



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE
MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

"PERMEABILIDAD MAGNÉTICA Y MODELO DE DOMINIOS EN
ALEACIONES AMORFAS"

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA
FÍSICO BARTOLO GUZMÁN GUEVARA

TUTOR
DR. JOSÉ ISRAEL BETANCOURT REYES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

COMITÉ TUTOR
DR. RAÚL ALEJANDRO VALENZUELA MONJARÁS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

DR. PABLO DE LA MORA Y PALOMAR ASKINASY
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
MÉXICO, D.F. JUNIO 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado

Presidente

Dra. Vivianne Marquina Fabrega
Facultad de Ciencias.

Primer Vocal

Dr. José Israel Batancourt Reyes
Instituto de Investigaciones en Materiales.

Segundo Vocal

Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca
Instituto de Física.

Tercer Vocal

Dr. Ignacio Campos Flores
Facultad de Ciencias.

Secretario

Dr. Luis Antonio Pérez López
Instituto de Física

Dedico esta tesis a

Mis padres Francisco Guzmán Carrera, Georgina Guevara Paz †, a mi hija Paulina Guzmán Ruíz y a mis Hermanos, por estar conmigo en todo momento, a quienes llevo en el corazón.

Agradecimientos

Al Dr. José Israel Betancourt Reyes:

Por la sugerencia del tema de tesis y la dirección del trabajo, así como el estímulo y ayuda que me ofreció en la realización de este trabajo.

Quiero hacer patente mi reconocimiento a mi comité tutor de mi examen profesional, **Drs. Pablo de la Mora y Palomar Askinasy, Raúl Alejandro Valenzuela Monjarás y al jurado Drs. Vivianne Marquina Fabrega, Gerardo Jorge Vázquez Fonseca, Luis Antonio Pérez López y al M. en C. Ignacio Campos Flores**, por la cuidadosa revisión del trabajo y sus consejos para mejorarlo.

A mis hermanos y amigos: **José Antonio† , Neftali Angel, Alberto, Felipe, Nayeli, Moramay, Ines, Beny, Anna Belle, Carmelo, Francisco, Alfonso Pérez, Manuel romero, Luís Castillo, Luís Quintanar, José Luís Castañeda, Oscar Bustamante** por el cariño, amistad y ayuda que me brindaron.

ÍNDICE

Resumen	1
Introducción	2
Capítulo 1	
Conceptos Básicos de Magnetismo	3
1.1 Origen del Momento magnético	3
1.2 Campo Magnético e Inducción magnética	3
1.3 Magnetización	4
1.4 Orden Magnético	4
1.5 Interacción de Intercambio	7
1.6 Anisotropía Magnética	8
1.7 Magnetostricción	9
1.8 Dominios Magnéticos	10
1.9 Procesos de Magnetización y Ciclo de Histéresis	13
Capítulo 2	
Materiales Magnéticos Amorfos	16
2.1 Materiales Magnéticos Amorfos	16
2.2 Definición	16
2.3 Propiedades Físicas	17
2.4 Técnicas de Preparación	18
2.4.1 Solidificación Ultrarrápida	19
2.5 Cintas Amorfas Magnéticas	20
2.6 Aplicaciones de Materiales Amorfos	29
Capítulo 3	
Espectroscopia de Impedancias	32
3.1 Introducción y Formalismo	32
3.2 Curvas Espectroscópicas	35
3.3 Curvas Cole-Cole	37
Capítulo 4	
Planteamiento del Problema	38
Capítulo 5	
Discusión y Validación Experimental	42
5.1 Permeabilidad Compleja	42
5.2 Cálculo de la Inducción	45
5.3 Equivalencia Permeabilidad-Inductancia	48
5.4 Equivalencia permeabilidad-impedancia	48

5.5 Magnetoimpedancia	51
Conclusiones	55
Anexo A	57
Anexo B	67
Anexo C	69
Anexo D	71
Anexo E	77
Referencias	82

Resumen

Se calculó la permeabilidad magnética compleja de un material con geometría rectangular a partir de un modelo periódico de dominios magnéticos transversales en el que circula una corriente alterna $Ie^{-j\omega t}$. Se partió del cálculo del rotacional sobre el campo magnético H (ley de Maxwell-Ampere) y de la ley de inducción de Faraday, la cual establece la igualdad entre el rotacional del campo eléctrico y el cambio en el tiempo de la densidad de flujo magnético en magnitud. Este flujo magnético a su vez define a la permeabilidad magnética μ a través del producto μH , donde H es el campo magnético externo, el cual a su vez se obtiene a partir de la ecuación de Laplace $\nabla \cdot \nabla H(x, z) = 0$. Una vez conocido H , la permeabilidad magnética se calcula a partir de su definición.

Las componentes real e imaginaria calculadas de la permeabilidad se compararon con mediciones experimentales en una cinta de aleación amorfa $\text{Co}_{66}\text{Fe}_4\text{Mo}_2\text{B}_{12}\text{Si}_{16}$, observándose en general un buen acuerdo entre ambas, lo que permitió estimar el ancho de los dominios magnéticos de la cinta en 45 micras, aproximadamente. Asimismo, se comprobaron las equivalencias entre los formalismos de permeabilidad compleja-inductancia compleja y de permeabilidad compleja-impedancia compleja. A partir del cálculo de las componentes de la impedancia compleja, se introdujo una permeabilidad efectiva para calcular la magnetoimpedancia típica de materiales con la misma estructura de dominios, observándose un acuerdo razonable con mediciones experimentales para intervalos de frecuencias menores a la frecuencia de relajación.

Introducción

Los materiales amorfos magnéticos se han estudiado desde 1967, cuando Duwez y colaboradores mostraron que una aleación amorfa Fe-P-C obtenida por solidificación ultrarrápida es un material magnético suave [1]. La importancia de estos materiales estriba en la amplia gama de aplicaciones tecnológicas y de investigación básica que tienen, así como sus propiedades físicas notables que van desde alta inducción magnética, alta permeabilidad, capacidad de operación a altas temperaturas, ausencia de discontinuidades microestructurales, límites elásticos altos y alta resistencia a la corrosión entre otras. Algunas posibles aplicaciones van desde transformadores con menos pérdidas de operación, pasando por dispositivos para telecomunicaciones y hasta aplicaciones en la industria automotriz entre otras.

Las cintas amorfas magnéticas suaves presentan aparte de las propiedades ya mencionadas, alta resistencia mecánica, lo que las hace particularmente útiles en el diseño de pequeños sensores y transductores. Debido a su carácter amorfo, sólo la anisotropía magnetoelástica y la anisotropía de forma van a determinar su comportamiento magnético. La composición típica de cintas amorfas es de tipo T_xM_{1-x} , con Fe, Co o Ni como T y Si o B como M, con el contenido x oscilando entre 70 y el 80% at, en tanto que el Si y el B sólo aportan entre 20 y 30% at. La importancia de estudiar el comportamiento en frecuencia variable de estas cintas radica en la posibilidad de usar estos materiales en dispositivos de telecomunicaciones de alta frecuencia, donde se requieren materiales magnéticos con respuesta muy rápida.

En este trabajo de tesis se realizó un cálculo teórico de la permeabilidad compleja en una cinta amorfa magnética obtenida por solidificación Ultrarrápida $(Co_{0.93}Fe_{0.07})_{72.5}Si_{12.5}B_{15}$ con base en un modelo de dominios magnéticos de barras rectangulares, el cual se comparó con datos experimentales que obtuvieron mediante la técnica de espectroscopia de inductancias.

Capítulo 1

Conceptos Básicos de Magnetismo

1.1 Origen del Momento Magnético

El momento magnético de los átomos en estado sólido se origina a partir de la combinación de dos características del movimiento del electrón: a) el giro del electrón sobre su propio eje (conocido como espín magnético) y b) el momento angular orbital alrededor del núcleo. En ambos casos el momento magnético está cuantizado, siendo la unidad mínima el magnetón de Bohr (μ_B)[2]:

$$\mu_B = q\hbar/(2m_e) \quad (1.1)$$

Donde q es la carga del electrón (e), $\hbar = h/2\pi$ con h la constante de Planck y m_e es la masa del electrón. Sustituyendo sus respectivos valores en el SI, tenemos que:

$$\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

1.2 Campo Magnético e Inducción Magnética.

El campo magnético se origina cuando una carga eléctrica está en movimiento. Por ejemplo, cuando una corriente eléctrica fluye a través de una bobina con n vueltas, se genera un campo magnético H , la intensidad de este campo magnético está dada por $H=nI/l$, donde n es el número de vueltas, I es la corriente en amperes (A) y l es la longitud de la bobina en metros (m). Por lo tanto, las unidades de H en el sistema internacional (SI) son A/m.

Al aplicar un campo magnético en el vacío se inducen líneas de flujo magnético. El número de líneas de flujo por unidad de volumen es conocido como densidad de flujo o inducción magnética B y es definido como: $B = \mu_0 H$, donde μ_0 es la permeabilidad del vacío.

Al colocar un material dentro de un campo magnético, la inducción magnética se determina por la interacción de los momentos magnéticos permanentes o inducidos del material con el campo magnético. La inducción magnética de un material es: $B = \mu H$, donde μ es la permeabilidad del material.

1.3 Magnetización.

La magnetización (M) se define como el momento magnético total por unidad de volumen. Al considerar el momento magnético individual asociado con los electrones de un sólido y que son colectivamente alineados por un campo magnético externo, se genera la magnetización M del material. La magnetización contribuye adicionalmente con el campo magnético H a la inducción magnética B . Por lo que la inducción magnética del material es:

$$B = \mu_0(H + M) \quad (1.2)$$

Donde $\mu_0 H$ es la inducción generada por el campo magnético H en el vacío y $\mu_0 M$ es la inducción adicional debida a la presencia del material magnético.

1.4 Orden Magnético.

Al aplicar un campo magnético H en un medio, se induce una magnetización $M = \chi H$, donde χ es la susceptibilidad magnética, es la propiedad intrínseca más empleada para clasificar los diferentes tipos de orden magnético presentes en los materiales. Esta χ se define como la razón entre la magnetización y el campo magnético aplicado H :

$$\chi = M/H \quad (1.3)$$

Por su parte la permeabilidad magnética μ se define como

$$\mu = B/H \quad (1.4)$$

Con base en la χ se puede clasificar a los materiales magnéticos de la siguiente forma

a) Diamagnéticos con:

$$\chi < 0;$$

b) Paramagnéticos con:

$$0 < \chi < 1;$$

c) Ferromagnéticos, con

$$\chi \gg 1$$

A continuación se da una descripción más detallada de los mismos.

Materiales diamagnéticos: son materiales que no presentan momento magnético neto, debido a que todos los espines de sus electrones están apareados. Al aplicar un campo magnético el momento angular de los electrones genera momentos magnéticos que se oponen al campo magnético aplicado, de acuerdo con la ley de Lenz. En consecuencia la susceptibilidad que presentan estos materiales es negativa. Materiales como el cobre, la plata, H_2O , H_2 y N_2 [3] son diamagnéticos a ($T=0^\circ C$). Los superconductores son diamagnéticos perfectos con $\chi = -1$. Los valores de χ típicos de los materiales diamagnéticos están en el intervalo de -1×10^{-7} a -2×10^{-6} .

Materiales Paramagnéticos. El comportamiento paramagnético se presenta en materiales que tienen los espines de sus electrones no apareados, generando así un momento magnético resultante por átomo. En ausencia de un campo magnético aplicado, este momento magnético individual se orienta en forma aleatoria debido a la agitación térmica. Al aplicar un campo H , los momentos magnéticos se alinean débilmente con el campo, causando una magnetización muy pequeña positiva. En estos materiales los momentos magnéticos no interactúan y en general se requiere de campos relativamente altos para alinear los momentos magnéticos. Ejemplos de estos materiales son O_2 , Pt, Ca, y el aluminio (Al) [1]. La susceptibilidad que presentan es muy pequeña, con valores típicos de alrededor de 10^{-5} .

Materiales magnéticamente ordenados. Estos materiales presentan momentos magnéticos intrínsecos en cada átomo que al orientarse inducen una magnetización espontánea. Los metales de transición tales como Fe, Co, Ni [1] y muchas de sus aleaciones metálicas, además de óxidos organometálicos y fluoruros, presentan orden magnético espontáneo, si se someten a temperaturas por arriba de la temperatura de Curie (T_C) se vuelven paramagnéticos. En estos materiales es posible tener diferentes tipos de orden magnético:

1. Ferromagnetismo: El comportamiento ferromagnético es originado por niveles de energía parcialmente llenos, como es el caso de los niveles 3d (metales de transición) y 4f (tierras raras). Los momentos magnéticos en estos niveles energéticos se alinean entre ellos paralelamente (Fig. 1.2a) dando lugar a una magnetización espontánea. Ejemplo de ellos son el Co, Fe y Ni. En estos materiales se presentan susceptibilidades relativas del orden de 10^6 .
2. Antiferromagnetismo: En estos materiales los momentos magnéticos presentes se ordenan en forma antiparalela entre ellos (Fig. 1.2b), como consecuencia, su magnetización neta es nula. Ejemplos de materiales antiferromagnéticos son: el Mn, Cr, MnO y NiO.
3. Ferrimagnetismo: Este orden magnético se presenta generalmente en materiales cerámicos. Se tienen momentos magnéticos de diferente magnitud que se orientan antiparalelamente pero no se anulan completamente. Presentan por lo tanto, una magnetización reducida (Fig. 1.2c), ejemplo de estos son los óxidos de Fe con Co, Mg o Zinc.

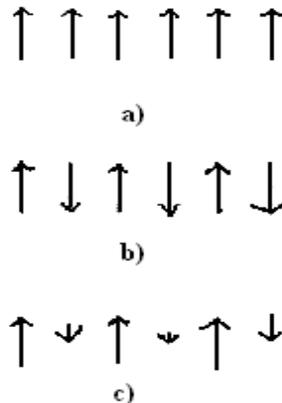


Figura 1.1 Tipos de ordenamiento magnético:

- a) Orden ferromagnético, b) Orden antiferromagnético,
- c) Orden ferrimagnético.

1.5 Interacción de Intercambio

El ordenamiento de los momentos magnéticos en un material ferromagnético es causado por la interacción de intercambio. Esta energía es de origen mecánico-cuántico y es resultado de la interacción del espín con sus vecinos más cercanos. El campo efectivo producido por esta interacción es de largo alcance, con un equivalente en campo magnético del orden de 10^9 A/m (10^7 Oe)[3, 4].

En 1928 Heisenberg estableció que la energía de intercambio E_{ex} está descrita por la ecuación:

$$E_{ex} = -2J_{ex} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = -2J_{ex} s_1 s_2 \cos\theta \quad (1.5)$$

Donde θ es el ángulo entre los espines \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 y J_{ex} es la integral de intercambio. Si $J_{ex} > 0$, la energía mínima da origen al orden ferromagnético; para $J_{ex} < 0$ la alineación de los espines para minimizar la energía es antiparalela.

En 1933 Bethe calculó las integrales de intercambio para Fe, Ni, Mn, y Cr como función de la distancia interatómica y el radio de los orbitales 3d (aproximación de Heitler-London para los metales de transición). En la figura 1.2 se muestra un gráfico conocido como curva de Bethe-Slater, la cual establece el signo de J_{ex} para ordenamiento ferro/antiferromagnético. De acuerdo con esta gráfica, Fe, Ni y Co son ferromagnéticos, en tanto que Mn y Cr son antiferromagnéticos.

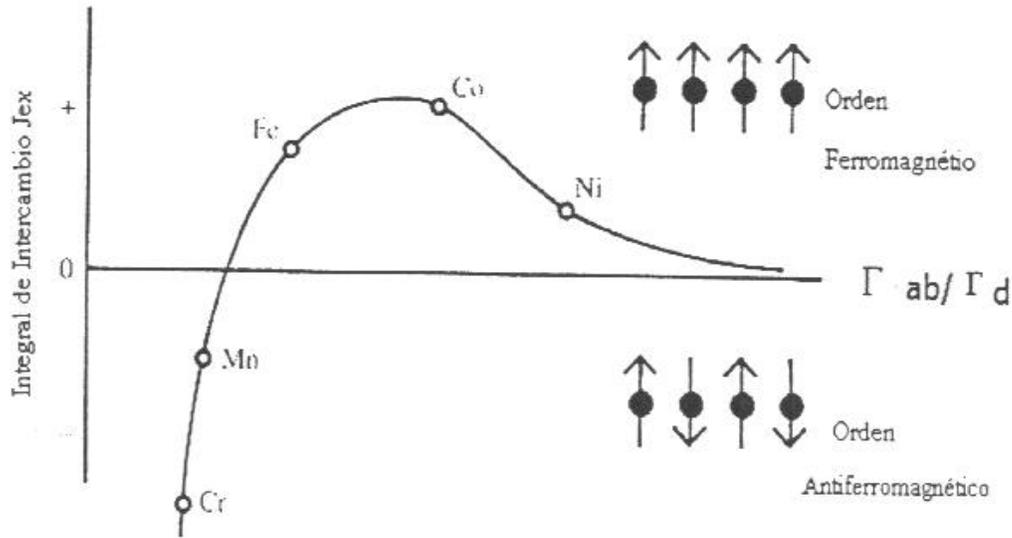


Figura 1.2- Curva de Bethe –Slater, en la que se indica el tipo de orden magnético, según el signo de J_{ex} (la Integral de intercambio).

En un sólido la interacción de intercambio es resultado de la suma sobre todos los electrones que contribuyen a la energía de intercambio, esto es:

$$E_{ex} = -2 \sum_i \sum_j J_{ij} S_i \cdot S_j \quad (1.6)$$

1.6 Anisotropía Magnética

La anisotropía magnética está determinada por la variación de la energía interna en función de la dirección de la magnetización espontánea. La dirección de los momentos magnéticos para la cual se minimiza la energía se llama dirección fácil. La energía necesaria para desviar a los espines de la dirección fácil es llamada la energía de anisotropía.

Un tipo muy importante de anisotropía magnética es la anisotropía magnetocristalina la cual se presenta en estructuras cristalinas cúbicas o uniaxiales y se origina en el

acoplamiento espín-orbita, lo que da lugar a direcciones preferentes del momento angular orbital determinadas por la simetría del cristal. La energía de anisotropía (E_K) tiene una expresión empírica que en materiales con estructura hexagonal o tetragonal con simetría axial se expresa como [3, 5]:

$$E_A = K_1 \text{sen}^2 \theta + K_2 \text{sen}^4 \theta + K_3 \text{sen}^4 \theta \cos^4 \phi + \dots \quad (1.7a)$$

Donde K_n con $n = 1, 2, 3, \dots$, son las constantes de anisotropía magnetocristalina, θ es el ángulo entre la magnetización y el eje c (eje cristalográfico) de la estructura cristalina y ϕ es el ángulo azimutal. El signo de K_n depende de la dirección fácil.

En estructuras cúbicas la energía de anisotropía se expresa en función de una sola constante de anisotropía [3]:

$$E_A = K_1 (\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_3 \cos^2 \theta_1) \quad (1.7b)$$

Donde $\cos^2 \theta_i$, $i=1,2,3$, son los cósenos directores y las θ_i 's son los ángulos de la magnetización con el eje c .

El campo de anisotropía (H_A) es el campo magnético necesario para desviar la magnetización 90° de la dirección fácil. El H_A para varias direcciones se expresa de la siguiente forma:

$$H_A = 2K_1 / (\mu_0 M_S) \quad \text{para el eje fácil } \langle 100 \rangle$$

$$H_A = (2K_1 + 4K_2) / (\mu_0 M_S) \quad \text{para el eje fácil } \langle 111 \rangle \quad (1.8)$$

$$H_A = 2K_1 / (\mu_0 M_S) \quad \text{para materiales uniaxiales}$$

Con μ_0 la permeabilidad del vacío y M_S la magnetización de saturación del material.

1.7 Magnetostricción

Este efecto también es originado por el acoplamiento espín-orbita. Los cambios en la dirección del espín resultan en cambios de la orientación de la órbita, como consecuencia se modifica la longitud del material, como se ilustra en la figura 1.3 [6].

La constante de magnetostricción λ_s se define como la diferencia de la longitud inicial L_0 a campo $H = 0$ y la longitud L a H_s (H de saturación) $\neq 0$ entre L_0 , es decir:

$$\lambda_s = \Delta L / L_0, \text{ donde } (\Delta L = L - L_0) \quad (1.9)$$

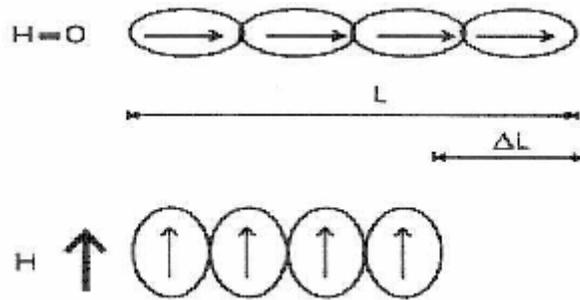


Figura 1.3- Representación esquemática del origen de la magnetostricción como consecuencia del acoplamiento espín-orbita.

1.8 Dominios Magnéticos

El acoplamiento entre espines debido a la interacción de intercambio y su alineación en la dirección de eje fácil determinado por la anisotropía generaría una magnetización muy intensa. Aunque esta condición minimiza la energía de intercambio y de anisotropía, a su vez maximiza la energía magnetostática (E_m), la cual es proporcional a la magnetización:

$$E_m = -NM^2/2 \quad (\text{donde } N \text{ es el factor de desmagnetización}) \quad (1.10)$$

Para minimizar la energía magnetostática, el material magnético se divide en volúmenes, llamados dominios, los cuales presentan un estado de saturación magnética pero con

diferente dirección. Esto compensa el flujo de un dominio con otro. En consecuencia el flujo magnético externo y por ende, la energía E_m es cero. La presencia de dominios magnéticos induce el estado de mínima energía (energía de intercambio, anisotropía y magnetostática). Estos dominios magnéticos fueron propuestos por Weiss en 1906.

En la figura 1.4 se muestra la minimización de la energía magnetostática mediante dominios magnéticos y la estructura magnética final de un material ferromagnético.

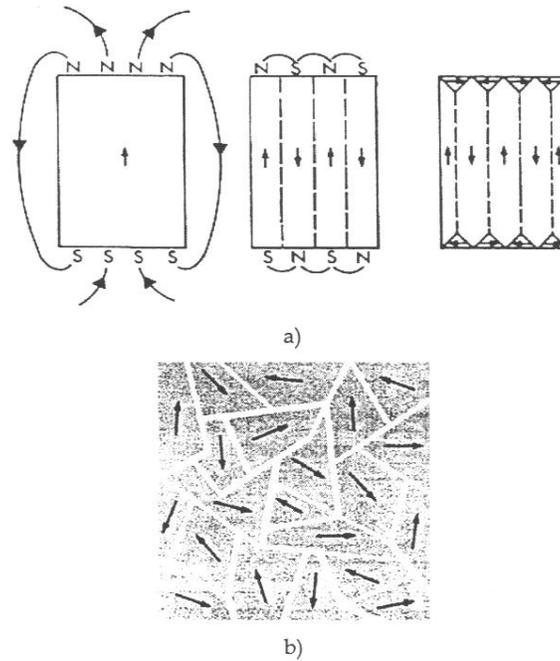


Figura 1.4-Representación de la estructura de dominios magnéticos

- a) Reducción de la energía magnetostática mediante creación de dominios. b) arreglo de dominios magnéticos.

Las fronteras que separan un dominio de otro se llaman paredes de dominios magnéticos. La transición de un dominio a otro se da mediante una rotación gradual del espín hacia otra dirección. La figura 1.5 muestra que el ancho δ_w de la pared magnética es originada por el cambio de orientación de los espines.

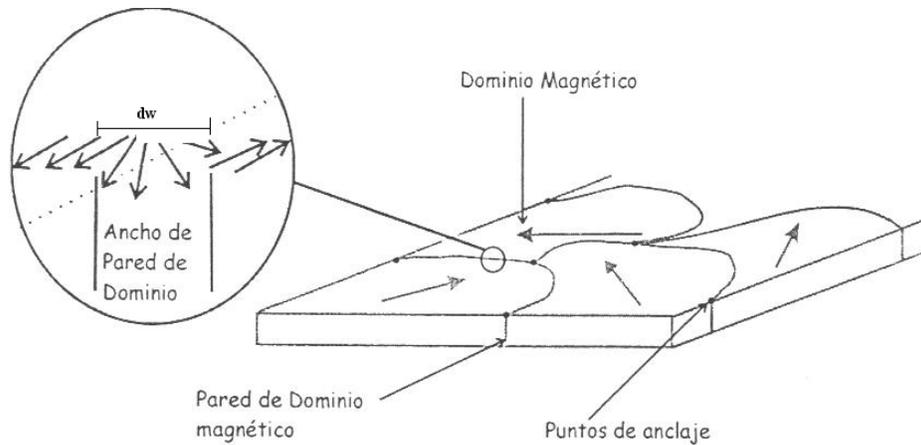


Figura 1.5 Pared de dominio magnético. El ancho de la pared se denota Como δ_w .

El ancho de pared δ_w está determinado por dos factores:

1. La interacción de intercambio: la energía de la pared aumenta debido a que en ella los espines no están ordenados paralelamente. Se presenta una contribución a la energía total que es proporcional a la diferencia de ángulo entre espines vecinos, por lo que la interacción de intercambio aumenta el ancho de la pared para minimizar energéticamente a la pared.
2. La anisotropía: Para minimizar la energía de anisotropía se requiere una población mínima de espines orientados en la dirección fácil de magnetización.

A partir de la condición de mínima energía de intercambio y de anisotropía se calcula la energía de pared (E_w) y el ancho (δ_w) en una estructura cúbica como sigue [1, 3]:

$$E_w = 2\sqrt{AK_1} \quad (1.11)$$

$$\delta_w = \sqrt{\frac{A}{K_1}} \quad (1.12)$$

Donde K_1 es la constante de anisotropía y A es la constante de intercambio.

1.9 Procesos de Magnetización y Ciclo de Histéresis

Los procesos de magnetización en un material magnético sujeto a campos externos H de magnitud variable pueden en general, definirse en tres tipos: a) deformación reversible de pared magnética b) desplazamiento de paredes y c) rotación de espín [7].

Estos tres mecanismos se detallan a continuación en función del campo de propagación H_p , el cual representa la magnitud del campo aplicado necesario para propagar una pared magnética.

- a) Deformación reversible de pared magnética. Ocurre cuando $H < H_p$. Se presenta un “abombamiento” de la pared magnética como consecuencia del aumento de volumen de un dominio paralelo a H , como se indica en la figura 1.6. Como la pared magnética esta inicialmente “anclada” esta deformación es reversible, esto es, la pared recupera su forma original en cuanto $H=0$. En una gráfica $B-H$ (como la de la figura 1.7), este mecanismo da lugar a una relación lineal $B(H)$ la cual representa el inicio de la curva de inducción. La pendiente de esta región lineal se conoce como “permeabilidad inicial” del material. El campo de propagación H_p corresponde al valor de H para el cual cambia la pendiente (y en consecuencia el mecanismo de magnetización).

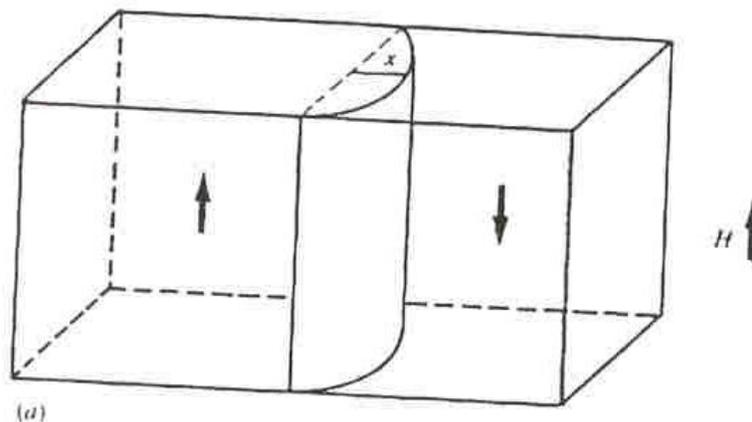


Figura 1.6. Abombamiento reversible de pared magnética.

- b) Desplazamiento de paredes. Ocurre cuando $H > H_p$. Para estos valores de H , la pared de dominio “se desancla”, produciéndose su desplazamiento, lo que permite cambios drásticos en la inducción de B , para pequeños incrementos de campo ΔH . Los dominios en la dirección del campo externo H crecen a expensas de los otros. El campo de propagación depende de los defectos en el material como son: defectos puntuales, dislocaciones, fronteras de grano, porosidades e incluso la superficie del material los cuales actúan como sitios de anclaje y obstaculizan el movimiento de la pared, incrementando así el valor de H_p . En la gráfica $B(H)$ este mecanismo aparece como un aumento súbito de B (Fig. 1.7).

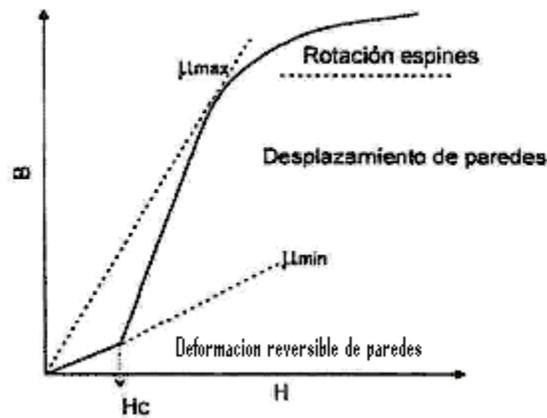


Figura 1.7 Procesos de magnetización

- c) Rotación de espín. Ocurre para $H \gg H_p$. Una vez que la pared se ha desplazado se tiene casi la totalidad de la muestra en estado de saturación. Los espines magnéticos que aún no se orientan paralelos a H por el desplazamiento de la pared, lo harán mediante rotación, de manera que para H suficientemente grande los espines remanentes se orientaran en la dirección del mismo. Este mecanismo completara la saturación del material en la dirección del campo. En la gráfica $B(H)$, este proceso se observa al final de la curva como una reducción en la pendiente de B/H (Fig. 1.7). Después de alcanzar la saturación, cuando el H aplicado se reduce hasta cero, la inducción B no regresa a cero, sino que se

presenta una inducción remanente a $H = 0$ como resultado de que al finalizar el desplazamiento de las paredes de dominio estas quedan ancladas en puntos diferentes a los iniciales, dando como resultado una componente de B (Fig. 1.8). Al aplicar un campo externo en la dirección contraria a la inicial, se presenta nuevamente la deformación reversible de la pared para campos pequeños. Para que exista el desplazamiento de pared se requiere de un campo mayor al campo de propagación inicial, este campo se conoce como campo coercitivo; en este punto la pared comienza su desplazamiento orientado a los espines a una nueva dirección de saturación. Al desaparecer nuevamente el campo aplicado se presenta una inducción remanente de signo contrario (fig. 1.8) [8].

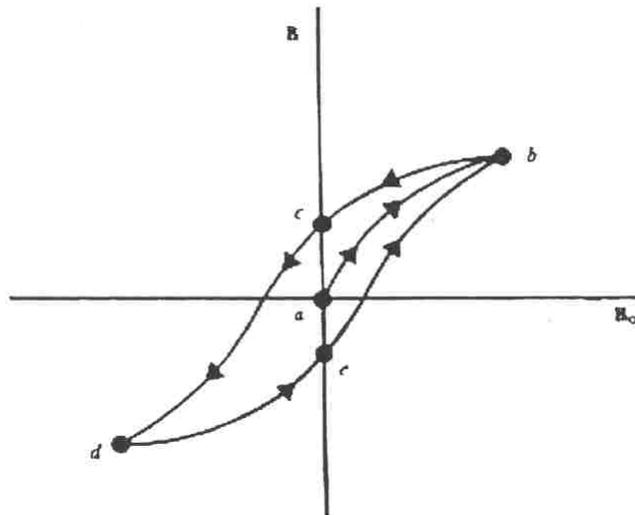


Figura 1.8 Curva completa de magnetización inicial (ab) y de histéresis (abcde).

Cuando un material se magnetiza fácilmente y presenta campos coercitivos (H_C) muy pequeños ($H_C < 1 \text{ kA/m}$) recibe el nombre de material magnéticamente suave. Un material duro o imán permanente requiere de campos altos para modificar su estado de magnetización y en consecuencia presenta campos coercitivos grandes ($H_C > 10 \text{ kA/m}$).

Capítulo 2

Materiales Magnéticos Amorfos

2.1 Materiales Amorfos

En las últimas tres décadas se han desarrollado una gran variedad de aleaciones amorfas que presentan propiedades magnéticas importantes que promueven la investigación de sus propiedades físicas tales como: arreglo atómico, propiedades magnéticas, estados electrónicos y propiedades magneto-ópticas [3, 9].

2.2 Definición

Un sólido cristalino se caracteriza por poseer un arreglo estructural periódico de largo alcance. Por su parte, los metales amorfos no presentan periodicidad de largo alcance en su arreglo atómico, sino más bien, cierto orden de corto alcance, como se indica en la figura 2.1.

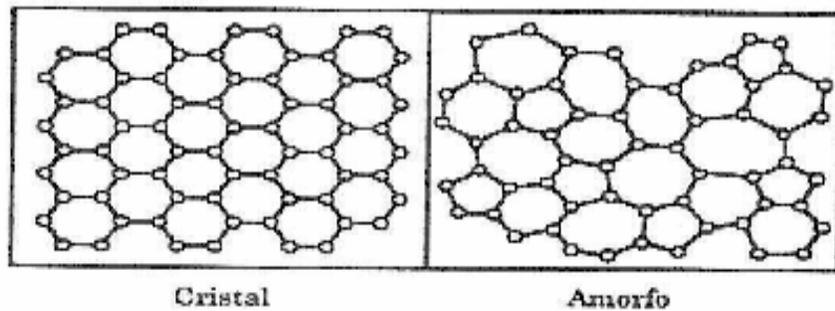


Figura 2.1-Estructura cristalina y amorfa.

El sólido amorfo se encuentra en un estado metaestable separado del estado base termodinámicamente por una diferencia de energía ΔE .

El tamaño de esta diferencia de energía proporciona una medida de la estabilidad del estado metaestable; la razón entre la cristalización y el tiempo de vida media del estado metaestable es proporcional a $\exp\left(\frac{\Delta E}{K_B T}\right)$, con T la temperatura y K_B la constante de

Boltzmann [7]. Cuando un estado metaestable es sometido a temperaturas suficientemente altas este estado se transforma inevitable e irreversiblemente en un sólido cristalino con una o más fases cristalinas diferentes.

2.3 Propiedades Físicas.

Debido a la ausencia de orden atómico de largo alcance, las aleaciones amorfas se caracterizan en general por poseer [3, 10]:

1. Una resistividad eléctrica alta (debido a una mayor dispersión de electrones. Las resistividades típicas fluctúan entre $100\text{-}200 \mu \Omega \cdot \text{cm}$).
2. Ausencia de discontinuidades microestructurales (como fronteras de grano o precipitados).
3. Límites elásticos altos (debido a la ausencia de dislocaciones).
4. Alta resistencia a la corrosión (debido a la ausencia de fronteras de grano).

Por su parte, las aleaciones amorfas metal de transición-metaloides son las más explotadas para aplicaciones magnéticas suaves [11] debido a su muy bajo campo coercitivo (del orden de decenas de A/m), su alta magnetización de saturación (0.5-1.8T), su alta permeabilidad magnética (10^4 - 10^5) y su mínima o nula anisotropía [3, 12]. Estas cualidades son resultado en gran parte de la ausencia de defectos cristalinos como frontera de grano que dificultan el movimiento de paredes magnéticas. Además poseen propiedades mecánicas importantes como alta dureza y resistencia a la fractura, lo que posibilita su aplicación en dispositivos expuestos a desgaste continuo [9].

La existencia de aleaciones amorfas ferromagnéticas muestra que el intercambio magnético entre primeros vecinos origina que los espines de átomos de la primera y la segunda capa de coordinación se ordenen al átomo origen, teniendo energía de intercambio con un alcance suficiente para crear una distribución espacial de los espines

en todo el material. Estos materiales llegan a tener temperaturas de Curie del orden de 700 K [12].

Las aleaciones amorfas metal-metaloides más estudiadas son las siguientes:

- a) Aleaciones base Fe. Poseen los valores más grandes de inducción de saturación (1.7-1.75T) y valores altos de magnetostricción ($\lambda_s \approx 30 \times 10^{-6}$).
- b) Aleaciones base Fe-Ni. El contenido de Ni controla la formación amorfa, mejorando su ductilidad y reduciendo su constante de magnetostricción ($\lambda_s \approx 10^{-6}$).
- c) Aleaciones base Co. Tienen las mejores características como materiales suaves, con magnetización de saturación media ($M_s \approx 0.5-0.8T$), magnetostricciones pequeñas, permeabilidades altas y campos coercitivos bajos.

2.4 Técnicas de Preparación

Existen diferentes métodos para obtener materiales amorfos y dependiendo del método de preparación las muestras amorfas pueden ser películas delgadas, discos, hilos o cintas. En general estos métodos se pueden clasificar como:

- a) Evaporación térmica.
- b) Sputtering.
- c) Solidificación ultrarrápida.

La técnica de evaporación térmica consiste en producir flujo de vapor del material de interés en una cámara de vacío por medio de la evaporación térmica del material, este vapor se va a depositar en una superficie fría con lo cual se temple al darse gradientes de temperatura muy grandes o velocidades de enfriamiento muy grandes permite que se forme el material amorfo.

La técnica de sputtering consiste principalmente en disparar iones con energías de 100 a 1000eV, los cuales materialmente arrancaran los átomos de la superficie de un blanco de cierto modo controlado y posteriormente estos mismos átomos serán colocados de manera controlada en un sustrato, este proceso se lleva a cabo por una transferencia efectiva de momento y uno de varios ejemplos de la vida cotidiana en donde se usa esta técnica es en la creación de espejos de gran calidad.

En este trabajo, las muestras magnéticas que se emplearon se obtuvieron mediante el método de solidificación ultrarrápida.

2.4.1 Solidificación ultrarrápida. Esta técnica consiste en inyectar material fundido sobre un sustrato macizo de Cu en forma de disco con movimiento giratorio a altas velocidades tangenciales (típicamente $\geq 40\text{m/s}$ o más) (Fig. 2.2). La transferencia tanto de calor (debido al alto coeficiente de transferencia térmica del Cu) como del momento angular (debido a la rotación) resulta en velocidades de enfriamiento del orden de 10^6 K/s, lo que permite la obtención de materiales amorfos o nanoestructurados (materiales policristalinos con tamaño de grano inferior a 60nm). El material sale eyectado tangencialmente en forma de cinta metálica muy delgada, con espesores típicos menores a $20\ \mu\text{m}$ y ancho entre 2 y 4 mm.

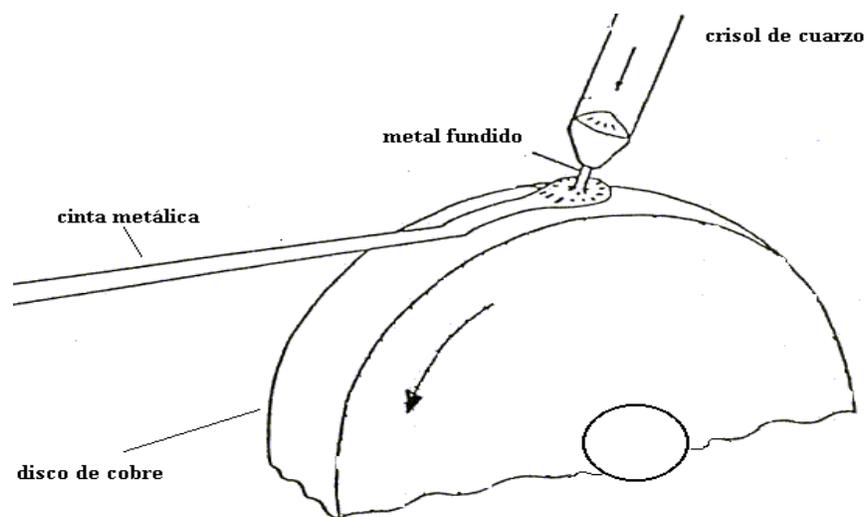


Figura 2.2 Diagrama del sistema de solidificación ultrarrápida para obtener cintas de aleaciones amorfas.

Una variante de esta técnica consiste en inyectar material fundido no sobre un disco macizo de cobre sino sobre un baño de agua giratorio en un tambor como se ilustra en la Fig. 2.3. En este caso, se forman alambres amorfos con diámetro inferior a $100\ \mu\text{m}$ y longitud variable.

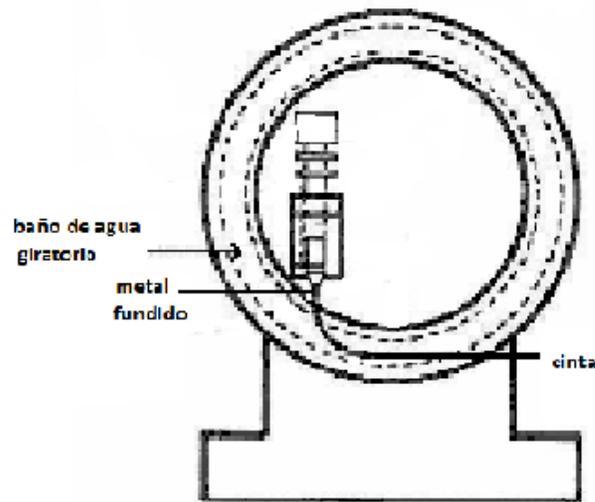


Figura 2.3 Diagrama del sistema de solidificación ultrarrápida para obtener cintas de aleaciones amorfas.

2.5 Cintas Amorfas Magnéticas

Los primeros reportes de materiales amorfos magnéticos suaves, como son cintas y alambres amorfos, fueron publicados desde hace más de 50 años por Miroschnitchenko, Salli y Duwez [13, 14, 15]. Mucho del interés comercial y tecnológico que se tiene de los materiales amorfos magnéticos se debe a sus excelentes propiedades (altos valores de inducción y permeabilidad magnética, excelentes propiedades mecánicas y químicas como la resistencia a la corrosión) las cuales compiten con las de sus contrapartes cristalinos, además que son muy manejables química y estructuralmente.

Estructura atómica

Se sabe que en aleaciones amorfas magnéticas existe orden de corto alcance debido al empaquetamiento compacto que tienen, predicho por el modelo de esferas duras. Por ello es de esperarse que su número de coordinación sea 12, en el caso en que se trate de aleaciones a base de metales de transición (T) y metaloides (M) [3]. Lo anterior se corresponde con los poliedros de Bernal de la figura 2.4, donde se espera que en los vértices haya metales de transición T y en el centro haya átomos de metaloides M figuras (a) y (b), [3], en tanto que en la figura (c) el prisma trigonal puede estar compuesto de átomos T, en las caras y posiblemente en el centro puede contener átomos M. De acuerdo a las funciones de distribución radial o funciones de correlación de pares, se ha establecido que en aleaciones amorfas base T-M se forman pares de vecinos cercanos de T-T o T-M, pero no M-M [3].

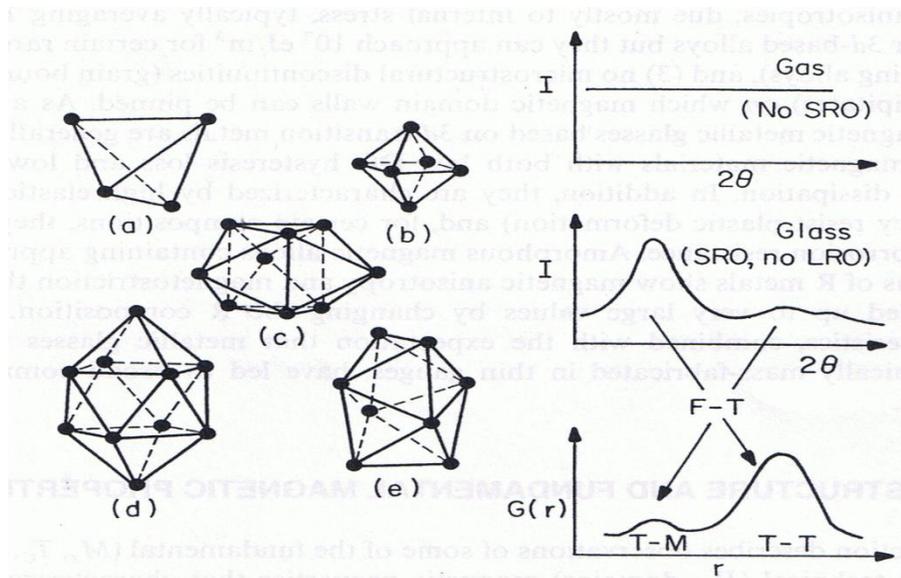


Fig. 2.4. Izquierda, estructura de Bernal que representa al orden de corto alcance de átomos en materiales amorfos, en donde se espera que en los vértices haya átomos de metales de transición T y en él centro átomos de metaloides M figuras (a) y (b), en tanto que en la figura (c) adicionalmente se considera que en las caras y en el centro haya átomos de metaloides M. Derecha, esquema de intensidad de rayos x vs ángulo de dispersión 2θ para una aleación amorfa con corto alcance. $G(r)$ es la función de correlación de pares derivada de $I(\theta)$.

Campo Coercitivo en los Materiales Amorfos.

El campo coercitivo en los materiales amorfos es muy bajo debido a la carencia de defectos estructurales, por lo que las paredes de dominios magnéticos no tienen donde anclarse, lo cual hace que sean anchas y grandes y que puedan desplazarse con facilidad. Por su parte la permeabilidad magnética es muy grande, lo cual hace que los materiales amorfos sean excelentes materiales magnéticos suaves, siempre y cuando el número de paredes de dominios magnéticos sea grande. Adicionalmente en los materiales amorfos magnéticos se tienen valores de resistencia eléctrica del orden de $150 \Omega/\text{cm}$, lo cual hace que se supriman las corrientes de Eddie, lo que mejora sustancialmente el desempeño magnético de estos materiales a altas frecuencias de campo externo aplicado.

El Magnetismo y el Orden de Corto Alcance.

El magnetismo en sólidos es consecuencia del orden del corto alcance y no del orden de largo alcance, por lo que la disminución de los momentos magnéticos o de la permeabilidad magnética y de la temperatura de Curie en aleaciones amorfas T-M está fuertemente influenciada por el ordenamiento químico de largo alcance y el número de primeros vecinos. Esta influencia se pone de manifiesto en aleaciones amorfas base Fe con contenido variable de boro, para las cuales se ha detectado una fuerte dependencia de la magnetización y la temperatura de Curie con el contenido de boro, el cual a su vez afecta sensiblemente la configuración atómica de corto alcance, y por tanto, la interacción de intercambio entre átomos magnéticos [16, 17].

Dominios Magnéticos.

Es sabido que los dominios magnéticos se forman a partir de la interacción de intercambio y de la anisotropía cristalina para minimizar la energía magnetostática. Adicionalmente, en materiales amorfos interviene en la formación de dominios otra clase de anisotropía, en particular la aleatoria y la inducida de campo o de esfuerzo. En materiales amorfos los dominios magnéticos pueden ser franjas onduladas (véase la figura 2.5a) como consecuencia de que las paredes de dominios magnéticos siguen la dirección de la anisotropía de campo inducida y la misma magnetización trata de seguir la anisotropía aleatoria imperante en estos materiales; o bien, pueden seguir arreglos bien

definidos determinados por esfuerzos unidireccionales, como en el caso de los dominios transversales en una cinta amorfa $\text{Co}_{66.5}\text{Fe}_{3.5}\text{Si}_{12}\text{B}_{18}$ mostrados en la figura 2.5b

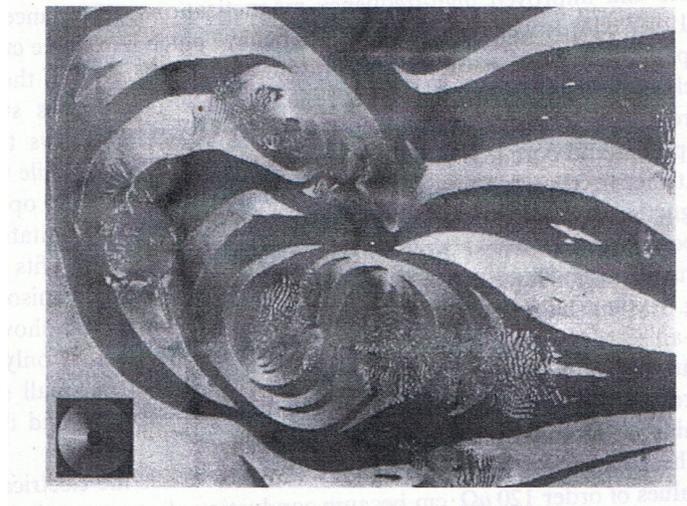


Fig. 2.5a. Patrón de dominios magnéticos en una aleación amorfa de FeBSi[3, 18].

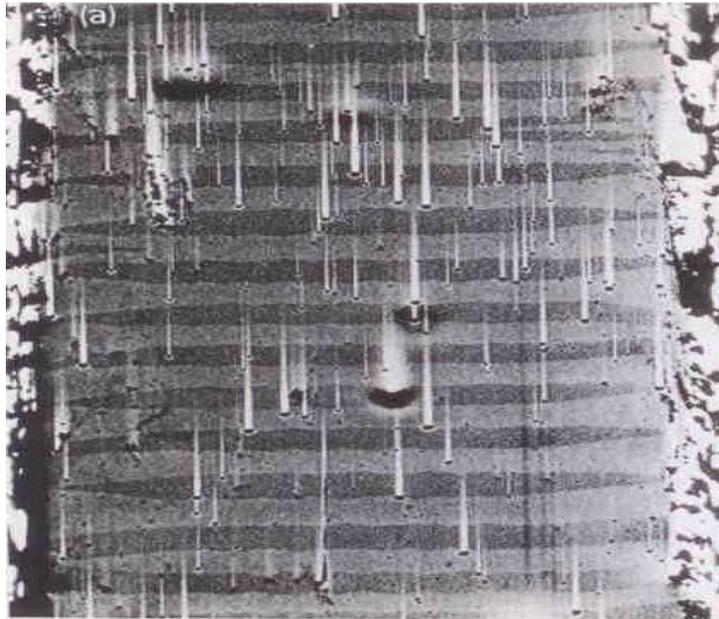


Fig.2.5.b. Dominios magnéticos transversales en una cinta amorfa $\text{Co}_{66.5}\text{Fe}_{3.5}\text{Si}_{12}\text{B}_{18}$. La dirección longitudinal de la cinta es vertical, como lo indican los defectos superficiales en forma de líneas provocados por burbujas de gas atrapadas durante la solidificación. El ancho de los dominios transversales en la dirección vertical es de 38 micras aproximadamente, mientras que el ancho de la cinta es de 0.6 mm [19].

Momento magnético.

El momento dipolar magnético en aleaciones amorfas depende principalmente de la composición química de la aleación [19]. Los modelos que describen la magnetización en amorfos son varios, entre ellos el modelo de Friedel para metales de transición, en el cual la densidad de estados para electrones-d $g(\epsilon)$ se aproxima por la constante $g(\epsilon)$ y el ancho de banda W . Cuando el soluto es débil es decir, para $\Delta Z \leq 1$ (donde ΔZ es la diferencia de valencia entre átomos soluto y solvente), entonces los cambios del momento se explican bien por el modelo de banda rígida. En el sitio de un átomo soluto se espera una reducción del momento de $\Delta Z \mu_B$, en tanto que el momento magnético de la matriz solvente μ_{matrix} es independiente de la concentración y entonces el momento magnético promedio resultante por átomo es:

$$\mu_{\text{av}} = \mu_{\text{matrix}} - \Delta Z C \mu_B, \text{ donde } C \text{ es la concentración de soluto.} \quad (2.1)$$

En el caso en que el potencial del soluto sea fuertemente perturbador y altamente localizado, $\Delta Z > 2$. Friedel propuso el modelo de estado de enlace virtual (VBS). Así un estado de enlace será sustraído desde la banda-d y movido a energías superiores, como la VBS se mueve por encima del nivel de Fermi, un cambio grande en el momento magnético se espera al pasar los electrones de la banda VBS a la banda de conducción. De este modo por cada átomo de soluto adicional, un estado degenerado 3d VBS se vaciara hacia 5 estados desocupados 3d de la banda de conducción. El cambio en momento magnético que predice es:

$$\mu_{\text{av}} = \mu_{\text{matrix}} - (\Delta Z + 10) C \mu_B \quad (2.2)$$

En tanto que la supresión del momento es dada por:

$$d \mu_{\text{av}} / dc = -(\Delta Z + 10) \mu_B. \quad (2.3)$$

Otros modelos más recientes son el modelo de valencia magnética y el modelo de coordinación de enlace que han sido aplicados para modelar la reducción del momento magnético en sistemas con metales de transición (T)-metaloide (M). En estos últimos, la reducción del momento magnético se ve en función de un estado-d polarizado, el cual es extraído desde el metal de transición para cada enlace T-M. El momento dipolar promedio para este último modelo es dado por:

$$\mu_{\text{av}} = \mu_T^0 - [1 - x(1 + Z_M / 5)] \quad (2.4)$$

Donde x es la composición de la aleación $T_{1-x}M_x$ y Z_M es la coordinación de M por T átomos, el cual se puede obtener a partir de la coordinación de aleaciones cristalinas de similar composición.

Interacción de intercambio

Se sabe que el orden magnético en materiales que tienen desorden estructural como son los materiales amorfos tiene su origen en la energía de intercambio y de la anisotropía local. La energía de intercambio surge de las correlaciones electrón-electrón y a su vez el orden estructural es susceptible a la superposición de las funciones de onda de electrones [3].

La distribución de la energía de intercambio incidirá principalmente en la reducción de la temperatura de Curie (T_C) de aleaciones amorfas. Las fluctuaciones en la energía de intercambio van a incidir directamente en la descripción de campo medio de la magnetización en función de la temperatura $M(T)$ en aleaciones amorfas, Hendrich and Cobe [20] propusieron una teoría del campo medio introduciendo una magnetización reducida $m(T)=M(T)/M(0K)$, donde un parámetro de intercambio fue cambiado por otro parámetro de intercambio que reflejara la distribución de la posición de vecinos más cercanos en la fase amorfa, la expresión de la magnetización reducida está dada por:

$$M(T)=(B_s[(1+\delta_{ex})x]+ B_s[(1-\delta_{ex})x])/2. \quad (2.5)$$

Donde:

$$x=\mu_o\mu_m H/k_B T, \text{ es el campo variable efectivo.} \quad (2.6)$$

Los cuales son los argumentos de una función de Brillouin convencional B_s . Mientras que el parámetro de fluctuación de la interacción de intercambio está dado por:

$$\delta_{ex} = [\langle \Delta J^2 \rangle / \langle J \rangle^2] \quad (2.7)$$

De la cual se conjetura que tiene una dependencia de T dada por:

$$\delta_{ex} = \delta_{0ex} (1-t^2).$$

Sin embargo a finales de los 90's, Gallagher y su equipo [3] le hicieron mejoras a este modelo para una aleación amorfa $Fe_{88}Zr_7B_4Cu_1$, dando un mejor ajuste a la dependencia de la magnetización con respecto a la temperatura, al introducirse dos parámetros de fluctuación de la interacción de intercambio en la teoría de campo medio. La ecuación resultante finalmente es:

$$M(T) = (B_s[(1+\delta_+)x] + B_s[(1-\delta_-)x])/2. \quad (2.8)$$

Donde δ_+ y δ_- no necesariamente son iguales y pueden actuar como un ajuste de primer orden en una función de la distribución asimétrica.

Fluctuaciones de la energía de intercambio.

Se sabe que la interacción de intercambio promueve la correlación de largo alcance en dirección de la magnetización, Muchas veces sucede que compuestos que son antiferromagnéticos al hacerlos en estado amorfo se vuelven ferromagnéticos lo cual es debido dos factores; el primero de ellos es el acoplamiento antiferromagnético perfecto que se ve frustrado cuando se carece de orden estructural y debido principalmente a fluctuaciones en la interacción de intercambio lo cual permite una salida local del intercambio del antiferromagnetismo. El otro factor es debido a la razón de intercambio positiva de la interacción de intercambio ya que eso hace que el espaciado medio atómico aumente en el estado amorfo, así lleva al sistema de un acoplamiento antiferromagnético al ferromagnético, por otro lado el orden de corto alcance hace que esta interacción fluctúe con lo cual cambia su intensidad espacialmente lo cual a su vez provoca que también el momento de saturación también sufra cambios de punto a punto [3]. Los Efectos de corto alcance los considero Hendrich [20] sobre la interacción de intercambio y la cual se expresa como su valor medio más las fluctuaciones de la misma Δf_{ij} y se refleja en el momento reducido $m(T)$.

$$m(t) = M(T)/M(0) = 1/2 [B_x x(1+\delta) + B(1-\delta)] \quad (2.9)$$

Donde δ es la raíz cuadrada media de las fluctuaciones de la interacción de intercambio y x es la variable del campo medio efectiva, la cual está dada por:

$$x = \mu_0 \mu_m H / [K_B T] \quad (2.10)$$

Sin embargo Alben et al [21], señalan que esa contracción se debe a la carencia de orden químico.

Anisotropía magnética:

La anisotropía magnética es originada por la interacción del campo eléctrico con la orientación del spin a través del acoplamiento spin-orbita. En particular en las cintas amorfas magnéticas, la anisotropía magnética es perpendicular y por lo cual es

considerada de orden direccional[22, 23, 24], la cual surge de la anisotropía magnetoelástica (la cual es considerada dominante) en esa dirección y es relacionada con el acoplamiento magnetoelástico [25, 26] debido al efecto del tratamiento de calor y del estrés aplicado sobre la anisotropía magnética con lo cual la anisotropía magnetoelástica rápidamente tiende a cero, esto ha sido estudiado en cintas amorfas de composición $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{P}_{16}\text{B}_6$.

Anisotropía aleatoria.

Esta anisotropía es debida al mismo campo local cristalino, es decir este mecanismo también produce a la anisotropía en un material amorfo, pero sólo a una escala de unos cuantos nanómetros. En un amorfo es llamada “anisotropía aleatoria” [3] debido a que conforme se va cambiando de posición ésta va cambiando tanto en magnitud como en dirección, es decir, que el eje fácil en el caso de un amorfo está cambiando continuamente, y esta es la razón por lo que tiene que ser promediada y generalmente se designa como K_{Loc} a su intensidad. Puesto que en un material amorfo la anisotropía aleatoria local (aleatoria) está fluctuando, debe haber alguna longitud para la cual no cambia y que es llamada *longitud de correlación l* y la cual es de algunos nanómetros. Es de esperarse que esta dependa de la estructura local del material. Algo de mucho interés es, que tanto puede el acoplamiento o rigidez de la energía de intercambio mantener la correlación de los momentos locales, es decir, que tanto pueden los momentos magnéticos mantenerse en la misma orientación a pesar de cambios de corto alcance, a lo cual se designa como la longitud de correlación orientacional L. La respuesta es que eso va a tener que ver con minimizar a la energía interna con respecto a L justamente, con lo cual se encuentra que:

$$L=10^4/K_{\text{Loc}}^2 \quad (2.11)$$

En el caso de materiales amorfos de base metales de transición 3d, L es del orden de $L=20\mu\text{m}$, lo cual implica que la anisotropía aleatoria tiene un efecto despreciable sobre la correlación orientacional del momento local [3]. Sin embargo. Eso no sucede con materiales amorfos base 4f, donde $L= 2\text{nm}$, lo cual indica que es importante el papel que juega la anisotropía aleatoria en estos últimos. Otro aspecto que se encuentra es que cuando $L/l \gg 1$, entonces la anisotropía aleatoria es pequeña y el material va a tener

propiedades magnéticas suaves, en tanto que cuando $L/l \approx 1$, entonces la magnetización de saturación difícilmente va a ser alcanzada en tanto la anisotropía local es grande. Se infiere al considerar ambos casos de la razón L/l que los materiales magnéticos amorfos tienen un gran intervalo de aplicaciones tecnológicas, lo cual los hace muy interesantes [21]. Al aplicar un campo magnético cuando se está templando el material amorfo se produce una perturbación en la anisotropía aleatoria que va a provocar que el orden de corto alcance sea más grande.

Anisotropía inducida

Cuando la cinta magnética esta en el proceso de templado y se le aplica un campo magnético transversal, se crea una perturbación en la anisotropía aleatoria, la cual va a estar orientada por el campo (anisotropía inducida) en cuya dirección van a tratar de orientarse las paredes de dominios magnéticos de tal modo que la energía magnetostática se minimice, esto va a provocar que el orden de corto alcance sea algo mayor debido a cierto orden direccional. Se puede decir que lo anterior se debe a que cuando se somete una cinta amorfa magnética a una temperatura que sea menor que la temperatura de Curie T_C y de la temperatura de cristalización, pero que permita la movilidad atómica, esto va a tener como consecuencia que el material sea más estable respecto a la orientación de la magnetización. Por otro lado, los metaloides son los que van a tener mayor movilidad y se orientarán de tal modo que favorezcan la magnetización en alguna dirección y que es predeterminada por la dirección del campo transversal H [27, 28].

Magnetostricción

La constante de saturación de magnetostricción λ_s , depende de la composición de la aleación, de la tensión y de la temperatura, Podemos decir que λ_s para aleaciones base-Fe exhibe grandes valores y positivos, en tanto que las aleaciones ricas en Co muestran una magnetostricción negativa es decir $(Co_{1-x}Fe_x)_{75}Si_{10}B_{15}$ y $(Co_{1-x}Fe_x)_{80}P_{13}C_7$. Cuando la razón del contenido de Fe a Co es aproximadamente 5%, la magnetostricción tiende a cero, (es decir $x \approx 0.094$), lo cual hace que las cintas amorfas con $x \approx 0.094$ tengan excelente suavidad magnética [29]. Al igual que la anisotropía, la magnetostricción puede ser entendida a partir de analizar su comportamiento respecto a la temperatura [19]. De

tal análisis se puede suponer que la anisotropía de un ión-unitario es el que produce la magnetostricción en aleaciones ricas en Fe. Se han hallado desviaciones de está en aleaciones ricas en Co, en las cuales se cree que una componente muy importante está relacionada con la magnetostricción de ión-doble, ya que en aleaciones ricas en Co, la magnetostricción cercana al cero puede exhibir un cambio de signo de la misma muy por debajo de la temperatura de Curie [29, 30]. Para aleaciones nanocristalinas, se propone λ_s como un balance entre las contribuciones de los cristalitos y esa de la matriz amorfa [31].

2.6 Aplicaciones de Materiales Amorfos

Los materiales amorfos, al igual que los nanocristalinos, son de gran interés en aplicaciones donde se requiere gran sensibilidad para detectar variaciones tanto de campo magnético como de esfuerzo mecánico. Existen numerosas aplicaciones para aleaciones amorfas magnéticas. A continuación se detallan algunas de las más representativas.

Transductores y sensores elasto-magnéticos

Para esta aplicación se usa la combinación de las propiedades magnéticas y mecánicas de las aleaciones amorfas, las cuales son mutuamente dependientes. Por ejemplo, la magnetostricción juega un papel muy importante ya que los ciclos de histéresis pueden modificarse al aplicar tensión al material. La magnetostricción de las aleaciones puede ser ajustada modificando la composición de la aleación: puede hacerse positiva para materiales base Ni-Fe y base Fe, o igual a cero e incluso negativos para los materiales base Co.

En la tabla 2.1 se enlistan algunas aleaciones con magnetostricción ($\lambda_s = \text{cte}$ de magnetostricción) positiva y negativa, que se usan para sensores y transductores, donde M_s es la magnetización de saturación y H_C el campo coercitivo.

MATERIAL	$\lambda_s [10^{-6}]$	$M_s [T]$	$H_C [Acm^{-1}]$
$Fe_{80}B_{15}Si_5$	+30	1.5	0.05
$Fe_{39}Ni_{39}(P,B,Si)_{22}$	+8	0.75	0.03

$Fe_{39}Ni_{49}(P,B,Si)_{12}$	+3	0.5	0.01
$Co_{58}(Ni,Fe)_{15}(Si,B)_{27}$	-1 a+1	0.55	0.005
$Co_{75}Si_{15}B_{10}$	-3.5	0.7	0.025
$Co_{68}Ni_{10}B_{14}Si_8$	-8	0.95	

Tabla 2.1 Propiedades magnéticas de aleaciones amorfas para sensores Elasto-magnéticos [12].

Cabezas Magnéticas

Otra aplicación de los materiales magnéticos suaves es su uso en la fabricación de cabezas magnéticas para escritura/lectura. Los materiales para cabezas magnéticas, hechas bajo el principio de inducción, requieren una alta permeabilidad inicial, una adecuada saturación, alta resistencia eléctrica, alta dureza mecánica, resistencia de recubrimiento y de ser posible, no tener magnetostricción. La combinación única de propiedades magnéticas y mecánicas de algunas aleaciones amorfas hace factible la construcción de cabezas magnéticas. Las ventajas de usar este tipo de material incluyen operación prolongada de grabadores de cintas, grabación completa con baja distorsión y la respuesta a altas frecuencias del material. Se han empleado materiales amorfos base Fe-Co-SiB para cabezas magnéticas con una densidad de saturación de flujo desde 0.95 T hasta 1.3 T, con una permeabilidad inicial de 20 000 a 1 kHz, mostrando buenos resultados. La Tabla 2.2 muestra los datos de algunos materiales usados en cabezas magnéticas, donde μ_i es la permeabilidad inicial, M_s es la magnetización de saturación, ρ es la resistividad y HV la dureza vickers.

Material	Composición	μ_i	M_s [T]	ρ [$\mu\Omega/cm$] (resistividad)	HV (dureza Vickers)
	$Co_{66}Fe_4(Mo, Si, B)_{30}$	20 000	0.55	130	900

Amorfos	$Co_{69}Mn_6(Si, B)_{25}$	10 000	0.8	130	900
	$Co - Fe - Si - B$	$\mu_{10} = 20\ 000$	1.3		
Cristalinos	77Ni, 15Fe, Cu+Mo	20 000	0.8	60	120
	77Ni, 15Fe, Cu+Mo+Nb+Ti (permalloy para endurecimiento)	40 000	0.5	90	240
	85Fe, 9.6Si, 5.4Al (Sendust)	25 000	1.1	88	450
	84Fe, 16Al	8 000	0.9	145	280

Tabla 2.2 Datos de algunos materiales usados en cabezas magnéticas [12].

Otras aplicaciones

Varios sensores de posición, presión, torque y temperatura se pueden hacer con metales magnéticos amorfos [9, 12]. Por ejemplo, un carro eléctrico diseñado y construido en Australia, es capaz de alcanzar velocidades máximas de 140Km/h en recorridos de 3000 Km, usando celdas solares y escobillas de DC con estator hecho de metal amorfo [4, 6]. También se pueden diseñar filtros de ruido hechos con metales amorfos en los sistemas en automóviles [32].

Capítulo 3

Espectroscopia de Inductancias

3.1 Introducción y formalismos

Desde hace tiempo se han desarrollado mediciones de propiedades eléctricas y magnéticas en los materiales en función de la frecuencia [11]. La determinación de la respuesta de los materiales en el dominio de la frecuencia es de extrema importancia debido al amplio campo de aplicaciones existentes en la actualidad, así como también por su utilidad fundamental en investigaciones básicas de los procesos de polarización y magnetización [11].

El hecho de medir a diferentes frecuencias hace posible identificar los diferentes procesos de polarización que ocurren en el material, ya que cada uno de ellos se caracteriza por una constante de tiempo diferente. A bajas frecuencias todos los mecanismos de polarización contribuyen a la respuesta global de la muestra. Conforme la frecuencia aumenta, solo aquellos que sean capaces de seguir las excitaciones del campo (aquellos con constante de tiempo más corta) prevalecerán en la respuesta del material [33]. Cuando un mecanismo deja de seguir al campo, se dice que ocurre una dispersión la cual ocurre a una frecuencia característica [33]. Los dos procesos de dispersión más simples son la relajación y la resonancia. La frecuencia característica a la que ocurre la dispersión de tipo relajación se conoce como frecuencia de relajación f_x . En la dispersión con carácter resonante la frecuencia es llamada frecuencia de resonancia f_s . Estos fenómenos físicos se pueden caracterizar en el material mediante la técnica de espectroscopia de inductancias [34].

La espectroscopia de inductancias es una metodología que consiste principalmente en caracterizar a los materiales ferro y ferrimagnéticos, entre otros, en la cual la inductancia (una cantidad compleja) se obtiene en función de la frecuencia a la cual se está aplicando un campo magnético de excitación, esta contribuye a diferenciar los distintos procesos de magnetización presentes en el material magnético, pues sucede algo similar que en la

polarización ya que cada proceso de magnetización posee su propia constante de tiempo [35].

En general los pasos involucrados en la espectroscopia de inductancias son los siguientes:

1. Tomar datos en el más amplio espectro de frecuencias de tal modo que se tomen en consideración los más posibles mecanismos de magnetización.
2. Cuando se consideren materiales magnéticos, se tienen que identificar los distintos tipos de dispersiones, es decir determinando si son de tipo de relajación o de resonancia, en general las frecuencias de dispersión son halladas entre $10\text{kHz} \leq f \leq 10\text{MHz}$.
3. Finalmente se propone un circuito eléctrico el cual modele bien la información recolectada experimentalmente.
4. Este modelo deberá permitir asociar las distintas componentes del circuito con los parámetros físicos de la muestra [11].

Procesos de magnetización.

En todos los casos de materiales magnéticos conocidos intervienen 3 procesos de magnetización de la muestra, los cuales son: 1) deformación reversible de paredes del dominio magnético, en donde el campo aplicado es menor que el campo coercitivo de la muestra y por ende la pared permanece anclada en los extremos, tal que cuando el campo se deja de aplicar la pared vuelve a estar plana [5]. 2) Desplazamiento de la pared del dominio; en este caso se aplica un campo de excitación mayor que el coercitivo, teniendo como consecuencia que la pared sea desanclada al moverse una gran cantidad de espines dentro del material, hasta que esta se vuelve a anclar en alguna nueva posición. Una vez que el campo de excitación se deja de aplicar nuevamente la pared vuelve a estar plana pero en la nueva posición y es debido a este proceso que se da la histéresis magnética. 3) Finalmente el último proceso de magnetización es el de rotación de espines, donde una gran cantidad de espines, sino es que todos se orientan en la dirección del campo aplicado; en este caso la frecuencia de dispersión va a ser de relajación, la más rápida y las más grande de los mecanismos de magnetización, debido principalmente a que la constante de tiempo característica de este mecanismo depende de la precesión de los

espines [11]. Estos mecanismos de magnetización se vuelven a considerar en la sección 3.2 Curvas Espectroscópicas desde un punto de vista más físico.

Debido a que la inductancia y la permeabilidad magnética difieren por un escalar K ($L^* = [1/K]\mu^*$), una constante que depende de la geometría de muestra, esencialmente determinar la inductancia implica necesariamente obtener la permeabilidad y viceversa.

De lo anterior se desprende que la caracterización magnética en función de la frecuencia de un material ferri o ferromagnético se lleva a cabo de forma más clara mediante la utilización de la permeabilidad compleja μ o la inductancia compleja L como parámetro descriptivo [11, 33]. La μ^* puede escribirse como:

$$\mu^* = \mu_{re} + \mu_{im} \quad (3.1)$$

Donde μ_{re} es la parte real de la permeabilidad y μ_{im} la parte imaginaria.

Sin embargo cuando se hacen modelos matemáticos de los dominios magnéticos difícilmente se va a obtener directamente la inductancia, sino más bien el campo magnético y posteriormente mediante algunos cálculos se obtiene la impedancia Z .

Así el formalismo que relaciona Z con la μ^* es:

$$\mu^* = (-jK/\omega)Z \quad (3.2)$$

Donde K es un factor geométrico que depende de la forma de la muestra, y $[\omega = (\alpha/m)^{1/2}]$, con α la constante de restitución del resorte y m la masa efectiva de la pared del dominio] es la frecuencia angular. Cuando no se tiene el valor para K , se puede expresar el comportamiento magnético en términos de la inductancia compleja L^* , dado que L^* es proporcional a la μ^* de la siguiente forma:

$$\mu^* = KL^* \quad (3.3)$$

Con $K =$ constante geométrica y L^* dada por,

$$L^* = L_{re} + jL_{im} \quad (3.4)$$

Donde L_{re} es la parte real de la inductancia y L_{im} la parte imaginaria.

Entonces el formalismo complejo que relaciona Z con L^* , dada la magnitud básica Z , es

$$L^* = (-j/\omega)Z \quad (3.5)$$

De esta forma los principios de espectroscopia de impedancias se pueden aplicar a su contraparte magnética usando una bobina para aplicar un campo sinusoidal variable en frecuencia (en lugar de los electrodos para aplicar el campo eléctrico) [11].

Los resultados de las mediciones son impedancias, pero utilizando el formalismo anterior se tiene una visión más clara de los resultados. Ahora bien, la respuesta del material en función de la frecuencia mostrará el comportamiento de los distintos modos de magnetización así como sus distintas dispersiones debido al incremento de frecuencia, ya que, de igual manera que los mecanismos de polarización eléctrica, cada proceso de magnetización tiene también una constante de tiempo característica. A esta extensión de la espectroscopia de impedancias se le conoce como “espectroscopia de inductancias”.

3.2 Curvas Espectroscópicas.

La representación de los resultados de la medición de la respuesta magnética del material a un barrido en frecuencias se puede realizar mediante las denominadas “curvas espectroscópicas”, las cuales consisten en graficar los resultados con el eje de las abscisas generalmente como un eje logarítmico, presentando el intervalo de frecuencias investigadas y en el eje de las ordenadas la magnitud de interés L_{re} o L_{im} , por ejemplo. Un caso típico se ilustra en la Fig. 3.1.

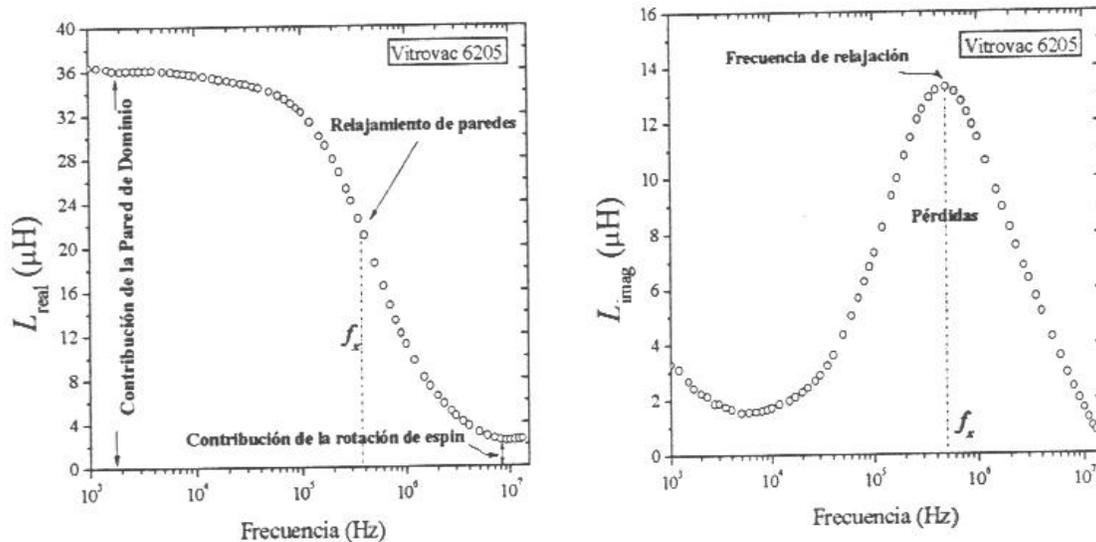


Figura 3.1. Curvas espectroscópicas $L_{re}(f)$ y $L_{im}(f)$ mostrando los mecanismos de magnetización y la frecuencia de relajación, para Vitrovac 6205.

En dicha figura se puede ver que la parte real de la inductancia muestra los mecanismos que contribuyen a la magnetización del material en función de la frecuencia. Las dispersiones de estos mecanismos también son visibles en esta gráfica siempre y cuando se cubra las condiciones de campo magnético y de frecuencias necesarias para la activación de los procesos de magnetización por ejemplo la gráfica de $L_{re}(f)$ muestra tendencia a un valor constante a bajas frecuencias. Este valor constante se asocia a la permeabilidad inicial μ_i del material [11, 33], resultado de la deformación reversible de pared (el campo aplicado es menor que el campo de propagación). Conforme se incrementa la frecuencia, $L_{re}(f)$ decrece debido a la relajación de la pared de dominio la que a su vez es resultado de la incapacidad dinámica del mecanismo de deformación reversible de la pared de seguir las variaciones del campo aplicado. Finalmente, para las frecuencias más altas mostradas en la gráfica ($f > 10^6$), los mecanismos de deformación reversible de pared ha dejado completamente de contribuir a la repuesta global del material. Sin embargo L_{re} no llega a ser cero, ya que el proceso de magnetización por rotación de espín sigue activo a estas frecuencias.

Por otro lado, de la componente imaginaria L_{im} se pueden obtener tanto la f_x como las pérdidas de energía relacionadas con los procesos de magnetización [11, 33]. La frecuencia de relajación se presenta en el máximo de la curva f_x , mientras que la

disipación de energía debido al proceso de magnetización es proporcional al área bajo la curva.

3.3 Curvas Cole-Cole

Otra gráfica espectroscópica útil es el plano complejo o curvas Cole-Cole que se obtienen al graficar L_{im} (L_{re}) (Fig. 3.2) [11, 33, 36]. Este tipo de gráficas nos muestra la presencia de la dispersión de relajación con la formación de un semicírculo. En la caracterización magnética, cuando la magnetización es producida por un campo superior al campo propagación del material, como ya se dijo, se activa el mecanismo de desplazamiento de la pared, lo que lleva implícito la existencia de la deformación reversible de la pared; esta condición de campo aplicado se ve expresado en las curvas Cole-Cole como dos semicírculos con dos dispersiones tipo relajación para los dos mecanismos de magnetización mencionados.

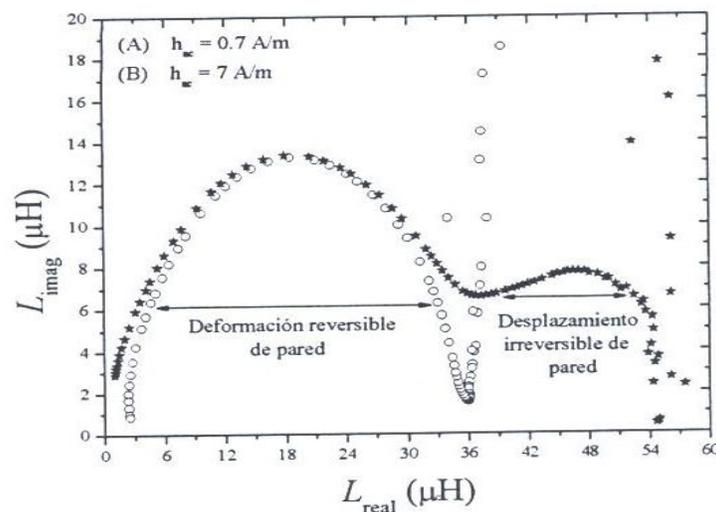


Fig. 3.2. Curvas Cole-Cole donde se indican los procesos de magnetización que ocurren en el material.

En estas curvas, el parámetro frecuencia va en incremento conforme los puntos se mueven de derecha a izquierda y de arriba hacia abajo.

Capítulo 4

Planteamiento del Problema

Tomando como referencia el trabajo publicado de Chen y Muñoz [37], se usará un modelo de dominios para calcular las componentes real e imaginaria de la permeabilidad compleja en función de la frecuencia en una cinta amorfa magnética con dominios magnéticos orientados de forma transversal a la longitud de la cinta, como se ilustra en la figura 4.1.

Se supone una cinta infinita de conductividad σ , acotada por los planos $x = \pm a$ consistente de dominios barra del mismo ancho $2c$ paralelos al eje y . En este cálculo el grosor de las paredes de dominio se considera despreciable. Dichos dominios están localizados en los planos $z = \pm(2n+1)c$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Como se indica en la figura 4.1

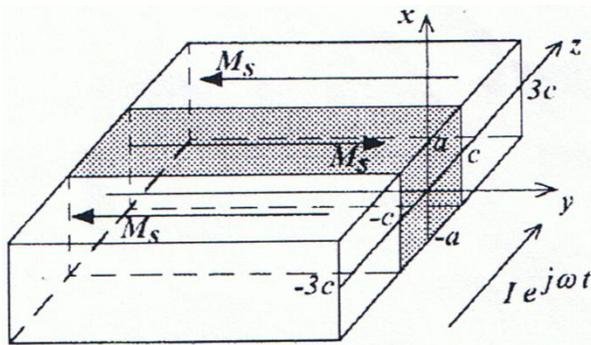


Fig. 4.1 Estructura de dominios magnéticos en una cinta amorfa.

Al aplicar una corriente $Ie^{j\omega t}$ en la dirección z , se produce un campo H superficial alterno en la dirección y , dado por $\pm H_0 e^{j\omega t}$, con $H_0 = I/2$ en la dirección y sobre las caras superior e inferior de la barra. Se supone que μ_0 dentro de los dominios es prácticamente nula.

Para calcular la impedancia interna en la dirección de la corriente para una estructura simétrica y periódica, necesitamos calcular la Z^* para un semidominio de longitud unitaria en la región de $-c \leq z \leq c$ y $0 \leq x \leq a$ (Fig. 4.1), donde la única componente del campo eléctrico distinta de cero, será la componente z . Esta componente se calculará

sobre la superficie ($x=a$), para posteriormente encontrar la energía que entra en el dominio por dicha superficie y finalmente encontrar la impedancia Z^* .

Dentro de cada semidominio usamos las ecuaciones de maxwell y la ley de Ohm para obtener la siguiente ecuación de Laplace para el campo magnético H, es decir [38].

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$\nabla \times H(x, z) = J$, Pero por la ley de Ohm $J = \sigma E$, por lo que:

$$\nabla \times H(x, z) = \sigma E \quad (4.1)$$

Aplicando el rotacional de nuevo y operar sobre la segunda y tercera igualdad se obtiene:

$$\nabla \cdot \nabla H(x, z) = 0 \quad (4.2)$$

Está última ecuación (4.2) es justamente la ecuación de Laplace (para mayor detalle de los cálculos véase el anexo B), para el campo magnético en la dirección-y con las condiciones a la frontera dadas por:

$$H(0, z) = 0, \quad H(a, z) = H_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm c} = k^2 c H(x, \pm c) \quad (4.3)$$

Para satisfacer estas condiciones a la frontera proponemos resolver por una variante del método de separación de variables, proponiéndose la solución de la siguiente forma.

$$H(x, z) = v(x) + w(x, z) \quad (4.4a)$$

Donde $w(a, z) = w(0, z) = 0$, es homogénea en x, y

$$\frac{\partial H(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm c} = k^2 c H(x, \pm c) - H_0. \quad (4.4b)$$

Sustituyendo la solución propuesta en la ecuación (4.2) tenemos que:

$$\frac{\partial^2 [v(x) + w(x, z)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [v(x) + w(x, z)]}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, z)}{\partial z^2} = 0$$

Se concluye a partir de que $v(x)$ es una solución estacionaria, en el sentido de que su primera derivada es constante, por lo tanto su segunda derivada es cero es decir $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0$

de lo cual obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 w(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, z)}{\partial z^2} = 0$$

Operando sobre la ecuación que involucra a $v(x)$, es decir sabiendo que:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0$$

Tenemos que la solución a la misma es simplemente:

$v(x) = Ax+B$, procediendo a evaluar en las condiciones a la frontera:

Cuando $x = a$, entonces $v(x) = H_0 = Aa + B$

En tanto que, $B = 0$, por lo que la solución para $v(x)$ es:

$$v(x) = \frac{H_0}{a} x \quad (4.5)$$

Resolviendo la otra solución, al ser de la forma transiente y al ser sus condiciones a la frontera homogéneas, se aplica el método de variables separables, con lo cual tenemos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w(x, z) = 0$$

Proponemos la solución

$$w(x, z) = X(x)Z(z)$$

Entonces al sustituir en la ecuación parcial de segundo orden lineal, obtenemos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden ordinarias lineales.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \lambda^2 X = 0 \quad \text{y} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0 \quad (4.7)$$

Donde λ es la constante de separación. La ecuación en X , tiene la solución siguiente:

$$X(x) = A \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (4.8)$$

Por otro lado resolviendo la ecuación (4.7), tenemos que su solución es:

$$Z = D \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \quad (4.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.5), (4.8) y (4.9) en (4.4a) y evaluar en $x = a$ y $z = c$ se obtiene que la solución formal es:

$$H(x, z) = H_0 \frac{x}{a} + A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \quad (4.10)$$

Vemos claramente que la segunda solución depende de n , por otro lado A también debe

depender de n y para cada n , deberíamos tener una solución y un coeficiente, el cual no necesariamente es el mismo, entonces la solución formal queda como:

$$H(x,z) = H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] \quad (4.11)$$

Es claro que podemos obtener la serie de Fourier de x y de A_n .

De la semiserie de Fourier seno, de x , tenemos que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \quad (4.12)$$

Para A_n , usamos la condición a la frontera de z , a partir de la ec. (4.4, 3.13).

$$\theta^2 = \sigma a^2 \mu_{dc} \omega \quad (4.13)$$

Entonces obtenemos que A_n está dada por:

$$A_n = \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh \left(\frac{n\pi}{a} c \right)} \right] \quad (4.14)$$

Ahora bien, recordando que a partir de la definición de la permeabilidad

$$\mu = \frac{\mu_{dc}}{aH_0} \int_0^a H(x,c) dx \quad (4.15)$$

Sustituyendo $H(x,c)$ y haciendo algunas simplificaciones, vemos que parte real e imaginaria de la permeabilidad están dadas por las ecuaciones (16) y (17) respectivamente:

$$\frac{\mu}{\mu_{dc} \text{ real}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2 \left(\frac{n\pi}{a} c \right)} \quad (4.16)$$

Estas expresiones para las componentes real e imaginaria de la permeabilidad compleja, son iguales a las obtenidas por Chen y Muñoz en [37]. El cálculo detallado de las permeabilidades μ_{real} y μ_{imag} se muestra en el anexo A.

Capítulo 5. Discusión y validación experimental

5.1 Permeabilidad Compleja

En la Figura 5.1 se muestran las curvas calculadas $\mu_{re}(\theta)$ y $\mu_{im}(\theta)$ (Ecs 4.16 y 4.17) en función de valores arbitrarios θ . Los datos calculados se obtuvieron evaluando numéricamente dichas ecuaciones mediante el software “Mathematica ®”, utilizando las rutinas que se describen en el Anexo B. El comportamiento de ambas componentes conforme aumenta el valor de θ (proporcional a la frecuencia f , Ec. 4.13) es muy similar al descrito en el Capítulo 3 para curvas espectroscópicas $\mu_{re}(f)$ y $\mu_{im}(f)$. Por ejemplo, para la componente real $\mu_{re}(\theta)$, se observa un valor constante hasta $\theta = 0.3$, seguido por una rápida disminución, lo que asemeja mucho la dispersión de tipo relajación que se observa en la curva experimental $\mu_{re}(f)$. Por su parte, la componente imaginaria $\mu_{im}(\theta)$, pasa también por un máximo, de manera muy parecida a la curva experimental $\mu_{im}(f)$. Como se establece en la Ec. 4.13a, θ es proporcional a la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ del campo alterno $H_0 e^{j\omega t}$, por lo que es factible comparar las componentes de permeabilidad μ_{re} , μ_{im} con curvas experimentales $\mu_{re}(f)$ y $\mu_{im}(f)$, como se describe a continuación.

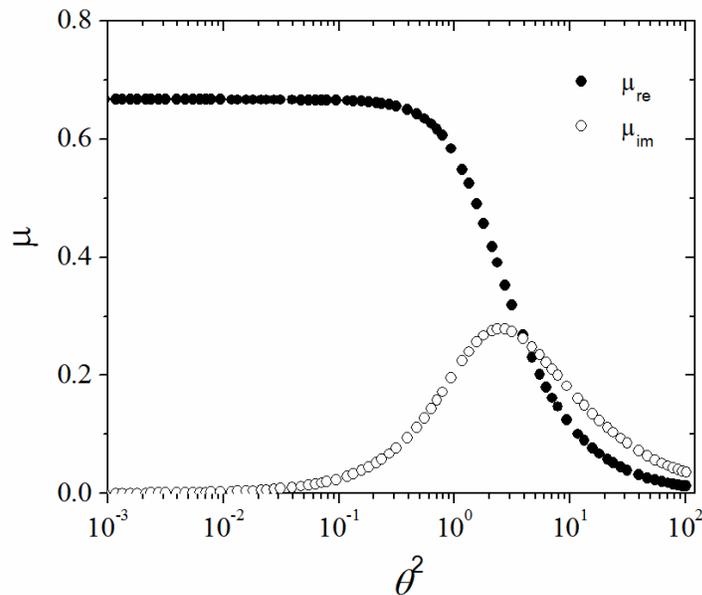


Figura 5.1. Curvas calculadas μ_{re} y μ_{im} en función de valores arbitrarios θ .

A diferencia del modelo puramente teórico de Chen y Muñoz [37], en este trabajo de tesis se llevó a cabo la validación experimental del cálculo de componentes reales e imaginaria de la permeabilidad compleja. Para ello, se realizaron mediciones experimentales con una muestra de cinta de aleación amorfa $\text{Co}_{66}\text{Fe}_4\text{Mo}_2\text{B}_{12}\text{Si}_{16}$. Las dimensiones de la cinta fueron las siguientes: 1 cm de ancho por 10 cm de largo y 28 micras de espesor. Esta aleación posee una formación de dominios magnéticos transversales a su eje longitudinal muy similar a las que contempla el modelo desarrollado en este trabajo de tesis. Las condiciones experimentales de medición se describen en el Anexo C.. Usando como parámetro de ajuste el cociente c/a contenido en las Ecs. 4.16 y 4.17, se obtuvieron los siguientes resultados para un valor $c/a=1.6$ (Fig. 5.2).

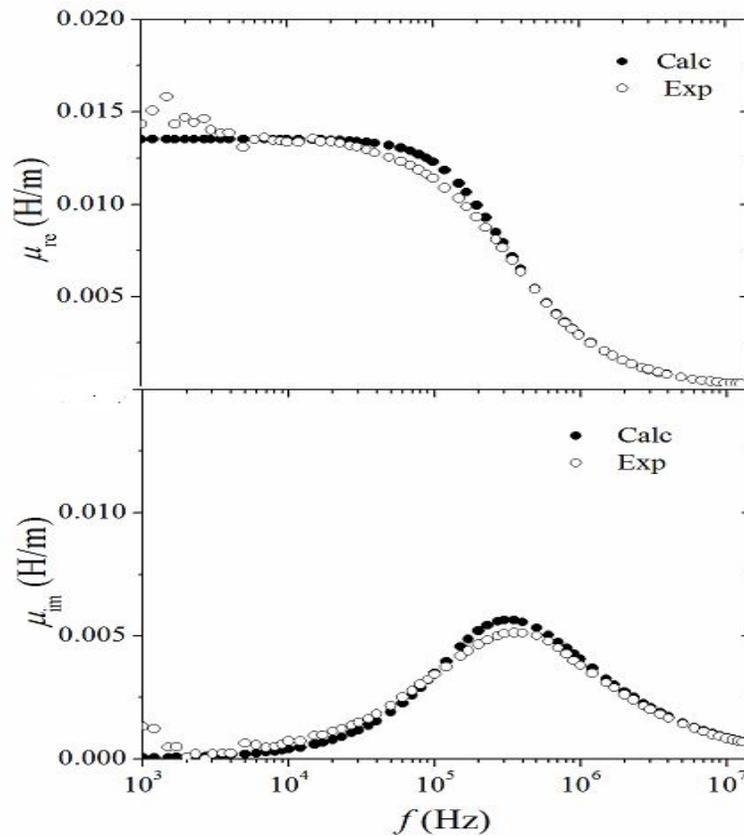


Figura 5.2. Comparación entre curvas μ_{re} , μ_{im} calculadas y experimentales. Para las curvas calculadas se fijó $c/a=1.6$.

La comparación entre curvas calculadas y experimentales es muy cercana, con algunas diferencias a $f < 10$ kHz que se pueden justificar por la dispersión de la medición experimental. Por otro lado, cerca de los 100 kHz se observa otro desfase de las curvas

debido probablemente a la distribución de los tiempos de relajación de las paredes magnéticas en la muestra, ocasionada por longitudes diferentes de anclaje (en el modelo propuesto, todos los dominios magnéticos tienen el mismo semiancho “c”). La parte imaginaria presenta también comportamientos muy próximos, con el desfase provocado por la distribución de tiempos de relajación ya mencionada. Esta similitud en el comportamiento de las curvas calculadas y experimentales en el intervalo de medición considerado ($10 \text{ Hz} < f < 10 \text{ MHz}$) permite correlacionar la dinámica de dominios que se asocia a las curvas experimentales $\mu_{re}(f)$, $\mu_{im}(f)$ (las cuales resuelven dos mecanismos de magnetización: deformación reversible de pared en el intervalo $f < f_x$ y la rotación de espín para $f > f_x$, -con f_x =frecuencia de relajación-, Sección 3.1, Capítulo 3) con la contribución magnetoinductiva que se calcula en el modelo de dominios de este trabajo de tesis, lo cual coincide con la interpretación de baja frecuencia en términos de la magnetoimpedancia en este mismo tipo de aleaciones amorfas [39]. Asimismo, la comparación favorable de resultados calculados y experimentales sugiere que el mecanismo de deformación reversible de pared de dominio magnético en las aleaciones $\text{Co}_{66}\text{Fe}_4\text{Mo}_2\text{B}_{12}\text{Si}_{16}$ usadas corresponde al de una membrana con abombamiento central limitado, ya que dicha deformación no está considerada en el modelo propuesto, lo cual indicaría que la deformación de la pared es más bien reducida. Esta deformación limitada podría deberse a valores de anisotropía magnética altos, los cuales pueden ocurrir en aleaciones amorfas en estado “as-quenched” debido a los esfuerzos acumulados residuales, los cuales contribuyen significativamente a la anisotropía magnética a través del acoplamiento magnetoelástico.

Por otra parte, del parámetro c/a usado para el cálculo de $\mu_{re}(f)$ y $\mu_{im}(f)$, es factible estimar el ancho de los dominios magnéticos de la aleación. Considerando $c/a = 1.6$, entonces $2c = 2(1.6)a$. Como $a = 14 \times 10^{-6} \text{ m}$ en la cinta usada, tenemos $2c = 45 \times 10^{-6} \text{ m} = 45 \text{ micras}$. Este ancho de dominio es muy cercano al observado experimentalmente (Fig.2.5b)[17].

5.2 Cálculo de la Inductancia

A diferencia del trabajo de Chen y Muñoz [37], en este trabajo de tesis proponemos el cálculo de la inductancia a partir de la Ec.3.3, y de la definición de la permeabilidad magnética, de la siguiente forma:

$$L = \frac{B_{prom}}{KH_0} = \frac{\mu_{dc}}{aH_0 / ac} \int_0^a H(x, c) dx \quad (5.1)$$

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \frac{1}{H_0} \int_0^a H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right] dx \quad (5.2)$$

Donde $H(x,c) = H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right]$ y $K=1/(ca)$ es la constante geométrica.

Expresando a x/a como en su serie de Fourier y sustituyendo se tiene que:

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \int_0^a \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \right]$$

Resolviendo únicamente la integral al hacer el cambio de variables: $s = \frac{n\pi}{a} x$, con lo que se obtiene que cuando n es impar la integral es $2a/(n\pi)$, (para n par la integral se anula):

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \frac{2a}{n\pi} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{2a}{n\pi} A_n \right] \quad (5.3)$$

Puesto que A_n está dada por la ecuación (A.14) y sustituyendo en (5.3) tenemos que:

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^2 c}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \right] \quad (5.4)$$

Operando sobre el paréntesis cuadrado más interno, al multiplicar por el conjugado complejo del denominador, operando sobre el segundo sumando y separando parte real e imaginaria de la inductancia se tiene que:

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} j \right] \right]$$

$$\frac{L}{ca\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\theta^4 c^2}} \right], \text{ para } n \text{ impar.} \quad (5.5)$$

Al continuar operando sobre el paréntesis cuadrado para simplificar obtenemos que la parte real e imaginaria de la inductancia están dadas por las ecuaciones (5.6) y (5.7).

$$\frac{L}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4ca \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \quad (5.6)$$

$$\frac{L}{\mu_{dc \text{ imag}}} = 4\theta^2 c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (5.7)$$

El cálculo detallado de las inductancias $(L/\mu_{dc})_{\text{real}}$ y $(L/\mu_{dc})_{\text{imag}}$ se muestra en el anexo D.

Como contribución original de este trabajo de tesis, se realizó la validación experimental del modelo de inductancias que se acaba de calcular. Para ello, se realizaron mediciones adicionales usando la aleación $\text{Fe}_{68}\text{Co}_8\text{B}_{19.2}\text{Si}_{4.8}$. En la Fig.5.3 se muestran las curvas experimentales de las componentes real e imaginaria de la inductancia (L_{re} y L_{im} , respectivamente) medidas en dicha aleación.

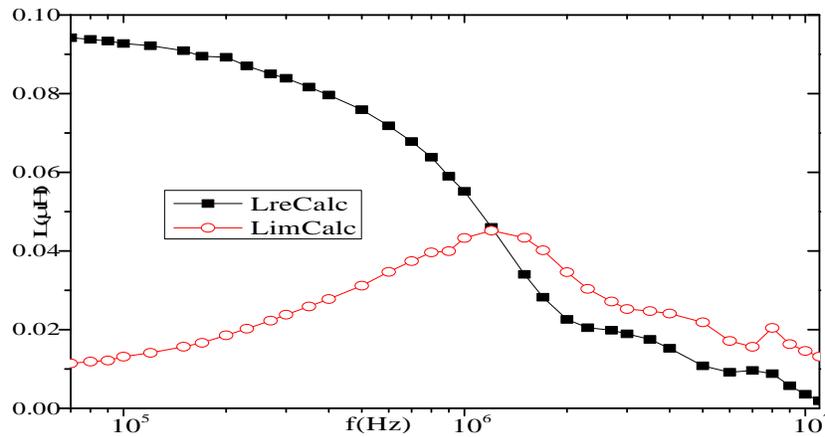


Figura 5.3. Curvas experimentales L_{re} y L_{im} en función de la frecuencia f (Hz).

En estas gráficas espectroscópicas se puede observar nuevamente el mecanismo de magnetización de deformación reversible de pared, con una primera relajación alrededor de 1.2 MHz. Para esta muestra sin embargo, en la componente real de la inductancia se observan otros dos escalones que se pueden asociar en principio, a la superposición de dos dispersiones de relajación adicionales correspondientes a tres longitudes de pared de domino características. Esta suposición se verifica en la componente imaginaria de la inductancia, la cual presenta tres máximos y por tanto, tres frecuencias de relajación en $f_{x1} = 1.2 \times 10^6 \text{ Hz}$, $f_{x2} = 4.0 \times 10^6 \text{ Hz}$, y $f_{x3} = 8.0 \times 10^6 \text{ Hz}$ para cada proceso.

Aplicando las ecuaciones 5.6 y 5.7 para simular las curvas espectroscópicas de inductancia experimentales, se llevaron a cabo tres corridas para L_{re} y L_{im} con los siguientes valores de c/a : 0.2, 0.044 y 0.070, a las cuales se asociaron tres valores distintos de permeabilidad magnética $\mu_{dc} = 0.008535$, 0.004535 y 0.0008535. Cada una de las corridas generó tres curvas L_{re1} , L_{re2} y L_{re3} (así como L_{im1} , L_{im2} y L_{im3}) las cuales se sumaron para obtener las curvas calculadas totales $L_{re} = L_{re1} + L_{re2} + L_{re3}$ y $L_{im} = L_{im1} + L_{im2} + L_{im3}$. Al comparar las curvas ajustadas y los datos experimentales en la Figura 5.4, se observa un acuerdo razonable. Las diferencias entre el ajuste y los datos experimentales sugieren que puede haber más longitudes de pared magnética característica que deben tomarse en cuenta para mejorar el ajuste.

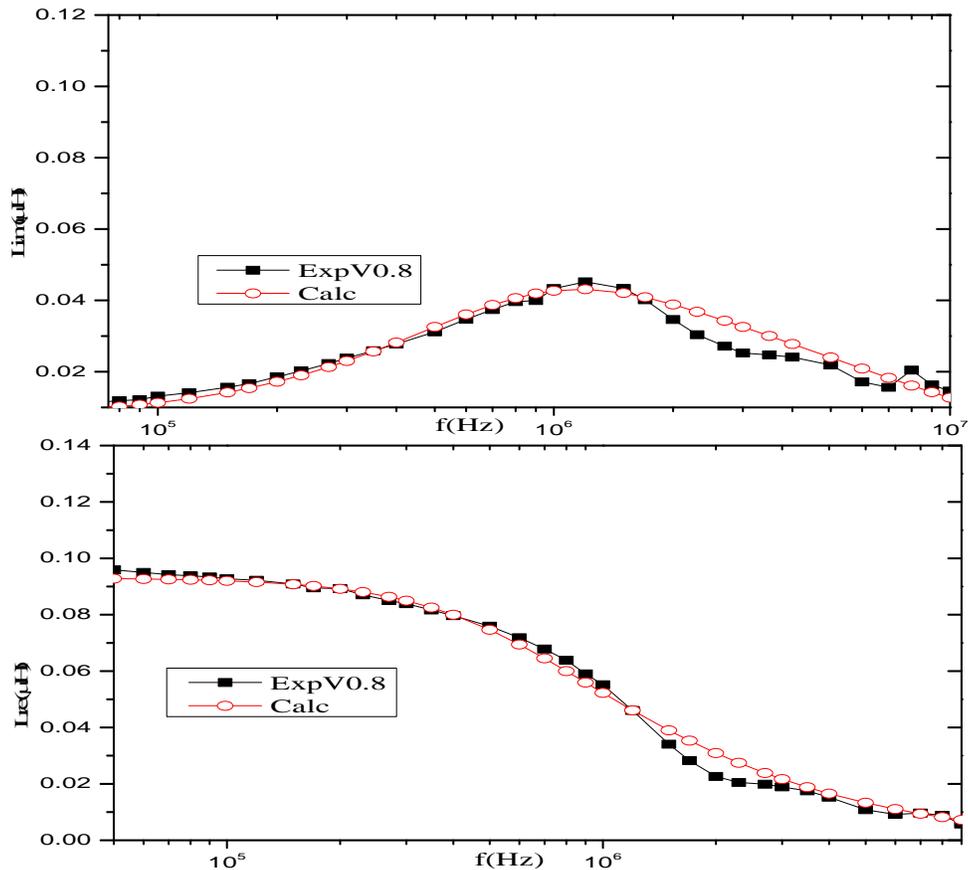


Figura 5.4 Comparación entre curvas L_{re} , L_{im} calculadas y experimentales para la aleación $Fe_{68}Co_8B_{19.2}Si_{4.8}$, usando tres valores para c/a : 0.2, 0.044 y 0.070, los cuales representan tres longitudes de dominio magnético características.

5.3 Equivalencia Permeabilidad-Inductancia

En el modelo de dominios considerado en este trabajo, es posible establecer la equivalencia entre el formalismo de permeabilidad compleja $\mu^* = \mu_{re} + j\mu_{im}$ y el formalismo de inductancia compleja $L^* = L_{re} + jL_{im}$. Al comparar las ecuaciones resultantes de las componentes L_{re} , L_{im} (Ecs. 5.6, y 5.7) con las ecuaciones μ_{re} , μ_{im} (4.16 y 4.17), puede verse que el factor $K = 1/ca$ corresponde al factor geométrico que se menciona en la Ec.3.3, a partir de la cual, tenemos lo siguiente:

$$K \left[\frac{L}{\mu_{dc}^*} \right]_{real} = \left(\frac{1}{ca} \right) \left(4ca \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} \right) \quad (5.8)$$

Esta ecuación es justamente la ecuación (C.16), es decir $\mu_{re} (=KL_{real})$.

En tanto que:

$$\begin{aligned} K \left[\frac{L}{\mu_{dc}^*} \right]_{imag} &= \left(\frac{1}{ca} \right) \left(4\theta^2 c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \right) \\ &= \frac{4\theta^2 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Que concuerda exactamente con la ecuación (4.17), la cual corresponde a $\mu_{im} (=KL_{imag})$.

5.4 Equivalencia permeabilidad-impedancia

A diferencia de [37], en este trabajo de tesis, a partir del modelo de dominios resuelto, es posible establecer la equivalencia entre el formalismo de permeabilidad compleja $\mu^* = \mu_{re} + j\mu_{im}$ y el formalismo de impedancia compleja $Z^* = Z_{re} + jZ_{im}$, mencionado al principio del Capítulo 3. El cálculo detallado de las componentes de Z^* se incluye en el Anexo E. Ahora bien, como sabemos de la sección de Espectroscopias de Impedancias, la permeabilidad magnética se puede expresar como sigue:

$$\mu^* = -\frac{jK}{\omega} Z, \text{ donde, } j = \sqrt{-1} \quad (5.10)$$

Donde Z es la impedancia y la cual está dada por:

$$Z = R + jX \quad (5.11)$$

Donde K es un factor geométrico que depende la forma de la muestra y ω es la frecuencia angular.

Puesto que, como ya se mostró en la ecuación (D.2), la impedancia compleja se expresa como:

$Z = R + jX$, sustituyendo en la ecuación (5.10) tenemos que:

$$\mu^* = -\frac{jK}{\omega} Z = -\frac{jK}{\omega} [R + jX] = -j \frac{KR}{\omega} - \frac{j^2 KX}{\omega} = -j \frac{KR}{\omega} + \frac{KX}{\omega}$$

Ya que $j^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, por lo tanto:

$$\mu^* / K = -j \frac{R}{\omega} + \frac{X}{\omega}, \text{ donde } \mu_{\text{real}}^* / K = \frac{X}{\omega} \text{ y } \mu_{\text{im}}^* / K = -\frac{R}{\omega} \quad (5.12)$$

Donde $K=1/ca$.

Sabemos de las ecuaciones (D.10, D11) que:

$$\frac{R}{R_{dc}} - 1 = \frac{2\theta^4 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (D.10)$$

Donde $\frac{R}{R_{dc}}$ es la parte real de la impedancia $\frac{Z}{R_{dc}}$, mientras que para $\frac{X}{R_{dc}}$ se tiene

$$\frac{X}{R_{dc}} = 2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} \quad (E.11)$$

Que es la parte imaginaria de la impedancia justamente. A partir de estas ecuaciones estableceremos las expresiones para $\mu_{\text{re}}/\mu_{\text{dc}}$ y $\mu_{\text{im}}/\mu_{\text{dc}}$. Por comodidad obtendremos primero la permeabilidad imaginaria $\mu_{\text{im}}^*/K = -\frac{R}{\omega}$, Entonces:

$$\mu_{\text{im}}^* / K - \frac{R_{dc}}{\omega} = \frac{R_{dc}}{\omega} \frac{2\theta^4 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (5.13)$$

Pero sabemos que

$$\theta^2 = \sigma a^2 \mu_{dc} \omega, \quad (5.14)$$

despejando ω tenemos que: $\omega = \frac{\theta^2}{\sigma a^2 \mu_{dc}}$, en tanto que $\frac{1}{\sigma a/(2c)} = R_{dc}$, por lo que

$R_{dc} / \omega = \frac{1}{\sigma a/(2c)} / \left(\frac{\theta^2}{\sigma a^2 \mu_{dc}}\right) = \frac{2c\sigma a^2 \mu_{dc}}{\theta^2 \sigma a} = \frac{2ca\mu_{dc}}{\theta^2}$ sustituyendo en 5.13, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mu_{im}^* / K - \frac{R_{dc}}{\omega} &= \frac{2ca\mu_{dc}}{\theta^2} \frac{2\theta^4 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \\ &= 4c^2 \theta^2 \mu_{dc} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]\end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{\mu_{im}^*}{K\mu_{dc}} - \frac{2ca}{\theta^2} = 4c^2 \theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

Puesto que $K=1/(ca)$, sustituyendo en la anterior ecuación obtenemos que:

$$\frac{\mu_{im}^*}{\mu_{dc}} - \frac{K2ca}{\theta^2} = 4Kc^2 \theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

$$\frac{\mu_{im}^*}{\mu_{dc}} - \frac{2ca}{\theta^2 ca} = \frac{4c^2 \theta^2}{\theta^2 ca} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

Entonces:

$$\frac{\mu_{im}^*}{\mu_{dc}} - \frac{2}{\theta^2} = \frac{4c\theta^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

Por lo que:

$$\frac{\mu_{im}^*}{\mu_{dc}} - \frac{2}{\theta^2} = \frac{4c\theta^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (5.15)$$

Para el cálculo de μ_{real} / μ_{dc} Partimos de la ecuación (E.11) de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\mu_{real}^* / K &= -\frac{j}{\omega} X = -\frac{j}{\omega} jR_{dc} 2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{c^2}{a^2} \theta^4 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} \\ &= \frac{R_{dc}}{\omega} 2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{c^2}{a^2} \theta^4 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2}\end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{R_{dc}}{\omega}$ es igual a $\frac{2ca\mu_{dc}}{\theta^2}$, sustituyendo en la anterior ecuación tenemos que:

$$= \frac{R_{dc}}{\omega} 2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} = \frac{2ca\mu_{dc}}{\theta^2} 2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2}$$

$$\mu_{\text{real}}^* = K\mu_{dc} 4ca \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2}$$

$$\frac{\mu_{\text{real}}^*}{\mu_{dc}} = \frac{4ac}{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2}$$

Con lo cual obtenemos que la permeabilidad real es:

$$\frac{\mu_{\text{real}}^*}{\mu_{dc}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} \quad (5.16)$$

En tanto que la permeabilidad imaginaria está dada por:

$$\frac{\mu_{im}^*}{\mu_{dc}} - \frac{2}{\theta^2} = \frac{4c\theta^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (5.17)$$

Estas fórmulas coinciden con las Ecs . C.18 y C.20.

5.5 Magnetoimpedancia

El fenómeno de “magnetoimpedancia” (MI) se refiere a la variación de la impedancia de un material magnético cuando se le aplica un campo magnético externo H_{dc} . A diferencia de la magnetoresistencia, para observar la MI se requiere aplicar campos externos muy bajos, del orden 1 a 20 Oe (el fenómeno de magnetoresistencia de un material consiste en el cambio de su resistencia dc provocado por la aplicación de un campo magnético dc también. Para observar esta variación se necesitan campos típicamente del orden de 10,000 Oe o más). La MI se ha estudiado extensivamente en materiales magnéticamente suaves muy diversos como cintas, alambres y películas delgadas [39, 40, 41, 42]. El parámetro más usado para cuantificar la MI es el cociente de magnetoimpedancia ΔZ , el cual se define como sigue:

$$\Delta Z = 100 \left(\frac{Z(H_{\text{max}}) - Z(0)}{Z(H_{\text{max}})} \right)$$

Aunque en el trabajo de Chen y Muñoz [37] se menciona la posible relación entre el modelo de dominios resuelto analíticamente y la MI, dicha mención es muy breve y no incluye mediciones experimentales. A partir de la solución desarrollada en este trabajo,

proponemos como contribución original, la simulación de la MI en cintas amorfas a partir de las componentes real e imaginaria de la impedancia compleja $Z^* = R + jX$, mediante la introducción de una permeabilidad efectiva μ_{eff} en sustitución de la μ_{dc} como parámetro variable en la ecuación para θ^2 (Ec. A.13a)

$$\theta^2 = \sigma a^2 \mu_{eff} 2\pi f$$

Para frecuencias menores a la frecuencia de relajación f_x ($f < f_x$) proponemos μ_{eff} de la forma siguiente

$$\mu_{eff} = \frac{M_s}{H_{dc}} \mu_0$$

Donde M_s es la magnetización de saturación de la cinta (1.0 T para la aleación usada), μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 12.56 \times 10^{-7}$ H/m) y H_{dc} toma valores arbitrarios como variable independiente, los cuales determinan la μ_{eff} que su a vez define los valores de θ^2 . Con estos valores de θ^2 se calculan numéricamente las componentes R , X de la impedancia compleja (Se usa la misma metodología descrita en el Anexo E). A partir de las componentes R , X se calcula el módulo $|Z|$ como sigue:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Por su parte, para frecuencias mayores a la frecuencia de relajación f_x ($f > f_x$) proponemos la μ_{eff} de la forma siguiente

$$\mu_{eff} = \frac{M_s}{H_{dc} - H_k} \mu_0$$

Donde H_k es el campo de anisotropía de la cinta ($H_k = 0.40$ Oe para la aleación amorfa). De nueva cuenta, H_{dc} toma valores arbitrarios como variable independiente, los cuales definen la μ_{eff} que su a vez define los valores de θ^2 . Con estas θ^2 se calculan nuevamente las componentes R , X de la impedancia compleja y a partir de estas, el módulo $|Z|$.

Bajas frecuencias ($f < f_x$)

De las curvas experimentales $\mu_{re}(f)$, $\mu_{im}(f)$ de a Figura 5.2 se establece que la $f_x \sim 400$ kHz para la aleación amorfa. Por tanto, fijando $f=100$ kHz podemos comparar resultados de MI a baja frecuencia mediante el cociente ΔZ . El ΔZ tanto calculado como experimental se ilustra en la Figura 5.5.

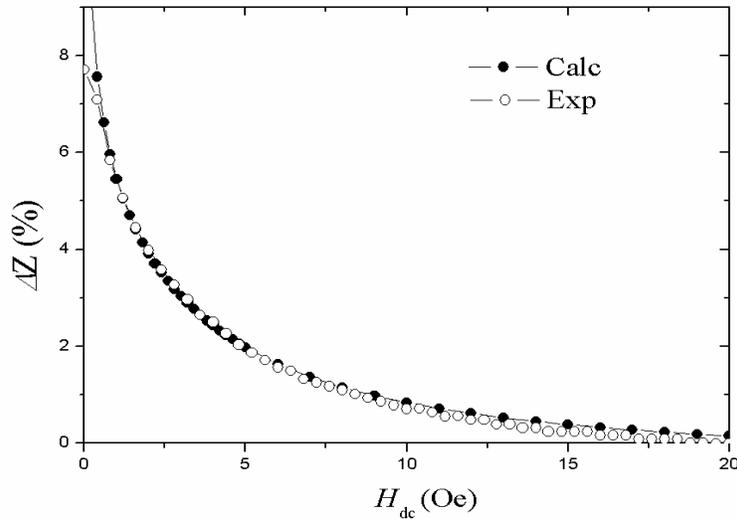


Figura 5.5. Cociente de magnetoimpedancia ΔZ a baja frecuencia ($f < f_x$) calculado y experimental.

Se observa que hay un muy buen acuerdo entre ambas curvas, lo que indica la funcionalidad del modelo a baja frecuencia, es decir, previo a la dispersión de relajación que ocurre experimentalmente en el material, cuando aún se presenta la deformación reversible de pared como mecanismo predominante de magnetización. La coincidencia de los datos sugiere la importancia del efecto del H_{dc} sobre la μ_{dc} del material introducida a través de la permeabilidad efectiva μ_{eff} .

Altas frecuencias ($f > f_x$)

En este caso se escoge $f = 1$ MHz para los cálculos de ΔZ y su comparación con la medición experimental, como se indica en la Figura 5.6.

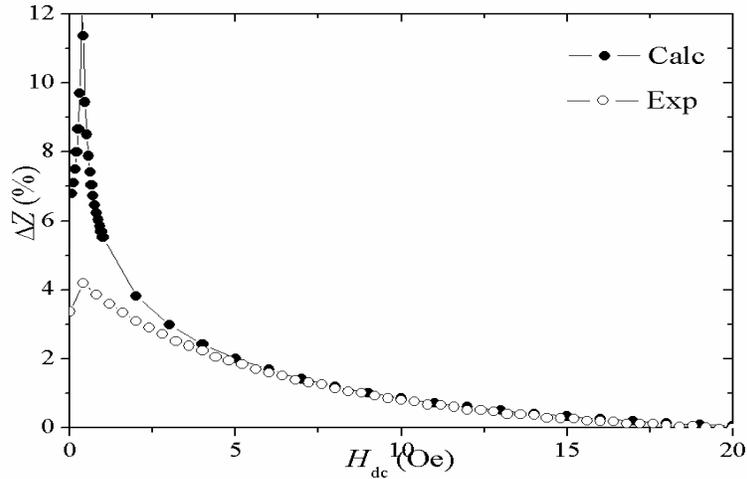


Figura 5.6. Cociente de magnetoimpedancia ΔZ a alta frecuencia ($f > f_x$) calculado y experimental.

En la curva experimental, el máximo que se alcanza a $H_{dc} = 0.40$ Oe se asocia con el campo de anisotropía H_k del material [39], el cual representa el campo magnético que hay que aplicar para rotar el vector de magnetización de la dirección de fácil magnetización a la dirección ortogonal. Si bien la forma propuesta para μ_{eff} permite reproducir dicho máximo en la curva calculada, en ésta, la variación ΔZ está claramente sobreestimada, debido a que en el modelo de dominios de la cinta no se toman en cuenta otras contribuciones a la permeabilidad efectiva del material en este intervalo de frecuencias, como por ejemplo, el efecto de piel que aparece en metales sometidos a corrientes de alta frecuencia. Es interesante notar que el modelo predice un ΔZ alto (de más del 12%), lo que sugiere que de ser posible preservar la contribución magnetoinductiva a la impedancia en cintas amorfas a altas frecuencias, se podrían observar cocientes ΔZ altos.

Conclusiones

El modelo de dominios resuelto en detalle confirmó las expresiones analíticas calculadas según [37] para las componentes real e imaginaria de la permeabilidad compleja para una cinta con estructura de dominios transversal. En este trabajo de tesis se llevó a cabo como contribución original, la comparación de las curvas analíticas de permeabilidad compleja con datos experimentales de mediciones de permeabilidad compleja en una cinta amorfa $\text{Co}_{66}\text{Fe}_4\text{Mo}_2\text{B}_{12}\text{Si}_{16}$, la cual resultó muy próxima, lo que sugiere que el modelo de dominios desarrollado es equivalente al mecanismo de deformación reversible de pared de dominio magnético.

A partir de la ecuación 3.3, se calcularon las componentes de la inductancia compleja, las cuales no aparecen en la referencia [37]. Además, estas curvas se validaron también mediante mediciones experimentales recientes en cintas $\text{Fe}_{68}\text{Co}_8\text{B}_{19.2}\text{Si}_{4.8}$. Este material presentó una respuesta experimental en frecuencia peculiar, con más de un proceso de relajación presente en el intervalo de frecuencia medido. Este comportamiento fue aproximado asumiendo tres longitudes de dominio características.

El modelo desarrollado permitió establecer analíticamente las equivalencias permeabilidad-inductancia y permeabilidad-impedancia. Estas equivalencias facilitan las mediciones experimentales a partir de un conjunto inicial de datos de impedancia en función de la frecuencia, los cuales se pueden transformar a permeabilidades o inductancias a través de los factores geométricos correspondientes.

El modelo desarrollado permite también el cálculo de curvas de magnetoimpedancia, a través del cociente ΔZ . A bajas frecuencias ($f < f_x$) la comparación es muy cercana, debido a que en este intervalo de f la estructura de dominios de la cinta amorfa se preserva, presentando como mecanismo de magnetización activo, la deformación reversible de pared. Este aspecto de la magnetoimpedancia se menciona muy brevemente y de forma puramente teórica en [37].

Por su parte, el cálculo de curvas de magnetoimpedancia a altas frecuencias ($f > f_x$) resultó en un comportamiento que no se verifica experimentalmente, probablemente debido a que en el mecanismo de magnetización predominante en la cinta amorfa en este intervalo de frecuencias ya no corresponde a la deformación reversible de pared de dominio, sino a la rotación de espín, la cual no está contemplada en el modelo.

Anexo A

Planteamiento del Problema.

El cálculo detallado de las ecuaciones 4.16 y 4.17 se presenta a continuación.

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$\nabla \times H(x, z) = J$, Pero por la ley de Ohm $J = \sigma E$, por lo que:

$$\nabla \times H(x, z) = \sigma E \quad (\text{A.1})$$

Aplicando el rotacional nuevamente tenemos que:

$$\nabla \times \nabla \times H(x, z) = \sigma \nabla \times E$$

Por un lado $\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla (\nabla \cdot H(x, z)) - \nabla \cdot \nabla H(x, z)$, y por el otro $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$.

Y puesto que $\nabla \cdot H(x, z) = 0$, porque H viene del rotacional de un potencial vectorial.

Sustituyendo todo lo anterior en la segunda ecuación, tenemos que:

$$\nabla \times \nabla \times H(x, z) = -\nabla \cdot \nabla H(x, z) = \sigma \nabla \times E = \sigma \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

Entonces trabajando con la segunda y tercera igualdad,

$$-\nabla \cdot \nabla H(x, z) = \sigma \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right), \text{ pero } B = \mu H, \text{ entonces,}$$

$$\nabla \cdot \nabla H(x, z) = \sigma \mu \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right).$$

Se considera que dentro del dominio $\mu \approx 0$, por lo que:

$$\nabla \cdot \nabla H(x, z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Está última ecuación (A.2) es justamente la ecuación de Laplace y otra forma de expresarla es:

$$\frac{\partial^2 H(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.2a})$$

Para el campo en la dirección y con las condiciones a la frontera:

$$H(0, z) = 0, \quad H(a, z) = H_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm c} = k^2 c H(x, \pm c) \quad (\text{A.3})$$

Para satisfacer estas condiciones a la frontera proponemos resolver por el método de separación de variables.

Pero ya que varias condiciones a la frontera son inhomogéneas, proponemos primero la combinación lineal de la solución estacionaria en x y otra parte que dependa de x y z, i.e.

la solución se propone que sea de la forma de una solución transiente, entonces:

$$H(x,z) = v(x) + w(x,z)$$

$$\text{Donde } w(a,z)=w(0,z)=0, \text{ es homogénea en } x \text{ y } \frac{\partial H(x,z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm c} = k^2 c H(x,\pm c) - H_0. \quad (\text{A.4})$$

Sustituyendo la solución propuesta en la ecuación (C.2) tenemos que:

$$\frac{\partial^2 [v(x) + w(x,z)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [v(x) + w(x,z)]}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,z)}{\partial z^2} = 0$$

Se concluye a partir de que $v(x)$ es una solución estacionaria es decir su primera derivada es constante, por lo tanto su segunda derivada es cero es decir $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0$ de lo cual obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 w(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x,z)}{\partial z^2} = 0$$

Operando sobre $v(x)$, obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 0, \Rightarrow \frac{\partial v(x)}{\partial x} = A, \Rightarrow \int \partial v(x) = A \int_0^a \partial x + B, \Rightarrow v(x) = Ax + B$$

Cuando $x = 0$, entonces $v(x) = H_0 = Aa + B$

$v(0) = A(0) + B = 0$, entonces $B = 0$

$$v(a) = H_0 = Aa, \text{ entonces } \frac{H_0}{a} = A$$

Entonces sustituyendo tanto A como B tenemos que la solución estacionaria es:

$$v(x) = \frac{H_0}{a} x \quad (\text{A.5})$$

Resolviendo la otra solución

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w(x,z) = 0$$

Proponemos la solución

$$w(x,z) = X(x)Z(z)$$

Entonces sustituyendo tenemos que

$$Z \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + X \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X = -\frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z$$

Proponemos a $-\lambda^2$ como la constante de separación. Entonces

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda^2, \text{ entonces, } \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \lambda^2 X = 0 \quad (\text{A.6})$$

Y

$$-\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = \lambda^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} - \lambda^2 z = 0 \quad (\text{A.7})$$

Para la ecuación (A.6) proponemos como solución a

$$X = e^{rx} \Rightarrow X'' = r^2 e^{rx}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.6) obtenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \lambda^2 X = 0$$

$$r^2 e^{rx} + \lambda^2 e^{rx} = 0 \Rightarrow (r^2 + \lambda^2) e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\lambda \Rightarrow$$

$$X(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x}$$

Sabemos que

$$X(0) = 0 = X(a) \Rightarrow$$

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A$$

$$X(a) = Ae^{a\lambda} - Ae^{-a\lambda} \Rightarrow$$

$$X(a) = A2 \frac{(e^{a\lambda} - e^{-a\lambda})}{2} = 2A \text{Sen}(a\lambda)$$

Entonces la solución en X es un seno, por lo que evaluando en x=a, obtenemos que:

$$X(a) = 2A \text{Sen}(a\lambda) = 0$$

Por otro lado

$$X(a) = 0 = A \text{Sen}(a\lambda) \Rightarrow$$

$$0 = \text{Sen}(a\lambda) \Rightarrow a\lambda = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{a},$$

Entonces,

$$X(x) = A \text{Sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado resolviendo la ecuación (A.7) tenemos que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} - \lambda^2 z = 0 \quad (\text{A.9})$$

Proponemos

$$Z = e^{qz} \Rightarrow Z'' = q^2 e^{qz} \Rightarrow q^2 e^{qz} - \lambda^2 e^{qz} = 0 \Rightarrow q^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow q = \pm \lambda$$

Sabemos que la solución es de la forma

$$Z(z) = Ce^{\lambda z} + De^{-\lambda z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Z = \lambda D e^{\lambda z} - \lambda C e^{-\lambda z} \quad \text{de} \quad \frac{\partial Z}{\partial z} (z=0) = 0$$

Tenemos que

$$0 = D e^0 - C e^0$$

Entonces $D = C$, Por lo que:

$$Z = D(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}) = 2D \left(\frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{2} \right)$$

$$Z = 2D \cosh \lambda z \Rightarrow$$

$$Z = D \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \Rightarrow$$

Entonces la solución es de la forma

$$H(x,z) = H_0 \frac{x}{a} + D \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right)$$

Cuando $x=a$ y $z=c$, se llega a que:

$$H(a,c) = H_0 \frac{a}{a} + D \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} a \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} c \right) \Rightarrow H(a,c) = H_0, \Rightarrow$$

$$W(a,c) = H_0 \Rightarrow Z(c) = H_0$$

Evaluando en $Z(c) = H_0$, tenemos que:

$$Z(c) = H_0 = D \cosh \left(\frac{n\pi}{a} c \right) \Rightarrow$$

$$D = \frac{H_0}{\cosh \frac{n\pi c}{a}}$$

Entonces la solución en Z , es de la forma:

$$Z = \frac{H_0}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \Rightarrow \quad (\text{A.10})$$

Por lo tanto la solución general es de la forma:

$$H(x,z) = H_0 \frac{x}{a} + A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right)$$

Vemos claramente que la segunda solución depende de n, por otro lado A también debe depender de n y para cada n, deberíamos tener una solución y un coeficiente, el cual no necesariamente es el mismo, entonces la solución final queda como:

$$H(x,z) = H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \right] \quad (\text{A.11})$$

Es claro que podemos obtener la serie de Fourier de x y que B_n también se obtiene a partir de una serie de Fourier. Bien obtengamos la serie de Fourier de x.

De la semiserie de Fourier seno, de x, tenemos que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (\text{A.12})$$

Donde B_n está dada por:

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

Para simplificar la integral primero hacemos el cambio de variables: $s = \frac{n\pi}{a} x$, entonces, $x = \frac{a}{n\pi} s$, $dx = \frac{a}{n\pi} ds$, por otro lado, cuando $x \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow a$, entonces $s \rightarrow n\pi$,

Por lo que la integral queda como:

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{2}{a} \int_0^{n\pi} \left(\frac{a}{n\pi} s\right) \operatorname{sen}(s) \frac{a}{n\pi} ds = \frac{2a}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} (s) \operatorname{sen}(s) ds$$

Esta última integral se resuelve por partes, proponiendo $u=s$ y $dv=\operatorname{sen} s ds$:

$$\int_0^{n\pi} (s) \operatorname{sen} s ds = (-s \cos s) - \int (-\cos s) ds = (-s \cos s) + \int \cos s ds = [(-s \cos s) + \operatorname{sen} s]_0^{n\pi}$$

Tenemos que el $\operatorname{sen}(s)$ en 0 y $n\pi$, es cero, en tanto que $s \cos(s)$ se hace cero en $s=0$, por lo que sólo queda:

$$[(-s \cos s) + \operatorname{sen} s]_0^{n\pi} = -n\pi \cos n\pi = -n\pi(-1)^n = n\pi(-1)^{n+1}$$

Vemos que $\cos \pi = -1$, para $n=1$, $\cos 2\pi = 1$, para $n=2$, $\cos 3\pi = -1$, para $n=3$

$\cos 4\pi = 1$, para $n=4$ de lo anterior se concluye que $\cos n\pi = (-1)^n$, Por lo tanto B_n , es igual a:

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{2a}{(n\pi)^2} \int_0^{n\pi} (s) \operatorname{sen}(s) ds = \frac{2an\pi(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} = \frac{2a(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Por lo que sustituyendo esto último en la ecuación (B.12) tenemos que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \quad (\text{A.13})$$

De la misma manera se puede obtener A_n , pero la vamos a obtener usando la condición a la frontera que involucra a z , hallando a A_n a partir de la ec. (A.4), obtenemos que:

$$\frac{\partial H(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm c} = k^2 c H(x, \pm c)$$

Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \right]}{\partial z} \Big|_{z=\pm c} &= k^2 c H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right] \\ H_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \frac{\partial}{\partial z} \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \right] \Big|_{z=\pm c} &= k^2 c H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \right] \end{aligned}$$

Operando únicamente sobre el término enésimo.

$$\left[\frac{n\pi}{a} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \right] \Big|_{z=\pm c} = k^2 c \left[\frac{x}{a} + A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \right]$$

Sustituyendo la expansión en serie de Fourier de x , y poniendo sólo el término enésimo, tenemos que:

$$\left[\frac{n\pi}{a} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right] = k^2 c \left[\frac{2a(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) + A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \right]$$

$$\left[\frac{n\pi}{a} A_n \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) = k^2 c \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

Cancelando él $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$ en ambos lados de la igualdad, tenemos que:

$$\left[\frac{n\pi}{a} A_n \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right] = k^2 c \left[\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right]$$

Factorizando A_n , tenemos que:

$$A_n \left[-\frac{n\pi}{a} \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + k^2 c \right] = -k^2 c \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Por lo que:

$$A_n = k^2 c \frac{2(-1)^n}{n\pi} \left[k^2 c - \frac{n\pi}{a} \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right]^{-1}$$

Sabemos que $k = \sqrt{-j \frac{\theta}{a}}$, de donde $k^2 = -j \frac{\theta^2}{a^2}$ y

$$\theta^2 = \sigma a^2 \mu_{dc} \omega \quad (\text{A.13a})$$

θ es un múltiplo escalar de la frecuencia, sustituyendo en la última expresión:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-j\theta^2}{a^2} \frac{c 2(-1)^n}{n\pi} \left[\frac{1}{-j \frac{\theta^2}{a^2} c - \frac{n\pi}{a} \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] = \frac{\theta^2}{a^2} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \left[\frac{-j}{-j \frac{\theta^2}{aa} c - \frac{n\pi}{a} \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \\ &= \frac{\theta^2}{a^2} \frac{c 2(-1)^n}{n\pi} \left[\frac{-j}{\frac{1}{a} \left\{ -j \frac{\theta^2}{a^2} c - n\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right\}} \right] = \frac{\theta^2}{a^2} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \left[\frac{-ja}{-j \frac{\theta^2}{a^2} c - n\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \frac{j}{j} \right] \\ &= \frac{\theta^2}{aa} \frac{c 2(-1)^n a}{n\pi} \left[\frac{-j(j)}{-j(j) \frac{\theta^2}{a^2} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] = \frac{\theta^2}{a} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \left[\frac{-(-1)}{-(-1) \frac{\theta^2}{a^2} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \end{aligned}$$

Entonces A_n está dada por:

$$A_n = \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a^2} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (\text{A.14})$$

Ahora bien, recordando que a partir de la definición de la permeabilidad

$$\mu = \frac{B}{H_0} = \frac{\mu_{dc}}{aH_0} \int_0^a H(x, c) dx \quad (\text{A.15})$$

Donde

$$H(x, c) = H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \right]$$

Sustituyendo en (C.15), tenemos que:

$$\frac{a\mu}{\mu_{dc}} = \frac{1}{H_0} \int_0^a H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \right] dx = \quad (\text{A.16})$$

$$\int_0^a \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] dx = \int_0^a \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right]$$

Resolviendo únicamente la integral,

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Para simplificar la integral primero hacemos el cambio de variables: $s = \frac{n\pi}{a}x$, entonces, $x = \frac{a}{n\pi}s$, $dx = \frac{a}{n\pi}ds$, por otro lado cuando $x \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow a$, entonces $s \rightarrow n\pi$, Por lo que la integral queda como:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(s) \frac{a}{n\pi} ds = \frac{a}{n\pi} \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(s) ds = -\frac{a}{n\pi} \cos(s) \Big|_0^{n\pi}$$

$$= -\frac{a}{n\pi} \cos(s) \Big|_0^{n\pi} = -\frac{a}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos 0] = -\frac{a}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

Lo que está dentro del paréntesis cuadrado es cero para toda $n=2m$, donde $m=0, 1, 2, \dots$ y es igual a -2 para n impar, por lo que:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = -\frac{a}{n\pi} (-2) = \frac{2a}{n\pi}$$

Finalmente tenemos que:

$$\frac{a\mu}{\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \frac{2a}{n\pi} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{2a}{n\pi} A_n \right] \quad (\text{A.17})$$

Recordando que A_n está dada por (A.14):

$$A_n = \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right]$$

Por lo que sustituyéndola en la ecuación (A.16), tenemos que:

$$\frac{a\mu}{\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{2a}{n\pi} \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right] =$$

$$\frac{a\mu}{\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^2 c}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right] = \quad (\text{A.18})$$

Operando únicamente sobre el paréntesis cuadrado más interno y multiplicando por el conjugado complejo del denominador tenemos que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] &= \frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \frac{\frac{\theta^2}{a}c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^2}{a}c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \\ &= \frac{\frac{\theta^2}{a}c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{\frac{\theta^2}{a}c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \end{aligned}$$

Operando únicamente sobre el segundo sumando del lado derecho de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} &= \frac{jn\pi}{\frac{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} = \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} \\ &= \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4 c^2 \cosh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{a^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{n\pi}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} j \end{aligned}$$

Sustituyendo primero en la ec. (A.17) y luego en la ecuación (A.18), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{a\mu}{\mu_{dc}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^2 c}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right] = \\ \frac{a\mu}{\mu_{dc}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c n\pi}{(n\pi)^2}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} j \right] \right] \\ \frac{a\mu}{\mu_{dc}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} j \right] \right] \end{aligned}$$

Separando en la parte real e imaginaria tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{a\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \\ \frac{\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{a(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^4 c^2}{(n\pi a)^2} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \end{aligned}$$

Puesto que el resultado de integrar $\int_0^a \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = -\frac{a}{n\pi} (-2) = \frac{2a}{n\pi}$ para n impar, tenemos que para n impar la parte real de la parte real de la permeabilidad μ es entonces:

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[1 - \frac{1}{a^2 \frac{\left\{ \frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) \right\}}{\theta^4 c^2}} \right], \text{ para } n \text{ impar.} \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\theta^4 c^2}} \right], \text{ para } n \text{ impar.}$$

Si continuamos operando sobre el paréntesis cuadrado para simplificar obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{\frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\theta^4 c^2}} \right] &= \left[1 - \frac{\theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \\ &= \frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) - \theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} = \frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) - \theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \\ &= \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} = \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}} = \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} + \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}} \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} + \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}} = \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2} = \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (A.18a), tenemos que:

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}$$

Vemos que lo que se obtiene para permeabilidad real (μ_{re}) es

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}$$

En tanto que la parte imaginaria, en donde n es impar, está dada por:

$$\frac{a\mu}{\mu_{dc \text{ im}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{-4\theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ im}}} = \frac{-4\theta^2 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

Entonces la parte imaginaria sin considerar el signo menos de la permeabilidad está dada por:

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ im}}} = \frac{4\theta^2 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

Es decir la parte real e imaginaria de la permeabilidad están dadas por las ecuaciones (A.19) y (A.20) respectivamente:

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\mu}{\mu_{dc \text{ imag}}} = \frac{4\theta^2 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (\text{A.20})$$

Anexo B

Usando el software Matemática © se pueden programar fácilmente las ecuaciones A.19 y A.20 de la siguiente forma:

- a) Se propone una lista de valores θ^2 a partir de valores de frecuencia f preestablecidos (de entre 10 Hz y 13 MHz). La ecuación para calcular los θ^2 a partir de las f es la ecuación A.13a.

$$\theta^2 = \frac{a^2 \mu_{dc} 2\pi f}{\rho} \quad (\text{A.13a})$$

Donde a corresponde al semiespesor de la cinta (Fig.4.1), μ_{dc} es la permeabilidad dc del material, f la frecuencia del campo aplicado h_{ac} y ρ la resistividad de la aleación. Los datos específicos para cada parámetro fueron los siguientes: $a = 14$ micras, $\mu_{dc} = 0.0133$ H/m y $\rho = 1.34 \times 10^{-6} \Omega\text{m}$.

- b) Una vez generados los valores de θ^2 , las siguientes rutinas programadas en Mathematica ® permitieron la iteración de las ecuación A.19 y A.20.

SetDirectory [":c:\SimuCintas2012"]

C:\SimuCintas2012

```
F[x_, y_, z_] := (2*x^2*y)*(z*3.1416)^(-1)*  
(z^2*3.1416^2*Tanh[z*3.1416*y] + (x^2)*(y^2)*Coth[z*3.1416*y])^(-1)
```

(*Rutina "Simu_R_3.nb" para calcular (R/Rdc)-1 para varios valores de teta^2, - contenidos en frecu40.dat- y escribirlos en el archivo de salida, salida.dat*)

```
F= Table[ReadList["frecu40.dat", Number]];
```

```
Do[tet = Part[F, j];
```

```
Ca = 1.5; Ro = 0; Do[ R = Ro + f[tet, ca, i]; Ro = R, {i, 1, 20 000, 1}];
```

```
R >>> "salidaR.dat", {j, 1, 40, 1}]
```

SetDirectory [":c:\SimuCintas2012"]

C:\SimuCintas2012

```
F[x_, y_, z_] := 2*x*(z^2*3.1416^2+(x^2)*(y^2*Coth[z*3.1416*y])^2)^(-1)
```

(*Rutina "Simu_X_3.nb" para calcular (X/Rdc) para varios valores de teta^2, -contenidos en frecu40.dat- y escribirlos en el archivo de salida, salida.dat*)

```
F= Table[ReadList["frecu40.dat", Number]];
Do[tet = Part[F, j];
Ca = 1.5; Ro = 0; Do[ R = Ro + f[tet, ca, i]; Ro = R, {i, 1, 20 000, 1}];
R >>> "salidaX.dat", {j, 1, 40, 1}]
```

Anexo C

Mediciones Experimentales (Espectroscopia de Impedancias).

Se realizaron mediciones de permeabilidad compleja $\mu^* = \mu_{re} + j \mu_{im}$ en una muestra de cinta magnética amorfa de composición $\text{Co}_{66}\text{Fe}_4\text{Mo}_2\text{B}_{12}\text{Si}_{16}$ de 10 cm de longitud, 1.0 cm de ancho y 28 micras de espesor. Las mediciones se realizaron mediante un analizador de impedancias modelo HP41192A con frecuencias de 5 Hz a 13 MHz, con un voltaje de 0.8 V aplicado directamente en los extremos de la cinta a fin de producir una corriente axial i_{ac} y en consecuencia, un campo ac transversal h_{ac} . Un campo H_{dc} longitudinal aplicado mediante una bobina de 100 vueltas conectado a una fuente DC permitió remover la contribución de la rotación de espines, a fin de monitorear la respuesta de las paredes únicamente.

El arreglo quedó montado como se muestra en la Fig. B1; las pruebas se realizaron a temperatura ambiente.



Fig. B1. Esquema de conexión del equipo para medir espectroscopia de impedancia.

La medición del material se realizó sin campo H_{dc} y con campo H_{dc} . La respuesta del material tardó 3 minutos.

Esencialmente lo que se hizo fue lo siguiente:

1. Se monto la cinta en un soporte el cual aproximadamente tiene una altura de 10.3cm, buscando que la cinta quedará lo mejor alineada, sin que tuviera torceduras y que tuviera el mismo nivel, a lo largo de la misma.
2. Posteriormente se conectaron los extremos de la cinta (se extendieron por medio de dos alambres delgados) al analizador de impedancias con un voltaje de 0.8v sin aplicar el campo externo (H_{dc}), al mismo tiempo que se comenzaron a obtener datos o mediciones, 94 en total.
3. Nuevamente se volvió a implementar el mismo arreglo sólo que ahora también se conecto a una fuente de corriente dc, a esta se conectaron unas resistencias las cuales actuaron como un divisor de corriente y estas a su vez se conectaron a la bobina de 100 vueltas y se cerró el circuito otra vez en la fuente de poder o de corriente, en tanto que la los extremos de la cinta quedaron igual que en la disposición mencionada en el paso anterior y dejando fijo el voltaje a 0.8v. Se empezó a tomar mediciones variando la corriente desde su máximo valor 4A hasta 0.25A, tomando 16 mediciones y disminuyendo la corriente de 0.25A en 0.25A, estos datos se fueron guardando en archivos donde se indicaba la corriente y el voltaje, por ejemplo a:M08H16, indicando que se hacia la medición correspondiente a un voltaje de 0.8v y a una corriente máxima de 4A lo cual se indicó por medio de H16.
4. Estos datos quedaron guardados en lenguaje de máquina, por lo que fue necesario auxiliarnos del programa gwbasic para el cálculo de las componentes real e imaginaria de la impedancia y convertir estos datos a un archivo .dat, una vez obtenidos estos datos se transfirieron al programa origin Lab 7.5 © para calcular las componentes real e imaginaria de la inductancia, se procedió a graficar los datos obtenidos y también hacer las conversiones necesarias para obtener los datos correspondientes a las componentes de la permeabilidad magnética y posteriormente graficar también estas componentes de la permeabilidad que es lo que finalmente se reporta.

Anexo D.

Cálculo de la Inductancia.

Calculamos la inductancia a partir de su definición:

$$L = \frac{B_{prom}}{KH_0} = \frac{\mu_{dc}}{aH_0 / ac} \int_0^a H(x, c) dx \quad (D.1)$$

$$L = \frac{c\mu_{dc}}{H_0} \int_0^a H(x, c) dx$$

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \frac{1}{H_0} \int_0^a H(x, c) dx \quad (D.2)$$

$$H(x.c) = H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right]$$

Sustituyendo en (D.2) y expresando a x/a como una expansión en su serie de Fourier seno, (véase la ecuación A.13) tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) &= \frac{x}{a} \\ \frac{L}{c\mu_{dc}} &= \frac{1}{H_0} \int_0^a H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right] dx = \\ \int_0^a \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right] dx &= \int_0^a \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \int_0^a \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx \right] \end{aligned}$$

Resolviendo únicamente la integral tenemos que:

$$\int_0^a \text{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) dx =$$

Para simplificar la integral primero hacemos el cambio de variables: $s = \frac{n\pi}{a} x$, entonces, $x =$

$\frac{a}{n\pi} s$, $dx = \frac{a}{n\pi} ds$, por otro lado cuando $x \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow a$, entonces $s \rightarrow n\pi$.

Por lo que la integral queda como:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(s) \frac{a}{n\pi} ds = \frac{a}{n\pi} \int_0^{n\pi} \operatorname{sen}(s) ds = -\frac{a}{n\pi} \cos(s)_0^{n\pi}$$

$$= -\frac{a}{n\pi} \cos(s)_0^{n\pi} = -\frac{a}{n\pi} [\cos(n\pi) - \cos 0] = -\frac{a}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1]$$

Lo que está dentro del paréntesis cuadrado es cero para toda $n=2m$, donde $m=0,1,2,\dots$ y es igual a -2 para n impar, por lo que:

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = -\frac{a}{n\pi} (-2) = \frac{2a}{n\pi}$$

Finalmente tenemos que:

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + A_n \right\} \frac{2a}{n\pi} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{2a}{n\pi} A_n \right] \quad (\text{D.3})$$

Sabemos que A_n está dada por la ecuación (A.14):

$$A_n = \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right]$$

Por lo que sustituyéndola en la ecuación (D.3), tenemos que:

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{2a}{n\pi} \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right] =$$

$$\frac{L}{c\mu_{dc}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^2 c}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right] \quad (\text{D.4})$$

Operando únicamente sobre el paréntesis cuadrado más interno y multiplicando por el conjugado complejo del denominador tenemos que:

$$\left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] = \frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \frac{\frac{\theta^2}{a} c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^2}{a} c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}$$

$$= \frac{\frac{\theta^2}{a} c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{\frac{\theta^2}{a} c}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \quad (\text{D.5})$$

Operando únicamente sobre el segundo sumando del lado derecho de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} &= \frac{jn\pi}{\frac{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} = \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} \\ &= \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4 c^2 \cosh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{a^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{n\pi}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} j \end{aligned}$$

Sustituyendo primero en las siguientes ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{L}{\mu_{dc}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^2 c}{(n\pi)^2} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right] = \\ \frac{L}{c\mu_{dc}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c n\pi}{(n\pi)^2}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} j \right] \right] \\ \frac{L}{c\mu_{dc}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} j \right] \right] \end{aligned}$$

Separando en la parte real e imaginaria de la inductancia, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{L}{c\mu_{dc \text{ real}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + \frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c \theta^2}{(n\pi)^2 a} c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \\ \frac{L}{ca\mu_{dc \text{ real}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4a(-1)^{n+1}}{a(n\pi)^2} + \frac{4(-1)^n \theta^4 c^2}{(n\pi a)^2} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \end{aligned}$$

Puesto que el resultado de integrar $\int_0^a \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = -\frac{a}{n\pi}(-2) = \frac{2a}{n\pi}$ para n impar, tenemos que para n impar la parte real de la inductancia μ_{circ} es entonces:

$$\frac{L}{ca\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[1 - \frac{1}{a^2 \frac{\left\{ \frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) \right\}}{\theta^4 c^2}} \right], \text{ para } n \text{ impar.}$$

$$\frac{L}{ca\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{n^2\pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\theta^4 c^2}} \right], \text{ para } n \text{ impar.} \quad (\text{D.6})$$

Si continuamos operando sobre el paréntesis cuadrado para simplificar obtenemos que:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{\frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\theta^4 c^2}} \right] &= \left[1 - \frac{\theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \\ &= \frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} - \frac{\theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \\ &= \frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) - \theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) - \theta^4 c^2}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \\ &= \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2 + n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} = \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{n^2 \pi^2 a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}{a^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}} = \frac{n^2 \pi^2}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2 \pi^2} = \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la siguiente ecuación, tenemos que:

$$\frac{L}{ca\mu_{dc \text{ real}}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)}$$

$$\frac{L}{\mu_{dc \text{ real}}} = 4ca \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \quad (\text{D.7})$$

En tanto que la parte imaginaria, en donde n es impar, está dada por:

$$\frac{L}{c\mu_{dc \text{ im}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{4(-1)^n \theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{-4\theta^2 c}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right]$$

$$\frac{L}{c\mu_{dc\ im}} = -4\theta^2 c \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{n\pi}}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right]$$

Entonces si omitimos el signo menos la parte imaginaria de la inductancia está dada por:

$$\frac{L}{\mu_{dc\ im}} = 4\theta^2 c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (\text{D.8})$$

Es decir la parte real e imaginaria de la inductancia están dadas por las ecuaciones (D.7)

y (D.8) respectivamente:

$$\frac{L}{\mu_{dc\ real}} = 4ca \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 + \frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{L}{\mu_{dc\ imag}} = 4\theta^2 c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4 c^2}{a^2} \coth\left(\frac{n\pi}{a} c\right) + n^2 \pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \quad (\text{D.8})$$

Anexo E.
Cálculo de la Impedancia

Es posible calcular la impedancia compleja $Z^* = R + jX$ usando los coeficientes A_n de la Ec.(C.14). Para ello, tomamos en cuenta que la ley de Ampere relaciona el campo magnético y la densidad de corriente, la cual su vez se relaciona con el campo eléctrico.

A partir de la densidad de corriente J tenemos lo siguiente [38]:

$$\nabla \times H(x, z) = J$$

Poniendo el producto cruz en su forma matricial o más bien su determinante, tenemos que:

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_0 \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] & 0 \end{vmatrix} = J \quad (\text{E.1})$$

Donde i, j, k son los vectores unitarios del espacio cartesiano, entonces:

$$J = H_0 \left\{ -i \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] \right\} + H_0 \left\{ k \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] \right\} \quad (\text{E.2})$$

Entonces:

$$J = H_0 \left\{ -i \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \frac{\partial}{\partial z} \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] \right\}$$

$$+ H_0 \left\{ k \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] \right\}$$

$$J = -H_0 i \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi A_n}{a \cosh \frac{n\pi c}{a}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right]$$

$$+ H_0 k \left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi A_n}{a \cosh \frac{n\pi c}{a}} \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right]$$

Cuya componente z está dada por:

$$J = \frac{H_0}{a} \left\{ \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] \right\}$$

También sabemos por la ley de Ohm que:

$$J = \sigma E, \text{ entonces } E = J/\sigma$$

Sustituyendo tenemos que:

$$E(a, z) = \frac{H_0}{a} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \cos \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right] = \frac{H_0}{a\sigma} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \cos(n\pi) \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \right]$$

Sabemos de los anteriores resultados que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, sustituyendo en la anterior expresión tenemos que:

$$E(a, z) = \frac{H_0}{a\sigma} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi (-1)^n A_n \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right)}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \right\} \quad (\text{E.3})$$

La Impedancia: Para calcular la impedancia $Z=R+jX$, primero calculamos la potencia (P), donde la potencia está dada por:

$$P = H_0 \int_{-c}^c E(a, z) dz \quad (\text{E.4})$$

Sustituyendo y operando sobre el término enésimo tenemos que:

$$P = H_0 \int_{-c}^c \frac{H_0}{a\sigma} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi (-1)^n A_n \cosh \left(\frac{n\pi}{a} z \right)}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \right\} dz$$

$$P = \frac{H_0^2}{a\sigma} \left\{ \int_{-c}^c dz + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^n A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \int_{-c}^c \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dz \right\}$$

$$P = \frac{H_0^2}{a\sigma} \left\{ \int_{-c}^c dz + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^n A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \int_{-c}^c \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dz \right\} \quad (\text{E.5})$$

La primera integral simplemente es: $\int_{-c}^c dz = [z]_{-c}^c = c - (-c) = 2c$,

En tanto que la segunda integral queda como:

$$\int_{-c}^c \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dz$$

Haciendo el cambio de variable $t = \frac{n\pi}{a} z$, entonces $\frac{a}{n\pi} t = z$, entonces, $dz = \frac{a}{n\pi} dt$, sea

$\xi = \frac{n\pi c}{a}$ de lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-c}^c \cosh\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dz &= \int_{-\xi}^{\xi} \cosh(t) \frac{a}{n\pi} dt = \frac{a}{n\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \frac{a}{2n\pi} \int_{-\xi}^{\xi} e^t dt + \int_{-\xi}^{\xi} e^{-t} dt \\ &= \frac{a}{n\pi} \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_{-\xi}^{\xi} = \frac{a}{n\pi} [\sinh(t)]_{-\xi}^{\xi} = \frac{a}{n\pi} [\sinh(\xi) - \sinh(-\xi)] \\ &= \frac{a}{n\pi} [\sinh(\xi) + \sinh(\xi)] = \frac{2a}{n\pi} \sinh(\xi) = \frac{2a}{n\pi} \sinh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (E.5)

$$P = \frac{H_0^2}{a\sigma} \left\{ 2c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi(-1)^n A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \frac{2a}{n\pi} \sinh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}$$

$$P = \frac{2H_0^2}{a\sigma} a \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n A_n}{\cosh \frac{n\pi c}{a}} \sinh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}$$

$$P = \frac{2H_0^2}{\sigma} \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\} \quad (\text{E.6})$$

Sustituyendo en

$$Z = \frac{4P}{I^2} \quad (\text{E.7})$$

Tenemos que:

$$Z = \frac{4 \frac{2H_0^2}{\sigma} \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}}{I^2} = \frac{8H_0^2 \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}}{\sigma I^2}$$

Puesto que $H_0 = \frac{l}{2}$, tenemos que:

$$Z = \frac{8\left(\frac{l}{2}\right)^2 \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}}{\sigma I^2} = \frac{2 \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}}{\sigma} =$$

Sustituyendo el valor de A_n es decir la ecuación (C.13) con lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2 \left\{ \frac{c}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(-1)^n \theta^2 c}{n\pi a} \left[\frac{1}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) \right\}}{\sigma} \\ &= \frac{2 \frac{c}{a} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n (-1)^n \theta^2}{n\pi} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \right\}}{\sigma} = \frac{2c \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{2n} \theta^2}{n\pi} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \right\}}{\sigma a} \\ Z &= \frac{\left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \right\}}{\sigma a / (2c)} = R_{dc} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \right] \right\} \quad (\text{E.8}) \end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{1}{\sigma a / (2c)} = R_{dc}$, operando únicamente sobre el paréntesis cuadrado y multiplicando por el conjugado complejo del denominador tenemos que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} 1 \right] &= \frac{\tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a} c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \frac{\frac{\theta^2}{a} c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\frac{\theta^2}{a} c + jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \\ &= \frac{\frac{\theta^2}{a} c \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right) + jn\pi \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} = \frac{\frac{\theta^2}{a} c \tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right)}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} + \frac{jn\pi \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)}{\frac{\theta^4}{a^2} c^2 + n^2 \pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)} \end{aligned}$$

Dividiendo en el primer término por $\tanh\left(\frac{n\pi}{a} c\right)$ y en la segunda suma por $\tanh^2\left(\frac{n\pi}{a} c\right)$,

obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\theta^2}{a}c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} = \frac{\frac{\theta^2}{a}c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 + n^2\pi^2 \tanh^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \\
&= \frac{\frac{\theta^2}{a}c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Reinsertando esto último en la ecuación (E.8), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a^2}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right\}}{\sigma a / (2c)} = R_{dc} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \left[\frac{\tanh\left(\frac{n\pi c}{a}\right)}{\frac{\theta^2}{a^2}c - jn\pi \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \right\} \\
\frac{Z}{R_{dc}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \left[\frac{\frac{\theta^2}{a}c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2} \right] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \frac{\frac{\theta^2}{a}c}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta^2}{n\pi} \frac{jn\pi}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2} \\
\frac{Z}{R_{dc}} &= 1 + \frac{2\theta^4 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] + \\
&\quad j2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2} \tag{E.9}
\end{aligned}$$

Comparando la ecuación (D.9) con $\frac{Z}{R_{dc}} = \frac{R}{R_{dc}} + j \frac{X}{R_{dc}}$, obtenemos que:

$$\frac{R}{R_{dc}} = 1 + \frac{2\theta^4 c}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2 \tanh\left(\frac{n\pi}{a}c\right)} \right] \tag{E.10}$$

Donde $\frac{R}{R_{dc}}$, es la parte real de la impedancia $\frac{Z}{R_{dc}}$ y

$$\frac{X}{R_{dc}} = 2\theta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\theta^4}{a^2}c^2 \coth^2\left(\frac{n\pi}{a}c\right) + n^2\pi^2} \tag{E.11}$$

Corresponde a la parte imaginaria de la impedancia justamente.

Referencias

- [1] D. Jiles, Introduction To Magnetism And Magnetic Materials, Ed. Chapman And Hall, (1991).
- [2] S. Chikazumi, Physics of Ferromagnetism, Oxford University Press, 2005.
- [3] R.C. O'Handley "Modern Magnetic Materials". Ed. John Wiley and Sons, New York, (2000) Pag 404.
- [4] J. M. Decoy, Exchange Interaction, Anisotropy, Ferromagnetic Phenomena Electromagnetism and Magnetic Materials, Cambridge University Press, 2009.
- [5] R. Newnham, Anisotropy, Properties Of Materials, Oxford University press. 2005.
- [6] Carmen Gabriela Stephanita, Origins Of Magnetism, Magnetostriction, Magnetism, Springer Verlag Ed., 2012.
- [7] R. Valenzuela. "Magnetic Ceramics", Ed. Cambridge University Press, (1994).
- [8] Isaak Mayergoiz, Mathematical Models Of Hysterisis And Its Applications, Ed. Elsevier, 2003.
- [9] H. Warlimant, R. Boll, "Aplications Of Amorphous Soft Magnetic Materials" Journal Of Magnetism And Magnetic Materials. Vol. 26 (1982) P. 97-104.
- [10] R. Valenzuela, Soft Ferromagnetic Amorphous and NanoCrystalline Alloys, Transworld Research Network,
- [11] R. Valenzuela, Physica B, Vol. 299, (2001), P. 280-285.
- [12] R. Hasegawa, "Present Status Of Soft Magnetic Alloys "Journal Of Magnetism And Magnetic Materials. Vol. 215-216 (2000) P. 240-245.
- [13] I.S. Miroshnichenko, and I.V. Salli. Ind. Lab. 25: Zav. Lab. 25:1398 (1959).
- [14] P. Duwez, R.J. Wiliams and K. Klement. J.Appl.Phys. 31: 1136 (1966a).
- [15] K. Klement, R. H. Wilens and P. Duwez. Nature 187: 869 (1970).
- [16] N. S. Kazama, T. Masumoto, M. Mitera, J.Magn. Magn. Mater. 15-18 (1980).
- [17] K. Zaveta, O.V. Nilsen, K. Jurek, J. Magn, Magn 117 (1992) 61.
- [18] Mathias Gertlatz Surface Magnetism, Magnetic Domain Imagin, Springer, 2010.
- [19] Arcady Zhukov, Julian Gonzalez, Amorphous and Nanocritalline Soft Magnetic Materials, HandBook of Advanced Magnetic Materials, 116 (2002).
- [20] K. Hendrich, Phys. Stat. Sol. 32: K55 (1969).
- [21] R. Alben, J. J. Becker and M. C. Chi. J. Appl. Phys. 49: 1653 (1978a).

- [22] Gonzalez, J. J. Appl. Phys. 79: 376 (1996).
- [23] O. V. Nielsen, and H.J.V. Nielsen. J. Magn. Magn. Mat. 22: 21 (1980a).
- [24] O. V. Nielsen, and H. J. V. Nielsen. Solid State Communications 35: 281 (1980b).
- [25] M. Takahashi, T. Suzuki and Y. Miyazaki. Jap. J. Appl. Phys. 16: 521 (1977).
- [26] F. E. Luborsky, J.J. Beckerand, R. O. McCary. IEEE Trans. Magn. Mag-H: 1644 (1975).
- [27] F. E. Luborsky and J.L.Walker. IEEE Trans. Magn. Mag-13: 953 (1977).
- [28] T. Miyazaki, and M. Takahashi. Jap. J. Appl. Phys. 17: 1755 (1978).
- [29] H. K. Fujimori, H, K. I. Arai, H. Shirae, H. Saito, T. Masumoto and N. Tsuya. Japan Appl. Phys. 15 (1975).
- [30] R. O'Handley, and M. D. Sullivan. J. Appl. Phys. 52: 1841 (1981).
- [31] G. Herzer, IEEE Trans. Magn. Mag-26, 1397 (1990a).
- [32] M. Vázquez, Soft Magnetic Wires, Physica B 299, (2001), P. 302-313.
- [33] D. X. Chen, J.L. Muñoz, A. Hernando “Magnetoimpedance of Metallic Ferromagnetic Wires “Physical Review B, Vol. 57, (1998), 10699.
- [34] R. Valenzuela, “Impedance Spectroscopy In Ferromagnetic Materials”, Materials Research Symposia Proc. “ Electrically-Based Microestructure Characterization III” Vol. 699, pags. 127-136 (2002).
- [35] Fausto Fiorello, Measurements And Characterization Of Magnetic Materials, Soft Magnetic Materials, Ed. Elsevier, 26 (2004).
- [36] André Moliton, The Cole-Cole Diagram, Applied Magnetism and Materials, Ed. Springer, 2007.
- [37] D. X. Chen, J. L. Muñoz, IEEE Trans. Magn. 35 (1999), 1906.
- [38] L. D. Landau, E.M. Lifshitz, Ohm And Ampere Law, Electrodynamics Of Continuous Media, Pergamon Press, 1984.
- [39] M. Knobel, M. Vazquez, L. Kraus, “Giant Magnetoimpedance”, Handbook of Magnetic Materials, K.H.J. Buschow (Ed). Vol.15, Elsevier, Amsterdam, 2003, p. 497.
- [40] V. Caviraj, S. Ghatak, Anisotropy Dependence of Giant Magnetoimpedance Of An Amorphous Ferromagnetic Ribbon on Biasing Field, International Journal Of Modern Physics B, Vol 21, 22, p. 3859, 2007.

- [41] S. M. Mohseni, M.M. Tehranchi, Study of Magnetic Inhomogeneity On The Magnetoimpedance Effect of Soft Magnetic Alloys. *Acta Physica Polonica A*, Vol 115, p. 406, 2009.
- [42] D. X. Chen, J.L. Muños, A. Hernando “Magnetoimpedance Of Metallic Ferromagnetic Wires “*Physical Review B*, Vol. 57, (1998), 10699.