bombeo Bessel-Gauss de orden 0 . . . . .	69
4.6.1. Parte I: bombeo Bessel-Gauss de orden 0 . . . . .	70
4.6.2. Parte II: generación de las parejas de fotones . . . . .	73
4.6.3. Parte III: EA y EAC del <i>SPDC</i> . . . . .	73
4.6.4. Parte IV: intensidad transversal del <i>SPDC</i> . . . . .	76
<b>5. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>A. Deducción del hamiltoniano</b>	<b>82</b>
<b>B. Operadores de creación y aniquilación</b>	<b>86</b>
<b>C. Cambio de variables</b>	<b>87</b>
<b>D. Técnicas con cámara CCD</b>	<b>89</b>
<b>E. El ángulo de <i>walk-off</i></b>	<b>94</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
<b>F. Lista de instrumentos y detectores</b>	<b>96</b>
<b>G. Haz <math>BG^m</math> a través de un telescopio</b>	<b>97</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La generación de luz no clásica y en particular las parejas de fotones generadas mediante el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea [1] (*SPDC* por sus siglas en inglés: *spontaneous parametric down conversion*), constituye el fundamento para una serie de importantes experimentos realizados en las últimas décadas que incluyen desde estudios fundamentales sobre la validez de la mecánica cuántica [2] hasta el inicio de aplicaciones tecnológicas de las propiedades cuánticas de la luz como la implementación por medios fotónicos del procesamiento y transmisión de información cuántica [3].

El proceso de conversión paramétrica descendente espontánea consiste en incidir sobre un cristal con propiedades ópticas no lineales un haz láser (bombeo) donde cada fotón individual del bombeo es aniquilado y entonces se crea una pareja de fotones llamados el fotón señal y el fotón acompañante (esto en el régimen espontáneo). En particular, la pareja de fotones generada exhiben una riqueza en su estructura espacial transversal [4, 5], y que es la línea de investigación del presente trabajo doctoral. Los fotones emitidos pueden estar enredados a través de los grados de libertad espaciales (además de los grados de libertad temporal y en polarización), como son el momento lineal transversal o el momento angular orbital [6, 7]; lo cuales tienen un gran interés ya que cada fotón es descrito mediante un espacio de Hilbert multidimensional [8, 9, 10, 11, 12, 13] que a diferencia del grado de libertad de polarización en el cual cada fotón es descrito por un espacio de dos dimensiones [14].

La detección con resolución espacial de fotones individuales en el dominio de los momentos lineales transversales da como resultado el espectro angular (EA) de la conversión paramétrica descendente espontánea, que en un pro-

ceso de tipo I la distribución de fotones es de forma anular. Por otra parte, si un fotón (acompañante) es detectado en una cierta locación del espectro angular con un momento lineal transversal  $\vec{k}^\perp$ , entonces los fotones conjugados (señal) son detectados en coincidencia alrededor del punto  $-\vec{k}^\perp$ . Esto último es la segunda medición de interés para el presente trabajo cuando el fotón señal es detectado con un cierto valor del momento lineal transversal, y entonces, los fotones señal detectados en coincidencia con resolución espacial forman el llamado espectro angular condicional (EAC). El espectro angular condicional puede ser considerado como la forma geométrica que tiene los fotones anunciados en el modo señal [15]. En una situación ideal cuando generamos la pareja de fotones con un onda plana (bombeo), tenemos que si detectamos estrictamente un fotón acompañante con un cierto valor del momento lineal transversal, entonces el fotón señal que está en coincidencia con el otro está bien localizado en el momento lineal transversal conjugado, por lo cual, el espectro angular condicional tiene forma de una delta de Dirac. Pero, en un experimento realista el bombeo tiene dimensiones transversales finitas, por lo cual, los fotones señal en coincidencia con el fotón acompañante no se encuentran en un sólo punto sino que cubren toda un área de tal forma que el espectro angular condicional va adquiriendo un cierto ancho.

Las propiedades de las parejas de fotones de *SPDC* espacialmente enredadas, incluyendo el EA y el EAC, son determinadas por la distribución espacial transversal del campo eléctrico del bombeo y por las propiedades no lineales del cristal, incluyendo la dispersión del cristal, su longitud y el efecto de walk-off. La manera en la cual las propiedades espaciales transversales del bombeo son mapeadas a las propiedades de las parejas de fotones del *SPDC* han sido estudiadas en un amplio número de trabajos [5, 9, 15, 16, 17, 18, 19]. Un resultado importante es que para cristales suficientemente delgados (*aproximación de cristal delgado*), el EAC está completamente determinado por la distribución espacial transversal del campo eléctrico del bombeo [10, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Dentro de este límite, la manipulación de las parejas de fotones (ingeniería cuántica) es controlada completamente por el bombeo. Este hecho es la base de un gran número de trabajos que buscan aplicar este tipo de correlaciones espaciales presentes en las parejas de fotones del *SPDC*. La aproximación de cristal delgado ha sido aplicada en la implementación de protocolos de procesamiento de información cuántica, en experimentos que aplican el momento angular orbital de las parejas de fotones [26, 27, 28, 29, 30, 31], en experimentos de imágenes y difracción cuánticas [32, 33, 34, 35, 36, 37], y en una gran variedad de nuevos experimentos [16, 26, 27, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45]. Sin embargo,

para cristales suficientemente largos o para haces gaussianos suficientemente enfocados, las propiedades de las parejas de fotones no son determinadas completamente por la distribución espacial del bombeo. Uno de los propósitos de este trabajo es entender las propiedades de las parejas de fotones del *SPDC* en general, incluyendo las situaciones en donde se puede aplicar la aproximación de cristal delgado y las situaciones donde no se pueda aplicar esta aproximación.

Realizamos, en este trabajo, un estudio detallado del EAC y como de las propiedades del EA son derivadas las propiedades del EAC, poniendo énfasis en los efectos producidos por la longitud del cristal. De igual forma, mostramos que el EAC esta dado por el producto de dos funciones separadas. Una función está relacionada con el EA del bombeo y la otra función está relacionada con las propiedades del cristal, incluyendo la longitud del cristal, la dispersión del cristal y el efecto de *walk-off*. En nuestro estudio de los efectos del cristal mostraremos que existe una longitud crítica,  $L_c$ , que depende del grado de enfocamiento del bombeo, tal que, si la longitud del cristal,  $L$ , es menor a  $L_c$  ( $L < L_c$ ) los efectos producidos por la longitud del cristal pueden ser despreciados y el EAC queda determinado completamente por el EA del bombeo; en este caso el EAC es una versión desplazada del EA del bombeo. Para el caso donde  $L > L_c$  el EAC es determinado tanto por el EA del bombeo como de las propiedades del cristal. En este último caso, el EAC se elonga y el ancho de la elongación esta relacionado con la longitud de cristal y sufre un giro respecto a la localización del detector fijo, entonces surge una distinguibilidad azimutal<sup>1</sup>.

En este trabajo realizamos mediciones experimentales del EA y del EAC encontrando una excelente concordancia con las simulaciones numéricas, las cuales están basadas en la teoría de *SPDC* que desarrollamos en el presente trabajo. La teoría incluye los aspectos experimentales esenciales, los cuales son una distribución espacial arbitraria, filtros espectrales que limitan los fotones que podemos observar del *SPDC*, la dispersión del cristal, el vector de Poynting de *walk-off* y las dimensiones espaciales de los detectores. Hemos realizado, también, una cuidadosa exploración del EA y EAC tanto experimentalmente como teóricamente variando el grado de enfocamiento [24, 46, 47, 48, 49, 50, 51], esto con el propósito de explorar y contrastar los resultados de los regímenes  $L < L_c$  y  $L > L_c$ . En la teoría que presentamos en este trabajo explicamos que la distinguibilidad azimutal [52] del EAC es un efecto de la longitud del cristal y que aparece cuando se tiene un cristal

---

<sup>1</sup>En la Sec. (3.3.1) se explicara con más detalle el significado de la distinguibilidad azimutal en el EA y en el EAC del proceso de *SPDC*.

suficientemente largo ( $L > L_c$ ).

Como parte de este trabajo, consideraremos dos tipos de distribuciones espaciales para el bombeo: un haz gaussiano y un haz Bessel-Gauss de orden 0. Con un haz gaussiano estudiamos los efectos producidos a las parejas de fotones por el grado de enfocamiento del mismo, como anteriormente se ha explicado. Un haz Bessel-Gauss de orden 0 tiene la propiedad interesante de ser adifraccional en un cierto intervalo. La difracción está presente en toda la física que tenga que ver con ondas, incluyendo óptica, acústica y mecánica cuántica. La difracción Para muchas aplicaciones la difracción es una limitación, por lo cual, se han propuesto algunas técnicas para controlarla. Los haces adifraccionales es un término común utilizado en la óptica clásica para referirnos a soluciones de la ecuación de onda que se propagan a lo largo del eje óptico preservando su patrón transversal de intensidad. Los primeros haces de este tipo son los haces Bessel y fueron propuestos en el trabajo de [53]. Después, fueron descubiertos otros tipos de haces adifraccionales como los haces Mathieu, los haces parabólicos, las ondas X y las haces Airy [54]. Un haz adifraccional ideal debe tener una extensión y energía infinita, lo cual, es físicamente inviable. En vista de lo anterior, se han implementado experimentalmente haces adifraccionales cercanos al caso ideal y de muy alta calidad con mascarillas anulares, axicones, cavidades láser, hologramas y moduladores de luz [55].

Como se mencionó antes, en la aproximación de cristal delgado las propiedades espaciales transversales del bombeo son mapeadas a las propiedades de las parejas de fotones del *SPDC*. En pasados trabajos se han utilizado haces con distintas distribuciones espaciales para poder aprovechar este mapeo, por ejemplo, se han utilizado haces Gauss-Laguerre que tienen momento angular orbital [7]. En muchos trabajos las parejas de fotones son proyectados (después de haber sido generados) a una distribución transversal específica de vectores de onda mediante hologramas y otros elementos ópticos. La idea principal de utilizar un haz Bessel-Gauss de orden 0 es generar las parejas de fotones (mediante la medición del EAC) que sean adifraccionales, una propiedad mapeada directamente del bombeo sin realizar un procesamiento de las parejas de fotones después de haber sido generadas [16, 20, 56].

La habilidad de poder controlar el patrón de intensidad transversal al nivel de uno sólo fotón es notable, y en particular, que se logre tener un comportamiento adifraccional. La aplicaciones podrían estar en el área de comunicaciones cuánticas en el espacio libre donde es importante tener haces adifraccionales que mantengan su forma en presencia de obstáculos [57] y cuando se propaguen a través de medios con turbulencia [58, 59]. También,

otra posible aplicación podría estar en el control de las interacciones de fotones individuales con átomos o iones en arreglos lineales de una trampa de iones o en una malla óptica (*optical lattice*).

## 1.1. Objetivos de trabajo

Los objetivos del trabajo doctoral son:

1. Obtener experimentalmente la pareja de fotones mediante el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea. Lo cual consiste en cuatro tipos de experimentos. El primer experimento es obtener la distribución de un sólo fotón de la pareja en el espacio de momentos transversales, el llamado espectro angular. Lo segundo es obtener la distribución de un fotón en el espacio de momentos transversales condicionado a la detección del otro, el llamado espectro angular condicional. El tercer experimento es obtener para un sólo fotón su distribución de intensidad transversal. El cuarto experimento es obtener para un fotón su distribución de intensidad transversal condicionado a la detección del otro fotón. Finalmente, para realizar los experimentos anteriores se debe implementar la técnica de detección de fotones con resolución espacial.
2. Tener un modelo matemático que describa aproximadamente lo que pasa experimentalmente mediante simulaciones numéricas. Lo cual es una herramienta útil para entender como cambia el espectro angular y el espectro angular condicional, al igual que sus transformadas de Fourier, de la pareja de fotones en función de los cambios de las propiedades del cristal y las propiedades del bombeo.
3. A partir de punto anterior, estudiar el espectro angular y espectro angular condicional en función de las diferentes estructuras espaciales del bombeo. En este trabajo se estudian dos tipos de estructuras: un bombeo gaussiano y un bombeo Bessel-Gauss de orden 0. Respecto a los dos casos de bombeo se estudiará lo siguiente:
  - En el caso gaussiano se estudiará el comportamiento del espectro angular y el espectro angular condicional en función al grado de enfocamiento del bombeo. Esto nos llevará a establecer un criterio para decidir cuando aplicar la llamada aproximación de cristal delgado.

- En el caso Bessel-Gauss se estudiarán dos cosas. Primero se estudiará el espectro angular y el espectro angular condicional de la pareja de fotones. En segundo lugar se estudiarán las condiciones experimentales para que los fotones generados hereden la propiedad interesante de este tipo de haces, la propiedad de ser adifraccionales. Lo anterior se deberá obtener en el espacio de posiciones transversales.

En el Capítulo 2 se deducen las expresiones del espectro angular y del espectro angular condicional de la pareja de fotones, además se establece las expresiones donde se observa la contribución de las propiedades del cristal y de las propiedades del bombeo a ambos espectros. En el mismo capítulo se establecen las condiciones para el espectro angular condicional dependa solamente de las propiedades del bombeo, lo que se llama aproximación de cristal delgado. En la teoría se considera los parámetros experimentales siguientes: las dimensiones de la fibras ópticas usadas para la colección de fotones, los filtro espectrales, los índices de refracción del cristal, las dimensiones del cristal, el ángulo de *phasematching*, el efecto de *walk-off* y las transformación adecuada para pasar del espacio de Fourier al espacio real donde se obtienen las distribuciones. En el Capítulo 3 se realizan las simulaciones numéricas correspondientes. Con las simulaciones numéricas se estudiará el comportamiento general del espectro angular y del espectro angular condicional al ir enfocando el haz gaussiano. También, se establecerá el comportamiento general de ambos espectros con un bombeo Bessel-Gauss de orden 0. Al final del capítulo se estudiará cualitativamente como se propaga la distribución de intensidad transversal para un fotón y para un fotón condicionado a la detección del otro. Se mostrará que la distribución de intensidad transversal de un fotón condicionada a la detección del otro fotón es adifraccional a diferencia de la distribución de intensidad de un sólo fotón no lo es. En el Capítulo 4 se describe la técnica de detección de fotones con resolución espacial y sus configuraciones para detectar un sólo fotón o los fotones del tipo condicionado. Se explican los arreglos experimentales implementados para cada bombeo y finalmente se muestran los resultados experimentales. En el caso gaussiano se establece dado el cristal, que grado de enfocamiento se requiere para que sea válida la aproximación de cristal delgado. En el Capítulo 5 están las conclusiones.

## Capítulo 2

# Teoría de la Conversión Paramétrica Descendente Espontánea

### 2.1. Introducción

El proceso de conversión descendente paramétrica espontánea (*SPDC*) es un fenómeno que es explicado correctamente mediante la mecánica cuántica.

El proceso de *SPDC* consiste en lo siguiente: si tenemos un haz de luz láser (que llamaremos **bombeo**) que incide sobre un cristal con propiedades ópticas no lineales de segundo grado caracterizadas mediante  $\chi^{(2)}$ , entonces, para cada fotón individual del bombeo de frecuencia angular  $\omega_p$  y vector de onda  $\vec{k}_p$  existe una probabilidad de que decaiga espontáneamente en dos fotones; uno de ellos de frecuencia angular  $\omega_s$  y vector de onda  $\vec{k}_s$  (que llamaremos **señal**), y el otro de frecuencia angular  $\omega_i$  y vector de onda  $\vec{k}_i$  (que llamaremos **acompañante**), ver Figura 2.1. Las condiciones para que el proceso anterior sea posible en un medio **homogéneo** son [60]: la conservación de la energía

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (2.1)$$

y la conservación del momento lineal o condición de **empatamiento de fases** o condición de *phasematching*:

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i. \quad (2.2)$$

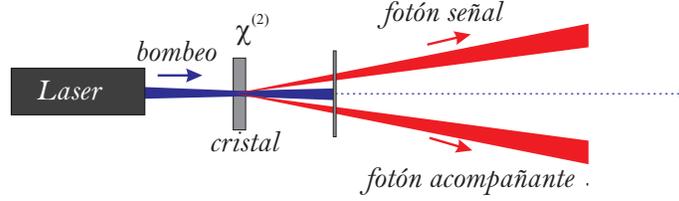


Figura 2.1: Esquema del proceso de conversión paramétrica descendente espontánea.

La condición dada en la Ec. (2.2) se consigue en un cristal uniaxial mediante la *dispersión*, o sea, los índices de refracción. Los cristales no lineales son birrefringentes. Existen dos tipos de birrefringencia: uniaxial y biaxial. Un cristal uniaxial tiene dos índices de refracción: el *índice de refracción ordinario*,  $n_o$ , y el *índice de refracción extraordinario*,  $n_e$ . Otra propiedad importante en este tipo de cristales es su eje óptico,  $\vec{c}$ , de tal forma que si la luz incide con una polarización lineal paralela al plano que contiene a  $\vec{c}$  recibe el nombre luz *extraordinaria* y el índice de refracción asociada a ella depende del ángulo entre su vector de onda y  $\vec{c}$ , o si la luz incide con una polarización lineal perpendicular al plano que contiene a  $\vec{c}$  recibe el nombre de luz *ordinaria* y el índice de refracción asociada a ella es  $n_o$ . Ahora bien, si  $n_o > n_e$  el cristal es uniaxial *negativo* y si  $n_o < n_e$  el cristal es uniaxial *positivo*. Existen varias configuraciones donde es posible conseguir que se cumpla la condición de *phasematching* [61] y las cuales se enlistan en la Tabla (2.1).

Tipo	cristal	configuración bombeo $\rightarrow$ señal + acompañante
I	negativo	$e \rightarrow o + o$
I	positivo	$o \rightarrow e + e$
II	negativo	$e \rightarrow o + e$ $e \rightarrow e + o$
II	positivo	$o \rightarrow o + e$ $o \rightarrow e + o$
III	negativo	$e \rightarrow e + e$

Cuadro 2.1: Tipos de *phasematching* para un cristal uniaxial, donde  $e =$  onda extraordinaria y  $o =$  onda ordinaria

Otra propiedad importante de un cristal uniaxial es el ángulo de *phasematching*,  $\theta_{\text{pm}}$ , el cual es el ángulo entre el vector de onda y  $\vec{c}$  al cual existe

*phasematching*. Con el  $\theta_{\text{pm}}$  podemos controlar las frecuencias angulares y ángulos de emisión de los fotones señal y acompañante que son creados con mayor probabilidad. Un caso particular y muy utilizado es el llamado *degenerado*, donde

$$\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2} = \omega_0. \quad (2.3)$$

El caso *degenerado* puede ser colineal, donde los ángulos de emisión (con respecto al haz de bombeo) son cero, y no colineal.

### Tipo de *phasematching* utilizado en este trabajo

El cristal utilizado en este trabajo es el Beta Borato de Bario (*BBO* por sus siglas en inglés de *beta barium borate*) el cual es un cristal uniaxial negativo y el *SPDC* que generamos es de tipo I degenerado y no colineal, entonces el cristal debe tener un ángulo de *phasematching* de  $\theta_{\text{PM}}$  para que la conservación del momento transversal, Ec. (2.2), se cumpla para las frecuencias angulares  $\omega_s = \omega_i = \omega_0$ . En la Fig. (2.2) se muestra un diagrama de la geometría del *SPDC* en donde se cumple  $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$ ; además se muestra la relación entre  $\vec{k}_p$ , el eje óptico y en ángulo de *phasematching*,  $\theta_{\text{pm}}$ ; también, se muestran sus respectivas polarizaciones:  $\hat{e}_p$  para el bombeo (con  $\hat{e}_p \parallel \hat{y}$ ),  $\hat{e}_s$  para la señal (con  $\hat{e}_s \perp \hat{y}$ ) y  $\hat{e}_i$  para el acompañante (con  $\hat{e}_i \perp \hat{y}$ ); finalmente los ángulos de emisión del fotón señal,  $\theta_s$  y del fotón acompañante,  $\theta_i$ .

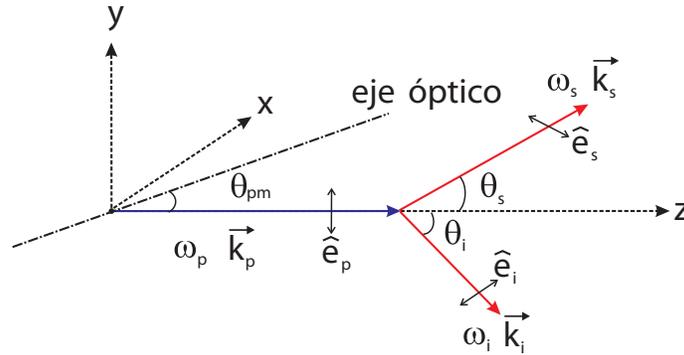


Figura 2.2: Diagrama de la geometría del proceso de *SPDC*.

Nuestro objetivo en este capítulo es determinar para las parejas de fotones (*SPDC*) su estado cuántico, el *espectro angular*, el *espectro angular condicional* y las intensidades transversales tanto directa como condicional.

Todo lo anterior es para tener el control del *SPDC* en función de la manipulación de las propiedades del cristal y la manipulación de las propiedades del bombeo, ingeniería cuántica. En lo que sigue daremos un resumen de la notación más utilizada en el texto. Luego derivamos el estado cuántico del *SPDC* considerando una estructura espacial cualquiera para el bombeo. En la deducción surge una función llamada *phasematching* transversal y que la obtenemos para dos estructuras espaciales del bombeo: un haz gaussiano y un haz Bessel-Gauss de orden 0. Después, con el estado cuántico calculamos el *espectro angular* y el *espectro angular condicional* del *SPDC*. En la deducción analizamos un caso particular de *espectro angular condicional*, en donde, al EAC la podemos descomponer como el producto de dos funciones, una de las cuales depende de las propiedades del cristal y la otra depende de las propiedades del bombeo. También, exponemos una aproximación importante y muy utilizada en la literatura [1, 13, 15, 16, 23, 26, 34, 37, 38, 62], **la aproximación del cristal delgado**. Finalmente, obtenemos las intensidades transversales tanto directa como condicional para poder estudiar si el haz Bessel-Gauss de orden 0 es adifraccional.

### 2.1.1. Notación

En este capítulo los subíndices son: p es para bombeo, s para la señal e i para el acompañante. Además:

- Entenderemos  $\vec{x}$ ,  $t$  como las coordenadas espaciales y temporales respectivamente. A  $\vec{\rho}$  como la parte transversal del vector  $\vec{x}$  de tal forma que  $\vec{x} = \vec{\rho} + z\hat{z}$ .
- $\vec{k}_\mu = (k_{\mu x}, k_{\mu y}, k_{\mu z})$  representa al vector de onda de la señal o el acompañante ( $\mu = s, i$ ). Además  $|\vec{k}_\mu|^2 = k_\mu^2 = k_{\mu x}^2 + k_{\mu y}^2 + k_{\mu z}^2$ .
- $\omega_\mu = c \cdot |\vec{k}_\mu|$  es la frecuencia angular.
- $\vec{k}_\mu^\perp = (k_{\mu x}, k_{\mu y})$  es la componente transversal del vector de onda de la señal y acompañante, tal que  $\vec{k}_\mu = \vec{k}_\mu^\perp + k_{\mu z} \cdot \hat{z}$ .
- Vector de onda transversal:  $\vec{k}^\perp = (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy}) = (k_x^\perp, k_y^\perp)$ .
- Condición de *phasemismatching* (desamptamiento de fases):  $\Delta k = k_p - \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - k_{sz} - k_{iz} - k_y^\perp \tan \rho_0$ .
- Ángulo de *walk-off*:  $\rho_0 = -\frac{1}{n(\theta)} \frac{\partial n(\theta)}{\partial \theta}$ .

## 2.2. Estado cuántico del SPDC

En la representación de interacción en mecánica cuántica y utilizando el primer orden de la teoría de perturbaciones<sup>1</sup>, tenemos que el estado cuántico del SPDC del tipo I y no colineal, está dada por [60]

$$|\Psi\rangle \approx |\text{vac}\rangle + \frac{1}{i\hbar} \left\{ \int_0^t dt' \hat{H}(t') \right\} |\text{vac}\rangle, \quad (2.4)$$

donde el vacío esta dado por

$$|\text{vac}\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i. \quad (2.5)$$

La Ec. (2.4) es el estado cuántico que representa la generación de parejas de fotones a partir de las fluctuaciones del vacío, por lo cual, el segundo término de la Ec. (2.4) debe ser la creación de una pareja de fotones, uno en el modo señal y otro en el modo acompañante. A continuación la Ec. (2.4) la representaremos en términos de una función  $F$  de amplitud compleja que dependa de las variables fotónicas  $k_{sx}, k_{sy}, \omega_s, k_{ix}, k_{iy}, \omega_i$ , de tal forma que el módulo cuadrado sea la probabilidad de emisión espontánea y *simultánea* de dos fotones, uno en el modo señal con  $k_{sx}, k_{sy}, \omega_s$  y el otro en el modo acompañante con  $k_{ix}, k_{iy}, \omega_i$ . La interpretación, de lo anterior, es que los modos que tienen más probabilidad de emitirse serán aquellos que conserven energía y momento lineal (condición de *phasematching*). Después a  $F$  la representaremos como el producto de funciones que contengan información del bombeo e información del cristal. El objetivo de esto es comprender el cambio de las propiedades físicas del estado cuántico de la pareja de fotones cuando manipulamos las propiedades del bombeo y del cristal, a esto se le llama hacer *ingeniería de estados cuánticos* [63].

Iniciaremos planteando el operador hamiltoniano de la interacción, el cual es [60, 64] (en el Apéndice A se establece el hamiltoniano clásico en función de las magnitudes de los campos vectoriales y en el cual nos basamos para plantear el hamiltoniano cuántico)

$$\hat{H}(t) = 2\epsilon_0 \int_V dV d_{\text{eff}} \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} + \text{H.C.}, \quad (2.6)$$

donde  $d_{\text{eff}}$  es el coeficiente efectivo no lineal de segundo orden que en general depende de la temperatura, las frecuencias angulares del bombeo, señal y

<sup>1</sup>Además, suponemos que los hamiltonianos en diferentes tiempos conmutan.

acompañante y puede tener dependencia espacial,  $d_{\text{eff}} = d_{\text{eff}}(\vec{x})$ , como en el caso de los cristales periódicamente polarizados; y  $\hat{E}_{\text{p}} = \hat{E}_{\text{p}}^{(-)} + \hat{E}_{\text{p}}^{(+)}$ ,  $\hat{E}_{\text{s}} = \hat{E}_{\text{s}}^{(-)} + \hat{E}_{\text{s}}^{(+)}$ ,  $\hat{E}_{\text{i}} = \hat{E}_{\text{i}}^{(-)} + \hat{E}_{\text{i}}^{(+)}$  son los operadores de campo eléctrico que representan al bombeo, la señal y el acompañante respectivamente. Los operadores de campo eléctrico para el fotón señal y el fotón acompañante están dados por[60]

$$\hat{E}_{\mu}(\vec{x}, t) = i \underbrace{\int_V d^3k_{\mu} \exp \left\{ -i \left[ \omega_{\mu} t - \vec{k}_{\mu} \cdot \vec{x} \right] \right\} \ell(\omega_{\mu}) \hat{a}_{\mu}(\vec{k}_{\mu})}_{=\hat{E}_{\mu}^{(+)}} + \text{H.C.}, \quad (2.7)$$

donde  $\omega_{\mu} = \omega_{\mu}(\vec{k}_{\mu})$  y

$$\ell(\omega_{\mu}) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mu}}{2(2\pi)^3 \epsilon_0 n(\omega_{\mu})^2}}. \quad (2.8)$$

El siguiente paso es establecer el operador del campo eléctrico del bombeo. Aquí, haremos la sustitución del operador por su versión clásica [51, 60]. A este campo eléctrico le daremos una estructura espacial y utilizaremos como base la familia de haces Helmholtz-Gauss, los cuales son descritos en el trabajo de [55]. Estos haces tienen la importante propiedad de ser haces adifraccionales en una determinada distancia. La función de amplitud compleja que representa a los haces Helmholtz-Gauss es

$$U(\vec{x}) = \exp \left( \frac{-ik_{\text{tp}}^2 z}{2k_{\text{p}} q(z)} \right) \text{GB}(\vec{x}) W \left( \frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)}; k_{\text{tp}} \right), \quad (2.9)$$

donde se ha considerado que el origen de coordenadas se encuentra en el cinturón del haz<sup>2</sup>. La transformada de Fourier bidimensional de la Ec. (2.9), llamada *amplitud angular* (y su modulo cuadrado es el *espectro angular*), es igual a [55]

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(k_x, k_y; z) &= \frac{W_0^2}{2} \exp \left( \frac{-k_{\text{tp}} W_0^2}{4} \right) \exp(i k_{\text{tp}} z) \times \\ &\exp \left( \frac{-W_0^2 q(z)}{4} \rho^2 \right) W \left( \frac{W_0^2}{2i} k_x, \frac{W_0^2}{2i} k_y; k_{\text{tp}} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>Para considerar un cálculo más completo y considerando que el cinturón se encuentra a una distancia  $z_0$  del origen se puede consultar la referencia [65].

donde el espectro angular de esta familia de haces es una anillo de radio  $k_{tp}$  y de ancho  $\Delta k_{tp}$ , además tenemos que

$$q(z) = 1 + \frac{iz}{z_R}, \quad (2.11)$$

y

$$\text{GB}(\vec{x}) = \exp(ik_p(\omega_p)z) \underbrace{\left( \frac{1}{q(z)} \exp\left(-\frac{x^2}{W_0^2 q(z)}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{W_0^2 q(z)}\right) \right)}_{=\text{GB}_T} \quad (2.12)$$

es la componente gaussiana con  $W_0$  igual al radio del cinturón y  $z_R = \frac{k_p W_0^2}{2}$  es el rango de Rayleigh. Tenemos una relación entre  $W_0$  y  $\Delta k_{tp}$ , la cual es  $W_0 = \frac{4}{\Delta k_{tp}}$  [55]. La función  $W(\cdot)$ <sup>3</sup> toma una forma distinta dependiendo de que haz estemos considerando. La formulación matemática es tal que podemos reducir la Ec. (2.9) al caso de un haz gaussiano de la siguiente forma

$$W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)}; k_{tp}\right) \rightarrow 1, \quad (2.13)$$

que es una haz no adifracional. En este trabajo también consideraremos el caso de un haz Bessel-Gauss

$$W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)}; k_{tp}\right) = J_m(k_{tp}\rho) \exp(im\phi), \quad (2.14)$$

donde  $J_m(\cdot)$  es la función Bessel de orden  $m$ . El caso anterior es un haz adifracional.

Retomando la deducción de la función de amplitud compleja que representa al bombeo, tenemos que utilizando lo escrito anteriormente, lo cual esta basado en los trabajos de [51] y [55], y además considerando que un cristal uniaxial los frentes de onda y la energía de una onda viajan en direcciones diferentes (efecto llamado *walk-off*)

---

<sup>3</sup>En todo el texto utilizaremos la convención de nombrar cualquier función  $f$  colocando entre paréntesis un punto,  $f(\cdot)$ , lo cual significa el argumento de la función.

$$\begin{aligned}
E_p(\vec{x}, t) = & (2\pi)^3 A_p \int d\omega_p \alpha(\omega_p) \exp\{-i\omega_p t\} \exp\left\{-i \left[ \frac{k_{tp}^2 z}{2k_p(\omega_p) \cdot q(z)} \right]\right\} \times \\
& \times \text{GB}(x, y - z \tan(\rho_0), z) \cdot W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{q(z)}; k_{tp}\right),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde  $\rho_0$  es el ángulo de *walk-off* y la envolvente espectral no normalizada es

$$\alpha(\omega_p) = \exp\left\{-\frac{(\omega_p - \omega_{p0})^2}{\sigma_p^2}\right\}, \tag{2.16}$$

y donde  $\omega_{p0}$ ,  $\sigma_p$  son la frecuencia angular y el ancho de banda del bombeo respectivamente.

El siguiente paso es obtener la función de amplitud conjunta de la pareja de fotones en términos de los vectores de onda, que nos referiremos por sus siglas en inglés *WJA* (*wavevector joint amplitude*).

### 2.3. Cálculo de la función de amplitud conjunta de la pareja de fotones en términos de los vectores de onda

Para obtener *WJA* debemos expresar la Ec. (2.4) con las variables fotónicas mediante las Ecs. (2.6), (2.7) y (2.15), y realizando las integraciones correspondientes. De la Ec. (2.6), primero calculamos

$$\begin{aligned}
\hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = & - \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \exp\{i[\omega_s + \omega_i]t\} \times \\
& \times \exp\left\{-i[\vec{k}_s + \vec{k}_i] \cdot \vec{x}\right\} \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

La integración se hace en todo  $\mathbb{R}^3$  debido a que debemos considerar todos los modos disponibles y que en este caso resulta ser un continuo de valores

[60]. Luego, calculando

$$\begin{aligned}
 E_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \times \\
 &\times \exp \{-i[\omega_p - \omega_s - \omega_i]t\} \exp \left\{ -i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho} \right\} \times \\
 &\times \exp \{i[k_p - k_{sz} - k_{iz}] \cdot z\} \exp \left\{ -i \frac{k_{tp}^2}{2k_p q(z)} z \right\} \times \\
 &\times \text{GB}_T(x, y - z \tan(\rho_0), z) \cdot W \left( \frac{x}{q(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{q(z)}; k_{tp} \right) \times \\
 &\times \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i);
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned}
 \vec{k}^\perp &= (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy}) = (k_x^\perp, k_y^\perp) \\
 \vec{x} &= \vec{\rho} + z \hat{z} = (x, y) + z \hat{z},
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

entonces

$$[\vec{k}_s + \vec{k}_i] \cdot \vec{x} = \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho} + (k_{sz} + k_{iz})z. \tag{2.20}$$

El siguiente paso es hacer la integración de volumen, considerando  $d_{\text{eff}}$  constante, por lo cual tenemos,

$$\begin{aligned}
 \int_{V_c} dV E_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \times \\
 &\times \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \exp \{-i\Delta\omega t\} \times \\
 &\times \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \cdot \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i),
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

con

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega &= \omega_p - \omega_s - \omega_i, \\
 \Delta k_z &= k_p(\omega_p) - k_{sz} - k_{iz},
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

y la función de *phasematching* ( $PM$ )

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \int_{V_c} dV \exp\left\{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}\right\} \exp\{i\Delta k_z z\} \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2}{2k_p q(z)}z\right\} \times \\
&\times \text{GB}_T(x, y - z \tan \rho_0, z) \cdot W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{q(z)}; k_{\text{tp}}\right) \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp\{i\Delta k_z z\} \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2}{2k_p q(z)}z\right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}\right\} \text{GB}_T(x, y - z \tan \rho_0, z) \cdot \times \\
&\times W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{q(z)}; k_{\text{tp}}\right) \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp\{i\Delta k_z z\} \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2}{2k_p q(z)}z\right\} \cdot \Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})
\end{aligned} \tag{2.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}\right\} \text{GB}_T(x, y - z \tan \rho_0, z) \cdot \times \\
&\times W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y - z \tan(\rho_0)}{q(z)}; k_{\text{tp}}\right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

y donde los límites de integración de la integral de volumen se tomaron considerando que el cristal en sus dimensiones transversales es mayor que las dimensiones transversales del haz de bombeo que incide sobre él, con lo cual podemos hacer los límites de  $x$  y  $y$  vayan de  $-\infty$  a  $\infty$ ; además en la coordenada  $z$  consideramos que los límites van de  $-L/2$  a  $L/2$  ya que la longitud del cristal es  $L$ . La Ec. (2.24) es la transformada de Fourier de dos dimensiones respecto a las frecuencias espaciales  $\vec{k}^\perp$  y las coordenadas  $\vec{\rho}$ ; además, el kernel de la transformación es  $\exp\left\{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}\right\}$ . Del trabajo de [55], Ecuaciones (10) y (11), podemos observar que la función  $\Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}})$  es el *espectro angular* salvo funciones que dependen de  $z$ .

Luego, realizando la integración temporal

$$\begin{aligned}
 \int_0^t dt' \int_{V_c} dV E_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \times \\
 &\times \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \alpha(\omega_p) \int_0^t dt' \exp\{-i\Delta\omega t'\} \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) = \\
 &= -(2\pi)^4 A_p \int_0^\infty d\omega_p \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \times \\
 &\times \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \alpha(\omega_p) \delta(\Delta\omega) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) = \\
 &= -(2\pi)^4 A_p \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \times \\
 &\times \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p0}) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i),
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que  $\int dt' \exp\{-i\Delta\omega t'\} = 2\pi \delta(\Delta\omega)$  siendo  $\delta$  la función delta de Dirac; y siguiendo a [60] podemos considerar  $\ell(\omega_\mu) \approx$  cte, entonces

$$\begin{aligned}
 \int_0^t dt' \int_{V_c} dV E_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &\propto \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i \times \\
 &\times \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p0}) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i),
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Por lo tanto, de los resultados anteriores, podemos expresar la Ec. (2.4) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 |SPDC\rangle &= |\Psi\rangle \\
 &\approx |\text{vac}\rangle + \eta \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{k}_i F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) |\text{vac}\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde  $\eta$  es una constante que esta relacionada con la eficiencia del proceso de *SPDC* y que agrupa todas las constantes anteriores; y  $F(\cdot)$  es la función *WJA* dada por

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p0}) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \tag{2.27}$$

donde  $\alpha(\cdot)$  está dada por la Ec. (2.16) y la función de *PM*,  $\Phi(\cdot)$ , esta dada por las Ecs. (2.23) y (2.24). En este punto hemos expresado la ecuación del estado cuántico de la pareja de fotones mediante las variables fotónicas:  $k_{sx}, k_{sy}, k_{sz}, k_{ix}, k_{iy}$  y  $k_{iz}$ . La forma de  $\Phi(\cdot)$  estará determinada por la estructura espacial del bombeo. A continuación se analizarán dos casos: haz gaussiano y haz Bessel-Gauss de orden 0.

## 2.4. Determinación de la función de *phasematching*

Primero recordaremos un resultado de óptica de Fourier, el cual es[66]: si tenemos la pareja de Fourier

$$f(x) \rightleftharpoons F(k) \quad (2.28)$$

con

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-ikx) \quad \text{y} \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) \exp(ikx), \end{aligned} \quad (2.29)$$

tenemos que se cumple el teorema (*Shift theorem*)

$$f(x - a) \rightleftharpoons F(k) \exp(-ika). \quad (2.30)$$

En lo que sigue deduciremos la forma explícita de la función *PM* para el caso de un haz gaussiano y un haz Bessel-Gauss de orden 0. Primero trataremos ambos casos sin considerar el efecto de *walk-off*. En segundo lugar trataremos ambos casos considerando el efecto de *walk-off* que se deduce de los casos anteriores, ya que, al añadir el *walk-off* se traduce en una traslación espacial que al final se traduce en un corrimiento de fase en la función de *PM* mediante el Teorema (2.30).

### 2.4.1. Caso haz gaussiano sin *walkoff*

En este caso tenemos que

$$W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)}; k_{\text{tp}}\right) \exp\left\{-i \frac{k_{\text{tp}}^2}{2 k_{\text{p}} q(z)} z\right\} \rightarrow 1 \quad (2.31)$$

y la función de *phasematching*

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp\{i\Delta k_z z\} \cdot \Gamma(z; \vec{k}^{\perp}, k_{\text{tp}}). \quad (2.32)$$

Calculando el espectro angular

$$\begin{aligned}
\Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ -i \vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho} \right\} \text{GB}_T(x, y, z) \\
&= \left[ \frac{1}{q(z)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left\{ -ik_x^\perp x - \frac{x^2}{W_0^2 q(z)} \right\} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left\{ -ik_y^\perp y - \frac{y^2}{W_0^2 q(z)} \right\} \\
&= \left[ \frac{1}{q(z)} \right] \left[ W_0 \sqrt{\pi} \sqrt{q(z)} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{4} (k_x^\perp)^2 W_0^2 q(z) \right\} \times \\
&\times \left[ W_0 \sqrt{\pi} \sqrt{q(z)} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{4} (k_y^\perp)^2 W_0^2 q(z) \right\} \\
&= \pi W_0^2 \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} [(k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2] q(z) \right\},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\Phi^{(I)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \pi W_0^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \{ i \Delta k_z z \} \cdot \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} [(k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2] q(z) \right\} \\
&= L \pi W_0^2 \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2 \right\} \text{sinc} \left\{ \frac{L \Delta k_{eff}}{2} \right\},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

donde

$$\Delta k_{eff} = \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - \Delta k_z \tag{2.35}$$

y además hemos etiquetado la función  $\Phi(\cdot)$  con el superíndice  $I$  para distinguirlo con los casos que deduciremos más abajo en el texto. Es importante hacer notar que hemos omitido la fase de  $\Phi^{(I)}$  debido a que las propiedades del SPDC, que se obtienen en las Secciones 2.5.1 y 2.6, se calculan a través de sumas incoherentes, por lo cual, la fase se anula. De este caso podemos obtener una generalización, la cual consiste en considerar la sección transversal del haz gaussiano que tenga una forma elíptica de tal forma que el cinturón tiene forma elíptica de radio  $W_{0x}$  sobre el eje  $x$  y radio  $W_{0y}$  sobre el eje  $y$ . Entonces

$$\Phi^{(II)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = L \pi W_0^2 \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[ (W_{0x} k_x^\perp)^2 + (W_{0y} k_y^\perp)^2 \right] \right\} \text{sinc} \left\{ \frac{L \Delta k_{eff}}{2} \right\}, \tag{2.36}$$

donde el superíndice  $II$  es para etiquetar este caso. También en este caso hemos omitido la fase de  $\Phi^{(II)}$  debido a que las propiedades del SPDC, que se obtienen en las Secciones 2.5.1 y 2.6, se calculan a través de sumas incoherentes, por lo cual, la fase se anula.

#### 2.4.2. Caso haz Bessel-Gauss sin *walkoff*, orden cero ( $m = 0$ )

En este caso tenemos que

$$W\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)}; k_{\text{tp}}\right) = J_0\left(\frac{k_{\text{tp}}|\vec{\rho}|}{q(z)}\right) \quad (2.37)$$

y la función de *phasematching*

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp\{i\Delta k_z z\} \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2}{2k_p q(z)}z\right\} \cdot \Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) \quad (2.38)$$

donde

$$\Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\{-i\vec{k}^\perp \cdot \vec{\rho}\} \text{GB}_T(x, y, z) \cdot J_0\left(\frac{k_{\text{tp}}|\vec{\rho}|}{q(z)}\right) \quad (2.39)$$

De [55, Ec.(23)] que es la expresión de un haz Bessel-Gauss de orden  $m$

$$\text{BG}_m(\vec{x}) = \exp\left\{-i\frac{k_{\text{tp}}^2}{2k_p q(z)}z\right\} \cdot \text{GB}(\vec{x}) \cdot J_m\left(\frac{k_{\text{tp}}|\vec{\rho}|}{q(z)}\right) \cdot \exp(im\phi), \quad (2.40)$$

por lo cual su espectro angular [55], donde  $u$  y  $v$  son las frecuencias espaciales,

$$\begin{aligned} \mathfrak{BG}_m(u, v; z) &= (-i)^m \cdot D(z) \cdot \exp\left(\frac{q(z)W_0^2(u^2 + v^2)}{4}\right) \times \\ &\times I_m\left(\frac{k_{\text{tp}}W_0^2\sqrt{u^2 + v^2}}{2}\right) \cdot \exp(im\phi), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde  $\mathfrak{BG}_m$  es el espectro angular,  $I_m(\cdot)$  es la función de Bessel modificada de primera especie y de orden  $m$ , y además,

$$D(z) = \frac{W_0^2}{2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}k_{\text{tp}}^2 W_0^2\right) \cdot \exp(ik_p z). \quad (2.42)$$

De la Ec. (2.41), tenemos que en nuestro caso (reordenando términos)

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -i \frac{k_{\text{tp}}^2}{2 k_{\text{p}} q(z)} z \right\} \exp \{ i k_{\text{p}} z \} \Gamma(z; \vec{k}^{\perp}, k_{\text{tp}}) &= \frac{W_0^2}{2} \cdot \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 W_0^2 \right) \times \\ &\times \exp(i k_{\text{p}} z) \cdot \exp \left( -\frac{q(z) W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|^2}{4} \right) \cdot I_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \Phi^{(III)}(\vec{k}_{\text{s}}, \vec{k}_{\text{i}}) &= \frac{W_0^2}{2} \cdot \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 W_0^2 \right) \cdot I_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|}{2} \right) \times \\ &\times \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \{ i \Delta k_z z \} \cdot \exp \left( -\frac{q(z) W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|^2}{4} \right) \\ &= \frac{L W_0^2}{2} \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 W_0^2 \right) \cdot I_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|}{2} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}^{\perp}|^2 \right\} \cdot \text{sinc} \left\{ \frac{L \Delta k_{\text{eff}}}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde

$$\Delta k_{\text{eff}} = \frac{|\vec{k}^{\perp}|^2}{2 k_{\text{p}}} - \Delta k_z, \quad (2.35)$$

y además el superíndice en la Ec. (2.44) es para etiquetar el presente caso. La integral es similar a la del caso de haz gaussiano sin *walk-off*. De igual forma hemos omitido la fase de  $\Phi^{(III)}$  debido a que las propiedades del *SPDC*, que se obtienen en las Secciones 2.5.1 y 2.6, se calculan a través de sumas incoherentes, por lo cual, la fase se anula. El cálculo más detallado considerando haces Bessel-Gauss de orden  $m$  puede encontrarse en la referencia [67].

### 2.4.3. Caso haz gaussiano con walk-off

Para implementar el efecto *walk-off* en las Ecs. (2.34) y (2.36) debemos aplicar el Teorema (2.30), ya que el efecto consiste en considerar un corrimiento dado por

$$(x, y) \Rightarrow (x, y - z \tan(\rho_0)), \quad (2.45)$$

entonces aplicando el Teorema (2.30) el espectro angular queda como

$$\Gamma(z; \vec{k}^\perp, k_{\text{tp}}) = \pi W_0^2 \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} [(k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2] q(z) \right\} \exp \left\{ -ik_y^\perp z \tan(\rho_0) \right\}, \quad (2.46)$$

por lo cual la función de *PM* queda

$$\begin{aligned} \Phi^{(IV)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \pi W_0^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \{ i\Delta k_z z \} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} [(k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2] q(z) \right\} \cdot \exp \left\{ -ik_y^\perp z \tan(\rho_0) \right\} \\ &= L\pi W_0^2 \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2 \right\} \text{sinc} \left\{ \frac{L\Delta k_{\text{eff}}}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde

$$\Delta k_{\text{eff}} = \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} + k_y^\perp \tan(\rho_0) - \Delta k_z, \quad (2.48)$$

y el superíndice *IV* es para etiquetar el presente caso. Considerando que las secciones transversales del bombeo son elípticas, tenemos

$$\Phi^{(V)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = L\pi W_0^2 \exp \left\{ -\frac{1}{4} [(W_{0x} k_x^\perp)^2 + (W_{0y} k_y^\perp)^2] \right\} \text{sinc} \left\{ \frac{L\Delta k_{\text{eff}}}{2} \right\}, \quad (2.49)$$

donde  $\Delta k_{\text{eff}}$  esta dada por Ec. (2.48) y el superíndice *V* es para etiquetar este caso. En ambos casos (*IV* y *V*) hemos omitido la fase debido a que las propiedades del *SPDC*, que se obtienen en las Secciones 2.5.1 y 2.6, se calculan a través de sumas incoherentes, por lo cual, la fase se anula.

#### 2.4.4. Caso haz Bessel-Gauss con walkoff, orden cero ( $m = 0$ )

De igual forma procedemos para implementar el efecto *walk-off* en la Ec. (2.44) considerando un corrimiento dado por

$$(x, y) \Rightarrow (x, y - z \tan(\rho_0)), \quad (2.50)$$

entonces

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -i \frac{k_{\text{tp}}^2}{2 k_{\text{p}} q(z)} z \right\} \exp \{ i k_{\text{p}} z \} \Gamma(z; \vec{k}^{\perp}, k_{\text{tp}}) = \frac{W_0^2}{2} \cdot \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 W_0^2 \right) \times \\ & \times \exp(i k_{\text{p}} z) \cdot \exp \left( -\frac{q(z) W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|^2}{4} \right) \cdot I_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|}{2} \right) \cdot \exp \left( -i k_y^{\perp} z \tan(\rho_0) \right); \end{aligned} \quad (2.51)$$

por lo cual la función de  $PM$  queda

$$\begin{aligned} \Phi^{(VI)}(\vec{k}_{\text{s}}, \vec{k}_{\text{i}}) &= \frac{W_0^2}{2} \cdot \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 W_0^2 \right) \cdot I_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|}{2} \right) \times \\ & \times \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp \{ i \Delta k_z z \} \cdot \exp \left( -\frac{q(z) W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|^2}{4} \right) \times \\ & \times \exp \left( -i k_y^{\perp} z \tan(\rho_0) \right) \quad (2.52) \\ &= \frac{L W_0^2}{2} \exp \left( -\frac{1}{4} k_{\text{tp}}^2 W_0^2 \right) \cdot I_0 \left( \frac{k_{\text{tp}} W_0^2 |\vec{k}^{\perp}|}{2} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}^{\perp}|^2 \right\} \cdot \text{sinc} \left\{ \frac{L \Delta k_{\text{eff}}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

en donde

$$\Delta k_{\text{eff}} = \frac{|\vec{k}^{\perp}|^2}{2 k_{\text{p}}} + k_y^{\perp} \tan(\rho_0) - \Delta k_z, \quad (2.48)$$

y el superíndice  $VI$  es para etiquetar el actual caso. También en este caso hemos omitido la fase de  $\Phi^{(VI)}$  debido a que las propiedades del  $SPDC$ , que se obtienen en las Secciones 2.5.1 y 2.6, se calculan a través de sumas incoherentes, por lo cual, la fase se anula.

#### 2.4.5. Resumen de funciones de *phasematching*

Como resumen de los cálculos hechos para determinar la función de  $PM$ , escribamos nuevamente las funciones en la siguiente lista, con  $\Delta k_z = k_p - k_{\text{sz}} - k_{\text{iz}}$ :

- Caso gaussiano sin *walk-off*:

$$\begin{aligned} \Phi^{(I)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \exp\left\{-\frac{W_0^2}{4}|\vec{k}^\perp|^2\right\} \text{sinc}\left\{\frac{L\Delta k_{eff}}{2}\right\} \quad \text{con} \\ \text{con } \Delta k_{eff} &= \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - \Delta k_z. \end{aligned} \quad (2.34)$$

- Caso gaussiano sin *walk-off* con sección transversal elíptica:

$$\begin{aligned} \Phi^{(II)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= L\pi W_0^2 \exp\left\{-\frac{1}{4}\left[(W_{0x}k_x^\perp)^2 + (W_{0y}k_y^\perp)^2\right]\right\} \text{sinc}\left\{\frac{L\Delta k_{eff}}{2}\right\} \\ \text{con } \Delta k_{eff} &= \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - \Delta k_z. \end{aligned} \quad (2.36)$$

- Caso Bessel-Gauss de orden 0 sin *walk-off*:

$$\begin{aligned} \Phi^{(III)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \exp\left(-\frac{1}{4}k_{tp}^2 W_0^2\right) \cdot I_0\left(\frac{k_{tp}W_0^2|\vec{k}^\perp|}{2}\right) \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{W_0^2}{4}|\vec{k}^\perp|^2\right\} \cdot \text{sinc}\left\{\frac{L\Delta k_{eff}}{2}\right\} \\ \text{con } \Delta k_{eff} &= \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - \Delta k_z. \end{aligned} \quad (2.44)$$

- Caso gaussiano con *walk-off*:

$$\begin{aligned} \Phi^{(IV)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &\text{ tiene la misma forma que } \Phi^{(I)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \\ \text{pero con } \Delta k_{eff} &= \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} + k_y^\perp \tan(\rho_0) - \Delta k_z. \end{aligned} \quad (2.47)$$

- Caso gaussiano con *walk-off* con sección transversal elíptica:

$$\begin{aligned} \Phi^{(V)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &\text{ tiene la misma forma que } \Phi^{(II)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \\ \text{pero con } \Delta k_{eff} &= \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} + k_y^\perp \tan(\rho_0) - \Delta k_z. \end{aligned} \quad (2.49)$$

- Caso Bessel-Gauss de orden 0 con *walk-off*:

$$\begin{aligned} \Phi^{(VI)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &\text{ tiene la misma forma que } \Phi^{(III)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \\ \text{pero con } \Delta k_{eff} &= \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} + k_y^\perp \tan(\rho_0) - \Delta k_z. \end{aligned} \quad (2.52)$$

### 2.4.6. Estructura de la función $WJA$

A continuación haremos un análisis de la estructura de la función de amplitud compleja  $WJA$ ,  $F(\cdot)$ . Recordando la Ec. (2.27) tenemos que  $F(\cdot)$  es el producto de las funciones  $\alpha(\cdot)$  y  $\Phi^{(J)}(\cdot)$ , donde  $J$  es igual a uno de los casos antes descritos. La primera función es la envolvente espectral o la función que contiene las propiedades temporales del bombeo. La segunda función es la que llamamos función de *phasematching*,  $\Phi^{(J)}(\cdot)$ . De la sección anterior se observa que a esta función podemos representarla como el producto de dos funciones. La primera de ellas que la llamaremos función de *phasematching* longitudinal,  $\Phi_L^{(J)}(\cdot)$ , y que en todos los casos es igual a la función  $\text{sinc}(\cdot)$ ; y la cual contiene las propiedades del cristal (ángulo de *phasematching*, longitud del cristal  $L$  y ángulo de *walk-off*). La segunda de ellas que la llamaremos función de *phasematching* transversal,  $\Phi_T^{(J)}(\cdot)$ , y que es igual al espectro angular del bombeo en términos de las variables  $k_x^\perp$  y  $k_y^\perp$ ; y la cual contiene las propiedades espaciales (como el radio de cinturón y  $k_{tp}$ , según el caso). Hay que notar que todas las funciones dependen de los vectores de onda de la señal, el acompañante y el bombeo, y que para calcularlos debemos conocer los índices de refracción a través de la ecuaciones de Sellmeier y que dependen del cristal que se utilice.

En conclusión la función  $F(\cdot)$  tiene la siguiente estructura

$$F(\cdot) = \alpha(\text{propiedades temporales del bombeo}) \times \Phi_L^{(J)}(\text{propiedades del cristal}) \times \Phi_T^{(J)}(\text{propiedades espaciales del bombeo}), \quad (2.53)$$

lo cual permite hacer un análisis del estado cuántico del *SPDC* al manipular las propiedades del cristal y el bombeo. Cuando podemos controlar el estado cuántico del *SPDC* se dice que hacemos ingeniería de estados cuánticos. Como una aplicación de lo anterior podemos determinar las condiciones experimentales del cristal y el bombeo para obtener estados cuánticos factorizables y no factorizables [12, 17, 51, 63, 68, 69, 70, 71].

## 2.5. Espectro angular y espectro angular condicional

Lo siguiente es determinar el comportamiento en la emisión de las parejas de fotones en función de las variables fotónicas. El **espectro angular** (EA)

y el **espectro angular condicional** (EAC) son las formas que adoptaremos para caracterizar el estado cuántico de las parejas de fotones, las cuales son ampliamente utilizadas[16, 17, 68]. El EA corresponde a una medición con resolución en momento transversal de la tasa de arribo de los fotones individuales. El EAC corresponde a una medición con resolución en momento transversal de la tasa de arribo de los fotones señal condicionados a la medición con resolución y en un punto en el espacio de momentos transversales de la tasa de arribo de los fotones acompañantes.

Recordemos que cada modo está etiquetado mediante las variables fotónicas:  $(k_{sx}, k_{sy}, k_{sz})$  para el modo señal, y  $(k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})$  para el modo acompañante. Con un cambio de variable podemos sustituir  $k_{\mu z}$  por  $\omega_\mu$ ; por lo cual, los modos quedarían etiquetados por:  $(k_{sx}, k_{sy}, \omega_s)$  para el modo señal, y  $(k_{ix}, k_{iy}, \omega_i)$  para el modo acompañante. Este cambio de variable lo haremos al calcular el EA y el EAC, ya que las variables fotónicas tomadas de esa forma son viables de medir experimentalmente.

A continuación haremos el calculo del EA y del EAC, pero consideremos dos hechos experimentales (ver Cap. 4). Primero, el hecho de que en el experimento se utilizan filtros espectrales, los cuales caracterizaremos con una función  $f = f(\omega_\mu)$ . La función  $|f|^2$  se puede determinar con la curva de transmitancia *vs.* la longitud de onda que ofrece el fabricante. El segundo hecho experimental es que antes de contar los fotones estos son colectados mediante la punta de un fibra óptica. Esta punta puede ser considerada como un filtro de momentos transversales localizados en el espacio de Fourier y puede ser representada mediante una función  $u = u(\vec{k}_\mu^\perp, \vec{k}_{\mu 0}^\perp)$  donde  $\vec{k}_{\mu 0}^\perp$  es la coordenada del centro de la fibra óptica. La función  $u$  podemos representarla con una función gaussiana, donde el ancho está relacionada con el radio de la fibra óptica. Con esto en mente, la función  $F(\cdot)$  será modificada para incluir estas dos consideraciones experimentales. Para calcular el EA tendremos

$$\tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) f(\omega_s) f(\omega_i) u(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp), \quad (2.54)$$

donde debemos considerar que  $\omega_\mu = \omega_\mu(|\vec{k}_\mu|)$ . Debido a que se utiliza una punta de fibra óptica en la Ec. (2.54) sólo consideramos una función  $u(\cdot)$ . La función  $F(\cdot)$  para calcular el EAC es modificada como

$$\tilde{\tilde{F}}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) f(\omega_s) f(\omega_i) u(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp) u(\vec{k}_i^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp), \quad (2.55)$$

en este caso se utilizan dos puntas de fibra óptica para colectar los fotones señal y acompañante, entonces se deben considerar dos funciones  $u(\cdot)$ . Los

cálculos serán hechos en términos de la función  $F(\cdot)$ , ya que esto permite tener resultados generales y para su aplicación particular se utiliza la lista de la Sec. 2.4.5.

### 2.5.1. Espectro angular condicional (EAC)

Tenemos que el espectro angular condicional está dado por [60]

$$R_c = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \langle \Psi | \hat{n}_s(\vec{k}_s) \otimes \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi \rangle, \quad (2.56)$$

donde  $\hat{n}_s = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s)\hat{a}(\vec{k}_s)$  y  $\hat{n}_i = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)\hat{a}(\vec{k}_i)$  son los operadores hermitianos de números de fotones, para el fotón señal y el fotón acompañante respectivamente. Estos últimos operadores están definidos en términos de los operadores no hermitianos de aniquilación  $\hat{a}(\vec{k}_s)$  (para el fotón señal) y  $\hat{a}(\vec{k}_i)$  (para el fotón acompañante) y los operadores no hermitianos de creación  $\hat{a}^\dagger(\vec{k}_s)$  (para el fotón señal) y  $\hat{a}^\dagger(\vec{k}_i)$  (para el fotón acompañante). En el Apéndice B se resumen las propiedades algebraicas de estos operadores y que se utilizan en lo que resta de este capítulo. Calculando primero

$$\begin{aligned} |\Gamma\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \hat{n}_s(\vec{k}_s) \otimes \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \hat{n}_s(\vec{k}_s) \otimes \hat{n}_i(\vec{k}_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i + \\ &+ \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_{s0}, \vec{k}'_i, \vec{k}'_{i0}) \\ &\times \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_s) \otimes \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \hat{a}(\vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i, \end{aligned} \quad (2.57)$$

y como (utilizando Ec. B.1)

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) \hat{a}(\vec{k}_\mu) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_\mu) \cdot |0\rangle_\mu &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) \left\{ \delta^3(\vec{k}_\mu - \vec{k}'_\mu) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) \hat{a}(\vec{k}_\mu) \right\} \cdot |0\rangle_\mu \\ &\text{y por Ec B.6} \\ &= \delta^3(\vec{k}_\mu - \vec{k}'_\mu) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) \cdot |0\rangle_\mu, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde  $\delta^3$  es la función delta de Dirac en tres dimensiones. Continuando con el cálculo, tenemos

$$\begin{aligned}
 |\Gamma\rangle &= 0 + \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k'_i \cdot \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_{s0}, \vec{k}'_i, \vec{k}'_{i0}) \times \\
 &\quad \times \delta^3(\vec{k}_s - \vec{k}'_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \otimes \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}'_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i \\
 &= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_{s0}, \vec{k}_i, \vec{k}_{i0}) \cdot \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \otimes \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

De lo anterior

$$\begin{aligned}
 R_c(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \langle \Psi | \Gamma \rangle \\
 &= \eta \eta^* \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \cdot \tilde{F}^*(\vec{k}''_s, \vec{k}''_{s0}, \vec{k}''_i, \vec{k}''_{i0}) \times \\
 &\quad \times \tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_{s0}, \vec{k}_i, \vec{k}_{i0})_s \langle 0 | \otimes_i \langle 0 | \hat{a}(\vec{k}''_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \otimes \hat{a}(\vec{k}''_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) | 0 \rangle_s \otimes | 0 \rangle_i,
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

y ya que

$$\begin{aligned}
 {}_\mu \langle 0 | \hat{a}(\vec{k}''_\mu) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) | 0 \rangle_\mu &= \delta^3(\vec{k}_\mu - \vec{k}''_\mu) \cdot {}_\mu \langle 0 | 0 \rangle_\mu + {}_\mu \langle 0 | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) \hat{a}(\vec{k}''_\mu) | 0 \rangle_\mu \\
 &= \delta^3(\vec{k}_\mu - \vec{k}''_\mu) + 0,
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 R_c(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k''_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \cdot \tilde{F}^*(\vec{k}''_s, \vec{k}''_{s0}, \vec{k}''_i, \vec{k}''_{i0}) \times \\
 &\quad \times \tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_{s0}, \vec{k}_i, \vec{k}_{i0}) \delta^3(\vec{k}_s - \vec{k}''_s) \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}''_i) \\
 &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_{s0}, \vec{k}_i, \vec{k}_{i0}) \right|^2.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Haciendo el cambio de variables (ver Apéndice C para detalles de la transformación utilizada para el cambio de variables), tenemos

$$\begin{aligned}
 R_c(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \int d^2 k_s^\perp \int dk_s \int d^2 k_i^\perp \int dk_i \cdot J_s J_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, k_s, \vec{k}_{s0}^\perp, k_i, \vec{k}_{i0}^\perp) \right|^2 \\
 &= \int d^2 k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \int d\omega_i \times \\
 &\quad \times k_s J_s k_i J_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp, \omega_i, \vec{k}_{i0}^\perp) \right|^2,
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde hemos hecho las transformaciones

$$(\vec{k}_\mu^\perp, k_{\mu z}) \rightarrow (\vec{k}_\mu^\perp, k_\mu) \rightarrow (\vec{k}_\mu^\perp, \omega_\mu), \quad (2.64)$$

en el Apéndice C se muestran los detalles y se definen los jacobianos ( $J_s$  y  $J_i$ ) correspondiente a las transformaciones de  $k_{\mu z} \rightarrow k_\mu$ .

### 2.5.2. EAC aproximación de bombeo de onda continua

En nuestro caso haremos la consideración de que el bombeo es de onda continua, lo cual significa que el bombeo es monocromático; entonces en la Ec. (2.16) hacemos  $\sigma_p \rightarrow 0$  por lo cual tenemos,

$$|\alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_p)|^2 \approx \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i), \quad (2.65)$$

entonces

$$\begin{aligned} R_c(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \int d^2 k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \times \\ &\times \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp, \omega_p - \omega_s, \vec{k}_{i0}^\perp) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

### 2.5.3. EAC aproximación de resolución perfecta

Las puntas de fibra óptica las podemos considerar como filtros de momento trasversal. El ancho de esos filtros es proporcional al diámetro del núcleo de la fibra óptica. Como primera aproximación podemos modelar estos filtros con una función gaussiana en el espacio de Fourier

$$u(\vec{k}_\mu^\perp, \vec{k}_{\mu 0}^\perp) \propto \exp\left(-r^2 \left[\vec{k}_\mu^\perp - \vec{k}_{\mu 0}^\perp\right]^2\right), \quad (2.67)$$

donde  $r$  es el radio del núcleo de fibra óptica. De lo anterior, podemos considerar que sólo permitimos el paso de una solo momento trasversal; lo cual significa a tener fibras ópticas puntuales. A esta idealización de tener fibras ópticas puntuales ( $r \rightarrow 0$ ) la llamaremos **resolución perfecta**, de lo cual podemos hacer la siguiente aproximación

$$\left|u(\vec{k}_\mu^\perp, \vec{k}_{\mu 0}^\perp)\right|^2 = \delta\left(\vec{k}_\mu^\perp - \vec{k}_{\mu 0}^\perp\right). \quad (2.68)$$

Implementando esta aproximación al calculo del EAC en el caso gaussiano con sección transversal elíptica, entonces de las Ecs. (3.14) y (2.49)

$$\begin{aligned}
R_c^{(0)}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \int d^2 k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \cdot \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \cdot \delta(\vec{k}_s^\perp - \vec{k}_{s0}^\perp) \delta(\vec{k}_i^\perp - \vec{k}_{i0}^\perp) \times \\
&\times \Phi^{(V)}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \\
&= \int d^2 k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \cdot \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \cdot \delta(\vec{k}_s^\perp - \vec{k}_{s0}^\perp) \delta(\vec{k}_i^\perp - \vec{k}_{i0}^\perp) \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[(W_{0x} k_x^\perp)^2 + (W_{0y} k_y^\perp)^2]\right\} \text{sinc}^2\left\{\frac{L\Delta k_{\text{eff}}}{2}\right\} \times \\
&\times |f(\omega_s)|^2 |f(\omega_p - \omega_s)|^2,
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
R_c^{(0)}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) &= \exp\left\{-\frac{1}{4}[(W_{0x} k_{x0}^\perp)^2 + (W_{0y} k_{y0}^\perp)^2]\right\} \times \\
&\times \int d\omega_s \cdot \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \cdot \text{sinc}\left\{\frac{L\Delta k_{\text{eff}}}{2}\right\} |f(\omega_s)|^2 |f(\omega_p - \omega_s)|^2 \\
&= S(\vec{k}_{s0}^\perp + \vec{k}_{i0}^\perp) \times \mathcal{L}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

donde  $\Delta k_{\text{eff}}$  es evaluada en los puntos  $\vec{k}_{s0}^\perp$  y  $\vec{k}_{i0}^\perp$ , además

$$S(\vec{k}_{s0}^\perp + \vec{k}_{i0}^\perp) = \left[ \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{W_x^2 (k_{x0}^\perp)^2 + W_y^2 (k_{y0}^\perp)^2\right\}\right) \right]^2, \tag{2.70}$$

$$\mathcal{L}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) = \int d\omega_s \cdot \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \cdot \text{sinc}^2\left\{\frac{L\Delta k_{\text{eff}}}{2}\right\} |f(\omega_s)|^2 |f(\omega_p - \omega_s)|^2. \tag{2.71}$$

En la última igualdad de la Ec. (2.69) hemos representado a  $R_c^{(0)}(\cdot)$  como el producto de la función  $S(\cdot)$  y la función  $\mathcal{L}(\cdot)$ . La función  $S(\cdot)$  es el espectro angular del bombeo evaluada en el punto  $\vec{k}_{s0}^\perp + \vec{k}_{i0}^\perp$  y como se deduce de la Sección 2.4.6 depende funcionalmente de la propiedades espaciales del bombeo. La función  $\mathcal{L}(\cdot)$  depende funcionalmente de las propiedades del cristal.

Extrapolando el resultando, podemos concluir que para cualquier estructura espacial del bombeo

$$R_c^{(0)}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp) = S(\vec{k}_{s0}^\perp + \vec{k}_{i0}^\perp) \times \mathcal{L}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp). \tag{2.72}$$

## 2.6. Espectro angular (EA)

El espectro angular es igual a [60]

$$\begin{aligned}
 R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \langle \Psi | \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \langle \Psi | \hat{1} \otimes \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

calculando primero

$$\begin{aligned}
 |\Gamma\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \hat{1} \otimes \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \hat{1} \otimes \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \hat{a}(\vec{k}_i) | \Psi \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \hat{1} \otimes \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \hat{a}(\vec{k}_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i + \\
 &+ \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_i \cdot \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \times \\
 &\times \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_s) \otimes \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \hat{a}(\vec{k}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i \\
 &= 0 + \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_i \cdot \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \times \\
 &\times \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_s) \otimes \delta^3(\vec{k}_i - \vec{k}'_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i \\
 &= \eta \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_i \cdot \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \cdot \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_s) \otimes \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i,
 \end{aligned}$$

continuando

$$\begin{aligned}
 R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) &= \langle \Psi | \Gamma \rangle \\
 &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k''_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k''_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_i \cdot \tilde{F}^*(\vec{k}''_s, \vec{k}''_i) \times \\
 &\times \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \cdot {}_s\langle 0 | \otimes {}_i\langle 0 | \hat{a}(\vec{k}''_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_s) \otimes \hat{a}(\vec{k}''_i) \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_i) \cdot |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i \\
 &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k''_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k''_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_i \cdot \tilde{F}^*(\vec{k}''_s, \vec{k}''_i) \times \\
 &\times \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \cdot \delta^3(\vec{k}''_s - \vec{k}'_s) \delta^3(\vec{k}''_i - \vec{k}'_i) \\
 &= |\eta|^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_s \int_{\mathbb{R}^3} d^3k'_i \cdot \left| \tilde{F}(\vec{k}'_s, \vec{k}'_i) \right|^2
 \end{aligned}$$

Realizando las transformaciones

$$(\vec{k}_\mu^\perp, k_{\mu z}) \rightarrow (\vec{k}_\mu^\perp, k_\mu) \rightarrow (\vec{k}_\mu^\perp, \omega_\mu),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) &= \int d^3 k_s \int d^3 k_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i) \right|^2 \\
&= \int d^2 k_s^\perp \int dk_s \int d^2 k_i^\perp \int dk_i J_s J_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, k_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp, k_i) \right|^2 \\
&= \int d^2 k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \int d\omega_i \times \\
&\quad \times \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp, \omega_i) \right|^2,
\end{aligned} \tag{2.74}$$

### 2.6.1. EA aproximación de bombeo de onda continua

Procederemos a considerar que el bombeo es de onda continua, como en el cálculo del EAC. Lo cual significa que el bombeo es monocromático, entonces

$$|\alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_p)|^2 \approx \delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i).$$

Por lo cual

$$R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) = \int d^2 k_s^\perp \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \cdot \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \left| \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp, \omega_p - \omega_s) \right|^2. \tag{2.75}$$

### 2.6.2. EA aproximación de resolución perfecta

Suponiendo resolución perfecta, ver Sec. (2.5.3), tenemos

$$\left| u(\vec{k}_\mu^\perp, \vec{k}_{\mu0}^\perp) \right|^2 = \delta(\vec{k}_\mu^\perp - \vec{k}_{\mu0}^\perp),$$

por lo cual

$$R_s^{(0)}(\vec{k}_{s0}^\perp) = \int d\omega_s \int d^2 k_i^\perp \cdot \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \left| F(\vec{k}_{s0}^\perp, \omega_s, \vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp, \omega_p - \omega_s) \right|^2. \tag{2.76}$$

Utilizando la Ec. (2.69), podemos expresar la última ecuación como sigue

$$R_s^{(0)}(\vec{k}_{s0}^\perp) = \int d^2 k_i^\perp \cdot R_c^{(0)}(\vec{k}_{s0}^\perp, \vec{k}_i^\perp), \tag{2.77}$$

por lo cual, el espectro angular en el punto  $\vec{k}_{s0}^\perp$  se construye a partir de los fotones acompañantes que están en coincidencia con el fotón en  $\vec{k}_{s0}^\perp$  y se van sumando coherentemente.

## 2.7. Intensidad transversal de los fotones individuales y condicionados

Partiremos de la función  $WJA$  dada por la Ec. (2.54) para obtener la transformada de Fourier bidimensional inversa de  $R_s$ . La transformada no puede aplicarse directamente a  $R_s$ , ya que, como en la teoría de óptica de Fourier la luz es representada por una amplitud compleja y su propagación (libre o a través de medios óptico) se hace en ese contexto matemático de variable compleja para que al final, donde queremos conocer como la luz cambió al propagarse se calcula el modulo cuadro de la amplitud compleja resultante después de la propagación.

En un arreglo  $f - f$  tenemos que en un plano focal se coloca la amplitud compleja de la cual queremos calcular su transformada de Fourier bidimensional (en nuestro caso es el EA caracterizado con la función  $WJA$ ) y en el segundo plano focal se obtiene dicha transformada. El plano donde se encuentra la transformada lo llamaremos TF2. En este trabajo, estamos interesados en calcular como la transformada de Fourier bidimensional de EA cambia en planos posteriores a TF2, que llamaremos *intensidad transversal de un sólo fotón*. Definimos el eje  $z'$  como aquel que en 0 se encuentra el plano TF2 (perpendicular al eje  $z'$  y es una traslación lineal del sistema de referencia del laboratorio) y los planos posteriores están etiquetados con valores de  $z' > 0$ . Así, si la transformada en el plano  $z = 0$  es

$$\tilde{f}(\vec{\rho}_s, \omega_s, \vec{\rho}_i, \omega_i) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i)\}, \quad (2.78)$$

entonces para obtener la transformada a una distancia  $z'$  debemos aplicar el teorema de corrimiento, ver Ec. (2.30), agregando una fase a la función  $\tilde{F}(\cdot)$  de la siguiente forma

$$\tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i) \rightarrow \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i) \exp\left(\frac{i|\vec{k}_s^\perp|^2 z'}{2k_s}\right) \exp\left(\frac{i|\vec{k}_i^\perp|^2 z'}{2k_i}\right) \quad (2.79)$$

Recordando que el EA esta dado por

$$\begin{aligned} R_s(\vec{k}_{s0}^\perp) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \langle \Psi | \hat{n}_i(\vec{k}_i) | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k_i \langle \Psi | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i) \hat{a}(\vec{k}_i) | \Psi \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega_i \int_{\mathbb{R}^2} d^2k_i^\perp \langle \Psi | \hat{a}^\dagger(\vec{k}_i^\perp, \omega_i) \hat{a}(\vec{k}_i^\perp, \omega_i) | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.80)$$

entonces  $r_s(\vec{\rho}_{s0})$  denotaremos su *intensidad transversal*. Ahora bien, con toda la teoría desarrollada hasta aquí podemos expresar el estado cuántico,

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_s^\perp \int_0^\infty d\omega_s \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_i^\perp \int_0^\infty d\omega_i \tilde{F}(\vec{k}_s^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_i) \times \\
 &\times \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s^\perp, \omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i^\perp, \omega_i) |\text{vac}\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

En la Ec. (2.80) identificamos a  $|\Gamma\rangle = \hat{a}(\vec{k}_i) |\Psi\rangle$  como la amplitud compleja, ya que en  $|\Psi\rangle$  se encuentra la dependencia en  $\vec{k}_{s0}^\perp$  a través de la Ec. (2.81) y la función  $u$  (filtro espacial). Entonces, obtenemos la transformada de Fourier bidimensional de  $|\Gamma\rangle$ , esto es,  $\int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_{s0}^\perp \exp(i\vec{\rho}_{s0} \vec{k}_{s0}^\perp) |\Gamma\rangle$ , donde  $\exp(i\vec{\rho}_{s0} \vec{k}_{s0}^\perp)$  es el kernel de la transformación. Por lo tanto, realizando está transformación y aplicando la aproximación de cristal delgado y bombeo monocromático llegamos a

$$\begin{aligned}
 r_s^{(0)}(\vec{\rho}_{s0}; z') &= \int_0^\infty d\omega_s \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_i^\perp \times \\
 &\times \left| \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_{s0}^\perp \exp\left(i\vec{\rho}_{s0} \vec{k}_{s0}^\perp\right) \exp\left(\frac{iz'|\vec{k}_{s0}^\perp|^2}{2k_s}\right) F(\vec{k}_{s0}^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_{p0} - \omega_s) \right|^2
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

donde  $r_s^{(0)}(\cdot)$  es la *intensidad transversal de un sólo fotón* en la aproximación de resolución perfecta y bombeo monocromático, y además hemos omitido el jacobiano de la transformación y las constantes sin que esto altere el resultado final. Se observa que para calcular  $r_s^{(0)}(\cdot)$  es una combinación de sumas incoherentes y coherentes.

Luego utilizando el resultado de la Ec. (2.77) podemos expresar  $r_s^{(0)}(\cdot)$  en función de la *intensidad transversal* del EAC o *intensidad transversal de los fotones condicionados*,  $r_c^{(0)}(\cdot)$ , esto es

$$r_s^{(0)}(\vec{\rho}_{s0}; z') = \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_i^\perp r_c^{(0)}(\vec{\rho}_{s0}, \vec{k}_i^\perp) \tag{2.83}$$

con

$$r_c^{(0)}(\vec{\rho}_{s0}, \vec{k}_i^\perp) = \int_0^\infty d\omega_s \times \\ \times \left| \int_{\mathbb{R}^2} d\vec{k}_{s0}^\perp \exp(i\vec{\rho}_{s0} \cdot \vec{k}_{s0}^\perp) \exp\left(\frac{iz'|\vec{k}_{s0}^\perp|^2}{2k_s}\right) F(\vec{k}_{s0}^\perp, \omega_s, \vec{k}_i^\perp, \omega_{p0} - \omega_s) \right|^2, \quad (2.84)$$

donde para un valor fijo de  $\vec{k}_i^\perp$  (fibra óptica fija)  $r_c^{(0)}(\cdot)$  obtenemos los fotones en coincidencia en el espacio de  $\vec{\rho}_{s0}$ . Finalmente, como estamos en la aproximación de resolución perfecta y bombeo monocromático podemos representar a  $r_c^{(0)}(\cdot)$  como el producto de dos funciones, además, si consideramos la aproximación de cristal delgado tenemos

$$r_c^{(0)}(\vec{\rho}_{s0}, \vec{k}_i^\perp) = \left| \mathcal{S}\left(\vec{\rho}_{s0} - \frac{z' \vec{k}_i^\perp}{\vec{k}_s}; z'\right) \right|^2, \quad (2.85)$$

donde

$$\mathcal{S}(\vec{\rho}_{s0} - \vec{\rho}_i; z') = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{k}^\perp \exp(i\vec{\rho}_{s0} \cdot \vec{k}^\perp) \exp\left(\frac{iz'|\vec{k}^\perp|^2}{2k_s}\right) S(\vec{k}^\perp); \quad (2.86)$$

y donde  $\vec{k}^\perp$  es el vector de onda transversal y  $S(\cdot)$  el espectro angular del bombeo Bessel-Gauss de orden 0, aunque también se puede aplicar a un bombeo gaussiano por la generalidad del resultado. En conclusión de esta sección, hemos obtenido las *intensidades transversales de un sólo fotón* (EA) y de los *fotones condicionados* (EAC) con el parámetro  $z'$  de propagación.

## Capítulo 3

# Simulaciones numéricas

El siguiente capítulo mostraremos los resultados de simulaciones numéricas. En el capítulo anterior se mostró que el estado cuántico puede ser representado, al igual que el  $EA$  y el  $EAC$ , como el producto de dos funciones una de las cuales contiene las propiedades del bombeo y la otra contiene las propiedades del cristal. Esto nos lleva a considerar los siguientes hechos experimentales.

1. Parámetros del cristal: las ecuaciones de Sellmeier que describen el índice de refracción, el ángulo de *phasematching* y sus dimensiones.
2. Parámetros del bombeo: longitud de onda, su estructura espacial. Cuando decimos estructura espacial englobamos las propiedades que en particular pueden tener cada tipo de bombeo, que en nuestro trabajo pueden ser un bombeo gaussiano o un bombeo Bessel-Gauss de orden 0.
3. Parámetros de la fibra óptica: la única propiedad relevante para las simulaciones numéricas es el diámetro del núcleo;
4. Filtros espectrales: tomamos directamente del fabricante la función de transmitancia de los filtros utilizados. Para que el filtro trabaje adecuadamente debe incidir normalmente la luz sobre él. En nuestro caso no se cumple completamente esa condición, pero al realizar unas simulaciones numéricas considerando esa situación y no considerándola se llegó a la conclusión que no afecta de manera apreciable; por lo tanto, no la consideramos en el presente trabajo.
5. Espacio de Fourier: la teoría es formulada en el espacio de Fourier (vectores de onda transversales), pero en el laboratorio tenemos acceso

a posiciones transversales de la fibra óptica en el plano focal posterior en un arreglo  $f - f$ ; por lo cual, se debe hacer las transformaciones necesarias para pasar de un espacio a otro.

### 3.1. Valores de las propiedades del bombeo y del cristal

Para fijar ideas daremos una lista de los valores de las variables utilizadas en las simulaciones. Estos valores fueron medidos en el laboratorio o proporcionados por el fabricante.

**Bombeo:** primero fijaremos la longitud de onda del bombeo a

$$\lambda_{p0} = 406.8\text{nm}, \quad (3.1)$$

el ancho de banda según el fabricante es de  $\Delta\lambda_{p0} = 1\text{nm}$ . El haz láser lo generamos con un diodo láser y con una buena precisión se puede considerar un haz gaussiano elíptico (su sección transversal es una elipse). Este haz gaussiano lo manipulamos con diferentes lentes plano-convexas, cada una con una distancia focal  $f_1$  distinta, para obtener haces gaussianos con diferentes características. La propiedad que se cambia es el radio del cinturón del haz, y como tiene una sección elíptica tiene asociado dos radios:  $W_x$  para el eje  $x$  y  $W_y$  para el eje  $y$ . En la tabla 3.1 se muestran los diferentes radios de cinturón obtenidos con las diferentes lentes plano-convexas [68]. Las mediciones de estas propiedades se describen en el Capítulo 4 y en el Apéndice D. Las demás propiedades de un haz gaussiano se pueden obtener con los cinturones y  $\lambda_{p0}$ .

Medición	$W_x$ ( $\mu\text{m}$ )	$W_y$ ( $\mu\text{m}$ )
1) sin lente	182.0	189.0
2) $f_1 = 30\text{cm}$	67.5	64.8
3) $f_1 = 10\text{cm}$	56.4	47.9
4) $f_1 = 6\text{cm}$	38.9	34.7

Cuadro 3.1: En el cinturón del haz gaussiano se la asocian dos radios debido a que la sección transversal es elíptica.  $W_x$  para el eje  $x$  y  $W_y$  para el eje  $y$ . El primer caso es el haz gaussiano que se genera con el diodo láser. En el Apéndice D se encuentra descrito el método utilizado para obtener los radios de los cinturones de los haces gaussianos.

Con un sistema de lentes y un axicón generamos un haz Bessel-Gauss de orden 0. En la Fig. (4.7) donde se muestra el arreglo experimental y en la sección correspondiente se describe en detalle ese arreglo. Este tipo de haces tiene dos propiedades (la descripción de las mediciones de estas propiedades se encuentran en el Capítulo 4 y en el Apéndice D), la primera de ellas es

$$k_{tp} = 0.046 \pm 0.001 \mu\text{m}^{-1}, \quad (3.2)$$

y el cinturón de la función gaussiana que es la envolvente de la función Bessel de orden 0

$$W_0 = 1.85 \pm 0.60 \text{mm}. \quad (3.3)$$

En las simulaciones nos permitiremos variar un poco estos valores con el propósito de observar otros comportamientos.

**Cristal:** el cristal que consideramos es un cristal uniaxial negativo, el Beta Borato de Bario (BBO por sus siglas en inglés de *Beta Barium Borate*). Los índices de refracción ordinario y extraordinario están dados por las ecuaciones de Sellmeier[61]

$$n_o(\lambda) = \sqrt{A_o + \frac{B_o}{\lambda^2 + C_o} + D_o \lambda^2}, \quad (3.4)$$

$$n_e(\lambda) = \sqrt{A_e + \frac{B_e}{\lambda^2 + C_e} + D_e \lambda^2}, \quad (3.5)$$

con  $A_o = 2.7359$ ,  $B_o = 0.01878$ ,  $C_o = 0.01822$ ,  $D_o = 0.01354$ ,  $A_e = 2.3753$ ,

$B_e = 0.01224$ ,  $C_e = 0.01667$ ,  $D_e = 0.01516$  y  $\lambda$  tiene que estar en  $\mu\text{m}$ .

El intervalo de validez para estas ecuaciones es de 226nm a 3.23 $\mu\text{m}$  [61, 72, 73], ver Fig. (3.1 a y b). La longitud es fija e igual a

$$L = 1 \text{mm}. \quad (3.6)$$

El ángulo de *phasematching* o ángulo de corte del cristal es igual a

$$\theta_{\text{PM}} = 29.3^\circ, \quad (3.7)$$

este ángulo es calculado para que la conservación del momento se cumpla, Ec. (2.2), con la condición de  $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$  (caso degenerado).

**Filtros espectrales:** el filtro espectral utilizado está centrado en 800nm y un ancho de banda de 10nm. La transmitancia,  $|f(\cdot)|^2$  del filtro es obtenida del fabricante. En la Fig. (3.1 c) se muestran la gráfica de la transmitancia de este filtro.

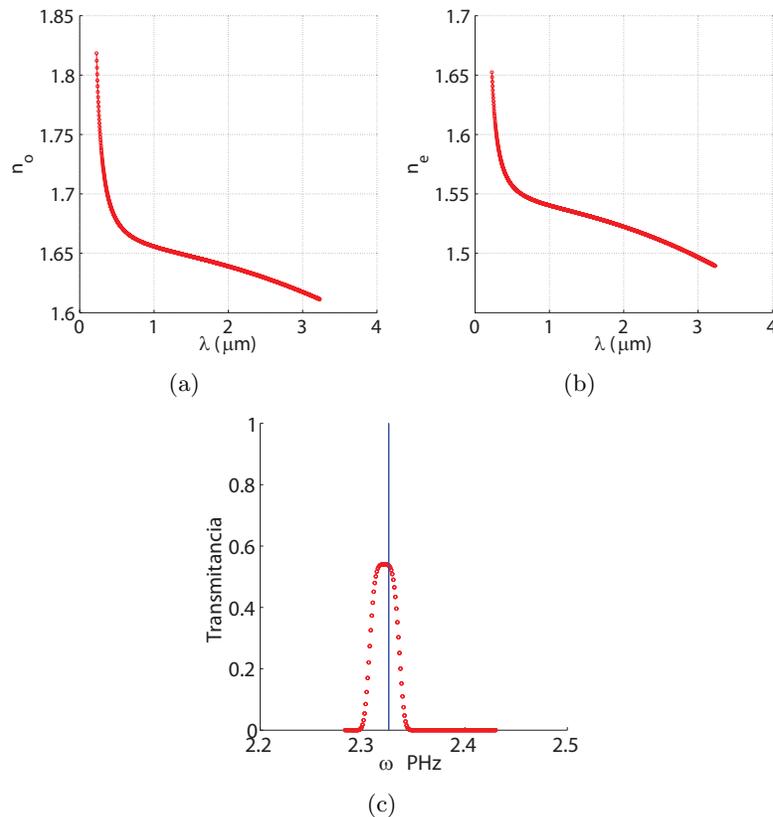


Figura 3.1: (a) Índice de refracción ordinario para el BBO. (b) Índice de refracción extraordinario para el BBO. (c) Filtro de 10nm. Las líneas indican la posición de frecuencia del fotón degenerado  $2\lambda_{p0}$ .

**Espacio de Fourier:** para obtener el EA y el EAC utilizamos un arreglo  $f - f$  con una lente plano-convexa de distancia focal  $f_2$ , ver Secciones 4.3 y 4.6, de tal forma que en un plano focal se coloca el centro del cristal y en el otro plano focal se obtiene la transformada de Fourier bidimensional (a este plano lo llamaremos plano de Fourier). En el plano de Fourier realizamos un escaneo colectando fotones mediante unas puntas de fibra óptica. Este escaneo lo realizamos con unas plati-

nas lineales acopladas en un arreglo  $x - y$  y cada platina tiene un intervalo de 15mm con un paso mínimo de 50nm; entonces podemos hacer un escaneo máximo en una área de  $15 \times 15$ mm. Utilizando el resultado que en cada punto del plano de Fourier  $\vec{\rho} = (x, y)$  tiene asociado un vector de onda transversal mediante la siguiente regla [66]

$$\begin{aligned} \vec{k} &= A(\omega)\vec{\rho} \quad \text{con} \\ A(\omega) &= \frac{\omega}{c f_2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

esta relación es biunívoca solamente si la luz es monocromática. En nuestro caso tenemos luz en un gran intervalo de frecuencias angulares, por lo cual, debemos aplicar la Ec. (4.1) en cada frecuencia angular conforme integremos.

## 3.2. Integración numérica

A continuación describiremos el procedimiento numérico para obtener el EA y el EAC. Lo siguiente se expone en términos de la  $F(\cdot)$  ( $\tilde{F}(\cdot)$  o  $\tilde{\tilde{F}}(\cdot)$ ) para ser los más generales posibles, y cuando se realizaran los cálculos reales se aplica a cada situación a través de lista presentada en la Sec 2.4.5.

### 3.2.1. Procedimiento para obtener el EA en la aproximación de resolución perfecta

Del experimento podemos afirmar que el cálculo del AS en la aproximación de resolución perfecta, ver Secciones 4.4 y 4.6, es suficiente; ya que las dimensiones del EA en comparación con el área del núcleo de la fibra óptica son mucho mayores.

El procedimiento para obtener el espectro angular es el siguiente. De la Ec. (2.76) podemos observar que en cada punto  $(k_{s0x}, k_{s0y})$  debemos realizar tres integraciones:  $\int d\omega_s$  y  $\int d^2 k_i^\perp$ .

Primero generamos tres mallas de puntos:  $E_{AS} = \{(x_{sm}, x_{sm'}) | m \in \hat{n}_1, m' \in \hat{n}_2\}$ ,  $E_{WS} = \{\omega_{sm} | m \in \hat{n}_3\}$  y  $E_{KI} = \{(k_{ixl}, k_{iy'l'}) | l \in \hat{n}_4, l' \in \hat{n}_5\}$ ; donde  $\hat{n}_\mu = \{1, 2, \dots, n_\mu\}$  con  $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ . La malla  $E_{AS}$  son la coordenadas transversales en el plano de Fourier del centro de la fibra óptica (OF1 en la Fig. (4.2) de la Sec. 4.3) y que están asociadas al fotón señal. Estas coordenadas cubren un área de  $A_I = 15\text{mm} \times 15\text{mm}$ , que es el intervalo de recorrido de las platinas lineales motorizadas utilizadas en el experimento. La distancia, sobre el eje  $x$  o el eje  $y$ , entre puntos vecinos la nombraremos

$\Delta d$ . El valor de  $\Delta d$  es determinado para garantizar la convergencia de la integración numérica. La convergencia la determinamos cuando el EA no cambia significativamente al ir aumentando el número de puntos de integración, esto es, comparamos la suma total de los elementos de matriz del EA normalizada, entonces al ir incrementando los puntos de integración y vemos que no cambia significativamente esta suma total, decimos que converge nuestra integral. La malla  $E_{\text{WS}}$  son las frecuencias angulares del fotón señal. El intervalo de valores está centrado en la frecuencia angular 810nm y tiene un ancho de 30 nm cuando utilizamos el filtro espectral de 10nm y un ancho de 80nm cuando aplicamos el filtro espectral de 80nm. La distancia entre puntos, en ambos casos, es de  $\Delta\omega = 1\text{PHz}$ ; el cual, es un valor para que la integración numérica no cambie significativamente. La malla  $E_{\text{KI}}$  son los vectores de onda transversales asociados al fotón acompañante y es el espacio donde se realiza la integración  $\int d^2k_i^\perp$ . Esta malla está dada por  $E_{\text{KI}} = A(\omega_0) E_{\text{AS}}$ , donde  $A(\cdot)$  está dada por la Ec. (4.1) y  $\omega_0$  es la frecuencia angular de los fotones degenerados. La distancia entre puntos vecinos sobre el eje  $k_{xi}$  y el eje  $k_{yi}$  la nombramos como  $\Delta k_i$  y es igual a  $\frac{1}{N} A(\omega_0) \Delta d$ , donde  $N$  es un entero; y con esto podemos hacer una malla con más puntos (más refinamiento). Con  $N = 2$  garantizamos que el EA no cambia. El arreglo experimental fue diseñado para que el anillo de *SPDC* esté dentro  $A_I$  y por lo tanto, las mallas  $E_{\text{KI}}$  y  $E_{\text{AS}}$  están bien definidas.

Para obtener el valor del EA en cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$  de la malla  $E_{\text{AS}}$  primero debemos calcular en cada punto  $\omega_{sq}$  de la malla  $E_{\text{WS}}$  la suma

$$h(\omega_{sq}) = \sum_l \sum_{l'} \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \left| F(k_{sxm}, k_{syt}, \omega_{sq}, k_{ixl}, k_{iy l'}, \omega_{p0} - \omega_{sq}) \right|^2, \quad (3.8)$$

donde  $\dot{k}_s$ ,  $J_s$ ,  $\dot{k}_i$  y  $J_i$  también dependen de las variables  $k_{sxm}$ ,  $k_{syt}$ ,  $\omega_{sq}$ ,  $k_{ixl}$  y  $k_{iy l'}$ ; además, tenemos que  $k_{sxm} = A(\omega_{sq}) x_{s0m}$  y  $k_{syt} = A(\omega_{sq}) y_{s0m'}$ . Lo último es consecuencia de que no tenemos una sola frecuencia angular, entonces la posición transversal tiene asociado un vector de onda transversal diferente para cada frecuencia angular  $\omega_{sq}$ . Luego teniendo para cada frecuencia angular su respectiva  $h(\cdot)$ , calculamos

$$R_s^{(0)}(x_{s0m}, y_{s0m'}) = \sum_q h(\omega_{sq}), \quad (3.9)$$

que es el espectro angular. Finalmente podemos asociar a cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$

un vector de onda transversal mediante la siguiente formula (utilizando la frecuencia angular de los fotones degenerados)

$$(k_{sx0m}, k_{sy0m'}) = A(\omega_0) (x_{s0m}, y_{s0m'}), \quad (3.10)$$

y así tener el EA en función de vectores de onda transversales.

### 3.2.2. Procedimiento para obtener el EAC en la aproximación de resolución perfecta

Como anteriormente se dijo, el EAC en la aproximación de resolución perfecta es válida en aquellos casos donde las dimensiones de la fibra óptica son despreciables y esta dado por la Ec. (2.69).

Para realizar el calculo debemos fijar el vector de onda transversal del fotón acompañante, esto es el punto  $(k_{ix0}, k_{iy0})$ . El procedimiento para elegir ese punto será descrito en el Capítulo 4. Luego definimos dos mallas de  $E_{CAS} = \{(x_{sm}, y_{sm'}) | m \in \hat{n}_1, m' \in \hat{n}_2\}$  y  $E_{WS} = \{\omega_{sm} | m \in \hat{n}_3\}$ , donde  $\hat{n}_\mu = \{1, 2, \dots, n_\mu\}$  con  $\mu = 1, 2, 3$ . La malla  $E_{CAS}$  son la coordenadas transversales en el plano de Fourier del centro de la fibra óptica (OF1 en la Fig. (4.2) de la Sec. 4.3) y que están asociadas al fotón señal. Estas coordenadas cubren el área,  $A'_l$ , necesaria para contener el EAC y es del orden de  $2\text{mm} \times 2\text{mm}$  (ver Figuras (4.5) y 4.9). La distancia, sobre el eje  $x$  o el eje  $y$ , entre puntos vecinos la nombraremos  $\Delta d'$ . El valor de  $\Delta d'$  es determinado para garantizar la convergencia de la integración numérica y es una fracción del diámetro de la fibra óptica. La convergencia la determinamos a partir del número de puntos tal que el EAC no cambie significativamente. La malla  $E_{WS}$  son las frecuencias angulares del fotón señal. El intervalo de valores esta centrado en la frecuencia angular  $810\text{nm}$  y tiene un ancho de  $30\text{ nm}$  cuando utilizamos el filtro espectral de  $10\text{nm}$ . La distancia entre puntos, en ambos casos, es de  $\Delta\omega = 1\text{PHz}$ ; el cual, es un valor para el que la integración numérica no cambia significativamente.

Para obtener el valor del EAC en cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$  de la malla  $E_{AS}$  primero debemos calcular en cada punto  $\omega_{sq}$  de la malla  $E_{WS}$  el valor

$$h'(\omega_{sq}) = S(k_{sxm} + k_{ix0}, k_{syt} + k_{iy0}) \times \mathcal{L}(k_{sxm}, k_{syt}, k_{ix0}, k_{iy0}), \quad (3.11)$$

donde tenemos que  $k_{sxm} = A(\omega_{sq}) x_{s0m}$  y  $k_{syt} = A(\omega_{sq}) y_{s0m'}$ . Lo último es consecuencia de que no tenemos una sola frecuencia angular, entonces

la posición transversal tiene asociado un vector de onda transversal diferente para cada frecuencia angular  $\omega_{sq}$ , y además, se debe incluir la función  $S(\cdot)$  dentro de la integración numérica. Luego teniendo para cada frecuencia angular su respectiva  $h'(\cdot)$ , calculamos

$$R_c^{(0)}(x_{s0m}, y_{s0m'}) = \sum_q h'(\omega_{sq}), \quad (3.12)$$

que es el espectro angular condicional. Finalmente podemos asociar a cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$  un vector de onda transversal mediante la Ec. (3.10).

### EAC con resolución perfecta y caso degenerado

A partir de la Ec. (3.13) podemos hacer otra aproximación al calculo numérico, el cual consiste en considerar solamente el caso degenerado. Esto es, sólo considerar la frecuencia angular de los fotones degenerados,  $\omega_0$ , entonces no hay que realizar la suma en frecuencias angular sino el siguiente calculo

$$R_c^{(0)}(x_{s0m}, y_{s0m'}) = h'(\omega_0), \quad (3.13)$$

donde  $h'$  esta dada por la Ec. (3.11). En lo que sigue del escrito haremos referencia a este calculo como el EAC *con resolución perfecta y caso degenerado*.

### 3.2.3. Procedimiento para obtener el EAC

Al realizar el experimento para obtener el EAC se observa que las dimensiones de la fibra óptica se tiene que tomar en cuenta, ya que la zona de los fotones señal que están en coincidencia con los fotón acompañante es del orden de magnitud de las dimensiones de la fibra óptica.

La Ec. (3.14) es la que vamos a utilizar para calcular el EAC. Ahora bien, como en el segundo caso (Sec. 3.2.2) construimos las siguientes mallas de puntos:  $E_{CAS} = \{(x_{sm}, y_{sm'}) | m \in \hat{n}_1, m' \in \hat{n}_2\}$  y  $E_{WS} = \{\omega_{sm} | m \in \hat{n}_3\}$ , donde  $\hat{n}_\mu = \{1, 2, \dots, n_\mu\}$  con  $\mu = 1, 2, 3$ . Las mallas  $E_{CAS}$  y  $E_{WS}$  son construidas con los mismos criterios presentados en la Sec. 3.2.2. Para realizar el calculo debemos fijar el vector de onda transversal del fotón acompañante, esto es el punto  $(k_{ix0}, k_{iy0})$ .

En este caso debemos considerar las dimensiones de la fibra óptica utilizada, tanto para el fotón señal como para el fotón acompañante. Cuando

se realizan las integraciones numéricas  $\int d^2k_i^\perp$  y  $\int d^2k_s^\perp$ , las fibras ópticas son consideradas en la función  $\tilde{F}(\cdot)$ , dada por la Ec. (2.55) a través de los filtros espaciales  $u(\vec{k}_s^\perp, \vec{k}_{s0}^\perp)$  y  $u(\vec{k}_i^\perp, \vec{k}_{i0}^\perp)$ . De lo anterior debemos considerar dos hechos. El primero es que debemos definir una malla,  $E_{(m,m')}$ , alrededor de cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$  donde estamos calculando EAC para considerar la integración numérica de  $\int d^2k_s^\perp$ . Lo segundo es que debemos construir la malla  $E'_{\text{KI}} = \{(k_{ixl}, k_{iy l'}) | l \in \hat{n}_4, l' \in \hat{n}_5\}$  (donde  $\hat{n}_\mu = \{1, 2, \dots, n_\mu\}$  con  $\mu = 4, 5$ ) para considerar la integración numérica  $\int d^2k_i^\perp$ . La malla  $E'_{\text{KI}}$  cubre un área de  $2\text{mm} \times 2\text{mm}$  y centrada en el punto  $(k_{ix0}, k_{iy0})$ . La distancia entre los puntos vecinos esta dado por  $\Delta k'_i = \frac{1}{N} A(\omega_0) \Delta d'$ , donde  $N$  es un entero; y con esto podemos hacer una malla con más puntos (con más refinamiento).

El calculo consiste que en cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$  de la malla  $E_{\text{CAS}}$  realizamos la integración numérica respecto a las frecuencias angulares. En cada punto  $\omega_{sq}$  de la malla  $E_{\text{WS}}$  construimos la malla  $E_{(m,m')} = \{(k_{sxm}, k_{iy m'}) | m \in \hat{n}_6, m' \in \hat{n}_7\}$  (donde  $\hat{n}_\mu = \{1, 2, \dots, n_\mu\}$  con  $\mu = 6, 7$ ). La malla  $E_{(m,m')}$  es construida de tal forma que cubra un área de  $2\text{mm} \times 2\text{mm}$  y centrado en el punto  $(k_{sx0m}, k_{iy0m'}) = A(\omega_{sq}) (x_{s0m}, y_{s0m'})$ ; la distancia entre puntos vecinos sobre los ejes  $x$  y  $y$  esta dado por  $\Delta d'' = \frac{1}{N'} \Delta d'$  (donde  $N'$  es un entero y nos permite hacer un refinamiento de la malla respecto a la malla  $E_{\text{CAS}}$ ). Entonces calculamos la suma

$$h''(\omega_{sq}) = \sum_m \sum_{m'} \sum_l \sum_{l'} \dot{k}_s J_s \dot{k}_i J_i \times \\ \times \left| \tilde{F}(k_{sxm}, k_{iy m'}, \omega_{sq}, k_{sx0m}, k_{sy0m'}, k_{ixl}, k_{iy l'}, \omega_{p0} - \omega_{sq}, k_{ix0}, k_{iy0}) \right|^2. \quad (3.14)$$

donde  $\dot{k}_s$ ,  $J_s$ ,  $\dot{k}_i$  y  $J_i$  también dependen de las variables  $k_{sxm}$ ,  $k_{iy m'}$ ,  $\omega_{sq}$ ,  $k_{sx0m}$ ,  $k_{sy0m'}$ ,  $k_{ixl}$ ,  $k_{iy l'}$  y  $k_{ix0}$ ,  $k_{iy0}$ .

Luego teniendo para cada frecuencia angular su respectiva  $h''(\cdot)$ , calculamos

$$R_c(x_{s0m}, y_{s0m'}) = \sum_q h''(\omega_{sq}), \quad (3.15)$$

que es el espectro angular condicional del *SPDC*. Finalmente podemos asociar a cada punto  $(x_{s0m}, y_{s0m'})$  un vector de onda transversal mediante la Ec. (3.10).

### 3.3. Resultados de la simulaciones

A continuación se muestran los resultados de la simulaciones numéricas para obtener el EA y EAC en los dos casos que se estudian en este trabajo: el caso con bombeo gaussiano y el caso con bombeo Bessel-Gauss. También, se muestra el caso de la transformada de Fourier del EAC en el caso Bessel-Gauss.

#### 3.3.1. Caso con bombeo gaussiano

Los resultados de las simulaciones numéricas se resumen en la Fig. (3.2) tanto para el EA como para el EAC.

El EA su muestra como una gráfica en líneas de contorno en la Fig. (3.2) y se muestran dos casos. El primer caso es el menos enfocado. Los radios de los cinturones de los haces gaussianos corresponden al primer renglón de la Tabla (3.1), y este caso se muestra en la Fig. (3.2 a). El segundo caso es el más enfocado. Los cinturones correspondientes se muestran el último renglón de la Tabla (3.1) y gráfica se muestra en la Fig. (3.2 b).

Se observa de las gráficas lo siguiente:

- el EA tiene la forma característica de anillo. Anillo de *SPDC*. El ancho del anillo es determinado por el ancho de banda del filtro pasabanda y que las direcciones de propagaciones de los fotones emitidos están contenidas en un cono de base circular. En este caso el filtro espectral utilizado fue con el ancho de banda de 10nm;
- se va creando una asimetría azimutal del anillo conforme se va enfocado el haz gaussiano. Con respecto a la línea  $k_{sx0} = 0$  es simétrico el anillo, pero con respecto a la línea  $k_{sy0} = 0$  pierde simetría el anillo. El anillo se va haciendo más angosto en la zona  $k_{sy0} < 0$ , lo cual significa que las cuentas por unidad de tiempo van aumentando; y el anillo se hace más ancho en la zona  $k_{sy0} > 0$ , lo cual significa que las cuentas por unidad de tiempo disminuyen. Esta asimetría se debe al efecto de walk-off, que se explicará con más detalle al final de esta sección.

Por otro lado, en la primera columna de la Fig. (4.4) se muestran las simulaciones correspondientes a todos los casos de la Tabla (3.1) y donde se observa mejor la evolución de un anillo simétrico a un anillo asimétrico conforme se va enfocando.

El EAC también se muestra en la Fig (3.2), yuxtapuesto con el EA, para los dos casos de enfocamiento del haz gaussiano. Para ambos casos

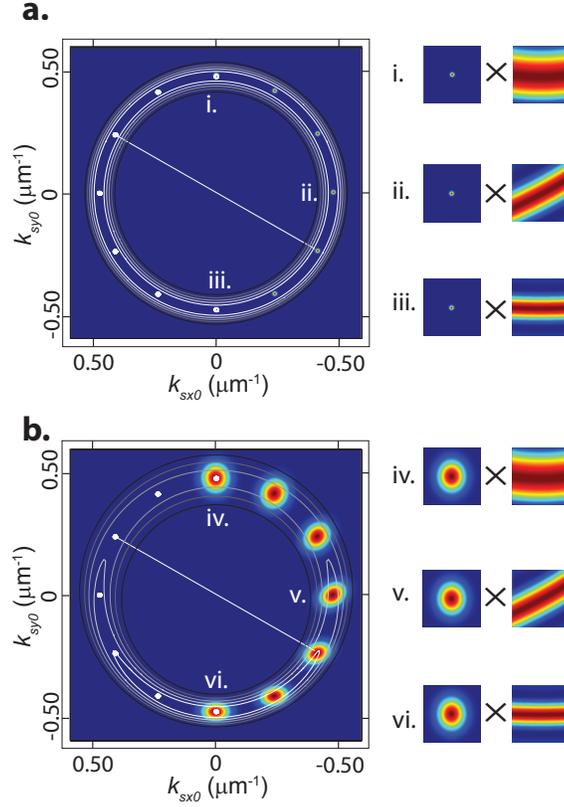


Figura 3.2: Resumen de los resultados de la simulaciones numéricas del EA y del EAC de la pareja de fotones. (a) caso menos enfocado. (b) caso más enfocado.

se muestran dos aspectos del EAC. El primero de ellos es la fibra óptica fija (fotón acompañante), y el segundo es la zona de los fotones señal que están en coincidencia con el fotón acompañante. La localización de la fibra óptica fija se muestra con un punto de color blanco y que se encuentra en la zona  $k_{sx0} > 0$ . Los fotones señal en coincidencia con el fotón acompañante deben cumplir conservación de momento lineal y con una línea de color blanca se muestra en que zona del anillo se encuentran respecto al punto de color blanco; esto es, los fotones en coincidencia son aquellos que se encuentran diametralmente opuestos a donde se coloque la fibra óptica fija. La distribución de los fotones señal es el espectro angular condicional.

Para el caso menos enfocado, Fig. (3.2 a) colocamos en varios puntos la fibra óptica fija (fotón acompañante) y diametralmente opuestos se encuen-

tran los fotones señal en coincidencia, el EAC. Son siete posiciones para la fibra óptica. En la Fig. (3.2 a) etiquetamos tres casos del EAC con i, ii, y iii, y a la derecha se muestra su descomposición con las funciones  $S(\cdot)$  y  $\mathcal{L}(\cdot)$ . Cada renglón esta etiquetada con el EAC correspondiente en la Fig. (3.2 a) y tienen el formato  $S(\cdot) \times \mathcal{L}(\cdot)$ , o sea la primera gráfica es la parte transversal y la segunda la parte longitudinal. Esta descomposición se realizó con el cálculo del EAC en la aproximación de resolución perfecta y caso degenerado, ver Ec. (2.72).

Para el caso más enfocado, Fig. (3.2 b) colocamos en varios puntos la fibra óptica fija (fotón acompañante) y diametralmente opuestos se encuentran los fotones señal en coincidencia, el EAC. Son siete posiciones para la fibra óptica. En la Fig. (3.2 a) etiquetamos tres casos del EAC con i, ii, y iii, y a la derecha se muestra su descomposición con las funciones  $S(\cdot)$  y  $\mathcal{L}(\cdot)$ . Cada renglón esta etiquetada con el EAC correspondiente en la Fig. (3.2 a) y tienen el formato  $S(\cdot) \times \mathcal{L}(\cdot)$ , o sea la primera gráfica es la parte transversal y la segunda la parte longitudinal. Esta descomposición se realizó con el calculo del EAC en la aproximación de resolución perfecta.

De las gráficas se puede decir lo siguiente:

- La parte transversal del EAC no cambia de un punto a otro a cinturón del haz fijo. La parte longitudinal si va cambiando de punto a punto a cinturón del haz fijo.
- Para el caso menos enfocada el EAC que determinado por el la parte transversal (ver Ec. (2.72)),  $S(\cdot)$ , ya que la parte longitudinal puede considerarse constante. Para ver esto, podemos hacer un corte vertical (haciendo  $k_{sx0} = \text{cte.}$  y que pase por el punto de máximas cuentas por unidad de tiempo) a la transversal del EAC y este mismo corte lo hacemos a la parte longitudinal. Calculando el ancho de la parte transversal  $\delta k_S$  y el ancho de la parte longitudinal  $\delta k_{\mathcal{L}}$  y comparando los resultados veremos que  $\delta k_S < \delta k_{\mathcal{L}}$ , por lo cual, al hacer el producto la parte transversal sobrevive. Este análisis nos será útil en establecer un criterio para decidir si podemos utilizar la aproximación de cristal delgado en la Sec. 4.5.
- Para el caso más enfocada el EAC esta determinado por las dos partes:  $S(\cdot)$  y  $\mathcal{L}(\cdot)$ . Haciendo el corte vertical y calculando los anchos como en el *item* anterior tenemos  $k_S \geq \delta k_{\mathcal{L}}$ , por lo cual, al hacer el producto la parte transversal es truncada por la parte longitudinal. Por la asimetría del anillo de *SPDC* vemos que la diferencia de los anchos se ve acentuada en la parte más angosta de este.

Por otro lado, en la primera columna de la Fig. (4.5) se muestran las simulaciones numéricas correspondientes a todos los casos de la Tabla (3.1), utilizando todas la frecuencias y las dimensiones de las fibras ópticas.

### Efecto de walk-off

La asimetría del anillo de *SPDC* es una consecuencia del *walk-off* y del grado de enfocamiento del haz gaussiano. En la Fig. (3.3) se muestra la geometría de la pareja de fotones emitidos por el proceso de *SPDC* en el cristal *BBO* (que es un cristal negativo). El vector de onda de bombeo es  $\vec{k}_p$ , el vector de Poynting es  $\vec{S}$  (la dirección donde de propaga la energía) y el vector  $\vec{C}$  indica la dirección del eje óptico del cristal uniaxial. La separación entre  $\vec{k}_p$  y  $\vec{S}$  es cuantificado con el ángulo de *walk-off*,  $\rho_0$ . En el Apéndice E se muestra en detalle el cálculo del ángulo de *walk-off*.

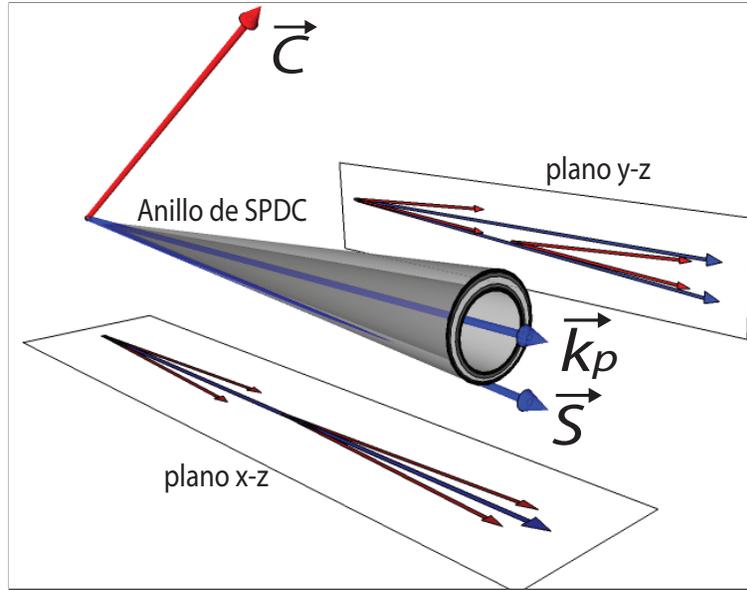


Figura 3.3: Geometría de la generación de la pareja de fotones mediante el proceso de *SPDC* y su relación con algunas de la propiedades del haz de bombeo y del cristal.

En la figura se muestran varias contribuciones a la emisión de parejas de fotones que se emiten en dos diferentes planos, estos planos son las proyecciones sobre los planos  $x - z$  y  $y - z$ . Los fotones son representados con rayos y consideramos algunos que surgen a lo largo del vector de Poynting.

Observando los rayos en el plano  $y - z$  se ve que los que se encuentran en la parte superior se separan más que los que surgen de la parte inferior; en cambio, los rayos en el plano  $x - z$  se separan en una misma cantidad. Esto da paso a la asimetría del anillo de *SPDC*. Esta descripción es considerando que el bombeo tiene asociado una sola dirección de propagación. Pero un haz gaussiano tiene un ancho horizontal  $W_x$  y un ancho vertical  $W_y$ , lo cual significa que los vectores de onda del bombeo forman un cono de base elíptica y que  $\vec{k}_p$  está en el centro. Si esos anchos son considerablemente más grandes que el desplazamiento lateral ( $L \tan(\rho_0)$ ) de los rayos,  $W_x, W_y \geq L \tan(\rho_0)$  ( $L$  es la longitud del cristal) la asimetría del anillo de *SPDC* no se observa; en caso contrario, si  $W_x, W_y \leq L \tan(\rho_0)$  la asimetría se observa. Claramente el último caso corresponde a un haz enfocado. Esta asimetría del anillo de *SPDC* mediada por el enfocamiento del haz y el vector de Poynting da origen a los llamados *hot-spots* y observados en la distribución del flujo espacial de los fotones generados en el proceso de *SPDC* del tipo-II y reportados en el trabajo de [74].

### 3.3.2. Caso con bombeo Bessel-Gauss de orden 0

Las siguientes simulaciones numéricas tienen el objetivo de analizar si la distribución espacial del fotón señal (fotón anunciado) en coincidencia con el fotón acompañante hereda la propiedad de adifraccionalidad del bombeo, el cual es un Bessel-Gauss de orden 0; y con esto asegurarnos si el experimento es viable. La diferencia con estas simulaciones numéricas con respecto a las anteriores es que no busco la concordancia con los datos experimentales, pero si ver cuantitativamente el comportamiento del EA, el EAC y la transformada de Fourier del EAC del *SPDC*.

En la Fig. (3.4) se muestra el resumen del comportamiento del EA y EAC del *SPDC*. Los parámetros son: el ángulo de *phasematching* es de  $29.3^\circ$ , el cinturón del haz gaussiano que es la envolvente de función Bessel, ver Ec. (2.9), es igual a  $W_0 = 500 \mu\text{m}$ , la longitud del cristal es  $L = 1 \text{mm}$  y el  $k_{tp}$  le damos dos valores, el primero es  $k_{tp} = 0.05 \mu\text{m}^{-1}$  para la Fig. (3.4 a) y el segundo es  $k_{tp} = 0.20 \mu\text{m}^{-1}$  para la Fig. (3.4 b).

El EA se calculó con el procedimiento descrito en la Sec 3.2.1 y se muestran los resultados con curvas de contorno en las Figuras (3.4 a y b) para dos valores de  $k_{tp}$  antes mencionados. En esas mismas gráficas se muestra en el recuadro superior derecho el mismo EA pero en una gráfica de *densidad*, donde el rojo indica máximas cuentas por unidad de tiempo y azul cero cuentas por unidad de tiempo. De las simulaciones numéricas de los EA, y donde las mostradas en la Fig. (3.4) son dos casos particulares, podemos

decir.

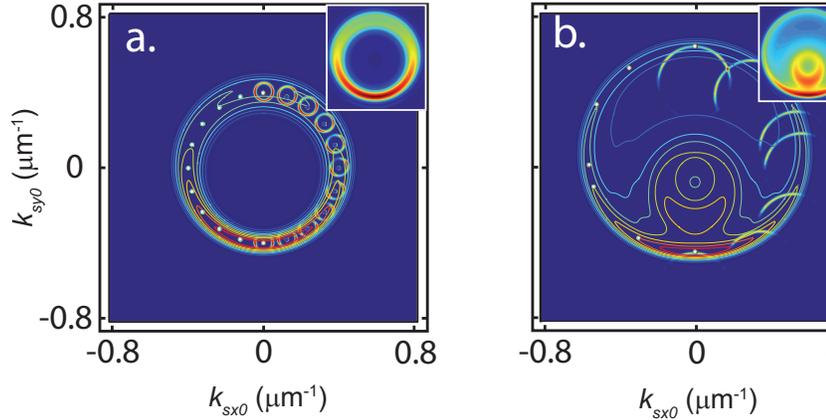


Figura 3.4: Espectro angular y espectro angular condicional para la pareja de fotones mediante el proceso de *SPDC* con un bombeo con estructura espacial Bessel-Gauss de orden 0.

- Para  $k_{tp} = 0 \mu\text{m}^{-1}$  el cálculo se reduce al caso de un bombeo gaussiano.
- El comportamiento del EA al aumentar el valor de  $k_{tp}$  partiendo de cero, a continuación se describe. El EA inicia con una geometría parecida al caso menos enfocado con una haz gaussiano, o sea un anillo simétrico. Luego, conforme va aumentado el grado de enfocamiento se vuelve un anillo asimétrico similar al caso más enfocado de un haz gaussiano, por ejemplo ver Fig. (3.4 a). Al ir aumentando el valor de  $k_{tp}$  va surgiendo otro anillo que es tangencial interior al primero, de tal forma que a la mitad de la parte más ancha del anillo se ve un zona semicircular donde las cuentas por unidad de tiempo bajan a cero. Conforme se sigue aumentando la  $k_{tp}$  el segundo anillo va disminuyendo su diámetro hasta que se colapsa en un círculo, prueba de ello se puede ver en la Fig. (3.4 b) donde el anillo tangencial interior tiene un diámetro menor al primer anillo.
- El EA se va expandiendo conforme aumenta  $k_{tp}$ .

El EAC se obtuvo con el procedimiento de resolución perfecta y caso degenerado. Construyendo las gráficas como en la Sec. 3.3.1 primero fijamos una fibra óptica, fotón acompañante, y la etiquetamos con un punto de color

blanco en las Figs. (3.4 a y b). Diametralmente opuestos se encuentran los fotones señal en coincidencia con los primeros, el EAC. Para el caso de la Fig. (3.4 a) obtenemos el EAC en 11 puntos y en 7 puntos para el caso de la Fig. (3.4 b). De las gráficas podemos afirmar lo siguiente:

- Recordando que de la teoría el EAC puede verse como el producto de la parte transversal,  $S(\cdot)$ , por la parte longitudinal  $\mathcal{L}(\cdot)$ ; además, cuando se puede aplicar la aproximación de cristal delgado tenemos que el EAC del *SPDC* se mapea del EA del bombeo. De la Fig. (3.4 a) podemos ver que hay puntos donde el EAC tiene la geometría anular (como el EA del bombeo); pero hay otros donde la parte longitudinal entra en juego y trunca a la parte transversal. De la Fig. (3.4 b) se observa que en todos los casos la parte longitudinal trunca a la parte transversal, lo cual significa que la geometría del EAC del *SPDC* no es anular. Por lo tanto, cuando aumenta el  $k_{tp}$  el EAC que determinado la parte longitudinal y la parte transversal simultáneamente.
- Si  $k_{tp}$  es lo suficientemente pequeño entonces todos los puntos tendrán un EAC de forma anular. Pero, hay que recordar que si es muy cercano a 0, entonces la forma del EAC se va aproximar a la forma del EAC del caso gaussiano, esto es, el anillo del EAC se colapsa a un círculo. En este trabajo, el valor de  $k_{tp}$  diferente de cero pero que a la vez el EAC tenga una forma anular y que fuera accesible experimentalmente fue el dado por la Ec. (3.3).
- Cabe la observación que la forma del EAC en la parte inferior de la Fig. (3.4 a) tiene la forma de un *paréntesis*, esto es, tiene la forma del espectro angular de un haz Mathieu-Gauss de orden 1 [55]. Lo cual, puede dar paso a efectos interesantes.

### 3.3.3. Intensidad transversal condicional de un fotón

Recordamos que la transformada de Fourier bidimensional de un haz Bessel-Gauss de orden 0 (bombeo) tiene forma de un anillo (espectro angular). Ahora bien, la transformada de Fourier inversa del espectro angular es nuevamente el haz Bessel-Gauss de orden 0.

Ahora bien si el EAC (la distribución de fotones señal en el espacio de momentos lineales transversales en coincidencia con el fotón acompañante) tiene forma anular, entonces al calcular su transformada de Fourier inversa obtendremos su distribución espacial en función de las posiciones transversales de la fibra óptica, y que llamaremos *intensidad transversal de fotones*

*condicionados*, ITFC. Esta distribución debe tener una forma similar a la sección transversal del haz Bessel-Gauss de orden 0. Hay que notar que debemos obtener la transformada inversa de EAC,  $|\mathcal{F}(\cdot)|^2$ , por lo cual, se conserva fija la fibra óptica que colecta al fotón acompañante en el espacio de momentos transversales. Al plano de Fourier de la primera transformada de Fourier bidimensional le llamaremos TF1, como en la Fig. (4.7); y al plano de Fourier de la segunda transformada de Fourier bidimensional le llamaremos TF2 como en la Fig. (4.7).

Primero debemos elegir un EAC con forma anular. De la Fig. (3.4 a) podemos observar que el EAC que nos conviene es el asociado a la fibra óptica fija (fotón acompañante) de coordenadas  $(k_{ix0}, k_{iy0}) = (0, -0.46)\mu\text{m}^{-1}$ , entonces el EAC es un anillo y centrado en  $(k_{sx0}, k_{sy0}) = (0, 0.46)\mu\text{m}^{-1}$ . En la Fig. (3.5 a) se muestra la gráfica del EAC elegido. El calculo es realizado en la aproximación de resolución perfecta y caso degenerado.

Lo siguiente es obtener la transformada de Fourier bidimensional del EAC en el plano TF2, la ITFC, utilizando la Ec. (2.84). Después, para comprobar si la ITFC es adifraccional debemos calcularla en planos posteriores a TF2. En la Fig. (3.5) se muestran las coordenadas de la propagación de la ITFC, el eje  $z$ , de tal forma que el plano TF1 se encuentra en  $z = 0$  y los planos posteriores cumplen con  $z > 0$ . El calculo de la ITFC en  $z = 0$  se muestra en la Fig. (3.5 a), la cual tiene la estructura espacial de un haz Bessel-Gauss con un lóbulo central (de diámetro de  $60\mu\text{m}$ ) y anillos concéntricos. A continuación se realiza el calculo de la ITFC en diferentes puntos con conforme se propaga. El calculo se realiza a 2, 4 y 6cm y se muestran en las Figs. (3.5 b, c, d, e) respectivamente.

Por otro lado, también realizamos el calculo de la intensidad transversal del EA con el propósito de comparar su propagación con la ITFC. Para esto utilizamos la Ec. (2.82). El EA de la cual calculamos su transformada de Fourier bidimensional inversa es la mostrada en la Fig. (3.4 a). El calculo numérico de esta transformada en el plano  $z = 0$  se muestra en la Fig. (3.5 f), y después de propagarse 5cm de muestra en la Fig. (3.5 g). En plano  $z = 0$  la intensidad transversal del EA tiene la forma de un haz Bessel-Gauss de orden 0, ya que, también tiene la forma de un anillo; pero, conforme se propaga esa estructura se va adquiriendo una estructura de anillo. Por lo tanto:

- La adifraccionalidad de la ITFC se observa cualitativamente, ya que, el diámetro del lóbulo central se conserva en comparación con la intensidad transversal del EA (un sólo fotón).
- La intensidad transversal del EA no es adifraccional ya que en planos

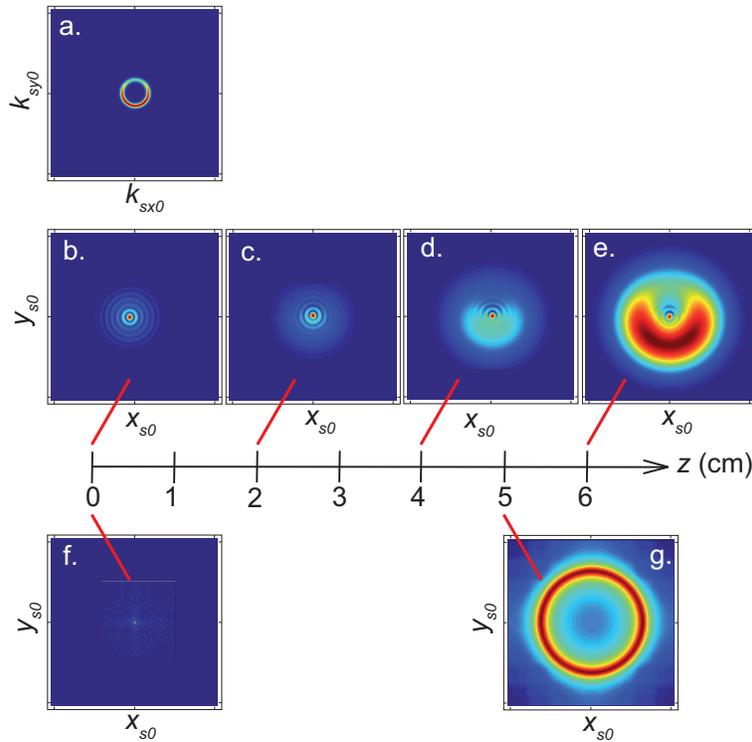


Figura 3.5: Intensidad transversal para un fotón y para un fotón condicionado a la detección del otro. (a) Espectro angular condicional. (b), (c), (d) y (e) muestran la ITFC propagándose en  $z = 0, 2, 4$  y  $6$  cm respectivamente. En (f) y (g) se muestra la transformada de Fourier bidimensional del EA en el plano  $z = 0$  y después a  $5$  cm, respectivamente.

inmediatamente posteriores al plano  $z = 0$  va perdiendo su estructura Bessel-Gauss de orden 0.

- Se concluye que el experimento si es viable por que en las simulaciones numéricas se observa adifraccionalidad en la ITFC.

## Capítulo 4

# Experimentos

### 4.1. Sistema de referencia de laboratorio

En este trabajo el sistema de referencia es seleccionado de tal manera que el plano  $x - z$  sea paralelo a la mesa óptica, por lo cual, el eje  $y$  es perpendicular a la mesa. La dirección positiva del eje  $z$  siempre será paralela y en la dirección que se propaga el bombeo, o sea, paralelo a  $\vec{k}_p$ .

### 4.2. Conteo de fotones con resolución espacial

Describiremos una parte importante de los experimentos realizados en este trabajo: la implementación de un detector de fotones individuales con resolución espacial. La técnica de conteo de fotones con resolución espacial consiste en tres partes. La primera es el arreglo mediante el cual se colectan fotones, la segunda es generar una señal eléctrica por cada fotón detectado y la tercera es contabilizar estos pulsos eléctricos por unidad de tiempo y realizar la lógica mediante una compuerta *AND*. En el Apéndice F se encuentra una lista de los instrumentos y detectores usados a largo de este capítulo.

La primera parte se consigue utilizando puntas de fibras ópticas. En este trabajo se utilizaron fibras ópticas con núcleos de diámetros de  $200\mu\text{m}$  y  $50\mu\text{m}$ . En principio los fotones que se colectan deben tener una dirección de propagación dentro de un cono recto cuya apertura está determinada por la apertura numérica de la fibra óptica. En este trabajo estamos interesados en colectar fotones que tengan un determinado valor del vector de onda transversal. Con los arreglos experimentales mostrados más abajo explicaremos como se logra esta condición. Los fotones acoplados en la punta de fibra

óptica son confinados y se propagan hasta la otra punta de fibra óptica, en la cual los fotones se desacoplan e inciden sobre un fotodiodo de avalancha de silicio (*APD* por sus siglas en inglés de *avalanche photodiodes detector*). En este punto es donde los fotones son detectados.

La segunda parte consiste en que cada fotón que interactuó con el *APD* se genere un pulso eléctrico. El pulso eléctrico generado es un pulso de “lógica de transistor a transistor” (*TTL* por sus siglas en inglés de *transistor-transistor logic*). Las características de estos pulsos son: un voltaje máximo de 2.5V y un ancho temporal de 17ns. En la Figura 4.1 se muestran uno o dos detectores *APD* según queramos obtener el EA o el EAC, además se muestra en la salida de cada *APD* la forma del pulso *TTL*. Las características de los detectores son:

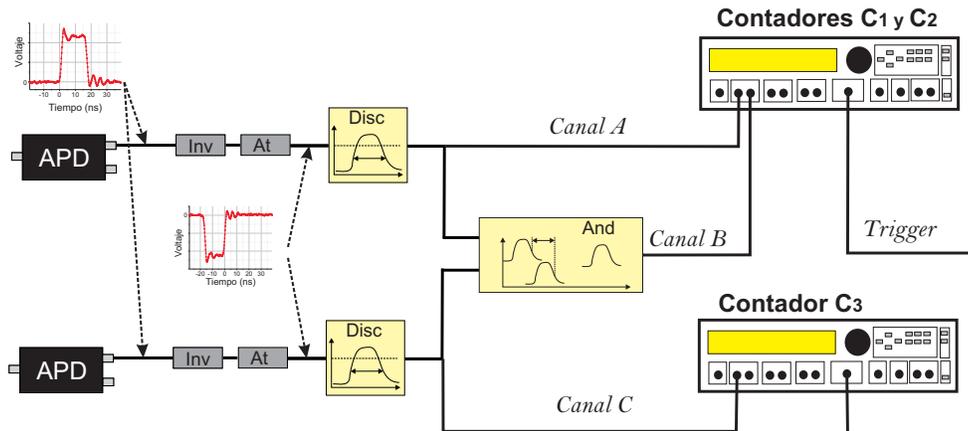


Figura 4.1: Diagrama de la electrónica utilizada para contar fotones por unidad de tiempo y contar fotones en coincidencia por unidad de tiempo.

- detectores lentos, lo cual quiere decir que al detectar un fotón el *APD* se quedará inhibido durante 80ns y no podrá detectar otro fotón en ese tiempo (tiempo muerto).
- Cuentas oscuras se encuentran entre 150cuentas/s a 250cuentas/s. Estas cuentas oscuras son producidas por el ruido de los circuitos electrónicos dentro del detector y otros tipos de ruidos. Es decir, son pulsos *TTL* que no son generados por fotones.
- El intervalo espectral donde la sensibilidad es mayor a 40 % comprende de 500nm a 900nm.

La tercera parte consiste en contar los fotones que tengan una específica coordenada fotónica a través de los pulsos que se generan en los detectores *APD*. Además, contar las parejas de fotones que se generaron al mismo tiempo y tengan coordenadas fotónicas complementarias (conservación de la energía y conservación del momento lineal transversal). A lo primero llamaremos **cuentas simples** y a lo segundo **cuentas en coincidencia**, que a continuación describiremos con más detalle.

#### 4.2.1. Cuentas simples

Primero explicaremos el sistema para obtener el EA, en el cual sólo necesitamos un *APD* (cuentas simples por unidad de tiempo). El pulso *TTL* (señal positiva) que sale del *APD* es acondicionado para introducirlo a un discriminador, marcado con “Disc” en la Figura 4.1. El acondicionamiento consiste en invertir el pulso *TTL* (marco con “Inv”) y después atenuarlo con un atenuador de 20DB (marcado con “At”), con lo cual da como resultado una señal eléctrica de voltaje pico de -250mV y ancho temporal de 17ns (señal negativa). Entonces el pulso es canalizado al “Disc” cuya función es eliminar pulsos espurios. Las señales espurias tienen la característica de tener un voltaje mayor a -250mV. En el discriminador podemos elegir un voltaje umbral,  $V_u$ , que en este trabajo se eligió de -180mV. Los pulsos que estén por debajo de  $V_u$  el discriminador los deja pasar y si son mayores a  $V_u$  los bloquea. El ancho temporal del pulso que deja pasar el discriminador puede ser sintonizado, el cual se ha seleccionado a 7ns (más abajo se explicará la importancia de este ancho temporal). Los pulsos salientes del discriminador viajan por el canal A hasta el contador de pulsos eléctricos C1, ver Figura 4.1. El contador C1 cuenta en un intervalo de tiempo elegido por el usuario.

#### 4.2.2. Cuentas en coincidencia

Lo siguiente es contar las parejas de fotones, esto es, el número de cuentas de detección simultánea en dos detectores. Los que llamaremos fotones en coincidencia y se contabilizan por parejas (cuentas en coincidencia por unidad de tiempo). Para lograr esto necesitamos dos fibras ópticas colocadas de tal forma que se colecten los fotones que se generan en coincidencia. Luego, cada fibra óptica va conectada a un detector *APD*. Las señales producidas por los *APD* son acondicionadas y pasadas por discriminadores, como el caso anterior. Ahora las señales eléctricas a la salida de los discriminadores, ver Figura 4.1, son duplicadas por un divisor de voltaje. Tenemos cuatro señales eléctricas dos para cada *APD*. Para el primer par: una señal va al contador

C1 (canal A) y la otra señal se conecta a una compuerta lógica *AND*, marcada con la etiqueta “And” en la Figura 4.1. Para el segundo par: una señal se conecta al contador C3 (canal B) y la otra señal se conecta a la compuerta lógica “And”. El contador C3 cuenta en un intervalo de tiempo elegido por el usuario. La función de la compuerta “And” es generar un pulso si los dos pulsos entrantes llegan al mismo tiempo<sup>1</sup>. Esto es, si tenemos dos pulsos entrantes de 7ns, el pulso *A* y el pulso *B*, entonces se suman obteniendo la señal  $A + B$ . Si el pulso suma pasa un cierto umbral, el cual debe ser un poco menor al doble del voltaje mínimo de alguno de los pulsos de entrada (ahora es -125mV debido al divisor de voltaje), entonces el compuerta lógica genera un pulso. Si el pulso suma no pasa el umbral entonces no se genera algún pulso. El tiempo en que los pulsos se pueden traslapar es el doble del ancho temporal de cada uno ellos, esto es, 14ns y que llamaremos *ventana de coincidencia*. El pulso generado por la compuerta lógica es canalizado (canal C) al contador C2. El contador C2 cuenta en un intervalo de tiempo elegido por el usuario. Cada fotón se propaga por el espacio libre, luego por la fibra óptica y después las señales eléctricas se propagan por los cables coaxiales. Considerando que los fotones viajan la misma distancia en el vacío, las longitudes de los cables coaxiales y las fibras ópticas son elegidas para contar simultáneamente cuentas simples por unidad de tiempo de C1 y C3, con las cuentas en coincidencia por unidad de tiempo de C2. Sea el  $t_0$  el tiempo que tarda cada fotón para llegar al divisor de voltaje,  $t_{13}$  el tiempo que tardan cada fotón para llegar al C1 o C3 desde el divisor de voltaje, y  $t_c$  el tiempo que tarda cada fotón para llegar al la compuerta lógica más el tiempo que tarda la señal de salida de la compuerta al contador C2, entonces, si se cumple que  $t_0 + t_{13} = t_0 + t_c$  podremos contar simultáneamente cuentas simples y cuentas en coincidencia por unidad de tiempo.

### 4.3. Arreglo experimental para obtener el EA y el EAC con un bombeo gaussiano

El arreglo experimental se muestra en la Figura (4.2). El arreglo consiste en tres partes: 1. generación y preparación del bombeo, 2. generación de la pareja de fotones mediante *SPDC*, y 3. detección y conteo de los fotones para obtener el EA y el EAC.

---

<sup>1</sup>Lo cual quiere decir que los pulsos eléctricos arriban al detector dentro de un intervalo de tiempo.

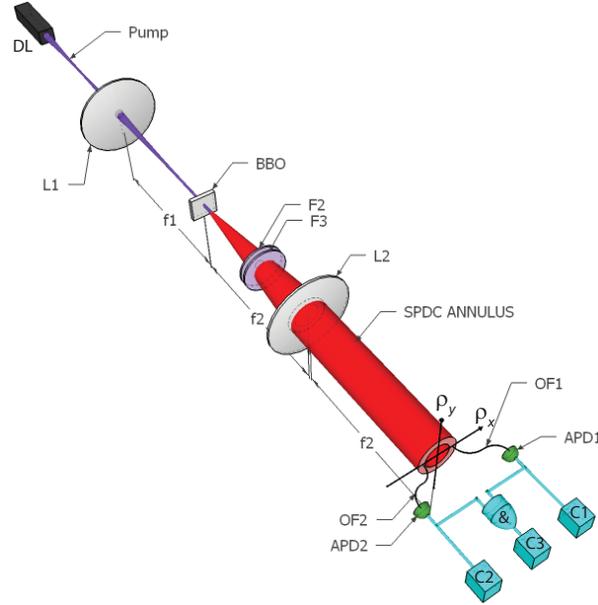


Figura 4.2: Arreglo experimental para medir el EA y EAC para diferentes grados de enfocamiento del bombeo.

#### 4.3.1. Parte I: preparación del bombeo gaussiano

La primera parte consiste en generar un haz gaussiano (bombeo) con un diodo láser. La luz emitida por el material semiconductor es confinado con elementos ópticos, de tal forma que a la salida del diodo láser, DL, se obtiene con buena aproximación un haz gaussiano con  $\lambda_{p0} = 406.8\text{nm}$  y un ancho de banda de  $\Delta\lambda_{p0} = 1\text{nm}$ . Este haz gaussiano es modificado en sus propiedades mediante una lente plano-convexa L1 de distancia focal  $f_1$ . Si inicialmente el bombeo gaussiano tiene los valores característicos de  $\lambda_{p0}$ , los cinturones  $W_x$  y  $W_y$  (ya que tiene una sección transversal elíptica) y la ubicación del cinturón respecto a la salida del diodo láser, entonces después de L1 se ven modificados los valores de los radios del cinturón y la ubicación del cinturón respecto al centro de L1. Al cambiar L1 modificamos el grado de enfocamiento. En la Tabla 3.1 se muestran los diferentes radios del cinturón obtenidos al cambiar la distancia focal  $f_1$  de la lente L1; y en el primer renglón se muestra el caso cuando no es utilizada alguna lente L1. En la Fig. 4.3 (a) se muestra el diámetro del haz en función  $z$ , donde  $z$  es la coordenada de propagación del haz a partir de la salida del DL (origen

de coordenadas); y como se puede observar, después de 30cm el haz se comporta aproximadamente como un haz gaussiano. El método para obtener el diámetro del haz conforme se propaga es obtener en una malla de puntos a lo largo de  $z$  imágenes de la sección transversal mediante una cámara *CCD* (por sus siglas en inglés: *charge-coupled device*) de resolución de  $1280 \times 1024$  pixeles; cada imagen es ajustada a una función gaussiana mediante la minimización del error al cuadrado respecto al promedio<sup>2</sup> o método de mínimos cuadrados [75, 76]. Los parámetros del ajuste son el centro de la gaussiana y el ancho de la gaussiana respecto al criterio  $FWe^{-1}M$ ; de lo cual se obtienen  $2W_x$  y  $2W_y$ . En conclusión de esta primera parte, se puede decir que preparamos un haz gaussiano con diferentes grados de enfocamiento.

### 4.3.2. Parte II: generación de las parejas de fotones

La segunda parte consiste en la generación de las parejas de fotones mediante el proceso de *SPDC*. Para lograr esto colocamos el centro del cristal *BBO*, de dimensiones de  $10\text{mm} \times 10\text{mm} \times 1\text{mm}$ , en el cinturón del haz gaussiano. El bombeo debe incidir normalmente a la cara del cristal, por lo cual, la alineación se realiza comprobando que la dirección de la reflexión y dirección del haz transmitido sean paralelos y coincidan que el bombeo antes entrar al cristal. El cristal debe cumplir además que el ángulo de *phasematching* asociado a él sea de  $29.3^\circ$ ; con esto y la longitud de onda del bombeo garantizamos que el *phasematching* sea del tipo I ( $oo \rightarrow e$ ), no colineal y degenerado. El proceso de alineación de la orientación del cristal consiste en observar directamente con una cámara *CCD* de resolución de  $1280 \times 1024$  pixeles la distribución anular de fotones emitidos por *SPDC* alrededor de  $810\text{nm}$ . Para ver el anillo en tiempo real primero colocamos antes del cristal un filtro azul (Schott BG-39) para eliminar los fotones espurios alrededor del  $810\text{nm}$  que se pueden confundir con las parejas de fotones y que son generados en el diodo láser. El intervalo de longitudes de onda de transmitancia arriba de  $10\%$  para este filtro va de  $300\text{nm}$  a  $660\text{nm}$  y de  $1400\text{nm}$  a  $2850\text{nm}$ . Claramente dejamos pasar  $\lambda_{p0}$  y eliminamos longitudes de onda alrededor de  $810\text{nm}$ . El segundo filtro se coloca después del cristal y este es un filtro pasaaltas con una longitud de onda de corte de  $488\text{nm}$ . La función de este filtro es eliminar el bombeo remanente. El tercer filtro que colocamos es un filtro pasabanda centrado en  $810$  y  $10\text{nm}$  de ancho de banda. El EA tiene la forma característica de anillo. Anillo de *SPDC*. El ancho del anillo es determinado por el ancho de banda del filtro pasabanda y que las direccio-

<sup>2</sup>Método llamado: *Linear Mean Square Estimation*.

nes de propagaciones de los fotones emitidos están contenidas en un cono de base circular. La cámara *CCD* debe colocarse cerca del cristal para poder observarse el anillo, ver Apéndice D. En la Figura 4.3 (c) se muestra una imagen obtenida del anillo inmediatamente después del cristal y los filtros. Para orientar correctamente el cristal debemos observar el anillo de *SPDC* conforme rotamos respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  en el sistema de referencia del laboratorio. La orientación respecto a los ejes  $x$  y  $y$  que determinada aproximadamente con la alineación del bombeo, esto quiere decir que no debemos rotar respecto a esos ejes. La orientación respecto al eje de rotación  $z$  se establece al encontrar el máximo relativo de intensidad del anillo del *SPDC*; lo cual significa que si partimos de este máximo y rotamos de forma levógira o dextrógira encontraremos un mínimo (un cero a  $90^\circ$ ) y si seguimos rotando más encontraremos otra vez un máximo (un máximo a  $180^\circ$ ). Con el anterior procedimiento establecemos la correcta orientación del cristal *BBO*. En este punto, cabe describir la fenomenología del anillo del *SPDC* cuando rotamos respecto al eje  $x$ . Al rotar alrededor del eje  $x$  aumentamos o disminuimos el ángulo de *phasematching*, entonces cuando aumentamos el ángulo *phasematching* el radio del anillo de *SPDC* va aumentando y al ir disminuyendo el ángulo de *phasematching* el radio va disminuyendo hasta un ángulo donde el anillo se colapsa a un círculo, lo cual, sería el caso de *SPDC* tipo I y colineal. En conclusión, de esta parte, podemos generar las parejas de fotones al hacer incidir el bombeo sobre el cristal con las características que deseamos.

### 4.3.3. Parte III: EA y EAC del *SPDC*

La tercera parte es obtener el espectro angular, EA, de algún fotón de la pareja de fotones. Esto último consiste en contar cuantos fotones por unidad de tiempo se tienen en una determinada coordenada del momento lineal transversal o equivalentemente el vector de onda transversal. El EA se encuentra en el espacio de Fourier dimensional. Debemos contar el número de fotones en un intervalo de tiempo en cada punto del espacio de Fourier. Para obtener el espacio de Fourier recurrimos a un método de la Óptica de Fourier[66], el cual consiste en el colocar una lente, *L2*, de distancia focal  $f_2$  de tal forma que el centro del cristal este el plano focal después de la lente y el plano de detección se encuentre en el plano focal antes de la lente. Ver Figura 4.2. En este plano tiene coordenadas  $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y)$  y si tenemos luz de una sola frecuencia angular  $\omega$ , entonces tenemos una asociación biunívoca con los vectores de onda transversales  $\vec{k}^\perp = (k_x, k_y)$  mediante la siguiente ecuación

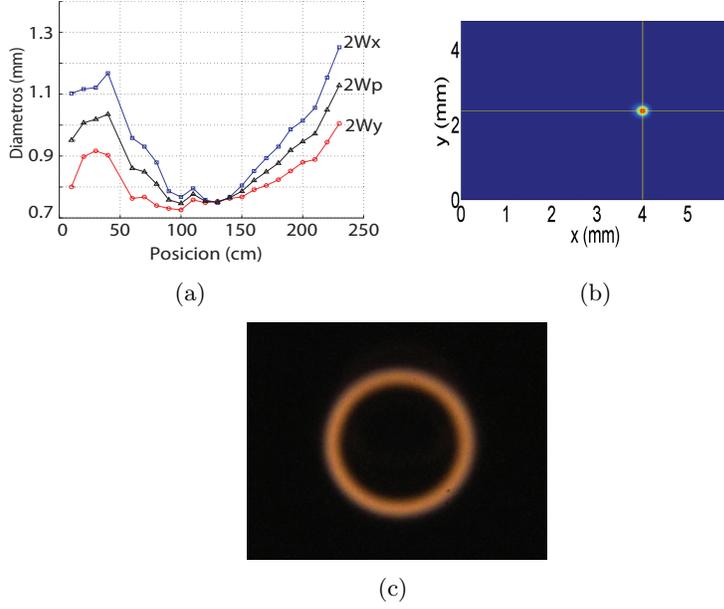


Figura 4.3: (a) Diámetro en función de la propagación del haz gaussiano. El origen es tomado en la salida del DL (ver Fig. 4.2).  $W_x$  es el radio en el eje  $x$ ,  $W_y$  es el radio en el eje  $y$  y  $W_p$  es el radio promedio. (b) Corte transversal del haz gaussiano en el punto  $z = 104$ cm, la cual, es una imagen en colores falsos obtenida con la cámara *CCD*. (c) Imagen obtenida del anillo de *SPDC* obtenida con la cámara *CCD*.

$$\vec{k} = A(\omega)\vec{\rho} \quad \text{con} \quad (4.1)$$

$$A(\omega) = \frac{\omega}{c f_2}.$$

En nuestro caso tenemos que *las parejas de fotones* están contenidas en un intervalo considerable de varias frecuencias angulares (ancho de banda), por lo cual, no existe esta asociación biunívoca. Entonces a cada punto  $\vec{\rho}$  le asociamos un  $\vec{k}^\perp$  eligiendo la frecuencia angular de los fotones degenerados como representativa de los demás fotones.

Experimentalmente tenemos acceso a una área de escaneo de  $E_e = 15\text{mm} \times 15\text{mm}$  en el espacio de Fourier. Este espacio de escaneo está determinado por una platina motorizada lineal, PML, que utilizamos para mover las fibras ópticas. El paso mínimo de las PML es de 50nm. Por lo cual, debemos elegir una lente de tal forma que el EA este contenida en este espacio. La ele-

cción correspondiente es de  $f_2 = 10\text{cm}$ . El procedimiento experimental para obtener el EA es utilizar la configuración de *cuentas simples* del detector de fotones con resolución espacial (ver Sec. 4.2) en donde sólo utilizamos una sola punta de fibra óptica, OF1 en la Figura 4.3, y esta a su vez esta conectada al detector *APD*, etiquetado con APD1. Ubicamos OF1 en cada punto de una malla que cubre todo  $E_e$  y en esos puntos abrimos una ventana de conteo de 1s. Todo el procedimiento anterior se realiza con todos los grados de enfocamiento. En la Sec. 4.4 se muestran los resultados obtenidos y se detallan los parámetros utilizados.

Como parte de la tercera parte del arreglo experimental es obtener el espectro angular condicional (Las partes 1 y 2 se quedan inalteradas). Para este caso necesitamos dos puntas de fibra óptica y colocarlas en el espacio de Fourier producido por la lente L2. Este espacio de Fourier lo hemos relacionado con el espacio  $E_e$  de coordenadas transversales y como se dijo anteriormente se la asocia un vector de onda transversal mediante la frecuencia angular de los fotones degenerados. Primero fijamos una punta de fibra óptica, etiquetada con OF2 en la Fig. 4.2, en un punto dentro del anillo de *SPDC*. El punto tiene la forma  $\vec{\rho}_{i0} = (\rho_{ix0}, 0)$  para facilitar el experimento y donde hemos elegido que en esta posición de la fibra óptica recolectamos los fotones acompañantes. La coordenada  $\rho_{ix0}$  se elige donde se obtienen el mayor número de cuentas por unidad de tiempo. Esta posición tiene asociada un vector de onda transversal  $\vec{k}_{i0}^\perp$ . Después, con la otra punta de fibra óptica, OF1, escaneamos en un subespacio de  $E_e$  centrado en el punto  $\vec{\rho}_{s0}$  que cumpla conservación del momento lineal transversal (*phasematching*); esto es, el punto  $\vec{\rho}_{s0}$  tiene asociado un vector de onda transversal  $\vec{k}_{s0}^\perp$  el cual debe cumplir que  $\vec{k}_{s0}^\perp = -\vec{k}_{i0}^\perp$ . Claramente hemos asociado a OF1 con el fotón señal. Entonces, se utiliza la configuración de conteo de fotones en coincidencia del detector de fotones con resolución espacial, para encontrar los fotones señal colectados por OF1 que están en coincidencia con los fotones acompañante colectados por OF2. El área del subespacio  $E_s$  de  $E_e$  debe ser de tal forma que el EAC este contenido en ese subespacio. En cada punto de una malla que cubre  $E_s$  se coloca la OF1 y se realiza el conteo de coincidencias para obtener el EAC. En la Sec 4.4 se muestran los resultados experimentales y se detallan los parámetros experimentales para cada caso de enfocamiento.

#### 4.4. Resultados experimentales con un bombeo gaussiano

En la Fig. (4.4) se muestran los resultados experimentales de la medición del espectro angular y su comparación con las simulaciones numéricas. Cada renglón corresponde a los casos en listados en la Tabla 3.1, el primer renglón de la Fig. (4.4) corresponde a los cinturones del primer renglón de la Tabla 3.1, y el segundo de renglón de de la Fig. (4.4) corresponde a los cinturones del segundo renglón de la Tabla 3.1 y así sucesivamente. En la primera columna se muestran los espectros angulares medidos experimentalmente y a la izquierda se muestran la barra de valores de las cuentas por segundo (la ventana temporal de conteo fue de 1s para todos los casos). En la segunda columna se muestran las simulaciones numéricas con los parámetros experimentales. La tercera columna se muestran las sumas de todos los elementos de cada una de las columnas (que llamaremos *suma horizontal*) y las sumas de todos elementos de cada uno de los renglones (que llamaremos *suma vertical*) de los espectros angulares experimentales y teóricos, donde las líneas continuas corresponde a la teoría y los puntos a los datos experimentales. El propósito de obtener las *sumas vertical* y *horizontal* es obtener una mejor estadística de los datos experimentales y una mejor comparación con los valores teóricos. Las dimensiones de los ejes son posiciones transversales de la fibra óptica OF1 y los vectores de onda transversales. Las segundas coordenadas se obtienen de las primeras utilizando la Ec. (4.1) y considerando la frecuencia angular de los fotones degenerados.

Para el primer caso tenemos que  $W_x = 182.0\mu\text{m}$  y  $W_y = 189.0\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.4 a) y (4.4 b); y en las Figuras (4.4 c) y (4.4 d) se muestra *la suma horizontal* y *la suma vertical* respectivamente. Los términos: *suma horizontal* y *suma vertical* fue explicado más arriba. Para el segundo caso tenemos que  $W_x = 67.5\mu\text{m}$  y  $W_y = 64.8\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.4 e) y (4.4 f); y en las Figuras (4.4 g) y (4.4 h) se muestran *la suma horizontal* y *la suma vertical* respectivamente. En el tercer caso tenemos que  $W_x = 56.4\mu\text{m}$  y  $W_y = 47.9\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.4 i) y (4.4 j); y en las Figuras (4.4 k) y (4.4 l) se muestran *la suma horizontal* y *la suma vertical* respectivamente. Finalmente el cuarto caso, el caso más enfocado, tenemos que  $W_x = 38.9\mu\text{m}$  y  $W_y = 34.7\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.4 m) y (4.4 n); y en las Figuras (4.4 o) y (4.4 p)

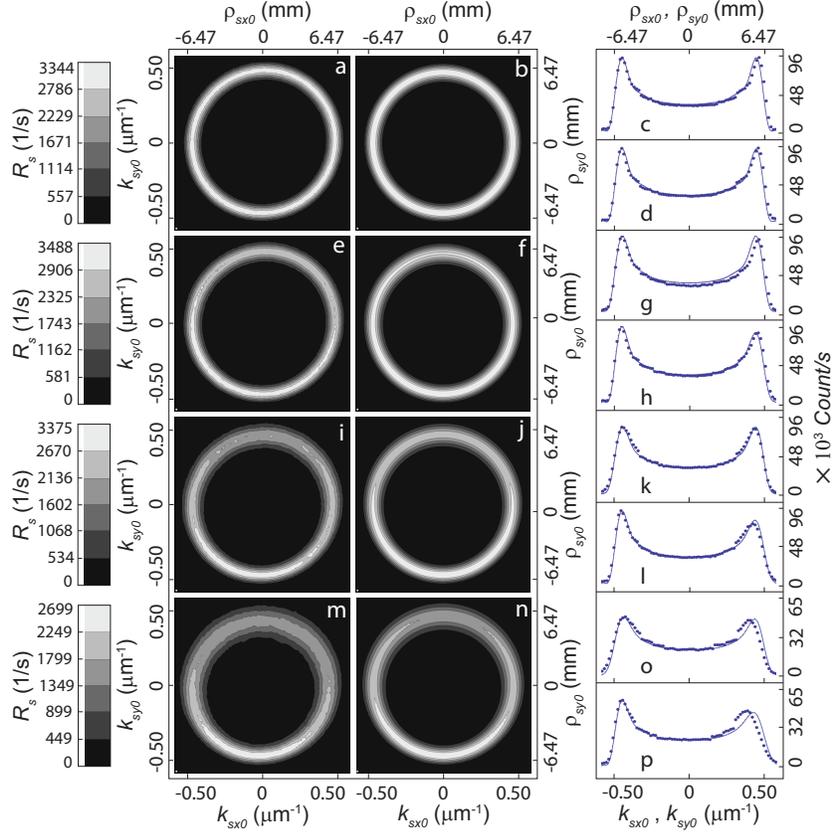


Figura 4.4: Resultados experimentales del espectro angular.

se muestran *la suma horizontal y la suma vertical* respectivamente.

Para obtener las gráficas de las *sumas horizontal y vertical*, se hizo el ajuste de los datos experimentales a la curva teórica mediante el método de los mínimos cuadrados<sup>3</sup>. Las observaciones que se pueden deducir de las gráficas son: 1. cada vez que los cinturones disminuyen surge una asimetría azimutal en el anillo de *SPDC*, 2. existe una buena concordancia entre la

<sup>3</sup>Considerando que el sistema de coordenadas del experimento está desplazado con respecto al sistema de coordenadas de la teoría (por razones técnicas), por lo cual, si tenemos que los puntos experimentales son  $(k_i^e, \sigma_i^e)$ , donde  $i$  va de 1 hasta el número de datos totales,  $N$ , y  $\sigma_i^e$  es la suma horizontal o vertical, y por otro lado tenemos que los datos teóricos son  $(k_i^t, \sigma_i^t)$ ; entonces el mejor criterio para empatarlos es minimizar la suma  $S = \sum_{i=1}^N (\sigma_i^e - \sigma_i^t(k_i^e - k_0^e))^2$ , donde  $k_0^e$  es el parámetro de ajuste (la traslación que debemos realizar a los datos experimentales para poder empatar la teoría con experimento).

teoría y el experimento, lo que nos permite decir que la teoría es un excelente modelo para el experimento. También se puede concluir: que en el caso más enfocando del haz gaussiano, la emisión de la pareja de fotones ya no es uniformemente (una distribución de probabilidad uniforme) sino existe una emisión dependiente del ángulo azimutal, por lo cual, existe una asimetría azimutal o distinguibilidad azimutal.

Para estas gráficas se debe notar que la parte inferior izquierda de cada gráfica de las simulaciones numéricas se muestra apenas es observable un punto blanco que representa las dimensiones de la punta de fibra óptica, entonces las dimensiones del EA son mucho mayor de las dimensiones de la fibra óptica y por lo cual se utiliza la aproximación de resolución perfecta.

Por otro lado tenemos que en la Fig. (4.5) se muestran los resultados experimentales de la medición del espectro angular condicional y su comparación con las simulaciones numéricas. Cada renglón corresponde a los casos en listados en la Tabla 3.1, el primer renglón de la Fig. (4.5) corresponde a los cinturones del primer renglón de la Tabla 3.1, y el segundo de renglón de de la Fig. (4.5) corresponde a los cinturones del segundo renglón de la Tabla 3.1 y así sucesivamente. La primera columna se muestran los espectros angulares condicionales medidos experimentalmente. El recuadro significa la zona donde se tomaron datos experimental y fuera de él se llenó con ceros. A la izquierda de la primera columna se muestran la barra de valores de las cuentas por la ventana temporal de conteo, la cual varía en cada caso. La segunda columna se muestran las simulaciones numéricas con los parámetros experimentales. La tercera columna se muestran *la suma horizontal* y *la suma vertical* de los espectros angulares condicionales experimentales y teóricos, donde las líneas continuas corresponde a la teoría y los puntos a los datos experimentales. Donde *la suma horizontal* es la suma de todos los elementos de cada una de las columnas del EAC y *la suma vertical* es suma de todos elementos de cada uno de los renglones del EAC. Las dimensiones de los ejes son posiciones transversales de la fibra óptica OF2 y los vectores de onda transversales. Las segundas coordenadas se obtienen de las primeras utilizando la Ec. (4.1) y considerando la frecuencia angular de los fotones degenerados. Recordemos que en este caso OF1 se mantiene fija.

Para el primer caso tenemos que  $W_x = 182.0\mu\text{m}$  y  $W_y = 189.0\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares condicionales experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.5 a) y (4.5 b); y en las Figuras (4.5 c) y (4.5 d) se muestran *la suma horizontal* y *la suma vertical* respectivamente. Para el segundo caso tenemos que  $W_x = 67.5\mu\text{m}$  y  $W_y = 64.8\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares condicionales experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.5 e) y (4.5 f); y en las Figuras (4.5 g) y (4.5 h) se muestran *la suma horizontal*

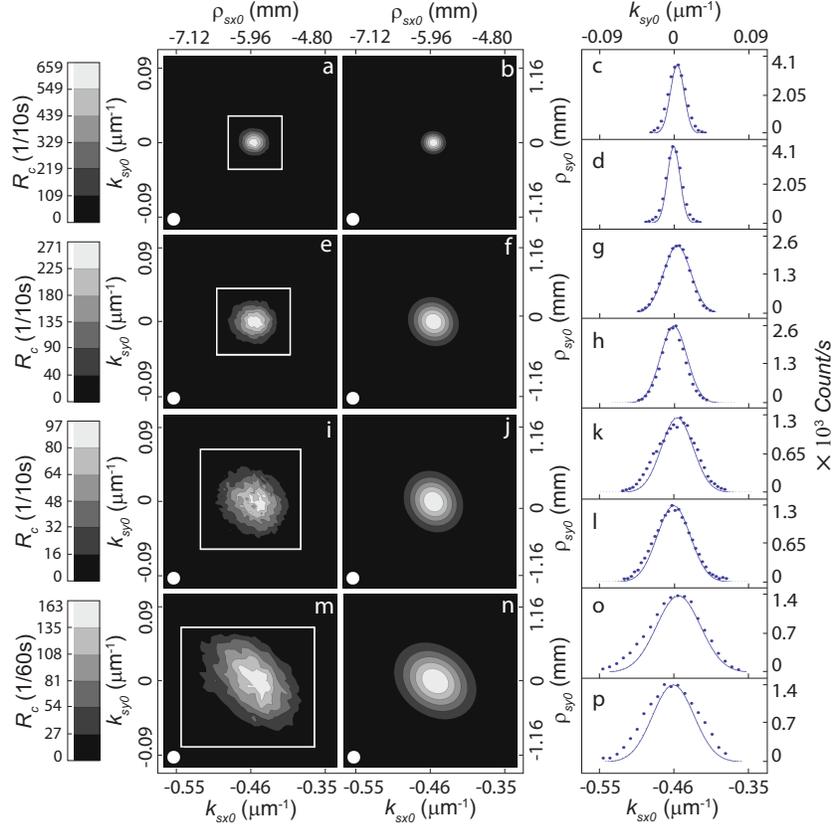


Figura 4.5: Resultados experimentales del espectro angular condicional.

y *la suma vertical* respectivamente. En el tercer caso tenemos que  $W_x = 56.4\mu\text{m}$  y  $W_y = 47.9\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares condicionales experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.5 i) y (4.5 j); y en las Figuras (4.5 k) y (4.5 l) se muestran *la suma horizontal* y *la suma vertical* respectivamente. Finalmente el cuarto caso, el caso más enfocado, tenemos que  $W_x = 38.9\mu\text{m}$  y  $W_y = 34.7\mu\text{m}$  tenemos que los espectros angulares condicionales experimental y teórico se muestran en las Figuras (4.5 m) y (4.5 n); y en las Figuras (4.5 o) y (4.5 p) se muestran *la suma horizontal* y *la suma vertical* respectivamente.

De igual forma que el caso anterior, para obtener las gráficas de las *sumas horizontal* y *vertical*, se hizo el ajuste de los datos experimentales a la curva

teórica mediante el método de los mínimos cuadrados<sup>4</sup>. Las observaciones que se pueden deducir de las gráficas son: 1. cada vez que los cinturones disminuyen aumenta el área de los fotones que se encuentran en coincidencia con los que se colectan con OF1, 2. también se observa que conforme los cinturones disminuyen la zona de coincidencia se gira y 3. existe una buena concordancia entre la teoría y el experimento, lo que nos permite decir que la teoría es un excelente modelo para el experimento. Se puede concluir: que en el caso más enfocado del haz gaussiano, el EAC del *SPDC* pierde correlación espacial. La pérdida de correlación espacial depende del ángulo azimutal.

Para estas gráficas se debe notar que la parte inferior izquierda de cada gráfica de los datos experimentales se observan círculos blancos que representan las dimensiones de la punta de fibra óptica, entonces las dimensiones del EAC son comparables con las dimensiones de la fibra óptica, por lo cual, no es adecuado utilizar la aproximación de resolución perfecta.

## 4.5. Criterio para aplicar la aproximación de cristal delgado

En el capítulo de la teoría de la conversión paramétrica descendente espontánea se mencionó que existe la llamada *aproximación de cristal delgado* (capítulo 2), en donde el espectro angular condicional del proceso *SPDC* es determinado completamente por el EA del bombeo; y el espectro angular esta determinado por los propiedades del cristal. En este punto cabe la pregunta cuándo se puede o cuándo no se puede aplicar dicha aproximación. Con los resultados experimentales mostrados hasta ahora y con los resultados de las simulaciones numéricas, ver Fig. (3.2), podemos proponer un criterio práctico para decidir sobre la validez de la aproximación de cristal delgado.

Considerando de la teoría que el EAC con resolución perfecta puede ser representada como el producto de dos funciones: la parte transversal  $S(\cdot)$  por la parte longitudinal  $\mathcal{L}(\cdot)$ . Para que el EAC sea determinada únicamente por  $S(\cdot)$ , entonces debemos hacer que  $\mathcal{L}(\cdot)$  sea una constante. Recordando la Fig. (3.2) donde se yuxtaponen el EA y EAC del *SPDC*, vemos la forma que tienen  $S(\cdot)$  y  $\mathcal{L}(\cdot)$  (caso de bombeo gaussiano). En la Sec. 3.3.1 se describe un criterio para calcular los anchos de  $S(\cdot)$  y  $\mathcal{L}(\cdot)$  en donde se escoge el EAC que se encuentre en la parte más ancha del EA. El ancho para  $S(\cdot)$  es  $\delta_S$

---

<sup>4</sup>Se utiliza el mismo criterio del pie de nota de la página 64.

y para  $\mathcal{L}(\cdot)$  es  $\delta_{\mathcal{L}}$ . Estos anchos de muestran en la Fig. (4.6 a) donde las gráficas en función de la longitud del cristal,  $L$ . El ancho  $\delta_S$  no depende de  $L$ , pero si del cinturón del haz (hemos hecho  $W_x = W_y = W_0$ ); entonces en la gráfica se muestran con líneas horizontales discontinuas y se calcula para los valores de  $W_0 = 10, 35, 65, 100, 300 \mu\text{m}$  (la línea es etiquetado al ancho que corresponde). El ancho  $\delta_{\mathcal{L}}$  si depende de  $L$  y se muestra con la línea continua.

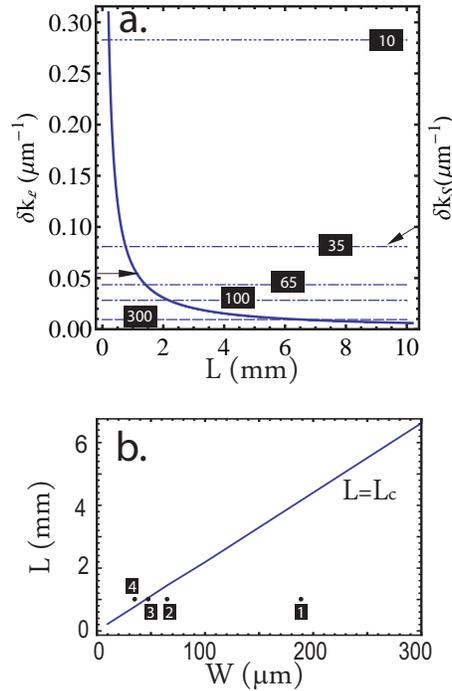


Figura 4.6: Criterio para determinar cuando se puede aplicar la aproximación de cristal delgado.

El procedimiento para determinar cuando se aplica la aproximación delgado es como sigue. Primero escogemos un  $\delta_S$  que corresponde a un bombeo con un radio del cinturón  $W_0$  y encontramos la  $L$  tal que  $\delta_S = \delta_{\mathcal{L}}$ . Las parejas encontradas se muestran en la gráfica de la Fig. (4.6 b) y es una línea recta. La  $L$  donde se encuentra la intersección la nombramos  $L_c$ . Ahora bien, si para un  $W_0$  fijo, entonces tiene asociado un sólo  $L_c$  y tenemos que

$$\begin{aligned}
L > L_c &\Rightarrow \delta_S > \delta_{\mathcal{L}}, \quad \text{no se aplica la aproximación,} \\
L < L_c &\Rightarrow \delta_S < \delta_{\mathcal{L}} \Rightarrow \mathcal{L}(\cdot) \approx \text{cte,} \quad \text{se aplica la aproximación.}
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

De la Fig. (4.6 b) se tiene que a los puntos  $(W_0, L)$  por debajo de la línea recta se les puede aplicar la aproximación y a los puntos por arriba es donde no se aplica la aproximación. El procedimiento inverso también es posible. Tenemos una  $L$  fija, lo cual se tiene  $L = L_c$  y se encuentra  $W_0$  correspondiente. Si enfocamos más respecto a  $W_0$  tenemos que se no aplica la aproximación de cristal delgado, pero, si desenfocamos respecto a  $W_0$  podremos aplicar la aproximación de cristal delgado. Esto último es de mayor importancia practica, ya que, experimentalmente no se puede variar la longitud del cristal.

En la Fig. (4.6 b) se muestran donde están los puntos experimentales, con  $L = 1\text{mm}$  y  $W_0 = W_x + W_y$  obtenidas de la Tabla (3.1). La etiqueta 1 corresponde a los cinturones del renglón 1, el punto 2 corresponde al renglón 2, y así sucesivamente. Como puede observarse tenemos dos casos (1, 2) en que la aproximación se aplica, un caso (3) que esta sobre la línea  $L = L_c$  y es donde la aproximación empieza a fallar, y finalmente un caso (4) donde no se aplica la aproximación. En conclusión dada la longitud del cristal podemos manipular el bombeo para que sea o no sea aplicable la aproximación de cristal delgado.

## 4.6. Arreglo experimental para obtener el EA y el EAC con un bombeo Bessel-Gauss

Obtener el EA y el EAC de fotones generados por el proceso *SPDC* mediante un bombeo con estructura espacial Bessel-Gauss es similar al caso anterior con un bombeo de estructura espacial gaussiana. Un haz Bessel-Gauss, como se había dicho antes, tiene la propiedad de ser adifraccional en un intervalo  $z_{\text{max}}$  y además sus vectores de onda están distribuidos en un cono de base circular. Sabemos que en la aproximación de cristal delgado el espectro angular del bombeo se transfiere al espectro angular condicional del *SPDC*, por lo cual, esperamos que las propiedades del bombeo se transfieran también al EAC del *SPDC*. Como el EA del bombeo es una anillo entonces el EAC del *SPDC* es un anillo también. Por lo cual, si obtenemos la transformada inversa de Fourier del EAC del *SPDC* debemos obtener una distribución espacial de los fotones condicionados o anunciados similar a la distribución espacial del bombeo que es un haz Bessel-Gauss; y entonces,

debería ser adifraccional esta distribución espacial. Esta hipótesis fue comprobada numéricamente y experimentalmente.

El arreglo experimental utilizado es mostrado en la Fig. (4.7). El arreglo es dividido en tres partes. Primero la generación del bombeo con estructura espacial Bessel-Gauss de orden cero. En segundo lugar se generan las parejas de fotones mediante *SPDC* con un cristal *BBO*. La Tercera parte es medir el EA y EAC de la pareja de fotones. La segunda y tercera parte es igual al caso anterior (Sec. 4.3). Por último, la cuarta parte consiste en obtener la transformada de Fourier inversa (TFI) del EAC. En la cual, comprobamos que sea adifraccional y la comparamos con la transformada de Fourier inversa de EA del *SPDC*.

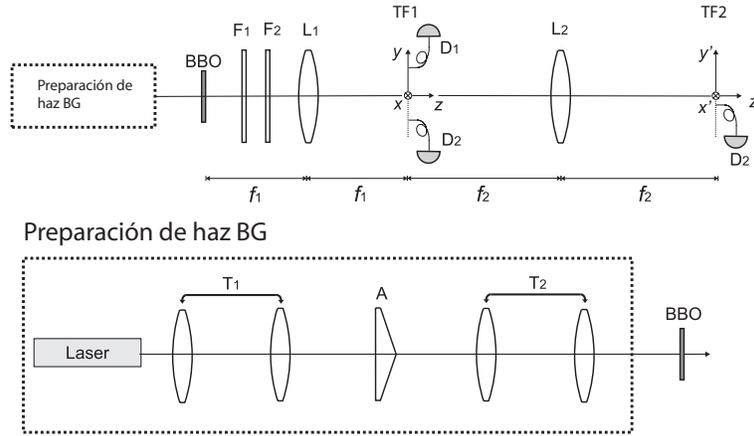


Figura 4.7: Arreglo experimental para obtener el EA y EAC de la pareja de fotones mediante el proceso de *SPDC* y un bombeo on estructura espacial Bessel-Gauss de orden 0. También obtenemos la transformada de Fourier inversa del EAC y comprobamos que sea adifraccional.

#### 4.6.1. Parte I: preparación del bombeo Bessel-Gauss de orden 0

El la Fig. (4.7) se muestra en el recuadro de líneas punteadas el arreglo experimental para generar el bombeo Bessel-Gauss de orden 0. El elemento óptico principal es el axicón (lente cónica y con un ángulo apex de  $2^\circ$ ) e indicado con la letra A en la figura antes citada. El láser de onda continua y gaussiano utilizado es el mismo que en el caso anterior. Primero el haz láser es magnificado por un telescopio  $\times 13.3$ , T1, para obtener un haz gaussiano

con un radio del cinturón de 7.5mm. El telescopio es formado por dos lentes plano-convexas. El haz gaussiano magnificado es transmitido a través del axicón y a la salida de este se genera un haz Bessel-Gauss de orden 0 de buena calidad [53, 54]. El objetivo de la magnificación del haz gaussiano es cubrir la mayor área del axicón para su adecuado funcionamiento [53, 54]. Después como último paso de la preparación del bombeo Bessel-Gauss de orden 0 es transmitirlo por un telescopio  $\times 5$ , T2, para magnificarlo y de esta forma cambiamos los dos parámetros importantes de este tipo de haces:  $k_{tp}$  y  $W_0$ . El telescopio T2 esta formado por dos lentes plano-convexas de distancia focal de 10cm y 50cm.

El siguiente paso de esta preparación es caracterizar el bombeo. Primero se tomó una imagen a 25cm de la segunda lente de T2, la cual es mostrada en la Fig. (4.8 a). La imagen es obtenida como una cámara *CCD*, ver Apéndice D para más detalles. En la imagen se observa el patrón de intensidad característico: un spot central rodeado de anillos concéntricos. El lóbulo central es parte adifraccional del haz Bessel-Gauss de orden 0 y los anillos concéntricos son modulados por una función gaussiana bidimensional. Existe una asimetría azimutal en los anillos debido principalmente a las imperfecciones del axicón.

En la Fig. (4.8 b) se muestra el espectro angular del haz Bessel-Gauss de orden 0. Esta transformada dimensional de Fourier se obtiene con un arreglo  $f-f$  donde en un plano focal coincide con el plano que se encuentra a 25 cm de la segunda lente de T2 y en el segundo plano focal se coloca una cámara *CCD*. El EA es característico de este tipo de haces. Con un análisis numérico de la imagen se puede obtener el radio del anillo, el cual corresponde a

$$k_{tp} = 0.046 \pm 0.001 \frac{1}{\mu\text{m}}, \quad (4.3)$$

y el ancho  $\delta k$  corresponde al radio del cinturón de la envolvente gaussiana mediante la relación  $W_0 = 4/\delta k$ , por lo cual

$$W_0 = 1.85 \pm 0.60\text{mm}. \quad (4.4)$$

Después verificamos que el haz sea adifractivo, para ello se toman imágenes en diferentes puntos de la propagación del haz después de la segunda lente de telescopio T2 (eje  $z$ ). En cada imagen se hace un análisis numérico donde se encuentra el punto de la maxima intensidad, que llamaremos  $Q$ . Luego, obtenemos un corte paralelo al eje  $y$  y que pase el punto  $Q$ . Todos los cortes son yuxtapuestas de tal forma que el eje horizontal sea el eje  $z$ . En la Fig. (4.8 c) se muestra la gráfica de los cortes a lo largo del eje  $y$ . El intervalo

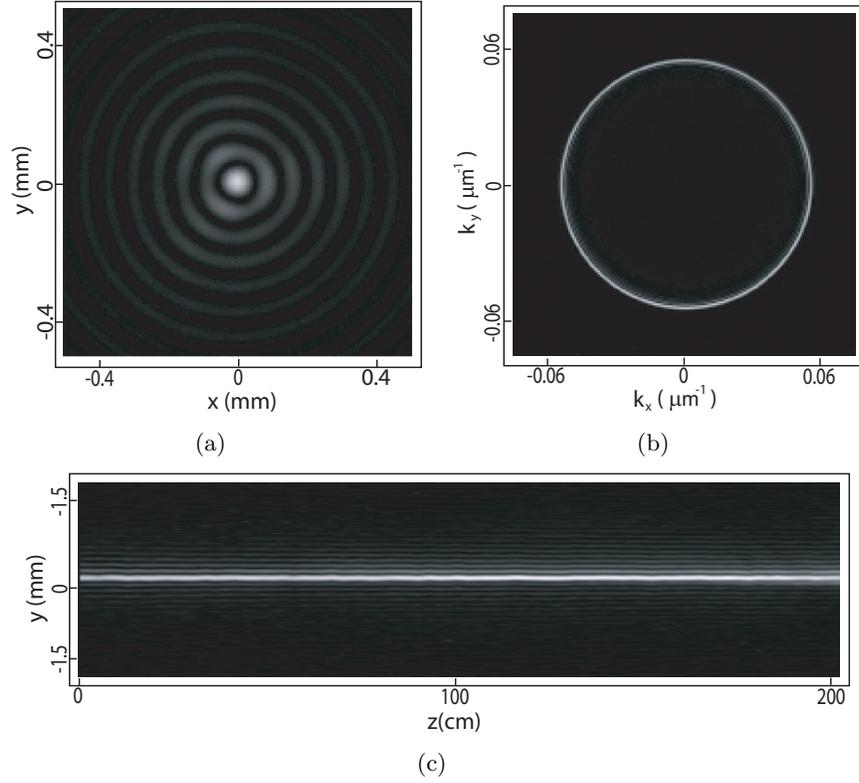


Figura 4.8: (a) Patrón de intensidad del haz Bessel-Gauss de orden 0 a 25cm de la segunda lente que forma T2. (b) EA del haz Bessel-Gauss de orden 0 donde se obtiene  $k_{tp}$  y  $W_0$ . (c) Cortes a lo largo del eje  $y$  del haz Bessel-Gauss de orden 0 en un intervalo de 2m. El lóbulo central se mantiene del mismo ancho en ese intervalo, o sea, el haz es adifraccional en ese intervalo.

donde se tomaron los cortes fue de aproximadamente 200cm, y como puede verse en la figura el lóbulo central se mantiene del mismo ancho a lo largo de los dos metros; con esto se comprueba la adifraccionalidad del haz Bessel-Gauss de orden 0. La distancia en la cual un haz de Bessel Gauss de orden 0 se mantiene adifractivo es ta dado por [55] el intervalo  $[-z_{\max}, z_{\max}]$ , donde

$$z_{\max} = \frac{W_0 k_{tp}}{k_p}. \quad (4.5)$$

### 4.6.2. Parte II: generación de las parejas de fotones

Esta parte es similar a la generación de las parejas de fotones mediante el proceso de *SPDC* con el cristal *BBO* en el caso con un bombeo gaussiano. El centro del cristal *BBO* se coloca a 25cm de la segunda lente de T2, ver Figura (4.7), el bombeo que incide en el cristal coincide con el patrón de intensidad del haz Bessel-Gauss de orden 0 mostrado en la Figura (4.8 a). El bombeo debe incidir normalmente a la cara del cristal, por lo cual, la alineación de la orientación del cristal que se realiza es similar al explicado en la sección anterior y por lo cual no explicaremos de nuevo. También, es importante decir que se utilizan los mismos filtros y en la misma configuración para poder bloquear el bombeo y restringir el ancho de banda de frecuencias angulares de la pareja de fotones que observamos y medimos, los cuales son etiquetados con F1 y F2 en la Fig. (4.7).

### 4.6.3. Parte III: EA y EAC del *SPDC*

Obtener el EA de la pareja de fotones generados con el proceso de *SPDC* con un bombeo Bessel-Gauss de orden 0 es similar al caso anterior con un bombeo gaussiano. En la Figura (4.7) se muestra el arreglo para obtener el EA, en donde se utiliza una lente (L1) de distancia focal  $f_1 = 10\text{cm}$  en la configuración  $f - f$ . En el plano de Fourier se coloca el contador de fotones con resolución espacial en la configuración de *cuentas simples* en cada punto de una malla. En esta configuración el núcleo de la fibra óptica utilizada es de  $200\mu\text{m}$  y la ventana temporal de conteo es de 1s. En la Fig. (4.7) se muestra este detector con la etiqueta D1. La malla de puntos tiene coordenadas  $\vec{\rho}_s = (x_s, y_s)$  y donde es colocada el centro de la fibra óptica (el subíndice  $s$  significa que consideramos el fotón señal). Esta malla tiene dimensiones totales de  $1.5\text{cm} \times 1.5\text{cm}$  y la distancia entre un punto y los puntos vecinos es de  $400\mu\text{m}$ . La punta se monta a unas platinas motorizadas para poderla colocar en cada uno de los puntos de la malla. En cada coordenada se cuentan los fotones que se colectan con la fibra óptica en un ventana temporal de 1s. Así se obtiene la distribución de fotones en el espacio  $x_s - y_s$ , entonces a cada coordenada  $\vec{\rho}_s$  se le asocia un vector de onda transversal mediante la Ec. (4.1) y considerando la frecuencia angular de los fotones degenerados.

En la Figura (4.9) se muestran los resultados del EA, EAC y la transformada de Fourier del EAC para el caso de un bombeo Bessel-Gauss de orden 0. El espectro angular de la parejas de fotones obtenida es mostrada en la Figura (4.9 a). El EA es similar al caso gaussiano muy enfocado debido a que  $k_{tp}$  tiene un valor cercano a cero y que los vectores de onda del bombeo

forman un cono, por lo cual, este caso se aleja del caso paraxial; aunque existe una sutil diferencia, el lado izquierdo del EA (sección más ancha) tiene una pequeña zona semicircular donde las cuentas bajan un poco, dando al anillo asimétrico de *SPDC*.

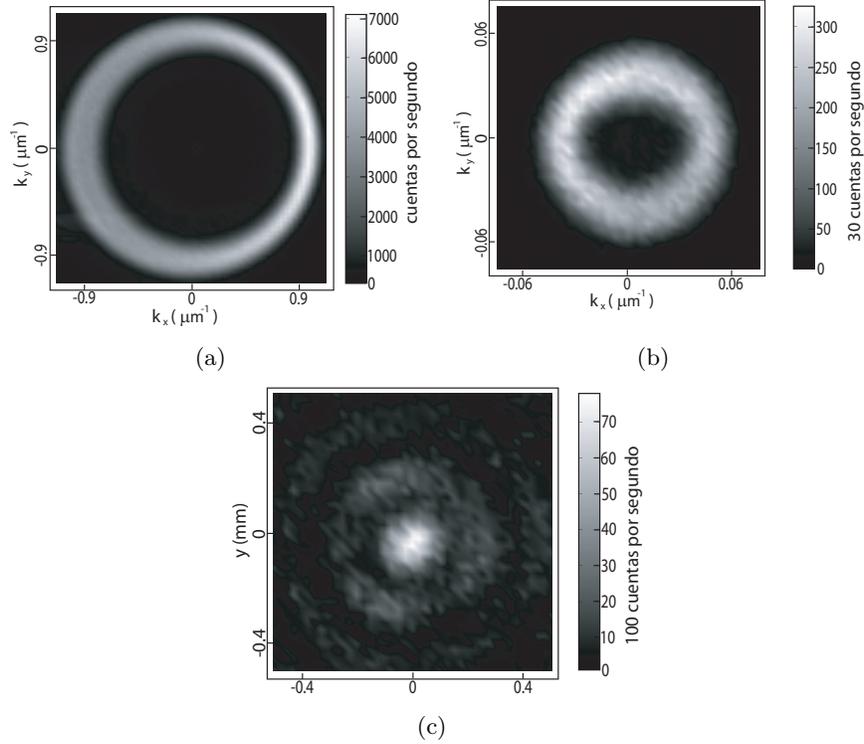


Figura 4.9: (a) El espectro angular del *SPDC* con un bombeo Bessel-Gauss de orden 0. (b) El espectro condicional de la del *SPDC* con un bombeo Bessel-Gauss de orden 0. (c) La distribución de fotones anunciados en función de la posición transversal de la fibra óptica.

El espectro angular condicional del *SPDC* en este caso debe ser una traslación del EA del bombeo, conclusión a la que se llega por la aproximación de cristal delgado. Para obtener el EAC utilizamos la misma lente L1 en la configuración  $f - f$  y en el plano de Fourier (a  $f_1 = 10\text{cm}$  de L1 y etiquetado con TF1) colocamos el contador de fotones en la configuración de *cuentas en coincidencias*. Primero fijamos una punta de fibra óptica (para el fotón acompañante) etiquetado con D1 en la Fig. (4.7). El diámetro de la D1 es de  $200\mu\text{m}$ . La posición donde es situada D1 es etiquetada con un pequeño

circulo en la Fig. (4.9 a), lo cual significa restringir  $k_{iy} = 0$  y después para encontrar la coordenada  $k_{ix}$  consideramos el lugar donde las *cuentas simples* tengan un máximo de cuentas por unidad de tiempo. Ese sitio es en la zona angosta del anillo asimétrico de *SPDC*. Por lo tanto, hemos colocado la primera fibra óptica en el punto  $\vec{k}_i^\perp$ .

La segunda fibra óptica, D2, es asociada al fotón señal y su posición debe ser tal que el momento transversal se conserve. El punto que cumple esta condición de conservación es  $\vec{k}_s^\perp = -\vec{k}_i^\perp$ . Luego, se construye una malla de puntos alrededor de ese punto, de tal forma que cubra la zona donde se encuentren los fotones que están en coincidencia con el fotón acompañante colectado por D1. El diámetro de D2 es de  $200\mu\text{m}$  y la distancia entre los puntos vecinos es de  $50\mu\text{m}$ . En la Fig. (4.9 a) esta malla o zona es marcada con un pequeño cuadrado. El procedimiento es fijar D1 (fotón acompañante) y después se coloca D2 (fotón señal) en cada punto de la malla antes mencionada. En cada par de posiciones del D1 y D2 se obtienen las *cuentas simples* y las *cuentas en coincidencia* con una ventana de conteo de 30s. El tiempo para contar las coincidencias es mayor debido a que tenemos una tasa de conteo de coincidencias muy baja respecto a las *cuentas simples*.

En la Figura (4.9 b) se muestra el espectro angular condicional de la pareja de fotones con el bombeo Bessel-Gauss de orden 0. Lo primero que podemos observar es que la geometría del EAC de la pareja de fotones es similar al EA del bombeo, ver Fig. (4.8 b). Esto es, los dos tienen forma de un anillo. Recordando que el ancho de este anillo está relacionado con  $W_0$  y haciendo un proceso numérico de la Fig. (4.9 b) obtenemos que

$$W_0 = 260\mu\text{m}, \quad (4.6)$$

el cual difiere de la Ec. (4.4). La diferencia en los anchos se debe al diámetro de la fibra óptica utilizada, D2, ya que el EAC del *SPDC* es una convolución del EAC del *SPDC* teórico con la sección circular que representa a la fibra óptica. Claramente, el EAC teórico consideramos que la fibra óptica es puntual, lo que en el capítulo de simulaciones numéricas hemos llamado *resolución perfecta*. Del mismo análisis el radio del anillo, desde el centro a la posición de máximas cuentas, el cual es

$$k_t = 0.046 \pm 0.001 \frac{1}{\mu\text{m}}, \quad (4.7)$$

y que es igual al valor para el bombeo, Ec. (4.3). Hay que notar que el radio de la transformada de Fourier bidimensional considerando *SPDC* lo hemos

nombrado  $k_t$  y respectivamente para el bombeo lo hemos nombrado  $k_{tp}$ . En conclusión se ha determinado que  $k_t = k_{tp}$  como esperábamos.

#### 4.6.4. Parte IV: intensidad transversal de los fotones condicionados

Recordando que la familia de haces Helmholtz-Gauss tienen como transformada de Fourier una distribución de forma anular y que son adifraccionales, y además tenemos que el EAC del *SPDC* (en el primer plano de Fourier) es un anillo, entonces se plantea la hipótesis: si obtenemos la transformada de Fourier bidimensional inversa del EAC del *SPDC*, esta daría una distribución de fotones anunciados similar a la distribución espacial del bombeo que es un Bessel-Gauss de orden 0. También, esperaríamos que esta distribución fuera adifraccional. La distribución que se obtiene en el segundo plano de Fourier esta en función de la *posición transversal* de la fibra óptica, y la llamaremos *intensidad transversal de fotones condicionados*, ITFC.

Para obtener la ITFC utilizamos el detector de fotones con resolución espacial en la configuración de *cuentas en coincidencia* mediante el siguiente procedimiento. Primero obtenemos la transformada de Fourier del *SPDC* con la lente L1 en la configuración  $f - f$ . El plano de Fourier es indicado en la Fig. (4.7) como TF1. En ese plano fijamos la primera fibra óptica, D1, con el mismo procedimiento del caso en donde obtenemos el EAC del *SPDC*. Con esa fibra óptica consideramos que detectamos los fotones acompañantes y su diámetro es de  $200\mu\text{m}$ .

Con una segunda lente, etiquetada con L2 en la Fig. (4.7), de distancia focal de  $f_2 = 30\text{cm}$  y  $2\text{in}$  de diámetro se obtiene la transformada de Fourier inversa en un arreglo  $f - f$ . En un plano focal de L2 se encuentra TF1 y en el segundo plano focal se obtiene la transformada de Fourier inversa. El segundo plano focal, plano de Fourier, es etiquetado con TF2 en la Fig. (4.7). Recordando que en óptica de Fourier las lentes son filtros pasabanda de frecuencias espaciales y que su ancho de banda es directamente proporcional a su diámetro, por lo cual, se eligió el diámetro de L2 a  $2\text{in}$  para dejar pasar la mayoría de frecuencias espaciales y reconstruir con mayor calidad la ITFC. En el plano TF2 se coloca la otra fibra óptica, D2, y se barre una zona para contar los fotones que están en coincidencia con los que se colectan con D1. Los fotones que se colectan con D2 los consideraremos los fotones señal y su diámetro es de  $50\mu\text{m}$ . La zona barrida es cubierta con una malla de puntos y centrada en el eje óptico. El procedimiento consiste en primero fijar D1 y luego se obtienen las *cuentas simples* y las *cuentas en coincidencia* (la ITFC) en cada punto de la malla antes mencionada, donde se coloca D2,

mediante el conteo de fotones con resolución espacial.

En la Fig. (4.9 c) se muestra la ITFC obtenida mediante el barrido. Lo que se observa es que tiene la geometría similar al Bessel-Gauss de orden 0 del bombeo, un lóbulo central con círculos concéntricos. El plano TF2 lo definimos como el plano  $z = 0$ . Para analizar si realmente la ITFC es adifraccional debemos obtener las *cuentas en coincidencia* en planos posteriores al plano  $z = 0$ , lo cual significa que debemos hacer barridos en planos que se encuentran a una distancia mayor a  $f_2$ . En cada uno de esos planos, con D1 fijo, hacemos nuevamente un barrido en un corte en  $y$  (como en el caso del bombeo, descrito anteriormente) y realizamos el conteo en coincidencias. Esto quiere decir comprobar que el diámetro del lóbulo central de la ITFC se mantiene durante la propagación de los fotones. En cada corte formamos una malla de puntos donde la distancia entre vecinos es de  $12.5\mu\text{m}$ . En la Fig. (4.10 a) se muestran los resultados de los fotones anunciados durante su propagación con cortes en la dirección  $y$ . La distancia de propagación que consideramos es de 40cm y en la Fig. (4.10 c) se gráfica el máximo de cuentas a lo largo de la propagación, coordenada  $z$ . La ventana temporal de conteo es de 500s. Se puede observar que el lóbulo central se mantiene inalterado hasta 25cm, en donde el máximo de cuentas decae.

Para contrastar el comportamiento de la ITFC también obtenemos las *cuentas simples* a lo largo de la propagación,  $z$ , con el mismo procedimiento pero con el contador de fotones en la configuración de *cuentas simples*, esto es, se remueve el detector D1. Los resultados se muestran en la Fig. (4.10 b). Claramente, esto no es el EA del *SPDC* sino la *intensidad transversal de los fotones señal* en función de la coordenada transversal de la fibra óptica D2; y en la Fig. (4.10 d) se muestra el máximo de cuentas a lo largo de la propagación. La diferencia es muy clara, las *cuentas simples* decaen más rápido que las *cuentas en coincidencia*.

El  $z_{\text{max}}$  de los fotones anunciados es menor al asociado con el bombeo (2m). De la Ec. (4.5) se puede observar que es directamente proporcional a  $W_0$ , o equivalentemente inversamente proporcional a  $\delta k$  (ancho del EAC del *SPDC*). Como el ancho  $\delta k$  aumenta, entonces  $W_0$  disminuye y por lo tanto  $z_{\text{max}}$  disminuye respecta al bombeo. Haciendo un análisis de propagación utilizando el formalismo de las matrices ABCD para estimar como cambia  $z_{\text{max}}$  debido a la transmisión a través de las lentes L1 y L2, resulta que  $z_{\text{max}} = (f_2/f_1)^2 W_0 k_s/k_t$  (donde  $W_0$  y  $k_t$  están dados por las Ecuaciones (4.6.3) y (4.6.3) respectivamente, y  $k_s$  el valor del vector de onda asociado a los fotones degenerados) y dando el valor numérico de 40.6cm. El cálculo detallado se encuentra en el Apéndice G.

En conclusión, podemos decir que la distribución espacial de los fotones

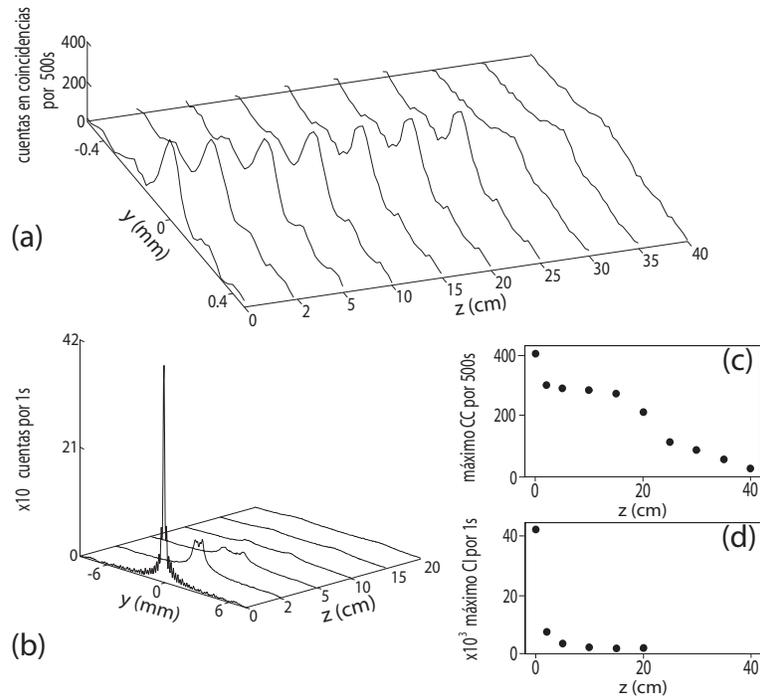


Figura 4.10: (a) Cortes en  $y$  de la intensidad transversal de los fotones condicionados a lo largo de su propagación. (c) Máximo de cuentas de los fotones anunciados a lo largo de la propagación. (d) Máximo de cuentas de la intensidad transversal de los fotones señal.

anunciados heredan las características del bombeo, y en particular la propiedad de adifraccionalidad. Pero el intervalo de adifraccionalidad se ve reducido debido el diámetro de la fibra óptica que se utiliza para colectar los fotones acompañantes, D2.

## Capítulo 5

# Conclusiones

Las conclusiones son las siguientes:

1. Se midió con éxito el *espectro angular* del *SPDC* tanto para el caso de bombeo gaussiano como para el caso de bombeo Bessel-Gauss de orden 0. Las simulaciones permitieron el análisis del comportamiento global del espectro angular en ambos casos, ver Figs. (3.2) y (3.4). Para el primer caso las simulaciones numéricas tienen una buena concordancia con los datos experimentales, Fig. (4.4). Para el segundo caso las simulaciones permitieron diseñar el experimento adecuadamente. La concordancia entre la teoría y el experimento es excelente dentro los diferentes enfocamientos de los haces gaussianos implementados y el valor  $k_{tp}$  usado en el haz Bessel-Gauss de orden 0.
2. El *espectro angular condicional* se obtuvo con éxito en el laboratorio para ambos casos (bombeo gaussiano y Bessel-Gauss de orden 0). De igual forma que el punto anterior, las simulaciones permitieron el análisis del comportamiento global del espectro angular condicional en ambos casos, ver Figs. (3.2) y (3.4). La concordancia entre teoría y experimento para el caso gaussiano es excelente, ver Fig. (4.5). La teoría describe bien el comportamiento en el caso Bessel-Gauss de orden 0 y nos permitió estimar el valor de  $k_{tp}$  necesario para poderse aplicar la aproximación de cristal delgado; esto último fue importante ya que para que los fotones anunciados fueran adifraccionales es necesario poder aplicar esta aproximación.
3. Se propuso un criterio práctico para seleccionar los parámetros experimentales  $L$  y  $W_0$  adecuados para poder aplicar la aproximación de

crystal delgado, todo esto en el caso de bombeo gaussiano. Ver Sec. 4.5.

4. Para el caso de bombeo Bessel-Gauss de orden 0 se comprobó con éxito que la distribución de los fotones anunciados por el otro fotón en el espacio de posiciones transversales es adifraccional. La comprobación fue hecha tanto en las simulaciones numéricas como en el experimento, ver Fig. (4.10). Con las simulaciones se comprobó que era viable el experimento y permitió la estimación del orden de magnitud de  $k_{tp}$  que debía implementarse experimentalmente, ver Fig. (3.5). La adifraccionalidad de los fotones anunciados fue comprobada a través de compararla con la propagación de la transformada de Fourier bidimensional del espectro angular, ver Figs. (3.5) y (4.10), la cual tiene difracción.
5. Dentro del intervalo de enfocamiento de  $W_0 \approx 35\mu m$  a  $W_0 \approx 182\mu m$ , longitud de cristal de 1mm y  $\theta_{pm} = 29.3^\circ$ , podemos decir que tenemos control del *SPDC* con la estructura gaussiana del bombeo que lo genera. No solamente podemos controlar el *SPDC* cuando queda determinado únicamente por las propiedades espaciales del bombeo, sino también cuando las propiedades del cristal entran en juego. El control se logra a través de las simulaciones numéricas (teoría) y el experimento, lo que nos permite hacer ingeniería cuántica sobre el *SPDC*.

Los experimentos que se derivan del trabajo de esta tesis doctoral son:

1. El estudio del *SPDC* con haces Bessel-Gauss de orden mayor, lo cuales tienen momento angular. Los problemas experimentales principales son dos: 1. generar los haces Bessel-Gauss de ordenes mayores a cero, y 2. comprobar que los fotones individuales tienen momento angular.
2. Generar estados cuánticos factorizables del *SPDC*. A partir de los algoritmos utilizados en las simulaciones numéricas hechas en este trabajo se han encontrado los parámetros experimentales para generar los estados cuánticos factorizables. Los parámetros son: longitud del cristal mayor a 5mm, el bombeo debe ser pulsado con un ancho de banda de 30nm y longitud de onda central en 775nm (para generar fotones en la longitud de onda de *telecom*) y un ángulo de *phasematching* de  $28.3^\circ$ . Actualmente, se realiza su implementación en el laboratorio.

3. Estudiar la generación de las parejas de fotones con haces no paraxiales. Estos haces de luz láser se pueden construir de la siguiente forma: primero construimos un haz gaussiano, como los utilizados en este trabajo, y después se transmiten a través de una lente con una distancia focal muy chica ( $< 8\mu\text{m}$ , según cálculos hechos por nosotros). En este régimen se ha podido observar con las simulaciones numéricas comportamientos interesantes en la correlaciones espaciales de los fotones.

Todos los proyectos anteriores se realizan actualmente en laboratorio de Óptica Cuántica del ICN-UNAM. En esos proyectos se utiliza la infraestructura generada al realizar esta tesis, como los algoritmos de la simulaciones numéricas, la técnica de detección de fotones con resolución espacial, la automatización y la experiencia experimental.

## Apéndice A

# Deducción del hamiltoniano

Para encontrar  $\hat{H}(t)$  en nuestro caso, partimos de la energía de la interacción del campo eléctrico con la materia en el contexto clásico. Si los campos eléctricos que representan al bombeo, señal y acompañante son  $\vec{E}_p$ ,  $\vec{E}_s$  y  $\vec{E}_i$  respectivamente y el campo de desplazamiento eléctrico para el bombeo es  $\vec{D}_p = \epsilon_0 \vec{E}_p + \vec{P}_p$ , entonces[77]

$$H(t) = \int_{V'} \frac{1}{2} \vec{E}_p \cdot \vec{D}_p dV' \quad (\text{A.1})$$

Si se considera que la polarización depende del campo eléctrico, entonces haciendo un desarrollo de Taylor [78, 79]

$$\vec{P}_p = \vec{P}_p^{(0)} + \underbrace{\epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \vec{E}_p}_{=\vec{P}_p^{(1)}} + \underbrace{\epsilon_0 \chi^{(2)} : \vec{E}_s \vec{E}_i}_{=\vec{P}_p^{(2)}} + \underbrace{\epsilon_0 \chi^{(3)} : \vec{E}_s \vec{E}_i \vec{E}_{s'}}_{=\vec{P}_p^{(3)}} + \dots, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\vec{P}_p^{(0)}$  es la polarización espontánea del medio,  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$  y  $\chi^{(3)}$  son las susceptibilidades del medio de primer, segundo y tercer orden<sup>1</sup>, y  $\vec{E}_{s'}$  es un cuarto campo eléctrico involucrado. En lo que sigue nos enfocaremos en la contribución del tercer término de la Ec. (A.2),  $\vec{P}_p^{(2)}$ , a la energía dada por la Ec. (A.1). Para facilitar el manejo de las contracciones de los tensores haremos uso de la convención de notación propuesta en el libro de Boyd[78]. El término  $\vec{P}_p^{(2)}$  es expresado de la siguiente manera

---

<sup>1</sup>Además  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$  y  $\chi^{(3)}$  son tensores de segundo, tercer y cuarto orden respectivamente.

$$\begin{pmatrix} P_{px}^{(2)} \\ P_{py}^{(2)} \\ P_{pz}^{(2)} \end{pmatrix} = 4\epsilon_0 \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{sx}E_{ix} \\ E_{sy}E_{iy} \\ E_{sz}E_{iz} \\ E_{sy}E_{iz} + E_{sz}E_{iy} \\ E_{sx}E_{iz} + E_{sz}E_{ix} \\ E_{sx}E_{iy} + E_{sy}E_{ix} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

donde el tensor  $d_{il}$  es el tensor de susceptibilidad de segundo orden en la notación contraída. Este tensor es obtenido de la siguiente forma, considerando que es válida la simetría de Kleinman[78, 79],

$$d_{il} \rightarrow d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)}, \quad \text{con la siguiente regla} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{array}{l} jk : \quad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 23, 32 \quad 31, 13 \quad 12, 21 \\ l : \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} .$$

Considerando que en este trabajo usamos un cristal uniaxial negativo que pertenece al grupo de simetría  $3m$ [78], tenemos

$$d_{il} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{31} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

La Ec. (A.3) puede simplificarse utilizando la Ec. (A.5) y tomando en cuenta la geometría del sistema. En este trabajo consideramos un proceso del tipo I en un cristal uniaxial negativo, lo cual significa que la señal y el acompañante tienen la misma polarización y son ondas ordinarias, y que el bombeo es una onda extraordinaria. Considerando el sistema de referencia del cristal  $S' = \{x', y', z'\}$ , y el sistema de referencia del laboratorio  $S = \{x, y, z\}$  (ver Fig. A.1). En la construcción de esos sistemas tenemos que el eje  $z'$  es paralelo a la dirección del eje óptico y el eje  $z$  es paralelo a la dirección del vector de propagación del bombeo  $\vec{k}_p$ ; además,  $\theta_{pm}$  es el ángulo entre el eje  $z'$  y  $z$  y  $\phi$  es el ángulo entre el eje  $x'$  y la proyección del eje  $z$  sobre el plano  $x' - y'$ . En este trabajo doctoral tenemos que  $\theta_{pm} = 29.3^\circ$  y  $\phi = 0^\circ$ . Considerando lo anterior, tenemos que los vectores de campo eléctrico están contruidos respecto al sistema  $S$ . Ahora, si definimos a  $\sigma_{\parallel}$  como el plano que contiene al eje óptico y  $\sigma_{\perp}$  el plano perpendicular a  $\sigma_{\parallel}$ , entonces podemos proyectar cualquier campo eléctrico sobre estos planos. La proyección

sobre  $\sigma_{\parallel}$  es la componente extraordinaria del campo eléctrico y la proyección sobre  $\sigma_{\perp}$  es la componente ordinaria del campo eléctrico. Haciendo la transformación adecuada entre los sistemas de referencia podemos expresar las componentes del campo eléctrico en el sistema  $S$  (bombeo, señal y acompañante) en términos de su magnitud y los ángulos  $\theta_{\text{pm}}$  y  $\phi$ . Los detalles se encuentran en el libro de Boyd[78]. De lo cual, tenemos que la Ec. (A.3) queda de la forma

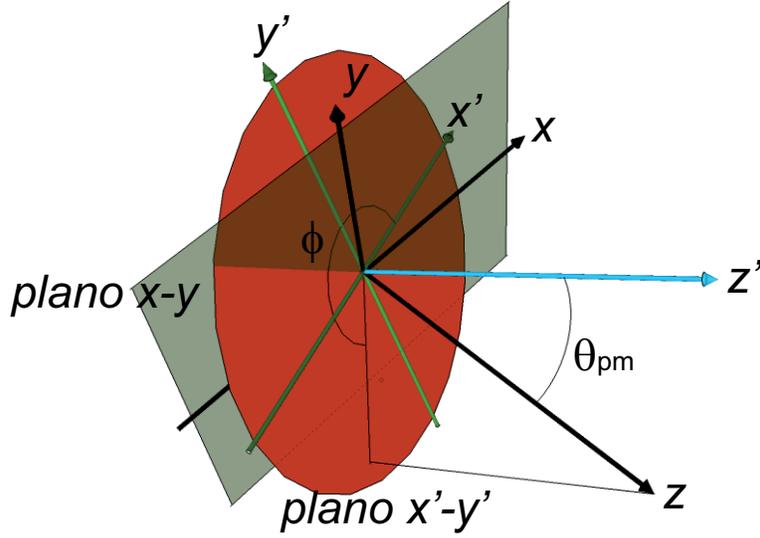


Figura A.1: Sistema de referencia inherente al cristal  $\{x', y', z'\}$  y el sistema de referencia del laboratorio  $\{x, y, z\}$ . El eje  $z'$  tiene la misma dirección que el eje óptico y el eje  $z$  tiene la misma dirección que el vector de propagación del bombeo,  $\vec{k}_p$ . El ángulo  $\theta_{\text{pm}}$  es medido respecto a los ejes  $z$  y  $z'$ . El ángulo  $\phi$  es el que sustentan el eje  $x'$  y la proyección del  $z$  sobre el plano  $x' - y'$ .

$$P_p^{(2)} = 4\epsilon_0 d_{\text{eff}} E_s E_i, \quad (\text{A.6})$$

con

$$d_{\text{eff}} = d_{31} \sin(\theta_{\text{pm}}) - d_{22} \cos(\theta_{\text{pm}}) \sin(3\phi). \quad (\text{A.7})$$

Hay que notar que la Ec. (A.6) está en función de las magnitudes (funciones escalares) de los campos vectoriales. Finalmente en la Ec. (A.1)

$$H(t) = \int_{V'} 2\epsilon_0 d_{\text{eff}} E_p E_s E_i dV', \quad (\text{A.8})$$

la cual es la base para plantear el hamiltoniano que utilizamos para obtener el estado cuántico del *SPDC*. En resumen, para obtener el hamiltoniano, Ec. (A.8), utilizamos el hecho de que estamos usando un cristal uniaxial negativo y que consideramos un proceso del tipo I.

## Apéndice B

# Operadores de creación y aniquilación

En este apéndice se resumen las propiedades algebraicas de los operadores de número de fotones, aniquilación y creación. Las propiedades, reglas de conmutación, se utilizan en la deducción del EA y del EAC del *SPDC*.

Las relaciones de conmutación de los operadores de creación  $\hat{a}$  y aniquilación  $\hat{a}^\dagger$  son [60, pp. 474–479]

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}_{\mu,\beta}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_{\mu,\beta'}) \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}^3 \delta_{\beta\beta'} \quad (\text{B.1})$$

$$\left[ \hat{a}(\vec{k}_{\mu,\beta}), \hat{a}(\vec{k}'_{\mu,\beta'}) \right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\left[ \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{\mu,\beta}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}'_{\mu,\beta'}) \right] = 0 \quad (\text{B.3})$$

estas relación son validas con  $\mu = \text{cte.}$  (s o i).

$$\hat{n}_\mu(\vec{k}_\mu) = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_\mu) \hat{a}(\vec{k}_\mu) \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{n}_\mu(\vec{k}_\mu) \cdot \left| n_{\vec{k}_\mu} \right\rangle = n_{\vec{k}_\mu} \left| n_{\vec{k}_\mu} \right\rangle \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{a}(\vec{k}_\mu) \cdot \left| n_{\vec{k}_\mu} \right\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}_\mu}} \left| n_{\vec{k}_\mu} - 1 \right\rangle \quad \text{y} \quad \hat{a}(\vec{k}_\mu) \cdot |0\rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

## Apéndice C

# Cambio de variables

El objetivo de este apéndice es realizar el cambio de variables y obtener el jacobiano correspondiente. Esta transformación y su jacobiano asociado es utilizado en el cálculo del EA y del EAC del *SPDC*.

Pasamos del sistema de coordenadas  $(k_x, k_y, k_z)$  al sistema de coordenadas  $(k_x, k_y, k)$ , el cambio esta dado por

$$\begin{aligned}k_x &= k_x \\k_y &= k_y \\k_z &= \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\end{aligned}\tag{C.1}$$

el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial k_x} & \frac{\partial k_x}{\partial k_y} & \frac{\partial k_x}{\partial k} \\ \frac{\partial k_y}{\partial k_x} & \frac{\partial k_y}{\partial k_y} & \frac{\partial k_y}{\partial k} \\ \frac{\partial k_z}{\partial k_x} & \frac{\partial k_z}{\partial k_y} & \frac{\partial k_z}{\partial k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_x}{k_z} & -\frac{k_y}{k_z} & \frac{k}{k_z} \end{vmatrix} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}\tag{C.2}$$

por lo cual

$$dk_x dk_y dk_z \rightarrow \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y dk = \frac{k}{k_z} dk_x dk_y dk\tag{C.3}$$

y como  $k(\omega) = n_o(\omega)\omega/c$

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{k_z} dk_x dk_y dk &= \frac{k}{k_z} \frac{dk}{d\omega} dk_x dk_y d\omega \\
 &= \frac{k(\omega)}{\sqrt{k(\omega)^2 - k_x^2 - k_y^2}} \left\{ -\frac{2\pi}{\omega} \beta(\lambda_\omega) + \frac{n_o(\omega)}{c} \right\} dk_x dk_y d\omega
 \end{aligned}
 \tag{C.4}$$

donde

$$n_o(\lambda) = \sqrt{A + \frac{B}{\lambda^2 + C} + D\lambda^2}
 \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dk}{d\omega} &= \frac{\frac{dn_o(\omega)}{d\omega} \omega + n_o(\omega)}{c} = \frac{1}{c} \left\{ \left[ -\frac{2\pi c}{\omega^2} \beta(\lambda_\omega) \right] \omega + n_o(\omega) \right\} \\
 &= -\frac{2\pi}{\omega} \beta(\lambda_\omega) + \frac{n_o(\omega)}{c}
 \end{aligned}
 \tag{C.6}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \frac{dn_o(\omega)}{d\omega} &= \frac{dn_o(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda(\omega)}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{dn_o(\lambda)}{d\lambda} \\
 &= -\frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{d}{d\lambda} \left\{ \sqrt{A + \frac{B}{\lambda^2 + C} + D\lambda^2} \right\} \\
 &= -\frac{2\pi c}{\omega^2} \left\{ \underbrace{\frac{D\lambda - \frac{B\lambda}{(\lambda^2 + C)^2}}{n_o(\lambda)}}_{=\beta(\lambda)} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{C.7}$$

## Apéndice D

# Técnica para caracterizar haces estructurados de luz láser

Existen varias técnicas para obtener una caracterización de un haz de luz con estructura espacial. Esta caracterización consiste en obtener las propiedades del haz de luz con estructura. Existe el *método de la navaja* que se aplica para haces de luz con estructura gaussiana. En este trabajo, la técnica utilizada es obtener varias imágenes a lo largo de la propagación del haz de luz con una cámara CCD; luego, con un algoritmo adecuado para cada haz estructurado de luz se procesa las imágenes para obtener sus propiedades.

La técnica tiene la ventaja de que se puede utilizar para haces de luz con cualquier estructura espacial (por ejemplo: un haz gaussiano o un haz Bessel-Gauss de orden 0) y la desventaja es que la medición que podamos realizar está limitada por las dimensión de los pixeles, la cual es de  $A_p = 4.65\mu\text{m} \times 4.65\mu\text{m}$ ; así por ejemplo, no podríamos medir haces gaussianos cuya area de alguno de sus cortes transversales sea menor a  $A_p$ .

A continuación describiremos el procedimiento de la técnica.

- Supongamos que tenemos un láser que emite un haz gaussiano. Ver Fig. (D.1). A este haz gaussiano podemos manipularlo o darle una estructura espacial con elementos ópticos (EO). Así por ejemplo, en la primera parte de este trabajo hemos manipulado el haz gaussiano con lentes plano-convexas o en la segunda parte hemos creado a partir del haz gaussiano un haz Bessel-Gauss de orden 0 con un axicón y telescopios.

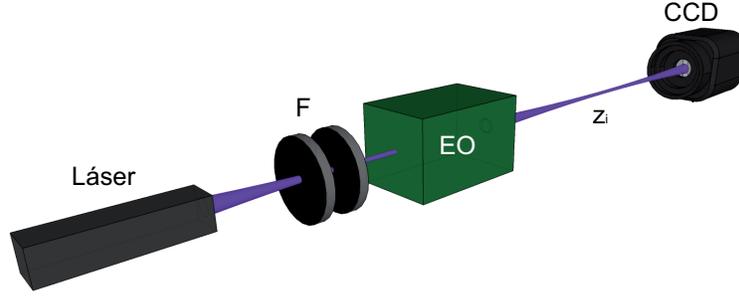


Figura D.1: Esquema para obtener la imágenes del patrón de intensidad de una sección transversal de un haz de luz. El haz gaussiano que se emite del láser es transformado en otro haz gaussiano y un haz con estructura espacial con los elementos ópticos, EO. En cada posición  $z_i$  es tomada una imagen de la sección transversal del haz. Cada imagen es procesada con un algoritmo que depende del haz que se quiere analizar. Por último se utilizan filtros neutros, F, para atenuar el haz de luz y no saturar la cámara CCD.

- Después del EO se toman imágenes en las posiciones  $z_1, z_2 \dots z_N$ , donde  $N$  dependerá de cada haz de luz a medir. En cada posición  $z_i$  se obtiene una imagen que es el patrón de intensidad de la sección transversal del haz de luz en ese punto. Las imágenes tienen una resolución de 1280píxeles  $\times$  1024píxeles (5.95mm  $\times$  4.76mm). Esta imagen es digitalizada en una matriz de 1280  $\times$  1024 y cada punto tiene un valor en la escala de grises de 0 a 255. Para no saturar la cámara se utilizan filtros neutros, F. Mediante un *software* se puede controlar el tiempo de exposición y la ganancia (en otros parámetros) de la cámara. Los valores del tiempo de exposición y la ganancia dependerán de cada caso en concreto.
- Después se aplican, en cada imagen, para obtener la información correspondiente al haz de luz con estructura espacial estudiado.

Está técnica se ha aplicado a dos tipos de haces con estructura espacial y también para observar el EA del *SPDC*. En el resto del apéndice describiremos el algoritmo para cada medición. Para cada caso consideraremos que tenemos las matrices  $A$  (imagen),  $X$  y  $Y$  (las coordenadas en  $x$  y  $y$ ) dadas por

$$\begin{aligned}
 A &= \{A_{ij} | i = 1, \dots, 1280, j = 1, \dots, 1024\}, \\
 X &= \{X_i | i = 1, \dots, 1280\}, \\
 Y &= \{Y_j | j = 1, \dots, 1024\}.
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

**Haz gaussiano:** el algoritmo consiste en los siguientes pasos,

1. En cada posición  $z_k$  obtenemos la imagen  $A_{ij}$ .
2. De esa imagen se obtienen los pixeles del *centro de masa*  $(i_c, j_c)$ . Para obtener  $i_c$  sumamos cada columna, obteniendo la matriz  $C = \{C_i = \sum_{j=1, \dots, 1024} A_{ij}, i = 1, \dots, 1280\}$  y después se encuentra el máximo valor  $C_{i_c} = \max(C)$ , lo cual, nos permite encontrar el pixel  $i_c$ . De igual forma obtenemos  $j_c$ , pero sumando los renglones  $R = \{R_j = \sum_{i=1, \dots, 1280} A_{ij}, j = 1, \dots, 1024\}$ .
3. Con las coordenada  $(i_c, j_c)$  realizamos los cortes en  $x$  y  $y$ , o sea las submatrices  $A^x = \{A_i^x = A_{ij_c}, i = 1, \dots, 1280\}$  y  $A^y = \{A_j^y = A_{i_c j}, j = 1, \dots, 1024\}$ .
4. Lo siguiente es encontrar el radio de la sección transversal del haz con respecto a los cortes  $A^x$  y  $A^y$ . El criterio utilizado es el  $\text{FW}e^{-1}\text{M}$ . Para lo cual, encontramos los puntos  $i_r^\pm$  tal que  $A_{i_r^\pm}^x \approx \max(A^x)e^{-1}$ ; entonces,  $W_{x z_k} = 1/2(X_{i_r^+} - X_{i_r^-})$ ; de igual forma encontramos los puntos  $j_r^\pm$  tal que  $A_{j_r^\pm}^y \approx \max(A^y)e^{-1}$ ; entonces,  $W_{y z_k} = 1/2(Y_{j_r^+} - Y_{j_r^-})$ .
5. Los pasos anteriores se repiten hasta  $N$  veces, por lo cual obtenemos el conjunto de puntos  $\{(z_k, W_{x z_k})\}$  y  $\{(z_k, W_{y z_k})\}$ , con  $k = 1, \dots, N$ , a los cuales los ajustamos a la curva

$$W(z) = W_\eta \sqrt{1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2}, \tag{D.2}$$

donde  $W_\eta$  es el radio del cinturón (con  $\eta = x, y$ ),  $z_R$  rango de Rayleigh. Con el ajuste se encuentran las propiedades deseadas del haz gaussiano. En conclusión tenemos que  $W_\eta$  y  $z_R$  son los parámetros del ajuste.

**Imagen de EA de SPDC :** para obtener la imagen del EA de SPDC se procede de la siguiente manera,

1. Se sustituyen los filtros neutros por el filtro pasaaltas con una longitud de onda de corte de 488nm y el filtro pasabanda centrado en 810 y 10nm de ancho de banda (ver Fig. 4.2), y que para este caso se colocan después de EO.
2. El EO es conformado por alguna de las lentes plano-convexas enlistadas en la Tabla (3.1) y el cristal *BBO*. La cámara *CCD* debe ser colocada lo más cercana al cristal *BBO*, ya que de otra forma las dimensiones del EA del *SPDC* son más grandes que las dimensiones de la cámara.
3. Se eligen los parámetros adecuados de tiempo de exposición y ganancia para obtener la imagen  $A_{ij}$ . En este caso el tiempo de exposición y la ganancia deben ser altos ya que estamos en el régimen espontáneo.

**Haz Bessel-Gauss de orden 0:** primero se obtiene el patrón de intensidad de la distribución del bombeo. En segundo lugar se obtiene el EA de bombeo, Por último, se obtiene cortes en una dirección (eje  $y$ ) de la propagación del bombeo.

- Primera parte.
  1. Para la primera parte, el EO consiste en el arreglo telescopio-axicón-telescopio (T1-A-T2), ver Fig (4.7).
  2. La cámara *CCD* se coloca a  $z_I = 25\text{cm}$  del segundo telescopio, T2, y se obtiene la imagen  $A_{ij}$ .
- Segunda parte.
  1. Utilizando el arreglo anterior agregamos una lente de distancia focal  $f$  de tal forma que obtenemos la transformada de Fourier bidimensional de la amplitud compleja que se encuentra en plano con  $z_I = 25\text{cm}$ . Esto significa colocar la lente a una distancia igual a  $z_I + f$  y después a una distancia igual a  $f$  colocamos la cámara *CCD*.
  2. Obtenemos la la imagen  $A_{ij}$ .
  3. Se obtiene las coordenadas del centro de masa de la imagen  $(i_c, j_c)$ , con el procedimiento descrito anteriormente.
  4. Realizamos los cortes en  $x$  y  $y$ , o sea las submatrices  $A^x = \{A_i^x = A_{ij_c}, i = 1, \dots, 1280\}$  y  $A^y = \{A_j^y = A_{i_c j}, j = 1, \dots, 1024\}$ .
  5. Con cada corte  $A^\mu$ , ( $\mu = x, y$ ) encontramos la ubicación,  $k_{\mu\pm}$ , los máximos (cada imagen tiene dos máximos, por ser un anillo). Entonces, el  $k_{t\mu}$  asociado a ese corte estará dado por

$k_{tp\mu} = |k_{\mu+} - k_{\mu-}|$ . Considerando los dos cortes promediamos y finalmente obtenemos  $k_{tp} = 0.5(k_{tpx} + k_{tpy})$ . Por otra parte, alrededor de los puntos  $k_{\mu\pm}$  tenemos una curva del tipo gaussiana. En cada curva calculamos su ancho con el criterio  $FWe^{-1}M$ , obteniendo  $\delta k_{\mu\pm}$ . Por lo tanto, el ancho del anillo es  $\delta k = \frac{1}{4}(\delta k_{x+} + \delta k_{x-} + \delta k_{y+} + \delta k_{y-})$ .

- Tercera parte.
  1. Partiendo del arreglo, EO, de la primera parte. Inmediatamente después de la lente del T2, ver Fig (4.7), se toman una serie de imágenes en las coordenadas  $z_1, z_2, \dots, z_N$ . El intervalo que se considera es de  $2m = z_N - z_1$ .
  2. En cada posición  $z_k$  se toma la imagen  $A_{ij}$  y se localiza el centro de masa  $(i_c, j_c)$ . Después, se considera el corte en  $y$  o sea la submatriz  $A^y = \{A_j^y = A_{i_c j}, j = 1, \dots, 1024\}$ . Por lo tanto, para cada posición  $z_k$  tenemos el corte  $A^y$ , el cual llamaremos  $A^k$  (sustituyendo la etiqueta  $y$  por el índice  $k$ , ya que sólo consideramos los cortes en  $y$ ).
  3. Finalmente, construimos una nueva imagen dada por la matriz  $B_{kj} = A_j^k$  de  $N \times 1024$  (con  $N = 50$ ).

## Apéndice E

# El ángulo de *walk-off*

En este apéndice se calcula con detalle en ángulo de *walk-off*. Se obtiene una expresión cerrada que se utiliza en la simulaciones numéricas.

Sabemos

$$\rho_0 = -\frac{1}{n(\theta, \lambda)} \left. \frac{\partial n(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{pm}} \quad (\text{E.1})$$

y como

$$n(\theta, \lambda) = \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{n_o(\lambda)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e(\lambda)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{E.2})$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\theta, \lambda)}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{n_o(\lambda)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e(\lambda)^2} \right\}^{-\frac{3}{2}} \left\{ -2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{n_o(\lambda)^2} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{n_e(\lambda)^2} \right\} \\ &= -\left\{ n(\theta, \lambda)^{-2} \right\}^{-\frac{3}{2}} \left\{ -\frac{1}{n_o(\lambda)^2} + \frac{1}{n_e(\lambda)^2} \right\} \cos \theta \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} n(\theta, \lambda)^3 \left\{ -\frac{1}{n_o(\lambda)^2} + \frac{1}{n_e(\lambda)^2} \right\} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= -\frac{1}{n(\theta, \lambda)} \left\{ -\frac{1}{2} n(\theta, \lambda)^3 \left\{ -\frac{1}{n_o(\lambda)^2} + \frac{1}{n_e(\lambda)^2} \right\} \sin 2\theta \right\} \\
&= \frac{n(\theta, \lambda)^2}{2} \left\{ -\frac{1}{n_o(\lambda)^2} + \frac{1}{n_e(\lambda)^2} \right\} \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{E.4}$$

**Otra formula del ángulo de *walk-off*.**

Del libro de Dmitriev [61, p. 9]

$$\rho_0(\theta) = \pm \arctan \left[ \left( \frac{n_o}{n_e} \right)^2 \tan(\theta) \right] \mp \theta \tag{E.5}$$

con los signos de arriba es para el caso de cristal negativo y con los signos de abajo es para el caso de cristal positivo.

## Apéndice F

# Lista de instrumentos y detectores

En este apéndice damos una lista de los instrumentos y detectores usados en este trabajo.

Nombre	Fabricante	Modelo
Cámara <i>CCD</i>	<i>Thorlabs</i>	DCU224M
Contador de fotones (C1 y C2)	<i>Stanford Research systems</i>	SR400
Contadores universales de intervalos temporales (C3)	<i>Stanford Research systems</i>	SR620
Discriminador	<i>Phillips Scientific</i>	704
Unidad Lógica	<i>Phillips Scientific</i>	754
Detector <i>APD</i>	<i>Perkin Elmer</i>	SPCM-AQRH-13-FC
Diodo Láser	<i>Crytalaser</i>	DL-405-100
Cristal <i>BBO</i>	<i>Cstech</i>	Cortado con $\theta_{\text{pm}} = 29.3^\circ$

## Apéndice G

# Haz Bessel-Gauss a través de un telescopio

El objetivo de este apéndice es calcular las propiedades de un haz Bessel-Gauss de orden  $m$  (BG $m$ ) a la salida de un telescopio (en nuestro caso es T2, ver Fig. 4.7). El telescopio es formado por dos lentes  $L_1$  y  $L_2$  (ver Fig.G.1) con distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  respectivamente. Consideremos que el haz BG $m$  entra al telescopio con un semiángulo canónico  $\theta_1$  y sale con un semiángulo canónico de  $\theta_2$  y también que la separación entre las lentes es  $D = f_1 + f_2$ .

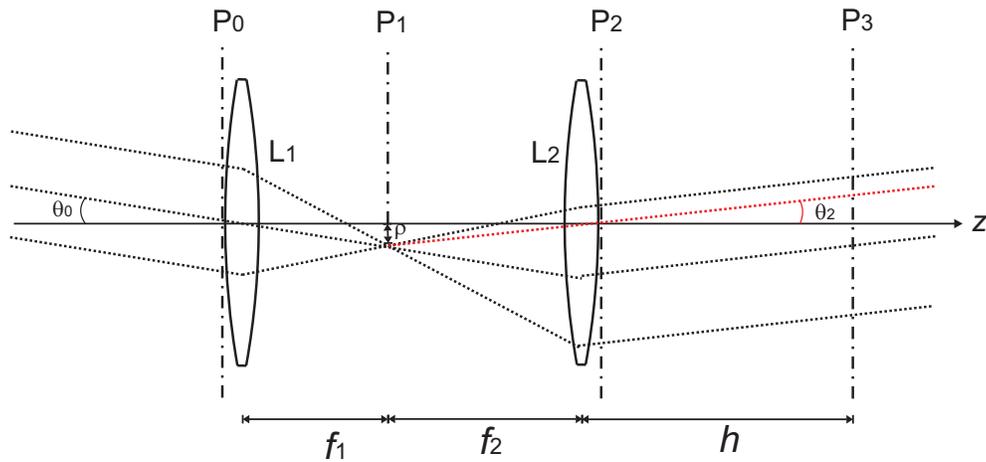


Figura G.1: Haz BG $m$  propagándose a través de un telescopio.

A la entrada del telescopio el haz BGM es dado por

$$\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right) J_m(k_t r) \exp(im\theta), \quad (\text{G.1})$$

donde  $k_t$  es vector de onda transversal,  $W_0$  es el radio del cinturón de la gaussiana envolvente y  $k = \omega/c$  la magnitud del vector de onda. Por otra parte, definimos adicionalmente los parámetros  $d_0 = \pi/k_t$  como el ancho de los anillos y  $\theta_0 = \arctan(k_t/k)$  como el semiángulo canónico. Asumiremos que el radio de la lentes son más grandes que el ancho del haz BGM, por lo cual, los efectos de aperturas y ondas en el borde pueden ser despreciadas; también, que el haz BGM es monocromático, paraxial y axialmente alineado; y finalmente consideramos que el sistema óptico no tiene pérdidas, es radialmente simétrico y libre de aberraciones.

En óptica geométrica el haz BGM es formado por una superposición canónica de ondas planas ideales. Dentro de esa aproximación podemos concluir que el radio de la imagen del anillo en el plano de Fourier  $P_1$  es

$$\rho = f_1 \tan(\theta_0) = f_1 \frac{k_t}{k_z} \approx f_1 \frac{k_t}{k} = f_1 \frac{\lambda}{2d_0}. \quad (\text{G.2})$$

El semiángulo canónico  $\theta_2$  y el vector de onda transversal del haz adifraccional después de la segunda lente (plano  $P_2$ ) es igual a

$$\tan(\theta_2) = \frac{\rho}{f_2} = \frac{f_1}{f_2} \tan(\theta_0), \quad y \quad (\text{G.3})$$

$$k_{t2} = k \tan(\theta_2) = \frac{f_1}{f_2} k \tan(\theta_0) = k_t \frac{f_1}{f_2}, \quad (\text{G.4})$$

por lo tanto, en esta aproximación, tenemos que el haz BGM es magnificado por

$$M = \frac{f_2}{f_1}. \quad (\text{G.5})$$

Luego, considerando que el haz BGM es suavizada (removida su discontinuidad) por un apertura gaussiana, entonces el comportamiento del sistema se desvía de la descripción de rayos en óptica geométrica. Por lo cual, tenemos que

$$U_0(r, \theta) = \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_0}\right) J_m(k_t r) \exp(im\theta), \quad (\text{G.6})$$

es el campo transversal del BGM en el plano focal del sistema óptico. La suavización con la apertura gaussiana es caracterizada con el parámetro  $q_0 =$

$q'_0 + iq''_0$ . Lo siguiente es asumir que  $q_0$  puede representar una modulación gaussiana con frentes de onda esféricas convergentes ( $q'_0 > 0$ ) y frentes de onda esféricas divergentes ( $q'_0 < 0$ ); también, asumiremos que si la modulación gaussiana en el plano  $P_0$  es puramente real, es decir  $\exp(-r^2/W_0^2)$ , entonces  $q_0 = -ikW_0^2/2 = -iz_R$ , donde  $z_R$  es el rango de Rayleigh del haz gaussiano.

Propagando el haz BGM. Primero consideraremos que el sistema óptico tienen asociado una matriz de transferencia

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (\text{G.7})$$

Si a la entrada del sistema tenemos un haz gaussiano

$$\exp\left(\frac{ikr^2}{2q_{\text{in}}}\right), \quad (\text{G.8})$$

entonces en la salida

$$GB(r) = \frac{\exp(ikh)}{A + B/q_{\text{in}}} \exp\left(\frac{ikr^2}{2q_{\text{out}}}\right), \quad (\text{G.9})$$

donde  $h$  es la longitud de propagación después de la salida del sistema óptico y

$$q_{\text{out}} = \frac{Aq_{\text{in}} + B}{Cq_{\text{in}} + D}. \quad (\text{G.10})$$

Continuando, suponiendo que en el plano  $P_0$  la modulación gaussiana es puramente real

$$\exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right), \quad y \quad (\text{G.11})$$

$$q_{\text{in}} = -\frac{ikW_0^2}{2} = -iz_R. \quad (\text{G.12})$$

Calculamos la propagación en el plano de Fourier  $P_2$ , cuya matriz ABCD es

$$\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.13})$$

entonces

$$q_1 = \frac{f_1}{-q_{\text{in}}/f_1 + 1} = \frac{f_1^2}{f_1 + iz_R}. \quad (\text{G.14})$$

Reemplazando en la Ec. (G.9) y notando que la dependencia radial del valor absoluto del campo y de la intensidad es proporcional a

$$|GB| \propto \exp\left(-\frac{kr^2 z_R}{2f_1^2}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{(2f_1/kW_0^2)^2}\right), \quad y \quad (\text{G.15})$$

$$|GB|^2 \propto \exp\left(-\frac{r^2}{2(f_1/kW_0^2)^2}\right). \quad (\text{G.16})$$

La desviación estandar de la intensidad  $|GB|^2$  es  $\sigma = f_1/kW_0^2$ . El ancho en la definición FWHM de la intensidad es  $2\sqrt{2\ln 2}\sigma$ , por lo cual

$$\text{FWHM}_{\text{plano } P_1} = 2\sqrt{2\ln 2} \frac{f_1}{kW_0} \approx 2,355 \frac{f_1}{kW_0}. \quad (\text{G.17})$$

El patrón de intensidad en el plano de Fourier es un anillo circular con un radio  $\rho$ , Ec (G.4), y un ancho FWHM dado por la Ec. (G.17).

Para calcular el campo en el plano  $P_2$  consideramos la matriz ABCD

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 + f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & f_1 + f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.18})$$

y de la Ec. (G.10), tenemos

$$q_2 = \frac{f_1^2 f_2 + (f_1 - q_{in})f - 2^2}{-f_1^2} = -\frac{f_1^2 f_2 + f_2^2 f_1 + iz_R f_2^2}{f_1^2}, \quad y \quad (\text{G.19})$$

$$|GB| \propto \exp\left(-\frac{kr^2 f_1^2 z_R}{2f_1^2(f_1 + f_2)^2 + f_2^2 z_R^2}\right) = \exp\left(-\frac{f_1^2 k^2 W_0^2 r^2}{4f_1^2(f_1 + f_2)^2 + f_2^2 k^2 W_0^2}\right). \quad (\text{G.20})$$

Por lo tanto, el ancho  $W_2$  de la envolvente gaussiana en el plano  $P_2$  es

$$W_2 = \frac{4f_1^2(f_1 + f_2)^2 + f_2^2 k^2 W_0^2}{f_1^2 k^2 W_0^2} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \frac{4(f_1^2/f_2^2)(f_1 + f_2)^2 + k^2 W_0^4}{k^2 W_0^2}. \quad (\text{G.21})$$

El campo en el plano  $P_2$  es un haz BGM con un vector de onda transversal  $k_{t2}$ , Ec. (G.4), y una ancho de la gaussian envolvente de  $W_2$ , Ec. (G.21).

La propagación después de la segunda lente se tiene que sobreviven significativamente la superposición de todos los haces gaussiano que conforman el haz BGM a una distancia igual a

$$z_{\max} = \frac{W_2 k}{k_{t2}} = \frac{f_2^2}{f_1^2} \sqrt{\frac{4(f_1^2/f_2^2)(f_1 + f_2)^2 + k^2 W_0^4}{W_0^2}} \frac{1}{k_t}, \quad (\text{G.22})$$

y para un experimento típico se tiene  $k^2 W_0^4 \gg 4(f_1^2/f_2^2)(f_1 + f_2)^2$ , por lo cual

$$z_{\max} \approx \frac{f_2^2}{f_1^2} \frac{kW_0}{k_t} = M^2 \frac{kW_0}{k_t}, \quad (\text{G.23})$$

donde  $M = f_2/f_1$  es la magnificación del telescopio.

# Bibliografía

- [1] David C. Burnham and Donald L. Weinberg. Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 25(2):84–87, 1970.
- [2] A. Zeilinger. Experiment and the foundations of quantum physics. *Rev. Mod. Phys.*, 71(2):S288–S297, 1999.
- [3] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn. Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Rev. Mod. Phys.*, 79(1):135–174, 2007.
- [4] M. H. Rubin. Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 54(6):5349–5360, 1996.
- [5] A. Joobeur and B. E. A. Saleh. Spatiotemporal coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 50(4):3349–3361, 1994.
- [6] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412:313–316, 2001.
- [7] G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner. Twisted photons. *Nature Phys.*, 3:305–310, 2007.
- [8] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, and R. W. Boyd. Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92(21):210403, 2004.
- [9] C. K. Law and J. H. Eberly. Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 92(12):127903, 2004.

- [10] S. P. Walborn and C. H. Monken. Transverse spatial entanglement in parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 76(6):062305, 2007.
- [11] M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. S. Straupe, and S. P. Kulik. Spontaneous parametric down-conversion: anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions. *Phys. Rev. A*, 77(3):032336, 2008.
- [12] S. S. Straupe, D. P. Ivanov, A. A. Kalinkin, I. B. Bobrov, and S. P. Kulik. Angular schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 86(6):060302, 2011.
- [13] H. Di Lorenzo Pires, C. H. Monken, and M. P. van Exter. Direct measurement of transverse-mode entanglement in two-photon states. *Phys. Rev. A*, 80(2):022307, 2009.
- [14] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75(4):4337–4341, 1995.
- [15] J. P. Torres, G. Molina-Terriza, and L. Torner. The spatial shape of entangled photon states generated in non-collinear, walking parametric downconversion. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 7:235–239, 2005.
- [16] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57(4):3123–3126, 1998.
- [17] S. P. Walborn, C. H. Monken, S. Pádua, and P. H. Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Phys. Rep.*, 495:87–139, 2010.
- [18] S. P. Walborn, A. N. de Olivera, S. Pádua, and C. H. Monken. Multimode hong-ou-mandel interference. *Phys. Rev. Lett.*, 90(14):143601, 2003.
- [19] T. P. Grayson and G. A. Barbosa. Spatial properties of spontaneous parametric down-conversion and their effect on induced coherence without induced emission. *Phys. Rev. A*, 57(4):3123–3126, 1998.
- [20] G. Molina-Terriza, S. Minardi, Y. Deyanova, C. I. Osorio, M. Hendrych, and J. P. Torres. Control of the shape of the spatial mode function of photons generated in noncollinear spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 72(4):065802, 2005.

- [21] B. E. A. Saleh, A. F. Abouraddy, and A. V. Sergienko. Duality between partial coherence and partial entanglement. *Phys. Rev. A*, 62(4):043816, 2000.
- [22] H. Di Lorenzo Pires and M. P. van Exter. Observation of near-field correlations in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 79(4):041801(R), 2009.
- [23] L. Neves, S. Pádua, and C. Saavedra. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys. Rev. A*, 69(4):042305, 2004.
- [24] P. S. K. Lee, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman. How focused pumping affects type-ii spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 72(3):033803, 2005.
- [25] A. K. Jha and R. W. Boyd. Spatial two-photon coherence of the entangled field produced by down-conversion using a partially spatially coherent pump beam. *Phys. Rev. A*, 81(1):013828, 2010.
- [26] G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner. Orbital angular momentum of photon in noncollinear parametric downconversion. *Opt. Commun.*, 228:155–160, 2003.
- [27] H. H. Arnaut and G. A. Barbosa. Orbital and intrinsic angular momentum of single photons and entangled pairs of photons generated by parametric down-conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 85(2):286–289, 200.
- [28] S. P. Walborn, A. N. de Olivera, R. S. Thebaldi, and C. H. Monken. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 69(2):023811, 2004.
- [29] W. H. Peeters, E. J. K. Verstegen, and P. van Exter. Orbital angular momentum analysis of high-dimensional entanglement. *Phys. Rev. A*, 76(4):042302, 2007.
- [30] X. F. Ren, G. P. Guo, J. Li, and G. C. Guo. Entanglement of the hermite-gaussian modes states of photons. *Phys. Lett. A*, 341:81–86, 2005.
- [31] D. Kawase, Y. Miyamoto, M. Takeda, K. Sasaki, and S. Takeuchi. Effect of high-dimensional entanglement of laguerre-gaussian modes in parametric downconversion. *J. Opt. Soc. Am. B*, 26(4):797–804, 2009.

- [32] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, D. N. Klysko, M. H. Rubin, A. V. Sergienko, and Y. H. Shih. Two-photon geometric optics. *Phys. Rev. A*, 53(4):2804–2815, 1996.
- [33] I. F. Santos, M. A. Sergioro, C. H. Monken, and S. Pádua. Resolution and apodization in images generated by twin photons. *Phys. Rev. A*, 67(3):033812, 2003.
- [34] A. F. Abouraddy, M. B. Nasr, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich. Demonstration of the complementarity of one- and two-photon interference. *Phys. Rev. A*, 63(6):063803, 2001.
- [35] M. P. Almeida, J. A. O. Huguenin, P. H. Souto Ribeiro, and A. Z. Khoury. Theoretical investigation of moiré patterns in quantum images. *J. Mod. Opt.*, 53(5 & 6):777–785, 2006.
- [36] A. G. da Costa Moura, W. A. T. Nogueira, and C. H. Monken. Fourth-order image formation by spontaneous parametric down-conversion: The effect of anisotropy. *Opt. Commun.*, 283:2866–2871, 2010.
- [37] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, and C. H. Monken. Interference effects induced by non-local spatial filtering. *Opt. Express*, 19(18):17308–17317, 2011.
- [38] E. J. S. Fonseca, C. H. Monken, and S. Pádua. Transverse coherence length of down-converted light in the two-photon state. *Phys. Rev. A*, 59(2):1608–1614, 1999.
- [39] E. J. Fonseca, C. H. Monken, and S. Pádua. Measurement of the de broglie wavelength of a multiphoton wave packet. *Phys. Rev. A*, 82(14):2868–2871, 1999.
- [40] S. P. Walborn, W. A. T. Nogueira, A. N. de Oliveira, and S. Pádua C. H. Monken. Multimode hong-ou-mandel interferometry. *Mod. Phys. Lett. B*, 19(1 & 2):1–19, 2005.
- [41] R. Shimizu, K. Edamatsu, and T. Itoh. Quantum diffraction and interference of spatially correlated photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 67(4):041805(R), 2003.
- [42] I. Vidal, S. B. Cavalcanti, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickman. Conditional talbot effect using a quantum two-photon state. *Phys. Rev. A*, 78(3):033829, 2008.

- [43] L. Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua. Two-photon high-dimensional spatial entanglement: Theory and experiment. *Mod. Phys. Lett. B*, 20(1):1–23, 2006.
- [44] P. S. K. Lee and M. P. van Exter. Spatial labelling in a two-photon interferometer. *Phys. Rev. A*, 73(6):063827, 2006.
- [45] L. P. Deng and G. F. Dang. Spatial-mode two-photon interference at a beam splitter. *Phys. Rev. A*, 74(6):063819, 2006.
- [46] D. N. Klyshko. Transverse photon bunching and two-photon processes in the field of parametrically scattered light. *Sov. Phys. JETP*, 56(4):753–759, 1982.
- [47] R. S. Bennink, Y. Liu, D. D. Earl, and W. P. Grice. Spatial distinguishability of photon produced by spontaneous parametric down-conversion with a focused pump. *Phys. Rev. A*, 74(2):023802, 2006.
- [48] H. Di Lorenzo Pires, F. M. G. J. Coppens, and M. P. van Exter. Type-i spontaneous parametric down-conversion with a strongly focused pump. *Phys. Rev. A*, 83(3):033837, 2011.
- [49] O. Suzer and T. G. Goodson III. Does pump beam intensity affect the efficiency of spontaneous parametric down conversion? *Opt. Express*, 16(25):20166–20175, 2008.
- [50] W. P. Grice, R. S. Bennink, D. S. Goodman, and A. T. Ryan. Spatial entanglement and optimal single-mode coupling. *Phys. Rev. A*, 83(2):023810, 2011.
- [51] Luis Edgar Vicent, Alfred B. U'Ren, Radhika Rangarajan, Clara I. Osorio, Juan P. Torres, Lijian Zhang, and Ian A. Walmsley. Design of bright, fiber-coupled and fully factorable photon pair sources. *New J. Phys.*, 12:093027, 2010.
- [52] C. I. osorio, G. Molina-Terriza, B. G. Font, and J. P. Torres. Azimuthal distinguishability of entangled photons generated in spontaneous parametric down-conversion. *Opt. Express*, 15(22):14636–14642, 2007.
- [53] J. Durnin, J. J. Micerly Jr., and J. H. Eberly. Diffraction-free beam. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1499–1501, 1987.
- [54] J. Turunen and A. Friberg. Propagation-invariant optical fields. *Progress in Optics*, 54:2–81, 2009.

- [55] J. C. Gutiérrez-Vega and M. A. Bandres. Helmholtz-gauss waves. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(2):289–298, 2005.
- [56] J. Lekki, Q. V. Nguyen, M. Seibert, K. Weiland, and J. Williams. single-photon non-diffracting bessel beams. *Proc. SPIE*, page 5531, 2004.
- [57] Z. Bouchal, J. Wagner, and M. Chup. Self-reconstruction of a disorted nondiffracting beam. *Opt. Comm.*, 151:207–211, 1998.
- [58] G. Gibur and O. Korotkova. Angular spectrum representation for the propagation of arbitrary coherent and partially coherent beams through atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24:745–752, 2007.
- [59] R. J. Noriega-Manez and J. C. Gutierrez-Vega. Rytov theory for helmholtz-gauss beams in turbulent atmosphere. *Opt. Express*, 15:16328–16341, 2007.
- [60] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [61] Valentin G. Dmitriev, Gagik G. Gurzadyan, and David N. Nikogosyan. *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*. Springer Series in Optical Sciences. Springer, 3rd edition, 1999.
- [62] E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, and L. A. Lugiato. Simultaneous near-field and far-field spatial quantum correlations in the high-gain regime of parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 69(2):023802, 2004.
- [63] A. B. U'Ren, K. Banaszek, and I. A. Walmsley. Photon engineering for quantum information processing. *Quantum Information and Computation*, 3(SPEC. ISS.):480–502, 2003.
- [64] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31(4):2409–2418, 1985.
- [65] Y. Jerónimo-Moreno and R. Jáuregui. Type i parametric down conversion of highly focused gaussian beams infinite length crystals. *J. Opt.*, 12:065201, 2014.
- [66] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Addison-Wesley Longman, 3rd edition, 2005.

- [67] Y. Jerónimo-Moreno and R. Jáuregui. On demand generation of propagation invariant photons with orbital angular momentum. *arXiv:1403.5474v1, quant-ph*, 2014.
- [68] R. Ramírez-Alarcón, H. Cruz-Ramírez, and A. B. U'Ren. Effects of crystal length on the angular spectrum of spontaneous parametric down-conversion photon pair. *Laser Phys.*, 23:055204, 2013.
- [69] A. B. U'Ren, C. Silberhorn, K. Banaszek, I. A. Walmsley, R. Erdmann, W. P. Grice, and M. G. Raymer. Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser Physics*, 15(1):146–161, 2005.
- [70] W. P. Grice, A. B. U'Ren, and I. A. Walmsley. Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states. *Phys. Rev. A*, 64(7):063815, 2001.
- [71] C. I. Osorio, A. Valencia, and J. P. Torres. Spatiotemporal correlations in entangled photons generated by spontaneous parametric down conversion. *New J. Phys.*, 10:113012, 2008.
- [72] K. Kato. Second-harmonic generation to 2048 Å in  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-22(7):1013–1014, 1986.
- [73] D. Zhang, Y. Kong, and J. Y. Zhang. Optical parametric properties of 532-nm-pumped beta-barium-borate near the infrared absorption edge. *Opt. Commun.*, 184:485–491, 2000.
- [74] K. Koch, E. C. Cheung, G. T. Moore, S. H. Chekmakjian, and J. M. Liu. Hot spots in parametric fluorescence with a pump beam of finite cross section. *IEEE J. Quantum Electron.*, 31(5):769–781, 1995.
- [75] Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Series in Electrical Engineering. McGraw-Hill, 2nd edition, 1984.
- [76] William R. Leo. *Techniques for Nuclear and particle Physics Experiments (A How-to Approach)*. Series in Electrical Engineering. Springer-Verlang, 2nd edition, 1994.
- [77] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3rd edition, 1998.
- [78] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, Inc., 1992.

- [79] Paul N. Butcher and David Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.