UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACOPLAMIENTO DE MODELOS DE FORMACIÓN Y DISPERSIÓN DE TEFRA PARA COLUMNAS PLINIANAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
ARNALDO HERNÁNDEZ CARDONA

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. ARACELI ZAMORA CAMACHO

2014

1.Datos del alumno	
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cardona
Nombre(s)	Arnaldo
Teléfono	56 73 94 33
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	304703283
2. Datos del tutor	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Araceli
Apellido paterno	Zamora
Apellido materno	Camacho
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan Manuel
Apellido paterno	Espíndola
Apellido materno	Castro
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dr.
Nombre(s)	José Luis
Apellido paterno	Arce
Apellido materno	Saldaña
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Gabriel
Apellido paterno	Legorreta
Apellido materno	Paulín
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Fis.
Nombre(s)	Andrés Valentín
Apellido paterno	Porta
Apellido materno	Contreras
7.Datos del trabajo escrito.	
Título	Acoplamiento de Modelos de Formación y Dispersión de Tefra para Columnas Plinianas
Número de páginas	75 p.
Año	2014

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Las erupciones plinianas se cuentan entre los eventos volcánicos explosivos más poderosos. Estas erupciones liberan grandes cantidades de material fragmentado y gases en una descarga sostenida que forma una columna eruptiva que puede alcanzar alturas de varias decenas de kilómetros en la atmósfera, esparciendo el material eyectado en una extensa área. Los depósitos producidos por erupciones de tipo pliniana son de los más claramente definidos y fáciles de distinguir de entre otros tipos que produce el vulcanismo explosivo.

La tefra, nombre genérico con que se designa todo material solido con trayectorias aéreas, es un producto muy frecuente de este tipo de erupciones, y su dispersión es uno de los principales riesgos para el hombre y sus actividades por los daños que puede causar.

Debido a que el esparcimiento de la tefra conlleva numerosos riesgos, se han creado modelos de dispersión desde hace más de dos décadas. En general se han formulado dos tipos de modelos, por un lado los de formación de columna y por otro los de la sedimentación de la tefra. Estos modelos que simplifican un fenómeno muy complicado capturan los rasgos esenciales de los mismos y permiten no solo crear escenarios de utilidad en evaluación de los riesgo, sino también reconstruir erupciones no presenciadas a través de la observación de los depósitos dejados. Dos de estos modelos que son muy utilizados son debidos a Woods (1988) para la formación de la columna y a Suzuki (1983) para la deposición de tefra. En general ambos modelos se utilizan separadamente suponiendo variables intermedias en cada caso. Por ejemplo Suzuki (1983)supone una forma funcional de la velocidad a lo largo de la columna, sin embargo, este proceso es innecesario ya que el modelo de Woods obtiene estos valores de datos iniciales básicos.

En esta tesis se realiza el acoplamiento de ambos modelos, por medio de códigos de computación en Fortran que funcionan como subrutinas complementarias. Una vez acoplados se obtienen las isopacas, o contornos de igual espesor, para distintas alturas de columnas plinianas y perfiles de viento, obtenidas de datos iniciales básicos como son la velocidad y temperatura iniciales de la mezcla de piroclastos y gas así como el radio de la ventana de salida de los materiales en el cráter volcánico.

Como caso particular se aplica a la erupción del volcán “El Chichón” ocurrida en abril de 1982, para la reconstrucción de las isopacas de este evento volcánico. Con lo anterior se pudo determinar el volumen de masa arrojado, las condiciones atmosféricas, radio de cráter inicial, temperatura y velocidad de salida del material, cantidad de gas disuelto antes de la erupción, así como otros parámetros físicos de importancia. La comparación del modelo acoplado con los obtenidos con el uso único del modelo de Suzuki (1983), muestra un mejor ajuste de los datos así como la obtención de variables que no se habían tomado en cuenta anteriormente.

Variables y constantes del modelo acoplado

C_a	calor específico a presión contante del aire, 998J/(Kkg)
C_m	calor específico a presión constante del gas volcánico emitido por el conducto,1617 J/(Kkg)
C_p	calor específico aparente a presión constante del material en la columna
C_s	calor específico de los sólidos piroclásticos, 1617 J/(Kkg)
C_ν	calor específico a volumen constante del aire
e	entalpía específica local en la columna
E	entalpía específica aparente en la columna
g	aceleración de la gravedad, 9.81 m/s
H_1	altura de la tropopausa, 11 km
H_2	altura de la estratosfera, 20 km
H_b	altura donde se separan las regiones de eyección y convección
h	altura de la columna
k	constante de arrastre, 0.09
L	radio de la columna
$\dot{m}$	flujo de masa en la columna
m	masa que atraviesa la frontera del volumen de control
m_a	masa del aire incorporado en un desplazamiento de distancia ∂z
m_b	masa total de aire incorporado en la columna por encima de esa altura
m_g	masa del gas en la columna
m_m	masa del gas volcánico en la columna
m_s	masa de los sólidos en la columna
n	fracción de masa del gas en la columna
P	presión atmosférica
R_a	constante de gas para el aire, 285
R_g	constante de gas global de la columna
R_m	constante de gas para el gas volcánico, 462
R_o	constante de normalización para L
T	temperatura ambiente de la atmósfera
T_o	= 273
u	velocidad vertical local en la columna
U	velocidad vertical global en la columna
U_t	máxima velocidad en la columna
U_ϵ	velocidad horizontal de arrastre
W	el trabajo realizado al expandir un gas cuando éste atraviesa el volumen de control
y	distancia radial desde el eje
z	coordenadas a lo largo del eje
α	densidad atmosférica ambiente
α_o	= 1.3

β_a	densidad aparente en la columna
γ	razón C_p/C_v
ρ	densidad local en la columna
θ	temperatura aparente en la columna
λ	la razón de los radios a la máxima altura
μ	gradiente de temperatura en la troposfera, 6.5 K/km
ω	gradiente de temperatura en la estratosfera, 2.0 K/km
σ	densidad de los sólidos piroclásticos
χ	concentración de la tefra difuminada sobre la superficie
$W(z)$	campo de velocidades
K	constante de difusividad turbulenta
σ_r, σ_d	desviación estándar para el tamaño de partícula
r	desplazamiento de la partícula en un plano paralelo a la superficie
F	factor de forma
C_A	coeficiente de arrastre
R_a	número de Reynolds
ψ_p	densidad de los piroclastos
ψ_a	densidad del aire
η_p	viscosidad del aire
d	diámetro de las partículas
V_t, V_0	velocidad terminal
dq	fracción de la masa total expulsada durante una erupción
Q	cantidad total de masa expulsada durante una erupción
H	altura total en la columna
W_0	velocidad inicial en el conducto
β	parámetro de Suzuki
$Y(z)$	parámetro de difusión
$P(z)$	probabilidad de densidad de difusión
t_d	tiempo de difusión

Tabla 1: Variables y constantes utilizadas en el modelo acoplado. El subíndice o denota una cantidad evualuada en el conducto, y el subíndice ϵ denota una cantidad de incorporación a la columna.

Introducción

Aunque el ser humano ha convivido con los volcanes y su actividad desde su origen, no ha sido sino hasta el nacimiento de la ciencia que se ha dado su estudio sistemático. Como en todas las ciencias un primer paso es la clasificación de estas estructuras y su actividad. Los volcanes se han clasificado, entre otras características, por su morfología y por su estilo de actividad (Francis y Oppenheimer, 2004). Esta última clasificación ha dado lugar a una nomenclatura que describe el tipo de actividad presentada por ciertos volcanes clásicos y que denominamos como estromboliano, vulcaniano, hawaiano, y términos semejantes que están íntimamente relacionados con la explosividad de la erupciones características de dichos volcanes. Existe un tipo de erupción que, en particular, por la magnitud de su explosividad y consecuentes capacidades destructivas, a cautivado a lo largo de la historia a individuos talentosos. Este tipo de actividad volcánica fue descrita primordialmente por Plinio el Joven, sobrino de Plinio el Viejo, éste último, naturalista Romano que murió durante la erupción del Volcán Vesubio, Italia, en el 79 DC, y cuya actividad toma el nombre del personaje.

Las erupciones plinianas están entre los eventos volcánicos explosivos más poderosos. Estas erupciones liberan grandes cantidades de material fragmentado durante una descarga sostenida y cuya columna eruptiva puede alcanzar alturas de decenas de kilómetros en la atmósfera esparciendo el material eyectado en una extensa área (Walker, 1981). Los depósitos producidos por erupciones de tipo pliniana son de los más claramente definidos y fáciles de distinguir de entre otros tipos que se producen a partir del vulcanismo explosivo. Una erupción pliniana es esencialmente un evento explosivo, en donde fragmentos de magma y gas magmático son arrojados a través del conducto volcánico a muy alta velocidad, del orden de cientos de metros por segundo. Esta eyección de material genera una columna continua de piroclastos calientes, rocas y aire atmosférico incorporado (Wilson, 1976). Los procesos físicos que gobiernan este flujo son muy complejos pues involucran un gran número de mecanismos, cuyos dominios difieren en sus escalas tanto espaciales como temporales. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, en estados estacionarios homogéneos, pueden obtenerse modelos que describen la mecánica de estos fluidos.

El modelo que describe la formación de las columnas plinianas, elegido para este trabajo, ha sido el propuesto por Woods (1988). En este modelo la estructura de las columnas eruptivas se divide a partir de su comportamiento físico en dos regiones principales. En la primera región, cercana a la salida del conducto volcánico, el momento del material eyectado domina el flujo de la mezcla. Esta región está constituida por un núcleo interno que presenta grandes velocidades envuelto por una capa de menor densidad. Conforme el material asciende dentro de la atmósfera, la densidad aparente de la columna disminuye. Cuando esta densidad es mucho menor que la del aire circundante, el material en la columna comienza una etapa en donde las fuerzas de flotación dominan y se desarrolla la segunda región descrita en el modelo de Woods (1988) nombrada como región de convección. En lo alto de esta última región, la densidad aparente en la columna se asemeja a la de la atmósfera. Aquí el material continúa ascendiendo expandiéndose radial y horizontalmente para formar una nube en forma de hongo (Sparks y Wilson, 1976).

Debido a que la fuente en una erupción de tipo pliniana se caracteriza por ser sostenida, el comportamiento de la columna puede modelarse como un proceso en estado estacionario. Además, es posible tratar el flujo como homogéneo cuando el tamaño medio de partícula es pequeño ($< 8mm$), a pesar de ser una mezcla multifase de gases y partículas (Woods, 1988; Sparks y Wilson, 1976). Esta consideración sobre el tamaño medio de las partículas establece una condición de equilibrio térmico entre la mezcla multifásica.

El modelo de Woods (1988)calcula parámetros que son primordiales para la descripción del material en la columna, como lo son: la velocidad, la temperatura y la densidad aparente de la columna a distintas alturas. Para ello utiliza ecuaciones de conservación de masa, momento y energía; y expresiones para la fracción de masa del gas, la constante de gas dentro de la columna y la capacidad calorífica del material. Además, este modelo calcula la altura, el radio y el perfil de la columna.

La tefra de dimensiones más pequeñas es comúnmente conocida como ceniza volcánica, la cual es un producto muy frecuente de este tipo de erupciones y su dispersión es uno de los principales factores de riesgo por su alcance. La tefra acumulada sobre techos puede fácilmente causar el colapso de éstos. También produce serios problemas en aviones, automóviles, equipo electrónico, agricultura y ganadería entre otros (Sparks y Wilson, 1976).

Dentro de los modelos que se utilizan para conocer la dispersión de tefra, existen varias relaciones que son fundamentales para entender este proceso, tales como: la relación que existe entre la altura de la columna y el volumen total expulsado, la duración de la erupción, la fracción de masa de la ceniza de un tamaño fino o la relación entre la altura de la columna y la cantidad de material que se expulsa por unidad de tiempo (Mastin y otros, 2009). En este tipo de eventos donde la columna se mantiene gracias a una fuente continua, y la duración de la erupción puede variar de unas horas a decenas de horas, la relación altura total—cantidad de material expulsado, está determinada más que por la energía o el material total expulsado en el evento, sino por la rapidez con la que la energía o el material es expulsado durante el tiempo que la columna llega a su altura máxima (Morton y otros, 1956). Esta relación es uno de los parámetros más considerados para el modelado de la caída de tefra.

La masa del material expulsado, el área sobre la cual se extiende y el espesor de los depósitos de tefra, son factores primordiales para entender el potencial destructivo de una erupción volcánica. Estos parámetros dependen sólo de la expresión específica de la energía en donde se involucran, el tamaño inicial, el punto de fragmentación de tefra y la altura de la columna eruptiva así como la velocidad y dirección del viento. Por lo tanto los patrones de los depósitos de tefra varían mucho para cada erupción y aunque el total de la masa del material expulsado sea el mismo, la tefra puede producir una variedad de panoramas destructivos (Suzuki, 1983).

El modelo que propone Suzuki (1983) es del tipo advección—difusión para la dispersión de tefra ya que la ecuación bidimensional que la simula está basada en las siguientes consideraciones:

1. La difusión de las partículas volcánicas de la columna eruptiva.
2. La advección de estas partículas con los movimientos horizontales de la atmósfera.
3. La difusión horizontal de las partículas debido a la turbulencia de la atmósfera.
4. La precipitación de las partículas en la atmósfera debido a la fuerza de gravedad.

Suzuki (1983)utiliza las suposiciones de que el material de la erupción consiste en una cantidad finita de partículas volcánicas, que la distribución del diámetro de dichas partículas tiene una forma particular, y que todas las partículas caen con velocidad terminal acumulándose finalmente en el suelo.

En esta tesis el acoplamiento de los modelos de Woods (1988) y Suzuki (1983) se lleva a cabo computacionalmente por medio del cálculo de la altura, la cantidad de masa y el gradiente de velocidades en toda la columna eruptiva realizado por el de Woods (1988), parámetros que son necesarios y no entran en conflicto con las suposiciones del de Suzuki (1983) para poder llevar a cabo el cálculo de la dispersión en el segundo modelo. En el primer capítulo se describe la teoría generada por Woods (1988). En el segundo capítulo se esboza la teoría de Suzuki (1983), además de una comparación entre resultados conocidos del último con los obtenidos por el modelo acoplado presentado en esta tesis. El tercer capítulo es la aplicación del modelo acoplado al caso de la erupción del Volcán El Chichón de 1982 cuyos parámetros de columna eruptiva y depósitos de tefra se conocen. En anteriores trabajos de simulación para este volcán (e.g. Bonasia y otros, 2012) se analizó la dispersión de la tefra sustentada en el modelo de Suzuki (1983), en el cual se requieren ciertos parámetros con valores que se obtienen bajo relaciones empíricas (Mastin y otros, 2009). Los resultados obtenidos por estas simulaciones se comparan con el modelo acoplado presentado en esta tesis; haciendo notar que en este último modelo, los parámetros requeridos por el modelo de Suzuki, y que en los trabajos anteriores son aproximados, en esta tesis se obtienen por medio de la descripción teórica de los fenómenos que suceden al formarse la columna.

Capítulo 1

Dinámica y Termodinámica de columnas plinianas

Durante una erupción de tipo pliniana se descarga una mezcla multifásica de gases y piroclastos calientes los cuales salen propulsados a grandes velocidades. Sparks y Wilson (1976) hacen una distinción entre dos zonas de este tipo de columnas debido a su comportamiento físico: una región en donde el momento del material domina y otra donde las fuerzas de flotación dominan sobre el material eyectado. Conforme el material asciende en la atmósfera, formando la columna pliniana, el aire circundante de la atmósfera se incorpora en ella y debido a que el material sale del conducto a altas temperaturas, el aire incorporado se calienta provocando que la mezcla de gases en el interior de la columna se expanda (Figura 1.1 **a**). En este momento se sucede una condición para el colapso; si la energía térmica en la columna puede mantener este proceso de expansión, la columna seguirá ascendiendo hasta que el material en ella llegue a una altura donde las fuerzas de flotación se neutralizan y entonces el material comienza a extenderse radialmente en una nube en forma de hongo. A la región en donde el material comienza a flotar se le conoce como zona de flotación convectiva (Sparks y Wilson, 1976). Woods (1988) modela ambas regiones por separado en un estado estacionario considerando que el conducto volcánico suministra continuamente el material que forma la columna eruptiva. Los modelos de ambas regiones se unifican justo cuando el material en la columna comienza a flotar.

Woods (1988) supone que los sólidos que componen los piroclastos son fragmentos pequeños, de submilimétricos a milimétricos (Sparks y Wilson, 1976). Esta suposición permite considerar las fases de sólidos y gases en equilibrio térmico durante la formación de la columna, una suposición razonable para numerosas erupciones plinianas. Este equilibrio tiene como consecuencia que el intercambio de masa entre fases se considera pequeño y el intercambio, tanto de momento como de entalpía, es tan rápido que la velocidad y la temperatura entre fases se consideran semejantes (Werner Kieffer, 1984).

Este modelo excluye cualquier caída de material desde la columna mientras ésta no haya alcanzado su altura máxima, coincidiendo con la idea de tomar a los sólidos lo suficientemente pequeños para transportarlos mucho más alto que los sólidos en grandes bloques.

El aire que se incorpora a la columna lo hace por medio de la turbulencia provocada en la atmósfera por la columna. Por esta razón, la frontera de la columna es siempre nítida pero irregular a cualquier altura. Sin embargo, ya que se considera a la columna en un estado estacionario, ésta tendrá un perfil suave (como en la Figura 1.1 **b**) donde las propiedades características de la columna, toman valores promedio dentro de ella y en el fluido circundante. A una altura dada estas propiedades están definidas como:

$$\begin{aligned} \text{Flujo de Masa:} \quad & \beta_a U L^2 = \int u \rho dA \\ \text{Flujo de Momento:} \quad & \beta_a U^2 L^2 = \int u^2 \rho dA \\ \text{Flujo de Entalpía específica:} \quad & \beta_a E U L^2 = \int u \rho e dA \end{aligned}$$

donde las integrales son sobre una sección transversal a la columna; β_a es la densidad aparente de la columna, U es la velocidad vertical promedio, L es el radio efectivo de la columna, E es la entalpía específica de la columna y; u es la velocidad, ρ es la densidad y e es la entalpía específica dada en un punto dentro de la sección transversal.

1.1. Conservación de masa y momento

La conservación de masa y momento se obtienen al considerar el flujo neto que pasa a través del volumen de control fijo entre dos planos horizontales en la columna. Se producen las siguientes ecuaciones donde U_ϵ es la velocidad de incorporación del aire en los bordes de la columna, α la densidad del aire atmosférico incorporado y g la constante de la gravedad:

$$\frac{d}{dz}(\beta_a U L^2) = 2U_\epsilon L\alpha \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dz}(\beta_a U^2 L^2) = g(\alpha - \beta_a)L^2 \tag{1.2}$$

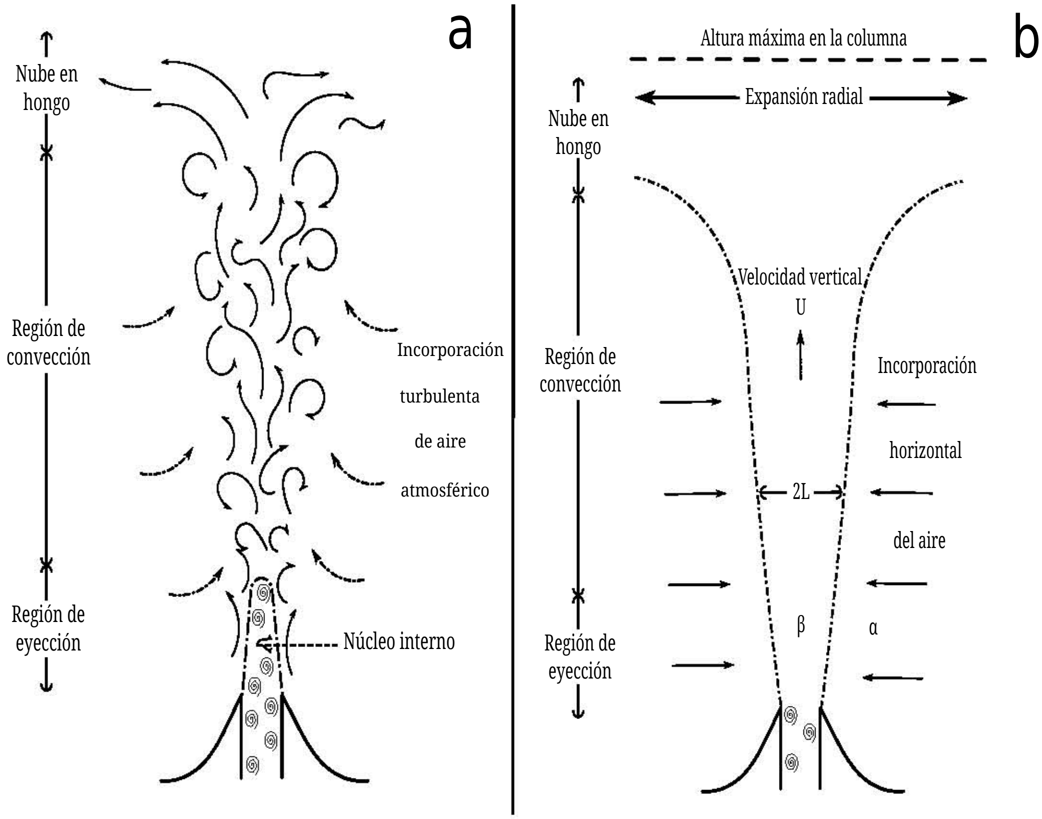

Figura 1.1: **a** Diagrama esquemático de una columna eruptiva. **b** Diagrama de una columna eruptiva descrita por medio del modelo denominado "top-hat". Donde L, U y β son es el radio, la velocidad promedio y es la densidad aparente en la columna respectivamente, y α la densidad del aire incorporado.

El mecanismo con el que el aire se incorpora difiere entre la región de empuje del gas y la región convectiva, lo que se verá posteriormente en la Sección 1.5.

1.2. Densidad aparente

Woods (1988) considera un gradiente en la velocidad $\frac{1}{U}\frac{dU}{dz}$ desde el momento de obtener las variaciones en la altura δh y posteriormente al asumir un volumen cilíndrico δV de la parcela sobre la cual se harán los cálculos. Dado que el aire incorporado es el mecanismo principal para la formación de la región de flotación convectiva, también es la causa de que la densidad aparente de la columna varié con la altura. Así también, sucede con la fracción de masa de gas y con la constante de gas integral de la columna. Las siguientes ecuaciones se desarrollan en el Apéndice A y en donde R_{g0} y R_g son las constantes inicial y global del gas, R_a la constante del gas para la atmósfera, θ la temperatura global, P la presión atmosférica, n_0 y n son las fracciones de masa del gas inicial y para cada punto en la columna, L_0 y L el radio de salida en el conducto y para cada altura en la columna, U_0 y U las velocidades en la salida del conducto (o inicial) y promedio para cada altura en la columna y β_0 la densidad aparente en la salida del conducto (o inicial) (ver Tabla 1).

$$\frac{1}{\beta_a} = (1-n)\frac{1}{n} + \frac{nR_g\theta}{P} \tag{1.3}$$

$$n = 1 + (n_0 - 1)\frac{L_0^2 U_0 \beta_0}{L^2 U \beta_a} \tag{1.4}$$

$$R_g = R_a + (R_{g0} - R_a)\left(\frac{1-n}{n}\right)\left(\frac{n_0}{1-n_0}\right) \tag{1.5}$$

1.3. Efectos térmicos

Woods (1988) simplifica el comportamiento de la mezcla eruptiva suponiendo que es un gas perfecto. De esta forma, los calores específicos se consideran a volumen y presión constante C_v y C_p; y así se tiene entonces que, si θ es la temperatura, $C_p\theta$ es la entalpía específica del material, la cual representa la energía interna mas el producto de la presión y el volumen de la unidad de masa del material, $C_v\theta\beta_a UL^2$ es el flujo de la energía interna y $C_p\theta\beta_a UL^2$ es el flujo de entalpía a través de una sección horizontal de la columna. Donde hay que hacer notar que la transferencia de masa a través de la sección transversal horizontal sobre la columna es el mecanismo de transferencia requerido por estos dos últimos flujos.

Por otro lado, la ecuación del flujo estacionario de energía para un volumen de control (Figura 1.2) puede obtenerse de la primera ley de la termodinámica $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ (e.g. Shapiro, 1953):

$$\dot{Q} - \dot{W}_x = \sum \dot{m}_{ent}\left(\frac{U^2}{2} + E + gh\right)_{ent} - \sum \dot{m}_{sal}\left(\frac{U^2}{2} + E + gh\right)_{sal} \tag{1.6}$$

Donde los subíndices *ent* y *sal* significan la entrada y la salida respectivamente, de energía al volumen de control. $\dot{Q}$, el flujo de calor, representa la transferencia de calor entre el volumen de control y el fluido externo a la columna; este término puede despreciarse debido a que la cantidad de flujo turbulento que se incorpora del exterior a la columna es alto. $\dot{W}_x$ es la razón del trabajo realizado por cizallamiento sobre la superficie del volumen, el cual también puede despreciarse ya que, al considerar un flujo turbulento, su valor es pequeño en comparación con el cambio en el flujo de la energía cinética debido, de nuevo, a la incorporación de aire. $\dot{m}$ denota el flujo de masa, E es la entalpía específica, $\frac{U^2}{2}$ el término correspondiente a la energía cinética por unidad de masa y gh el término correspondiente a la energía potencial por unidad de masa. Esta es la ecuación que describe el proceso térmico en la columna. Por lo tanto la ecuación (1.6) indica que el flujo neto de entalpía, energía cinética y energía potencial a través de las fronteras del volumen de control es cero (Figura 1.2).

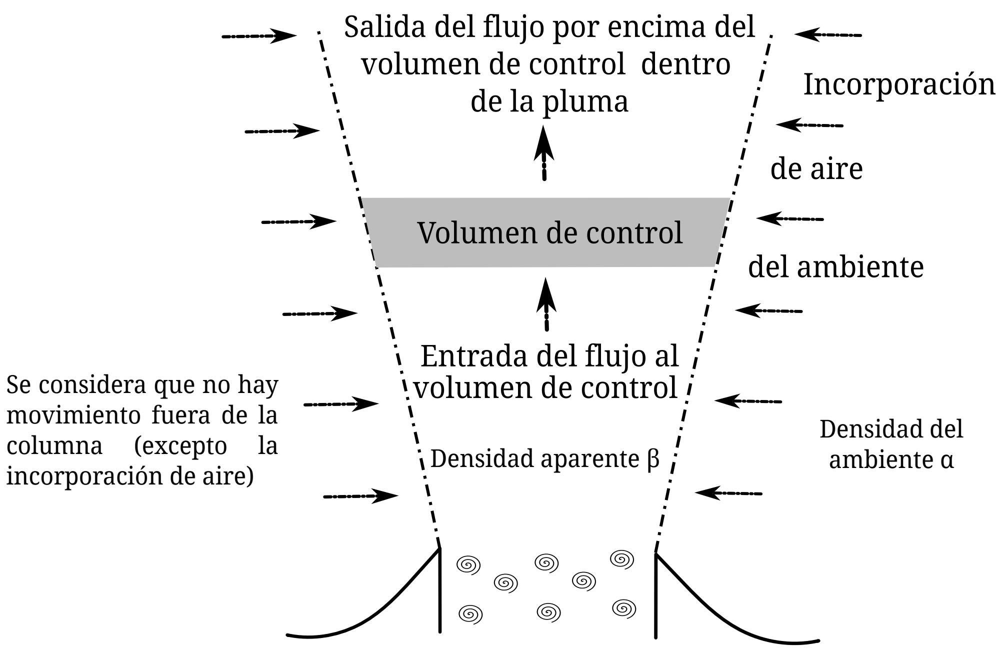

Figura 1.2: Diagrama del control de volumen fijo en el espacio dentro de una columna eruptiva. Donde β es la densidad aparente en la columna y α la densidad del aire incorporado.

Combinando la ecuación (1.6) con la ecuación de conservación de la energía (1.1) y recordando que el mecanismo de transferencia está dado por el flujo de masa en el volumen de control, se obtiene la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dz}(C_p\theta\beta_a UL^2) = \left(\frac{d}{dz}(\beta_a UL^2)\right)\left(\frac{U_\epsilon^2}{2} + gh + E_\epsilon\right) - \frac{d}{dz}\left(\beta_a UL^2\left(gh + \frac{U^2}{2}\right)\right) \quad (1.7)$$

donde ϵ denota una cantidad referida a la incorporación de aire.

Posteriormente se verá en las secciones 1.5.1 y 1.5.2 que, en una columna eruptiva la velocidad con la que el aire atmosférico se incorpora es un orden de magnitud menor que la velocidad vertical; por lo que el término $\frac{U_\epsilon^2}{2}\frac{d}{dz}(\beta_a UL^2)$ puede ignorarse en comparación con $\frac{U^2}{2}\frac{d}{dz}(\beta_a UL^2)$. Usando la ecuación (1.1) y (1.2) y la definición de entalpía específica dada anteriormente, la ecuación de flujo de energía estacionaria puede reducirse a:

$$\frac{d}{dz}(C_p\theta\beta_a UL^2) = (C_aT)\frac{d}{dz}(\beta_a UL^2) + \frac{U^2}{2}\frac{d}{dz}(\beta_a UL^2) - \alpha UL^2 g \qquad (1.8)$$

donde C_a es el calor específico del aire a presión constante. Ésta se obtiene similarmente como para R_g en el Apéndice A; dando como resultado:

$$c_p = c_a + (c_{p_o} - C_a)\frac{(1-n)}{1-n_o} \qquad (1.9)$$

El uso de la ecuación del flujo de energía estacionaria (1.8) proveé de ciertas ventajas sobre otros modelos como es él que considera la entalpía y no la energía interna del gas, evitando así suposiciones acerca de la naturaleza exacta de la expansión del gas. Además, esta ecuación incluye la interacción entre las energías cinética y potencial con la entalpía, interacción que acontece esencialmente cuando se tienen grandes diferencias entre temperaturas lo que provoca grandes cambios en la entalpía y consecuentemente cambios en las energías cinética y potencial.

1.4. Condiciones atmosféricas del ambiente

En el modelo también se considera el cambio en la temperatura atmosférica con la altura. A pesar de que la variación de la temperatura en las diferentes capas de la atmósfera no es constante, Woods (1988) utiliza para el modelo la simplificación de que los gradientes altitudinales μ y ω son constantes para la troposfera y la estratosfera respectivamente. Así, el perfil de temperaturas atmosféricas utilizado tiene una disminución lineal de la temperatura en la troposfera, temperatura constante en la tropopausa y un incremento lineal en la estratosfera dadas como:

$$T = \begin{cases} T_o - \mu z & para\, z \leq H_1; \\ T_o - \mu H_1 & para\, H_1 \leq z \leq H_2; \\ T_o - \mu H_1 + \omega(z - H_2) & para\, z \geq H_2; \end{cases} \tag{1.10}$$

donde H_1 es la altura de la troposfera, H_2 es la altura de la estratosfera y T_o una temperatura de referencia (ver Tabla 1).

Luego entonces para conocer la presión en cada una de las tres capas modeladas, se sabe de Gill (1982) una relación para la presión hidrostática dada por:

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha g$$

y la ecuación de estado para el aire seco $P = \alpha R_\alpha T$ de donde se obtiene la relación:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{R_a T} \tag{1.11}$$

Integrando (1.11) se encuentra que el perfil de la presión ambiental está dado por:

$$P = \begin{cases} P_o \left(1 - \frac{\mu z}{T_o}\right)^{\frac{g}{R_a \mu}} & para\, z \leq H_1; \\ P_o \left(1 - \frac{\mu H_1}{T_o}\right)^{\frac{g}{R_a \mu}} exp\left(\frac{-g(z-H_2)}{R_a(t_o - \mu H_i)}\right) & para\, H_1 \leq z \leq H_2; \\ P_o \left(1 - \frac{\mu H_1}{To}\right)^{\frac{g}{R_a \mu}} exp\left(\frac{-g(H_1-H_2)}{R_a(t_o - \mu H_i)}\right) \left(\frac{T_o - \mu H_1}{T_0 - \mu H_1 + \omega(z - H_2)}\right)^{\frac{g}{R_a \omega}} & para\, z \geq H_1; \end{cases} \tag{1.12}$$

1.5. Consideraciones sobre las regiones

1.5.1. Región de eyección del gas

En esta región los valores tanto de la velocidad del material como el de la densidad aparente inicial son mucho mayores a los del aire circundante (Sparks y Wilson, 1976), por lo que el interior del chorro en eyección se compone de una zona núcleo mas densa que una capa exterior que recubre al núcleo (Figura 1.1 **a**). Esta última capa, con una densidad menor a la de la zona núcleo, estará en contacto con el gas de la atmósfera que comienza a incorporarse dentro de la mezcla de gases y piroclastos. Dado que el núcleo no se mezcla con el aire incorporado, no se encontrará tampoco en equilibrio térmico con la capa que lo recubre. Sin embargo esto no afecta significativamente el modelo de esta región (Sparks y Wilson, 1976), pero sí determina que se comporte como en secciones horizontalmente uniformes.

La estructura detallada del chorro depende de que el fluido al salir del conducto volcánico sea subsónico o supersónico. Lo último sucede si el chorro se inyecta con una presión mayor a la atmosférica, alternativamente el fluido será subsónico si es igual a la presión atmosférica (Shapiro, 1953). En el modelo de Woods (1988) se asume que el chorro se ajusta a la presión atmosférica presente en el conducto, ignorando así cualquier suposición que podría derivar en un flujo supersónico. Consecuentemente cuando el núcleo del chorro ya no puede sostenerse, la capa que recubre al núcleo conforma la totalidad de la columna.

El enfoque del modelo de Woods (1988) con respecto al chorro, está basado en el trabajo de Prandtl (1954) donde la teoría introducida por él para un chorro emergiendo de una tobera dentro de un ambiente con el mismo fluido, se adapta para el fluido considerado en la región de eyección del gas. En la teoría de Prandtl no se plantean los efectos de flotación debido a que el fluido en el chorro es el mismo que el del ambiente; y por lo tanto el momento en el chorro se conserva al abandonar la tobera. Además, se asume que la longitud de mezcla, introducida por Prandtl, durante el proceso de incorporación del aire, es $l = \lambda L$, donde λ es una constante y así, el esfuerzo de corte (ver Oertel, 2004) que actúa en el núcleo central del chorro debido a la mezcla está dado por:

$$\tau = -\beta_a l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = -\left(\frac{-2U_1}{L}\right)^2 \beta_a l^2 \tag{1.13}$$

donde u es la velocidad local en la columna, U_1 es la máxima velocidad en la sección transversal y L es el radio del chorro. Así que el movimiento del núcleo central está dado por:

$$\beta_a U \frac{dU}{dz} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{8\beta_a \lambda^2 U_1^2}{L} \tag{1.14}$$

donde U es la velocidad promedio a lo largo de la columna. Debido a que la velocidad es casi uniforme en el núcleo central, esta velocidad puede aproximarse a U_1. Propone Woods (1988) que $\frac{dL}{dz} = \frac{1}{8}$ y así $\lambda = \frac{1}{8}$ y entonces

$$U\frac{dU}{dz} = -\frac{U^2}{8L} \tag{1.15}$$

Como en la teoría de Prandtl (1954) no se incorporan los efectos de flotación cuando el fluido del ambiente es diferente al del chorro, Woods (1988) introduce una modificación para poder aplicar la teoría de Prandtl a la región base de eyección del gas de la columna eruptiva. Esta modificación sucede al considerar que la emisión de un chorro con densidad β_a dentro de otro fluido de densidad α a partir de una tobera, se comporta como un chorro de la misma densidad del fluido donde es inyectado, pero emitido desde una tobera de radio $L\sqrt{\frac{\beta_a}{\alpha}}$ (Thring y Newby, 1953). Este resultado implica que ahora la fuerza de arrastre se debe también a la diferencia en las densidades. Y entonces la ecuación (1.14) se expresa como un cambio en el radio del chorro para dos fluidos con densidades α_o y β_o dadas en el conducto como:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = -\beta_a\frac{U^2}{8L}\sqrt{\frac{\alpha_o}{\beta_o}} \tag{1.16}$$

Estas densidades, α_o y β_o, bien pueden ser relacionas con la densidad aparente de la atmósfera y de la densidad del chorro de material, respectivamente. La forma de considerarlas en la ecuación (1.16) es recordando que el aire que se incorpora a la columna tiene una temperatura mucho menor a la de los piroclastos. El calentamiento de este volumen de aire motiva la expansión del volumen total en la columna, disminuyendo, por lo tanto, la densidad aparente β_a en la columna hasta cierta altura H_b donde será menor que la densidad de la atmósfera α. Esta condición $\alpha \geq \beta_a$ es justamente el criterio que determina cuándo termina la región de eyección del gas y comienza la región de flotación. Así, este efecto se incorpora en la ecuación (1.16) recurriendo a los valores de α y β_a para cualquier altura teniendo en mente el fenómeno de expansión térmica. Por lo tanto se calcula la fuerza para cada altura con sus valores particulares en las densidades en lugar de usar el valor de las densidades para el conducto. Entonces, la ecuación que modela la fuerza en la región de eyección del gas es:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = -\beta_a\frac{U^2}{8L}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta_a}} \tag{1.17}$$

donde la aproximación de la velocidad promedio en la columna completa se puede calcular por medio de la velocidad en el núcleo interno. Además de esta fuerza de corte existe una fuerza de flotación derivada de la ecuación (1.2) actuando sobre el material de la columna. Ésta se incluye para deducir la ecuación completa que modela el movimiento del gas en esta región como:

$$U\frac{dU}{dz} = -\frac{U^2}{8L}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta_a}} + \frac{g(\alpha - \beta_a)}{\beta_a} \tag{1.18}$$

La ecuación (1.18) junto con la conservación de momento (1.2), la ecuación de flujo estacionario de energía (1.8), la definición de densidad aparente (1.3) y las ecuaciones (1.4), (1.5) y (1.9) forman un nuevo conjunto completo de ecuaciones que gobiernan la dinámica y termodinámica en la región base de la eyección del gas, donde la columna mantiene una estructura similar a un núcleo interior rodeado de una capa externa.

1.5.2. Región convectiva

Esta región se sucede a partir de la altura H_b, donde la densidad de la columna β_a es menor que la densidad del aire circundante α. Morton y otros (1956) propusieron que la velocidad con la que el aire se incorpora horizontalmente en los bordes de una pluma en estas circunstancias, es proporcional a cierta velocidad característica para una altura en la columna. Sparks (1986) propone una constante de proporcionalidad k, con valor 0.09, para esta velocidad característica. Usando el flujo de masa en la ecuación (1.1), se tiene ahora:

$$\frac{d}{dz}(\beta_a U L^2) = 2kUL\alpha \tag{1.19}$$

Esta suposición acerca de la incorporación del aire es suficiente para considerar el modelo que describe la evolución de la columna; así como en la región de eyección, las ecuaciones (1.2), (1.8), (1.3), (1.4), (1.5) y (1.9) junto con el flujo de masa (1.19), forman el conjunto de ecuaciones que gobiernan la región convectiva. Estas ecuaciones pueden resolverse numéricamente y en este trabajo se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Arfken, 2005) para la programación (Apéndice B). Principalmente, las soluciones para la velocidad $U = W(z)$, la de densidad aparente y el radio de la columna L, dentro de la columna, se emplearon para obtener la dispersión de la tefra en el modelo de Suzuki (1983) que se verá en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Dispersión de Tefra

2.1. Dispersión atmosférica de tefra

Ya que el movimiento de las masas de aire es aleatorio en tiempo y en espacio debido a la interacción con vórtices presentes en la atmósfera, el movimiento de las partículas en élla también es aleatorio. Las partículas más pequeñas son difundidas dentro de la atmósfera vertical y horizontalmente, sin embargo, la turbulencia horizontal es mucho mayor que la vertical. Por lo tanto para este modelo bidimensional sólo se ocupa la difusión por turbulencia horizontal.

La ecuación diferencial de difusión donde el transporte se debe a un viento con velocidad uniforme, está dada por (Csanady, 1973):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \chi = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial \chi}{\partial y}\right) \tag{2.1}$$

donde (x, y) son los puntos donde se mide la concentración, χ es la concentración de la sustancia en difusión, K es el coeficiente de difusión debido a la turbulencia, y $\vec{u}$ es la velocidad del viento que Suzuki considera sólo en la dirección x, pero que para el modelo acoplado se toman las componentes u_x y u_y.

Este coeficiente $K(r, t)$, relacionado con el cambio en la desviación estándar de la difusión de partículas en un medio (Csanady, 1973), es una función de la distancia r tomada a partir del centro de difusión y del tiempo de difusión t, donde $r = \{(x - u_x t)^2 + (y - u_y t)^2\}^{1/2}$. Expresiones para el coeficiente de difusión turbulenta se han obtenido por medio de la comparación de la varianza con observaciones realizadas por varios autores (Tabla 2.1). Como por ejemplo, con la varianza descrita en (2.2) se ha obtenido un coeficiente de difusión turbulenta dado por $K = \sigma_r^2/4t$. Estas expresiones también pueden ser como en la Tabla 2.1, con el común denominador para todas las constantes de difusión turbulenta de que el radio de la columna está definido como $L \equiv 3\sigma_r$.

$$\sigma_r^2 \equiv \frac{\int_0^\infty r^2 \cdot \chi(t,r) \cdot 2\pi r dr}{\int_0^\infty \chi(t,r) \cdot 2\pi r dr} \tag{2.2}$$

Modelo	Coeficiente	Varianza
Difusión tipo Fick	$K = cte.$	$\sigma_r^2 \propto t$
Joseph y Sendner (1958)	$K \propto 3\sigma_r$	$\sigma_r^2 \propto t^2$
Ozmidov (1958); Richardson (1926)*	$K \propto (3\sigma_r)^{4/3}$	$\sigma_r^2 \propto t^3$
Batchelor (1950)*	—	$\sigma_r^2 \propto t^2 \sim t^3$
Okubo (1971)*	$K \propto 3\sigma_r^{1.1}$	$\sigma_r^2 \propto t^{2.3}$

Tabla 2.1: Coeficientes de difusión turbulenta y su relación con la varianza de la dispersión, y la relación entre la varianza de la dispersión con el tiempo. Los autores marcados con * obtuvieron sus relaciones a partir de observaciones.

Los estados para K representados en la Tabla 2.1 están expresados en función sólo de r, ya que cuando se tienen partículas aéreas bajo una difusión turbulenta, el tiempo de difusión es el tiempo que estas partículas tardan en caer a la superficie. Así, el coeficiente de difusión debido a la turbulencia también puede ser función del tiempo de caída. El resultado de la superposición de muchos vórtices en el sistema se manifiesta cuando la escala y el tiempo se ven afectados en el fenómeno de la difusión por turbulencia.

La solución propuesta por Suzuki (1983) a la ecuación (2.1) se obtiene al escribir $K = C\,t^{3/2}$ de donde χ es:

$$\chi(x,y) = \frac{5Q}{8\pi C t^{5/2}} exp\left(-\frac{5\{(x-ut)^2) + (y-ut)^2\}}{8Ct^{5/2}}\right), \tag{2.3}$$

donde C es una constante y Q la cantidad total de material expulsado durante la erupción. De la ecuación (2.3) se obtiene la varianza y el coeficiente aparente de difusión debido a la turbulencia como:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{8C}{5}\right) t^{5/2}, \; K = 0.08073 C^{2/5} L^{6/5}.$$

La suposición para $K = Ct^{3/2}$, por lo tanto satisface la ecuación (2.1). De nuevo Suzuki (1983) propone un ajuste para $K = 2.661\sigma_r^{6/5}$ que obtiene al comparar los valores de K vs σ_r, entre los observados para dos erupciones y los reportados por Richardson (1926). Donde K está dado en cm^2/s, σ_r en cm y la constante $C = 400$.

2.2. Velocidad límite de las partículas en la atmósfera

Walker y otros (1971) determinaron en el laboratorio la velocidad terminal a nivel del mar para varios tamaños y densidades de partículas piroclásticas. Wilson (1972) posteriormente estimó el tiempo de caída de estas partículas a grandes alturas utilizando el método de Walker y otros (1971). Wilson y Huang (1979) encontraron velocidades terminales para piedra pómez, fragmentos de vidrio y cristales de feldespatos del tamaño de cenizas. Ellos propusieron la relación (2.4) entre el coeficiente de arrastre C_a, el número de Reynolds R_a y el parámetro de forma F, donde:

$$C_a = \frac{4\psi_p g d}{3\psi_a V_t^2}, \; R_a = \frac{\psi_a V_t d}{\eta_a}, \; F = \frac{b+c}{2a}, \; d = \frac{a+b+c}{3},$$

siendo d el diámetro promedio de las partículas con ejes principales a, b, c con a el eje mayor, V_t la velocidad terminal de la partícula, η_a, ψ_a la viscosidad y la densidad del aire respectivamente, ψ_p la densidad de las partículas y g la aceleración de la gravedad.

$$C_a = \frac{24}{R_a} F^{-0.828} + 2\sqrt{1.07 - F} \tag{2.4}$$

De la ecuación (2.4) se obtiene la velocidad terminal V_t como función del diámetro d y el parámetro de forma F de las partículas:

$$V_t = \frac{\psi_p g d^2}{9\eta_a F^{-0.828} + \sqrt{81\eta_a^2 F^{-1.656} + \frac{3}{2}\psi_a \psi_p g d^3 \sqrt{1.07 - F}}} \tag{2.5}$$

Sin embargo, la ecuación (2.5) no concuerda con los datos experimentales obtenidos por Wilson y Huang (1979) cuando se consideran partículas con un diámetro medio menor a $0.01\,cm$. Esto sucede debido a que en su análisis, generalizaron la densidad de los fragmentos de vidrio a un valor de $2.40\,(g/cm^3)$ y entonces de esta forma la ecuación (2.4) depende fuertemente de los fragmentos de vidrio. Esta dependencia la atribuyeron únicamente a que el cambio en C_a está fuertemente ligado al parámetro de forma F. Sin embargo la suposición de que la densidad es uniforme, es cuestionable ya que los efectos de la densidad y el parámetro de forma sobre el coeficiente de arrastre no son independientes (Suzuki, 1983). Por ello, Suzuki (1983) propone que bajo mediciones experimentales, el exponente del parámetro de manera en la ecuación (2.4), se ajuste de tal forma que esta expresión represente también las velocidades terminales de la piedra pómez y los cristales de feldespatos como:

$$C_a = \frac{24}{R_a} F^{-0.32} + 2\sqrt{1.07 - F}, \tag{2.6}$$

y así también la ecuación (2.5) como:

$$V_t = \frac{\psi_p g d^2}{9\eta_a F^{-0.32} + \sqrt{81\eta_a^2 F^{-0.64} + \frac{3}{2}\psi_a \psi_p g d^3 \sqrt{1.07 - F}}}. \tag{2.7}$$

Por otro lado Suzuki (1983) calcula el tiempo de caída T de las partículas a grandes alturas con una simplificación de la ecuación (2.7); consigue una expresión más sencilla suponiendo que el cambio en la velocidad depende solamente de la densidad del aire circundante, y así el parámetro de forma es ignorado, dando una expresión con dependencia en el coeficiente de arrastre,

$$V_t = \left(\frac{mg}{C_a A \psi_a} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

donde m es la masa de la partícula, A es el área de la sección transversal efectiva, C_a el coeficiente de arrastre y g la aceleración de la gravedad. El tiempo de caída T de una partícula se puede calcular de la ecuación (2.8), suponiendo la velocidad V_z a una altura dada; y utilizando la siguiente relación entre velocidades terminales y densidades:

$$\frac{V_z}{V_0} = \left(\frac{\psi_{a0}}{\psi_{az}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

donde V_0 y V_z son las velocidades terminales de caída de las partículas a nivel del mar y a una altura z respectivamente, y análogamente ψ_{a0} y ψ_{az} las densidades del aire. Además, en la relación (2.9) se ha supuesto que el área de la sección transversal no varía significativamente. Idénticamente se desprecian los efectos en la variación de la gravedad con respecto a la altura y la latitud. Suzuki (1983) también supone que la temperatura del aire es constante, y entonces, de la ley de Boyle se obtiene que:

$$\frac{\psi_{a0}}{\psi_{az}} = exp\left(-\frac{\psi_{a0}}{P_0}\, gz\right),$$

donde P_0 es la presión atmosférica a nivel del mar. Entonces, de la ecuación (2.9) una aproximación a la velocidad terminal está dada por:

$$V_z = V_0 exp\left[0.0625z(km)\right] \tag{2.10}$$

y por lo tanto, el tiempo de caída a una altura z es:

$$T = \int_0^z \frac{dz}{V} = \frac{1 - exp\left[0.0625z(km)\right]}{0.0625V_0}. \tag{2.11}$$

Sin embargo, el tiempo de caída obtenido en la ecuación (2.11) no coincide con los resultados de Wilson (1972) quien calculó los efectos de la altura en el tiempo de caída utilizando el método de Runge-Kutta (Arfken, 2005) considerando a la viscosidad $\eta_a(z)$, densidad $\psi_a(z)$ y gravedad $g(z)$ en función de la altura. Con el fin de reducir esta discrepancia, Suzuki (1983) introduce las siguientes correcciones sobre el tiempo de caída:

$$t = 0.752 \times 10^6 \left(\frac{1 - e^{0.0625z}}{V_0}\right), \tag{2.12}$$

donde t está dado en segundos, z en km y V_0 en cm/s.

2.3. Difusión de las partículas volcánicas de la columna eruptiva

Existe una gran variedad de funciones que describen la distribución de los tamaños del material piroclástico (T. Crowe y otros, 2011). De las tres funciones pormenorizadas en la Tabla 2.2, Suzuki (1983) utiliza la distribución log-normal cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(log_{10}d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} exp\left[-\frac{(log_{10}d/d_m)^2}{2\sigma_d^2}\right],$$

donde σ_d es la desviación estándar de la distribución de tamaños y d_m es el diámetro medio. Por lo tanto la cantidad dq de las partículas que tienen diámetros entre d_j y d_{j+1} de la cantidad total del material expulsado Q es

$$dq = \frac{Qlog_{10}\left(\frac{d_{j+1}}{d_j}\right)}{2\sigma_d^2} exp\left[-\frac{(log_{10}d_j/d_m)^2}{2\sigma_d^2}\right]. \tag{2.13}$$

Distribución	Principales aplicaciones
Log-normal	Aproximación en aerosoles
Rosini-Rammler	Granulometría
Log-hiperbólica	Sedimentación

Tabla 2.2: Tres distintas funciones que describen la distribución del tamaño de partícula (T. Crowe y otros, 2011).

Por otro lado, Suzuki (1983) propone que la probabilidad de difusión de las partículas volcánicas desde la columna eruptiva se calcula siguiendo las suposiciones enumeradas abajo.

(1) La velocidad vertical de la columna eruptiva $W(z)$ es función lineal de la altura z, siendo máxima en el conducto y cero en lo alto de la columna.

$$W(z) = W_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\lambda},$$

donde W_0 es la velocidad inicial en $z = 0$, H es la máxima altura de la columna y λ es una constante.

(2) El parámetro de difusión de la columna Y es función de la velocidad vertical $W(z)$ y de la velocidad terminal de caída de las partículas a nivel del mar V_0 como:

$$Y(z) = \frac{\beta W(z)}{V_0},$$

donde β es una constante.

(3) La densidad de probabilidad de difusión $P(z)$ es función del parámetro $Y(z)$ de la forma:

$$P(z) = AY(z)e^{-Y(z)}$$

donde $A = \int_0^H P(z)dz = 1$ es el parámetro de normalización.

Es aquí donde se hace el acoplamiento principal de los modelos ya que, como se dijo anteriormente, no se utilizan las parametrizaciones dadas por Suzuki debido a que es posible obtenerlas del modelo de Woods (1988).

Dado que el gradiente de velocidades que produce el modelo de Woods no es lineal y en si, es sólo una relación bajo ciertos parámetros iniciales de velocidad y radio del conducto (Figura 2.3), el parámetro de normalización para la probabilidad que propone Suzuki (1983) se obtiene por medio de una integral numérica. De esta forma la densidad de probabilidad de difusión $P(z)$ se expresa en una forma discreta como:

$$P(z) = \frac{W(z)exp\left(\frac{\beta}{V_o}W(z)\right)}{\sum_{z=0}^{H} dh\left(\varrho(z)exp\left(\frac{\beta}{V_o}\varrho(z)\right)\right)} \tag{2.14}$$

En este trabajo, en lugar de la forma funcional considerada por Suzuki (1983), tomaremos $W(z)$ como el campo de velocidades calculado por medio del modelo de Woods (1988), siendo $\varrho(z) = \frac{W(z)+W(z+dh)}{2}$ el promedio entre las velocidades calculadas sobre las superficies del volumen de control a una altura z dada.

La fuente de difusión dentro de una columna no es una fuente puntual por lo que el tiempo de difusión no será el mismo para cada punto sobre una sección transversal a una altura dada dentro de la columna. Suzuki (1983) propone que el radio de la columna L_i a cierta altura z_i sea aproximadamente $L_i = z_i/2$, sin embargo en el modelo acoplado se usa el valor del radio calculado por medio del modelo de Woods (1988) que es función de la altura $L(z)$, sustituyendo así la suposición de Suzuki para el radio de la columna por una relación numérica para éste. Recordando que en la solución propuesta en (2.3) la varianza está dada por $\sigma_r^2 = \frac{8}{5}Ct^{5/2}$ y como el radio $L \equiv 3\sigma_r$, se concibe un tiempo de difusión t_d a partir de una fuente en el interior de la columna para una sección transversal a una altura z como:

$$t_d(z) = \left(\frac{5L^2}{48C}\right)^{2/5}.$$

Este tiempo t_d se suma con el tiempo de caída en la ecuación (2.3) haciendo notar que no es un tiempo de transferencia horizontal.

2.4. La masa total del material expulsado y su distribución aérea

La fracción dq del total de la masa Q representa las partículas que tienen un diámetro entre d_j y d_{j+1} (ecuación (2.13)). Si estas partículas son dispersadas dentro de la atmósfera entre las alturas z y $z + dz$, es posible obtener una expresión $q(d, z)$ que cuantifique el número de partículas en dispersión como:

$$Q(d, z) = dqP(z)dz$$

Sustituyendo Q en la ecuación (2.3), se obtiene una expresión que representa la acumulación de partículas en el punto (x, y) sobre la superficie de la tierra al integrar sobre todos los tamaños de partícula y sobre todas las alturas de la columna. Esta expresión analítica para χ está dada por:

$$\chi(x, y) = \int_{d=0}^{d=\infty} \int_0^H \frac{5P(z)}{8\pi C t^{5/2}} exp \left[-\frac{5\{(x - ut)^2 + (y - ut)^2\}}{8Ct^{5/2}} \right] dqdz. \quad (2.15)$$

donde t, dado en la ecuación (2.12), es el tiempo de difusión en función de la altura z sobre la columna, y $u = V_0$ está dado por la ecuación (2.7), la velocidad terminal en función del diámetro de las partículas d. La ecuación (2.15) se utiliza en la programación del modelo acoplado presentada en el Apéndice B donde la integral se considera sobre un conjunto finito de diámetros de partículas, caracterizadas por la aplicación del modelo acoplado en la erupción del Volcán El Chichón en 1982 (Capítulo 3).

La incorporación del modelo de Woods (1988) al modelo anterior está dado principalmente al incluir un gradiente no lineal de velocidades en $W(z)$. Ya que el parámetro de normalización para $P(z)$ se obtiene integrando numéricamente, no se afecta la discretización de las ecuaciones y por lo tanto no entra en conflicto con las suposiciones originales del modelo de Suzuki (1983). Este último modelo necesita de la altura y la cantidad de masa total en la columna, parámetros que proporciona el modelo de Woods (1988).

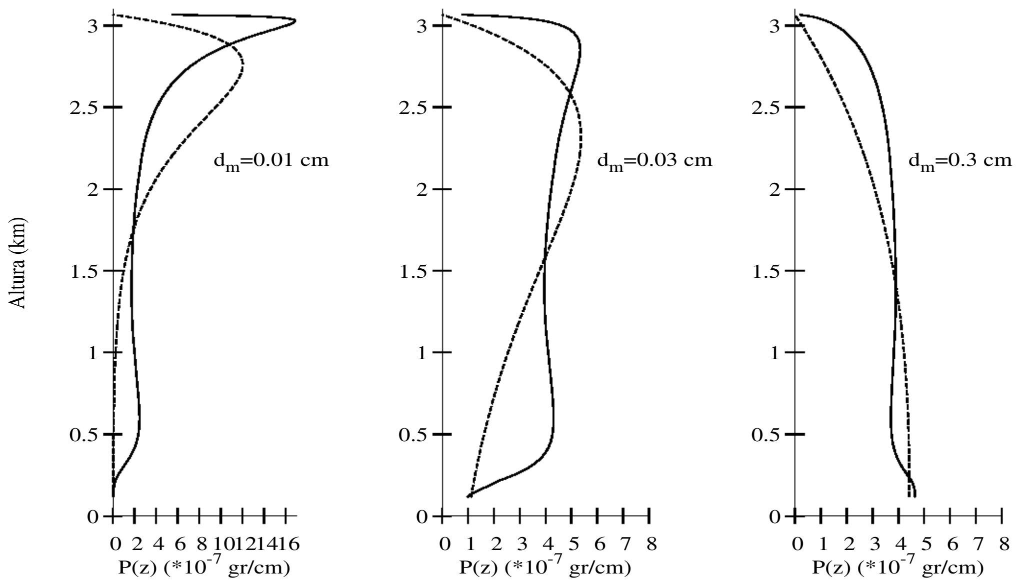

Figura 2.1: Densidad de probabilidad de difusión contra altura en la columna para diámetros medios $d_m = 0.01,\, 0.03,\, 0.3\, cm$. Se grafica el modelo original de Suzuki (1983) en línea discontinua y el acoplado en línea continua bajo los parámetros $u_o = 460\, m/s$, $r_o = 130\, m$, $\beta = 0.01$, $\sigma = 0.8$, $n_o = 0.03$ y $\theta_o = 1120\, K$

La comparación de este acoplamiento de modelos con el modelo original de Suzuki (1983) se hace al conocer las diferencias entre ambas densidades de probabilidad de difusión $P(z)$ (Figura 2.1). Este parámetro físicamente describe la distribución vertical de masa dentro de la columna, la cual se ve modificada drásticamente debido a que los campos de velocidades del material en la columna en ambos modelos son totalmente distintos. En la Figura 2.3 se muestra esta diferencia cuando $\lambda = 1$. Sin embargo, si $\lambda > 1$ los campos se asemejan sólo en la región de eyección del gas, y si $\lambda < 1$ se asemejan en lo alto de la columna. Esta diferencia afecta directamente la forma de los patrones de la distribución de tefra.

Existe una clara diferencia con el modelo de Suzuki (1983) para partículas de diversos tamaños. En la Figura 2.1 están representados tres diámetros medios tanto para el modelo acoplado como para el original. Para partículas pequeñas se tiene en el modelo acoplado dos máximos a diferencia del original, y conforme el tamaño de la partícula aumenta la distribución de masa se vuelve menos importante para grandes alturas, contribuyendo a depositar el material a distancias cercanas del conducto. A diferencia del modelo de Suzuki (1983) en el que las partículas de menor tamaño se depositan a una distancia mayor de la fuente; el modelo acoplado presenta una densidad de probabilidad de difusión en la que a cierta distancia de la fuente existirá una distribución amplia en los tamaños de partículas.

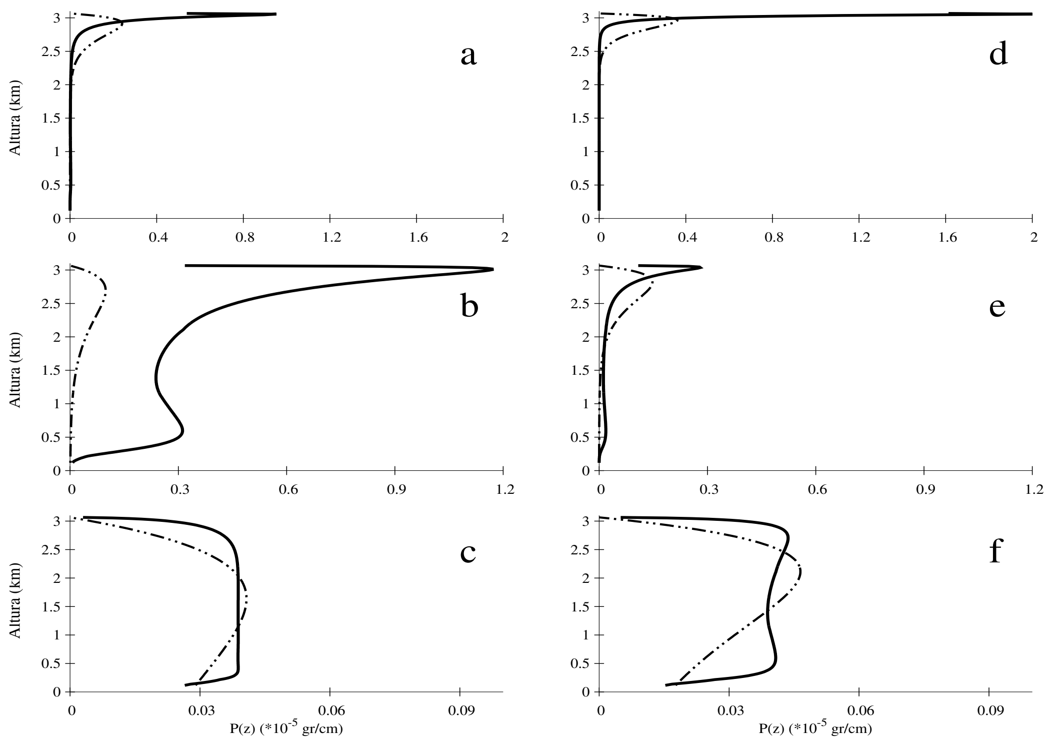

Figura 2.2: Densidad de probabilidad de difusión contra altura en la columna. En las imágenes **a**, **b**, **c** se eligió $\beta = 0.02$ y para las imágenes **d**, **e**, **f** se eligió $\beta = 0.03$. Para diámetros medios **a**, **d** $d_m = 0.01$, **b**, **e** $d_m = 0.03$ y **c**, **f** $d_m = 0.3$. Se grafica el modelo original de Suzuki (1983) en línea discontinua y el acoplado en línea continua bajo los parámetros $u_o = 460\,m/s$, $r_o = 130\,m$, $\sigma = 0.8$, $n_o = 0.03$ y $\theta_o = 1120\,K$.

Por lo anterior y considerando la sensibilidad del parámetro β en el modelo de Suzuki (1983) existe una variabilidad extensa de posibilidades en la distribución de tefra para el modelo acoplado. Para valores pequeños de β, $O(0.01)$, las probabilidades de difusión para una gran cantidad de diámetros medios son dos órdenes de magnitud menor que para β grandes, $O(0.03)$. Sin embargo la diferencia entre las β´s mencionadas anteriormente utilizadas para el modelo acoplado es menor a la diferencia utilizada por Suzuki (1983), lo que hace del modelo acoplado mucho mas sensible a este parámetro.

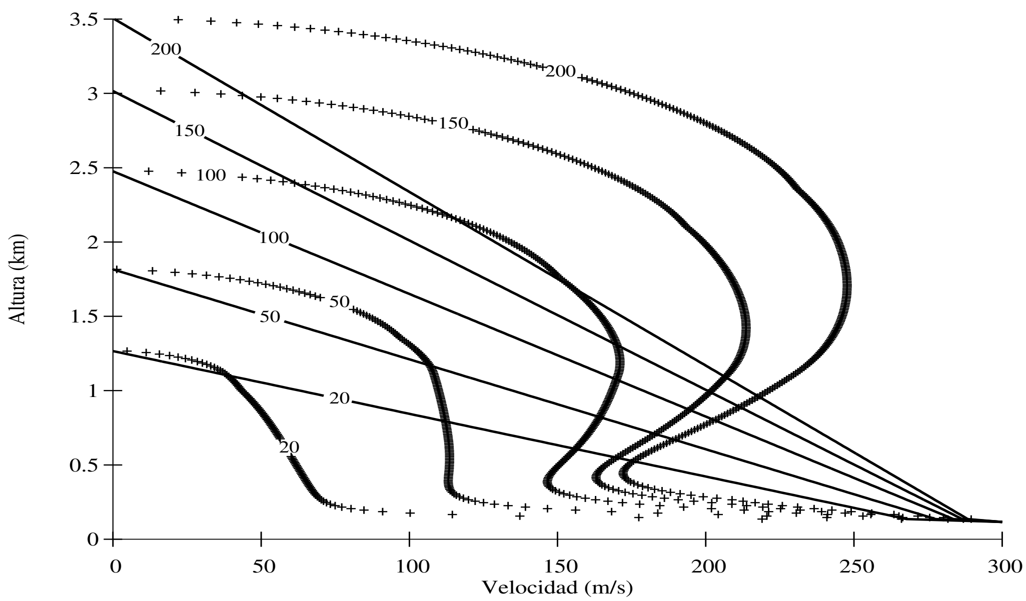

Figura 2.3: Velocidad del material en la columna. En línea continua utilizando el modelo de Suzuki (1983) con $\lambda = 1$ y en línea discontinua el modelo de Woods (1988), para diferentes radios del conducto $r_o = 20$, 50, 100, 150, 200 m con $u_o = 300\,m/s$, $n_o = 0.03$, $\theta = 1120\,K$.

La desviación estándar se comporta de manera análoga a β y d_m como en la Figura 2.2, donde se han elegido las mismas escalas sobre el eje $P(z)$ para cada conjunto de imágenes {**a**,**d**}, {**b**,**e**}, {**c**,**f**}, para que la diferencia entre la variación de los diámetros medios d_m y entre los modelos, el acoplado y el de Suzuki (1983), sea mas evidente. De este comportamiento se deduce que para valores de β y d_m pequeños (Figuras 2.2 **a**,**d**) la densidad de probabilidad de difusión es idéntica para alturas por debajo de donde comienza la nube de hongo en ambos modelos; pero el modelo acoplado predice, a partir de la altura donde se forma la nube de hongo, una difusión mucho mayor que para el modelo de Suzuki (1983). Para diámetros medios del orden $O(0.03cm)$ (Figuras 2.2 **b**,**e**) o mayores, esta función de probabilidad tiene un comportamiento complejo en el modelo acoplado al considerar la variación en β, incluso para valores por arriba de $\beta = 0.1$, lo que contrasta con el modelo de Suzuki (1983), en cuyo caso, la misma función tiene una variación casi imperceptible al generar las isopacas cuando se toman diversos valores del parámetro β.

Para diámetros medios grandes, i.e. $O(0.3cm)$, se aprecia mejor la contribución del modelo acoplado al considerar la formación de la columna de forma mas completa que para Suzuki (1983). En las Figuras 2.2 **c** y **f** la densidad de probabilidad de difusión dada por el modelo acoplado, se comporta mucho más uniforme a lo largo de la columna que la dada por el modelo de Suzuki (1983). Esto produce, simultáneamente con el modelo de viento, una distribución dispuesta sobre toda el área de depósitos para una determinada distancia de la fuente y para ciertos valores constantes en las isopacas, así es que se pueden identificar patrones en ellas que se siguen para distintas columnas eruptivas e independientemente de los parámetros elegidos.

Finalmente la distribución de masa a lo largo de la columna en el modelo acoplado, tiene un comportamiento caótico en lo alto de ésta cuando se considera la variación del parámetro β. Este comportamiento, aunado con la sensibilidad del parámetro β, llega a ser una ventaja con respecto a la obtención de múltiples escenarios al predecir la dispersión de tefra. Sin embargo, la variabilidad de $P(z)$ en lo alto de la columna sigue estando relacionado con el efecto de la velocidad mínima que alcanza el material en lo alto de la columna como parámetro computacional. Este comportamiento complejo se debe, en parte, a que el campo de velocidades en Woods (1988) presenta una desaceleración para alturas cercanas al conducto al igual que en lo alto de la columna (Figura 2.3).

Capítulo 3

Aplicación del modelo acoplado a la erupción de 1982 del volcán El Chichón

3.1. Introducción

El Chichón es un estratovolcán localizado a 60 km al suroeste de la ciudad de Villahermosa, Tabasco y a 70 km al nor-noroeste de la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; y en un contexto tectónico, sobre la placa de Norte-América cerca de la intersección de ésta con las placas de Cocos y el Caribe. En 1930 Frederich Müllerried describió la actividad en la zona como fumarolas, sulfataras y aguas termales así como sismos relacionados con el volcán. El Chichón se encuentra en hiato entre el Eje Neovolcánico Transmexicano y al *NE* del volcán Tacaná, ápice de la cadena volcánica de América Central (Duffield y otros, 1984; Mora y otros, 2007).

Las erupciones que produjo El Chichón en Marzo y Abril de 1982 fueron las últimas de una serie de 11 erupciones que han sucedido en este volcán en los últimos 8000 años (Espíndola y otros, 2000). En las erupciones de 1982 de tipo pliniano se generaron flujos piroclásticos, y caída de ceniza que abarcó un área de aproximadamente $50,000\,km^2$, y que de ésta fue devastada un área de $153\,km^2$ alrededor del volcán donde se encontraban, además de la vegetación, nueve poblaciones que fueron destruidas (Sigurdsson y otros, 1984).

En la secuencia de eventos eruptivos de 1982 se pueden distinguir tres eventos principales que dejaron depósitos significativos. El primero de estos eventos sucedió el 29 de Marzo a las 0515 GMT (depósitos **A1**) y formó una columna sostenida durante 5 horas. La caída de tefra tuvo un eje dominante hacia el noreste. Luego de este evento, sucedieron cinco pequeñas explosiones en las que la tefra no alcanzó a sobrepasar la troposfera. La segunda de las erupciones más intensa se sucedió el 4 de Abril a las 0135 GMT (depósitos **B**) y formó una columna sostenida durante 4 horas. De este depósito Sigurdsson y otros (1984) dedujeron que fue el evento de mayor intensidad de los que ocurrieron en ese año, debido a que la inyección de material a mayor velocidad provoca una columna de mayor altura (Morton y otros, 1956). El último evento ocurrió el mismo día a las 1122 GMT (depósitos **C**) formando una columna sostenida durante 5 horas. Durante esta erupción la columna penetró en la tropopausa y en la estratosfera, formando depósitos que se extendieron en dirección *E-NE* (Sigurdsson y otros, 1984).

A pesar de que la erupción **B** fue la que produjo una mayor cantidad de material durante la erupción, los depósitos de ésta no están tan extendidos como los de **C** o **A1** (Sigurdsson y otros, 1984), debido principalmente a su corta duración entre otros factores. Las alturas obtenidas por Carey y Sigurdsson (1986) por medio de una simulación numérica fueron de 27.3, 31.6 y 28.8 km para **A1**, **B** y **C** respectivamente. Las cuales en total depositaron alrededor de 0.37 km^3 de tefra (Sigurdsson y otros, 1984).

3.2. Parámetros de entrada

Para simular las isopacas obtenidas por Sigurdsson y otros (1984) utilizando el modelo acoplado presentado aquí, se necesitaron los siguientes parámetros de entrada.

Discretización de la altura. Dado que para el modelo de Woods (1988) se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se requiere este parámetro dh, para la integración numérica implícita en el método de Runge-Kutta. Por otra parte existe una relación empírica entre altura y cantidad de masa eyectada por unidad de tiempo, misma que ha sido ampliamente utilizada y validada (Mastin y otros, 2009). Al estimarse una incertidumbre en el cálculo de la altura (e.g. 10 %), se puede llegar a valores de la incertidumbre en la masa total expulsada cuatro veces mayor (incertidumbre e.g. 40 %). En los cálculos utilizados en este trabajo se empleó un $dh = 100\,m$, valor que permite obtener valores confiables de la altura y un mínimo de tiempo de procesamiento.

Fracción de masa del gas. La variación de este parámetro modifica la altura de la columna sensiblemente. Se ha elegido el valor de $n_o = 0.03$ para simular las columnas en todos los eventos, ya que este es un valor promedio observado en gran cantidad de erupciones plinianas (Ingerson, 1950).

Temperatura inicial. La altura de la columna no depende fuertemente de la temperatura del material al salir del conducto (Woods, 1988) a diferencia de la fracción de masa del gas inicial. Rye y otros (1984) y Luhr y otros (1984) determinaron un intervalo de temperaturas en el material pre-eruptivo, del cual se considera para el modelado, y para todos los eventos, una temperatura inicial $T_o = 1120\,K$.

Radio del conducto volcánico y velocidad inicial. Al igual que la fracción de masa del gas, estos dos parámetros modifican sensiblemente la altura de la columna. Para los tres diferentes eventos del V. Chichón se utilizaron los valores mostrados en la Tabla 3.1. Se encuentran adicionalmente, valores para radio y velocidad inicial en los que se pueden distinguir la altura de colapso, lo cual se observa en la Figura 3.1 como la coexistencia de las isolíneas de la altura en una franja para la cual el modelo de Woods (1988)no tiene solución. Por lo tanto se pueden descartar los valores de radio y velocidad inicial que se encuentren por debajo de esta franja para el modelado de columnas plinianas.

Altura de salida en el conducto. Esta altura está considerada sobre la cúspide del edificio volcánico. Dado que en el modelo de Woods (1988) se considera el gradiente de temperatura y presión atmosférica, al obtener los parámetros de la columna para cada altura, se debe incluir la altura de salida en el conducto. Este parámetro no tiene efectos sensibles sobre la altura total de la columna, la densidad aparente o la fracción de masa del gas calculados a lo largo de la columna. Aun así, para el modelado se considera la altura de salida en el conducto aproximadamente de $1160\,msnm$ suponiendo que es la misma antes de cada una de las erupciones. Esto bajo la suposición de que el desgaste del cráter durante el período eruptivo fue de aproximadamente $9\,\%$.

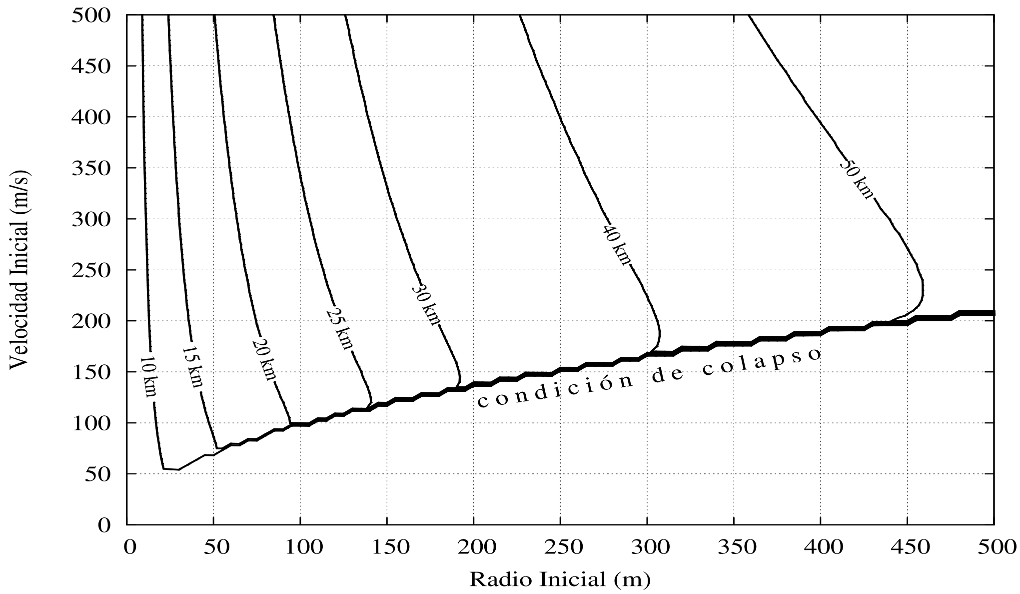

Figura 3.1: Isolíneas de altura máxima en las columnas generadas a partir de la variación de la velocidad inicial u_o y el radio inicial r_o. Las isolíneas se unen en una franja donde el modelo de Woods (1988) no tiene solución y por lo tanto sobre estos valores de radio y velocidad inicial se produce el colapso de la columna eruptiva.

Velocidad mínima en lo alto de la columna. El modelo de Woods (1988) es numérico, por lo que al discretizar las ecuaciones, la velocidad en la cúspide de la columna oscila alrededor de valores mínimos sin significado físico. Por este motivo se eligió un valor mínimo de $1\,m/s$ para la finalización del proceso, i.e., la altura máxima de la columna se obtiene cuando la velocidad vertical desciende a $1\,m/s$ o menos. Este parámetro puede llegar a producir errores en las aproximaciones de la altura final de la columna y en la cantidad de masa total expulsada, si es que el intervalo de alturas se elije muy grande, por arriba del orden de $dh = 300\,m$.

Campo de velocidades. De los datos obtenidos por Sigurdsson y otros (1984) se considera un perfil de velocidades único para cada evento. Para el evento con depósitos marcados como **A1**, el viento en la troposfera con una dirección ENE, el viento en la estratosfera con una dirección OSO. Para el evento con depósitos marcados como **B**, el viento en la troposfera se desplazaba con una dirección ENE y al E en la estratosfera. Para el evento con depósitos marcados como **C**, el viento en la estratosfera se desplazaba con una dirección WSW (Figura 3.2).

Diámetro medio de partícula y desviación en la distribución. Sigurdsson y otros (1984) obtuvieron dos distribuciones de tamaño de grano para dos diferentes distancias del cráter. Se utiliza un intervalo de diámetros medios de $d_m = \{0.0047, 0.4\}\, cm$, y para modelar esta distribución, la desviación cambia para cada evento al considerar la distribución de grano en Sigurdsson y otros (1984). Los valores utilizados para cada evento se muestran en la Tabla 3.1.

Parámetro de Suzuki (1983). Este parámetro β controla la difusión del material en la columna y por lo tanto la distribución de masa en élla a lo largo de su altura. La variación de este parámetro cambia sensiblemente las condiciones de dispersión, y por lo tanto en las isopacas resultantes. Entre menor sea el parámetro β, menor será la difusión del material conforme la altura en la columna se incrementa. Los valores utilizados para cada evento se muestran en la Tabla 3.1.

Evento	$A1$	B	C
$r_0\ (m)$	125	140	110
$u_0\ (m/s)$	325	340	310
σ	0.8	3	0.04
β	0.03	0.021	0.1

Tabla 3.1: Valores para los parámetros del radio r_0 y velocidad u_0 inicial, desviación de la distribución de diámetros medio de las partículas σ y parámetro de Suzuki β, para las tres erupciones principales del Volcán El Chichón de 1982 simuladas con el modelo acoplado.

En la siguiente sección se dan las razones para la elección de los valores tanto para la desviación en la distribución σ como en el parámetro de Suzuki β para cada uno de los eventos.

3.3. Resultados y discusión

El conocimiento de los parámetros correctos de una erupción en particular es esencial, no sólo para caracterizar erupciones del pasado, sino también para mejorar las predicciones de futuras erupciones. La obtención de las isopacas a partir del modelo acoplado que se asemejan a las referidas en Sigurdsson y otros (1984) se realizó por medio de la variación aleatoria de los parámetros descritos en la sección anterior.

Los parámetros que se variaron principalmente fueron: la desviación estándar, el parámetro de Suzuki y la velocidad y radio inicial del material en eyección; observando que el modelo acoplado es muy sensible a estos cuatro parámetros. Conforme se aumenta la desviación estándar, el material eyectado se simula de un diámetro de grano más grande, por lo que la distribución de éste en la columna producirá isopacas más cerradas alrededor de la fuente. El parámetro de Suzuki controla una distribución preferencial a lo largo de la columna, por lo que la variación de la velocidad dependiente de la altura en el modelo de viento produce cambios significativos directamente sobre las isopacas. Valores de β pequeñas (< 0.1) implican que la densidad de probabilidad de difusión toma valores grandes, preferentemente, a alturas en la parte baja de la columna; y consecuentemente, si la magnitud de los vientos es mayor a estas alturas, las isopacas cercanas a la fuente tendrán una mayor movilidad que las isopacas alejadas de la fuente al considerar una variación en la magnitud de los vientos alrededor de estas alturas; similarmente sucede para valores grandes de β (> 0.1). La elección de los valores para β se explican debido, en parte, a la fragmentación del material durante los eventos y, en particular, a que en los depósitos **B** gran parte del volumen de tefra se encuentra cerca del cráter, a diferencia de **C** que se encuentra más retirado de él; distribución similar sucede con **A1** (Sigurdsson y otros, 1984).

El modelo de viento para la zona se ajustó parcialmente conforme a las descripciones dadas por Sigurdsson y otros (1984). De las isopacas obtenidas por medio del modelo acoplado (Figura 3.3), en el depósito **A1** el viento está favorecido en la dirección E en la troposfera y en dirección N en la estratosfera. Para los depósitos **B** el viento está preferentemente en una dirección E a lo largo de toda la columna. Y para los depósitos **C** la dirección del viento en la troposfera tiende al E a diferencia de la dirección en la estratosfera que es preferentemente al O (Figura 3.2). Las discrepancias con las direcciones propuestas por Sigurdsson y otros (1984) se deben a la interacción del parámetro de Suzuki con las velocidades del viento a determinada altura. Este es

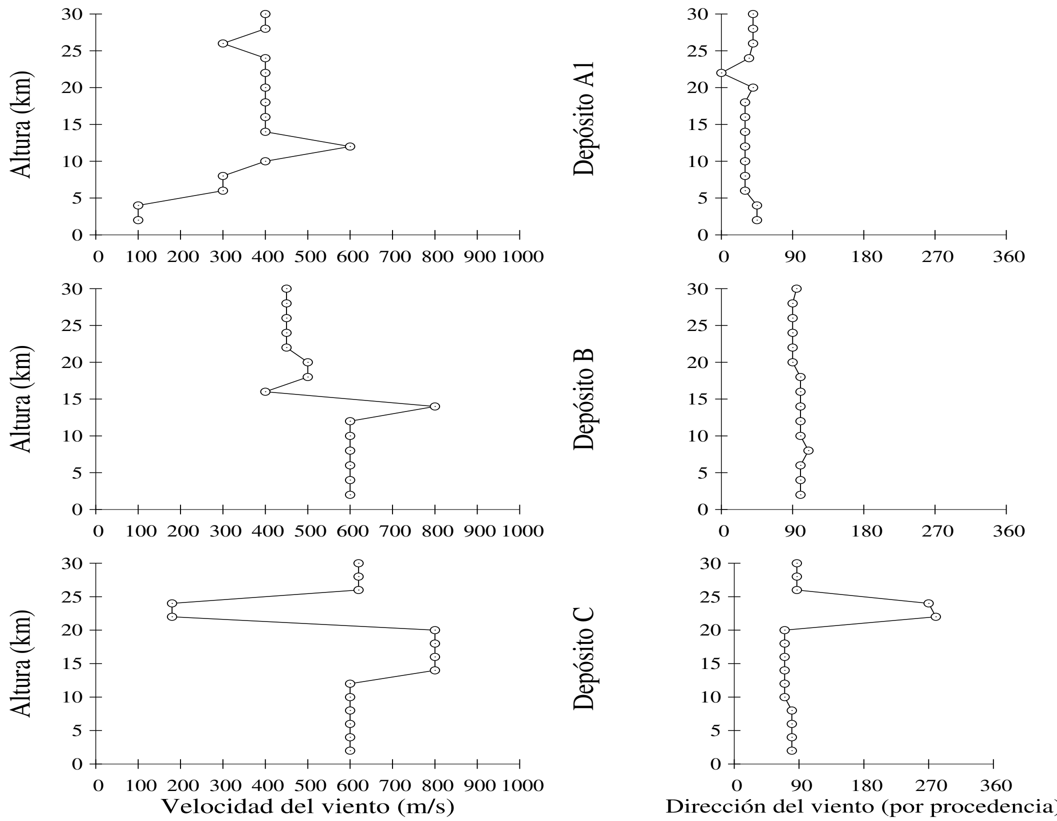

Figura 3.2: Modelos de viento para las tres erupciones mayores del Volcán El Chichón en 1982. Se grafica, del lado izquierdo la rapidez y del lado derecho la dirección del viento propuestos para obtener por medio del modelo acoplado las isopacas que se asemejen a las obtenidas por Sigurdsson y otros (1984).

un resultado del modelo acoplado y se debe a la relación no uniforme para las velocidades del material a lo largo de la columna.

Paralelamente a la situación en la que el modelo de Woods (1988) arroja columnas con alturas máximas idénticas, con el modelo acoplado se pueden lograr isopacas semejantes con diferentes valores para los parámetros antes descritos. Principalmente la interacción entre el parámetro de Suzuki, la desviación en la distribución y el modelo de viento juega un papel importante en el ajuste para obtener esta similitud entre isopacas. Las magnitudes de las velocidades del viento para cada altura propuesta aquí, se obtuvieron del ajuste lo más cercano posible a las isopacas de Sigurdsson y otros (1984) para los tres diferentes depósitos. Sin embargo, existen otras configuraciones de la velocidad del viento combinadas con los parámetros β y σ que producen isopacas semejantes; i.e., existen familias de isopacas generadas por parámetros distintos, como en la última columna de la Tabla 3.2 en donde dos isopacas similares del mismo valor pero obtenidas con parámetros β, u, b y σ diferentes, se diferencian aproximadamente por el 7 % en el área encerrada en ellas. Debido a la existencia de familias al generar las isopacas, se ha realizado el cálculo del área encerrada por las isopacas con valores de 10, 20, 30 y 50 mm generadas por el modelo acoplado y por Sigurdsson y otros (1984), con el fin de conocer los contornos mas acercados a los datos de campo obtenidos por los autores anteriores. La Tabla 3.2 es una comparación entre las áreas de las isopacas reportada por Sigurdsson y otros (1984) y las generadas por el modelo acoplado, en ella se muestra la diferencia porcentual entre isopacas del mismo espesor.

Isopaca (mm)	$A1$ (%)	B (%)	C (%)	$C^1 \sim C^2$ (%)
10	5	0.8	12	7
20	4.4	51	26	4
30	—	380	78	7
50	161	—	187	6

Tabla 3.2: Diferencia porcentual entre las áreas encerradas por las isopacas **A1**, **B** y **C**, generadas por el modelo acoplado y las generadas por Sigurdsson y otros (1984). Las isopacas de 30 y 50 mm para los depósitos $A1$ y B, respectivamente, no tienen comparación debido a que Sigurdsson y otros (1984) no obtuvieron las isopacas para esos valores. En la última columna de esta tabla , $\mathbf{C^1} \sim \mathbf{C^2}$, se comparan las áreas de dos isopacas que son similares al depósito **C** pero obtenidas por el modelo acoplado con parámetros distintos; para $\mathbf{C^1}$ se utilizó $\beta = 0.1$, $u_o = 310m/s$, $b_o = 100m$ y $\sigma = 0.4$, y para $\mathbf{C^2}$ se utilizó $\beta = 0.09$, $u = 300m/s$, $b = 115m$ y $\sigma = 0.41$.

Guardando las proporciones con respecto a la magnitud entre las principales erupciones **A1**, **B** y **C**; las isopacas generadas por el modelo acoplado para cada uno de los eventos caracterizados aquí, tienden a aproximarse a las reales en la medida que se alejan de la fuente (Tabla 3.2). Esto sucede independientemente del modelo de viento, dado que la solución utilizada para la ecuación de advección—difusión en el modelo de la dispersión de tefra es de tipo gaussiano. La gran incertidumbre que existe en todas las erupciones aquí modeladas se mantiene para todas las isopacas cercanas a la fuente

(Figura 3.4). Esto sucede debido a que cerca del cráter existen otros fenómenos que no se consideran en los modelos utilizados para formar el modelo acoplado (Kobs, 2009). Sin embargo, el gradiente de velocidades producido por el modelo de Woods (1988) es más próximo a los fenómenos de flotación que suceden dentro de la columna, que el gradiente de velocidades propuesto en el modelo de Suzuki (1983); lo que hace del modelo acoplado, en este aspecto, más riguroso en la formación de patrones reales de isopacas a grandes distancias de la fuente, así como en menor grado a distancias cercanas de ésta.

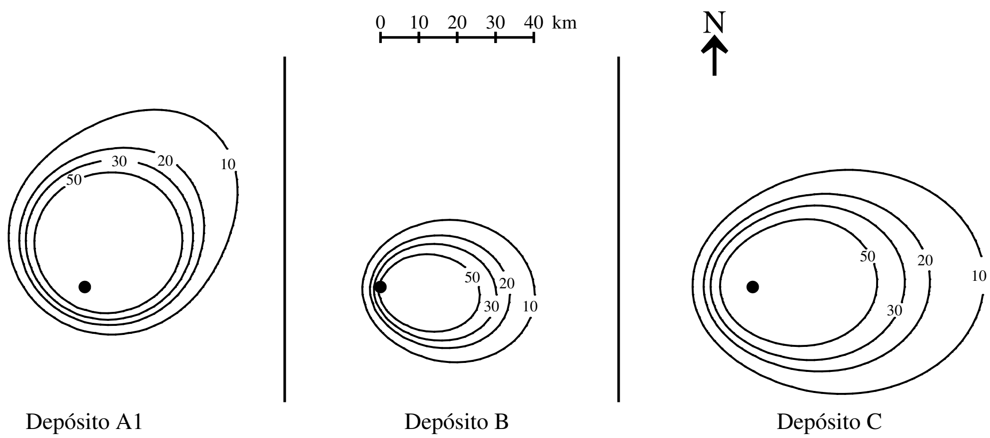

Figura 3.3: Isopacas generadas por el modelo acoplado para las tres erupciones mayores del Volcán El Chichón en 1982 con los parámetros descritos en la sección 3.2. Los contornos están dados en mm. Las tres isopacas están orientadas NS en la vertical y la escala dibujada es la misma para las tres. El depósito **A1** fue generado durante la erupción del 29 de Marzo a las 0532 GMT, el depósito **B** el 4 de Abril a las 0135 GMT y el depósito **C** el 4 de Abril a las 1122 GMT.

Las tres erupciones del Volcán El Chichón han sido descritas anteriormente con diversas parametrizaciones (Carey y Sigurdsson (1986), Bonasia y otros (2012)), para los cuales se han obtenido diferentes alturas máximas de las columnas. Con el modelo acoplado las máximas alturas alcanzadas por las columnas durante las erupciones relacionadas con los depósitos **A1**, **B** y **C** fueron de 28, 30 y 26 km respectivamente. Además la cantidad de masa total calculada en cada evento fue alrededor de 0.5×10^{12}, 0.6×10^{12} y

$0.4 \times 10^{12}\,kg$ respectivamente. Los valores de las alturas corresponden en un 10, 6 y 3 % a los calculados por Carey y Sigurdsson (1986) y en un 13, 7 y 17 % en los calculados por Bonasia y otros (2012). El volumen calculado por el modelo acoplado fue de 0.2, 0.03 y 0.25 km^3 respectivamente. Sigurdsson y otros (1984) calcularon un volumen de 0.37 km^3 sólo de tefra y un mínimo presentado aquí fue de 0.75 km^3 lo cual, si se considera como el total sólo de tefra, es aproximadamente el doble de lo obtenido por los anteriores autores.

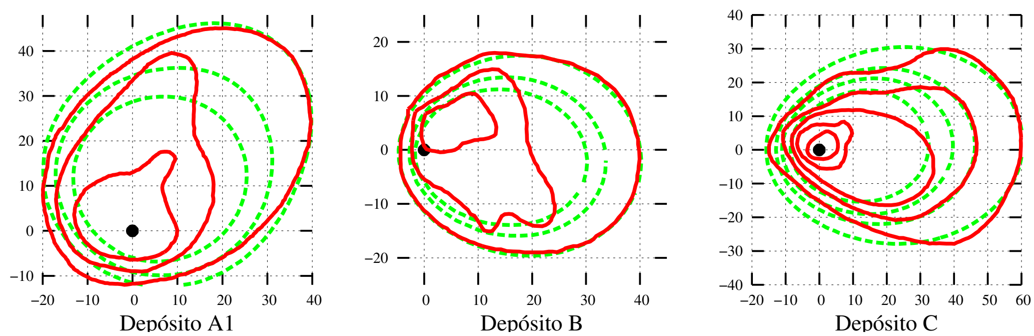

Figura 3.4: En línea continua las isopacas en Sigurdsson y otros (1984) y en línea discontinua las producidas por el modelo acoplado. Para cada depósito las curvas modeladas se corresponden, en valor concéntrico, con su respectivas de los datos reales reportadas por los anteriores autores. La malla está dada en kilómetros y orientada NS en la vertical. Conforme se tienen depósitos alejados de la fuente, las isopacas modeladas se aproximan a las reales.

3.4. Conclusiones

El conocimiento de los mecanismos dinámicos que se presentan en las erupciones volcánicas, puede incrementarse al encontrar una correcta correlación de los parámetros necesarios para el modelaje de las erupciones, con las observaciones de campo de las propiedades del material expulsado y las condiciones pre-eruptivas. El acoplamiento de dos modelos, uno que describa la columna eruptiva y otro que defina cuantitativamente la dispersión y precipitación del material eyectado, en particular de tefra, sigue esta línea de aproximación. El modelo propuesto originalmente por Suzuki (1983) utiliza parámetros cuyos valores arbitrarios describen la columna eruptiva a partir de que se encuentra formada. Este modelo se complementa con los parámetros que describen la formación de la columna, generados por el modelo de Woods (1988), otorgando al modelo acoplado en cuestión de la dispersión de tefra, una estimación más realista en la distribución y velocidad del material, tanto a lo largo, como al momento de desprenderse de la columna. Podemos entonces distinguir que:

- Los parámetros que comparten el modelo de Suzuki (1983) y el modelo acoplado son, esencialmente, los mas sensibles para ambos modelos, i.e. β, el parámetro de Suzuki, $W(z_0)$ y L_0, la velocidad y el radio en el del conducto volcánico, σ la desviación en la distribución del tamaño de partícula y $W(z)$, el campo de velocidades sobre la columna.

- Con el modelo acoplado se pueden generar familias de isopacas similares, considerando diversos escenarios eruptivos, donde éstos pueden desarrollarse al considerar valores distintos de los parámetros computacionales como en la Tabla 3.2.

- Las isopacas producidas por el modelo acoplado se corresponden de una forma mejor, mientras estén mas alejadas del conducto volcánico. Esto se debe principalmente a una deficiencia en el modelo de formación de la columna, producida por los fenómenos que no se tomaron en cuenta.

- A pesar de ello, el modelo acoplado es, más riguroso que el modelo de Suzuki (1983), al considerar la formación de las isopacas, ya que se presentan diferencias de aproximadamente el 10 % entre las áreas encerradas por las isopacas calculadas por el modelo acoplado y las reportadas por Sigurdsson y otros (1984). Este porcentaje aumenta conforme la isopaca es más cercana a la fuente; pero, dependiendo de los parámetros utilizados en el modelado, puede hacerse coincidir con las isopacas reales (ver Tabla 3.2).

Por lo tanto, el gradiente de velocidades a lo largo de la columna eruptiva utilizado finalmente, y considerándolo cerca del conducto, proporciona una sutil regla y una aproximación para determinar los diversos fenómenos que suceden en la dispersión de tefra a estas distancias de la fuente.

Así, también se ajusta globalmente la altura de la columna y la cantidad de masa en ella, datos fundamentales para describir los depósitos de material eyectado luego de una erupción. El modelo acoplado tiene por ventaja ser un modelo numérico, ya que sus tiempos de cómputo son cortos. Con este modelo pudo obtenerse una versión de los depósitos de tefra generados por el Volcán El Chichón durante las tres principales erupciones de 1982, reportados por Sigurdsson y otros (1984). Estos depósitos simulados se generaron por parámetros que describen parcialmente las condiciones durante la erupción, encontrando una masa total de material eyectado del doble de la reportada por los anteriores, y alturas características para cada evento comparables a las reportadas en artículos previos. Además, los parámetros adicionales pudieron asociarse con propiedades del material y las características de los depósitos, con lo que se llega a una descripción física y realista de variables teóricas y valores computacionales.

El modelo acoplado puede utilizarse para modelar los depósitos de otras erupciones y obtener estimaciones de variables no observadas durante la erupción. Así mismo, permite realizar experimentos numéricos para estudiar la relación entre diversa condiciones eruptivas, y crear escenarios eruptivos para estimación del riesgo volcánico. Finalmente, también puede utilizarse como instrumento docente complementario en los cursos de geofísica y vulcanología por su sencilla programación.

Apéndice A

El volumen desplazado de una parcela contendrá la masa m_s de los sólidos y m_g del gas que estarán presentes antes de que la parcela se desplace, y además m_a la masa del aire incorporado que se considerará durante el desplazamiento. Asumiendo que la presión en la columna es igual a la del ambiente circundante, el nuevo volumen ocupado por la masa original del gas será:

$$V_g = L^2 H \left(1 - \beta_a \frac{1-n}{\sigma}\right) \left(\frac{P}{\theta}\right) \left(\frac{\theta + \frac{d\theta}{dz}\delta z}{P + \frac{dP}{dz}\delta z}\right) \tag{A1}$$

Donde σ es una densidad constante para los sólidos, θ la temperatura en la columna y n la fracción de masa del gas en la parcela antes del desplazamiento. El volumen restante contiene al aire incorporado durante el desplazamiento que se asume es fijo y el cual ocupa un volumen dado por:

$$V_a = \left(2L\frac{dL}{dz} + \frac{l^2}{U}\frac{dU}{dz} + \left(\frac{L^2}{P}\frac{dP}{dz} - \frac{L^2}{\theta}\frac{d\theta}{dz}\right)\left(1 - \beta_a \frac{1-n}{\sigma}\right)\right) h\delta z \tag{A2}$$

Usando entonces la ecuación de estado del gas y del aire del ambiente, la masa del aire incorporado esta dada por:

$$m_a = m_g \left(\frac{V_a R_g}{V_g R_a}\right) \tag{A3}$$

donde R_g es la constante integral para el gas en la parcela y R_a es la constante del gas en el ambiente. Entonces, el cambio en la densidad aparente en la parcela debida al desplazamiento es:

$$\delta\beta_a = \frac{m_a}{V} - \frac{\delta V}{v^2}(m_s + m_g) \tag{A4}$$

y esta expresión proporciona la ecuación diferencial que gobierna la evolución en la densidad aparente,

$$\frac{d\beta_a}{dz} = \beta_a \left(n\frac{R_g}{R_a} \left(\frac{1}{L^2U}\frac{d(L^2U)}{dz} \left(1 - \beta_a \frac{(1-n)}{\sigma} \right)^{-1} + \frac{d}{dz}\left(log \left(\frac{P}{\theta} \right) \right) \right) - \frac{d}{dz}(L^2U) \right) \tag{A5}$$

donde ahora n y R_g cambian con la altura de la columna y n se define como:

$$n = \frac{m_g}{(m_g + m_s)} \tag{A6}$$

Como resultado de la incorporación del aire, el cambio en n en la parcela que se desplaza a través de una distancia vertical δz la ecuación que gobierna a la fracción de masa es así,

$$\frac{dn}{dz} = n(1-n)\frac{dm_g}{dz}\left(\frac{1}{m_g} \right) \tag{A7}$$

y combinando las ecuaciones (A1), (A2), (A3) y (A7) se obtiene una ecuación completa para dn/dz.

$$\frac{dn}{dz} = n(1-n)\frac{R_g}{R_a} \left(\frac{d(L^2U)}{dz}\frac{1}{L^2U} \left(1 - \beta_a \frac{(1-n)}{\sigma} \right)^{-1} + \frac{d}{dz}\left(log \left(\frac{P}{\theta} \right) \right) \right) \tag{A8}$$

Sin embargo utilizando (A5) se puede hacer una simplificación obteniendo:

$$\frac{1}{\beta_a}\frac{d\beta_a}{dz} = \left(\frac{1}{1-n} \right)\frac{dn}{dz} - \frac{1}{L^2U}\frac{d}{dz}(L^2U) \tag{A9}$$

que expresando a n en términos de β_a, u y L se puede obtener una ecuación para la fracción de masa del gas (A10) donde el subíndice o denota cantidades evaluadas en el conducto y donde R_g se define en (A11).

$$n = 1 + (n_0 - 1)\frac{L_0^2U_0\beta_0}{L^2U\beta_a} \tag{A10}$$

$$R_g = \frac{m_mR_m + m_bR_a}{m_m + m_b} \tag{A11}$$

Donde la masa del gas esta relacionada con m_m, la cantidad total del gas volcánico en la parcela, y m_b la cantidad total de aire incorporado en la parcela, por medio de $m_g = m_m + m_b$, y donde R_m es la constante de gas volcánico. Considerando el cambio en R_g debido al aire incorporado en la parcela que se desplaza, la ecuación que gobierna a la constante de gas global es:

$$\frac{dR_g}{dz} = \left(1 - \frac{R_g}{R_a}\right) R_g \left(\frac{1}{L^2U}\frac{d(L^2U)}{dz}\left(1 - \beta_a\frac{(1-n)}{\sigma}\right)^{-1} + \frac{d}{dz}\left(log\left(\frac{P}{\theta}\right)\right)\right) \tag{A12}$$

Así, comparando las ecuaciones (A8) y (A12) se deduce que R_g está dado por:

$$R_g = R_a + (R_{g0} - R_a)\left(\frac{1-n}{n}\right)\left(\frac{n_0}{1-n_0}\right) \tag{A13}$$

Una expresión alternativa para la densidad aparente puede ser obtenida al considerar los volúmenes parciales del gas y de los sólidos en unidades de la masa del material en la columna. Tanto los volúmenes como los sólidos toman los valores $\frac{(1-n)}{\sigma}$ y $\frac{nR_g\theta}{P}$ respectivamente y, por lo tanto, a cualquier altura dada en la columna la densidad aparente estará dada por:

$$\frac{1}{\beta_a} = (1-n)\frac{1}{n} + \frac{nR_g\theta}{P} \tag{A14}$$

Esta última ecuación es consistente con (A5) y que, por su simplicidad, se utiliza en su lugar para determinar la densidad aparente.

La capacidad calorífica global a presión constante del material en la columna, usada en la expresión anterior está definida como:

$$C_p = \frac{m_bC_a + m_mC_m + m_sC_s}{m_b + m_m + m_s} \tag{A15}$$

Se debe de considerar que C_p cambia con respecto a la altura de la columna y, siguiendo una aproximación similar como en la Sección 1.2 para la ecuación de R_g, se encuentra que C_p puede ser expresado como:

$$c_p = c_a + (c_{p_o} - C_a)\frac{(1-n)}{1-n_o} \tag{A16}$$

Apéndice B

Las siguientes líneas son las rutinas y subrutinas del programa basado en el modelo acoplado.

```
      PROGRAM Acoplado
      integer nf
      dimension v(100),dq(100),addit(100,100),sumiso
         (100,100)
      dimension beta1(20),qm(4000),xf(100),yf(100)
      common vwind(19),zw(19),d(100),compx(18),compy(18)
      common n(4000),zdm(4000),um(4000),u(4000),zd(4000)
      common H,dz,nz,nw,wo,nf,zo,b(4000),bm(4000)
      data f,visair,densa,dm,sd/0.6,1.73e-4, 1.23e
         -3,0.047,.8/
      OPEN (3,FILE =' ')!archivo del viento
      OPEN (4,FILE =' ')!salida de la suma de los casos
      OPEN (7,FILE =' ')!salida de cada caso

! Q masa total en gramos, H altura de la columna, Wo la
! velocidad inicial de la pluma en z=0; ny,nx el número
! de puntos (x,y) donde se calcula la caída, nz el
! número de puntos en la pluma. nw número de puntos en
! el perfil de viento. Unidades en centímetros y
! segundos excepto donde se especifíque con "km", dm es
! la media de los piroclastos, sd es la desviación
! estandar. DIRECCIÓN VARIABLE DEL VIENTO

!   write(*,*) 'introduce nw'
!   read(*,*)nw
```

```
    nw=15
! eventos distintos sumulados por un número ncasos
!   write(*,*) 'introduce ncasos'
!   read(*,*)ncasos
    ncasos=1
! para cada caso metemos un parámetro beta de Suzuki
    write(*,*)'introduce beta'
    do 121 bi=1,ncasos
    write(*,*)'caso',int(bi)
    read(*,*)beta1(bi)
121 continue
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
! corremos la simulación para el modelo de Woods
    CALL COLUMNA
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    OPEN (9,FILE = ' ') !párametros formación de columna
    OPEN (8,FILE = 'sal_c2.dat') !salida de Woods
    OPEN (10,FILE = 'num2') !# de puntos en la columna
    write(*,*)':O :P :D :O :P :D'
    read(10,*)nc
    write(*,*)'nc',nc

    do 12 id=1,nc
    read (8,*) n(id),zdm(id),um(id),qm(id),bm(id)
    zd(id)=zdm(id)*100
    u(id)=um(id)*100
    b(id)=bm(id)*100
12  continue
    nf=nc

    READ (9,91) DH, NO, THO, BO, UO, ZO, LL, VELMIN
91  format((f5.0))
    write(*,*)u0,'=uo',b0,'=b0'
    dz=dh*100
    zo=z0*100

    h=zd(nc)
! Woods sale en kg y Suzuki las están en gr
    Q=qm(nc)*1000
    write(*,*)'q',q
```

```
      write(*,*)'h',h
      Wo=u0*100
      nx=46
      ny=46

      dx=200000.
      dy=200000.

      write(7,*)'#',q,h
         write(4,*)'#dm, sd', dm, sd
      write(4,*)'#Q, H, Wo' , Q, H, Wo
         write(4,*)'#nx,ny,nz', nx,ny,nz

      write(4,*) '#f,visair, densa',f,visair,densa
         write(4,*)'#beta = ', beta

! cálculo de la velocidad terminal
! los diámetros d(j) pueden ser caracterizados
! dependiendo de la aplicación del modelo
      densp=2.0
      do 99 j=1,100
      d(j)=.0047*(float(j))
      if(d(j) .gt. 0.01225) densp=0.8
      t1=densp*980.0*d(j)*d(j)
      t2=9.0*visair/(f**0.32)
      t3=81.0*visair*visair/(f**0.64)
      t4=1470.0*densa*densp*(d(j)**3)*(sqrt(1.07-f))
      v(j)=t1/(t2+sqrt(t3+t4))
99    continue

!  cálculo del diferencial de masa
      do 3 k=1,99
      algrt1=alog10(d(k+1)/d(k))
      algrt2=alog10(d(k)/dm)
      xp=-algrt2*algrt2/(2.*sd*sd)
      dq(k)=0.39894228*Q*algrt1*(exp(xp))/sd
3     continue

! comienza ciclo para los dif. eventos
      do 1948 nc=1,ncasos
```

```
      write(*,*)nc
      beta=beta1(nc)

      do 1 iw=1,nw
      read (3,*) zw(iw),dir,vwind(iw)
      dirrad=(dir/180.)*3.141592654
      compx(iw)=sin(dirrad)
      compy(iw)=cos(dirrad)
1     continue

      y=-3000000.
      do 2 jk=1,ny
      x=-3000000.
      do 4 ik=1,nx
      sumod=0.0
! comienza ciclo para número d partículas
      do 5 Id=1,100
      vav=(v(id)+v(id+1))/2
! el parámtero A de Suzuki normalizado por la velocidad
   de Woods
      para1=0
      para2=0
      para=0
      uprom=0
      do 11 ia=1,nf-1
      uprom=(u(ia)+u(ia+1))/2
      para1=(dz*((uprom)*(exp(-(beta*uprom)/vav))))
      para=para+para1
11    continue
      para2=para
      para11=(h*((u(nf))*(exp(-(beta*u(nf))/vav))))
      para=para-para11
      if(para .lt. 0)para=para2
      para=1/para

! se calcula la integral, sol. de Suzuki
      CALL ADOZ(x,y,vav,chixy,beta,para)
      sod=dq(Id)*chixy
      sumod=sumod+sod
5     continue
```

```fortran

! stotal1 está en gr/cm^2
      stotal1=0.000497359*sumod
! */2 la densidad para obtener isopacas
! *10 para obtener milímetros en ellas
      stotal=stotal1*10/(2.0)
      xkm=x/1.e5
      ykm=y/1.e5
      write(7,*) xkm,ykm,stotal
      addit(ik,jk)=addit(ik,jk)+stotal
      if(nc.eq.ncasos) goto 7
      goto 8
7     sumiso(ik,jk)=addit(ik,jk)
      xf(ik)=xkm
      yf(jk)=ykm
8     x=x+dx
4     continue
      write(7,'()')
      y=y+dy

2     continue
      if(nc.ne.ncasos) goto 1948
      write(4,*) '# suma de todos los casos'
      do 901 jjk=1,1
      do 902 ijk=1,nx
      write(4,*) xf(ijk),yf(jjk),sumiso(ijk,jjk)
902   continue
      write(4,*)''
901   continue

1948     CONTINUE
      close(9)
995   stop
      end
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
! aquí se calcula la integral sobre la altura
      SUBROUTINE ADOZ(x,y,vo,chixy,beta,para)
      common vwind(19),zw(19),d(100),compx(18),compy(18)
      common n(4000),zdm(4000),um(4000),u(4000),zd(4000)
      common H,dz,nz,nw,wo,nf,zo,b(4000),bm(4000)
```

```
      z=zo
      yo=beta*(wo)/vo
      sum=0.0
      vwcx=vwind(1)*compx(1)
      vwcy=vwind(1)*compy(1)

      do 1 iz=1,nf-1
      zsmt=zd(iz)
      z1=zd(iz)
      b1=b(iz)
      z3=zd(iz+1)
      b3=b(iz+1)
      do 20 j=1,nw-1
      if(zsmt.lt.zw(j) .or. zsmt.gt.zw(j+1)) goto 20
      vwxjp1=vwind(j+1)*compx(j+1)
      vwxj=vwind(j)*compx(j)
      vwx4=vwind(nw)*compx(nw)
      slopex=(vwxjp1-vwxj)/(zw(j+1)-zw(j))
      vwcx=vwxj+(slopex*(zsmt-zw(j)))
          if(zsmt.gt.zw(nw)) vwcx=vwx4

      vwyjp1=vwind(j+1)*compy(j+1)
      vwyj=vwind(j)*compy(j)
      vwy4=vwind(nw)*compy(nw)
      slopey=(vwyjp1-vwyj)/(zw(j+1)-zw(j))
      vwcy=vwyj+(slopey*(zsmt-zw(j)))
          if(zsmt.gt.zw(nw)) vwcy=vwy4
      zw1=zw(j)
      goto 30
 20   continue

 30   continue
      zkm=z1/1.0e5
      zkm2=z3/1.0e5
      t1=555923.59*(((1.0-exp(-0.0625*zkm))/Vo)**0.926)
      ts1=0.036835579*(b1**0.8)
      xut1=(x-(vwcx*t1))
      xutsq1=xut1*xut1
      yutsq1=(y-(vwcy*t1))
      ysq1=yutsq1*yutsq1
```

```
      pot1=dfloat(exp(-(0.0015625*(xutsq1+ysq1)/((t1+ts1)
         **2.5))))
      t2=555923.59*(((1.0-exp(-0.0625*zkm2))/Vo)**0.926)
      ts2=0.036835579*(b3**0.8)
      xut2=(x-(vwcx*t2))
      xutsq2=xut2*xut2
      yutsq2=(y-(vwcy*t2))
      sq2=yutsq2*yutsq2
      pot2=exp(-(0.0015625*(xutsq2+ysq2)/((t2+ts2)**2.5)))
      ud1=u(iz)
      pza=Pz(wo,vo,yo,H,beta,z1,ud1,para)
      ud3=u(iz+1)
      pzc=Pz(wo,vo,yo,H,beta,z3,ud3,para)
      s1=pza*pot1/((t1+ts1)**2.5)
      s2=pzc*pot2/((t2+ts2)**2.5)
      sumod=(s1+s2)*dz/2
      sumod=(s1+s2)*dz/2
      sum=sum+sumod
1     continue

      chixy=sum
      return
      end

      FUNCTION Pz(wo,vo,yo,H,beta,z,u,para)
      y1=beta*(u)/vo
      pz21=u*exp(-y1)
      pz=pz21*para
      return
      end
!%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
! Este programa calcula velocidad, densidad, temperatura
! y radio de una columna eruptiva a partir de las
! ecuaciones de Woods por el método de Runge-Kutta de
! cuarto orden. Datos en m/seg.
      SUBROUTINE COLUMNA
      REAL K(3,4),N,NO,MH1,MZ
      DIMENSION Y(3)
      DATA H1,H2,RGO,CPO,CA,DP,PO,TO,RA
         /11000.,20000.,462.,1617.,
```

```
      *998.,2000.,101320.,288.16,285./
      OPEN (90,FILE ='num2') !archivo de número de partes
      OPEN (70,FILE ='sal_c2.dat') !salida
      OPEN (40,FILE ='in_c2.dat') !parámetros de entrada
      OPEN (60,FILE =' ') !archivo de salida

      READ (40,*) DH, N0, TH0, B0, U0, Z0, LL, VELMIN
      WRITE(60,*) DH, N0, TH0, B0, U0, Z0, LL, VELMIN
      write(60,*)'#altura','velocidad','radio',
      *'theta','densidad'
      LTESTO=45
      NCOUNTR=0
      LCOUNTR=1
      NDIGIT=0
      MH1=.0065*H1
      TOMH1=T0-MH1
      RATOMH1=RA*TOMH1
      GSRAM=5.2955468
      GSRAO=17.2105
      B=B0
      U=U0
      N=N0
      TH=TH0
      Z=Z0+dh
      v=0.
      qm1=0.
      BETA0=1./(((1.-N0)/DP)+(N0*RG0*TH0/P0))
      QVOL0=3.1416*B0*B0*U0
      QPUNTO0=QVOL0*BETA0
      qtot=qpunto0

      beta=beta0
      Y(1)=U0
      Y(2)=BETA0*U0*B0*B0
      Y(3)=TH0*CP0
      alfa=p0/(ra*t0)
      WRITE(70,*)INT(0),INT(Z0),INT(U0),0,6
      b1=b0
      qm=0.0
3     CONTINUE
```

```

      MZ=.0065*Z
      IF (Z .LT. H1) T=T0-(MZ)
      IF (Z .LT. H1) TT=T
      IF (Z .GT. H2) T=TT+(.002*(Z-H2))
      IF (Z.LT.H1) P=P0*((1.0-(MZ/T0))**GSRAM)
      IF (Z.LT.H1) PP=P
      IF (Z.GT.H1 .AND. Z .LT. H2) P=PP*EXP((9.81*(H1-Z))/
         RATOMH1)
      IF (Z.GT.H1 .AND. Z .LT. H2) QQ=P
      IF (Z.GT.H2 ) P=QQ*((TOMH1/(TOMH1+(0.002*(Z-H2))))**
         GSRAO)

! se calculan constantes
      GAB=(ALFA-BETA)*9.81
      BSA=BETA/ALFA
      SQBA=SQRT(BSA)
! si estamos en la región de eyección usamos este:
      EPS=0.06*SQBA
! si bsa<1 i.e. beta<alfa =>
! condición para unir ambas regiones
! si estamos en la región de convección usamos este:
      IF (BSA .LT. 1.0) EPS=0.09*SQBA
      DO 1 J=1,4
      FRST=1.
      IF(J.EQ.1) FRST=0.0
      COEF=0.5
      IF(J.EQ.4) COEF=1.
      Y1=Y(1)+(K(1,J)*COEF*FRST)
      Y2=Y(2)+(K(2,J)*COEF*FRST)
      Y3=Y(3)+(K(3,J)*COEF*FRST)

! FORMAR K1J
      T1=GAB/(BETA*Y1)
      K(1,J)=T1-(2.*Y1*ALFA*EPS/(BETA*B))
! FORMAR K2J
      K(2,J)=EPS*Y1*B*ALFA*2.
! FORMAR K3J
      X1=(CA*T)-Y3-(Y1*Y1/2.)
      X2=(Y1*K(1,J))+9.81
```

```
     K(3,J)=((2.*EPS*ALFA*X1)/(BETA*B))-X2

1    CONTINUE
     DO 2 I=1,3
     Y(I)=Y(I)+(DH*(K(I,1)+K(I,2)+K(I,2)+K(I,3)+K(I,3)+K(
        I,4))/6.)
2    CONTINUE

     NCOUNTR=NCOUNTR+1
     ubb=u*b*b*beta
     u0b0b0=u0*b0*b0*beta0
     n=(ubb-u0b0b0+(n0*u0b0b0))/ubb
     RN1=(1.-N)/N
     RN2=N0/(1.-N0)
     RG=RA+((RG0-RA)*RN1*RN2)
     BETA=1./(((1.-N)/DP)+(N*RG*TH/P))
     CP=CA+((CP0-CA)*((1.-N)/(1.-N0)))
     U=Y(1)
! se refrescan las variables de B=L y TH=θ
     B=SQRT(Y(2)/(Y(1)*BETA))
     TH=Y(3)/CP

     QVOL=3.1416*B*B*U
     QPUNTO=QVOL*BETA
     qtot=qpunto+qtot
     rho=2500.0
     ALFA=P/(RA*T)

     if(u .lt. 0)goto 15
4    IF(U .LT. VELMIN) GOTO 15
! volumen en cono de altura=dh para masa=qm
     v=(3.141592654)*(dh)*((b1*b1)+(b*b)+(b1*b))
     qm1=beta*v
     qm=qm+qm1
     kn=((z-z0)/dh)
     Z=Z+DH
     beta1=beta
     qtot1=qtot
     b1=b
     IF(LCOUNTR .NE. NCOUNTR) GOTO 4
```

```
      NDIGIT=NDIGIT+1
      LCOUNTR=LCOUNTR+LL
      WRITE(60,*)Z,U,B,TH,beta
      WRITE(70,*)int(kn),int(Z),u,qm,beta,v

      IF(NDIGIT.GE.6000)GOTO 15
      goto 3
15    WRITE(60,9)Z0,U0,B0,TH0,BETA0,ALFA
9     FORMAT(3X,1P6E10.2)

      write(90,*)int(kn+1)
      write(90,*)int(tiempo)

      close(40)
      close(70)
      close(90)
      return
      END
```

Bibliografía

Arfken, George Brown (2005). *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, New York, sextał edición. ISBN 0120598760.

Batchelor, G. K. (1950). «The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion». *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **76(328)**, pp. 133–146. ISSN 00359009. doi: 10.1002/qj.49707632804.
http://doi.wiley.com/10.1002/qj.49707632804

Bonasia, Rosanna; Costa, Antonio; Folch, Arnau; Macedonio, Giovanni y Capra, Lucia (2012). «Numerical simulation of tephra transport and deposition of the 1982 El Chichón eruption and implications for hazard assessment». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **231-232**, pp. 39–49. ISSN 03770273. doi: 10.1016/j.jvolgeores.2012.04.006.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377027312000868

Carey, Steven y Sigurdsson, Haraldur (1986). «The 1982 eruptions of El Chichon volcano, Mexico (2): Observations and numerical modelling of tephra-fall distribution». *Bulletin of Volcanology*, **48(2-3)**, pp. 127–141. ISSN 0258-8900. doi: 10.1007/BF01046547.
http://link.springer.com/10.1007/BF01046547

Csanady, G. T. (1973). *Turbulent Diffusion in the Environment*. Springer Netherlands, Dordrecht. ISBN 978-90-277-0261-6. doi: 10.1007/978-94-010-2527-0.
http://link.springer.com/10.1007/978-94-010-2527-0

Duffield, Wendell a.; Tilling, Robert I. y Canul, Rene (1984). «Geology of El Chichon volcano, Chiapas, Mexico». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **20(1-2)**, pp. 117–132. ISSN 03770273. doi:

10.1016/0377-0273(84)90069-6.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0377027384900696

Espíndola, J. M.; Macías, J. L.; Tilling, R. I. y Sheridan, M. F. (2000). «Volcanic history of El Chichón Volcano (Chiapas, Mexico) during the Holocene, and its impact on human activity». *Bulletin of Volcanology*, **62(2)**, pp. 90–104. ISSN 0258-8900. doi: 10.1007/s004459900064.
http://link.springer.com/10.1007/s004459900064

Francis, Peter William y Oppenheimer, Clive (2004). *Volcanoes*. OUP Oxford, Oxford, segundał edición. ISBN 0199254699.

Gill, Adrian E. (1982). *Atmosphere-ocean Dynamics*. Academic Press, San Diego, California. ISBN 0122835220.

Ingerson, Earl (1950). «The water content of primitive granitic magma». *Amer. Mineralogist*, **35**, pp. 806–815.

Joseph, J. y Sendner, H. (1958). «Über die horizontale Diffusion im Meere». *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, **11(2)**, pp. 49–77. ISSN 0012-0308. doi: 10.1007/BF02020293.
http://link.springer.com/10.1007/BF02020293

Kobs, Shannon (2009). *Modeling particle motion and near-vent deposition in explosive volcanic eruptions*. Tesis doctoral, State Univerity of New York at Buffalo.

Luhr, James F.; Carmichael, Ian S.E. y Varekamp, Johan C. (1984). «The 1982 eruptions of El Chichón Volcano, Chiapas, Mexico: Mineralogy and petrology of the anhydritebearing pumices». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **23(1-2)**, pp. 69–108. ISSN 03770273. doi: 10.1016/0377-0273(84)90057-X.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/037702738490057X

Mastin, L.G.; Guffanti, M.; Servranckx, R.; Webley, P.; Barsotti, S.; Dean, K.; Durant, A.; Ewert, J.W.; Neri, A.; Rose, W.I.; Schneider, D.; Siebert, L.; Stunder, B.; Swanson, G.; Tupper, A.; Volentik, A. y Waythomas, C.F. (2009). «A multidisciplinary effort to assign realistic source parameters to models of volcanic ash-cloud transport and dispersion during eruptions». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **186(1-2)**, pp. 10–21. ISSN 03770273. doi:

10.1016/j.jvolgeores.2009.01.008.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377027309000146

MORA, J.C.; JAIMES-VIERA, M.C.; GARDUÑO MONROY, V.H.; LAYER, P.W.; POMPA-MERA, V. y GODINEZ, M.L. (2007). «Geology and geochemistry characteristics of the Chiapanecan Volcanic Arc (Central Area), Chiapas Mexico». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **162(1-2)**, pp. 43–72. ISSN 03770273. doi: 10.1016/j.jvolgeores.2006.12.009.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377027306004112

MORTON, B. R.; TAYLOR, GEOFFREY y TURNER, J. S. (1956). «Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources». *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **234(1196)**, pp. 1–23. ISSN 1364-5021. doi: 10.1098/rspa.1956.0011.
http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1956.0011

OERTEL, HERBERT (2004). *Prandtl´s Essentials of Fluid Mechanics*. Springer, New York. ISBN 0387404376.

OKUBO, AKIRA (1971). «Oceanic diffusion diagrams». *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, **18(8)**, pp. 789–802. ISSN 00117471. doi: 10.1016/0011-7471(71)90046-5.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0011747171900465

OZMIDOV, R. V. (1958). «On the calculation of horizontal turbulent diffusion of the pollutant patches in the sea». *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **234**, pp. 761–763.

PRANDTL, L. (1954). *Essentials of fluid mechanics*. Blackie & Son, Glasgow. ISBN 0387404376.

RICHARDSON, LEWIS F. (1926). «Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph». *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **110(756)**, pp. 709–737. ISSN 1364-5021. doi: 10.1098/rspa.1926.0043.
http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1926.0043

Rye, R.O.; Luhr, J.F. y Wasserman, M.D. (1984). «Sulfur and oxygen isotopic systematics of the 1982 eruptions of El Chichón Volcano, Chiapas, Mexico». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **23(1-2)**, pp. 109–123. ISSN 03770273. doi: 10.1016/0377-0273(84)90058-1.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0377027384900581

Shapiro, Ascher H. (1953). *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*. Ronald Press Co., New York. ISBN 0471066915.

Sigurdsson, H.; Carey, S.N. y Espindola, J.M. (1984). «The 1982 eruptions of El Chichón Volcano, Mexico: Stratigraphy of pyroclastic deposits». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **23(1-2)**, pp. 11–37. ISSN 03770273. doi: 10.1016/0377-0273(84)90055-6.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0377027384900556

Sparks, R. S. J. (1986). «The dimensions and dynamics of volcanic eruption columns». *Bulletin of Volcanology*, **48(1)**, pp. 3–15. ISSN 0258-8900. doi: 10.1007/BF01073509.
http://link.springer.com/10.1007/BF01073509

Sparks, R. S. J. y Wilson, L. (1976). «A model for the formation of ignimbrite by gravitational column collapse». *Journal of the Geological Society*, **132(4)**, pp. 441–451. ISSN 0016-7649. doi: 10.1144/gsjgs.132.4.0441.
http://jgs.lyellcollection.org/cgi/doi/10.1144/gsjgs.132.4.0441

Suzuki, Takeo (1983). «A Theorical Model for Dispersion of Tephra». En: *Arc volcanism: physics and tectonics*, pp. 95–113. Terra Scientific Publishing Co., Tokyo. ISBN 9027716129.

T. Crowe, Clayton; D . Schwarzkopf, John; Sommerfeld, Martin y Tsuji, Yutaka (2011). «Size Distribution». En: *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, capítulo 3, pp. 39–56. CRC Press, segundał edición. ISBN 0849394694.

Thring, M.W. y Newby, M.P. (1953). «Combustion length of enclosed turbulent jet flames». *Symposium (International) on Combustion*, **4(1)**, pp. 789–796. ISSN 00820784. doi: 10.1016/S0082-0784(53)80103-7.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0082078453801037

Walker, G. P. L. (1981). «Plinian eruptions and their products». *Bulletin Volcanologique*, **44(3)**, pp. 223–240. ISSN 0258-8900. doi: 10.1007/BF02600561.
http://link.springer.com/10.1007/BF02600561

Walker, G. P. L.; Wilson, L. y Bowell, E. L. G. (1971). «Explosive Volcanic Eruptions-I The Rate of Fall of Pyroclasts». *Geophysical Journal International*, **22(4)**, pp. 377–383. ISSN 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1971.tb03607.x.
http://gji.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1111/j.1365-246X.1971.tb03607.x

Werner Kieffer, Susan (1984). «Factor Governing the Structure of Volcanic Jets». En: *Explosive Volcanism: Inception, Evolution, and Hazards*, volumen 66, capítulo 11, pp. 143–157. Press, National Academy, Washington. ISBN 0309033934.

Wilson, L. (1972). «Explosive Volcanic Eruptions-II The Atmospheric Trajectories of Pyroclasts». *Geophysical Journal International*, **30(4)**, pp. 381–392. ISSN 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1972.tb05822.x.
http://gji.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1111/j.1365-246X.1972.tb05822.x

Wilson, L (1976). «Explosive Volcanic Eruptions III. Plinian Eruption Columns». *Geophysical Journal International*, **1(4)**, pp. 543–556. ISSN 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1958.tb05342.x.
http://gji.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1111/j.1365-246X.1958.tb05342.x

Wilson, L. y Huang, T.C. (1979). «The influence of shape on the atmospheric settling velocity of volcanic ash particles». *Earth and Planetary Science Letters*, **44(2)**, pp. 311–324. ISSN 0012821X. doi: 10.1016/0012-821X(79)90179-1.
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0012821X79901791

Woods, A. W. (1988). «The fluid dynamics and thermodynamics of eruption columns». *Bulletin of Volcanology*, **50(3)**, pp. 169–193. ISSN 0258-8900. doi: 10.1007/BF01079681.
http://link.springer.com/10.1007/BF01079681