

Campos Vectoriales Holomorfos en Variedades Analíticas

Tesis que para obtener el Título de Matemático presenta:

Juan Antonio Ramírez Orta

13 de junio de 2014



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Asesora

Doctora Laura Ortiz Bobadilla

Sinodales

Doctora Carmen Martínez Adame Isaías

Doctora Adriana Ortiz Rodríguez

Doctor Ricardo Berlanga Zubiaga

Matemático Pavel Ramos Martínez

A mis padres

Investigación realizada gracias al

Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT)
de la UNAM

bajo los proyectos

IN 103010 Geometría de foliaciones y ecuaciones holomorfas

IN 102413 Geometría de ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones holomorfas.

Agradezco a la DGAPA - UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	1
Introducción	3
I. Invariantes Topológicos de un Campo Vectorial Holomorfo	5
1. El índice	7
1.1. El índice de una curva	7
1.2. Propiedades del índice de curvas	10
1.3. Algunas aplicaciones del índice de curvas	13
1.4. Índice de una singularidad aislada	14
1.5. Índice de una singularidad aislada (caso multidimensional)	17
1.6. El Teorema de Poincaré-Hopf	20
2. El número de Milnor	31
2.1. Definición e interpretación	31
2.2. Algunos ejemplos	34
2.3. Propiedades del número de Milnor	35
2.4. Invarianza topológica del número de Milnor	38
2.5. Una aplicación	44
II. Desingularización	47
3. Explosión de una singularidad(Blow-up)	49
3.1. Definición	49
3.2. Introducción	51
3.2.1. El caso no-dicrítico	52
3.2.2. El caso dicrítico	52
3.2.3. Desingularización completa del campo	52
3.2.4. Una fórmula para la multiplicidad	53
3.3. Curvas generalizadas y su desingularización	60
3.4. El número de Milnor de una curva generalizada	64
Bibliografía	67

Índice alfabético

69

Agradecimientos

Este escrito no representa el esfuerzo de una sola persona. En particular, quiero agradecer enormemente a mis papás, Celia y Juan, y a mi familia, por que aunque no me enseñaron matemáticas, con ellos aprendí algo mucho más importante: a vivir. Por otro lado, hay muchas personas a las que debo mencionar, pues sin ellos no hubiera podido terminar mi carrera y esta tesis: a todos mis profesores, pero en particular a la profesora Laura, por haberme acogido bajo su tutela y por sus valiosas lecciones; a mis amigos, Axel, Luis, Luis Javier y Louis, por acompañarme, escucharme y por darme sus consejos; a mis amigos de Ajedrez en Ciencias Z, en particular a Omar, Alex y Renato, por compartir conmigo de una forma tan amena mi otra gran pasión; y a mis amigos de la Facultad de Ciencias, que son muchos y muy divertidos. Finalmente, pero no por ello en último lugar, quiero agradecer a Michel Osorio Valdés por todo su cariño, apoyo y comprensión. Sin todas estas personas, este trabajo hubiera sido mucho más difícil y estudiar matemáticas hubiera sido mucho menos satisfactorio. Espero de todo corazón que este pequeño logro mío los impulse e inspire para seguir superándose y que ustedes, a su vez, también realicen sus propios logros.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales fueron introducidas por Sir Isaac Newton para la descripción de su nueva Física en 1686. Estas ecuaciones se basan en el hecho de que el conocimiento del movimiento infinitesimal de un fenómeno en todos sus posibles estados permite deducir su evolución. Son las herramientas básicas para el estudio matemático de procesos cuyo comportamiento infinitesimal se conoce, y hacen posible estudiar cualitativamente, y en algunos casos, cuantitativamente, todos aquellos procesos evolutivos que son deterministas, finito-dimensionales y diferenciables.

El estudio de los campos vectoriales que definen a las ecuaciones diferenciales se vio fuertemente enriquecido con la introducción del análisis complejo. A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, Poincaré, Briot, Bouquet y Dulac, entre otros, abrieron un nuevo camino en el estudio de las ecuaciones diferenciales al combinar dentro de éste la topología y la variable compleja.

El propósito del presente trabajo es presentar invariantes topológicos que facilitan la clasificación de las singularidades de un campo vectorial $V : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ y profundizar en el estudio de algunos de ellos.

En el Capítulo 1, se presenta el Índice, que cuantifica la complejidad del campo alrededor de sus puntos singulares, y permite relacionar la topología del espacio fase con los campos vectoriales diferenciables que se pueden definir en él. En particular se demuestra el Teorema de Poincaré-Hopf para superficies compactas orientables.

En el Capítulo 2, se define el número de Milnor, que es en cierto sentido una generalización del Índice, utilizando herramientas de Variable Compleja para calcular explícitamente propiedades locales del campo en variedades analíticas. El resultado principal del capítulo es el de mostrar la invarianza topológica del número de Milnor. A saber, dos campos vectoriales topológicamente equivalentes en $(\mathbb{C}^n, 0)$ tienen el mismo número de Milnor en el punto 0. Otro resultado no menos importante es la coincidencia de la multiplicidad geométrica (nombre con el que también se conoce al Índice de un campo en un punto) y la multiplicidad algebraica (el número de Milnor correspondiente).

Por último, en el Capítulo 3, se estudia el proceso de desingularización de un campo vectorial, o explosión de singularidades. Es una herramienta muy poderosa que permite conocer aún más detalles acerca del campo y elaborar el retrato de las fases

de un campo casi por completo. Un problema natural a plantearse es el de analizar hasta qué grado el conjunto de separatrices de un campo vectorial no dicrítico $V \in (\mathbb{C}^2, 0)$ determina el comportamiento topológico de dicho campo. En este capítulo se demuestra que, bajo hipótesis relativamente sencillas sobre el campo vectorial (ausencia de valores propios cero en la parte lineal de los puntos singulares de la desingularización), la desingularización de las separatrices del campo y la desingularización del mismo campo coinciden. Asimismo se demuestra que, en ausencia de valores propios cero en la parte lineal de los puntos singulares de la desingularización del campo vectorial, la suma de la multiplicidad algebraica de las ecuaciones que definen a las separatrices del campo vectorial es igual a la multiplicidad del campo vectorial más uno. Finalmente se demuestra que para un campo vectorial no dicrítico en $(\mathbb{C}^2, 0)$ el número de Milnor asociado al punto singular es mayor o igual al número de Milnor del campo vectorial gradiente a la función que define el conjunto de separatrices.

Es recomendable que antes de leer este escrito se esté familiarizado con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con una variable independiente (real y compleja) y por lo menos con un curso básico, de Álgebra Moderna, Variable Compleja y Topología Diferencial.

Parte I.

Invariantes Topológicos de un Campo Vectorial Holomorfo

1. El índice

En esta sección se introduce la noción de campo vectorial holomorfo, así como el concepto de índice de un campo vectorial y se estudian algunas de las propiedades que estos conceptos tienen. Con ello se da inicio al presente estudio de los invariantes topológicos de los campos vectoriales holomorfos.

El concepto de índice (y sus diversas generalizaciones) fue desarrollado por Henri Poincaré y básicamente se le puede describir como el número de vueltas completas que da un campo vectorial continuo cuando éste se encuentra restringido a una curva cerrada que rodea un punto.

Al contar las vueltas que da el campo alrededor del punto se obtiene información acerca del comportamiento local del campo en una pequeña vecindad alrededor del punto, debido a que el índice está íntimamente relacionado con la variación del campo cerca del punto singular.

1.1. El índice de una curva

Considérese una curva cerrada diferenciable por trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, y supóngase que se quiere saber cuántas vueltas da alrededor de un cierto punto p . Como se ve en los cursos básicos de variable compleja, la herramienta que se necesita es el *índice de γ respecto a p* , que se define de la siguiente manera:

$$I(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - p} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}.$$

Cabe mencionar que este concepto surge del proceso de integrar la derivada de la función multivaluada $\log(z - p)$ y que dicha multivaluación es la que arroja información sobre el número de vueltas completas que da la curva γ alrededor del punto p . Este razonamiento es precisamente la clave del Principio del Argumento en variable compleja.

Por ejemplo, si γ es un círculo centrado en el origen parametrizado por la curva $\gamma(t) = \exp(2n\pi it)$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, entonces el índice de γ respecto a 0 es :

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\exp(2n\pi it)(2n\pi i)}{\exp(2n\pi it)} dt = n \int_0^1 dt = n.$$

Ahora, suponiendo que el círculo no se recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj, sino de acuerdo a ellas, entonces la curva está parametrizada mediante $\gamma(t) = \exp(-2n\pi it)$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, por lo que el índice será

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\exp(-2n\pi it)(-2n\pi i)}{\exp(-2n\pi it)} dt = -n \int_0^1 dt = -n.$$

Definición 1.1.1. Por *campo vectorial holomorfo* se entiende una función

$V : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que para todo $z \in U$, U un conjunto abierto, V es holomorfa en z , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(z + tv) - V(z)}{t}$$

existe para todo $z \in U$ y para todo $v \in \mathbb{C}^n$.

También se necesita la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Supóngase que se tiene un campo vectorial holomorfo V . Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es un *punto singular* o *singularidad* de V si

$$V(z) = 0.$$

En cualquier otro caso, se dice que $z \in \mathbb{C}$ es un *punto regular*.

Debido al teorema de rectificación para campos vectoriales (véase [2]) el comportamiento de un campo vectorial solamente es interesante alrededor de los puntos singulares del campo, pues en un punto regular (al utilizar el teorema de rectificación) se tiene que el campo V es localmente difeomorfo a un campo constante.

Sin embargo, alrededor de un punto singular, las soluciones de la ecuación no necesariamente tienen un comportamiento simple, sino que, dependiendo del tipo de singularidad, se pueden presentar comportamientos muy complicados. Para analizar las soluciones de la ecuación en función de la complejidad del punto singular del campo vectorial que la define surgió la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizada por primera vez por Henri Poincaré en 1881.

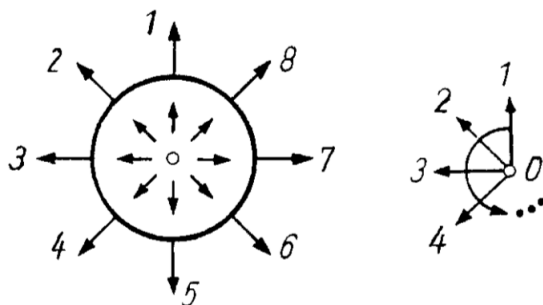
Supóngase que ahora se tiene un campo vectorial holomorfo V y una curva γ diferenciable por trozos, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, pero ahora se desea saber cuántas vueltas da $V(\gamma(t))$ alrededor del origen a medida que se recorre γ .

Para calcular esto, hay que considerar el índice de $V \circ \gamma$ respecto a 0, lo cual motiva la siguiente

Definición 1.1.3. El índice de γ respecto a V se define como:

$$I(V \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{V \circ \gamma} \frac{dz}{z}$$

Ejemplo 1.1.1. Una curva con índice 1.



Por otro lado, se puede hacer una definición análoga para campos vectoriales en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

Si se tiene un campo vectorial $V(x_1, x_2) = (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2))$ y se considera la 1-forma diferencial:

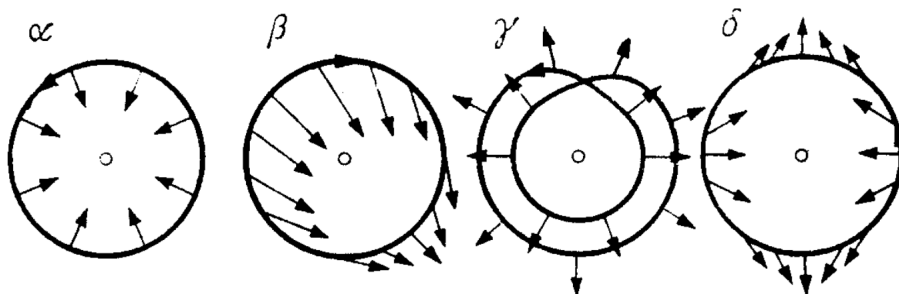
$$d\left(\arctan\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right) = d\varphi = \frac{V_2 dV_1 - V_1 dV_2}{(V_1)^2 + (V_2)^2},$$

Se define el índice de 0 respecto a $V \circ \gamma$ como

$$I(V \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\varphi,$$

la cual es un poco más general, debido a que la segunda definición no requiere un campo vectorial holomorfo, sino uno diferenciable, y permite estudiar todos los campos diferenciables.

Ejemplo 1.1.2. Los índices de las curvas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son 1, 0, 2 y -1, respectivamente



1.2. Propiedades del índice de curvas

Ahora se presentan algunas propiedades del índice que se acaba de definir que servirán para comprender mejor su significado y su uso en el estudio de las singularidades de un campo vectorial.

Para poder entender los resultados posteriores, es necesario conocer un importante concepto topológico: el de *homotopía*.

El hecho de que dos curvas sean homotópicas quiere decir, intuitivamente hablando, que se “puede deformar continuamente” una en la otra. Esto significa que desde el punto de vista topológico, las curvas son muy parecidas, debido a que mediante homeomorfismos o incluso transformaciones continuas (que son las transformaciones que preservan la topología) es posible convertir una curva en otra.

Es especialmente interesante cuando una curva es homotópica a una curva constante, caso en que se dice que la curva es nulhomotópica u homotópica a un punto. Intuitivamente, cuando una curva es homotópica a un punto, quiere decir que la curva no tiene un comportamiento interesante, que no da vueltas completas alrededor del punto al que es homotópica, que no rodea “agujeros” del espacio en que está definida, etc. Algunas de estas propiedades son heredadas por el índice, como se explica a continuación.

Definición 1.2.1. Sean dos curvas $\alpha, \beta : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Se dice que α y β son homotópicas si existe

$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, una función continua tal que

$$H(0, t) = \alpha(t), \quad H(1, t) = \beta(t).$$

Observación 1.2.1. Cuando se tiene que $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1)$, se dice que H es una homotopía de curvas cerradas.

Hay que recordar que se está trabajando con un campo vectorial holomorfo

$V : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y curvas $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciables por trozos.

Proposición 1.2.1. Sean γ_1, γ_2 curvas cerradas de clase C^1 por tramos y supóngase que existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una homotopía de curvas cerradas entre γ_1, γ_2 tal que $V(H(s, t)) \neq 0, \forall s, t \in [0, 1]$. Entonces

$$I(V \circ \gamma_1, 0) = I(V \circ \gamma_2, 0).$$

Esto es, el índice de curvas es invariante bajo homotopía de curvas cerradas.

Esta proposición es corolario del Teorema del Residuo (véase [1]), el cual se enunciará sin demostración:

Teorema. (*del Residuo*)

Sea A una región en \mathbb{C} , y supóngase que hay $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ en A y sea f tal que $f : A - \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. Supóngase también que γ es una curva cerrada de clase C^1 por tramos en $A - \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ y homotópica a un punto en A . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) I(\gamma, z_j).$$

Demostración. (de la Proposición 1.2.1) Obsérvese que si dos curvas γ_1, γ_2 son homotópicas entre sí en $A - \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$, por el Teorema del Residuo se tiene que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Ahora, al considerar $f(z) = \frac{1}{z}$ y curvas γ_1, γ_2 que son homotópicas en $\mathbb{C} - \{0\}$ se tiene que

$$I(V \circ \gamma_1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{V \circ \gamma_1} \frac{dz}{z}$$

como γ_1 es homotópica a γ_2 en $\mathbb{C} - \{0\}$, entonces esto último es igual a:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{V \circ \gamma_2} \frac{dz}{z} = I(V \circ \gamma_2, 0).$$

□

Observación. La Proposición 1.2.1, a pesar de ser tan simple y de su “fácil” demostración, está basada en un hecho mucho más importante: *El teorema de Stokes* (véase [8]).

Al considerar dos curvas, α y β , tales que $\alpha(1) = \beta(0)$ se puede definir una “concatenación de curvas”

$\alpha \star \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

y también una “curva inversa de β ”

$\beta^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\beta^{-1}(t) = \beta(1 - t).$$

Se tiene que las curvas α y β son homotópicas si y sólo si $\alpha \star \beta^{-1}$ es nulhomotópica, consecuencia directa del Teorema de Stokes.

Se puede formular también un resultado similar para homotopías entre campos vectoriales.

Proposición 1.2.2. *Considérese γ una curva cerrada de clase C^1 por tramos, y V, W dos campos vectoriales holomorfos tales que existe $H_t(z) : \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $H_0(z) = V(z)$, $H_1(z) = W(z)$ y $H_s(\gamma(t)) \neq 0, \forall t \in [0, 1], \forall z \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$I(V \circ \gamma, 0) = I(W \circ \gamma, 0)$$

Demostración. La demostración de esta proposición es consecuencia inmediata de la proposición anterior, pues al considerar $H_0(\gamma(t)) = V(\gamma(t))$ y $H_1(\gamma(t)) = W(\gamma(t))$, estas curvas son homotópicas en $\mathbb{C} - \{0\}$ (por las condiciones que se han impuesto sobre H), lo cual, al usar la Proposición 1.2.1 implica que

$$I(V \circ \gamma, 0) = I(H_0 \circ \gamma, 0) = I(H_1 \circ \gamma, 0) = I(W \circ \gamma, 0).$$

□

Proposición 1.2.3. *Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ curvas orientadas tales que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Entonces el índice de la curva $\gamma_1 \star \gamma_2$ es igual al índice de γ_1 sumado con el índice de γ_2 .*

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} I(V \circ (\gamma_1 + \gamma_2), 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{V \circ (\gamma_1 + \gamma_2)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{V'(z)}{V(z)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{V'(z)}{V(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{V'(z)}{V(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{V \circ \gamma_1} \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{V \circ \gamma_2} \frac{dz}{z} \\ &= I(V \circ \gamma_1, 0) + I(V \circ \gamma_2, 0) \end{aligned}$$

□

1.3. Algunas aplicaciones del índice de curvas

Con las propiedades ya establecidas acerca del índice de curvas se pueden ahora dar pruebas de algunos resultados interesantes que ayudarán a familiarizarse con el uso y características del índice de curvas.

Teorema 1.3.1. *Si el índice de una curva respecto a un campo vectorial no es cero, entonces existe al menos un punto singular en el conjunto D acotado por la curva.*

Demostración. Supóngase, por el contrario, que no hay puntos singulares en el interior de la curva (*que es D*). Entonces, usando la Proposición 1.2.1 se podría deformar la curva hasta convertirla en un punto.

Sin embargo, una curva así (constante) tiene índice cero, lo cual contradice las hipótesis del Teorema. \square

Teorema 1.3.2. *Sean $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$ y $f : \Delta \rightarrow \Delta$ una función holomorfa. Entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Hay que observar que se puede deformar continuamente el campo $V(z) = f(z) - z$ en el campo $W(z) = -z$ al considerar la homotopía de campos vectoriales $H_t(z) = tf(z) - z$.

Ahora hay que pensar en el índice de $\partial\Delta = \gamma$ (que es el círculo unitario parametrizado en sentido positivo) respecto al campo $W(z) = -z$:

$$I(W \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{W \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{W \circ \gamma} \frac{-dz}{-z} = 1$$

Usando la Proposición 1.2.2, como los campos V y W son homotópicos, entonces $I(W \circ \gamma, 0) = I(V \circ \gamma, 0) = 1$. Ahora, usando el Teorema 1.3.1, el campo V tiene al menos un punto singular, esto es, existe $z_0 \in \Delta$ tal que $V(z_0) = f(z_0) - z_0 = 0$, lo cual prueba el Teorema. \square

Teorema 1.3.3. (*Fundamental del Álgebra*) *Toda ecuación $z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0$, $n > 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, tiene al menos una solución compleja.*

Demostración. Considerando el campo holomorfo $V(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$, los puntos singulares del campo son las soluciones buscadas.

Ahora, pensando en la homotopía de campos vectoriales

$$V_t(z) = z^n + t(a_1z^{n-1} + \dots + a_n), 0 \leq t \leq 1.$$

se puede deformar el campo original en el campo $V_0(z) = z^n$.

Como es sabido que un polinomio de grado n tiene a lo más n soluciones, entonces existe una circunferencia $C(t)$ suficientemente grande y orientada positivamente tal que que no hay ceros de $V_0(C(t))$ ni de $V_1(C(t))$, ni durante el transcurso de la homotopía.

Por la Proposición 1.2.2, se tiene que el índice de $V_1(z)$ a lo largo de la circunferencia C es el mismo que el de $V_0(z)$ a lo largo de la misma circunferencia C , pero el índice del campo $V_0(z)$ es n . Por el Teorema 1.3.1, se sigue que debe existir al menos una solución. \square

1.4. Índice de una singularidad aislada

Para realmente comprender la potencia del concepto de índice, es necesario dejar de trabajar con curvas y trabajar solamente con los puntos singulares de un campo vectorial. Es por eso que ahora se sentarán las bases para definir el índice de un punto singular.

Se va a suponer ahora que todos los puntos singulares del campo con el que se trabaja son aislados, es decir, que existe una vecindad abierta alrededor de cada punto singular en la cual ya no hay más puntos singulares.

Sea z_0 un punto singular de un campo vectorial V . Como z_0 es aislado, debe existir un radio r suficientemente pequeño tal que el círculo de radio r ya no tiene más puntos singulares, y su frontera (que será la curva con la que se va definir el índice) se debe orientar de la forma usual (positiva, es decir, con el interior del círculo “a la izquierda”, en este caso, en sentido contrario a las manecillas del reloj).

Ahora se prueba el siguiente

Teorema 1.4.1. *Existe $R > 0$ tal que el índice de una circunferencia de radio r menor que R con centro en un punto z_0 es independiente del radio de de la circunferencia.*

Demostración. Sea D una vecindad abierta alrededor de z_0 tal que no hay más puntos singulares de V aparte de z_0 en D . Como D es abierto, existe un número $R > 0$ tal que $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z - z_0\| < R\} \subset D$. Ahora, considerando $r < R$, como no hay más puntos singulares en D además de z_0 , se puede construir una homotopía $H(s, t)$ de curvas cerradas entre $\partial B_R(z_0) = \gamma_1$ y $\partial B_r(z_0) = \gamma_2$ tal que $H(s, t) \neq z_0$, por lo que usando la Proposición 1.2.1, se tiene que

$$I(V \circ \gamma_1, 0) = I(V \circ \gamma_2, 0),$$

lo cual prueba el teorema. □

Por otro lado, hay que notar que, debido a la Proposición 1.2.1, se podría haber utilizado cualquier otra curva γ tal que $I(\gamma, z_0) = 1$. Una forma de demostrar este hecho es considerar la homotopía de curvas $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

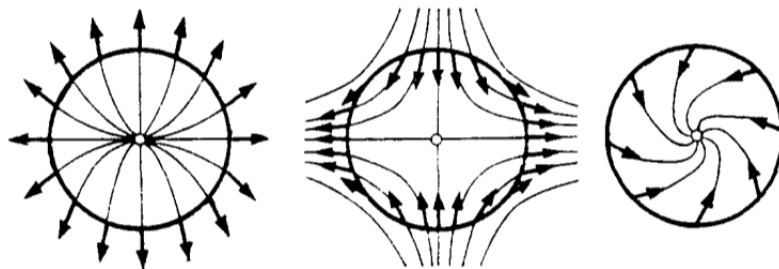
$$H(s, t) = s\gamma(t) + (1 - s)\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

Esta homotopía H expresa la combinación convexa entre la curva $\gamma(t)$ y su normalización, $\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$, por lo que, al tomar en cuenta que $I(\gamma, z_0) = 1$, entonces $\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$ es una circunferencia de radio 1 recorrida en el sentido positivo. Estas observaciones resultan del hecho de que H es una homotopía de curvas entre γ y la circunferencia unitaria, que, junto con la Proposición 1.2.1, demuestra que el Teorema 1.4.1 es válido incluso si en lugar de una circunferencia se utiliza una curva simple suficientemente pequeña.

Habiendo probado el teorema anterior, se puede formular la siguiente

Definición 1.4.1. El índice de una (y por tanto, de cualquier) circunferencia suficientemente pequeña orientada positivamente con centro en un punto singular aislado de un campo vectorial es llamado *el índice del punto singular respecto al campo*.

Ejemplo 1.4.1. El índice de los puntos singulares en el plano de tipo nodo, silla, y foco(o centro) son +1,-1 y +1, respectivamente.



Observación 1.4.1. Este ejemplo muestra claramente que es imposible saber de qué tipo es un punto singular si solamente se sabe su índice, pues los de tipo nodo y centro comparten el índice (que es 1), pero su comportamiento local es distinto, pues en la singularidad de tipo nodo todas las soluciones pasan por el punto singular, mientras que en las de tipo centro ninguna solución no trivial pasa por el punto singular.

Por otro lado, regresando por un momento a los campos vectoriales diferenciables se tiene que:

Observación 1.4.2. Un punto singular es llamado *simple* si la diferencial del campo en ese punto es no degenerada (es decir, que no tiene valores propios 0). Los puntos singulares simples de *campos vectoriales diferenciables en el plano* son nodos, sillas, focos y centros (clasificación posible debido a los valores propios de las matrices que los describen). Por tanto, el índice de un punto singular simple siempre es ± 1 .

Ahora se va a establecer un teorema que resulta bastante útil para detectar puntos singulares en el interior de curvas.

Considérese D una región conexa, acotada y simplemente conexa en el plano cuya frontera es una curva cerrada simple S . Se considera también S con la orientación inducida por D (en la que el interior de D siempre queda “a la izquierda” a medida que se recorre S).

Suponiendo ahora que un campo vectorial holomorfo $V(z)$ está definido en todo el plano, que no tiene puntos singulares en S y que solamente tiene un número finito de puntos singulares en el interior de D (lo cual implica automáticamente que son aislados). Entonces, se podrá demostrar el siguiente

Teorema 1.4.2. *El índice de la curva S respecto a V es igual a la suma de los índices de los puntos singulares que se encuentran dentro de D (respecto a V).*

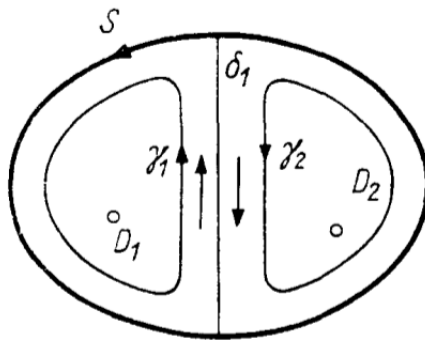
Demostración. Divídase D en una colección de subregiones D_i tales que cada una de estas subregiones contenga a lo más un punto singular y que no haya puntos singulares en su frontera. Ahora se llamará γ_i a su frontera correspondiente y se orientará de forma tal que su orientación coincida con la de S en los puntos que γ_i y S tienen en común (es decir, con D_i “siempre a la izquierda”).

Entonces por la Proposición 1.2.3 sucede que

$$I\left(\sum_i V \circ \gamma_i, 0\right) = I\left(S + \sum_j \delta_j, 0\right),$$

donde δ_j es una curva cerrada que representa la parte de la frontera de D_i que está dentro de D , sólo que recorrida de ida y vuelta, que es homotópica a la curva constante.

Pero el índice de $V \circ \gamma_i$ corresponde al índice del punto singular que está dentro de D_i , pues la curva es homotópica a un círculo pequeño alrededor de éste. \square

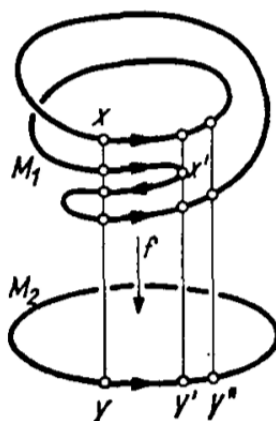


1.5. Índice de una singularidad aislada (caso multidimensional)

Dado que las curvas no alcanzan a capturar la información necesaria para comprender el comportamiento local de un campo vectorial alrededor de sus puntos singulares en dimensiones mayores, es necesario generalizar el índice de curvas presentado anteriormente.

El índice para dimensiones mayores se define utilizando el concepto de *grado de una función*, que, intuitivamente hablando, es la suma del número de puntos en la imagen inversa de un punto dado, teniendo en cuenta un signo, el cual está determinado por las orientaciones elegidas para el dominio y contradominio.

Por ejemplo, el grado de la transformación f de S^1 en S^1 descrita por la figura siguiente, en el punto y , es 2, debido a que la suma de preimágenes, teniendo en cuenta el signo resultante de elegir la misma orientación para el dominio y contradominio, es $1+1-1+1=2$.



Se van a usar las siguientes definiciones básicas a lo largo de este trabajo. Se recomienda revisar [4],[12] y [8] para mayor detalle:

Definición 1.5.1. Una *variedad topológica* M de *dimensión* n es un espacio topológico de Hausdorff, 2-numerable, que es localmente euclidiano de dimensión n , es decir para cada $p \in M$ existen U una vecindad abierta de p y $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo. Al homeomorfismo φ se le llama *carta alrededor de p* . A un conjunto de cartas tales que sus dominios cubran a todo M se le llama *atlas de M* . Sean φ, ψ dos cartas alrededor de un punto p . A la función $\psi \circ \varphi^{-1}$ se le llama *función de transición*.

En el contexto de este escrito:

Definición 1.5.2. Una *variedad k -diferenciable* M de *dimensión* n , o C^k -*variedad*, es una variedad topológica de dimensión n tal que todas las funciones de transición de cualquier atlas para M son de clase C^k .

Posteriormente se necesitará:

Definición 1.5.3. Una *variedad k -diferenciable M de dimensión n con frontera* es un espacio topológico de Hausdorff, 2-numerable, que es localmente homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{H}^n , $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$, y que además cumple que todas las funciones de transición para cualesquiera cartas en cualquier atlas para M son de clase C^k .

Para poder establecer la definición de grado, considérese una función diferenciable entre variedades de la misma dimensión $f : M_1 \rightarrow M_2$.

Definición 1.5.4. Un punto x en el el dominio M_1 es llamado *punto regular* si la transformación lineal $D_x f : TM_1 \rightarrow TM_2$ es no degenerada.

Ejemplo. En la figura anterior, x es un punto regular, mientras que x' no lo es.

Definición 1.5.5. El *signo de una función diferenciable f en un punto regular x* , denotado por $sgn_x f$, es $+1$ si la transformación $Df_x : TM_1 \rightarrow TM_2$ manda la orientación elegida para TM_1 en la orientación elegida para TM_2 , es -1 en otro caso.

Ahora considérese un punto y en M_2 :

Definición 1.5.6. Un punto y en el contradominio M_2 es llamado *valor regular* si todos los puntos en su preimagen bajo f son regulares.

Si además se supone que tanto M_1 como M_2 son compactas y conexas, entonces se tienen la siguiente definición y el siguiente teorema:

Definición 1.5.7. El grado de una función f en un valor regular y denotado por $\deg_y f$, con las suposiciones anteriores, es la suma de los signos de todos los puntos en su preimagen, es decir:

$$\deg_y f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}_x f$$

Teorema. Sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ una función diferenciable entre variedades compactas y conexas. Entonces:

1. Existen valores regulares.
2. El número de puntos en la preimagen de un valor regular es finito.
3. El número de puntos en la preimagen de un valor regular es independiente del valor regular.

La demostración de este teorema es complicada e involucra varios resultados previos, que se encaminan fuera del enfoque de este escrito. Para mayor información véanse [4], [8] y [12].

Observación. Respecto al punto 1, de hecho casi todos los puntos en M_2 son puntos regulares y el conjunto de puntos singulares es de medida 0, debido al teorema de Sard (ver [4], [8] y [12]). Por otro lado, es de notar que la suposición de que ambas variedades sean compactas es esencial, no sólo para el punto 2, sino también para el punto 3. Por último, el número de preimágenes de distintos valores regulares puede ser distinta, por ejemplo, en la figura anterior, el punto y tiene 4 puntos en su preimagen y el punto y'' tiene solamente 2; al contrario del grado, que no depende del valor regular elegido.

Gracias al teorema anterior, es posible definir el grado de una función:

Definición 1.5.8. El grado de una función diferenciable entre dos variedades compactas se define como el grado de la función en cualquiera de sus valores regulares.

Una vez definido el grado de una función es posible definir el índice de un campo vectorial en un punto de la siguiente manera:

Definición 1.5.9. Sea un campo vectorial diferenciable con puntos singulares aislados $V(z) = (V_1(z), \dots, V_n(z))$ definido en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. El índice de $V(x)$ en $p \in U$, denotado por $\operatorname{ind}_p(V)$, es el grado de la función $V(x)/\|V(x)\| : \mathbb{S}_r^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, donde $\|V(x)\|$ denota la norma usual de \mathbb{R}^n , y $\mathbb{S}_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| = r\}$ con r suficientemente pequeño.

Observación. En \mathbb{S}_r^{n-1} y en \mathbb{S}^{n-1} se utiliza la orientación definida por un vector normal a la esfera en cuestión apuntando hacia afuera del interior de la esfera.

1.6. El Teorema de Poincaré-Hopf

Ahora que se está familiarizado en cierto modo con el índice, se puede establecer un resultado clásico importante. Para ello, obsérvese que la cantidad de ceros aislados de un campo vectorial definido en una variedad compacta siempre es finita. Antes de enunciar el teorema, se necesita una definición.

Definición 1.6.1. Sea M una variedad orientada con frontera de dimensión n y sea V un campo vectorial definido en M . Sea $p \in \partial M$ y sea $\varphi : U \subset M$ una carta alrededor de p tal que $\varphi(p) = 0$ y que $\varphi(\partial M) \subset \partial \mathbb{H}^n$. Se dice que V apunta hacia afuera en p si $W = (D_p\varphi)V(p) = (w_1, \dots, w_n)$ satisface que $w_n < 0$.

De ahora en adelante se denotará por D_pV a la diferencial del campo V en el punto p y por TM_p al espacio tangente a M en el punto p .

Teorema. (Poincaré-Hopf) Sea M una variedad diferenciable compacta orientable de dimensión m . Sea $V(x)$ un campo vectorial diferenciable con ceros aislados $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$. Si M tiene frontera, entonces se pide que V apunte siempre hacia afuera a lo largo de la frontera de M . Entonces:

$$\sum_i \text{ind}_{z_i}(V) = \chi(M) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \dim(H_j(M))$$

donde $\chi(M)$ denota a la característica de Euler de M , y $H_i(M)$ denota al i -ésimo grupo de homología de M .

Este teorema es muy importante porque relaciona de forma excelente dos conceptos: por un lado, la característica de Euler, el cual es un concepto puramente topológico, y por el otro, el índice, que es un concepto completamente analítico.

Para empezar, hay que poder definir el índice de un campo vectorial en una variedad diferenciable, puesto que hasta ahora, solamente se ha definido para abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ (la definición para campos en \mathbb{C}^n es idéntica). Por tanto, lo siguiente que se tiene que probar es que el índice de un campo vectorial respecto a un punto es invariante bajo difeomorfismos.

Antes de proseguir, es necesario definir el concepto de *isotopía*, que es un tipo especial de homotopía.

Definición 1.6.2. Sean M y N dos variedades diferenciales. Sea $h : [0, 1] \times M \rightarrow N$ una función diferenciable. Si cada una de las funciones

$$h_t : M \rightarrow N, x \mapsto h(t, x)$$

es un encaje (para ver la definición de encaje, véase[4]), se dice que h es una *isotopía* entre h_0 y h_1 , y que h_0 y h_1 son *diferenciabilmente isotópicos*.

Para probar el lema siguiente en el que se afirma que todo difeomorfismo de \mathbb{R}^n que preserva la orientación es diferenciabilmente isotópico a la identidad, es necesario el lema de Hadamard:

Lema 1.6.1. (De Hadamard) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ una vecindad abierta de 0 y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. Entonces existen funciones diferenciables $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$$

Demostración. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 (D_{(tx)} f)(x) dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{tx}(x) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{tx} dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{tx} dt \end{aligned}$$

Finalmente, se define

$$f_i := \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{tx} dt$$

con lo que se tiene el resultado. □

Lema 1.6.2. Sea f un difeomorfismo de \mathbb{R}^n que preserva la orientación. Entonces f es diferenciabilmente isotópico a la función identidad.

Demostración. Se puede asumir que $f(0)=0$. Ya que la derivada en 0 puede ser definida como

$$D_0 f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t},$$

es natural definir una isotopía $F : \mathbb{R}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por:

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & 0 < t \leq 1, \\ D_0 f(x) & t = 0 \end{cases}.$$

Para probar que F es diferenciable, se usa el Lema de Hadamard (ver el Lema 1.6.1) para escribir a f de la forma

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_m g_m(x)$$

con funciones g_i diferenciables adecuadas.

De esta manera,

$$F(x, t) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{tx_1 g_1(tx) + \dots + tx_m g_m(tx)}{t} = x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx)$$

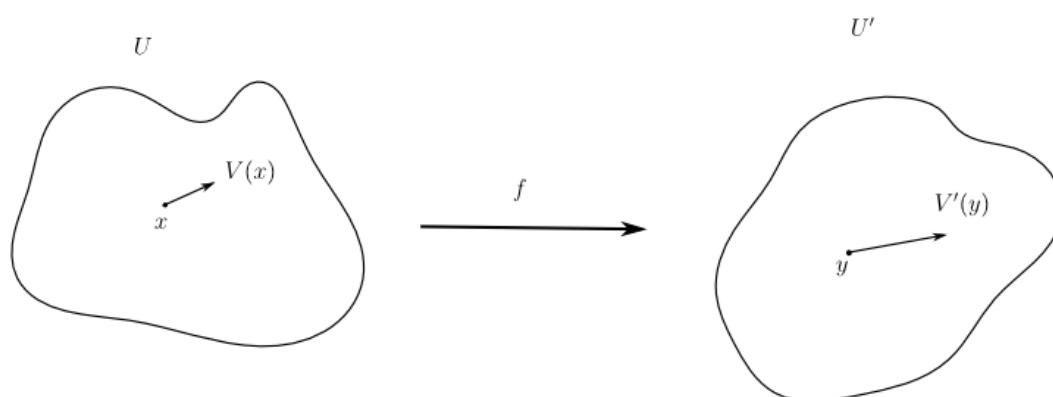
lo que muestra que F es una isotopía, y como $D_0 f(x)$ es un isomorfismo lineal, es claramente isotópico a la identidad, lo cual termina la demostración. \square

El siguiente resultado termina de expresar la invarianza del índice bajo difeomorfismos. Esta invarianza permitirá, como se dijo antes, definir el índice de puntos singulares que pertenecen a campos vectoriales diferenciables en variedades diferenciables (no singulares).

Lema 1.6.3. *Considérese $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo, $V(x)$ un campo vectorial suave definido en U y $V'(x)$ un campo vectorial suave definido en U' . Sea x_0 un punto singular de V . Además, si V y V' se corresponden de la siguiente manera:*

$$V'(y) = D_x f(V(x)), y = f(x)$$

Entonces, $ind_x(V) = ind_y(V')$.



Demostración. Asíumase que $f(x_0) = 0$ y que U es una región convexa (pues hay que recordar que el índice no depende de la vecindad que se escoja). Si f preserva la orientación, entonces, usando directamente el Lema 1.6.2, se puede construir una familia uniparamétrica de difeomorfismos

$$f_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

con $f_0 = id$, $f_1 = f$ y $f_t(0) = 0$ para toda t . Denotando por V_t a los campos vectoriales definidos por $V_t(y) = D_x f_t(V(x)), y = f_t(x)$, cada uno correspondiente a nuestro campo original V definido en U .

Todos estos campos vectoriales están bien definidos y son distintos de cero en una pequeña bola centrada en 0. Entonces el índice de V_0 en 0 es igual al de V_1 en 0. La demostración para el caso en que el difeomorfismo cambia la orientación es análoga, solamente hay que conjugar un difeomorfismo que preserva la orientación con un reflexión. \square

Observación. Ahora ya es posible definir el índice de un campo vectorial en una variedad diferenciable (puesto que ya se ha demostrado que el índice es invariante bajo difeomorfismos) de la manera siguiente:

Definición 1.6.3. Considérese que tenemos una variedad diferenciable M de dimensión m y un campo vectorial V definido en M . Si $f : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ es un carta alrededor del punto x_0 , se define el índice de V en x_0 , denotado por $ind_{x_0}(V)$, como $ind_{f(x_0)}(V')$, con $V'(y) = D_x f(V(x)), y = f(x)$.

Para el siguiente lema, considérense M y N dos variedades diferenciables orientables sin frontera ambas de dimensión n y $f : M \rightarrow N$. Si M es compacta y N conexa, entonces el grado de f está bien definido.

Lema 1.6.4. *Supóngase que M es la frontera de una variedad compacta orientable X y que M está orientada como la frontera de X . Si es posible extender una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ a una función $F : X \rightarrow N$, entonces el grado de f es cero.*

Demostración. Dado que N es una variedad de dimensión n , al considerar, en un primer caso, que y es un valor regular de F , así como de $f = F|_M$, entonces, como y es un valor regular y la variedad $\{y\}$ tiene codimensión n en N , entonces, al utilizar el teorema del rango constante (véase [4]), $F^{-1}(y)$ es una 1-variedad, puesto que la dimensión de X es $n+1$. Por el teorema de clasificación de 1-variedades (apéndice de [12]), $F^{-1}(y)$ es la unión de círculos y curvas. Sin embargo, como $\{y\}$ también es valor regular de f , entonces quiere decir que la frontera (formada por dos puntos que se llamarán “**a**” y “**b**”) de cada una de estas curvas está contenida en $\partial X = M$. Sea $A \subset F^{-1}(y)$ una de estas curvas. Las orientaciones de X y de N determinan una orientación para A de la siguiente manera: dada $x \in A$, sea (v_1, \dots, v_{n+1}) una base orientada positivamente para $T_x M$ tal que v_1 es tangente a A . Entonces v_1 determina una orientación para A si y sólo si $D_x F$ manda (v_2, \dots, v_{n+1}) a una base orientada positivamente para $T_y N$. Denotando por $v_1(x)$ al campo vectorial orientado positivamente, es claro que $v_1(x)$ es diferenciable y que apunta hacia afuera en un punto de la frontera (supóngase sin pérdida de generalidad que es **b**) y apunta hacia adentro en el otro punto de la frontera (en este caso, **a**). Se sigue que

$$\text{sgn}(D_a f) = -1, \quad \text{sgn}(D_b f) = +1;$$

Por lo que al sumar sobre todas las curvas, queda que $\text{deg}(f) = 0$.

De forma más general, considérese el caso en que y_0 es un valor regular de f , pero no de F . Como la función $\text{deg}(f)$ es localmente constante, entonces, como consecuencia del Teorema de Sard (ver [4], [12] y [8]), en cualquier vecindad U de y_0 existe un punto y tal que y es valor regular tanto de f como de F , y se aplica el razonamiento anterior. \square

Para la demostración del teorema de Poincaré-Hopf se requiere introducir el concepto de mapeo de Gauss. En particular en el Lema 1.6.5 se establecerá una relación entre el grado de dicho mapeo y la suma de los índices de un campo vectorial diferenciable que apunta hacia afuera a lo largo de la frontera de una variedad M compacta y con frontera.

Definición 1.6.4. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una n -variedad. Sea $\partial M \subset \mathbb{R}^n$ su frontera respecto a la topología usual de \mathbb{R}^n . Se define el *mapeo de Gauss* como el mapeo

$$g : \partial M \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$$

que asigna a cada punto $x \in \partial M$ el vector normal unitario *hacia afuera*.

Lema 1.6.5. (*Hopf*) Sean V un campo vectorial definido en una variedad diferenciable $M \subset \mathbb{R}^m$ de dimensión m con frontera y con ceros aislados. Si además V siempre apunta hacia fuera de M a lo largo de su frontera, entonces la suma de los índices del campo en sus ceros es igual al grado topológico del mapeo de Gauss $g : \partial M \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$.

Demostración. Quitando una pequeña bola de radio ε alrededor de cada cero, se obtiene una nueva variedad con frontera M' (de dimensión m). La función $\tilde{V}(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|}$ manda esta m -variedad en \mathbb{S}^{m-1} . Por tanto, la suma de los grados de \tilde{V} en las componentes conexas de su frontera es cero, por el Lema 1.6.4. Pero \tilde{V} restringida a ∂M es homotópica a g , y \tilde{V} restringida a las otras componentes conexas de $\partial M'$ es $-\sum_i \text{ind}_{z_i}(V)$, pues es la misma función que se utiliza para calcular el índice, pero la esfera tiene la orientación contraria, por lo que el índice también cambia de signo. Entonces se tiene que

$$\text{deg}(g) - \sum_i \text{ind}_{z_i}(V) = 0,$$

precisamente porque el hecho de que \tilde{V} restringida a ∂M es homotópica a g implica que $\text{deg}(\tilde{V}) = \text{deg}(g)$. \square

Observación 1.6.1. Debido al teorema de Gauss-Bonnet (ver [8]) el grado de g se puede expresar como un múltiplo de la integral de la curvatura Gaussiana a lo largo de ∂M y es igual a la característica de Euler de M . Para m impar es igual a la mitad de la característica de Euler.

Observación. En principio podría pensarse que al demostrar la observación se ha terminado la demostración del teorema. Sin embargo, hay que notar las hipótesis acerca de M en el Lema 1.6.5. Una m -variedad en \mathbb{R}^m es un caso demasiado particular. Por consiguiente, si M no es una m -variedad en \mathbb{R}^m , se va a construir una variedad N de dimensión m tal que $M \subset N$ y se va a aplicar el Lema 1.6.5 a N .

Es natural querer calcular el índice en términos de la derivada del campo en sus ceros. Considérese un campo vectorial V definido en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 1.6.5. Un campo vectorial V es degenerado en un punto p si la transformación lineal $D_p V$ es singular.

Lema 1.6.6. *El índice de un campo vectorial V en un punto singular z no degenerado es $+1$ ó -1 , dependiendo si el determinante de $D_z V$ es positivo o negativo.*

Demostración. Dado que $V : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial diferenciable, si se está trabajando con un punto singular z no degenerado, entonces, utilizando el

teorema de la función inversa, se tiene que existe una vecindad U_0 de z en la que V es un difeomorfismo. Considerando la restricción de V a U_0 , V es un difeomorfismo que manda U_0 a un conjunto convexo. Como es usual, se puede suponer que $V(z)=0$. Si V preserva la orientación, se tiene que $V|_{U_0}$ es isotópico a la identidad (por el Lema 1.6.2), por lo que se podría deformar sin introducir nuevos ceros (por el Lema 2.3.6). De esta manera, el índice en este caso es $+1$. Análogamente, si V cambia la orientación, su índice es -1 . \square

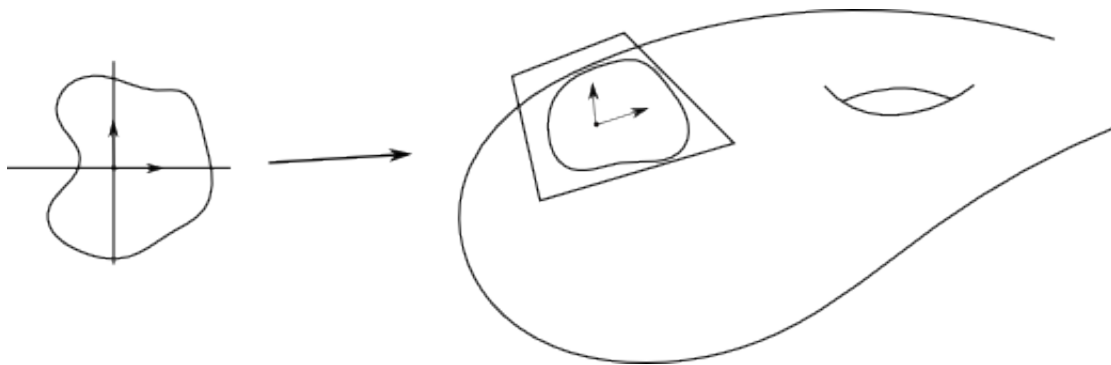
Para comprender mejor el siguiente lema, se necesitará ahora que la variedad M esté metida dentro de algún \mathbb{R}^k (se puede obtener un encaje mediante el Teorema del Encaje de Whitney (véase [4])).

Lema 1.6.7. *Sea $z \in M$ un punto singular de V . La imagen de la función $D_z V$ está contenida en TM_z . Si esta función lineal es no singular, entonces z es punto singular aislado de V y además, tiene índice $+1$ ó -1 , dependiendo si el determinante de $D_z V$ es positivo o negativo.*

Demostración. Sea $h : U \rightarrow M$ una parametrización alrededor de z . Sea e^i el i -ésimo vector de la base usual de \mathbb{R}^n y sea

$$t^i = D_u h(e^i) = \frac{\partial h}{\partial u_i}.$$

Como h es una parametrización, los vectores t^i forman una base de $TM_{h(u)}$.



Ahora hay que ver qué sucede con los vectores t^i cuando se les aplica la transformación $D_{h(u)} V$. Obsérvese que

$$D_{h(u)} V(t^i) = D_{h(u)} V(D_u h(e^i)) = D_u (V \circ h)(e^i) = \frac{\partial V(h(u))}{\partial u_i} \Big|_0.$$

Sea $v = \sum_i v_i e^i$ el campo vectorial definido en U que corresponde a V mediante h . Por definición $v(x) = D_x h^{-1}(V(h(x)))$, por lo que

$$V(h(u)) = D_u h(v(u)) = \sum_i v_i t^i$$

de aquí que

$$\frac{\partial V(h(u))}{\partial u_i} = \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_i} \right) t^i + \sum_i v_i \left(\frac{\partial t^i}{\partial u_i} \right);$$

ahora, al evaluar en el punto $h^{-1}(z)$, como z es un cero, $h^{-1}(z)$ también lo es pero del campo v , puesto que h , al ser una parametrización, es un difeomorfismo. Entonces, se tiene que $v_i = 0$ para toda i , de donde se sigue que

$$D_z(t^i) = \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_i} \right) t^i.$$

Esta última igualdad muestra que $D_x V$ tiene imagen contenida en TM_x , y el determinante de esta transformación lineal queda explícitamente calculado. Para finalizar, se utiliza el Lema anterior y se sigue el resultado. \square

Ahora se considera una variedad $M \subset \mathbb{R}^k$ compacta sin frontera. Sea $N \subset \mathbb{R}^k$ una vecindad cerrada alrededor de M (es decir, un conjunto cerrado tal que $\text{int}(N) \supset M$) tal que N también es una variedad diferenciable con frontera, pero de dimensión k , y que la función

$$r : N \rightarrow M,$$

que manda a x al punto más cercano a x en M , es diferenciable y está bien definida.

Lema 1.6.8. *Para cualquier campo vectorial V definido en M con ceros no degenerados, la suma $\sum_i \text{ind}_{z_i}(V)$ es igual al grado topológico del mapeo de Gauss*

$$g : \partial N \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$$

Demostración. Considérese la función $\varphi(x) = \|x - r(x)\|^2$, donde r es la función definida anteriormente. Se tiene que $M = \varphi^{-1}(0)$.

Al calcular, se tiene que

$$\text{grad}\varphi = \text{grad}((x - r(x)) \cdot (x - r(x)))$$

$$= 2(\text{Id} - D_x r)(x - r(x)) = 2((x - r(x)) - (D_x r)(x - r(x))),$$

pero hay observar que la función r se mantiene constante si varía en la dirección $x-r(x)$, por lo que, finalmente,

$$\text{grad}\varphi = 2(x - r(x))$$

Así, el vector normal unitario que apunta hacia afuera para un punto x en ∂N es $\frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|}$. Ahora se puede extender el campo V a un campo vectorial W para todo N , de la siguiente manera:

Sea

$$W(x) = x - r(x) + V(r(x)).$$

Se tiene que $W(x)$ apunta hacia afuera a lo largo de M pues

$$\frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} \cdot W(x) = \frac{(x - r(x)) \cdot (x - r(x)) + V(r(x)) \cdot (x - r(x))}{\|\text{grad}\varphi\|} = \|\text{grad}\varphi\| > 0.$$

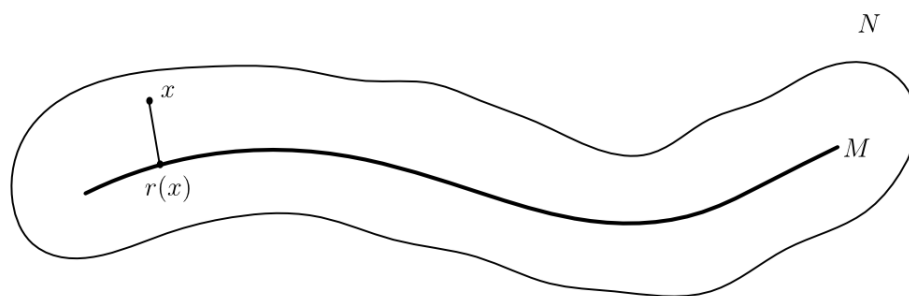
Nótese que los puntos singulares de W son exactamente los mismos que los de V , porque los sumandos de W son ortogonales entre sí.

Ahora, al calcular la derivada de W en uno de sus ceros z :

$$D_z W = \text{Id} - D_z r + D_z V \circ D_z r$$

por lo que se tiene que si $h \in TM_x$, entonces $D_z W(h) = D_z V(h)$, pues $r(x)=x$ si $x \in M$. Por otro lado, si $h \perp TM_x$, entonces $D_z W(h) = h$, pues $r(x)$ es constante si se varía en la dirección de h , con lo que se anulan los últimos términos de $D_z W$.

Por tanto, se sigue que el índice de los ceros de W es igual al índice de los ceros de V , y al usar el Lema 1.6.5 (aplicado a N) se tiene que $\sum_i \text{ind}_{z_i}(V)$ es el grado topológico del mapeo de Gauss a lo largo de ∂N sin importar el campo V , lo que finaliza la prueba. \square

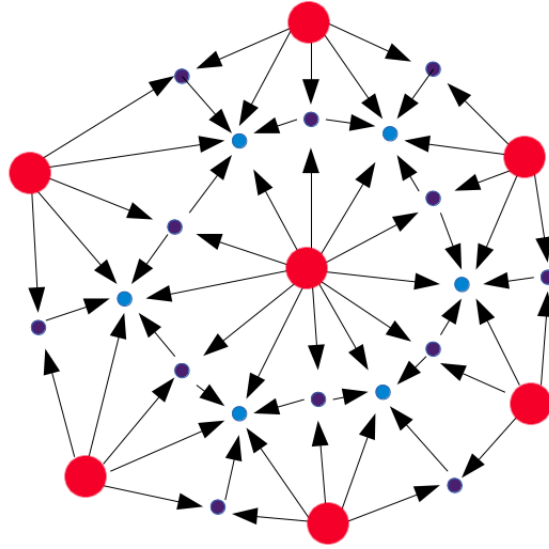


Para realmente completar la prueba del teorema, es necesario realizar lo siguiente:

1. Probar que el grado topológico del mapeo de Gauss a lo largo de ∂N es efectivamente $\chi(M)$.
2. Probar que el teorema es válido incluso si se tienen ceros degenerados.
3. Probar el teorema para variedades con frontera.

Para el paso 1, es suficiente encontrar un solo campo vectorial suave en M que cumpla que la suma de los índices de sus puntos singulares equivale a la característica de Euler (pues se vio en la prueba que no importa el campo vectorial elegido). De acuerdo con Marston Morse (véase [12, 11]), siempre es posible encontrar una función real cuyo gradiente es un campo vectorial no degenerado, y más aún, la suma de los índices de este campo gradiente es la característica de Euler de M . La prueba detallada se encuentra en [11]. Sin embargo, se dará una idea para la prueba en el caso de dimensión 2.

Sea $\{T_i\}$ una triangulación para M . Es posible crear un campo vectorial con un nodo repulsor en cada vértice de la triangulación; un único punto silla sobre cada arista y un único nodo atractor en el interior de cada triángulo. La suma de los índices de este campo vectorial es claramente la característica de Euler. A continuación se muestra un diagrama en el cual los puntos rojos representan los vértices de la triangulación, los puntos morados representan los puntos silla que se colocan en medio de cada arista y los puntos azules representan los nodos atractores que se colocan en el interior de cada triángulo.



Para el paso 2, considérese un campo vectorial definido en un conjunto abierto U con un cero aislado z . Considérese una función diferenciable $\lambda : U \rightarrow [0, 1]$ que sea constante 1 en una vecindad $W_0 \subset U$ de z , que sea positiva en una vecindad W_1 tal que $W_0 \subset W_1 \subset U$ y que sea cero en $U \setminus W_1$. Ahora considérese el nuevo campo $\tilde{V}(x) = V(x) - \lambda(x)a$, donde a es un valor regular de V suficientemente pequeño como para que los ceros de \tilde{V} no sean degenerados. La suma de los índices de los ceros en W_1 equivale al índice de V en z , porque los campos V y \tilde{V} coinciden en la frontera de W_1 . Más generalmente considérese un campo vectorial V en una vecindad compacta M . Repitiendo el razonamiento anterior para cada cero degenerado de V , es claro que se puede reemplazar V por un campo que no tiene ceros degenerados, y procede lo que ya se ha demostrado.

Para el último paso, solamente hay que tener cuidado en la definición de N (pues es posible que quede una variedad con frontera con un orden de diferenciabilidad finito), sin embargo, el razonamiento es similar.

2. El número de Milnor

Ahora se presenta un segundo invariante, el número de Milnor, que es una generalización del índice. También conocido como la multiplicidad local en un punto de una función, el número de Milnor permite “calcular” cuántos puntos han sido “pegados” en un punto singular por una función holomorfa. Así mismo, se definirá el número de Milnor para gérmenes de campos vectoriales $V : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$. Uno de los resultados más importantes de este capítulo es la coincidencia, para campos vectoriales genéricos, de la multiplicidad geométrica ($ind_p(V)$) y la multiplicidad algebraica (el número de Milnor de V en p , $\mu(V, p)$).

2.1. Definición e interpretación

Definición 2.1.1. Sean f, g dos funciones holomorfas $f : M \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $g : N \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$; $p \in M \cap N$, tales que existe una vecindad abierta $W \subset \mathbb{C}^n$, tal que $p \in W$ y que $f \equiv g$ en W , en cuyo caso se dice que f y g representan al mismo germen de función holomorfa. Representar al mismo germen es claramente una relación de equivalencia, y sus clases de equivalencia se les llama *gérmenes*.

Se denotará por $O_{n,p}$ al anillo local de gérmenes de funciones holomorfas en el punto $p \in U \subset \mathbb{C}^n$, con U un conjunto abierto. La notación usual para las funciones definidas en una vecindad de un punto p es $g : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}$.

De ahora en adelante, se denotará por m al ideal maximal de anillo $O_{n,0}$, $m = \{f : f(0) = 0\}$. Como se demostrará en la Proposición 2.1.1 m es el ideal generado por las funciones z_1, \dots, z_n . Así mismo, se denotará por I_f al ideal gradiente de f :

$$I_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle.$$

Finalmente,

Definición 2.1.2. El número de Milnor $\mu = \mu(f, p)$ asociado al germen de una función f en el punto se define como la dimensión del álgebra local $\frac{O_{n,p}}{I_f}$:

$$\mu_V(p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_{n,p}}{I_f}$$

Ejemplo 2.1.1. Considerando $V : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$V(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$$

como solamente se tiene una coordenada, sucede que $I = \{(z^n)f(z) | f(z) \in O_{n,p}\}$, por lo que al considerar el polinomio de Taylor de cada función en $O_{n,p}$, y luego considerar

$$\mu = \mu_V(p) = \dim_{\mathbb{C}}(O_{n,p}/I)$$

solamente quedan n funciones distintas (a saber, las funciones que localmente se comportan como un múltiplo de $1, z, z^2, z^3, z^4, \dots, z^{n-1}$), esto es, que $\mu = n$.

Se puede facilitar el cálculo del número de Milnor con el método descrito en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.1.2. Sea $f(z, w) = z^3 + 5w^4$. El ideal gradiente es el ideal generado por las funciones z^2 y w^3 , es decir $I_f = \langle z^2, w^3 \rangle$. Un conjunto de generadores independientes para el álgebra local $\frac{O_{n,p}}{I_f}$ es, en este caso, $\{1, z, w, w^2, zw, zw^2\}$, por lo que la dimensión del álgebra local es 6, es decir, $\mu = 6$.

De manera análoga se puede definir el número de Milnor para gérmenes de campos vectoriales. Considérese un campo vectorial holomorfo $V(z) = (V_1(z), \dots, V_n(z))$ definido en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Además $I = [V_1(z), \dots, V_n(z)]$ el ideal generado por las componentes de V .

Definición 2.1.3. Al número

$$\mu = \mu_V(p) = \dim_{\mathbb{C}}(O_{n,p}/I)$$

se le conoce como el número de Milnor de V en p .

Tratando de dar alguna idea del por qué de esta definición, primero hay que obtener alguna información acerca de las funciones que componen a I , pues de esta manera se sabrá cómo se ven las clases que componen a $O_{n,p}/I$.

Ya se sabe que $I = [V_1(z), \dots, V_n(z)]$ es el ideal generado por las componentes de V , esto es, I es el ideal más pequeño que tiene a las componentes de V ; en otras palabras, si se tiene que $I' \subset O_{n,p}$ es un ideal tal que $V_i(z) \in I' \forall i$, entonces $I \subset I'$.

Proposición 2.1.1. Sea $\mathfrak{J} = \{f \in O_{n,p} \mid f(z) = \sum_{i=1}^n V_i(z) \cdot g_i(z), g_i(z) \in O_{n,p}\}$ entonces se tiene que

$$I = \mathfrak{J}$$

La demostración se basa en el hecho de que \mathfrak{J} es un ideal, lo cual es claro.

Demostración. Al escoger $g_i(z) = 1$ para i adecuada, sucede que $V_i(z) \in \mathfrak{J} \forall i$, por lo que al ser $I = [V_1(z), \dots, V_n(z)]$, por la propiedad de que es el ideal generado, pasa que $I \subset \mathfrak{J}$.

Ahora, se observa que $\forall f \in \mathfrak{J}, f = g, g \in I$, usando solamente las operaciones permitidas en un ideal. De esta manera, $\mathfrak{J} \subset I$. \square

Entonces al estar trabajando con el anillo $O_{n,p}/I$, en realidad se está trabajando con $O_{n,p}$ pero considerando todas las funciones en \mathfrak{J} como la función 0. Ahora, si tiene en cuenta que se está trabajando localmente, entonces es prioritario el comportamiento local de las funciones, es decir su polinomio de Taylor (en particular, el término de multiplicidad más pequeña, pues es el que dicta el comportamiento local).

Dada $f \in \mathfrak{J}$, se tiene que $f(z) = \sum_{i=1}^n V_i(z) \cdot g_i(z), g_i(z) \in O_{n,p}$. Entonces, al pensar en la serie de Taylor de cada una de las funciones que componen a f , es posible obtener la serie de Taylor del producto de dos funciones analíticas “multiplicando polinomios infinitos”, pues la serie converge uniformemente. Por tanto, cuando se considera

$$\mu = \mu_V(p) = \dim_{\mathbb{C}}(O_{n,p}/I)$$

en realidad se están contando los términos de la serie de Taylor de V que se anularon, que es lo mismo que el número de derivadas que se hacen cero.

Con esta información, se puede dar una interpretación geométrica del número de Milnor (citando a [3]):

“El número de Milnor dice cuál es la multiplicidad local de V en p , es decir, dice cuántos puntos han sido “pegados” en p por V , pues al perturbar de forma adecuada el campo vectorial (o la función) un punto de multiplicidad n se separaría en exactamente n puntos, cada uno de multiplicidad 1.

Por otra parte, para dar ahora una interpretación algebraica del número de Milnor, se puede pensar que en lugar de tratar de describir un objeto geométrico mediante las herramientas de la topología diferencial, se tratara de describirlo mediante las

funciones que se pueden definir en él, por lo que una elección natural sería la de pensar en el álgebra de funciones suaves (u holomorfas) definidas en el objeto. Por ejemplo, si se estuviera trabajando con una variedad diferenciable, a una subvariedad le correspondería un ideal dentro de esta álgebra (formado por las funciones que se anulan en la subvariedad). El álgebra de funciones en la subvariedad es obtenida a partir del álgebra original (la de toda la variedad) mediante el cociente por este ideal. Los puntos de la variedad son sus subvariedades mínimas, y por eso les corresponden los ideales maximales, etcétera. Este método es especialmente útil cuando se tienen casos degenerados, pues el cálculo de invariantes geométricos es más difícil”.

2.2. Algunos ejemplos

Se verán ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2.1. Ahora considérese $V : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, dado por

$$V(z, w) = (z, w)$$

Por el Lema de Hadamard (ver el Lema 1.6.1) se tiene que es posible escribir cualquier función f en $O_{n,p}$ ($p = (0, 0)$) de la siguiente manera:

$$f(z, w) = f(0, 0) + z(g(z, w)) + w(h(z, w))$$

(donde g y h son funciones holomorfas en p) de donde se concluye que solamente se tiene un grado de libertad (el de $f(p)$, es decir, el de las constantes), por lo que $\mu = 1$.

Más generalmente,

Ejemplo 2.2.2. Considérese $V : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, dado por

$$V \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

con $A \in GL(2, \mathbb{C})$.

Dado que A es invertible, se tiene que $\mathfrak{J} = \langle az + bw, cz, dw \rangle = \langle z, w \rangle$, por lo que, utilizando el ejemplo anterior, $\mu = 1$.

2.3. Propiedades del número de Milnor

El número de Milnor tiene las siguientes propiedades:

Proposición 2.3.1. *Sea $V : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, p)$, $V(z) = (V_1(z), \dots, V_n(z))$, un campo vectorial holomorfo. Entonces $\mu = 0 \Leftrightarrow V(p) \neq 0$.*

Demostración. Supóngase que $V(p) \neq 0$ y $f \in O_{n,p}$. Como $V(p) \neq 0$, existe i tal que $V_i(p) \neq 0$, por lo que la función $\frac{f(p)}{V_i(p)}$ es holomorfa en p . Considerando $V_i(p) \frac{f(p)}{V_i(p)}$, se tiene que $f \in A$ (A como en la Proposición 2.1.1), de donde se sigue que $\mu = 0$.

Por otro lado, si $\mu = 0$, se tiene que $\forall f \in O_{n,p}, f \in \mathfrak{J}$. Considérese una función f tal que $f(p) \neq 0$. Como $f \in A$, entonces $f(z) = \sum_{i=1}^n V_i(z) \cdot g_i(z), g_i(z) \in O_{n,p}$. Sin embargo, si se supone que $V_i(p) = 0, \forall i$, es imposible que $f(p) \neq 0$. \square

Para probar las siguientes propiedades del número de Milnor, se necesita el siguiente:

Lema 2.3.1. *Sea V un campo con número de Milnor μ . Entonces el producto de cualesquiera μ funciones, las cuales valen 0 en 0 , está en $I = [V_1(z), \dots, V_n(z)]$.*

Demostración. Para el producto $\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_\mu$ sean los $\mu + 1$ gérmenes $1, \varphi_1, \varphi_1 \cdot \varphi_2, \dots, \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \dots \cdot \varphi_\mu$. Estos gérmenes son linealmente dependientes en $O_{n,p}/I$, pues la dimensión de $O_{n,p}/I$ es μ (el número de Milnor de V).

Por tanto, existe una combinación lineal no trivial

$$c_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_1 \cdot \varphi_2 + \dots + c_\mu\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_\mu$$

que está en I , pues es linealmente dependiente al estar trabajando en $O_{n,p}/I$.

Sea c_r el primer coeficiente distinto de 0; entonces

$$\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_r (c_r + c_{r+1}\varphi_{r+1} + \dots + c_\mu\varphi_{r+1} \cdot \dots \cdot \varphi_\mu) \in I,$$

pero es posible dividir entre el germen que está dentro del paréntesis (pues $c_r \neq 0$ y sólo interesa el comportamiento local).

De esta manera, $\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_r \in I$, y por tanto, $\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_\mu$ también. \square

Definición 2.3.1. Se dice que dos campos vectoriales holomorfos $V_1(z)$ y $V_2(z)$ son algebraicamente equivalentes si existe una familia funciones lineales $A(z) \in GL(n, \mathbb{C})$ que depende de $z \in \mathbb{C}^n$ de manera holomorfa y que

$$V_1(z) = A(z)V_2(z)$$

Proposición 2.3.2. Si V y \tilde{V} son dos campos algebraicamente equivalentes, entonces sus números de Milnor coinciden.

Demostración. Dado que V y \tilde{V} son dos campos algebraicamente equivalentes, como $A(z)$ (como en la definición de equivalencia) es invertible, los ideales I e \tilde{I} coinciden. \square

Proposición 2.3.3. Supóngase que V es un campo vectorial con número de Milnor μ y que un campo \tilde{V} difiere de V por términos de orden mayor o igual a $\mu + 1$. Entonces V y \tilde{V} son algebraicamente equivalentes.

Demostración. Sea ψ un germen en 0 de orden $\mu + 1$. Por definición de orden, ψ es el producto de $\mu + 1$ funciones. Por tanto, es cierto que $\psi \in I$, como consecuencia del Lema 2.3.1. De esta manera, $\psi = \sum_i V_i f_i$ usando la caracterización de I de la Proposición 2.1.1. En particular, si $\phi = V - \tilde{V}$, entonces cada coordenada de ϕ es una función de orden $\mu + 1$ (por hipótesis sobre \tilde{V}). Consecuentemente, es posible expresar cada coordenada de ϕ en la forma antes descrita. Por tanto, existe una familia de funciones lineales $A(z)$ tal que $\phi(z) = A(z)V(z)$, pero como $\phi = V - \tilde{V}$, entonces $\tilde{V} = (I - A^{-1}(z))V$. El hecho de que $(Id - A^{-1}(z))$ es invertible en una vecindad de 0 se sigue del hecho de que si $A(z)$ fuera demasiado cercana a Id , entonces \tilde{V} y V diferirían por términos de orden menor a μ . Este último razonamiento prueba la equivalencia algebraica de V y \tilde{V} . \square

Proposición 2.3.4. $\mu = 1 \Leftrightarrow \det \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right] \neq 0$

Demostración. Si se tiene que $\det \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right] \neq 0$, entonces quiere decir que es posible aproximar el campo V mediante su diferencial, pero una función y su diferencial difieren por términos de orden por lo menos 2, es decir, $V(z) - \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right] z = O \|z\|^2$ por lo que al usar la proposición 2.3.3, junto con el Ejemplo 2.2.2 se tiene que $\mu = 1$. \square

Observación 2.3.1. Para las siguientes demostraciones, considérese un campo vectorial holomorfo en \mathbb{C}^n , $V(z) = (V_1(z), \dots, V_n(z))$. Como cada coordenada es una función holomorfa, es posible obtener la serie de Taylor de cada una de ellas.

Proposición 2.3.5. $0 < \mu < \infty \Leftrightarrow p$ es un punto singular aislado de V

Demostración. Véase [3]. \square

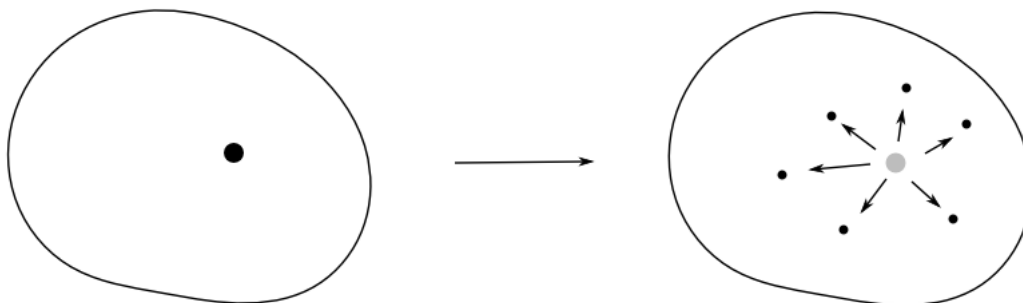
Proposición 2.3.6. *Considérese $0 < \mu < \infty$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $c \in \mathbb{C}^n$ con $\|c\| < \delta$, el número de soluciones para la ecuación $V(z) = c$ en $D_\epsilon(p) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - p\| < \epsilon\}$ es a lo más μ . Más aún, si $p_1, p_2, \dots, p_m, m \leq \mu$, son las soluciones, entonces*

$$\sum_{i=1}^m \mu(V - c, p_i) = \mu$$

Demostración. Véase [3]. □

Proposición 2.3.7. $\mu = \text{ind}_p(V)$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que p es el único punto singular de V en $D_\epsilon(p)$. Sea $k = \inf(\|V(z)\|; z \in \partial D_\epsilon(p))$, se tiene que $k > 0$. Si c es un valor regular tal que $\|c\| < \min\{k, \delta\}$, donde $\delta > 0$ es como en la Proposición 2.3.6, entonces el número de soluciones $V(z) = c$ es exactamente μ . Esto sucede porque cuando se considera c tal que $\|c\| < \delta$, por la Proposición 2.3.6, ya se sabe que a lo más se tienen μ soluciones; pero ahora, recordando que le estamos imponiendo a c la condición de que sea valor regular y que $\|c\| < k$, es decir, que su preimagen esté compuesta únicamente por puntos regulares en $D_\epsilon(p)$, por la Proposición 2.3.4 junto con la segunda parte de 2.3.6, se sigue que son exactamente μ soluciones en $D_\epsilon(p)$.



Sea $V^t(z) = V(z) - tc$. Se tiene que $V^t(z) \neq 0$ si $\|z\| = \epsilon$, pues $\|c\| < k$. Esto implica que $F : [0, 1] \times \partial D_\epsilon(p) \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ dada por $F(t, z) = V^t(z)/\|V^t(z)\|$ es una homotopía entre $F_0 = V(z)/\|V(z)\|$ y $F_1 = (V(z) - c)/\|V(z) - c\|$. Es claro que $V(z)$ y $V(z)/\|V(z)\|$ tienen el mismo grado, pues se puede obtener una a partir de la otra al multiplicar por una función real continua nulhomotópica, pero ahora tenemos que F_0 y F_1 tienen el mismo grado, de donde se sigue que $V(z)$ y F_1 también tienen el mismo grado. Ahora, sean p_1, \dots, p_μ los puntos singulares de $V(z) - c$. Para cada $j \in \{1, \dots, \mu\}$ sea $D_j \subset D_\epsilon(p)$ un disco alrededor de p_j tal que $D_j \cap D_k = \emptyset$ si $j \neq k$. Además sea $G_j : \partial D_j \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ dada por $G_j(z) = (V(z) - c)/\|V(z) - c\|$. Usando las propiedades del grado (ver la página 30, Paso 2) se tiene que

$$\deg(F_1) = \sum_{j=1}^{\mu} \deg(G_j)$$

como c es un valor regular de $V(z)$, sucede que

$$\deg(G_j) = \mu(V - c, p_j) = 1, j = 1, \dots, \mu$$

Con ésta última afirmación, como F_1 es homotópica a $V(z)$, $\mu = \text{ind}_p(V)$ □

Así, ya es posible ampliar la interpretación geométrica del número de Milnor, pues el índice mide el número de vueltas que da el campo alrededor de sus puntos.

Además, con éste último resultado se tiene que la multiplicidad geométrica ($\text{ind}_p(V)$) coincide con la multiplicidad algebraica (el número de Milnor).

2.4. Invarianza topológica del número de Milnor

Ahora se procederá a sentar las bases del uso del número de Milnor como invariante topológico en \mathbb{C}^n . A saber, a lo largo de esta sección se probará el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1. *El número de Milnor es un invariante topológico en $\mathbb{C}^n, n \geq 2$. En otras palabras, si V y \tilde{V} son dos campos vectoriales holomorfos en $\mathbb{C}^n, n \geq 2$, localmente topológicamente equivalentes en p y \tilde{p} , respectivamente, entonces $\mu(V, p) = \mu(\tilde{V}, \tilde{p})$.*

Con esto en mente, ahora se utilizará una definición alternativa para el *índice* de un campo vectorial holomorfo alrededor de un punto p que será útil en la demostración del teorema.

Se piensa ahora en

$$\varphi : \overline{D}_\epsilon \times \overline{B}_r \rightarrow B_\rho \subset \mathbb{C}^n$$

el flujo complejo local de un campo vectorial holomorfo V , donde $D_\epsilon = \{T \in \mathbb{C} \mid \|T\| < \epsilon\}$, $B_r = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r\}$, y $0 < r < \rho$.

Para poder redefinir el *índice* se va a necesitar el siguiente

Lema 2.4.1. *Sea $\tau : \overline{B}_r - \{0\} \rightarrow D_\epsilon - \{0\}$ una función continua tal que para cada $z \in \overline{B}_r - \{0\}$ y $t \in (0, 1]$ tenemos que $\varphi(t\tau(z), z) \neq z$. Sea $g : \partial\overline{B}_r \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ dada por*

$$g(z) = \frac{\varphi(\tau(z), z) - z}{\|\varphi(\tau(z), z) - z\|}$$

entonces

$$\text{ind}_p(V) = \text{deg}(g).$$

Demostración. Considérese $G : [0, 1] \times \partial\bar{B}_r \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ dada por

$$G(t, z) = \frac{\varphi(t\tau(z), z) - z}{\|\varphi(t\tau(z), z) - z\|}, t \neq 0$$

y

$$G(0, z) = \frac{\tau(z)}{\|\tau(z)\|} \cdot \frac{V(z)}{\|V(z)\|}$$

Es claro que $G(1, z) = g(z)$ y además sucede que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} G(t, z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t\tau(z), z) - z}{\|\varphi(t\tau(z), z) - z\|} \cdot \frac{\tau(z)}{\|\tau(z)\|} \cdot \frac{\|\tau(z)\|}{\|\tau(z)\|} \cdot \frac{t}{t} \\ &= \frac{\tau(z)}{\|\tau(z)\|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t\tau(z), z) - z}{t\tau(z)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|t\tau(z)\|}{\|\varphi(t\tau(z), z) - z\|} \end{aligned}$$

ahora, como $\frac{d}{dt}\varphi(t, z) = V(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t\tau(z), z) - z}{t\tau(z)}$, entonces

$$= \frac{\tau(z)}{\|\tau(z)\|} \cdot \frac{V(z)}{\|V(z)\|}$$

Esto quiere decir que G es continua, y más aún, una homotopía entre $g(z)$ y $G(0, z) = \frac{\tau(z)}{\|\tau(z)\|} \cdot \frac{V(z)}{\|V(z)\|}$. Ahora, si $n \geq 2$, $\pi_{2n-1}(\mathbb{S}^1) = \{0\}$, entonces $\frac{\tau(z)}{\|\tau(z)\|} : \partial\bar{B}_r \rightarrow \mathbb{S}^1$ es homotópica a la función constante 1, por lo que $G(0, z)$ y $F(z) = \frac{V(z)}{\|V(z)\|}$ lo son. Como el grado es un invariante homotópico,

$$\text{ind}_p(V) = \text{deg}(g).$$

□

Para demostrar con mayor facilidad el siguiente teorema se necesita además el siguiente resultado acerca del flujo:

Lema 2.4.2. *Sea $\varphi : \overline{D}_\epsilon \times \overline{B}_r \rightarrow B_\rho$ el flujo local complejo de V . Supóngase también que $V(z) \neq 0$ para $z \in \overline{B}_r - \{0\}$, donde $0 < r \leq r'$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $T \in D_\delta - \{0\}$ y $z \in \overline{B}_r - \{0\}$, se tiene que $\varphi(T, z) \neq z$.*

Suponiendo, por el contrario, que existe una sucesión $\{T_n\}$ tal que $T_n \rightarrow 0$, $0 < \|T_n\| < \epsilon$, y $\{z_n\}$, $z_n \in \overline{B}_r - \{0\}$ tales que $\varphi(T_n, z_n) = z_n$. Sea L_n la hoja de V que pasa por z_n .

Primero se prueban dos afirmaciones:

Afirmación 2.4.1. $L_n \cap \partial \overline{B}_r \neq \emptyset$.

Demostración. Considerando L una hoja no singular de la foliación inducida por V , supóngase que $L \subset \text{int}(\overline{B}_r)$. Sea $\tilde{r} = \sup\{\|z\| \mid z \in L\}$. Como \tilde{r} es un supremo, se puede obtener una sucesión $\{q_n\}$ tal que $q_n \rightarrow q_0$, donde $\|q_0\| = \tilde{r} \leq r$. Como $V(q_0) \neq 0$, utilizando el teorema de rectificación (complejo) (véase [9]) para obtener $\alpha > 0$, una vecindad Q de q_0 , y un difeomorfismo ψ que cumple que:

$$\psi : D_\alpha \times B_\alpha \rightarrow Q, B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \|z\| < \alpha\}$$

tal que

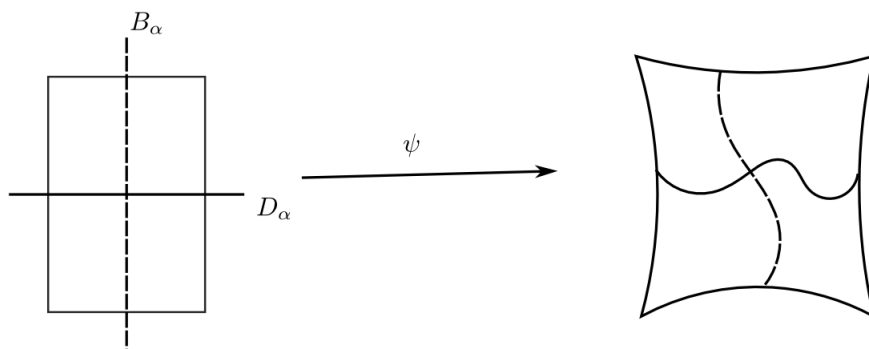
$$D\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = V, \psi(0, 0) = q_0$$

y además

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi(t, z)) = (1, 0).$$

Por otro lado, tenemos que por las propiedades del flujo, $\varphi(T_0+T, z) = \varphi(T, \varphi(T_0, z))$, suponiendo que ambos miembros de la igualdad están bien definidos.

Ahora, para $q \in Q$, se piensa en $P_q = \psi(D_\alpha \times \pi(\psi^{-1}(q)))$ (la imagen del disco D_α) ($\pi : D_\alpha \times B_\alpha \rightarrow B_\alpha$ es la proyección natural). Entonces P_q es un “pequeño disco” (deformado por ψ) que contiene a q y que a su vez, está inmerso en la hoja de V que pasa por q y $\psi_q : D_\alpha \rightarrow P_q$ dada por ψ restringida a $D_\alpha \times \pi(\psi^{-1}(q))$ es una inmersión analítica.



Debido a que ψ_{q_0} es una inmersión analítica, ψ_{q_0} no puede ser constante, por lo que al usar el principio del máximo en D_α , 0 no es un máximo local de $z \in D_\alpha \mapsto \|\psi_{q_0}(z)\|$. Por tanto, existe $p_0 \in P_{q_0}$ tal que $\|p_0\| > \|q_0\| = \tilde{r}$. Ahora se quiere realizar este razonamiento también para los q_n , y eso es posible por la continuidad de ψ respecto a su segunda variable, pues se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $\|q - q_0\| < \delta$, entonces existe $p \in P_q$ que tiene $\|p\| > \tilde{r}$. Consecuentemente, si n es suficientemente grande (recordando que $q_n \rightarrow q_0$), existe $p \in P_{q_n}$ tal que $\|p\| > \tilde{r}$, lo cual es una contradicción pues $p \in L$. \square

Afirmación 2.4.2. Para toda $n \geq 1$ se tiene que $\varphi(T_n, z) = z, \forall z \in L_n$

Demostración. Nótese que esto quiere decir que la aplicación del flujo φ durante el tiempo T_n deja fija a toda la hoja.

Considérese L una hoja de la foliación inducida por V , y junto con ella la topología usual para ella (es decir, considerarla como subespacio de \mathbb{C}^n). Supóngase que existen T_0, z_0 tales que $\varphi(T_0, z_0) = z_0$ para algún z_0 . Se debe probar ahora que $\varphi(T_0, z) = z, \forall z \in L$. Considérese el conjunto $A = \{z \in L | \varphi(T_0, z) = z\}$. Es claro que A es no vacío y es cerrado (pues es la imagen inversa de un cerrado bajo una función continua, a saber, $\varphi(T_0, z) - z$, y el conjunto en consideración es $\{0\}$). Como L es conexo, basta probar que A es abierto en L , para probar así que $A = L$. Sea q en A . Como $V(q) \neq 0$, usando otra vez el teorema de rectificación (complejo) se puede parametrizar una vecindad (compleja, osea un “disco”) de q en L por el flujo $\varphi_q : D_\epsilon \rightarrow L, \varphi_q(T) = \varphi(T, q)$. Por las propiedades del flujo sucede que:

$$\varphi(T_0, \varphi(T, q)) = \varphi(T + T_0, q) = \varphi(T, \varphi(T_0, q)).$$

Ahora, como $q \in A$,

$$\varphi(T_0, \varphi(T, q)) = \varphi(T, q)$$

Esto implica que toda la imagen de φ_q está contenida en A , por lo que A es abierto en L y, finalmente, $A = L$.

Habiendo probado la Afirmación 2.4.1 y la Afirmación 2.4.2, ya es posible probar el Lema 2.4.2. Sea $w_n \in L_n \cap \partial B_r$ (los cuales se pueden conseguir debido a la Afirmación 2.4.1). Se tiene que $\|w_n\| = r$ y si es necesario, se puede tomar una subsucesión (pues ∂B_r es compacto) y conseguir que $w_n \rightarrow w_0$, y además $\|w_0\| = r$. Por la Afirmación 2.4.2, $\varphi(T_n, w_n) = w_n$ (pues w_n está en la misma hoja que z_n), además, se tiene que $V(w_0)$ existe, $V(w_0) \neq 0$

$$V(w_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, w_0) - w_0}{t}$$

pero esto es igual a

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T_n, w_n) - w_n}{T_n} = 0$$

lo cual es una contradicción y, por tanto, prueba el resultado. \square

Corolario 2.4.1. *Sea V un campo vectorial holomorfo, $\delta > 0$ como en el Lema 2.4.2 y $\tau : B_r - \{0\} \rightarrow D_\delta - \{0\}$ una función continua. Definiendo $f : B_r - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$ como $f(z) = \varphi(\tau(z), z)$. Entonces $f(z) \neq z$ para cualquier $z \in B_r - \{0\}$. Más aún, si se considera $(f - id)_* : H_{2n-1}(B_r - \{0\}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\})$ el homomorfismo inducido por $(f - id)$ en los grupos de homología, entonces $(f - id)_*$ es la multiplicación por $\mu = ind_p(V)$.*

Demostración. Como $0 < \|\tau(z)\| < \delta$, usando el Lema 2.4.2 directamente se tiene que $f(z) = \varphi(\tau(z), z) \neq z, \forall z \in B_r - \{0\}$. Ahora, usando el Lema 2.4.1, $\mu = ind_p(V) = deg(g)$, donde

$$g(z) = \frac{\varphi(\tau(z), z) - z}{\|\varphi(\tau(z), z) - z\|}$$

Por lo que si se considera $g_* : H_{2n-1}(\partial B_r) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1})$ está dada por $g_*(\sigma) = \mu\sigma$, (donde σ denota a un elemento de $H_{2n-1}(\partial B_r)$) pues μ es el grado de g .

Para probar la segunda parte del corolario considérese la familia de funciones homotópicas entre sí $i_s : (\mathbb{C}^n - \{0\}) \rightarrow \partial B_s$ dada cada una por $i_s(z) = \frac{sz}{\|z\|}$.

Ahora se considera el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_{2n-1}(B_r - \{0\}) & \xrightarrow{(i_r)_*} & H_{2n-1}(\partial B_r) \\ (f - id)_* \downarrow & & g_* \downarrow \\ H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) & \xrightarrow{(i_1)_*} & H_{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \end{array}$$

el cual conmuta porque i_r e i_1 son homotópicas entre sí, lo que termina la demostración. \square

Finalmente, para poder probar el Teorema 2.4.1, se piensa $\varphi : D_\epsilon \times B_r \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $\tilde{\varphi} : D_\epsilon \times B_{\tilde{r}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ los flujos locales de V y \tilde{V} , respectivamente. Supóngase también que los campos V y \tilde{V} son localmente topológicamente equivalentes mediante un homeomorfismo $h : B_{r'} \rightarrow h(B_{r'}) = U$. Si tomamos r' suficientemente pequeña podemos suponer que $B_{r'} \subset B_r$ y que $U \subset B_{\tilde{r}}$. Ahora sea $0 < \rho < r'$ tal que $\varphi(D_\epsilon \times B_\rho) \subset B_{r'}$ y $\tilde{\varphi}(D_\epsilon \times h(B_\rho)) \subset U$. Sean también $\delta = \delta(V)$ y $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\tilde{V})$ como en el Lema 2.4.2, esto es, que para toda $(T, z) \in (D_\delta - \{0\}) \times (B_r - \{0\})$, $\varphi(T, z) \neq z$ y para toda $(\tilde{T}, \tilde{z}) \in (D_{\tilde{\delta}} - \{0\}) \times (B_{\tilde{r}} - \{0\})$, $\tilde{\varphi}(\tilde{T}, \tilde{z}) \neq \tilde{z}$.

Ahora se piensa en una función continua $\tau : B_\rho - \{0\} \rightarrow D_\delta - \{0\}$ y se considera $\tau \circ h^{-1} = \tilde{\tau} : h(B_\rho - \{0\}) \rightarrow D_{\tilde{\delta}} - \{0\}$ (se puede modificar δ para que sea suficientemente pequeña y que la segunda condición se cumpla, pues no se sabe qué relación hay entre D_δ y $D_{\tilde{\delta}}$).

Llamando $f(z) = \varphi(\tau(z), z)$, $z \in B_\rho - \{0\}$, y $\tilde{f}(w) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(w), w)$, $w \in h(B_\rho - \{0\})$. Como V y \tilde{V} son localmente topológicamente equivalentes mediante h , se tiene que $h(\varphi(T, z)) = \tilde{\varphi}(T, h(z))$, $\forall T$, siempre y cuando los dos miembros de la ecuación puedan ser definidos (pues si T tiene norma demasiado grande, puede ser que $h(\varphi(T, z))$ no sea una expresión válida).

De esta manera, sucede que $h \circ f = \tilde{f} \circ h$. Por otro lado, por el Corolario 2.4.1 se tiene que en los grupos de homología, $(f - id)_*$ y $(\tilde{f} - id)_*$ son las multiplicaciones por μ y $\tilde{\mu}$, respectivamente (y se supone que μ y $\tilde{\mu}$ son distintos). El teorema quedará probado si se muestra que $\tilde{\mu} = \mu$.

Sea $h_* : H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\})$ el isomorfismo inducido por h . Claramente el siguiente lema implica el Teorema 2.4.1

Lema 2.4.3. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) & \xrightarrow{(f-id)_*} & H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \\ h_* \downarrow & & h_* \downarrow \\ H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) & \xrightarrow{(\tilde{f}-id)_*} & H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}) \end{array}$$

Demostración. Como $h \circ f = \tilde{f} \circ h$, entonces $(\tilde{f} - id) \circ h = \tilde{f} \circ h - h = h \circ f - h$. Como se está trabajando con los grupos de homología, solamente se necesita probar que $h \circ f - h$ y $h \circ (f - id)$ son homotópicas. Sea la homotopía $F : [0, 1] \times (B_\rho - \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$ dada por $F(t, z) = h(f(z) - (1-t)z) - h(tz)$. F es claramente continua y $F(t, z) \neq 0 \forall (t, z) \in [0, 1] \times (B_\rho - \{0\})$, porque $F(t, z) = 0$ implica que $h(f(z) - (1-t)z) = h(tz)$, pero como h es un homeomorfismo, se tiene que $f(z) = z$, lo cual contradice que $\varphi(\tau(z), z) \neq z$. \square

2.5. Una aplicación

Considérense dos campos vectoriales holomorfos V y W definidos en $(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 2$, tales que su expansión en serie de Taylor es de la forma

$$V(z) = \sum_{i=k_1}^{\infty} V_i(z), \quad W(z) = \sum_{j=k_2}^{\infty} W_j(z)$$

donde $V_i(z)$ y $W_j(z)$ son campos vectoriales polinomiales de orden i o j , respectivamente. Tanto $V_{k_1}(z)$ como $W_{k_2}(z)$ (que son el primer término que no se anula de cada campo) tienen a 0 como singularidad aislada.

Proposición 2.5.1. *Considerando a V y W como antes, supóngase que son topológicamente equivalentes en 0. Entonces $k_1 = k_2$.*

Demostración. Se probará que $\mu(V) = k_1$ y que $\mu(W) = k_2$. Del Teorema 2.4.1 se seguirá el resultado.

Considerando de nuevo $V(z) = \sum_{i=k_1}^{\infty} V_i(z)$, sea $m = \inf_{\|z\|=1} (\|V_{k_1}(z)\|)$ y $M_i = \sup_{\|z\|=1} (\|V_i(z)\|)$. Se tiene que

$$\|V_i(z)\| \leq M_i \|z\|^i, \quad i \geq k_1 + 1$$

lo cual implica que

$$m \|z\|^{k_1} \leq \sum_{i=k_1}^{\infty} \|V_i(z)\| \leq \sum_{i=k_1}^{\infty} M_i \|z\|^i$$

entonces

$$m \|z\|^{k_1} - \sum_{i=k_1}^{\infty} M_i \|z\|^i = \left(m - \sum_{i=k_1}^{\infty} M_i \|z\|^{i-k_1} \right) \|z\|^{k_1} \leq \|V(z)\|.$$

Como la serie es uniformemente convergente, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$m - \sum_{i=k_1}^{\infty} M_i \|z\|^{i-k_1} > \frac{m}{2},$$

por lo que

$$\|V(z)\| > \frac{m}{2} \|z\|^{k_1}$$

si $\|z\| < \varepsilon$.

Sea $0 < r < \varepsilon$ y sea $G : [0, 1] \times \mathbb{S}_r^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ la homotopía dada por

$$G(t, z) = \frac{V(tz)}{\|V(tz)\|} = \frac{\sum_{i=k_1}^{\infty} t^i V_i(z)}{\left\| \sum_{i=k_1}^{\infty} t^i V_i(z) \right\|} = \frac{\sum_{i=k_1}^{\infty} t^{i-k_1} V_i(z)}{\left\| \sum_{i=k_1}^{\infty} t^{i-k_1} V_i(z) \right\|}$$

la cual está bien definida por lo demostrado anteriormente.

Como $G(1, t) = \frac{V(z)}{\|V(z)\|}$, $G(0, t) = \frac{V_{k_1}(z)}{\|V_{k_1}(z)\|}$ y $\mu(V_{k_1}, 0) = k_1$, entonces $\mu(V, 0) = k_1$. Siguiendo el mismo razonamiento para el campo W , se tiene que $\mu(W, 0) = k_2$ y como consecuencia del Teorema 2.4.1, se sigue la proposición. \square

Observación 2.5.1. En el caso en que $k_1 = 1$, no es necesario realizar el razonamiento anterior debido a la Proposición 2.3.4.

Parte II.

Desingularización

3. Explosión de una singularidad(Blow-up)

Es posible hacer un análisis razonablemente completo de los puntos singulares de los campos vectoriales holomorfos mediante formas normales holomorfas o mediante difeomorfismos analíticos, siempre y cuando se asuma que la parte lineal del campo no es degenerada. Los casos en que la parte lineal del campo resulta ser degenerada, pero no nula, necesitan ser tratados mediante transformaciones que puedan modificar la parte lineal (puesto que el análisis mediante difeomorfismos no altera esencialmente el comportamiento local del campo, debido a que la parte lineal de un difeomorfismo es no degenerada). Estas transformaciones, las cuales pueden carecer de inversa analítica, son conocidas por el nombre de desingularizaciones, resolución de la singularidad, *proceso*– σ o blow-up (explosión de singularidad). A grandes rasgos, la idea es considerar una función holomorfa $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de una superficie de Riemann M que manda a toda una curva compleja $D \subset M$ en el punto $0 \in \mathbb{C}^2$, mientras que la función es inyectiva entre $M \setminus D$ y $(\mathbb{C}^2, 0)$. Esta segunda característica nos permite hacer pullback a objetos locales (funciones, curvas, foliaciones, formas, etc) desde $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ a $M \setminus D$, y luego extenderlos a todo M .

3.1. Definición

Definición 3.1.1. Una *superficie de Riemann* es una variedad diferenciable de dimensión 2 tal que todas las funciones de transición de cualquier atlas son holomorfas.

Considérese la función canónica $\pi^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por

$$\pi^{-1}(z, w) = [z, w]$$

es decir, a cada punto (z, w) se le asocia la recta (compleja) que pasa por 0 y (z, w) .

Ahora considérese la gráfica de esta función, es decir

$$\Gamma = \{((z, w), [z, w]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid [z, w] = \pi^{-1}(x, y)\}$$

Observación. Debido a su definición, Γ es canónicamente una superficie de Riemann contenida en la variedad de dimensión 3 compleja $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$, y de hecho es homeomorfa a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Es claro que Γ no es cerrada dentro de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$ al considerar la topología canónica del producto cartesiano para $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$.

Para finalmente construir la M deseada para la explosión, considérese la cerradura de Γ dentro de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$, $M = \bar{\Gamma}$, junto con la función $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ dada por la restricción a M de la proyección de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$ a su primera coordenada, es decir:

$$\pi((z, w), [z, w]) = (z, w).$$

Una vez construida M , hay que verificar que realmente sea una superficie de Riemann. Para conseguir ésto, se trabajará con el siguiente atlas para M :

Sea $U = \{((z, w), [z, w]) | z \neq 0\}$, $V = \{((z, w), [z, w]) | w \neq 0\}$ y sean

$$\varphi((z, w), [z, w]) = (z, \frac{w}{z}), \varphi^{-1}(z, u) = ((z, zu), [1, u])$$

y

$$\psi((z, w), [z, w]) = (\frac{z}{w}, w), \psi^{-1}(v, w) = ((vw, w), [v, 1])$$

Entonces sea $\mathfrak{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$, es claro que \mathfrak{A} es un atlas, puesto que $U \cup V = M$,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(v, w) = \varphi((vw, w), [v, 1]) = (vw, \frac{1}{v})$$

y

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z, u) = \psi((z, zu), [1, u]) = (\frac{1}{u}, zu).$$

El hecho de que M sea de Hausdorff y que sea 2-numerable se siguen del hecho de que M es un subespacio topológico de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$, que es de Hausdorff y 2-numerable.

Definición 3.1.2. Al conjunto $\pi^{-1}(0) = E \subset M$ se le llama el *divisor excepcional* de la explosión.

Observación 3.1.1. Al realizar exactamente la misma construcción, pero en el caso real, se obtiene que M es difeomorfa a una banda de Möbius, y el divisor es el círculo que está en medio de la banda, su “alma”. Es por eso que a M , en el caso complejo, se le conoce como la *banda de Möbius compleja*.

3.2. Introducción

Supóngase que $(a_n(z, w), b_n(z, w))$ son las componentes del primer término que no se anula de V (al considerar la expansión de Taylor de V alrededor de $0 \in \mathbb{C}^2$). Entonces la expresión para V es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= a_n(z, w) + R_1(z, w) \\ \dot{w} &= b_n(z, w) + R_2(z, w),\end{aligned}$$

donde R_1 y R_2 son series de orden mayor a n . Al número $n \in \mathbb{N}$ (que de hecho es exactamente $\mu(V, 0)$) también se le llama *multiplicidad algebraica de V* (o de la foliación inducida por V , denotada por F_V) en la singularidad.

Al levantar el campo V a M mediante la carta φ , queda el siguiente campo:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z^n(a_n(1, u) + zR'_1(z, u)) \\ \dot{u} &= z^{n-1}(b_n(1, u) - ua_n(1, u)) + z^n(R'_2(z, u) - uR'_1(z, u)).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Por otro lado, al utilizar ψ :

$$\begin{aligned}\dot{v} &= w^{n-1}(a_n(v, 1) - vb_n(v, 1)) + w^n(R''_1(v, w) - vR''_2(v, w)) \\ \dot{w} &= w^n(b_n(v, 1) + wR''_2(v, w)).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Es de notar que todos los puntos de E son puntos singulares de π^*V , pues para la primera carta E está representado por la ecuación $\{z = 0\}$, mientras que para la segunda carta la ecuación para E es $\{w = 0\}$.

Como lo que importa es la foliación inducida por π^*V , entonces es posible clasificar los puntos singulares del campo de acuerdo a la siguiente

Definición 3.2.1. Si en la expresión de π^*V mediante la carta φ se tiene que

$b_n(1, u) - ua_n(1, u) \neq 0$, y en la expresión mediante ψ se tiene que

$a_n(v, 1) - vb_n(v, 1) \neq 0$, entonces a la singularidad de V se le conoce como

singularidad no-dicrítica. En cualquier otro caso, se lo conoce como *singularidad dicrítica*.

3.2.1. El caso no-dicrítico

Trabajando con la expresión para π^*V de la Ecuación 3.1, al suponer que la singularidad es no-dicrítica, es posible dividir el campo entre z^{n-1} (pues lo único que interesa es la foliación inducida), después de lo cual se tienen las ecuaciones:

$$\dot{z} = z(a_n(1, u) + zR'_1(z, u))$$

$$\dot{u} = b_n(1, u) - ua_n(1, u) + z(R'_2(z, u) - uR'_1(z, u))$$

la expresión análoga para la expresión de la Ecuación 3.2 (después de dividir entre w^{n-1}) coincide con la anterior para definir una foliación \mathfrak{F}_V^1 en M que tiene a E como un conjunto invariante. Más precisamente, M es una hoja de \mathfrak{F}_V^1 fuera de los puntos en los que $b_n(1, u) - ua_n(1, u)$ es cero.

3.2.2. El caso dicrítico

Dado que en la Ecuación 3.1 se tiene que $b_n(1, u) - ua_n(1, u) = 0$, entonces después de dividir entre z^n queda la expresión:

$$\dot{z} = a_n(1, u) + zR'_1(z, u)$$

$$\dot{u} = R'_2(z, w) - uR'_1(z, u)$$

Al juntar esta información con la que nos proporciona la correspondiente expresión en el otro sistema de coordenadas, se observa que en el caso dicrítico E ya no es un conjunto invariante, pues la foliación \mathfrak{F}_V^1 es transversal a E salvo algunos puntos (las raíces de $a_n(1, u)$) los cuales pueden o no ser singulares. En estos puntos la foliación es tangente al divisor excepcional E .

3.2.3. Desingularización completa del campo

Es importante darse cuenta de que en cualquiera de los casos, las expresiones para el nuevo campo están dadas por funciones analíticas, por lo que es posible repetir el proceso de la explosión tantas veces como se desee en cualquiera de los puntos singulares de \mathfrak{F}_V^1 . Al explotar en un punto singular de \mathfrak{F}_V^1 , se obtiene una nueva

foliación \mathfrak{F}_V^2 en una vecindad de dos líneas proyectivas complejas que se intersectan transversalmente y que nuevamente tienen puntos singulares aislados. El proceso se puede repetir tantas veces como sea necesario. Después de k explosiones se tiene una foliación \mathfrak{F}_V^k definida en una vecindad U_V^k alrededor de una unión de líneas proyectivas complejas P_V^k , las cuales son transversales entre sí, y se tiene una función analítica $\pi_V^k : U_V^k \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que manda a P_V^k a $0 \in (\mathbb{C}^2, 0)$ y que es uno a uno entre $U_V^k \setminus P_V^k$ y $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$. Se denotará por $(U_V^k, \pi_V^k, P_V^k, \mathfrak{F}_V^k)$ a la k -ésima explosión de V en $0 \in (\mathbb{C}^2, 0)$; π_V^k se le llamará la proyección y P_V^k su divisor. El divisor es una unión de líneas proyectivas complejas que están encajadas en U_V^k , las cuales se intersectan transversalmente en puntos llamados *esquinas*. El teorema de Desingularización de Seidenberg para campos vectoriales (véase página 119 de [9]) establece que todos los puntos singulares se vuelven simples después de un proceso finito de explosiones sucesivas. Por tanto, si se empieza a explotar $0 \in (\mathbb{C}^2, 0)$, y se toma la convención de que una vez que una singularidad es simple, ya no se le somete a más explosiones, entonces se llega a que después de cierto número l de explosiones, todas las singularidades que aparecen son simples. Esto define de manera única a la explosión $(U_V^l, \pi_V^l, P_V^l, \mathfrak{F}_V^l)$ como *la desingularización de V en $0 \in (\mathbb{C}^2, 0)$* .

3.2.4. Una fórmula para la multiplicidad

Es natural pensar en que las propiedades locales de un punto singular (número de Milnor, índice) tengan una relación muy especial con la desingularización del campo en ese punto. En esta sección se prueba que es posible calcular la multiplicidad del campo con información que aparece en la desingularización.

A partir de este momento se supondrá siempre que el campo vectorial a analizar solamente tiene singularidades no dicríticas. Esto significa que se trabajará siempre con un número de separatrices finito. Para campos vectoriales dicríticos las ideas generales son muy parecidas. Para mayor detalle, véase [5].

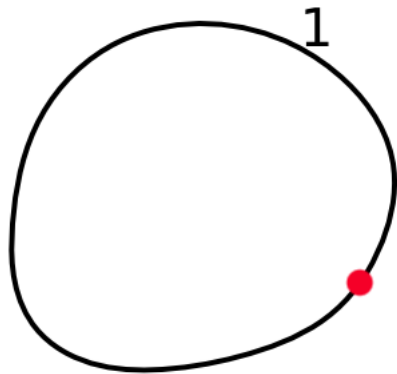
Definición 3.2.2. El *peso* $\rho(P)$ de una línea proyectiva compleja P que aparece en el proceso de desingularización se define como:

1. 1, si P aparece inmediatamente después de explotar $0 \in \mathbb{C}^2$
2. la suma de los pesos de las líneas que se intersectaban en la singularidad que fue explotada para originar P .

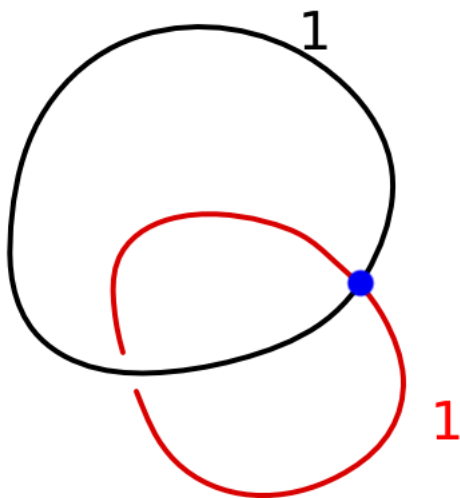
Observación 3.2.1. Una vez que una línea proyectiva P aparece en la desingularización, se le asigna un número natural P que no se modificará al seguir explotando.

Ejemplo 3.2.1. En las siguientes figuras se muestran las “almas” de las bandas de Möbius reales que aparecen la explosión de un punto singular, junto con sus pesos respectivos (del mismo color), a lo largo del proceso de desingularización.

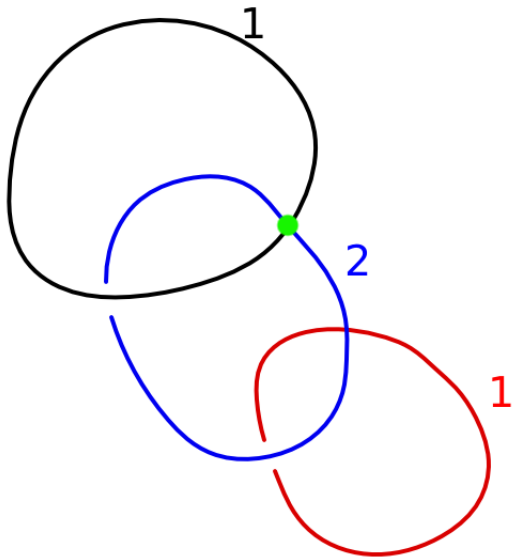
Paso 1: Aparece la primer banda, cuyo peso es 1.



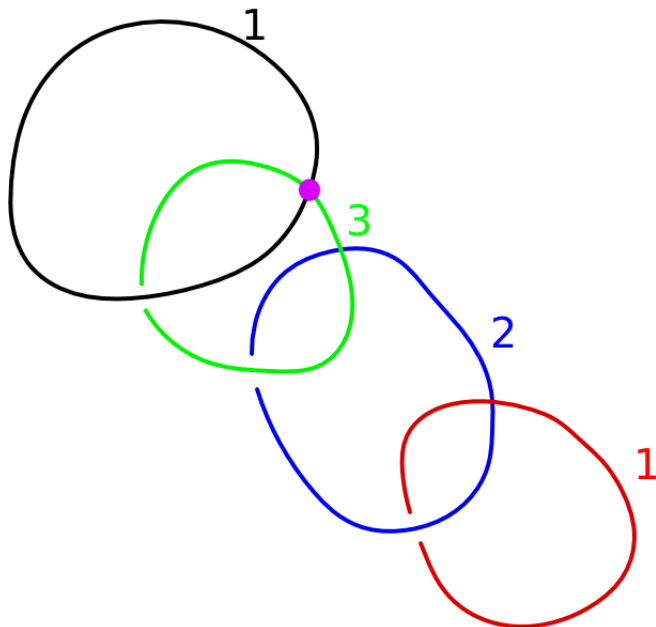
Paso 2: Al explotar el punto rojo, aparece una segunda banda, de color rojo, con peso también 1.



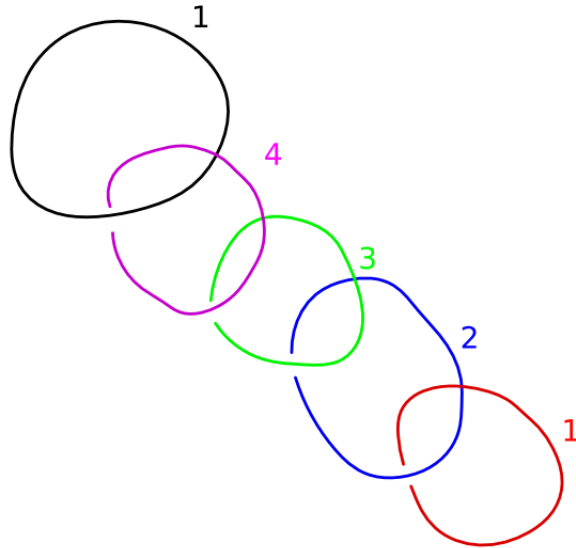
Paso 3: Al explotar el punto azul, se obtiene una nueva banda, de color azul, con peso 2.



Paso 4: Al explotar el punto verde, se crea una nueva banda, de color verde, con peso 3.



Paso 5: Finalmente, al explotar el punto rosa, aparece una nueva banda, de color rosa, la cual tiene peso 4.



Definición 3.2.3. Supóngase ahora que una cierta curva analítica invariante S contiene una singularidad q de la foliación \cdot . Mediante el teorema de rectificación complejo (véase [9]) es posible escoger coordenadas adecuadas tales que el campo se vea de la siguiente manera:

$$\dot{z}' = (z')^n P(z') + w'Q(z', w')$$

$$\dot{w}' = w'R(z', w')$$

donde $S = \{w' = 0\}$, mientras que $P(0) \neq 0$.

Al entero $n \in \mathbb{N}$ como antes se le conoce como *la multiplicidad de V a lo largo de S en q* ; y se denotará por $\mu_V(q, S)$.

Proposición 3.2.1. *La multiplicidad es invariante bajo cambios de coordenadas analíticos.*

Demostración. El resultado se sigue del hecho de que un difeomorfismo analítico preserva el grado de una función polinomial. □

Definición 3.2.4. Considérese la desingularización $(U_V^l, \pi_V^l, P_V^l, \mathfrak{F}_V^l)$ de V . Sea $p \in P_V^l$ una singularidad de la foliación. Se define

$$\phi(p, P) = \begin{cases} \mu_V(p, P) & \\ \mu_V(p, P) - 1 & \end{cases}$$

el primer caso si $p \in P$ no es una esquina, el segundo si lo es.

Observación. Dependiendo desde qué línea proyectiva compleja se vea un punto $\{p\} = P_1 \cap P_2$, se tiene un valor para ϕ distinto.

Teorema 3.2.1. *Considérese un campo V y su desingularización $(U_V^l, \pi_V^l, P_V^l, \mathfrak{F}_V^l)$. Entonces*

$$\mu(V, 0) + 1 = \sum_{p \in P_V^l} \rho(P) \phi(p, P)$$

donde la suma es sobre todas las singularidades de \mathfrak{F}_V^l y $\mu(V, 0)$ es el número de Milnor del campo V en 0 , definido en 2.1.3.

Demostración. Se probará el resultado por inducción. Hay que probar primero que la fórmula es cierta para la primera explosión \mathfrak{F}_V^1 . Sea P la línea proyectiva compleja creada tras la explosión del punto singular $0 \in \mathbb{C}^2$, sean p_1, \dots, p_s las singularidades de \mathfrak{F}_V^1 y sean $R_j, j = 1, 2$ las series definidas en la Ecuación 3.2. Entonces al considerar la expresión del campo

$$\dot{z} = z(a_n(1, u) + zR_1'(z, u))$$

$$\dot{u} = b_n(1, u) - ua_n(1, u) + z(R_2'(z, u) - uR_1'(z, u))$$

se tiene que las singularidades de \mathfrak{F}_V^1 son las raíces de $b_n(1, u) - ua_n(1, u)$, el cual tiene grado $n+1$, debido a su último término. Por tanto, al factorizar $b_n(1, u) - ua_n(1, u)$, se tiene que

$$b_n(1, u) - ua_n(1, u) = (u - u_1)^{a_1} \dots (u - u_s)^{a_s}, \quad a_1 + \dots + a_s = n + 1;$$

donde $a_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, s$ es la multiplicidad de cada raíz.

Al considerar $p_j = (0, a_j)$, se sigue que, por definición, $\phi(p_i, P) = a_i$ y además

$$\sum_{i=1}^s \phi(p_i, P) = \sum_{i=1}^s a_i,$$

pues al ser la primera explosión, ningún p_j es esquina.

Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^s a_i = \mu(V, 0) + 1$$

porque al levantar el campo original a P se incrementa su multiplicidad en 1, como lo muestra la Ecuación 3.1 junto con la Ecuación 3.2. Finalmente, se tiene que

$$\sum_{i=1}^s \phi(p_i, P) = \sum_{i=1}^s a_i = \mu(V, 0) + 1.$$

Para probar la fórmula en general, supóngase que ya se tiene que

$$\mu(V, 0) + 1 = \sum_{p \in P_V^k} \rho(P) \phi(p, P) \tag{3.3}$$

en el k -ésimo paso de la desingularización de V . Al explotar un punto $p \in P_V^k$ en una línea proyectiva compleja P' , existen dos posibles casos:

(i) El punto p no es una esquina. Utilizando coordenadas locales (x, y) alrededor de $p \in P_V^k$, x transversal a P_V^k , $y \in P_V^k$, se expresa a \mathfrak{F}_V^k como las curvas de fase de un campo vectorial con una cierta multiplicidad m' . La hipótesis de inducción implica que

$$m' + 1 = \sum_{q \in P'} \mu(q, P')$$

donde $q \in P'$ son las singularidades de \mathfrak{F}_V^{k+1} . También se tiene que $\{p\} = P \cap P'$, y sea $\phi'(p, P) = \mu_{\mathfrak{F}_V^{k+1}}(p, P) - 1$. Se tiene que

$$\phi'(p, P) = \phi(p, P) - (m' - 1) = \phi(p, P) + 1 - m'$$

pues $\phi'(p, P) = \mu_{\mathfrak{F}_V^{k+1}}(p, P) - 1$ (por definición) y $\phi(p, P) = \mu_{\mathfrak{F}_V^k}(p, P) - 1$ (pues ahora p es una esquina). Entonces, se tiene que

$$\phi(p, P) - \phi'(p, P) = \mu_{\mathfrak{F}_V^k}(p, P) - \mu_{\mathfrak{F}_V^{k+1}}(p, P) = \mu' - 1$$

Por tanto, es posible reemplazar de la siguiente manera

$$\rho(P) \phi(p, P) = \rho(P) (\phi'(p, P) - 1 + m') = \rho(P) \left(\phi'(p, P) - 1 + \sum_{q \in P'} \mu(q, P') - 1 \right)$$

$$= \rho(P) (\phi'(p, P) - 1) + \sum_{q \neq p} \rho(P) \phi(q, P') + \rho(P) (\phi(p, P') - 1)$$

Pero se tiene que $\rho(P) = \rho(P')$; entonces

$$\rho(P) \phi(p, P) = \rho(P) (\phi(p, P) - 1) + \sum_{q \neq p} \rho(P') \phi(q, P') + \rho(P') (\phi(p, P') - 1)$$

lo cual termina la prueba en este caso, pues se han igualado las dos sumas antes y después de la última explosión.

(ii) El punto p es una esquina ($\{p\} = P_1 \cap P_2$). Sean $\{p_1\} = P_1 \cap P'$, $\{p_2\} = P_2 \cap P'$. La idea es similar a la anterior:

Encontrar un reemplazo para el sumando

$$\rho(P_1) \phi(p, P_1) + \rho(P_2) \phi(p, P_2)$$

al realizar una nueva explosión.

Como antes, sea m' la multiplicidad algebraica de la expresión analítica local para el campo que produce a \mathfrak{F}_V^k en $p \in P_1 \cap P_2$. Se tiene que

$$\mu' + 1 = (\phi(p_1, P') + 1) + (\phi(p_2, P') + 1) + \sum_{q \notin \{p_1, p_2\}} \phi(q, P'),$$

$$\phi(p_1, P_1) = \phi(p, P_1) - (m' - 1)$$

$$\phi(p_2, P_2) = \phi(p, P_2) - (m' - 1).$$

Entonces sucede que

$$\rho(P_1) \phi(p, P_1) + \rho(P_2) \phi(p, P_2) = \rho(P_1) (\phi(p_1, P_1) + m' - 1) + \rho(P_2) (\phi(p_2, P_2) + m' - 1)$$

$$= \rho(P_1) \phi(p_1, P_1) + \rho(P_2) \phi(p_2, P_2) + (m' - 1) (\rho(P_1) + \rho(P_2))$$

$$= \rho(P_1)\phi(p_1, P_1) + \rho(P_2)\phi(p_2, P_2) + (m' - 1)(\rho(P'))$$

$$= \rho(P_1)\phi(p_1, P_1) + \rho(P_2)\phi(p_2, P_2) + \rho(P') \left(\phi(p_1, P') + \phi(p_2, P') + \sum_{q \notin \{p_1, p_2\}} \phi(q, P') \right),$$

lo cual termina la prueba pues se ha refactorizado el sumando $\rho(P_1)\phi(p, P_1) + \rho(P_2)\phi(p, P_2)$ para completar la fórmula que aparecería en el caso $k+1$. \square

3.3. Curvas generalizadas y su desingularización

Ahora se considerarán campos vectoriales cuyas singularidades en la desingularización puedan adivinarse antes de iniciar el proceso de desingularización (aunque no se pueden adivinar las esquinas). La idea es la siguiente: tratar de detectar una singularidad que aparecerá en la desingularización analizando la curva invariante bajo V que pasa por la singularidad transversalmente al divisor de la explosión, pues al proyectar esta curva mediante la función $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que incluye la explosión, se obtiene una curva invariante en el plano, pero que contiene a $0 \in \mathbb{C}^2$. Para este propósito, es necesario garantizar que cada curva invariante proviene de un punto singular en la desingularización.

Definición 3.3.1. Se dice que un campo vectorial V es una *curva generalizada* si la foliación \mathfrak{F} de su desingularización no tiene puntos singulares que tengan eigenvalores 0.

También se necesita la siguiente

Definición 3.3.2. Una *separatriz de V* es una curva integral conexa tal que $\bar{V} = V \cup \{0\}$. Es decir, una curva invariante que se extiende analíticamente a 0.

Por lo observado anteriormente, en una curva generalizada existe una correspondencia uno a uno entre las separatrices y los puntos singulares que no son esquinas de su desingularización.

Ejemplo 3.3.1. Considérese $V = V_f = V_f(z, w) = \left(-\frac{\partial f}{\partial w}(z, w), \frac{\partial f}{\partial z}(z, w)\right)$

donde $f : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica con una singularidad en $0 \in \mathbb{C}^2$. Las curvas integrales de V son las componentes conexas de $f(z, w) = c$, $c \in \mathbb{C}^*$ suficientemente pequeño y las separatrices del campo vienen dadas por las componentes conexas de $f^{-1}(0)$ en $U \setminus \{0\}$. Todas las curvas integrales son cerradas en U

y no se pueden acercar a $0 \in \mathbb{C}^2$, salvo las de $f^{-1}(0)$; por lo que no es posible que en la desingularización haya singularidades con eigenvalores cero.

Más generalmente, sea V un campo vectorial holomorfo en U con $V(0)=0$ y sea $(S_j)_{j=1}^k$ el conjunto de separatrices de V en $0 \in \mathbb{C}^2$. A cada separatriz S_j se le puede asociar una función irreducible $f_j : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f_j(0) = 0$, de tal manera que $S_j = f_j^{-1}(0) \cap (U \setminus \{0\})$. Entonces $f = \prod_{j=1}^k f_j$ es una descomposición de f en factores irreducibles y si $S = \cup_{j=1}^k S_j$, entonces $S = f^{-1}(0) \cap (U \setminus \{0\})$.

En el siguiente lema se utiliza la definición de *singularidad simple*. Esta definición se encuentra en 1.4.2.

Lema 3.3.1. *Cualquier punto singular de una curva generalizada que tenga exactamente dos separatrices suaves transversales es simple.*

Demostración. Una curva que es transversal a una línea proyectiva compleja de peso mayor que 1 no puede ser suave, debido a que una línea proyectiva compleja de peso mayor que 1 proviene necesariamente de la explosión de una esquina, por lo que al proyectar de nuevo a \mathbb{C}^2 la curva deja de ser suave. Por tanto, si μ es la multiplicidad de V , se obtiene del teorema 3.2.1 que $\mu + 1 = 2$, pues por ser V una curva generalizada se sabe que hay una correspondencia uno a uno entre las separatrices y los puntos singulares que aparecen en la explosión. De esta manera, $\mu = 1$. Sea $A = D_0V$. Es claro que $A \neq 0$ y que se tienen las siguientes posibilidades:

$$1) A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}^+$$

$$3) A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$$

El primer caso no es posible debido a que la singularidad tiene dos eigenspacios transversales (los espacios tangentes de cada una de las separatrices), por lo que es diagonalizable. En el segundo caso, si $\lambda_1 = 0$, entonces V no sería una curva generalizada; si $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Z}^+$, entonces la única resonancia es

$$\lambda_1 = 0\lambda_1 + n\lambda_2, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

por lo que la forma normal de Dulac (véase [7]) permite escribir a V de la siguiente manera:

$$V = (\lambda_1 z + aw^n, \lambda_2 w)$$

y si $a \neq 0$, entonces V tiene solamente una separatriz; y si $a = 0$, V tiene componentes dicríticas en su desingularización. El razonamiento es análogo si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Z}^+$. Finalmente, si no se tiene que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Z}^+$ ni que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Z}^+$, entonces es aplicable el Teorema de linealización analítica de Poincaré (véase [13]) y por lo tanto, es posible suponer sin pérdida de generalidad que V es lineal y por lo tanto tiene un número infinito de separatrices, es decir, tiene al menos una singularidad dicrítica en su desingularización. Solamente queda el tercer caso, el cual significa que la singularidad es simple. \square

Definición 3.3.3. Se dice que *el conjunto de separatrices de un campo V ha sido desingularizado* cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todas las separatrices son ajenas y suaves.
2. Ninguna separatriz pasa por una esquina.
3. Todas las separatrices intersectan transversalmente al divisor de la desingularización.

Por otro lado, si todas las singularidades en la explosión son simples y están sobre líneas proyectivas complejas invariantes, también se dice que *el campo ha sido desingularizado*.

Ahora es posible probar el siguiente

Teorema 3.3.1. *Sea V una curva generalizada con una singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^2$. Si se llama S a la unión de las separatrices de V , entonces S y V tienen la misma desingularización.*

Es importante recordar que se ha venido suponiendo que el campo vectorial es no dicrítico.

La afirmación de que tengan las mismas desingularizaciones significa que la misma secuencia de explosiones en los mismos lugares desingulariza tanto a S como a V . Por tanto, la estructura final de las líneas proyectivas complejas que conforman al divisor excepcional es la misma.

Observación 3.3.1. El llamado “Teorema de la Separatriz”, demostrado por C. Camacho y P. Sad asegura la existencia de por lo menos una separatriz, es decir $S \neq \emptyset$ (véase [6]).

Demostración. Obsérvese qué sucede con V siguiendo la secuencia de explosiones para desingularizar S . Sea F la foliación inducida por V en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Sea \mathfrak{F} la foliación inducida por F para la desingularización de S . Se sigue de la definición que \mathfrak{F} es una curva generalizada en cada una de las singularidades en P (el divisor excepcional de la desingularización de S). Por cada una de las esquinas pasan exactamente dos curvas analíticas invariantes, pues hay que recordar que se está trabajando en la desingularización completa de S . Por el Lema 3.3.1 cada una de estas esquinas es una singularidad simple. Los puntos donde las curvas irreducibles de S (transformadas por la explosión) intersectan al divisor P son singularidades, pues por ellos pasan el divisor excepcional y una separatriz; otra vez por el Lema 3.3.1 son singularidades simples. Supóngase que existe además otra singularidad en \mathfrak{F} , además de las que ya se contaron. Como ya se han contado las intersecciones de P con las separatrices, entonces esta supuesta singularidad tiene a lo más una separatriz (el divisor excepcional), lo cual implica que debe tener multiplicidad cero (pues las singularidades de la desingularización de una curva generalizada no tienen eigenvalores cero, por definición), lo cual implica que de hecho no es una singularidad (Proposición 2.3.1). Razonando de esta manera, se ha llegado a la conclusión de que todas las singularidades de \mathfrak{F} son simples y que hay el mismo número de singularidades en \mathfrak{F} que en la desingularización de V . \square

Observación 3.3.2. Regresando al Ejemplo 3.3.1, supóngase que la función f es irreducible. Por el Teorema 3.3.1 la desingularización para V es la misma que para f . Por el Teorema 3.3.1 se sabe que la multiplicidad algebraica $\mu(V, 0)$ de V está dada por la fórmula 3.2.1: $\mu(V, 0) + 1 = \rho(P)$, donde P es la línea proyectiva compleja (que forma parte del divisor de la desingularización) transversal a la curva $f(z, w) = 0$ (después de haber levantado ésta última a la desingularización). Pero, siendo f irreducible, su multiplicidad algebraica en 0 , m_f , es justamente $\mu(V, 0) + 1$. Por consiguiente, $\mu(V_f, 0) = \rho(P)$. Hay que observar que subsecuentes explosiones no cambiarán el peso de P . Ahora supóngase que $f(z, w)$ es reducible. En cuanto se desingularizan sus componentes, se obtiene una línea proyectiva compleja con peso igual a la multiplicidad algebraica de esa componente.

El razonamiento anterior nos conduce al siguiente

Teorema 3.3.2. *Sea V una curva generalizada y sean $f_1(z, w) = 0, \dots, f_k(z, w) = 0$ las ecuaciones que definen a sus separatrices. Entonces*

$$\mu(V, 0) + 1 = \mu(V_f, 0) + 1 = \sum_{i=1}^k \mu_{f_i}$$

donde μ_{f_i} es la multiplicidad de f_i

Demostración. Si $f = f_1 \dots f_k$, al aplicar el Teorema 3.3.1, V y V_f tienen la misma desingularización. \square

3.4. El número de Milnor de una curva generalizada

Hay que notar que el recíproco del Teorema 3.3.1 es falso. Hay que imponer una condición algebraica para poder asegurar que un campo que tiene la misma desingularización que la unión de sus separatrices es una curva generalizada.

Ahora se analizará el número de Milnor de la singularidad de un campo vectorial holomorfo V en \mathbb{C}^2 . Como antes, se denotará por $f(z, w) = 0$ a la ecuación que define la unión de separatrices de V , $V_f(z, w) = (-\frac{\partial f}{\partial w}(z, w), \frac{\partial f}{\partial z}(z, w))$.

Teorema 3.4.1. Sean V, V_f como antes. Entonces $\mu(V, 0) \geq \mu(V_f, 0)$, y la igualdad se da si y sólo si V es una curva generalizada.

Demostración. Es claro que el teorema es cierto si se consideran singularidades simples. Para la prueba en general se procederá por inducción sobre el número de explosiones que se necesitan para desingularizar completamente a V_f . También utilizará una fórmula que relaciona el número de Milnor de un campo con los números de Milnor de las singularidades que aparecen en la primera explosión:

$$\mu(V, 0) = \mu_V^2 - (\mu_V + 1) + \sum_{i=1}^s \mu(\mathfrak{F}_V^1, p_i) \quad (3.4)$$

donde $\mu(V, 0)$ es el número de Milnor en 0, μ_V es la multiplicidad algebraica de V y p_1, \dots, p_s son la singularidades que aparecen en \mathfrak{F}_V^1 (véase [10]). Supóngase ahora que Z_f necesita una sola explosión para desingularizarse. En ese caso, \mathfrak{F}_V^1 tiene únicamente singularidades simples p_1, \dots, p_s , por lo que el número de Milnor de cada una de ellas es 1; y por cada una de esas singularidades pasa una curva suave que es transversal e invariante bajo \mathfrak{F}_V^1 . Entonces se tienen dos casos:

1) V es una curva generalizada. Entonces $s = k$, (con s el número de singularidades que aparecen en la primera explosión para V_f y k el número de singularidades que aparecen en la primera explosión de V) y todas las singularidades p_1, \dots, p_s son simples. Por tanto, al aplicar el Teorema 3.2.1 $\mu_V = \mu_{V_f}$ y por la Ecuación 3.4 $\mu(V, 0) = \mu(V_f, 0)$.

2) V no es una curva generalizada. Entonces

$$\sum_{i=1}^k \mu(\mathfrak{F}_V^1, p_i) > \sum_{j=1}^s \mu(\mathfrak{F}_{V_f}^1, p_j)$$

es claro que la desigualdad es cierta si $k > s$, pues la desingularización para V desingulariza a V_f (tal vez más de lo necesario). Si se supone que $s = k$, como se está

suponiendo que todas las singularidades de $\mathfrak{F}_{V_f}^1$, son simples, entonces cada singularidad de \mathfrak{F}_V^1 tiene número de Milnor 1. Al utilizar un argumento similar al utilizado en la prueba del Lema 3.3.1 se llega a la conclusión de que la derivada de V en las singularidades es diagonalizable, lo cual es una contradicción porque se supuso que V no era una curva generalizada.

Ahora, asumiendo que el teorema ya se ha probado para todas las singularidades que necesitan $l \in N$ o menos explosiones para desingularizarse, sea V un campo que necesita $l + 1$ explosiones para desingularizarse. Al explotar una vez V_f , todas las singularidades p_1, \dots, p_s que aparecen en $\mathfrak{F}_{V_f}^1$ son singularidades de \mathfrak{F}_V^1 , y se tienen los mismos casos que antes:

1) V es una curva generalizada. Como las singularidades de $\mathfrak{F}_{V_f}^1$, p_1, \dots, p_s , son singularidades de \mathfrak{F}_V^1 , y cada una de ellas necesita a lo más l explosiones para desingularizarse, entonces se tiene que $\mu(V, p_i) \geq \mu(V_f, p_i)$ (por la hipótesis de inducción), por lo que al utilizar el Teorema 3.2.1 junto con la Ecuación 3.4, se sigue el resultado.

2) V no es una curva generalizada. Se tienen nuevamente dos casos:

2a) Las singularidades de $\mathfrak{F}_{V_f}^1$, p_1, \dots, p_s , son todas las singularidades de \mathfrak{F}_V^1 , y al menos una de ellas no es una curva generalizada, por lo que

$$\mu(\mathfrak{F}_V^1, p_i) > \mu(\mathfrak{F}_{V_f}^1, p_i)$$

entonces, por la hipótesis de inducción

$$\sum_{i=1}^s \mu(\mathfrak{F}_V^1, p_i) > \sum_{i=1}^s \mu(\mathfrak{F}_{V_f}^1, p_i);$$

de donde nuevamente se sigue el resultado al utilizar el Teorema 3.2.1 junto con la Ecuación 3.4.

o bien,

2b) \mathfrak{F}_V^1 tiene, además de p_1, \dots, p_s , singularidades adicionales p_{s+1}, \dots, p_k , entonces nuevamente se utiliza la hipótesis de inducción en las singularidades que tienen en común $\mathfrak{F}_{V_f}^1$ y \mathfrak{F}_V^1 , pero como \mathfrak{F}_V^1 tiene además más singularidades, entonces es claro que

$$\sum_{i=1}^k \mu(\mathfrak{F}_V^1, p_i) > \sum_{i=1}^s \mu(\mathfrak{F}_{V_f}^1, p_i)$$

de donde otra vez se sigue el resultado al utilizar el Teorema 3.2.1 junto con la Ecuación 3.4. \square

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors, “Complex Analysis: an Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable”, New York: McGraw-Hill.
- [2] V. I. Arnol’d, “Ordinary Differential Equations”, Springer-Verlag.
- [3] V. I. Arnol’d, S. M. Gussein-Zade y A.N. Varchenko, “Singularities of differentiable maps”. Volume 1. Birkhauser.
- [4] T. Bröcker y K. Jänich, “Introduction to Differential Topology”, Cambridge University Press.
- [5] C. Camacho y P. Sad, “Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields”, *Ann. of Math.* 115 (1982) 83-94.
- [6] C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad, “Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields”, *J. Differential Geometry*. Volume 20, Number 1 (1984), 143-174.
- [7] H. Dulac, “Recherches sur les points singuliers des équations différentielles”, *J. École Polytechnique* 2 (1904), 1-125.
- [8] V. Guillemin y A. Pollack, “Differential Topology”, New York, NY: Prentice Hall.
- [9] Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, “Lectures on Analytic Differential Equations”, *Graduate Studies in Mathematics*, Volume 86, American Mathematical Society.
- [10] J. F. Mattei y R. Moussu, “Holonomie et intégrales premières”, *Ann. Sci. École Normale Supérieure* (4) 13 (1980) 469-523.
- [11] J. Milnor, “Morse theory”. *Annals of Mathematics Studies*, No. 51.
- [12] J. Milnor, “Topology from the differentiable viewpoint”, *Princeton Landmarks in Mathematics*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [13] H. Poincaré, “Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles”, Thèse, Paris, 1879.

Índice alfabético

índice, 9, 15, 19

banda de Möbius compleja, 50

campo vectorial holomorfo, 8
Característica de Euler, 20, 29
concatenación de curvas, 11
curva generalizada, 60

Encaje de Whitney, 26
esquinas, 53

gérmen de función holomorfa, 31
grado de una función, 17

homotopía, 10
homotopía de curvas cerradas, 10

isotopía, 21

Lema de Hadamard, 21
Lema de Hopf, 25

mapeo de Gauss, 24, 28
Marston Morse, 29

peso, 53
punto regular, 8, 18
punto singular, 8
punto singular simple, 16

separatriz, 60
superficie de Riemann, 49

Teorema de Gauss-Bonnet, 25
Teorema de la Separatriz, 62
Teorema de Sard, 24
Teorema de Stokes, 12

Teorema del Residuo, 11
Teorema Fundamental del Álgebra, 13

valor regular, 18
variedad k -diferenciable, 18
variedad k -diferenciable con frontera,
18
variedad topológica, 18