



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ACATLÁN**

**APLICACIÓN DEL ALGORITMO WHITTAKER-  
HENDERSON PARA LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS  
DE MORTALIDAD**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADO EN ACTUARÍA**

**PRESENTA  
CARLOS MIGUEL PÉREZ SAÍNZ**

**ASESOR: VÍCTOR MANUEL ULLOA ARELLANO**

Fecha: Mayo 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Contenido

Introducción .....	4
Planteamiento del problema .....	5
1.1. Objetivo General .....	6
1.2. Objetivos Específicos .....	6
1.3. Justificación del Problema .....	7
1.4. Importancia .....	7
1.5. Delimitaciones del problema.....	8
Marco Teórico .....	9
2.1. Antecedentes históricos.....	9
2.2. Tablas de Mortalidad.....	11
2.3. Limitaciones de las Tablas de Vida.....	12
2.4. Características de las Tablas de Mortalidad .....	12
2.5. Construcción de una Tabla de Mortalidad .....	13
2.5.1. Función de Sobrevivientes .....	14
2.5.2. Función de Defunciones.....	15
2.5.3. Función de Probabilidad de Muerte .....	16
2.5.4. Función de Probabilidad de Supervivencia .....	17
2.5.5. Función de Tiempo Vivido .....	18
2.5.6. Función de Tiempo Vivido entre $x$ y $\omega$ .....	20
2.5.7. Función Esperanza de Vida a la Edad $x$ .....	21
Metodología .....	22
3.1. Tablas de Mortalidad Abreviadas.....	22
3.1.1. Método Greville .....	23
3.1.2. Método Reed-Merrell.....	26
3.2. Tablas de Mortalidad Completas.....	26
3.2.1. Método Whittaker - Henderson.....	27
3.2.1.1. Fórmula de Whittaker – Henderson, Tipo A.....	28
3.2.1.2. Fórmula Whittaker-Henderson Tipo B.....	33
3.2.1.2.1. Método de Cholesky.....	43
3.3. Pruebas Estadísticas .....	47
3.3.1. Ji-Cuadrada.....	47
3.3.2. Prueba de Signos .....	48

3.3.3. Prueba de Rachas .....	49
Estructura del Programa .....	50
4.1. Captura de Datos .....	50
4.1.1. Captura de Datos para la Construcción de una Tabla de Mortalidad Abreviada .....	53
4.1.2. Captura de Datos para la Construcción de una Tabla de Mortalidad Completa.....	55
4.1.2.1. Captura de datos para el Método Whittaker-Henderson, Tipo A.....	56
4.1.2.2. Captura de datos para el Método Whittaker-Henderson, Tipo B, con Probabilidades Proporcionadas.....	57
4.1.2.3. Captura de datos para el Método Whittaker-Henderson, Tipo B, con Tabla de Mortalidad para Hombres, México 2010 y con Tabla de Mortalidad para Mujeres, México 2010..	58
4.2. Proceso de Programación.....	59
4.2.1. Métodos Clásicos de Greville y Reed-Merrel .....	59
4.2.2. Método de Whittaker-Henderson, Tipo A.....	62
4.2.3. Método de Whittaker-Henderson, Tipo B.....	67
Resultados .....	74
5.1. Tablas de Mortalidad Abreviadas.....	74
5.1.1. Tabla de Mortalidad Abreviada construida con los métodos de Greville y de Reed- Merrel utilizando Tasas Centrales de Mortalidad de Hombres para México, 2010-2015.....	75
5.1.2. Tabla de Mortalidad Abreviada construida con el método de Greville y de Reed-Merrel utilizando Tasas Centrales de Mortalidad de Mujeres para México, 2010-2015 .....	76
5.2. Tablas de Mortalidad Completas.....	77
5.2.1. Comparación gráfica entre las probabilidades de muerte crudas y las suavizadas con la fórmula Tipo A de Whittaker-Henderson .....	77
5.2.2. Comparaciones gráficas entre las probabilidades de muerte crudas y las suavizadas con la fórmula Tipo B de Whittaker-Henderson.....	79
Conclusiones .....	80
Anexos.....	80
Glosario.....	80
Referencias.....	80

## Introducción

Al estudiar la mortalidad de una población determinada, es común que se presenten errores a causa de que los datos recolectados no son cien por ciento fidedignos. Lo anterior se ve reflejado al momento de observar una gráfica de los datos obtenidos, ya que normalmente, en la práctica, es posible notar irregularidades en las gráficas con las que se está trabajando, es decir, hay ciertos picos que no son normales.

Es por lo anterior, que se busca encontrar un método numérico para la suavización de tales probabilidades de muerte sin que estas estén muy alejadas de las reales.

El método que se propone en la presente tesis es el de Whittaker-Henderson, el cual, consiste en darle cierta ponderación a la suavización para, de esta forma, realizar un ajuste a los datos acorde a la importancia que uno le quiera dar, diferenciándose así de los métodos paramétricos, los cuales, ajustan la información a una curva predeterminada.

Sin embargo, el algoritmo mencionado presenta el inconveniente de ser demasiado laborioso, pues, de llevarse a cabo, requiere de operaciones con matrices de dimensión grande, por lo cual se vuelve necesario el desarrollo de una aplicación, mediante Macros en Excel, que facilite el trabajo anteriormente expuesto.

En el primer capítulo se presentan más detalles del problema y del objetivo anteriormente citados, para posteriormente presentar el marco teórico en el que se introduce a la teoría de las tablas de mortalidad. Una vez que se han comprendido las bases del capítulo 2, en el capítulo 3 se habla más a fondo del método mencionado en el párrafo anterior, en el capítulo subsecuente se explica cómo fue el desarrollo de la aplicación para llegar a los resultados mostrados en el capítulo 5 y por último se hace una conclusión del trabajo.

## Planteamiento del problema

La observación y la experimentación constituyen la base del conocimiento científico. Ellas suministran la información necesaria para crear, estructurar y verificar teorías científicas. Cuanto más precisa sea esta información, más ajustadas a la realidad podrán ser las descripciones y prescripciones de las correspondientes teorías. Dicha información está constituida por un conjunto de datos o mediciones. Consecuentemente, uno de los objetivos del proceso científico es proyectar experimentos e instrumentos que permitan medir, con la mayor aproximación posible, las constantes y las magnitudes implicadas en los procesos que se investigan. Las mediciones pueden estar afectadas por equivocaciones en las lecturas y por errores sistemáticos y accidentales. Estos últimos, llamados también errores azarosos, son inevitables, son inherentes a los procesos mismos de las mediciones (Cernuschi y Greco, 1968).

Tal es el caso de las Tablas de Mortalidad. En el afán de describir y estudiar la naturaleza de la mortalidad se han desarrollado metodologías para que los datos conseguidos de la población sean cada vez más fidedignos. Con estos métodos se ha conseguido cada vez una mayor exactitud gracias al avance de la técnica. Pero, a pesar de estas mejoras, el hombre sigue encontrando la barrera de la precisión (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010). Y es ciertamente aquí donde se encuentra nuestro problema de la graduación o suavización de datos, que busca nivelar, en la medida de lo posible, la realidad con los datos obtenidos de esta.

Suponga que, ya sea como resultado de la observación u otro tipo de experiencia, se han conseguido algunos datos que forman un conjunto de valores de cierta variable, sin importar cuál sea la fuente de la que hemos conseguido dichos datos, por fiel que sea y por lo más precisos que sean los instrumentos que utilizamos para nuestra medición, siempre tendrán ciertos errores. Por ejemplo, al realizar los censos de población, siempre se

presentan errores de observación que no se pueden controlar y también problemas de medición como la doble respuesta, la no respuesta o la falta de comprensión (Ellis, 2011). Otro ejemplo puede ser cuando se realiza un muestreo para calcular el total de la población enferma para evaluar su probabilidad de muerte, de manera que, si hiciéramos un nuevo muestreo sobre la misma población obtendríamos, muy probablemente, datos diferentes.

Esto habla de una diferencia en la regularidad de los datos que puede existir de manera gradual. Por lo tanto, antes de poder utilizar dichos datos debemos de analizarlos, y de ser necesario, someterlos a un proceso de suavización (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010). Dicho proceso podría hacerse gráficamente, pero sus resultados no son muy confiables (Ellis, 2011), por eso es necesario utilizar un procedimiento más refinado como lo es la elaboración de un software que se encargue de la construcción de una tabla de mortalidad (también conocida como tabla de vida) abreviada, a partir del método Greville y Reed–Merrell, y de una completa, mediante la suavización de las probabilidades de muerte con el algoritmo de Whittaker-Henderson.

### **1.1. Objetivo General**

Programar una aplicación que construya tablas de mortalidad a partir de probabilidades de muerte suavizadas mediante el algoritmo de Whittaker-Henderson.

### **1.2. Objetivos Específicos**

- II. Estudiar los métodos de Greville y Reed-Merrell, frecuentemente usados para la construcción de tablas abreviadas de vida.
- III. Elaborar una tabla de mortalidad siguiendo los métodos anteriores.
- IV. Estudiar el método de Whittaker-Henderson para conocer su funcionamiento.
- V. Aplicar el Método Whittaker-Henderson para suavizar las probabilidades de muerte y a partir de estas obtener una tabla de vida ajustada.
- VI. Implementar el método Whittaker-Henderson de forma computacional.

- VII. Probar el programa con distintos datos reales para las diferentes opciones del programa.
- VIII. Analizar los resultados obtenidos y llegar a una conclusión.

### **1.3. Justificación del Problema**

Las tablas de vida, con las probabilidades de muerte debidamente ajustadas, son útiles para medir la mortalidad de una población pero su proceso de elaboración a veces puede resultar largo y con cálculos muy extensos, por eso resulta conveniente el desarrollo de un software que facilite la construcción de dichas tablas, optimizando así, el tiempo empleado por entes gubernamentales y/o privados en el análisis demográfico.

### **1.4. Importancia**

Comúnmente los datos que se obtienen para calcular de las probabilidades de muerte contienen fluctuaciones y algunas irregularidades después de los 30 o 40 años (Capa y Lara, 2002), debidas al proceso de tratamiento, de interpolación y a errores de diversos tipos que presenta la información básica.

Por ejemplo, en el siglo XVII, las primeras tablas de mortalidad se elaboraban con base en datos que cubrían un determinado periodo de tiempo. En estos períodos se incluían años de epidemias severas y también años de salud relativamente buena (Camarasa, 2011), de tal forma que la tabla de vida resultante reflejaba un panorama de las condiciones promedio en esos tiempos.

Y aunque, con lo anterior, se pueda decir que en la actualidad la calidad de vida es mejor que en siglos anteriores, no se recomienda dejar a un lado factores que pueden aumentar la mortalidad en ciertos años.

Es por esto que, para construir una tabla de mortalidad más confiable y con menos variación en la representación probabilística de la realidad, se debe de hacer una graduación de los datos. Sin embargo para llevar a cabo dicha suavización, son necesarios muchos

cálculos y álgebra de matrices, por lo que se vuelve necesaria la existencia de una aplicación que facilite las tareas anteriormente mencionadas.

### **1.5. Delimitaciones del problema**

Programación de una aplicación para construir tablas de mortalidad implementando el algoritmo de Whittaker-Henderson en el programa computacional Microsoft Excel mediante Macros de Visual Basic.

## Marco Teórico

En este capítulo se presenta la teoría que involucra a las tablas de mortalidad no sin antes dar a conocer los antecedentes históricos de las mismas.

### 2.1. Antecedentes históricos

Desde el inicio de la civilización ya existían formas primitivas de estadísticas, pues se tienen registros de que se utilizaban representaciones gráficas y simbólicas, en paredes de cuevas y pieles, para contar el número de personas, animales, y otros recursos esenciales para la existencia de la misma (Hernández, 2005).

Hacia el año 3000 A.C. en Babilonia se trabajaba con pequeñas tablillas de arcilla para recabar datos sobre la producción agrícola y su comercio mediante trueque. Por otra parte, los egipcios estudiaban los datos de la población y renta del país antes de la construcción de sus pirámides. En los libros del antiguo testamento, Números y Crónicas, se encuentran dos censos de la población de Israel y una descripción del bienestar material de las diversas tribus judías respectivamente. En Grecia alrededor del año 594 A.C. se realizaban censos para calcular los impuestos que los ciudadanos debían pagar (Hernández, 2005).

Sin embargo, el gobierno del imperio romano fue el primero en recopilar datos sobre la población, superficie y renta de todos los territorios bajo su control a gran escala. Tras la caída del imperio Romano, durante la edad media los reyes carolingios, Pepino el Breve y Carlomagno, ordenaron hacer estudios minuciosos de las propiedades de la Iglesia en los años 758 y 762, respectivamente (Hernández, 2005).

Después de la conquista de Inglaterra por parte de los normandos en 1066, el rey Guillermo I de Inglaterra mando a hacer un censo en 1086, la información obtenida, aún en

nuestros días, se encuentra en el “Libro de Winchester” (Hernández, 2005). A principios del siglo XVI en Inglaterra comenzaron a efectuarse registros de nacimientos y defunciones y para 1662 John Graunt, un mercero y comerciante de tejidos inglés (considerado el primer demógrafo de la historia), publicó un libro llamado “Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality”, el cual, contenía una compilación de nacimientos y muertes en Londres de 1604 a 1661 y que se convirtió en un parte aguas en el uso de la estadística de muestreo y en el cálculo de las probabilidades (Hernández, 2005).

En 1691 en la ciudad de Breslau, Alemania, un científico y clérigo local llamado Caspar Neumann quiso desmentir la superstición que se tenía con respecto a la relación de las fases de la luna, las estrellas y los planetas con las fechas de nacimiento y muerte de las personas y para ello se basó en los registros de nacimientos y muertes recopilados por los padres de Breslau. Los resultados de estos estudios los mostró a otro científico de nombre Gottfried Leibniz, miembro de la “Royal Society” de Londres, quien los presentó a la misma (Hernández, 2005).

Los datos que Leibniz enseñó a la Royal Society, contenían datos mensuales de Breslau para los años 1687 a 1691; estos datos incluían año y sexo para todas las muertes y el número de nacimientos por cada año (Hernández, 2005).

Lo anterior atrajo la atención del astrónomo inglés Edmund Halley, otro miembro de esta sociedad, que sabía de ciertas fallas en el trabajo de Graunt, fallas que el mismo Graunt conocía: él sólo tenía la cantidad y causas de las defunciones, así que, a falta de los registros de las edades de muerte, tuvo que estimar ciertos datos (Hernández, 2005).

Cómo Halley había prometido un artículo a la “Royal Society” para su nuevo periódico, “Transactions”, y estaba buscando un tema poco usual, decidió, para el mismo, complementar el trabajo de Graunt con los datos de Neumann y construyó nuevas tablas de mortalidad, las cuales, publicó en 1693 (Hernández, 2005).

Tiempo después en 1783, Richard Price publica la Tabla de Northampton, una nueva tabla de mortalidad que reemplazó a la de Halley y que fue ampliamente utilizada por las

compañías aseguradoras británicas hasta bien entrado el siglo XIX (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010).

En la actualidad, la estadística se ha convertido en un método eficaz para describir con validez los valores de los datos económicos, sociales, y naturales, y sirve como herramienta para relacionar, analizar y predecir dichos datos. La labor del estadístico ya no se limita solo a reunir y tabular los datos, sino que también debe interpretar esa información. El avance de la teoría de la probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la estadística. Muchos conjuntos de datos se pueden aproximar con gran precisión, utilizando determinadas distribuciones probabilísticas; los resultados de éstas se pueden utilizar para analizar datos estadísticos. La probabilidad es útil para comprobar la fiabilidad de las inferencias estadísticas y para predecir los muestreos necesarios en un determinado estudio estadístico (Hernández, 2005).

## **2.2. Tablas de Mortalidad**

Una Tabla de Mortalidad o de vida sirve para explicar el proceso de extinción de una generación hasta la desaparición del último integrante en un periodo determinado. Es posible construir una tabla de vida para el total de la población o para subgrupos específicos como hombres, mujeres o personas que sufren alguna enfermedad, por poner ejemplos (Organización Panamericana de la Salud, 2003).

La forma más práctica de construirlas es aplicando la experiencia de mortalidad a una cohorte ficticia de 100,000 nacidos vivos o en general de 10K sujetos ( $K=1000$ ) mediante tasas de mortalidad específicas por edad (Organización Panamericana de la Salud, 2003).

Aunque el cálculo este basado en una parte “ficticia” (el tamaño de población), la tabla de vida refleja una experiencia de mortalidad de la población aproximada a la “real”, haciéndola una herramienta útil para estimar la mortalidad, sobrevivencia y esperanza de vida a nivel nacional y para comparar datos de mortalidad a nivel internacional (Organización Panamericana de la Salud, 2003).

### **2.3. Limitaciones de las Tablas de Vida**

La Tabla de Mortalidad tiene las mismas limitaciones que presenta cualquier medida basada en censos de población y registros vitales (Organización Panamericana de la Salud, 2003):

- I. Los datos sobre las edades y los registros de mortalidad pueden ser incompletos o sesgados.
- II. La mortalidad infantil influye de manera significativa en la esperanza de vida, por lo que el registro de este indicador, puede afectar de manera sensible los resultados de las tablas.
- III. La Tabla de Mortalidad resultante también podría verse afectada dependiendo del procedimiento que se elija para cerrar el intervalo abierto final de la tabla de vida y de los errores de información que subyacen en dichos intervalos (85 y más, 90 y más).
- IV. Es posible también que se omitan diferencias importantes en grupos específicos de edad o sexo con alta mortalidad, que podrían afectar el cálculo de la esperanza de vida general.
- V. No es recomendable hacer Tablas de Mortalidad de poblaciones pequeñas, porque su estructura poblacional es afectada de manera más significativa por movimientos migratorios que si la población fuera grande. En estos casos suele obtenerse un número muy pequeño de defunciones que en consecuencia producen cálculos imprecisos.

### **2.4. Características de las Tablas de Mortalidad**

Las principales características de las Tablas de Vida son las siguientes (INEI, 2011):

- I. Permiten describir el comportamiento de la mortalidad por edades y hacer comparaciones por sexo.
- II. Permiten obtener probabilidades de muerte, las cuales son útiles para realizar diferentes análisis demográficos.

- III. Permiten calcular la esperanza de vida para las diferentes edades o grupos de edad, principal medida para medir la calidad de vida de una población.
- IV. Una tabla de mortalidad puede ser llevada a un modelo teórico de población, llamado población estacionaria, la cual se consigue manteniendo constantes en el tiempo la mortalidad y la natalidad. En ella la tasa de natalidad es igual a la tasa de mortalidad y la tasa de crecimiento es 0.
- V. Se pueden utilizar para resolver una gran variedad de problemas, tales como: evaluación de programas de salud, análisis de fecundidad y migración, estudios socioeconómicos, regulación en sistemas de jubilaciones, etc.
- VI. Se pueden crear tablas de vida para edades simples o para grupos de edad. Cabe señalar que cuando se trabaja por grupos el más habitual es el quinquenal (grupo de cinco años); sin embargo, a causa de las fuertes diferencias en mortalidad que se presentan en los primeros años de vida, se recomienda que el primer grupo se presente en forma individual, especialmente a la edad 0.

## **2.5. Construcción de una Tabla de Mortalidad**

La construcción de una Tabla de Vida, se realiza en cuatro fases distintas (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010):

- I. Fase. Obtención y tratamiento de la información: La información obtenida debe ser cuidadosamente examinada en cuanto a inconsistencias, sesgos y otras fuentes de error.
- II. Fase. Cálculo y suavización de las probabilidades de muerte: Una vez tratados los datos se procede al cálculo y graduación de las probabilidades de muerte.
- III. Fase. Validación: Se aplican pruebas estadísticas pertinentes para evaluar la calidad de la graduación de los datos.
- IV. Fase. Cálculo de las columnas restantes de la tabla de vida: Ya con las tasas suavizadas, se concluye con la construcción de la tabla de mortalidad calculando, por columna, una serie de funciones con respecto a la edad.

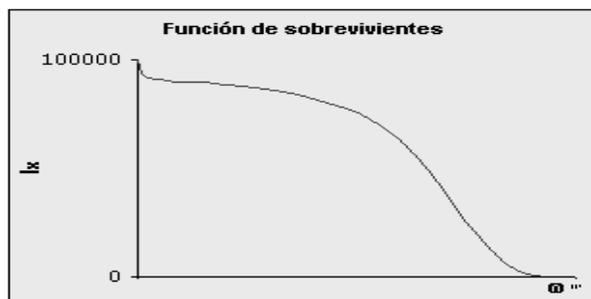
Cada una de las funciones mencionadas en la fase IV tiene muchas aplicaciones dentro del campo demográfico, por lo que en los apartados siguientes se dan explicaciones, tanto de sus interpretaciones como de sus fórmulas de cálculo.

No sin antes aclarar que el desarrollo de la presente tesis únicamente trata las tres últimas fases debido a que tratar tan solo la primera ya es material suficiente para una tesis completa.

### 2.5.1. Función de Sobrevivientes

Esta función representa el número de personas de la generación inicial que consiguieron llegar con vida a la edad exacta " $x$ " y se denota como  $l_x$ . El valor  $l_0$  representa el tamaño de la cohorte inicial (nacimientos) a edad 0 y se conoce como "raíz de la tabla", que, como se mencionó anteriormente, se acostumbra a ser de 100,000 individuos. Por otra parte, se representa con  $\omega$ , la edad a la que muere el último miembro de la generación, es decir,  $l_\omega = 0$  (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997). La gráfica siguiente refleja el comportamiento general de esta función:

Gráfica 2.1: Función de Sobrevivientes



Fuente: Sesión 8 del Curso de Análisis Demográfico de la CCP

La altura de la gráfica es el número de vivos a edad  $x$ . La forma de la curva depende de la mortalidad que se da en la población.

### 2.5.2. Función de Defunciones

Esta función representa el número de defunciones de la generación inicial, ocurridas entre las edades " $x$ " y " $x + 1$ " y se denota como  $d_x$  (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (1).$$

Si se trabaja con grupos de edades, entonces la función de defunciones se denota como  ${}_n d_x$ , donde " $n$ " es el número de años del grupo y se interpreta como el número de muertes de la generación inicial, ocurridas entre las edades " $x$ " y " $x + n$ ". En este caso la función de defunciones se puede calcular de la siguiente manera (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \quad (2).$$

La edad donde la función  $d_x$  alcanza el valor máximo, se le conoce como la edad modal de las defunciones. En esta edad es donde se producen la mayor cantidad de muertes; a medida que los patrones de mortalidad disminuyen. La edad modal de la mortalidad generalmente varía entre los 65 y los 85 años (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997).

Gráfica 2.2: Función de Defunciones



Fuente: Sesión 8 del Curso de Análisis Demográfico de la CCP

### 2.5.3. Función de Probabilidad de Muerte

Esta función representa la probabilidad de que una persona perteneciente a la cohorte hipotética muera a la edad cumplida  $x$  y se denota como  $q_x$  y de acuerdo con el concepto de probabilidad es la relación que hay entre  $d_x$  y  $l_x$ , es decir, la relación entre los casos favorables (defunciones ocurridas a la edad cumplida " $x$ ") y el total de los casos (sobrevivientes a la edad " $x$ "), (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \quad (3).$$

Gráfica 2.3: Función de Probabilidad de Muerte



Fuente: Sesión 8 del Curso de Análisis Demográfico de la CCP

Al trabajar con grupos de edades, la probabilidad de muerte entre las edades " $x$ " y " $x + n$ " se representa con  ${}_nq_x$  y se calcula con la siguiente ecuación (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad (4).$$

También es posible calcular la probabilidad de muerte a partir de tasas de mortalidad, si  $m_x$  es la tasa de mortalidad para la edad cumplida " $x$ ", entonces (Curso de Análisis Demográfico de la CCP, 2012):

$$m_x = \frac{d_x}{N_x} \quad (5)$$

donde:

$\overline{N}_x$  : Representa la población media de edad cumplida "x". Pero bajo el supuesto de que para edades de 5 o más años las defunciones se presentan aleatoriamente durante el año, la población media puede ser aproximada por:

$$\overline{N}_x = l_x - \frac{1}{2}d_x \quad (6)$$

y en consecuencia, al sustituir (6) en (5):

$$m_x = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x} = \frac{\frac{d_x}{l_x}}{1 - \frac{1}{2}\frac{d_x}{l_x}} \cdot \frac{l_x}{l_x} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x}$$

entonces, tras realizar simples despejes, la función  $q_x$  es equivalente también a:

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x} \quad (7).$$

#### 2.5.4. Función de Probabilidad de Supervivencia

Con ayuda de las probabilidades de muerte  $q_x$  y  ${}_nq_x$ , se pueden calcular las probabilidades de supervivencia denotadas como  $p_x$  y  ${}_np_x$ , las cuales representan la probabilidad de sobrevivir entre las edades "x" y "x + 1" y entre "x" y "x + n" respectivamente. La función de supervivencia se calcula con la siguiente ecuación (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (8).$$

Para el caso de edades simples, y para grupos de edades (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (9)$$

por otra parte el complemento de  $p_x$  es el siguiente:

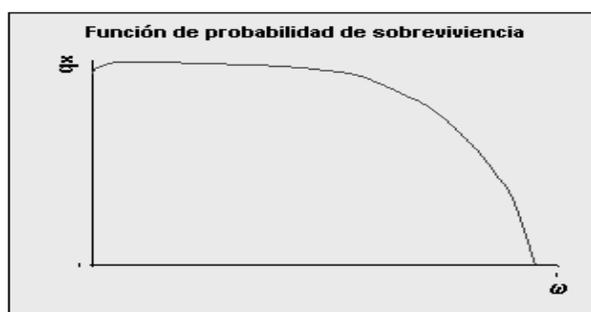
$$1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x$$

por lo tanto:

$$p_x = 1 - q_x \quad (10).$$

La función se comporta de la siguiente manera:

Gráfica 2.4: Función de Probabilidad de Supervivencia



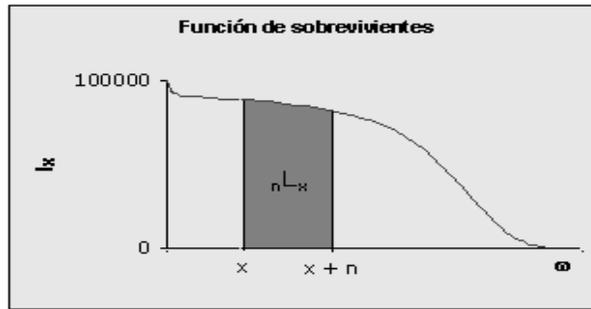
Fuente: Sesión 8 del curso de Análisis Demográfico de la CCP

### 2.5.5. Función de Tiempo Vivido

Esta función calcula el número de años que vive toda la generación entre las edades " $x$ " y " $x + 1$ " o, de manera general, entre las edades " $x$ " y " $x + n$ " y se denota por  ${}_nL_x$ .

El principal problema en determinar el valor de esta medida radica en evaluar el aporte en tiempo vivido de las personas que mueren entre estas edades calculando el área comprendida por este rango y mostrada en la siguiente gráfica (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997).

Gráfica 2.5: Tiempo Vivido



Fuente: Sesión 8 del curso de Análisis Demográfico de la CCP

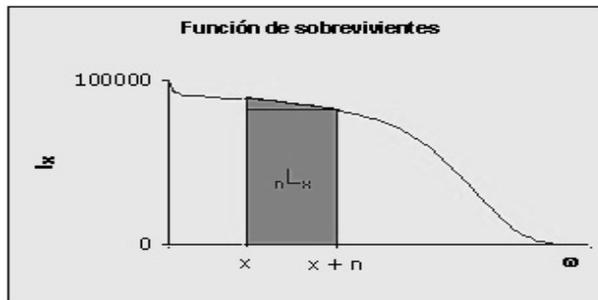
Para lograr lo expuesto anteriormente se debe resolver la siguiente ecuación:

$${}_nL_x = \int_0^n l_{x+t} dt .$$

Sin embargo, para efectos de practicidad, en esta tesis se trabajará con casos discretos, es decir con números de años enteros.

Por lo tanto, es necesario seccionar la gráfica anterior en figuras geométricas simples con la finalidad de facilitar el cálculo, obteniendo así un rectángulo y un triángulo, tal y como lo muestra la gráfica siguiente:

Gráfica 2.6: Tiempo Vivido Seccionado



Fuente: Sesión 8 del curso de Análisis Demográfico de la CCP

Finalmente se calcula el tiempo vivido sumando las áreas de las figuras anteriores:

$${}_nL_x = n \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{2} + nl_{x+n}$$

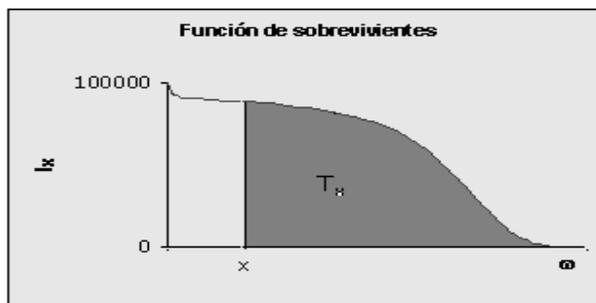
simplificando la fórmula mediante algebra se llega a la siguiente expresión:

$${}_nL_x = n \cdot \frac{l_x + l_{x+n}}{2} \quad (11).$$

### 2.5.6. Función de Tiempo Vivido entre $x$ y $\omega$

Esta función corresponde al tiempo que le falta por vivir a la generación hasta su extinción a partir de la edad “ $x$ ” y se denota por  $T_x$  (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997). De manera grafica se ve de la siguiente manera:

Gráfica 2.7: Tiempo vivido entre  $x$  y  $w$



Fuente: Sesión 8 del curso de Análisis Demográfico de la CCP

Como lo que interesa es el área sombreada, esta se calcula a partir de la integral:

$$T_x = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt$$

pero, como se mencionó anteriormente, es más fácil trabajar con el caso discreto, por lo tanto la manera más sencilla de resolver este problema es sumando las aportaciones año por año de la generación desde  $x$  a  $\omega$ .

Matemáticamente la fórmula sería la siguiente:

$$T_x = \sum_{i=x}^{\omega-1} {}_nL_i \quad (12).$$

### 2.5.7. Función Esperanza de Vida a la Edad $x$

La esperanza de vida para una persona de edad " $x$ " se denota por  $e_x$  y mide el número promedio de años que le restaría por vivir a la generación. Se obtiene de la razón entre el número de años que le resta vivir a la generación completa y el número de sobrevivientes a edad " $x$ " (Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt, 1997):

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \quad (13).$$

En resumen una Tabla de Vida es un instrumento sencillo de utilizar y que refleja el comportamiento de mortalidad y sobrevivencia de una población específica a través de un periodo de tiempo determinado, por lo cual resulta de gran utilidad conocer algunos procedimientos usados corrientemente para su construcción.

## Metodología

De acuerdo a la extensión de los intervalos de edades para los cuales las tablas de mortalidad son construidas, estas se clasifican en abreviadas y completas (INEI, 2011).

En el presente capítulo se detallan las características y la metodología a seguir para la elaboración de cada tipo.

### 3.1. Tablas de Mortalidad Abreviadas

Las tablas de mortalidad Abreviadas son aquellas en que las diferentes funciones se calculan por grupos de edades, generalmente quinquenales, son las más usadas ya que permiten agrupar los propósitos demográficos (como el estudio de las condiciones de vida de la población infantil y juvenil para planificaciones de la salud, por ejemplo) y son más fáciles de construir (INEI, 2011).

Para la elaboración de este tipo de tablas, en América Latina, se emplean los métodos de Greville y de Reed-Merrel debido a que el primer método es muy útil cuando se trabaja con datos no equidistantes (el primer quinquenio se divide entre los grupos de edades  $[0,1)$  y  $[1,5)$  por la alta mortalidad que presentan los recién nacidos durante el primer año de vida) y a que la fórmula del segundo método es relativamente simple de implementar, aun así, es importante señalar que para ambos métodos se utilizan tasas centrales de mortalidad (INEI,2011).

En los apartados posteriores se ilustran a mayor detalle los métodos anteriormente citados.

### 3.1.1. Método Greville

Este método, sugerido por T.N.E. Greville en 1943, convierte las tasas centrales de mortalidad observadas a probabilidades de muerte partiendo del supuesto de que  $l_x$  es una función lineal y considerando el intervalo de tiempo continuo  $[0,n)$ , (Caswell y Keyfitz, 1977).

A continuación se muestra el desarrollo de la fórmula (Caswell y Keyfitz, 1977):

De acuerdo al libro “Actuarial Mathematics” de la Society Of Actuaries, las tasas centrales de mortalidad, en tiempo continuo, se calculan mediante la siguiente igualdad:

$${}_n m_x = \frac{\int_0^n l_{x+t} \cdot \mu(x+t) dt}{\int_x^{x+n} l_t dt} \quad (14)$$

donde  $\mu(x)$  es la tasa instantánea de mortalidad definida, por el libro anterior, cómo:

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{{}_n q_x}{n} = -\frac{1}{l_x} \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \frac{l_{x+n} - l_x}{n} = -\frac{l'_x}{l_x} \quad (15)$$

la expresión (14) es equivalente a:

$${}_n m_x = \frac{\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} l_{x+\frac{n}{2}+t} \cdot \mu\left(x + \frac{n}{2} + t\right) dt}{\int_x^{x+n} l_t dt}$$

luego, expandiendo cada uno de los factores del denominador a una serie de Taylor y resolviendo la integral se obtienen las siguientes fórmulas:

$${}_n m_x = \frac{\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \left[ l_{x+\frac{n}{2}} + t \cdot l'_{x+\frac{n}{2}} \right] \cdot \left[ \mu\left(x + \frac{n}{2}\right) + t \cdot \mu'\left(x + \frac{n}{2}\right) \right] dt}{\int_x^{x+n} l_t dt}$$

$${}_n m_x = \frac{\left[ t \cdot l_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu\left(x + \frac{n}{2}\right) + \frac{t^3}{3} \cdot l'_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu'\left(x + \frac{n}{2}\right) \right]_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}}{\int_x^{x+n} l_t dt}$$

$${}_n m_x = \frac{n \cdot l_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu\left(x + \frac{n}{2}\right) + \frac{n^3}{12} \cdot l'_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu'\left(x + \frac{n}{2}\right)}{\int_x^{x+n} l_t dt} \quad (16).$$

La ecuación anterior puede expresarse en términos conocidos considerando los tres posteriores puntos:

- I. Si  $l_x$  es una línea recta en el intervalo entre  $x$  y  $x+n$ , entonces  $n \cdot l_{x+\frac{n}{2}}$  es equivalente a  $\int_x^{x+n} l_t dt$ .
- II. Si  $\mu(x)$  es una línea recta en el intervalo entre  $x$  y  $x+n$ , entonces  $\mu\left(x + \frac{n}{2}\right)$  es equivalente a  $\frac{1}{n} \cdot \int_x^{x+n} \mu(t) dt$ .
- III. La integral  $\int_x^{x+n} l_t dt$  representa el número de años vividos dentro de un intervalo de  $n$  años, es decir, es igual a  ${}_n L_x$ .

Resultando:

$${}_n m_x = \frac{1}{n} \cdot \int_x^{x+n} \mu(t) dt + \frac{n^3}{12 \cdot {}_n L_x} \cdot l'_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu'\left(x + \frac{n}{2}\right) \quad (17)$$

despejando la integral se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_x^{x+n} \mu(t) dt = n \cdot {}_n m_x - \frac{n^4}{12 \cdot {}_n L_x} \cdot l'_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu'\left(x + \frac{n}{2}\right)$$

donde, al sustituir  $l'_{x+\frac{n}{2}}$  por  $-l_{x+\frac{n}{2}} \cdot \mu\left(x + \frac{n}{2}\right)$ , aproximar  $\frac{l_{x+\frac{n}{2}}}{{}_n L_x}$  por  $\frac{1}{n}$  y  $\mu\left(x + \frac{n}{2}\right)$  por  ${}_n m_x$  se puede obtener una estimación de la integral anterior:

$$\int_x^{x+n} \mu(t) dt \approx n \cdot {}_n m_x + \frac{n^3}{12} \cdot {}_n m_x \cdot {}_n m'_x.$$

La expresión anterior es similar a:

$$\int_x^{x+n} \mu(t) dt \approx n \cdot {}_n m_x + \frac{n^3}{12} \cdot {}_n m_x^2 \cdot \log({}_n m_x)' \quad (18)$$

donde, suponiendo que  ${}_n m_x = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} = \alpha \cdot C^x$  es una tasa central que crece exponencialmente en función de la edad,  $\log({}_n m_x)'$  es igual a  $\log C$ .

Por lo que la ecuación (18) es equivalente a:

$$\int_x^{x+n} \mu(t) dt \approx n \cdot {}_n m_x + \frac{n^3}{12} \cdot {}_n m_x^2 \cdot \log C \quad (19).$$

Ahora, recordando el concepto de tasa instantánea de mortalidad se cumple que:

$$-\frac{d(\log(l_t))}{dt} = \mu(t)$$

despejando y desarrollando:

$$d(\log(l_t)) = -\mu(t) dt$$

$$\log(l_{x+n}) - \log(l_x) = -\int_x^{x+n} \mu(t) dt$$

$$\log\left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right) = -\int_x^{x+n} \mu(t) dt$$

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu(t) dt}$$

$${}_n q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+n} \mu(t) dt} \quad (20)$$

sustituyendo (19) en (20):

$${}_n q_x = 1 - e^{-(n \cdot {}_n m_x + \frac{n^3}{12} \cdot {}_n m_x^2 \cdot \log C)} \quad (21).$$

pero, cómo en 1943 era sumamente difícil hacer cálculos exponenciales, Greville simplificó la expresión anterior a:

$${}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{n} + {}_n m_x \left( \frac{1}{2} + \frac{n}{12} ({}_n m_x - \log C) \right)} \quad (22)$$

donde el valor de  $C$  tiene poca influencia en la estimación de  ${}_nq_x$  debido a que los valores de  $\ln C$  están entre 0.080 y 0.104. Para facilitar los cálculos, es posible hacer de  $\ln C$  una constante y darle el valor de 0.095 (Siegel y Swanson, 2004).

En el apartado siguiente se procede a explicar el método de Reed-Merrel, basado en un caso particular de la fórmula (21), no sin antes aclarar que para poder comprender el paso que lleva a la fórmula (22), es necesario consultar el libro “Un método rápido para la construcción de una tabla abreviada” de Lowell J. Reed.

### 3.1.2. Método Reed-Merrell

Este método fue presentado en 1939 y es el más utilizado para obtener la probabilidad de muerte de personas de 5 años de edad en adelante (INEI, 2011), para obtener su fórmula se considera, en la ecuación (21), que  $\log C = 0.096$  (Caswell y Keyfitz, 1977) dando como resultado:

$${}_nq_x = 1 - e^{-n \cdot m_x - 0.008 \cdot n^2 m_x^2} \quad (23)$$

lo anterior obedece al hecho de que Reed y Merrel encontraron que con ese valor se podían producir resultados aceptables (Siegel y Swanson, 2004).

En conclusión, en las Tablas Abreviadas se puede analizar la evolución de la mortalidad en períodos cortos de tiempo, comparar las condiciones de mortalidad de diversas regiones o países y obtener las estimaciones básicas necesarias para otros trabajos demográficos, reservándose la metodología de las Tablas Completas para la elaboración de las tablas que se realizan cada decenio cuando se efectúa un nuevo censo de población, especialmente en aquellos países que cuentan con información estadística más confiable (INEI, 2011).

### 3.2. Tablas de Mortalidad Completas

Son aquellas tablas en que las diferentes funciones se elaboran para cada año de edad. Uno de los pasos, fundamentales para su construcción, es la graduación de las tasas de

mortalidad (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010), pues, recordando lo mencionado en el primer capítulo, se presentan incongruencias en el cálculo de probabilidades de muerte después de los 30 o 40 años debidas al procedimiento de interpolación seguido para su cálculo, siendo necesario suavizar estas empleando el método de Whittaker-Henderson, el cual, presenta la ventaja de no seguir una curva predeterminada (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010), permitiendo al usuario regular la graduación dentro de un margen que va, desde la reproducción exacta de los valores de  $q_x$  hasta valores ajustados que siguen el comportamiento de un polinomio de grado equivalente al orden de diferencia menos 1 (considerando la fórmula Tipo A) (Schuette, 1978).

### 3.2.1. Método Whittaker - Henderson

Este procedimiento, desarrollado entre 1923 y 1924 por E.T. Whittaker y Robert Henderson (Knorr, 1984), consiste en minimizar, considerando como incógnita a  $q_x$ , la expresión siguiente:

$$\sum_{x=0}^{\omega} W_x (q_x - q_x'')^2 + k \sum_{x=0}^{\omega-z} (\Delta^z q_x)^2 \quad (24)$$

donde:

$W_x$ : Es el coeficiente de ponderación.

$q_x''$ : Son las probabilidades de muerte a suavizar.

$q_x$ : Son las probabilidades de muerte suavizadas.

$\Delta^z$ : Es la diferencia finita de orden z, siendo z generalmente igual a 2 ó 3.

$k$ : Regula la importancia asignada al segundo sumando de la expresión.

$\omega$ : La edad a la que muere el último miembro de la generación.

El primer sumando mide la proximidad entre las probabilidades originales y las suavizadas, mientras que el segundo mide la suavidad en la que cambian las tasas graduadas con respecto a la edad (Knorr, 1984).

El objetivo al minimizar la expresión anterior, es obtener un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son los valores de  $q_x$  (Knorr, 1984).

### 3.2.1.1. Fórmula de Whittaker - Henderson, Tipo A

Como en la época en la que se propuso esta fórmula no había recursos para hacer cálculos en poco tiempo, normalmente se suponía que  $W_x = 1$  (Knorr, 1984).

Para este caso particular de la fórmula, llamada Tipo A, es común que se fije un orden de diferencia  $z = 2$ , dado que, con este valor, es muy fácil trabajar con el método y se puede obtener un buen balance entre suavidad y ajuste en las probabilidades de muerte graduadas (Miller, 1946).

Morton D. Miller, en su libro "Elements of Graduation", propone el siguiente proceso de solución para  $z = 2$ :

Sea la ecuación a resolver:

$$WH(q_x) = \sum_{x=0}^{\omega} (q_x - q_x'')^2 + k \sum_{x=0}^{\omega-2} (\Delta^2 q_x)^2 \quad (25)$$

derivando (24) respecto a  $q_x$  e igualando a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(WH(q_x))}{dq_x} &= \frac{d(q_x - q_x'')^2}{dq_x} + k \cdot \frac{d(q_{x+2} - 2q_{x+1} + q_x)^2}{dq_x} + k \cdot \frac{d(q_{x+1} - 2q_x + q_{x-1})^2}{dq_x} \\ &+ k \cdot \frac{d(q_x - 2q_{x-1} + q_{x-2})^2}{dq_x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(WH(q_x))}{dq_x} &= 2(q_x - q_x'') + 2k \cdot (q_{x+2} - 2q_{x+1} + q_x) - 4k \cdot (q_{x+1} - 2q_x + q_{x-1}) \\ &+ 2k \cdot (q_x - 2q_{x-1} + q_{x-2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d(WH(q_x))}{dq_x} = (q_x - q_x'') + k \cdot (q_{x+2} - 4q_{x+1} + 6q_x - 4q_{x-1} + q_{x-2}) = 0$$

$$\frac{d(WH(q_x))}{dq_x} = (q_x - q_x'') + k \cdot \delta^4 q_x = 0 \quad (26)$$

despejando  $q_x''$  de (26):

$$q_x'' = (1 + k\delta^4)q_x \quad (27) .$$

La fórmula (27) es una ecuación en diferencia de cuarto orden y es equivalente a:

$$q_x'' = (1 + k\Delta^4 E^{-2})q_x \quad (28)$$

donde  $E^{-2}$  es un operador tal que:

$$E^{-2}(q_x) = q_{x-2} .$$

Por la simetría de la ecuación (28), parece razonable expresarla mediante los factores iniciales  $(1 - a\Delta + b\Delta^2)$  y  $(1 + a\Delta E^{-1} + b\Delta^2 E^{-2})$ , donde  $a$  y  $b$  deben satisfacer la identidad:

$$(1 + k\Delta^4 E^{-2}) = (1 - a\Delta + b\Delta^2) \cdot (1 + a\Delta E^{-1} + b\Delta^2 E^{-2}) \quad (29)$$

desarrollando:

$$(1 + k\Delta^4 E^{-2}) = 1 + a\Delta \cdot (E^{-1} - 1) + b\Delta^2 \cdot (E^{-2} + 1) - a^2\Delta^2 E^{-1} - ab\Delta^3 E^{-1} \cdot (E^{-1} - 1) \\ + b^2\Delta^4 E^{-2}$$

como  $E^{-1} - 1 = -\Delta E^{-1}$  y  $E^{-2} + 1 = 2E^{-1} + \Delta^2 E^{-2}$ , al sustituir en la ecuación anterior se obtiene:

$$k\Delta^4 E^{-2} = (-a - a^2 + 2b) \cdot \Delta^2 E^{-1} + (b + ab + b^2) \cdot \Delta^4 E^{-2} \quad (30) .$$

De (30) se puede deducir que:

$$-a - a^2 + 2b = 0, b = a \cdot \frac{(a+1)}{2} \text{ y } k = b \cdot (1 + a + b) = \frac{a(a+1)^2(a+2)}{4} .$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (29), se pueden obtener dos ecuaciones en diferencia de segundo orden:

$$q'_x = \left(1 - a\Delta + a \cdot \frac{(a+1)}{2} \Delta^2\right) \cdot q_x = q_x - a\Delta q_x + a \cdot \frac{(a+1)}{2} \Delta^2 q_x \quad (31)$$

$$q_x'' = (1 + a\Delta E^{-1} + a \cdot \frac{(a+1)}{2} \Delta^2 E^{-2}) \cdot q'_x = q'_x + a\Delta q'_{x-1} + a \cdot \frac{(a+1)}{2} \Delta^2 q'_{x-2} \quad (32) .$$

Las expresiones (31) y (32) son equivalentes, respectivamente, a:

$$q'_x = \frac{(a+1)(a+2)}{2} \cdot q_x - a(a+2) \cdot q_{x+1} + a \cdot \frac{(a+1)}{2} \cdot q_{x+2} \quad (33)$$

$$q_x'' = \frac{(a+1)(a+2)}{2} \cdot q'_x - a(a+2) \cdot q'_{x-1} + a \cdot \frac{(a+1)}{2} \cdot q'_{x-2} \quad (34) .$$

Despejando  $q'_x$  de (34) se obtiene la fórmula:

$$q'_x = \frac{2a}{a+1} \cdot q'_{x-1} - \frac{a}{a+2} \cdot q'_{x-2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} \cdot q_x'' \quad (35) .$$

Los  $q'_x$  son los valores auxiliares (computados a partir de las probabilidades crudas de muerte) necesarios para calcular las probabilidades suavizadas a partir de la fórmula que se obtiene de despejar  $q_x$  de (33):

$$q_x = \frac{2a}{a+1} \cdot q_{x+1} - \frac{a}{a+2} \cdot q_{x+2} + \frac{2}{(a+1)(a+2)} \cdot q'_x \quad (36) .$$

Sin embargo, al intentar realizar la graduación de las probabilidades de muerte con las dos ecuaciones anteriores (para el intervalo de edades de  $u$  hasta  $\omega$ ), se presentan dos problemas: al calcular  $q'_u$ , no se cuenta con los valores de  $q'_{u-1}$  y  $q'_{u-2}$ , y, análogamente, al calcular  $q_{\omega-2}$ , tampoco se cuenta con los últimos valores  $q_\omega$  y  $q_{\omega-1}$ .

Para resolver los problemas anteriores, Miller supuso que  $\Delta^2 q'_{u-2}$ ,  $\Delta^2 q'_{u-1}$ ,  $\Delta^2 q_{\omega-1}$  y  $\Delta^2 q_\omega$  son iguales a cero, dando como consecuencia las siguientes igualdades:

$$q'_u = 2q'_{u-1} - q'_{u-2}$$

$$q'_{u+1} = 3q'_{u-1} - 2q'_{u-2}$$

$$q_{\omega+1} = 2q_\omega - q_{\omega-1}$$

$$q_{\omega+2} = 3q_\omega - 2q_{\omega-1}$$

sustituyendo  $q'_u$  y  $q'_{u+1}$  en la ecuación (34) para los casos  $q_u''$  y  $q_{u+1}''$ :

$$q_u'' = \frac{(a+1)(a+2)}{2} \cdot (2q'_{u-1} - q'_{u-2}) - a(a+2) \cdot q'_{u-1} + \frac{a(a+1)}{2} \cdot q'_{u-2}$$

$$q_{u+1}'' = \frac{(a+1)(a+2)}{2} \cdot (3q'_{u-1} - 2q'_{u-2}) - a(a+2) \cdot (2q'_{u-1} - q'_{u-2}) \\ + \frac{a(a+1)}{2} \cdot q'_{u-1}$$

entonces:

$$q_u'' = q'_{u-2} + (a+2)\Delta q'_{u-2}$$

$$q_{u+1}'' = q'_{u-1} + (a+2)\Delta q'_{u-2}$$

restando las dos expresiones anteriores se tiene que  $\Delta q_u'' = \Delta q'_{u-2}$ , finalmente, sustituyendo y despejando, se obtienen los valores de  $q'_{u-2}$  y  $q'_{u-1}$ :

$$q'_{u-2} = q_u - (a+2)\Delta q_u \quad (37)$$

$$q'_{u-1} = q_{u+1} - (a+2)\Delta q_u \quad (38).$$

Para obtener los valores de  $q_{\omega-1}$  y  $q_{\omega}$  se sustituyen  $q_{\omega+1}$  y  $q_{\omega+2}$  en la ecuación (33) para los casos  $q'_{\omega-1}$  y  $q'_{\omega}$  y se realiza un procedimiento análogo al anterior para obtener:

$$q_{\omega-1} = q'_{\omega-1} + a\Delta q'_{\omega-1} \quad (39)$$

$$q_{\omega} = q'_{\omega} + a\Delta q'_{\omega-1} \quad (40).$$

Para poder comprender mejor el desarrollo de este método, se presenta un ejemplo numérico a continuación.

Ejemplo:

A partir de las probabilidades de muerte obtenidas de la tabla de vida del libro "Actuarial Mathematics" de la "Society Of Actuaries", calcular los valores suavizados de  $q_{35}$  hasta  $q_{40}$ , tomando  $a = 2$  y  $z = 2$ . Las probabilidades están multiplicadas por 100,000.

Sean las probabilidades:

**Tabla 3.1: Probabilidades de Muerte Crudas**

$x$	35	36	37	38	39	40
$q_x''$	159	170	183	197	213	232

Fuente: Tabla de Mortalidad del libro Actuarial

Mathematics de la SOA

con (37) y (38) se calculan las semillas:

$$q'_{33} = 159 - 4 \cdot (170 - 159) = 115$$

$$q'_{34} = 170 - 4 \cdot (170 - 159) = 126$$

una vez estimadas, utilizando la ecuación (35), se prosigue con los cálculos de las probabilidades auxiliares realizando iteraciones hasta la edad 40:

$$q'_{35} = \frac{4}{3}(126) - \frac{2}{4}(115) + \frac{2}{12}(159) = 137$$

$$q'_{36} = \frac{4}{3}(137) - \frac{2}{4}(126) + \frac{2}{12}(170) = 148$$

⋮

$$q'_{40} = \frac{4}{3}(184.203) - \frac{2}{4}(171.27) + \frac{2}{12}(232) = 198.63$$

una vez calculadas todas las probabilidades auxiliares, se procede a computar las semillas de las probabilidades suavizadas haciendo uso de (39) y (40):

$$q_{40} = 198.632 + 2(198.632 - 184.203) = 227.490$$

$$q_{39} = 184.203 + 2(198.632 - 184.203) = 213.061$$

finalmente, mediante un procedimiento análogo al que se siguió para los valores auxiliares (pero utilizando la fórmula (35)), se obtienen las probabilidades suavizadas:

$$q_{38} = \frac{4}{3}(213.061) - \frac{2}{4}(227.49) + \frac{2}{12}(171.27) = 198.883$$

$$q_{37} = \frac{4}{3}(198.883) - \frac{2}{4}(213.061) + \frac{2}{12}(159.333) = 185.202$$

⋮

$$q_{35} = \frac{4}{3}(172.161) - \frac{2}{4}(185.202) + \frac{2}{12}(137) = 159.78 .$$

En conclusión, los resultados son los siguientes:

**Tabla 3.2: Resultados del ejemplo de la fórmula**

**Whittaker-Henderson Tipo A**

$x$	$q_x$	$q'_x$	$q_x$
35	159	137	159.780826
36	170	148	172.161494
37	183	159.333333	185.202332
38	197	171.277778	198.88323
39	213	184.203704	213.061728
40	232	198.632716	227.490741

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de la

Tabla de Mortalidad del libro Actuarial

Mathematics de la SOA

Una vez comprendido el método Tipo A, de la fórmula Whittaker-Henderson, se procede a ilustrar el método Tipo B de la misma.

### 3.2.1.2. Fórmula Whittaker-Henderson Tipo B

En el procedimiento para la fórmula Tipo B, es común definir al coeficiente de ponderación como la inversa de la varianza estimada de la población expuesta al riesgo de muerte durante el periodo de tiempo  $[x, x + 1)$   $n_x$  (Thompson, 1996), es decir:

$$W_x = \frac{1}{\sigma_x^2} = \frac{1}{\text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n_x} y_i}{n_x}\right)} = \frac{n_x^2}{\text{Var}(\sum_{i=1}^{n_x} y_i)} = \frac{n_x^2}{\sum_{i=1}^{n_x} \text{Var}(y_i)} = \frac{n_x^2}{\sum_{i=1}^{n_x} q_x (1 - q_x)}$$

$$W_x = \frac{n_x}{q_x(1 - q_x)} \quad (41).$$

Lo anterior se justifica en el hecho de que, para valores altos de  $n_x$ , las tasas de decrementos observadas son, de manera aproximada, normalmente distribuidas (obedeciendo al teorema del límite central y al hecho de que el evento “muerte”,  $y_i$ , de una persona de edad  $x$  sigue una distribución de Bernoulli (López y Pérez, 2011), así que al minimizar el primer sumando de la fórmula Whittaker-Henderson con los coeficientes de ponderación definidos de la manera anteriormente citada, es equivalente a maximizar la verosimilitud del ajuste (Thompson, 1996).

Asimismo una forma de estimar a  $n_x$  es mediante  $\bar{N}_x$ , que es un aproximado del tiempo vivido por la población durante un año, y que, como se vio en el capítulo 1, es igual a:

$$\bar{N}_x = l_x - \frac{1}{2}d_x$$

finalmente la ecuación de los pesos queda de la siguiente manera:

$$W_x = \frac{\bar{N}_x}{q_x(1 - q_x)} \quad (42).$$

Recordando lo indicado en el apartado 3.2.1, el método Whittaker-Henderson se debe resolver, considerando a  $q_x$  como incógnita, minimizando la ecuación:

$$\sum_{x=0}^{\omega} W_x (q_x - q_x'')^2 + k \sum_{x=0}^{\omega-z} (\Delta^z q_x)^2 .$$

Este problema se puede resolver sencillamente realizando los siguientes pasos:

I Paso. Descomponer la ecuación anterior matricialmente:

El primer sumando  $\sum_{x=0}^{\omega} W_x (q_x - q_x'')^2$  matricialmente, se descompone de la siguiente manera:

$$(q - q'')^T W (q - q'')$$

donde:

$W$ : Es una matriz diagonal  $n \times n$  compuesta por las ponderaciones  $W_0, W_1, \dots, W_\omega$ .

$q''$ : Es una matriz  $n \times 1$  de probabilidades de muerte crudas.

$q$ : Es una matriz  $n \times 1$  de probabilidades de muerte suavizadas.

Sin embargo, no se puede apreciar fácilmente una forma de hacer lo mismo con la segunda expresión,  $k \sum_{x=1}^{\omega-z} (\Delta^z q_x)^2$ , así que para poder entender el cálculo de la misma y de esa manera encontrar la descomposición matricial adecuada, empíricamente se sustituirán valores de  $\omega$  y  $z$  en la misma, aunque no tenga congruencia teórica.

Lo primero que se puede notar es que se debe sumar la expresión  $(\Delta^z q_x)^2$  desde  $x = 0$  hasta  $x = \omega - z$ , y por lo tanto,  $\omega$  debe de ser mayor a  $z$  y a su vez  $z$  mayor o igual a 1.

Si en  $\sum_{x=0}^{\omega-z} (\Delta^z q_x)^2$  se sustituye  $z = 1$  y  $\omega = 2$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^1 (\Delta^1 q_x)^2 &= (\Delta^1 q_0)^2 + (\Delta^1 q_1)^2 = (q_1 - q_0)^2 + (q_2 - q_1)^2 \\ &= (q_0 \quad q_1 \quad q_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$z = 1$  y  $\omega = 3$ :

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^2 (\Delta^1 q_x)^2 &= (\Delta^1 q_0)^2 + (\Delta^1 q_1)^2 + (\Delta^1 q_2)^2 = (q_1 - q_0)^2 + (q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2 \\ &= (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$z = 2$  y  $\omega = 3$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^1 (\Delta^2 q_x)^2 &= (\Delta^2 q_0)^2 + (\Delta^2 q_1)^2 = (\Delta^1 q_1 - \Delta^1 q_0)^2 + (\Delta^1 q_2 - \Delta^1 q_1)^2 \\
&= ((q_2 - q_1) - (q_1 - q_0))^2 + ((q_3 - q_2) - (q_2 - q_1))^2 \\
&= (q_2 - 2q_1 + q_0)^2 + (q_3 - 2q_2 + q_1)^2 \\
&= (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$z = 2$  y  $\omega = 4$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^2 (\Delta^2 q_x)^2 &= (\Delta^2 q_0)^2 + (\Delta^2 q_1)^2 + (\Delta^2 q_2)^2 \\
&= (\Delta^1 q_1 - \Delta^1 q_0)^2 + (\Delta^1 q_2 - \Delta^1 q_1)^2 + (\Delta^1 q_3 - \Delta^1 q_2)^2 \\
&= ((q_2 - q_1) - (q_1 - q_0))^2 + ((q_3 - q_2) - (q_2 - q_1))^2 + ((q_4 - q_3) - (q_3 - q_2))^2 \\
&= (q_2 - 2q_1 + q_0)^2 + (q_3 - 2q_2 + q_1)^2 + (q_4 - 2q_3 + q_2)^2 \\
&= (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$z = 3$  y  $\omega = 4$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^1 (\Delta^3 q_x)^2 &= (\Delta^3 q_0)^2 + (\Delta^3 q_1)^2 = (\Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0)^2 + (\Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1)^2 \\
&= ((\Delta^1 q_2 - \Delta^1 q_1) - (\Delta^1 q_1 - \Delta^1 q_0))^2 \\
&\quad + ((\Delta^1 q_3 - \Delta^1 q_2) - (\Delta^1 q_2 - \Delta^1 q_1))^2 \\
&= (((q_3 - q_2) - (q_2 - q_1)) - ((q_2 - q_1) - (q_1 - q_0)))^2 \\
&\quad + (((q_4 - q_3) - (q_3 - q_2)) - ((q_3 - q_2) - (q_2 - q_1)))^2 \\
&= ((q_3 - 2q_2 + q_1) - (q_2 - 2q_1 + q_0))^2 \\
&\quad + ((q_4 - 2q_3 + q_2) - (q_3 - 2q_2 + q_1))^2 \\
&= (q_3 - 3q_2 + 3q_1 - q_0)^2 + (q_4 - 3q_3 + 3q_2 - q_1)^2 \\
&= (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -3 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$z = 3$  y  $\omega = 5$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^2 (\Delta^3 q_x)^2 &= (\Delta^3 q_0)^2 + (\Delta^3 q_1)^2 + (\Delta^3 q_2)^2 \\
&= (\Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0)^2 + (\Delta^2 q_2 - \Delta^2 q_1)^2 + (\Delta^2 q_3 - \Delta^2 q_2)^2 \\
&= ((\Delta^1 q_2 - \Delta^1 q_1) - (\Delta^1 q_1 - \Delta^1 q_0))^2 + ((\Delta^1 q_3 - \Delta^1 q_2) - (\Delta^1 q_2 - \Delta^1 q_1))^2 \\
&\quad + ((\Delta^1 q_4 - \Delta^1 q_3) - (\Delta^1 q_3 - \Delta^1 q_2))^2 \\
&= (((q_3 - q_2) - (q_2 - q_1)) - ((q_2 - q_1) - (q_1 - q_0)))^2 \\
&\quad + (((q_4 - q_3) - (q_3 - q_2)) - ((q_3 - q_2) - (q_2 - q_1)))^2 \\
&\quad + (((q_5 - q_4) - (q_4 - q_3)) - ((q_4 - q_3) - (q_3 - q_2)))^2 \\
&= ((q_3 - 2q_2 + q_1) - (q_2 - 2q_1 + q_0))^2 + ((q_4 - 2q_3 + q_2) - (q_3 - 2q_2 + q_1))^2 \\
&\quad + ((q_5 - 2q_4 + q_3) - (q_4 - 2q_3 + q_2))^2 \\
&= (q_3 - 3q_2 + 3q_1 - q_0)^2 + (q_4 - 3q_3 + 3q_2 - q_1)^2 + (q_5 - 3q_4 + 3q_3 - q_2)^2 \\
&= (q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en conclusión, el segundo sumando se puede descomponer de la siguiente manera:

$$kq^T C^T C q$$

donde  $C$  es una matriz de constantes de dimensiones  $(n - z) \times n$ .

A continuación se presenta el algoritmo de construcción de  $C$ , no sin antes aclarar un par de puntos:

Punto 1. La expresión  $C(v, w)$  representa a una constante de la matriz  $C$  donde  $1 \leq v \leq (n - z)$  indica la fila y  $1 \leq w \leq n$  la columna en la que se encuentra, además al inicio del algoritmo se considerará a  $C$  como una matriz nula por defecto, para posteriormente asignarle valores a los coeficientes determinados.

Punto 2. Por otra parte,  $c_i^z$  es el coeficiente binomial y se calcula mediante la división:  $c_i^z = \frac{z!}{i!(z-i)!}$  (Wikipedia, 2011). Se emplea esta función debido a que los coeficientes que se observaron, al efectuar las diferencias de orden, son parecidos a los del triángulo de pascal, a excepción del signo, para corregir eso se multiplica la expresión anterior por  $(-1)^{z+i}$ .

El algoritmo es el siguiente:

Inicio

De  $h = 0$  hasta  $z$

$$C(1, h + 1) = (-1)^{z+h} \cdot c_h^z$$

Siguiente  $h$

De  $k = 1$  hasta  $\omega - z$

De  $l = 1$  hasta  $z + 1$

$$C(k + 1, k + l) = C(1, l)$$

Siguiente  $l$

Siguiente  $k$

Fin

Ejemplo:

Para  $\omega = 6$  y  $z = 3$

Primero se tiene una matriz nula de dimensiones  $3 \times 6$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

después se calculan los coeficientes de la primera fila:

$$C(1,1) = (-1)^{3+0} \cdot c_0^3 = -1 \quad C(1,2) = (-1)^{3+1} \cdot c_1^3 = 3$$

$$C(1,3) = (-1)^{3+2} \cdot c_2^3 = -3 \quad C(1,4) = (-1)^{3+3} \cdot c_3^3 = 1$$

la matriz resultante es:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

finalmente se indica la localización de los coeficientes de la primera fila en las filas restantes:

$$C(2,2) = C(1,1) = -1$$

$$C(2,3) = C(1,2) = 3$$

$$C(2,4) = C(1,3) = -3$$

$$C(2,5) = C(1,4) = 1$$

$$C(3,3) = C(1,1) = -1$$

$$C(3,4) = C(1,2) = 3$$

$$C(3,5) = C(1,3) = -3$$

$$C(3,6) = C(1,4) = 1$$

y por lo tanto:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora que se cuenta con la representación matricial de la fórmula Whittaker-Henderson:

$$(q'' - q)^T w (q'' - q) + k q^T C^T C q \quad (43)$$

Se procede a realizar el siguiente paso.

II Paso. Derivar respecto a  $q$ :

Para poder realizar este punto es necesario tener presente las siguientes propiedades de las Matrices (Moreno, 2001):

- I. Si  $A$  es una matriz de dimensión  $n \times m$  y  $B$  es una matriz de dimensión  $m \times k$ , entonces la traspuesta de su producto es igual al producto de las traspuestas de  $A$  y de  $B$  pero en orden contrario, además es de dimensión  $k \times n$ :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- II. Si  $A$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ , entonces se dice que  $A$  es simétrica si es igual a su traspuesta, es decir:

$$A^T = A$$

- III. Si  $A$  es una matriz de constantes de dimensión  $n \times m$  y  $X$  una matriz de variables de dimensión  $m \times k$ , entonces:

$$\frac{d(AX)}{dX} = A$$

- IV. Si  $A$  es una matriz de constantes simétrica de dimensión  $n \times n$  y  $X$  una matriz de variables  $n \times 1$ , entonces:

$$\frac{d(X^T A X)}{dX} = 2AX$$

donde  $2AX$  es una matriz de dimensiones  $n \times 1$ .

- V. Sea  $A$  una matriz simétrica de constantes de dimensión  $n \times n$ ,  $X$  una matriz  $n \times 1$  y  $Z$  una matriz  $n \times 1$ :

$$\frac{dX^T A Z}{dX} = AZ$$

donde  $AZ$  es una matriz de dimensiones  $n \times 1$ .

Una vez claras las propiedades anteriores, con la finalidad de facilitar la comprensión de este paso, la función de Whittaker-Henderson, expresada como (43), se renombrará como  $WH(q)$ :

$$\begin{aligned} WH(q) &= (q - q'')^T W (q - q'') + kq^T C^T C q = (q^T - q''^T) W (q - q'') + kq^T C^T C q \\ &= q^T W (q - q'') - q''^T W (q - q'') + kq^T C^T C q \\ &= q^T W q - q^T W q'' - q''^T W q + q''^T W q'' + kq^T C^T C q \end{aligned}$$

ahora se procede a derivar a  $WH(q)$  con respecto a  $q$ , sin embargo como  $WH(q)$  es un escalar, se puede ver como una matriz simétrica, entonces:

$$\frac{dWH(q)}{dq} = \frac{d(q^T W q - 2q^T W q'' + q''^T W q'' + kq^T C^T C q)}{dq} = -2Wq'' + 2Wq + 2kC^T C q$$

III Paso. Igualar a cero  $\frac{d(WH(q))}{dq}$  y despejar:

igualando a cero se tiene que:

$$-2Wq'' + 2Wq + 2kC^T C q = 0$$

multiplicando a por  $\frac{1}{2}$ :

$$-Wq'' + Wq + kC^T C q = 0$$

factorizando  $q$ :

$$-Wq'' + (W + kC^T C)q = 0$$

finalmente, sumando  $Wq''$ :

$$(W + kC^T C)q = Wq'' \quad (44)$$

simplificando:

$$Gq = Wq'' \text{ con } G = (W + kC^T C) .$$

En la expresión anterior se puede apreciar que para obtener los valores suavizados del vector  $q$  bastaría con multiplicar ambos lados de la igualdad con la matriz inversa de  $G$ . Sin embargo, al momento de calcularla, el valor inverso del determinante de la matriz  $G$  es muy cercano a cero, para evitar este problema Greville recomienda utilizar el método de Cholesky (Chan, 1984).

### 3.2.1.2.1. Método de Cholesky

Este método consiste en representar una matriz simétrica como un producto de matrices (Muñoz, 2014) de la siguiente manera:

$$G = LL^T$$

donde  $L$  es una matriz triangular inferior, cuyos componentes se calculan de la siguiente manera:

- I. Paso. Se computa el valor del componente que será ubicado en la primera fila y columna de la matriz  $L$  con la siguiente ecuación:

$$L(1,1) = \sqrt{G(1,1)}$$

- II. Paso. Se calculan los valores restantes de la primera columna de la matriz  $L$  mediante la división:

$$L(i, 1) = \frac{G(i, 1)}{L(1,1)} \text{ con } i = 2,3,4, \dots, n$$

- III. Paso. Se calcula el siguiente elemento de la diagonal de la matriz  $L$  mediante la fórmula:

$$L(i, i) = \sqrt{G(i, i) - \sum_{k=1}^{i-1} L(i, k)^2} \text{ con } i = 2,3,4, \dots, n$$

- IV. Paso. Se estiman los valores de la columna siguiente con la ecuación:

$$L(i, j) = \frac{1}{L(j, j)} (G(i, j) - \sum_{k=1}^{j-1} L(i, k) \cdot L(j, k))$$

$$\text{con } i = 2,3,4, \dots, n \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n - 1$$

- V. Paso. Se repiten el III y IV paso hasta completar la matriz  $L$ .

Una vez calculada la matriz  $L$  es posible regresar a la explicación de la solución del método Whittaker-Henderson Tipo B.

Como fue mencionado anteriormente:

$$Gq = wq'' \quad (45)$$

aplicando el método de Cholesky a  $G$  se obtiene:

$$LL^T q = Wq'' \quad (46)$$

donde, siendo  $q'$  auxiliar:

$$L^T q = q' \quad (47)$$

la expresión resultante será:

$$Lq' = Wq'' \quad (48) .$$

De esa manera, para obtener las probabilidades suavizadas de muerte, se deben llevar a cabo dos etapas:

La etapa 1, que consiste en resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al multiplicar las matrices de la igualdad (48), y la etapa 2, que consiste en realizar un procedimiento análogo pero considerando (47).

Con la finalidad de clarificar el procedimiento de cálculo del método Tipo B, a continuación, con datos obtenidos de la tabla de mortalidad completa del libro “Actuarial Mathematics” de la SOA, se propone un ejemplo:

Tomando  $z = 2$ ,  $\omega = 5$  y  $k = 15$ , lo primero que se debe obtener son las probabilidades crudas de muerte y los pesos:

**Tabla 3.3: Probabilidades de Muerte Crudas y Pesos para el ejemplo del Método Whittaker-Henderson Tipo B**

$x$	$q_x''$	$l_x$	$d_x$	$\bar{N}_x$	$W_x$
35	0.00159	95808	153	95731.5	60304374.5
36	0.0017	95655	163	95573.5	56315442.1
37	0.00183	95492	175	95404.5	52229186.0
38	0.00197	95317	188	95223	48431959.2
39	0.00213	95129	203	95027.5	44709080.1

Fuente: Elaboración Propia con datos de la Tabla de Mortalidad

del libro Actuarial Mathematics de la SOA

posteriormente se construyen las matrices necesarias:

$$W = \begin{pmatrix} 60304374.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5631542.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 52229186 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48431959.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44709080.1 \end{pmatrix}$$

$$q'' = \begin{pmatrix} 0.00159 \\ 0.00170 \\ 0.00183 \\ 0.00197 \\ 0.00213 \end{pmatrix} \quad Wq'' = \begin{pmatrix} 95833 \\ 95736 \\ 95579 \\ 95410 \\ 95230 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 15C^TC = \begin{pmatrix} 15 & -30 & 15 & 0 & 0 \\ -30 & 75 & -60 & 15 & 0 \\ 15 & -60 & 90 & -60 & 15 \\ 0 & 15 & -60 & 75 & -30 \\ 0 & 0 & 15 & -30 & 15 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 60304389.5 & -30 & 15 & 0 & 0 \\ -30 & 56315517.1 & -60 & 15 & 0 \\ 15 & -60 & 52229276 & -60 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 4843034.2 & -30 \\ 0 & 0 & -60 & -30 & 447090095.1 \end{pmatrix}$$

aplicando el método de Cholesky:

$$L = \begin{pmatrix} 7765.5901 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0039 & 7504.3665 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0019 & -0.0080 & 7226.9825 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 & -0.0083 & 6959.3128 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0021 & -0.00043 & 6686.486 \end{pmatrix}$$

después, se realiza la etapa 1 que consiste en calcular los valores de  $q'_x$  resolviendo el sistema de ecuaciones que se obtiene de multiplicar la matrices de la igualdad  $Lq' = wq''$ .

$$7765.5901q'_{35} = 95833$$

$$-0.0039q'_{35} + 7504.3665q'_{36} = 95736$$

$$0.0019q'_{35} - 0.0080q'_{36} + 7226.9825q'_{37} = 95579$$

$$0.0020q'_{36} - 0.0083q'_{37} + 6959.3128q'_{38} = 95410$$

$$0.0021q'_{37} - 0.0043q'_{38} + 6686.486q'_{39} = 95230$$

después de resolver el sistema, el resultado del vector de probabilidades de muerte auxiliar es el siguiente:

$$q' = \begin{pmatrix} 12.3407 \\ 12.7574 \\ 13.2253 \\ 13.7097 \\ 14.2422 \end{pmatrix}.$$

Con base a este resultado, se procede a llevar a cabo la etapa 2 que consiste en resolver el sistema de ecuaciones  $L^T q = q'$ .

$$7765.5901q_{35} - 0.0039q_{36} + 0.0019q_{37} = 12.3407$$

$$7504.3665q_{36} - 0.008q_{37} + 0.0020q_{38} = 12.7574$$

$$7226.9825q_{37} - 0.0083q_{38} + 0.0021q_{39} = 13.2253$$

$$6959.3128q_{38} - 0.0043q_{39} = 13.7097$$

$$6686.486q_{39} = 14.2422$$

finalmente el vector de probabilidades suavizadas es el siguiente:

$$q = \begin{pmatrix} 0.001589 \\ 0.001699 \\ 0.001829 \\ 0.001969 \\ 0.002129 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar en la tabla siguiente, las probabilidades suavizadas y crudas no varían mucho, eso se debe a que el valor escogido de  $k$  es muy pequeño.

**Tabla 3.4: Resultado del ejemplo del Método Whittaker-Henderson Tipo B**

$q_x''$	0.00159	0.00179	0.00183	0.00197	0.00213
$q_x$	0.001589	0.001699	0.001829	0.001969	0.002129

Fuente: Elaboración Propia con datos de la Tabla de Mortalidad del libro

### 3.3. Pruebas Estadísticas

Una vez que se han graduado los datos, es necesario hacer una serie de pruebas estadísticas que permitan, por un lado, comprobar si las tasas graduadas son una representación razonable de la mortalidad observada y por otro, comparar entre las diferentes alternativas para seleccionar el mejor modelo disponible (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010).

A continuación se describen brevemente algunas de las pruebas clásicas utilizadas para la selección de modelos.

#### 3.3.1. Ji-Cuadrada

Con base en las probabilidades de muerte graduadas se puede comparar, para cada edad  $x$ , el número de muertes esperadas según el modelo, que denotaremos  $E_x$ , con el número de muertes observadas, denotadas  $O_x$ . Así, la diferencia  $(O_x - E_x)$  representa las desviaciones, a la edad  $x$ , entre el número de muertes que se observó y el número de muertes estimadas mediante el modelo. El cociente entre las desviaciones y la desviación estándar de la variable aleatoria del número de muertes a la edad  $x$ , que representa las desviaciones estandarizadas o relativas, se denota por  $Z_x = (O_x - E_x)/\sigma_x$  (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010).

De esta manera la prueba Ji-Cuadrada, definida como  $X^2 = \sum_{x=0}^{\omega} Z_x^2$ , es una medida global de las desviaciones relativas, donde la hipótesis nula postula una distribución de probabilidad totalmente especificada como el modelo matemático de la población que ha generado la muestra. Si, a la edad  $x$ , el número de muertes observadas es igual al número de muertes estimadas mediante el modelo, entonces  $Z_x$  es igual a cero; y, mientras mayor sea la diferencia entre las muertes observadas y las estimadas, mayor será el valor de  $X^2$ , provocando así el rechazo de la hipótesis (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010).

### 3.3.2. Prueba de Signos

Al efectuar la prueba Ji-Cuadrada, una vez suavizadas las probabilidades de muerte con la fórmula tipo A, es poco probable que se obtengan resultados aceptables, eso no quiere decir, necesariamente, que el modelo sea malo, puesto que es posible que pase otras pruebas como la de signos. Con esta prueba se compara que el número de desviaciones, entre las probabilidades crudas y suavizadas, con signo positivo sea aproximadamente igual al número de desviaciones con signo negativo. Si las tasas de mortalidad observadas efectivamente se ajustan a las tasas de mortalidad graduadas, una desviación positiva debe tener aproximadamente la misma probabilidad de ocurrir que una desviación negativa (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010).

La prueba de la hipótesis nula es, en realidad, una prueba de que el número de desviaciones que son positivas (denotado por  $R^+$ ) es un valor de una variable aleatoria Binomial con parámetro  $p=0.5$ , (Instituto Tecnológico de Chihuahua, 2012) es decir:

$$H_0: R^+ = 0.5n$$

$$H_1: R^+ \neq 0.5n$$

por tanto, dado que la media de la distribución Binomial es  $np$  y la varianza es  $npq$ , la distribución de  $R^+$  es aproximadamente normal con media  $0.5n$  y varianza  $0.25n$ , cada vez que  $n$  es moderadamente grande. Por consiguiente la hipótesis puede probarse con el estadístico:

$$Z = \frac{R^+ - 0.5n}{0.5\sqrt{n}}$$

con la regla de decisión:

$$\text{Si } -1.96 < Z < 1.96 \text{ No se rechaza } H_0$$

$$\text{Si } Z \geq 1.96 \text{ o } Z \leq -1.96 \text{ Se rechaza } H_0 .$$

### 3.3.3. Prueba de Rachas

Esta prueba se hace para verificar que las desviaciones con signo positivo y con signo negativo (entre las probabilidades crudas y suavizadas) estén distribuidas aleatoriamente a través de todas las edades. Se busca identificar, por ejemplo, que no se tengan secuencias muy largas en donde las desviaciones son del mismo signo, ya que esto indicaría que en ese rango de edades el modelo está subestimando o sobreestimando consistentemente la mortalidad (Ortiz, Villegas y Zarruck, 2010).

Si la muestra es suficientemente grande y la hipótesis de aleatoriedad es cierta, la distribución muestral del número de rachas,  $R$ , puede aproximarse mediante una distribución normal de parámetros:

$$\mu_R = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{n} + 1 \quad \sigma_R = \sqrt{\frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot (2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n)}{n^2(n-1)}}$$

donde  $n_1$  es el número de desviaciones positivas,  $n_2$  el número de las negativas y  $n$  es el número total de observaciones (Manzano, 1995).

El estadístico de pruebas es:

$$Z = \frac{R + c - \mu_R}{\sigma_R}$$

$$c = 0.5 \text{ si } R < \mu_R \text{ y } c = -0.5 \text{ si } R > \mu_R$$

con una regla de decisión similar a la prueba de signos.

Una vez comprendido el marco teórico, en el siguiente capítulo se presenta la estructura del programa que se elaboró mediante macros en Excel.

## Estructura del Programa

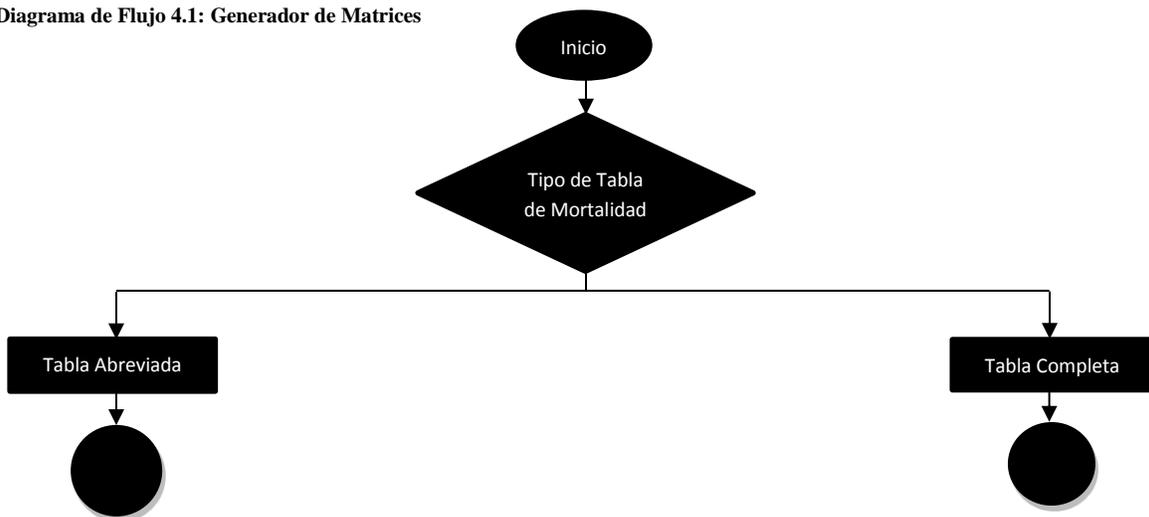
El algoritmo de Whittaker-Henderson se implementó en Excel por ser un medio básico, fácil y práctico de utilizar para cualquier usuario que se desenvuelva en el ámbito actuarial.

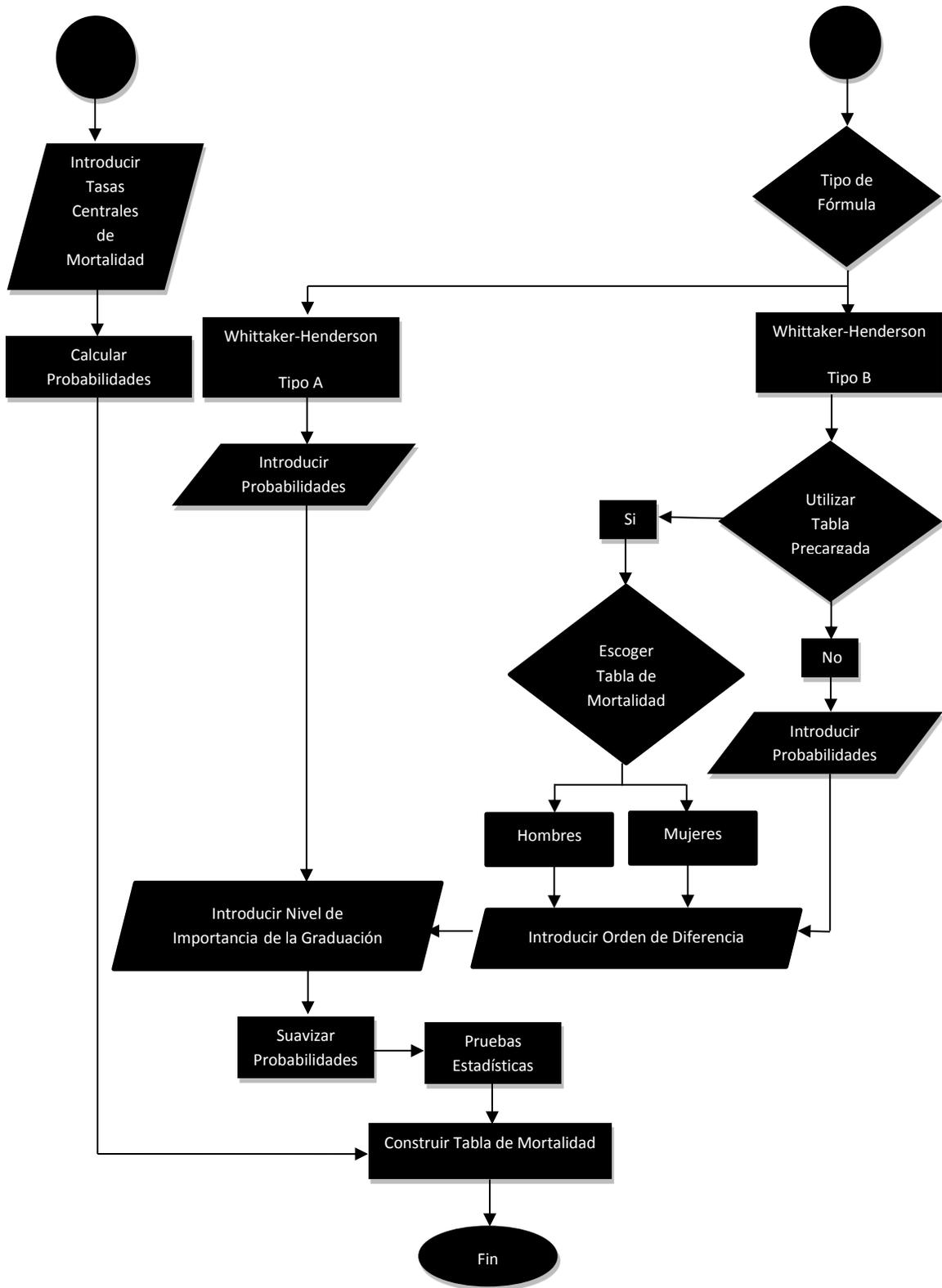
En este capítulo se explica a detalle el proceso de desarrollo y operación del programa (para mayor información conceptual de programación favor de consultar el glosario)

### 4.1. Captura de Datos

Los datos a capturar (probabilidades de muerte ó tasas centrales de mortalidad) dependerán del tipo de Tabla de Mortalidad elegida por él usuario al inicio del programa, posteriormente, la aplicación suavizará los datos (en caso de ser necesario y de acuerdo al orden de diferencia e importancia de la graduación asignados), realizará la pruebas estadísticas pertinentes y finalmente construirá la Tabla de Mortalidad deseada. En el siguiente diagrama de flujo se aprecia a mejor detalle el proceso a seguir mencionado:

Diagrama de Flujo 4.1: Generador de Matrices





Fuente: Elaboración propia

Cómo se pudo observar en el diagrama de flujo, lo primero que debe hacer el usuario es seleccionar el tipo de Tabla de Mortalidad que se desea construir, para capturar esta opción se programó el siguiente “Menú Principal”:

**Figura 4.1: Menú Principal**



**Fuente: Elaboración propia**

Para que únicamente apareciera habilitado este formulario, al momento de abrir el documento de Excel, se introdujo, en la pantalla de Visual Basic, los siguientes comandos:

```
Private Sub Workbook_Open()  
  
Windows("Generador de Tablas de Mortalidad.xlsm").Visible = False  
  
MenuPrincipal.Show  
  
End Sub
```

En el “Menú Principal” es posible notar que se presentan las opciones “Tabla de Mortalidad Abreviada” y “Tabla de Mortalidad Completa”, el botón “Siguiente>” y el botón “Salir”.

En el botón , se escribió la instrucción “Application.Quit” para que la aplicación se encargue de cerrar el documento de Excel, no sin antes preguntarle al usuario si desea guardar los cambios hechos al documento.

Siguiente>

Para el botón se escribió el código:

```
Private Sub CommandButton1_Click()  
  
If OptionButton1 = True Then  
  
`Se programó esta condicional para verificar si él usuario ha seleccionado  
`Tabla de Mortalidad Abreviada", en caso de confirmarse el cumplimiento de la  
`condición anterior, fueron escritas las instrucciones de ocultar el "Menú  
`Principal", habilitar el documento en Excel y dirigir al usuario a la hoja  
`correspondiente.  
  
inicio.Hide  
  
Windows("Generador de Tablas de Mortalidad.xlsm").Visible = True  
  
Hoja2.Select  
  
Range("a1").Select  
  
Else  
  
`Por otra parte, en caso de que él usuario decida construir una Tabla de  
`Mortalidad Completa, se codificaron las indicaciones cerrar el "Menú  
`Principal" y mostrar el formulario "Completas".  
  
inicio.Hide  
  
Completas.Show  
  
End If End Sub
```

En los siguientes apartados se detallan las consecuencias de elegir cada una de las opciones presentes en el "Menú Principal".

#### **4.1.1. Captura de Datos para la Construcción de una Tabla de Mortalidad Abreviada**

Cómo se mencionó en el tercer capítulo de la presente tesis, las Tablas de Mortalidad Abreviadas se construyen a partir de las Tasas Centrales de Mortalidad de la población, obtenidas en periodos generalmente quinquenales, sin embargo, debido a la alta mortalidad

que se presenta durante el primer año, se recomienda que el primer grupo se divida en dos intervalos, de [0,1) y [1,5) años respectivamente.

Por lo anterior, en esta opción no se puede aplicar el algoritmo de Whittaker-Henderson, pues este sirve para la graduación de datos equidistantes, es decir, debe haber el mismo número de años entre cada dato. La razón por la que se incluyó esta preferencia en el programa, obedece a hecho de no limitar los alcances de la presente aplicación.

Una vez seleccionada, en el “Menú Principal”, la opción “Tabla de Mortalidad Abreviada”, el programa dirige al usuario a la siguiente pantalla:

**Figura 4.2: Pantalla de Captura de las Tasas Centrales de Mortalidad**

Intervalo	Tiempo	Tasa Central de Mortalidad	Probabilidad de Muerte	Personas con Vida a Edad x	Personas Fallecidas en el Intervalo	Personas Vividas en el Intervalo	Tiempo Dentro del Intervalo	Tiempo entre x y w	Esperanza de Vida a Edad x
$[x, x+t)$	t	$tmx$	$tpx$	$lx$	$tdx$	$tlx$	$tx$	$ex$	
[0,1)	1								
[1,5)	4								
[5,10)	5								
[10,15)	5								
[15,20)	5								
[20,25)	5								
[25,30)	5								
[30,35)	5								
[35,40)	5								
[40,45)	5								
[45,50)	5								
[50,55)	5								
[55,60)	5								
[60,65)	5								

Fuente: Elaboración Propia

Donde las celdas de la hoja fueron deliberadamente bloqueadas a excepción del rango donde se deben introducir las Tasas Centrales de Mortalidad, para lograr lo anterior se hizo uso de las opciones “Proteger hoja” y “Permitir que los usuarios modifiquen rangos” ubicadas en el menú “Revisar” de la barra de herramientas de Excel, donde también se encuentra el menú “Datos”, del cuál, se seleccionó “Validación de datos” para restringir los valores del rango modificable, donde solo se admiten valores positivos.

Se tomaron las medidas anteriores con la finalidad de evitar la mayor cantidad posible de futuros errores en el sistema, tales como que se llegara a calcular probabilidades de muerte mayores a 1 o menores a 0, o que el usuario introduzca letras en lugar de números en las celdas.

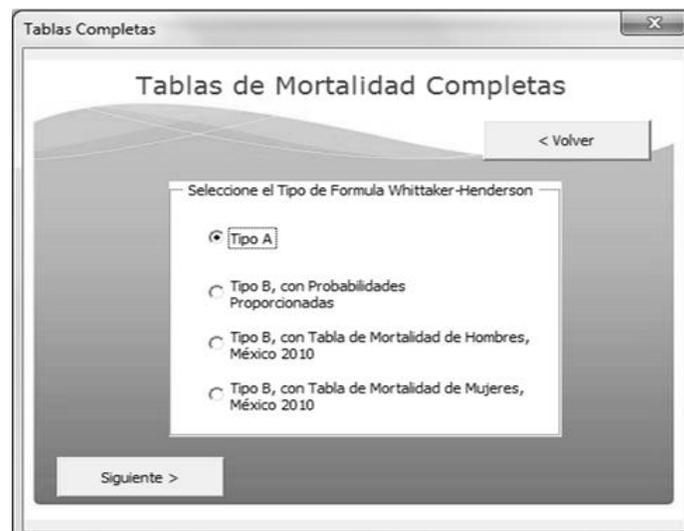
Además, se puede deducir, sin dificultad alguna, que las Tasas Centrales de Mortalidad deben de ser proporcionadas por él usuario manualmente, es decir, que las debe de calcular con anterioridad, la ventaja de hacerlo de esa manera es que, si él mismo cometiera errores de calculo o ingresara una tasa en un intervalo erróneo, tiene la posibilidad de ubicarse en la celda especifica en la que se encuentra la incongruencia y corregirla sin tener que repetir todo el proceso.

Una vez ingresadas todas las Tasas Centrales, él usuario debe hacer click en el botón **Calcular**, localizado abajo y a la derecha de la “Tabla de Mortalidad”, para computar los datos. Los detalles de la programación del proceso de cálculo y de los demás botones que aparecen en la imagen anterior se explicarán en la sección 4.2.1.

#### 4.1.2. Captura de Datos para la Construcción de una Tabla de Mortalidad Completa

Cuando él usuario elige la opción “Tabla de Mortalidad Completa” en el “Menú Principal” y hace click en el botón **Siguiente>**, la aplicación muestra el subsecuente menú:

Figura 4.3: Menú de Tablas Competas



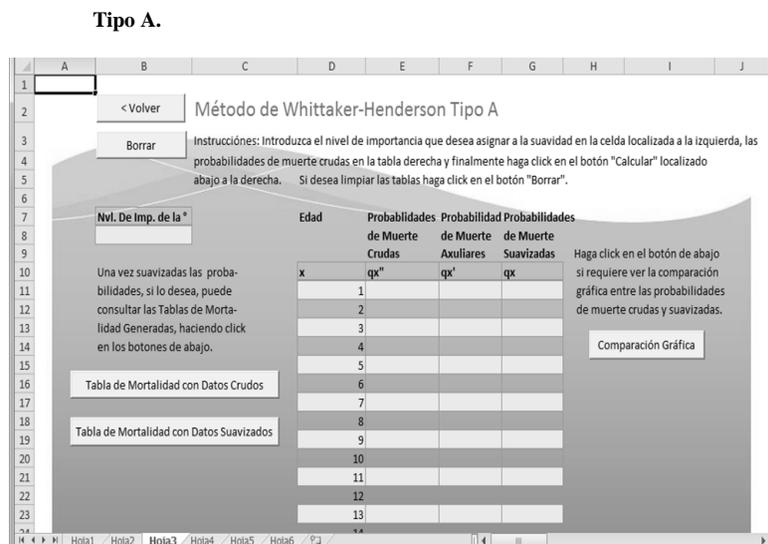
Fuente: Elaboración Propia

En esta sección no se dan detalles respecto a los botones de la imagen anterior, pues su programación fue similar a la explicada en la sección 4.1.1, sin embargo, se puede observar que, en el menú “Tablas Completas”, se le presentan al usuario cuatro alternativas para construir una Tabla de Mortalidad Completa, en los apartados siguientes se explica a mayor profundidad la captura de datos de acuerdo a la opción elegida.

#### 4.1.2.1. Captura de datos para el Método Whittaker-Henderson, Tipo A

Una vez que el usuario ha seleccionado el método mencionado en el título de la presente sección, para la construcción de la Tabla de Mortalidad Completa, el programa envía al usuario a la hoja respectiva, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Figura 4.4: Pantalla de captura de datos para el método Whittaker-Henderson



Fuente: Elaboración propia

A excepción de las celdas donde el usuario debe ingresar las probabilidades de muerte crudas y el nivel de importancia dado al suavización, toda la hoja esta protegida. Adicionalmente, fueron añadidas las restricciones de poner valores decimales entre 0 y 1 a las probabilidades crudas de muerte y valores enteros de 0 en adelante al nivel de importancia de la graduación. Los detalles de como hacer lo previamente mencionado ya fueron expuestos en la sección 4.1.1. Finalmente el usuario debe de hacer click en el botón

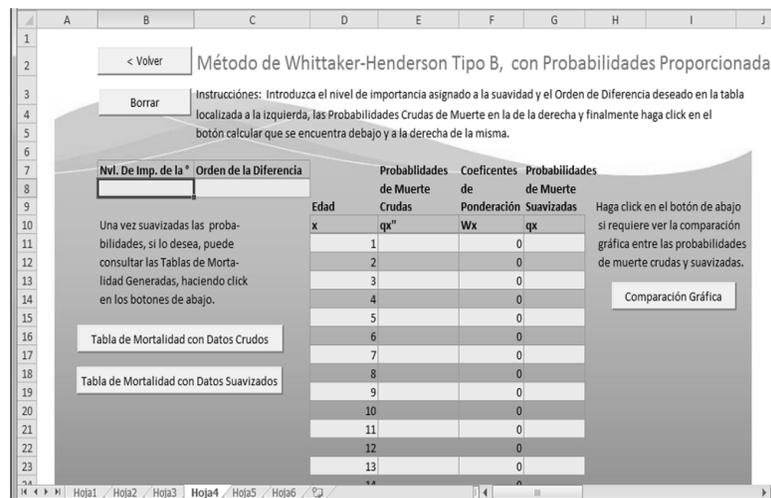
**Calcular** ubicado en la esquina inferior derecha de la “Tabla de Probabilidades”.

El proceso de programación de los cálculos de suavización y de los demás botones que aparecen en la imagen anterior se aclara en las secciones 4.2.1 y 4.2.2.

#### 4.1.2.2. Captura de datos para el Método Whittaker-Henderson, Tipo B, con Probabilidades Proporcionadas

Después de que el usuario selecciona la opción “Método Whittaker-Henderson, Tipo B, con Probabilidades Proporcionadas” y hace click en el botón  del menú “Tablas Completas”, el programa dirige al usuario a la hoja siguiente:

**Figura 4.5: Pantalla de captura de datos para el método Whittaker-Henderson Tipo B, con Probabilidades Proporcionadas.**



Fuente: Elaboración propia

Donde las únicas celdas sin protección son las correspondientes a las probabilidades de muerte, al nivel de importancia de la graduación y al orden de diferencia. A los dos primeros tipos de datos se les aplicó las mismas restricciones de la sección anterior y para el orden de diferencia se le solicita al usuario que introduzca un número entero entre 1 y 12, aunque para el suavización de probabilidades se recomienda el segundo orden de diferencia.

Una vez proporcionados los datos solicitados, el usuario debe de hacer click en el botón , la programación de este y los demás botones que aparecen en la imagen anterior, como se mencionó en la sección previa se explican en los apartados 4.2.1 y 4.2.2.

### 4.1.2.3. Captura de datos para el Método Whittaker-Henderson, Tipo B, con Tabla de Mortalidad para Hombres, México 2010 y con Tabla de Mortalidad para Mujeres, México 2010

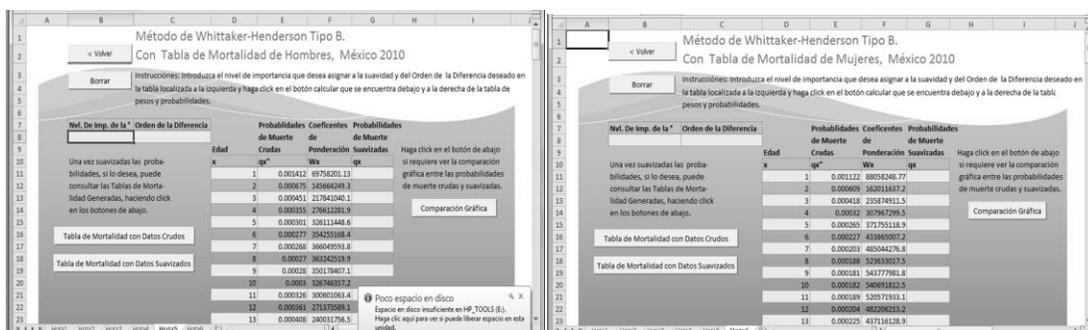
Las dos últimas alternativas, que aparecen en el menú “Tablas Completas”, tienen la peculiaridad de contar con Tablas de Mortalidad precargadas, de las cuales, se obtienen las probabilidades de muerte y números de supervivientes por edad, necesarios para el cálculo de los coeficientes de ponderación que, a diferencia de la fórmula Tipo A, son diferentes de 1 y que son esenciales para el suavización de las probabilidades.

Estas tablas fueron construidas a partir de información obtenida del Censo de Población y Vivienda 2010, llevado a cabo por el INEGI, y de los registros, conseguidos de su página de internet oficial, por sexo y edad de las defunciones ocurridas en los años 2009, 2010 y 2011 y de los nacimientos en los años 2007, 2008, 2009, 2010 y 2011.

Las dos opciones finales del programa dirigen al usuario a hojas donde las únicas celdas que están habilitadas son aquellas asignadas al nivel de importancia del grado de suavización y al orden de diferencia, ambas celdas cuentan con las mismas restricciones de las secciones anteriores.

Las hojas, como el título de las últimas opciones indican, solo difieren en los datos precargados de acuerdo al sexo. A continuación se muestran las imágenes de ambas:

**Figura 4.6: Pantallas de captura de datos para el método Whittaker-Henderson Tipo B, con Tablas de Mortalidad de Hombres y Mujeres, México 2010**



Fuente: Elaboración propia

Una vez ingresados los datos requeridos, él usuario debe hacer click en el botón

Calcular

, que se ubica en la posición mencionada con anterioridad. Los detalles de los demás elementos que aparecen en las imágenes anteriores se explican en las secciones 4.2.1 y 4.2.2.

## 4.2. Proceso de Programación

En este apartado se detalla el proceso de programación de todos los botones que aparecen en las hojas anteriormente mencionadas.

### 4.2.1. Métodos Clásicos de Greville y Reed-Merrel

Una vez que él usuario ha ingresado las Tasas Centrales de Mortalidad y ha hecho click en el botón , la aplicación automáticamente construye la Tabla de Mortalidad, utilizando el método de Greville, para calcular las probabilidades de muerte de los dos primeros grupos de edades, y el método de Reed-Merrel, para el resto de las probabilidades de muerte, antes de presentar el código, escrito en Visual Basic, es necesario dar a conocer que en el mismo se incluyó una serie de anotaciones con la finalidad de explicar que hace cada una de las secuencias de instrucciones:

```
Private Sub CommandButton4_Click()  
  
    `Esta condicional es para verificar que él usuario introdujo las Tasas  
    Centrales de Mortalidad, pues, en la celda y1 se encuentra la suma de las  
    Tasas Centrales de Mortalidad.  
  
    If Range("y1").Value = 0 Then  
  
        `Si él usuario no ha introducido ninguna Tasa Central de Mortalidad, la  
        aplicación le mostrará al mismo un mensaje pidiendo que las proporcione.  
  
        Respuesta = MsgBox("Proporcione los datos requeridos por favor",  
        vbExclamation)  
  
        Range("d11").Select
```

Else `Una vez verificado que se introdujeron los datos se construye la Tabla Abreviada.

ActiveSheet.Unprotect

Dim i As Integer `Es una variable contador de números enteros.

Dim j As Integer `Es una variable contador de números enteros.

Dim o As Double `Es una variable contador de datos decimales.

`Se calculan las probabilidades de muerte de los primeros grupos de edades con el método de Greville.

Cells(11, 5) = (Cells(11, 4).Value) / (1 + (Cells(11, 4).Value) \* (0.5 + ((1 / 12) \* (Cells(11, 4).Value - 0.095))))

Cells(12, 5) = (Cells(12, 4).Value) / ((1 / 4) + (Cells(12, 4).Value) \* (0.5 + ((4 / 12) \* (Cells(12, 4).Value - 0.095))))

`Se calcula el resto de las probabilidades de muerte con el método de Reed-Merrel.

For i = 1 To 15

Cells(12 + i, 5) = 1 - Exp(-((5) \* (Cells(12 + i, 4))) - ((0.008) \* ((Cells(12 + i, 4)) ^ 2)))

Next i

Cells(28, 5) = 1

`Se calculan los supervivientes y defunciones de cada grupo de edades.

Cells(11, 6) = 100000

For i = 1 To 17

Cells(10 + i, 7) = Round(Cells(10 + i, 5) \* Cells(10 + i, 6))

Cells(11 + i, 6) = (Cells(10 + i, 6) - Cells(10 + i, 7))

Next i

Cells(28, 7) = Round(Cells(28, 5) \* Cells(28, 6))

`Se calcula el Tiempo Vivido de los dos primeros intervalos de edades.

Cells(11, 8) = ((Cells(11, 6) + Cells(12, 6)) / (2))

```

Cells(12, 8) = 4 * ((Cells(12, 6) + Cells(13, 6)) / (2))

`Se calcula el Tiempo Vivido de los intervalos restantes.

For i = 1 To 15

Cells(12 + i, 8) = 5 * ((Cells(12 + i, 6) + Cells(13 + i, 6)) / (2))

Next i

Cells(28, 8) = 20 * Cells(28, 6) / 2

`Se computa el Tiempo Futuro de Vida de todos los intervalos de edades.

For j = 1 To 18

o = 0

For i = j To 18

o = o + Cells(10 + i, 8)

Next i

Cells(10 + j, 9) = o

Next j

`Se estima la Esperanza de Vida para cada intervalo de edades.

For i = 1 To 18

Cells(10 + i, 10) = Cells(10 + i, 9) / Cells(10 + i, 6)

Next i

Range("a1").Select

ActiveSheet.Protect End If End Sub

```

Adicionalmente, a la hoja correspondiente a los métodos anteriormente citados se le añadieron los botones 

Borrar
--------

 y 

Volver>
---------

.

El primero, como su nombre lo indica, borra los contenidos que se encuentren en la Tabla de Mortalidad (si lo que se desea es construir una nueva), su programación fue simple, pues se grabó con anterioridad una Macro, opción que aparece en el menú “Programador” de la barra de herramientas de Excel, después se creó el botón mencionado

y finalmente se ingresó el código generado de la grabación, a continuación se presenta el mismo:

```
Private Sub CommandButton2_Click()  
  
ActiveSheet.Unprotect  
  
Range("Tabla1[[tmx]:[ex]]").Select  
  
Selection.ClearContents  
  
Range("D11").Select  
  
ActiveSheet.Protect  
  
End Sub
```

El segundo botón sirve para regresar al “Menú Principal” y en él se ingresó el siguiente código:

```
Private Sub CommandButton1_Click()  
  
ActiveWindow.Visible = False Abreviadas.Show End Sub
```

#### **4.2.2. Método de Whittaker-Henderson, Tipo A**

Para las hojas de Excel, que corresponden a las opciones para construir Tablas de Mortalidad Completas, fueron programados ocho botones adicionales a los anteriormente citados:

Tabla de Mortalidad con Datos Crudos

Una vez proporcionadas las probabilidades crudas de muerte, este botón conduce al usuario a una sección de la hoja donde se encuentra la Tabla de Mortalidad Completa construida a partir de las mismas probabilidades y de la formulas previamente explicadas en el capítulo 2.

**Figura 4.7: Tabla de Mortalidad con Datos Crudos**

Edad	Probabilidad de Muerte	Personas con Vida a Edad x	Personas Fallecidas en el Intervalo Vivido	Tiempo vivo en el Intervalo Vivido	Esperanza de Vida a Edad x
x	tqx*	lx	dx	Lx2	ex
0	0.015706	100000	1571	99214.5	73.05798
1	0.001412	98429	139	98359.5	73.21605929
2	0.000675	98290	66	98257	72.31889307
3	0.000451	98224	44	98202	71.36715059
4	0.000355	98180	35	98162.5	70.39891017
5	0.000301	98145	30	98130	69.42383718
6	0.000277	98115	27	98101.5	68.44491158
7	0.000268	98088	26	98075	67.46361431
8	0.00027	98062	26	98049	66.48136893
9	0.00028	98036	27	98022.5	65.49886776
10	0.0003	98009	29	97994.5	64.51677397
11	0.000326	97980	32	97964	63.53572158
12	0.000361	97948	35	97930.5	62.55631156
13	0.000408	97913	40	97893	61.57849826
14	0.000468	97873	46	97850	60.60346061
15	0.000544	97827	53	97800.5	59.63172233
16	0.000636	97774	62	97743	58.66377565

Fuente: Elaboración propia

**Tabla de Mortalidad con Datos Suavizados**

Después de suavizar las probabilidades de muerte, este botón dirige al usuario a la Tabla de Mortalidad que se construye a partir de los valores suavizados.

**Figura 4.8: Tabla de Mortalidad con Datos Suavizados**

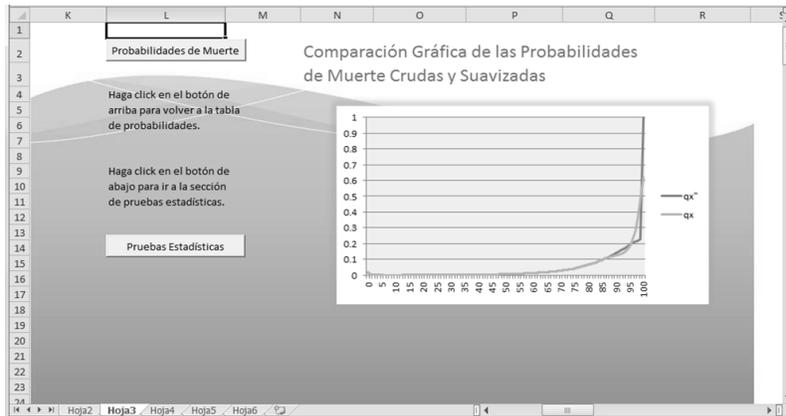
Edad	Probabilidad de Muerte	Personas con Vida a Edad x	Personas Fallecidas en el Intervalo Vivido	Tiempo vivo en el Intervalo Vivido	Esperanza de Vida a Edad x
x	tqx	lx	dx	Lx2	ex
0	0.015706	100000	1571	99214.5	73.19448
1	0.00062712	98429	62	98398	73.3547379
2	0.00054259	98367	53	98340.5	72.4006577
3	0.00046644	98314	46	98291	71.4394186
4	0.00040096	98268	39	98248.5	70.4726259
5	0.00034817	98229	34	98212	69.5004072
6	0.00030931	98195	30	98180	68.5242986
7	0.00028487	98165	28	98151	67.5450874
8	0.00027478	98137	27	98123.5	66.5642164
9	0.00027867	98110	27	98096.5	65.5823973
10	0.00029614	98083	29	98068.5	64.600313
11	0.00032676	98054	32	98038	63.619271
12	0.00037019	98022	36	98004	62.6398768
13	0.00042869	97986	42	97965	61.6627089
14	0.00049394	97944	48	97920	60.6889345
15	0.00057293	97896	56	97868	59.7184461

Fuente: Elaboración propia

**Comparación Gráfica**

Posterior a la graduación de las Probabilidades de Muerte, este botón dirige al usuario a una sección de la hoja donde se encuentran dos graficas de línea, sobrepuestas con fines comparativos, que representan el comportamiento de las probabilidades crudas y suavizadas de muerte de acuerdo a la edad. Hay dos botones en cada hoja, el restante se encuentra en la sección de Pruebas Estadísticas.

**Figura 4.9: Comparación Gráfica de las Probabilidades de Muerte Crudas y Suavizadas.**

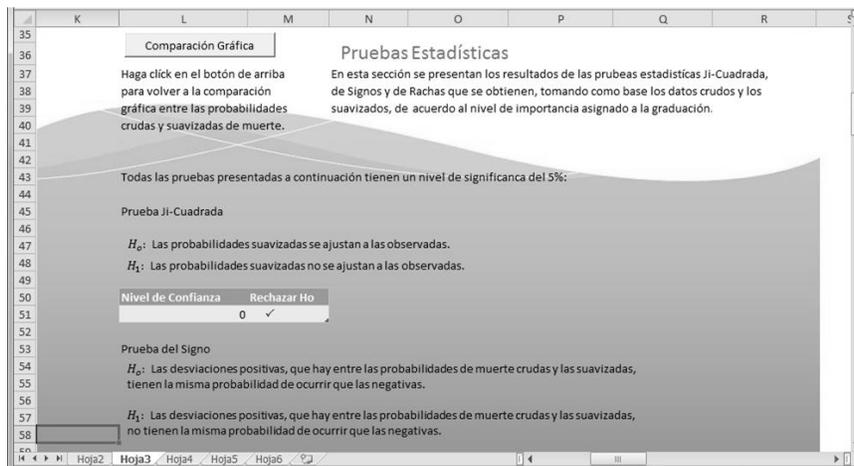


Fuente: Elaboración propia

**Pruebas Estadísticas**

Ubicado cerca de la esquina inferior izquierda de las gráficas de línea, este botón dirige al usuario a la sección de Pruebas Estadísticas, para las cuales, no fue necesario programar Macros en Excel, pues los estadísticos de prueba pueden ser calculados utilizando funciones básicas de las hojas de cálculo.

**Figura 4.10: Pruebas Estadísticas**



Fuente: Elaboración propia

**Probabilidades de Muerte**

Hay tres botones en cada hoja y sirven simplemente para que él usuario regrese a la sección donde ingreso las probabilidades de muerte. La programación de estos botones ser realizó grabando una macro y cortando y pegando el código en cada uno.

Finalmente, para el botón , se presenta a continuación la codificación empleada con sus respectivas notas aclaratorias:

```
Private Sub CommandButton10_Click()

    'Esta condicional ayuda a verificar que se han introducido las probabilidades
    de muerte, e112 representa la suma de todas las Probabilidades de Muerte.

    If (Range("e112").Value = 0) Then

        'Si él usuario no ha introducido ninguna Probabilidad de Muerte, la
        aplicación le mostrará al mismo un mensaje pidiendo que las proporcione.

        Respuesta = MsgBox("Proporcione los datos requeridos por favor.",
        vbExclamation)

        Range("b8").Select

    Else 'Una vez introducidos los datos, se procede a suavizar las
        probabilidades.

        ActiveSheet.Unprotect

        Dim a As Double 'Es la variable a la que se le asignará el nivel de
        importancia de la graduación.

        Dim Q2 As Double 'Será la semilla auxiliar q'u-2.

        Dim Q1 As Double 'Será la semilla auxiliar q'u-1.

        Dim Qw1 As Double 'Será la semilla qw-1.

        Dim Qw As Double 'Será la semilla qw.

        Dim qaux(1 To 103, 1 To 1) As Double 'Es el vector de las probabilidades
        auxiliares de muerte.

        Dim q(1 To 101, 1 To 1) As Double 'Es el vector de las probabilidades de
        muerte graduadas.

        Dim i As Integer 'Es un contador.

        'Se le asigna a "a" el nivel de importancia de la graduación.

        a = Range("b8").Value

        'Se calculan las semillas auxiliares.
```

```

Q2 = Cells(13, 5) - (a + 2) * (Cells(14, 5) - Cells(13, 5))
Q1 = Cells(14, 5) - (a + 2) * (Cells(14, 5) - Cells(13, 5))

`Se asignan las semillas auxiliares a las dos primeras entradas del vector de
probabilidades auxiliares.

qaux(1, 1) = Q2
qaux(2, 1) = Q1

`Se calcula el resto de las probabilidades auxiliares.

For i = 3 To 103

qaux(i, 1) = (((2 * a) / (a + 1)) * (qaux(i - 1, 1))) - ((a) / (a + 2)) *
(qaux(i - 2, 1)) + ((2) / ((a + 1) * (a + 2))) * (Cells(8 + i, 5)))

Next i

`Se muestra en la hoja de cálculo las probabilidades auxiliares.

For i = 3 To 103

Cells(8 + i, 6) = qaux(i, 1)

Next i

`Se calculan las dos últimas probabilidades de muerte suavizadas.

Qw = ((Cells(111, 6)) + ((a) * (Cells(111, 6) - Cells(110, 6))))
Qw1 = ((Cells(110, 6)) + ((a) * (Cells(111, 6) - Cells(110, 6))))

`Se asignan las probabilidades anteriores al vector de probabilidades
graduadas.

q(101, 1) = Qw
q(100, 1) = Qw1

`Se computa el resto de las probabilidades suavizadas.

For i = 99 To 3 Step -1

q(i, 1) = (((2 * a) / (a + 1)) * (q(i + 1, 1))) - ((a) / (a + 2)) * (q(i +
2, 1)) + ((2) / ((a + 1) * (a + 2))) * (Cells(10 + i, 6)))

Next i

```

```
`No se gradúan las primeras probabilidades de muerte por la alta mortalidad que se presenta en los primeros años de edad.
```

```
q(2, 1) = Cells(12, 5)
```

```
q(1, 1) = Cells(11, 5)
```

```
`Se muestra en la hoja de cálculo las probabilidades graduadas.
```

```
For i = 101 To 1 Step -1
```

```
Cells(i + 10, 7) = q(i, 1)
```

```
Next i
```

```
`Regresa el cursor a la esquina superior izquierda de la hoja de cálculo.
```

```
Range("A1").Select
```

```
ActiveSheet.Protect
```

```
End If
```

```
End Sub
```

En el próximo apartado se muestra el código empleado para la fórmula Tipo B, el cuál, como ya se ha mencionado en reiteradas ocasiones, difiere del Tipo A respecto al valor de los coeficientes de ponderación.

#### **4.2.3. Método de Whittaker-Henderson, Tipo B**

La única diferencia entre las tres opciones finales del menú “Tablas Completas” consiste en que las dos últimas ya cuentan con datos precargados y la primera requiere que el usuario proporcione las Probabilidades de Muerte Crudas para que, automáticamente, se genere la Tabla de Mortalidad con Datos Crudos de la que se obtendrán los supervivientes por edad necesarios para calcular los coeficientes de ponderación, cuyo cálculo ya están programado por defecto en las celdas de Excel.

El código del botón  es idéntico para las tres posibles alternativas:

```

Private Sub CommandButton2_Click()

    'Esta condicional verifica que el usuario halla proporcionado los datos
    correctos.

    If Range("c8").Value = 0 Or Range("e112").Value = 0 Then

        Respuesta = MsgBox("Introduzca los datos solicitados por favor.",
        vbExclamation)

        Range("b8").Select

    Else

        ActiveSheet.Unprotect

        'Una vez comprobado que se introdujeron los datos se continua con el proceso.

        Dim w(1 To 101, 1 To 101) As Double 'Es la matriz de los coeficientes de
        ponderación.

        Dim c(1 To 101, 1 To 101) As Double 'Es la matriz de los coeficientes de
        orden.

        Dim CT(1 To 101, 1 To 101) As Double 'Es la traspuesta de la matriz C.

        Dim Q2(1 To 101, 1 To 1) As Double 'Es la matriz de las probabilidades de
        muerte crudas.

        Dim wq2(1 To 101, 1 To 1) As Double 'Es el producto de las matrices w y q2

        Dim Q1(1 To 101, 1 To 1) As Double 'Es la matriz de las probabilidades
        auxiliares de muerte.

        Dim q(1 To 101, 1 To 1) As Double 'Es la matriz de probabilidades suavizadas
        de muerte.

        Dim kCTC(1 To 101, 1 To 101) As Double 'Es la matriz obtenida del producto de
        C, CT y el grado de suavización k.

        Dim i As Long 'Es una variable contador.

        Dim j As Integer 'Es una variable contador.

        Dim o As Long 'Es el orden de la diferencia.

        Dim k As Double 'Es el grado de suavización.

        Dim t As Integer 'Es una variable contador.

```

```

Dim cont As Double `Es una variable contador.

Dim kcont As Integer `Es una variable contador.

Dim G(1 To 101, 1 To 101) As Double `Es la matriz obtenida de sumar w+kCTC.

Dim L(1 To 101, 1 To 101) As Double `Es la raíz de G obtenida con el método
de Cholesky.

Dim LT(1 To 101, 1 To 101) As Double `Es ta traspuesta de L.

Dim contador As Double `Es una variable contador.

Dim sum As Integer `Es una variable contador.

`Se construye el vector de coeficientes de ponderación.

For i = 1 To 101

w(i, i) = Cells(10 + i, 6).Value

Next i

`Se asigna el orden de diferencia y el nivel de importancia de la graduación
a las variables o y k respectivamente.

o = Range("c8").Value

k = Range("b8").Value

`Se construye la matriz de los coeficientes de orden.

For i = 0 To o

c(1, i + 1) = ((-1) ^ (o + i)) * ((fact(o)) / (fact(i) * fact(o - i)))

Next i

For i = 1 To (100 - o)

For j = 1 To o + 1

c(i + 1, i + j) = c(1, j)

Next j

Next i

`Se obtiene la traspuesta de C.

For i = 1 To 101

```

```

For j = 1 To 101
CT(j, i) = c(i, j)
Next j
Next i

`Se construye la matriz de Probabilidades de Muerte Crudas.
For i = 1 To 101
Q2(i, 1) = Cells(10 + i, 5).Value
Next i

`Se construye la matriz kCTC.
contador = 0
For i = 1 To 101
For j = 1 To 101
For t = 1 To 101
contador = contador + (k * CT(i, t) * c(t, j))
Next t
kCTC(i, j) = contador
contador = 0
Next j
Next i

`Se construye la matriz G.
For i = 1 To 101
For j = 1 To 101
G(i, j) = w(i, j) + kCTC(i, j)
Next j
Next i

`Se construye L con el método de Cholesky.

```

```

L(1, 1) = (G(1, 1)) ^ (1 / 2)

For i = 2 To 101

L(i, 1) = G(1, i) / L(1, 1)

Next i

For i = 2 To 101

cont = 0

For kcont = 1 To (i - 1)

cont = cont + ((L(i, kcont)) ^ (2))

Next kcont

L(i, i) = ((G(i, i)) - cont) ^ (1 / 2)

If (i < 101) Then

For j = (i + 1) To 101

cont = 0

For kcont = 1 To (i - 1)

cont = cont + (L(i, kcont) * L(j, kcont))

Next kcont

L(j, i) = (G(i, j) - cont) / L(i, i)

Next j

Else

End If

Next i

'Se traspone L

For i = 1 To 101.

For j = 1 To 101

LT(j, i) = L(i, j)

Next j

```

```

Next i

`Se obtiene wq2.

For i = 1 To 101

wq2(i, 1) = w(i, i) * Q2(i, 1)

Next i

`Se construye la matriz q1.

Q1(1, 1) = (wq2(1, 1) / L(1, 1))

contador = 0

For i = 2 To 101

For j = 1 To (i - 1)

contador = contador + (L(i, j) * Q1(j, 1))

Next j

Q1(i, 1) = ((wq2(i, 1) - contador) / (L(i, i)))

contador = 0

Next i

`Se construye la matriz q.

q(101, 1) = (Q1(101, 1) / LT(101, 101))

contador = 0

For i = 100 To 1 Step -1

For j = 0 To (100 - i)

contador = contador + (LT(i, 100 - j) * q(100 - j, 1))

Next j

q(i, 1) = ((Q1(i, 1) - contador) / (LT(i, i)))

contador = 0

Next i

For i = 1 To 101

```

```
Cells(10 + i, 7) = q(i, 1)

Next i

Range("A1").Select

ActiveSheet.Protect

End If

End Sub
```

Ahora que se entiende completamente como se programó y cómo funciona el programa, en el siguiente capítulo se presentan algunos resultados obtenidos al usarse diferentes valores de diferencia de orden y de importancia asignada a la suavidad.

## Resultados

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos, al usar la aplicación “Generador de Tablas de Mortalidad”, de cada una de las opciones que presenta:

- I. Tablas de Mortalidad Abreviadas
  - a) Métodos Clásicos de Greville y Reed-Merrel
- II. Tablas de Mortalidad Completas
  - a) Método Whittaker-Henderson, Tipo A
  - b) Método Whittaker-Henderson, Tipo B

A continuación se presentan los resultados obtenidos con respecto a las Tablas de Mortalidad Abreviadas.

### 5.1. Tablas de Mortalidad Abreviadas

Cómo se ha mencionado a lo largo de la presente tesis, las Tablas de Mortalidad Abreviadas se construyeron a partir de tasas centrales de mortalidad, las cuales, tanto para hombres como para mujeres, fueron obtenidas, con finalidad ilustrativa, del artículo “Boletín Demográfico, América Latina: Tablas de Mortalidad 1950-2025” publicado por la CEPAL y corresponden a las calculadas para México durante el periodo de tiempo 2010-2015. El subsecuente apartado muestra los resultados obtenidos al introducir las mismas en la aplicación.

### 5.1.1. Tabla de Mortalidad Abreviada construida con los métodos de Greville y de Reed-Merrel utilizando Tasas Centrales de Mortalidad de Hombres para México, 2010-2015

Al introducir las Tasas Centrales de Mortalidad de Hombres en la pantalla de captura para generar la Tabla de Mortalidad Abreviada se obtuvo el siguiente resultado:

Tabla 5.1: Resultado de la Tabla de Mortalidad Abreviada de Hombres, México 2010-2015

[x,x+t)	t	tmx	tqx	lx	tdx	tlx	Tx	ex
[0,1)	1	0.02531	0.024997333	100000	2500	98750	7293432.5	72.934325
[1,5)	4	0.00166	0.006619391	97500	645	388710	7194682.5	73.7916154
[5,10)	5	0.00044	0.002197583	96855	213	483742.5	6805972.5	70.2697073
[10,15)	5	0.00042	0.002097798	96642	203	482702.5	6322230	65.4190725
[15,20)	5	0.00095	0.004738744	96439	457	481052.5	5839527.5	60.5515144
[20,25)	5	0.00156	0.007769678	95982	746	478045	5358475	55.8279157
[25,30)	5	0.00207	0.010296657	95236	981	473727.5	4880430	51.2456424
[30,35)	5	0.00243	0.012076533	94255	1138	468430	4406702.5	46.7529839
[35,40)	5	0.00288	0.014296881	93117	1331	462257.5	3938272.5	42.2938078
[40,45)	5	0.00369	0.018280948	91786	1678	454735	3476015	37.8708627
[45,50)	5	0.00505	0.024934084	90108	2247	444922.5	3021280	33.5295423
[50,55)	5	0.00721	0.035408338	87861	3111	431527.5	2576357.5	29.323107
[55,60)	5	0.01052	0.0512414	84750	4343	412892.5	2144830	25.3077286
[60,65)	5	0.01547	0.074435923	80407	5985	387072.5	1731937.5	21.5396359
[65,70)	5	0.02282	0.107834982	74422	8025	352047.5	1344865	18.070799
[70,75)	5	0.03372	0.15516091	66397	10302	306230	992817.5	14.9527464
[75,80)	5	0.0499	0.220825241	56095	12387	249507.5	686587.5	12.2397272
[80,w)	20	0.12231		1	43708	43708	437080	437080

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el CEPAL

Como se puede apreciar en la Tabla anterior, la esperanza de vida en el primer año es menor a la del siguiente periodo, a partir del cual, las esperanzas restantes decrecen, siendo esto un posible indicio de que los métodos arrojaron resultados coherentes.

### 5.1.2. Tabla de Mortalidad Abreviada construida con el método de Greville y de Reed-Merrel utilizando Tasas Centrales de Mortalidad de Mujeres para México, 2010-2015

Al hacer lo propio con las Tasas Centrales de Mortalidad de Mujeres, el programa generó la presente Tabla:

Tabla 5.2: Resultado de la Tabla de Mortalidad Abreviada de Mujeres, México 2010-2015

$[x, x+t)$	t	tmx	tqx	lx	tdx	tlx	Tx	ex
[0,1)	1	0.02216	0.021920074	100000	2192	98904	7847277	78.47277
[1,5)	4	0.00117	0.004669756	97808	457	390318	7748373	79.2202376
[5,10)	5	0.00033	0.00164864	97351	160	486355	7358055	75.5827367
[10,15)	5	0.00026	0.001299156	97191	126	485640	6871700	70.7030486
[15,20)	5	0.00038	0.001898197	97065	184	484865	6386060	65.791583
[20,25)	5	0.00051	0.002546754	96881	247	483787.5	5901195	60.9117887
[25,30)	5	0.00066	0.003294564	96634	318	482375	5417407.5	56.0610913
[30,35)	5	0.00086	0.004290774	96316	413	480547.5	4935032.5	51.2379304
[35,40)	5	0.0012	0.005982047	95903	574	478080	4454485	46.4478171
[40,45)	5	0.00175	0.008711854	95329	830	474570	3976405	41.712438
[45,50)	5	0.00265	0.013162661	94499	1244	469385	3501835	37.0568472
[50,55)	5	0.00405	0.020046474	93255	1869	461602.5	3032450	32.5178275
[55,60)	5	0.00622	0.03062167	91386	2798	449935	2570847.5	28.1317434
[60,65)	5	0.00957	0.046723931	88588	4139	432592.5	2120912.5	23.9413069
[65,70)	5	0.01473	0.071004827	84449	5996	407255	1688320	19.9921846
[70,75)	5	0.02269	0.107254844	78453	8414	371230	1281065	16.329076
[75,80)	5	0.03505	0.160761065	70039	11260	322045	909835	12.9904053
[80,w)	20	0.1054	1	58779	58779	587790	587790	10

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el CEPAL

En ella se pudo apreciar que la esperanza de vida de las mujeres, en el periodo inicial, fue más alta que la de los hombres, lo cual brindó una mayor certidumbre respecto a la coherencia de los datos considerando, además, que el comportamiento de la misma, a través de los intervalos, tuvo un comportamiento similar a la de la Tabla Abreviada de Hombres.

Los resultados anteriores se deben a que ambos métodos clásicos son confiables, para la construcción de Tablas de Mortalidad Abreviadas, cuando se emplean estadísticas de muertes, nacimientos y población de buena calidad, tal y como es el caso.

## 5.2. Tablas de Mortalidad Completas

Reiterando lo visto en capítulos anteriores, para construir Tablas de Mortalidad Completas con probabilidades suavizadas se empleó el método de Whittaker-Henderson, el cual, requiere probabilidades de muerte dentro de los intervalos  $[x, x + 1)$ , es decir  $q_x$ .

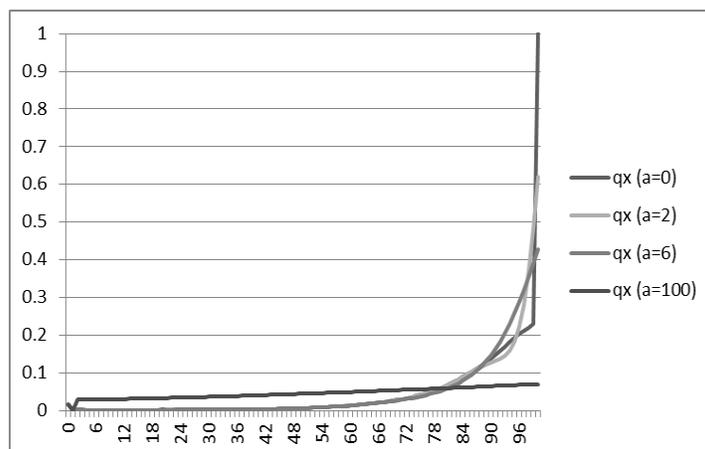
A continuación se presentan los resultados obtenidos al suavizar las probabilidades de muerte de los hombres, obtenidas de la Tabla de Mortalidad precargada que tiene la aplicación, con la fórmula Tipo A y con la fórmula Tipo B, no sin antes mencionar que solo se utilizaron esas probabilidades debido a que, al usar las probabilidades de muerte de las mujeres, no se obtuvieron resultados relevantes que ayuden al cumplimiento del objetivo de los siguientes apartados, que consiste lograr una completa comprensión del funcionamiento del método.

Además, para evitar saturar, con información poco clara y concisa, las siguientes secciones, solo se muestran las gráficas de línea entre las probabilidades crudas y suavizadas, debido a la alta cantidad de observaciones que hay en las Tablas de Mortalidad Completas.

### 5.2.1. Comparación gráfica entre las probabilidades de muerte crudas y las suavizadas con la fórmula Tipo A de Whittaker-Henderson

Cómo se puede apreciar en la gráfica de la página siguiente, donde el eje de las abscisas representa la edad y el eje de las ordenadas a las probabilidades de muerte, el método de suavización de Whittaker-Henderson, con la fórmula Tipo A, no resulta del todo útil, pues, a pesar de que el nivel de importancia asignada al suavización es muy pequeña ( $\alpha = 2$ ), se observa que se pierden datos y el ajuste no mejora en absoluto aumentando el nivel de importancia, de hecho, tiende a una línea recta entre más alta sea esta.

**Gráfica 5.1: Resultados de la Fórmula Whittaker-Henderson Tipo A**



Fuente: Elaboración Propia con datos proporcionados por el INEGI

A continuación se muestran los resultados de las Pruebas Estadísticas para cada caso:

$$a = 2$$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
0	✓

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
46	55	-0.895533471	×

Prueba de Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
42	51.0990099	4.959648963	-1.733794058	×

$$a = 6$$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
0	✓

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
65	36	2.885607852	✓

Prueba de Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
14	47.33663366	4.583390651	-7.164266842	✓

$\alpha = 100$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
0	✓

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
22	79	-5.671711984	✓

Prueba de Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
2	35.41584158	3.391215579	-9.706207352	✓

En conclusión, una vez observados los resultados de las pruebas, la mejor graduación se obtuvo cuando  $a$  fue igual a 2, es necesario recordar que el hecho de que un ajuste no pase una prueba no significa que él mismo sea malo, siempre y cuando pase los restantes.

Si se desea consultar las Tablas de Mortalidad Completas, correspondientes a los anteriores ejemplos, buscar en el apartado b) del Anexo.

**5.2.2. Comparaciones gráficas entre las probabilidades de muerte crudas y las suavizadas con la fórmula Tipo B de Whittaker-Henderson**

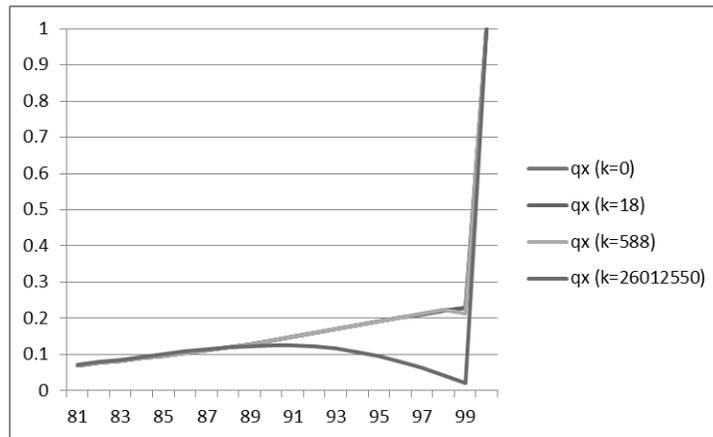
En las siguientes comparaciones sólo se presentan las gráficas de las probabilidades de muerte de los últimos veinte años porque en esa parte es donde se apreciaron mejor los cambios más significativos entre los datos.

Los valores utilizados de  $k$  fueron obtenidos al sustituir los valores asignados a  $a$ , en el apartado anterior, en la fórmula  $k = \frac{1}{4}a \cdot (a + 1)^2 \cdot (a + 2)$ , y los valores de  $z$  fueron 2 y 3, pues con esos ordenes de diferencia se obtienen los mejores resultados en la práctica, aunque el programa soporta hasta el decimo segundo orden de diferencia.

Para consultar las Tablas de Mortalidad de los siguientes ejemplos buscar en el apartado c) del Anexo.

Como se puede apreciar en la gráfica siguiente, cuando  $z$  fue igual a 2 no se apreciaron cambios muy significativos con los valores de  $k = 18$  y 588, pero, cuando el valor de  $k$  fue de 26012550 se notó cierto distanciamiento de las probabilidades suavizadas con respecto a las probabilidades crudas y un pico en la parte inferior de la gráfica.

Gráfica 5.2: Resultados de la fórmula Whittaker-Henderson Tipo B con  $z=2$



Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Los resultados de las pruebas estadísticas fueron los siguientes:

$k = 18$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
1	×

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
53	48	0.497518595	×

Prueba de Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
75	35.41584158	4.987373136	7.836622076	✓

$k = 588$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
1	×

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
54	47	0.696526033	×

Prueba de Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
73	35.41584158	4.975491349	7.453366073	✓

$k = 26012550$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
0	✓

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
55	46	0.895533471	×

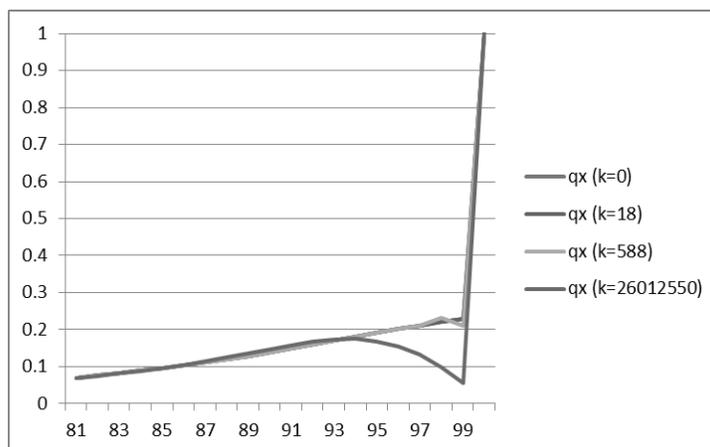
Prueba de Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
49	35.41584158	4.959648963	2.638121874	✓

Sin embargo, antes de presentar conclusiones de acuerdo a los resultados anteriores, es necesario dar a conocer los que se obtuvieron con  $z = 3$ .

Como se puede apreciar en la gráfica subsecuente, cuando el valor del orden de diferencia fue el anteriormente citado, las curvas, que representan a las probabilidades de muerte suavizadas, fueron ligeramente más pronunciadas.

Gráfica 5.3: Resultados de la fórmula Whittaker-Henderson Tipo B con  $z=3$



Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Aún así, una comparación gráfica, entre los datos suavizados de acuerdo a los dos diferentes órdenes de diferencia, no proporcionó información clara y concisa alguna con respecto a que ajuste fue el mejor, por lo cuál fue necesario conocer los resultados obtenidos de las pruebas estadísticas:

$$k = 18$$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
1	×

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
56	45	1.094540909	×

Prueba de las Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
83	35.41584158	4.939845972	9.531503347	✓

$$k = 588$$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
1	×

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
55	46	0.895533471	×

Prueba de las Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
81	35.41584158	4.959648963	9.090191414	✓

$$k = 26012550$$

Prueba Ji-Cuadrada

Nivel de Confianza	Rechazar Ho
0	✓

Prueba del Signo

Desviaciones +	Desviaciones -	Est. De Prueba	Rechazar Ho
53	48	0.497518595	×

Prueba de las Rachas

Rachas	$\mu_R$	$\sigma_R$	Est. De Prueba	Rechazar Ho
53	35.41584158	4.987373136	3.425482303	✓

De acuerdo a los resultados, considerando los órdenes de diferencia, el mejor ajuste fue el obtenido cuando  $k$  fue igual a 18 en el segundo orden, pues fue con estos valores que la graduación pasó la prueba Ji-Cuadrada y la del Signo con el estadístico de prueba más cercano a cero.

En conclusión, con un valor demasiado pequeño de  $k$  prácticamente no hay graduación, con un valor mediano de  $k$  se hace más énfasis en el ajuste que en la suavidad y con un valor alto de  $k$  se hace más énfasis en la suavidad que en el ajuste.

El valor de  $z$  afecta bruscamente a la graduación de los datos, por lo tanto, el orden de diferencia recomendado es 2, debido a que con éste valor las probabilidades suavizadas se encuentran lo más cerca posible de las crudas, manteniendo cierta concordancia y fidelidad.

En resumen, utilizando un valor de  $k = 18$  y el orden de diferencia recomendado anteriormente, se pudo lograr un balance entre suavidad y ajuste en las probabilidades graduadas, obteniendo así, un número de muertos y un promedio de edad de muerte casi idénticos al comparar la Tablas de Mortalidad de Datos Graduados con la Tabla de Mortalidad de Datos Crudos.

## Conclusiones

La graduación de datos siempre será un problema de actualidad, pues es de continuo interés para el ser humano corregir los errores que se presenten en la recolección de información. Algunas de estas discrepancias se podrán evitar, en el transcurso de los años, conforme evolucionen las técnicas demográficas; pero existen otras que nunca se podrán eludir debido a que la intromisión del factor humano siempre traerá errores que no se pueden controlar.

El significado de suavidad es sencillo y complejo a la vez, sencillo por la claridad de su concepto y complejo por la subjetividad con la que se puede manejar. Por ejemplo, existen métodos en los que la definición de suavidad se encuentra fuertemente relacionada con el concepto de parábola y esto conduce al dilema: ¿De cuántos grados debe ser la parábola? En otros casos, la suavidad esta relacionada con la nimiedad de las diferencias. En el método Whittaker-Henderson, la suavidad se define como la relación que hay entre las diferencias de orden y los pesos asignados a cada probabilidad, es decir, la matriz:

$$G = W + kC^T C$$

Siendo una característica de este algoritmo, la posibilidad de conseguir la graduación de un conjunto de datos sin necesidad de contar con un profundo conocimiento matemático.

Adicionalmente, de acuerdo a los resultados que se obtuvieron en el capítulo cinco, se observó que es más eficiente emplear la Fórmula Tipo B que la Fórmula Tipo A para graduar un conjunto de datos, debido a que la segunda lleva a cabo el proceso de suavización basándose únicamente en el factor  $a$ , el cual, va graduando los datos poco a poco hasta que la gráfica de estos sea una línea recta, perdiendo así, información que la segunda no pierde dado que considera al factor  $z$  que evita que los datos suavizados se alejen mucho de los originales sin importar lo grande que sea  $k$ .

Lo anterior se pudo apreciar con facilidad gracias a la rapidez con la que el Programa Generador de Tablas de Mortalidad proporciona las probabilidades suavizadas,

demostrando así, que el manejo de Macros en Excel constituye una herramienta eficaz que permite automatizar y realizar tareas complejas, aumentando la eficiencia del trabajo en el campo actuarial.

## Anexos

a) Tabla de Mortalidad de Hombres con datos crudos, México 2010.

Tabla A.1: Tabla de Mortalidad Completa de Hombres con datos crudos, México 2010

x	$q_x''$	$l_x$	$dx$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0.015772	100000	1577	99211.5	7310373	73.10373
1	0.00148989	98423	147	98349.5	7211161.5	73.2670362
2	0.00076173	98276	75	98238.5	7112812	72.3758802
3	0.00042391	98201	42	98180	7014573.5	71.4307746
4	0.00039545	98159	39	98139.5	6916393.5	70.4611243
5	0.00035415	98120	35	98102.5	6818254	69.4889319
6	0.00028958	98085	28	98071	6720151.5	68.5135495
7	0.00021723	98057	21	98046.5	6622080.5	67.5329706
8	0.00027725	98036	27	98022.5	6524034	66.5473296
9	0.00026083	98009	26	97996	6426011.5	65.5655246
10	0.00028593	97983	28	97969	6328015.5	64.5827899
11	0.00029796	97955	29	97940.5	6230046.5	63.6011077
12	0.00030993	97926	30	97911	6132106	62.6197945
13	0.00047804	97896	47	97872.5	6034195	61.638831
14	0.00059836	97849	59	97819.5	5936322.5	60.6681979
15	0.00070027	97790	68	97756	5838503	59.7044994
16	0.00086165	97722	84	97680	5740747	58.745697
17	0.00121464	97638	119	97578.5	5643067	57.795807
18	0.00133336	97519	130	97454	5545488.5	56.8657236
19	0.0013459	97389	131	97323.5	5448034.5	55.9409636
20	0.00163049	97258	159	97178.5	5350711	55.0156388
21	0.00163436	97099	159	97019.5	5253532.5	54.1049084
22	0.00177245	96940	172	96854	5156513	53.1928306
23	0.00188708	96768	183	96676.5	5059659	52.2864893
24	0.00191611	96585	185	96492.5	4962982.5	51.3846094
25	0.00203189	96400	196	96302	4866490	50.4822614
26	0.00215257	96204	207	96100.5	4770188	49.5840921
27	0.00218511	95997	210	95892	4674087.5	48.689933
28	0.00222161	95787	213	95680.5	4578195.5	47.7955829
29	0.00225751	95574	216	95466	4482515	46.9009877
30	0.00240068	95358	229	95243.5	4387049	46.0060928

x	qx''	lx	dx	Lx	Tx	ex
31	0.00235249	95129	224	95017	4291805.5	45.1156377
32	0.00250831	94905	238	94786	4196788.5	44.220942
33	0.00255762	94667	242	94546	4102002.5	43.3308598
34	0.00260272	94425	246	94302	4007456.5	42.4406301
35	0.00269786	94179	254	94052	3913154.5	41.550181
36	0.00283638	93925	266	93792	3819102.5	40.6611924
37	0.00299445	93659	280	93519	3725310.5	39.7752538
38	0.00307047	93379	287	93235.5	3631791.5	38.893022
39	0.00318423	93092	296	92944	3538556	38.0113866
40	0.00340881	92796	316	92638	3445612	37.1310401
41	0.00353241	92480	327	92316.5	3352974	36.2562067
42	0.00371684	92153	343	91981.5	3260657.5	35.3830857
43	0.0039205	91810	360	91630	3168676	34.5134081
44	0.00410734	91450	376	91262	3077046	33.6473045
45	0.00439742	91074	400	90874	2985784	32.7841535
46	0.00485068	90674	440	90454	2894910	31.9265721
47	0.00517992	90234	467	90000.5	2804456	31.0798147
48	0.00546107	89767	490	89522	2714455.5	30.2389018
49	0.00589582	89277	526	89014	2624933.5	29.4021248
50	0.00627476	88751	557	88472.5	2535919.5	28.5734189
51	0.00665865	88194	587	87900.5	2447447	27.75072
52	0.00729702	87607	639	87287.5	2359546.5	26.9333101
53	0.0077995	86968	678	86629	2272259	26.1275297
54	0.00850865	86290	734	85923	2185630	25.3288909
55	0.00900755	85556	771	85170.5	2099707	24.5419024
56	0.00985252	84785	835	84367.5	2014536.5	23.7605296
57	0.01041428	83950	874	83513	1930169	22.991888
58	0.01141014	83076	948	82602	1846656	22.2285137
59	0.01215483	82128	998	81629	1764054	21.479325
60	0.01313058	81130	1065	80597.5	1682425	20.7373968
61	0.01418048	80065	1135	79497.5	1601827.5	20.0065884
62	0.01523281	78930	1202	78329	1522330	19.2870898
63	0.0165427	77728	1286	77085	1444001	18.5776168
64	0.0179483	76442	1372	75756	1366916	17.8817404
65	0.01932323	75070	1451	74344.5	1291160	17.1994139
66	0.02075506	73619	1528	72855	1216815.5	16.5285524
67	0.02238576	72091	1614	71284	1143960.5	15.8682845
68	0.02405559	70477	1695	69629.5	1072676.5	15.220235
69	0.02599054	68782	1788	67888	1003047	14.5829868
70	0.02817753	66994	1888	66050	935159	13.9588471
71	0.03025651	65106	1970	64121	869109	13.3491383
72	0.03299003	63136	2083	62094.5	804988	12.7500634
73	0.03562213	61053	2175	59965.5	742893.5	12.1680098

x	qx''	lx	dx	Lx	Tx	ex
74	0.03862264	58878	2274	57741	682928	11.5990353
75	0.0419784	56604	2376	55416	625187	11.0449262
76	0.04566232	54228	2476	52990	569771	10.5069521
77	0.049884	51752	2582	50461	516781	9.98572036
78	0.05435793	49170	2673	47833.5	466320	9.4838316
79	0.0593466	46497	2759	45117.5	418486.5	9.00029034
80	0.06449072	43738	2821	42327.5	373369	8.53649001
81	0.07012097	40917	2869	39482.5	331041.5	8.09056138
82	0.07617503	38048	2898	36599	291559	7.66292578
83	0.08256201	35150	2902	33699	254960	7.25348506
84	0.08913022	32248	2874	30811	221261	6.8612317
85	0.09587274	29374	2816	27966	190450	6.48362497
86	0.10330248	26558	2744	25186	162484	6.11808118
87	0.1110446	23814	2644	22492	137298	5.7654321
88	0.1194379	21170	2529	19905.5	114806	5.42305149
89	0.12829425	18641	2392	17445	94900.5	5.09095542
90	0.13782478	16249	2240	15129	77455.5	4.76678565
91	0.14784479	14009	2071	12973.5	62326.5	4.44903276
92	0.15879647	11938	1896	10990	49353	4.13410957
93	0.16980384	10042	1705	9189.5	38363	3.82025493
94	0.18117189	8337	1510	7582	29173.5	3.49928032
95	0.19201816	6827	1311	6171.5	21591.5	3.16266296
96	0.2022289	5516	1115	4958.5	15420	2.79550399
97	0.21146862	4401	931	3935.5	10461.5	2.37707339
98	0.22008791	3470	764	3088	6526	1.88069164
99	0.22932087	2706	621	2395.5	3438	1.27050998
100	1	2085	2085	1042.5	1042.5	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

b) Tablas de Mortalidad Completas de Hombres con probabilidades de muerte suavizadas con el método Whitakker-Henderson Tipo A, México 2010.

Tabla A.2: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $\alpha = 2$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.015772	100000	1577	99211.5	7285057	72.85057
1	0.00148989	98423	147	98349.5	7185845.5	73.0098199
2	0.00254442	98276	250	98151	7087496	72.1182791
3	0.00182099	98026	179	97936.5	6989345	71.3009304
4	0.00120308	97847	118	97788	6891408.5	70.4304526
5	0.00073559	97729	72	97693	6793620.5	69.5148881
6	0.00041854	97657	41	97636.5	6695927.5	68.565771
7	0.00023075	97616	23	97604.5	6598291	67.5943595
8	0.0001439	97593	14	97586	6500686.5	66.6101718
9	0.00012889	97579	13	97572.5	6403100.5	65.6196569
10	0.00016404	97566	16	97558	6305528	64.6283336
11	0.00023502	97550	23	97538.5	6207970	63.6388519
12	0.00033425	97527	33	97510.5	6110431.5	62.653742
13	0.00045764	97494	45	97471.5	6012921	61.67478
14	0.00059977	97449	58	97420	5915449.5	60.7030293
15	0.00075634	97391	74	97354	5818029.5	59.7388824
16	0.00092298	97317	90	97272	5720675.5	58.7839278
17	0.00109218	97227	106	97174	5623403.5	57.8378794
18	0.00125306	97121	122	97060	5526229.5	56.9004592
19	0.00140153	96999	136	96931	5429169.5	55.9713966
20	0.00153794	96863	149	96788.5	5332238.5	55.0492809
21	0.00165958	96714	161	96633.5	5235450	54.1333209
22	0.00176886	96553	171	96467.5	5138816.5	53.2227533
23	0.0018668	96382	180	96292	5042349	52.3162935
24	0.00195461	96202	188	96108	4946057	51.413245
25	0.00203465	96014	195	95916.5	4849949	50.5129356
26	0.00210711	95819	202	95718	4754032.5	49.6147163
27	0.00217205	95617	208	95513	4658314.5	48.7184758
28	0.00223205	95409	213	95302.5	4562801.5	47.8235963
29	0.0022904	95196	218	95087	4467499	46.9294823
30	0.00234982	94978	223	94866.5	4372412	46.0360505
31	0.00241122	94755	228	94641	4277545.5	45.1432167
32	0.00247831	94527	234	94410	4182904.5	44.2508966
33	0.00255155	94293	241	94172.5	4088494.5	43.35947

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
34	0.00263306	94052	248	93928	3994322	42.4692936
35	0.0027253	93804	256	93676	3900394	41.5802524
36	0.00282904	93548	265	93415.5	3806718	40.6926711
37	0.00294354	93283	275	93145.5	3713302.5	39.8068512
38	0.00306846	93008	285	92865.5	3620157	38.9230711
39	0.00320628	92723	297	92574.5	3527291.5	38.041171
40	0.0033596	92426	311	92270.5	3434717	37.1618051
41	0.00352979	92115	325	91952.5	3342446.5	36.2855832
42	0.00372096	91790	342	91619	3250494	35.4122889
43	0.00393736	91448	360	91268	3158875	34.542855
44	0.00418302	91088	381	90897.5	3067607	33.6773999
45	0.00446101	90707	405	90504.5	2976709.5	32.8167561
46	0.00477024	90302	431	90086.5	2886205	31.9616952
47	0.00510603	89871	459	89641.5	2796118.5	31.112578
48	0.00546821	89412	489	89167.5	2706477	30.2697289
49	0.00586071	88923	521	88662.5	2617309.5	29.4334368
50	0.00628706	88402	556	88124	2528647	28.6039569
51	0.00675272	87846	593	87549.5	2440523	27.7818341
52	0.00726249	87253	634	86936	2352973.5	26.9672504
53	0.00781594	86619	677	86280.5	2266037.5	26.1609751
54	0.00841455	85942	723	85580.5	2179757	25.363117
55	0.00905891	85219	772	84833	2094176.5	24.5740563
56	0.0097548	84447	824	84035	2009343.5	23.7941372
57	0.01050517	83623	878	83184	1925308.5	23.0236717
58	0.01131841	82745	937	82276.5	1842124.5	22.2626684
59	0.01219783	81808	998	81309	1759848	21.5119304
60	0.01315186	80810	1063	80278.5	1678539	20.7714268
61	0.01418654	79747	1131	79181.5	1598260.5	20.0416379
62	0.0153067	78616	1203	78014.5	1519079	19.3227714
63	0.01651688	77413	1279	76773.5	1441064.5	18.6152778
64	0.01781747	76134	1357	75455.5	1364291	17.9196023
65	0.01921033	74777	1436	74059	1288835.5	17.2357209
66	0.02070455	73341	1518	72582	1214776.5	16.5634025
67	0.02231554	71823	1603	71021.5	1142194.5	15.9029071
68	0.02406147	70220	1690	69375	1071173	15.2545286
69	0.02596445	68530	1779	67640.5	1001798	14.6183861
70	0.02804622	66751	1872	65815	934157.5	13.9946593
71	0.03033002	64879	1968	63895	868342.5	13.3840303
72	0.03284634	62911	2066	61878	804447.5	12.7870722
73	0.03562162	60845	2167	59761.5	742569.5	12.2042814
74	0.03869025	58678	2270	57543	682808	11.6365248
75	0.04208668	56408	2374	55221	625265	11.0846866
76	0.04584159	54034	2477	52795.5	570044	10.5497279

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
77	0.04997963	51557	2577	50268.5	517248.5	10.0325562
78	0.05451552	48980	2670	47645	466980	9.53409555
79	0.05945865	46310	2754	44933	419335	9.05495573
80	0.06480965	43556	2823	42144.5	374402	8.59587657
81	0.07056294	40733	2874	39296	332257.5	8.15696119
82	0.0766952	37859	2904	36407	292961.5	7.73822605
83	0.08315858	34955	2907	33501.5	256554.5	7.33956516
84	0.08987631	32048	2880	30608	223053	6.9599663
85	0.0967385	29168	2822	27757	192445	6.59781267
86	0.1035938	26346	2729	24981.5	164688	6.25096789
87	0.11024275	23617	2604	22315	139706.5	5.91550578
88	0.11646973	21013	2447	19789.5	117391.5	5.58661305
89	0.12210364	18566	2267	17432.5	97602	5.25702898
90	0.1271383	16299	2072	15263	80169.5	4.91867599
91	0.13191144	14227	1877	13288.5	64906.5	4.56220567
92	0.1373545	12350	1696	11502	51618	4.17959514
93	0.14528409	10654	1548	9880	40116	3.76534635
94	0.15870803	9106	1445	8383.5	30236	3.32044806
95	0.18199639	7661	1394	6964	21852.5	2.85243441
96	0.22076719	6267	1384	5575	14888.5	2.3756981
97	0.28119522	4883	1373	4196.5	9313.5	1.90733156
98	0.3684254	3510	1293	2863.5	5117	1.45783476
99	0.48372891	2217	1072	1681	2253.5	1.01646369
100	0.62013598	1145	710	572.5	572.5	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.3: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $a = 6$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.015772	100000	1577	99211.5	7308887	73.08887
1	0.00148989	98423	147	98349.5	7209675.5	73.2519381
2	0.00187073	98276	184	98184	7111326	72.3607595
3	0.00165456	98092	162	98011	7013142	71.4955552
4	0.0014483	97930	142	97859	6915131	70.6129991
5	0.0012589	97788	123	97726.5	6817272	69.7148116
6	0.00109153	97665	107	97611.5	6719545.5	68.8019813
7	0.00094981	97558	93	97511.5	6621934	67.8768938
8	0.00083601	97465	81	97424.5	6524422.5	66.941184
9	0.00075114	97384	73	97347.5	6426998	65.9964471
10	0.00069528	97311	68	97277	6329650.5	65.0455807
11	0.00066765	97243	65	97210.5	6232373.5	64.090716
12	0.0006668	97178	65	97145.5	6135163	63.1332503
13	0.00069063	97113	67	97079.5	6038017.5	62.1751722
14	0.00073643	97046	71	97010.5	5940938	61.2177524
15	0.00080116	96975	78	96936	5843927.5	60.2622068
16	0.00088152	96897	85	96854.5	5746991.5	59.310314
17	0.00097404	96812	94	96765	5650137	58.3619489
18	0.00107521	96718	104	96666	5553372	57.4181848
19	0.00118196	96614	114	96557	5456706	56.4794543
20	0.00129162	96500	125	96437.5	5360149	55.5455855
21	0.00140182	96375	135	96307.5	5263711.5	54.6169805
22	0.00151077	96240	145	96167.5	5167404	53.6928928
23	0.00161707	96095	155	96017.5	5071236.5	52.7731568
24	0.00171975	95940	165	95857.5	4975219	51.8576089
25	0.00181832	95775	174	95688	4879361.5	50.9460872
26	0.00191263	95601	183	95509.5	4783673.5	50.0379023
27	0.00200285	95418	191	95322.5	4688164	49.1329099
28	0.00208962	95227	199	95127.5	4592841.5	48.2304546
29	0.00217383	95028	207	94924.5	4497714	47.3304079
30	0.00225664	94821	214	94714	4402789.5	46.4326415
31	0.00233933	94607	221	94496.5	4308075.5	45.5365406
32	0.00242343	94386	229	94271.5	4213579	44.6419914
33	0.00251049	94157	236	94039	4119307.5	43.7493495
34	0.00260221	93921	244	93799	4025268.5	42.8580243
35	0.00270036	93677	253	93550.5	3931469.5	41.968354
36	0.00280673	93424	262	93293	3837919	41.0806538
37	0.00292307	93162	272	93026	3744626	40.194779
38	0.00305123	92890	283	92748.5	3651600	39.311013
39	0.00319314	92607	296	92459	3558851.5	38.4296166

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.00335078	92311	309	92156.5	3466392.5	37.5512398
41	0.00352611	92002	324	91840	3374236	36.675681
42	0.0037212	91678	341	91507.5	3282396	35.8035298
43	0.00393811	91337	360	91157	3190888.5	34.9353329
44	0.00417891	90977	380	90787	3099731.5	34.071595
45	0.00444564	90597	403	90395.5	3008944.5	33.2124077
46	0.00474021	90194	428	89980	2918549	32.3585715
47	0.00506444	89766	455	89538.5	2828569	31.5104717
48	0.00542037	89311	484	89069	2739030.5	30.6684563
49	0.00581019	88827	516	88569	2649961.5	29.832838
50	0.0062362	88311	551	88035.5	2561392.5	29.0042294
51	0.00670083	87760	588	87466	2473357	28.1831928
52	0.00720657	87172	628	86858	2385891	27.3699238
53	0.00775585	86544	671	86208.5	2299033	26.5649034
54	0.00835124	85873	717	85514.5	2212824.5	25.768571
55	0.00899539	85156	766	84773	2127310	24.9813284
56	0.00969123	84390	818	83981	2042537	24.2035431
57	0.0104417	83572	873	83135.5	1958556	23.4355526
58	0.01125	82699	930	82234	1875420.5	22.6776684
59	0.01211931	81769	991	81273.5	1793186.5	21.9299062
60	0.01305307	80778	1054	80251	1711913	21.1928124
61	0.01405478	79724	1121	79163.5	1631662	20.466384
62	0.01512807	78603	1189	78008.5	1552498.5	19.7511355
63	0.01627679	77414	1260	76784	1474490	19.0468132
64	0.01750495	76154	1333	75487.5	1397706	18.3536781
65	0.01881705	74821	1408	74117	1322218.5	17.6717566
66	0.0202183	73413	1484	72671	1248101.5	17.0010965
67	0.02171481	71929	1562	71148	1175430.5	16.3415382
68	0.02331356	70367	1641	69546.5	1104282.5	15.6931872
69	0.02502272	68726	1720	67866	1034736	15.0559614
70	0.02685169	67006	1799	66106.5	966870	14.4296033
71	0.02881151	65207	1879	64267.5	900763.5	13.813908
72	0.0309155	63328	1958	62349	836496	13.2089439
73	0.03317943	61370	2036	60352	774147	12.6144207
74	0.03562258	59334	2114	58277	713795	12.0301176
75	0.03826841	57220	2190	56125	655518	11.4560993
76	0.04114546	55030	2264	53898	599393	10.8921134
77	0.0442886	52766	2337	51597.5	545495	10.3380017
78	0.04774036	50429	2407	49225.5	493897.5	9.79391818
79	0.05155281	48022	2476	46784	444672	9.25975595
80	0.05578925	45546	2541	44275.5	397888	8.73595925
81	0.06052625	43005	2603	41703.5	353612.5	8.2225904

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.06585518	40402	2661	39071.5	311909	7.72013762
83	0.07188372	37741	2713	36384.5	272837.5	7.22920696
84	0.0787371	35028	2758	33649	236453	6.75039968
85	0.08655872	32270	2793	30873.5	202804	6.2845987
86	0.09550964	29477	2815	28069.5	171930.5	5.83270007
87	0.10576677	26662	2820	25252	143861	5.39573175
88	0.11752028	23842	2802	22441	118609	4.97479238
89	0.13096931	21040	2756	19662	96168	4.57072243
90	0.14631624	18284	2675	16946.5	76506	4.18431415
91	0.16375894	15609	2556	14331	59559.5	3.81571529
92	0.18348081	13053	2395	11855.5	45228.5	3.46498889
93	0.2056382	10658	2192	9562	33373	3.1312629
94	0.23034546	8466	1950	7491	23811	2.8125443
95	0.25765603	6516	1679	5676.5	16320	2.50460405
96	0.28753968	4837	1391	4141.5	10643.5	2.20043415
97	0.31985459	3446	1102	2895	6502	1.88682531
98	0.35431384	2344	831	1928.5	3607	1.53882253
99	0.39044616	1513	591	1217.5	1678.5	1.10938533
100	0.42755204	922	394	461	461	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.4: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $a = 100$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.015772	100000	1577	99211.5	2914230	29.1423
1	0.00148989	98423	147	98349.5	2815018.5	28.6012263
2	0.0282305	98276	2774	96889	2716669	27.6432598
3	0.02844456	95502	2717	94143.5	2619780	27.4316768
4	0.02866396	92785	2660	91455	2525636.5	27.2203104
5	0.02888872	90125	2604	88823	2434181.5	27.0089487
6	0.02911884	87521	2549	86246.5	2345358.5	26.7976657
7	0.02935429	84972	2494	83725	2259112	26.5865462
8	0.02959509	82478	2441	81257.5	2175387	26.3753607
9	0.02984122	80037	2388	78843	2094129.5	26.1645177
10	0.03009268	77649	2337	76480.5	2015286.5	25.9537985
11	0.03034945	75312	2286	74169	1938806	25.7436531
12	0.03061152	73026	2235	71908.5	1864637	25.5338783
13	0.03087889	70791	2186	69698	1792728.5	25.3242432
14	0.03115154	68605	2137	67536.5	1723030.5	25.1152321
15	0.03142946	66468	2089	65423.5	1655494	24.9066318
16	0.03171263	64379	2042	63358	1590070.5	24.6985896
17	0.03200103	62337	1995	61339.5	1526712.5	24.4912732
18	0.03229466	60342	1949	59367.5	1465373	24.2844619
19	0.03259348	58393	1903	57441.5	1406005.5	24.0783227
20	0.03289748	56490	1858	55561	1348564	23.8726146
21	0.03320664	54632	1814	53725	1293003	23.6675026
22	0.03352094	52818	1771	51932.5	1239278	23.4631754
23	0.03384035	51047	1727	50183.5	1187345.5	23.2598488
24	0.03416485	49320	1685	48477.5	1137162	23.0568127
25	0.03449441	47635	1643	46813.5	1088684.5	22.8547182
26	0.03482901	45992	1602	45191	1041871	22.6533093
27	0.03516862	44390	1561	43609.5	996680	22.4528047
28	0.0355132	42829	1521	42068.5	953070.5	22.2529244
29	0.03586273	41308	1481	40567.5	911002	22.0538879
30	0.03621718	39827	1442	39106	870434.5	21.8553871
31	0.0365765	38385	1404	37683	831328.5	21.6576397
32	0.03694067	36981	1366	36298	793645.5	21.4608988
33	0.03730965	35615	1329	34950.5	757347.5	21.2648463
34	0.03768341	34286	1292	33640	722397	21.0697369
35	0.0380619	32994	1256	32366	688757	20.8752197
36	0.03844508	31738	1220	31128	656391	20.6815489
37	0.03883292	30518	1185	29925.5	625263	20.4883348
38	0.03922537	29333	1151	28757.5	595337.5	20.2958272
39	0.03962238	28182	1117	27623.5	566580	20.1043219

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.04002391	27065	1083	26523.5	538956.5	19.9134122
41	0.04042992	25982	1050	25457	512433	19.7226157
42	0.04084035	24932	1018	24423	486976	19.5321675
43	0.04125515	23914	987	23420.5	462553	19.3423518
44	0.04167428	22927	955	22449.5	439132.5	19.153509
45	0.04209768	21972	925	21509.5	416683	18.9642727
46	0.0425253	21047	895	20599.5	395173.5	18.7757638
47	0.04295708	20152	866	19719	374574	18.5874355
48	0.04339296	19286	837	18867.5	354855	18.3996163
49	0.04383289	18449	809	18044.5	335987.5	18.2116917
50	0.0442768	17640	781	17249.5	317943	18.0239796
51	0.04472464	16859	754	16482	300693.5	17.835785
52	0.04517635	16105	728	15741	284211.5	17.6474076
53	0.04563185	15377	702	15026	268470.5	17.4592248
54	0.04609108	14675	676	14337	253444.5	17.270494
55	0.04655397	13999	652	13673	239107.5	17.0803272
56	0.04702047	13347	628	13033	225434.5	16.890275
57	0.04749048	12719	604	12417	212401.5	16.699544
58	0.04796396	12115	581	11824.5	199984.5	16.5071812
59	0.04844081	11534	559	11254.5	188160	16.3135079
60	0.04892097	10975	537	10706.5	176905.5	16.1189522
61	0.04940437	10438	516	10180	166199	15.9224947
62	0.04989091	9922	495	9674.5	156019	15.7245515
63	0.05038054	9427	475	9189.5	146344.5	15.5239737
64	0.05087315	8952	455	8724.5	137155	15.3211573
65	0.05136869	8497	436	8279	128430.5	15.1148052
66	0.05186705	8061	418	7852	120151.5	14.9052847
67	0.05236817	7643	400	7443	112299.5	14.6931179
68	0.05287195	7243	383	7051.5	104856.5	14.4769433
69	0.05337831	6860	366	6677	97805	14.2572886
70	0.05388715	6494	350	6319	91128	14.0326455
71	0.0543984	6144	334	5977	84809	13.8035482
72	0.05491197	5810	319	5650.5	78832	13.5683305
73	0.05542776	5491	304	5339	73181.5	13.327536
74	0.05594568	5187	290	5042	67842.5	13.079333
75	0.05646564	4897	277	4758.5	62800.5	12.8242802
76	0.05698756	4620	263	4488.5	58042	12.5632035
77	0.05751132	4357	251	4231.5	53553.5	12.2913702
78	0.05803685	4106	238	3987	49322	12.0121773
79	0.05856405	3868	227	3754.5	45335	11.7205274
80	0.05909283	3641	215	3533.5	41580.5	11.4200769
81	0.05962309	3426	204	3324	38047	11.1053707

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.06015473	3222	194	3125	34723	10.7768467
83	0.06068767	3028	184	2936	31598	10.4352708
84	0.06122182	2844	174	2757	28662	10.0780591
85	0.06175707	2670	165	2587.5	25905	9.70224719
86	0.06229335	2505	156	2427	23317.5	9.30838323
87	0.06283056	2349	148	2275	20890.5	8.89335888
88	0.06336861	2201	139	2131.5	18615.5	8.45774648
89	0.06390741	2062	132	1996	16484	7.99418041
90	0.0644469	1930	124	1868	14488	7.50673575
91	0.06498697	1806	117	1747.5	12620	6.98781838
92	0.06552756	1689	111	1633.5	10872.5	6.43724097
93	0.06606859	1578	104	1526	9239	5.85487959
94	0.06660999	1474	98	1425	7713	5.23270014
95	0.06715169	1376	92	1330	6288	4.56976744
96	0.06769362	1284	87	1240.5	4958	3.86137072
97	0.06823574	1197	82	1156	3717.5	3.10568087
98	0.06877797	1115	77	1076.5	2561.5	2.29730942
99	0.06932029	1038	72	1002	1485	1.43063584
100	0.06986264	966	67	483	483	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

c) Tablas de Mortalidad Completas de Hombres con probabilidades de muerte suavizadas con el método Whitakker-Henderson Tipo B, México 2010.

Tabla A.5: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $k = 18$  y  $z = 2$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.01577196	100000	1577	99211.5	7310379	73.10379
1	0.0014899	98423	147	98349.5	7211167.5	73.2670971
2	0.00076173	98276	75	98238.5	7112818	72.3759412
3	0.00042391	98201	42	98180	7014579.5	71.4308357
4	0.00039545	98159	39	98139.5	6916399.5	70.4611854
5	0.00035415	98120	35	98102.5	6818260	69.4889931
6	0.00028958	98085	28	98071	6720157.5	68.5136106
7	0.00021723	98057	21	98046.5	6622086.5	67.5330318
8	0.00027725	98036	27	98022.5	6524040	66.5473908
9	0.00026083	98009	26	97996	6426017.5	65.5655858
10	0.00028593	97983	28	97969	6328021.5	64.5828511
11	0.00029796	97955	29	97940.5	6230052.5	63.6011689
12	0.00030993	97926	30	97911	6132112	62.6198558
13	0.00047804	97896	47	97872.5	6034201	61.6388923
14	0.00059836	97849	59	97819.5	5936328.5	60.6682593
15	0.00070027	97790	68	97756	5838509	59.7045608
16	0.00086165	97722	84	97680	5740753	58.7457584
17	0.00121464	97638	119	97578.5	5643073	57.7958684
18	0.00133336	97519	130	97454	5545494.5	56.8657851
19	0.00134591	97389	131	97323.5	5448040.5	55.9410252
20	0.00163049	97258	159	97178.5	5350717	55.0157005
21	0.00163437	97099	159	97019.5	5253538.5	54.1049702
22	0.00177245	96940	172	96854	5156519	53.1928925
23	0.00188708	96768	183	96676.5	5059665	52.2865513
24	0.00191611	96585	185	96492.5	4962988.5	51.3846715
25	0.00203189	96400	196	96302	4866496	50.4823237
26	0.00215257	96204	207	96100.5	4770194	49.5841545
27	0.00218511	95997	210	95892	4674093.5	48.6899955
28	0.00222161	95787	213	95680.5	4578201.5	47.7956455
29	0.00225751	95574	216	95466	4482521	46.9010505
30	0.00240068	95358	229	95243.5	4387055	46.0061557
31	0.00235249	95129	224	95017	4291811.5	45.1157008
32	0.00250831	94905	238	94786	4196794.5	44.2210052
33	0.00255762	94667	242	94546	4102008.5	43.3309231

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
34	0.00260272	94425	246	94302	4007462.5	42.4406937
35	0.00269786	94179	254	94052	3913160.5	41.5502447
36	0.00283638	93925	266	93792	3819108.5	40.6612563
37	0.00299445	93659	280	93519	3725316.5	39.7753179
38	0.00307047	93379	287	93235.5	3631797.5	38.8930862
39	0.00318423	93092	296	92944	3538562	38.011451
40	0.00340881	92796	316	92638	3445618	37.1311048
41	0.00353241	92480	327	92316.5	3352980	36.2562716
42	0.00371684	92153	343	91981.5	3260663.5	35.3831508
43	0.0039205	91810	360	91630	3168682	34.5134735
44	0.00410734	91450	376	91262	3077052	33.6473701
45	0.00439742	91074	400	90874	2985790	32.7842194
46	0.00485068	90674	440	90454	2894916	31.9266383
47	0.00517992	90234	467	90000.5	2804462	31.0798812
48	0.00546107	89767	490	89522	2714461.5	30.2389687
49	0.00589582	89277	526	89014	2624939.5	29.4021921
50	0.00627476	88751	557	88472.5	2535925.5	28.5734865
51	0.00665865	88194	587	87900.5	2447453	27.750788
52	0.00729702	87607	639	87287.5	2359552.5	26.9333786
53	0.00779951	86968	678	86629	2272265	26.1275987
54	0.00850865	86290	734	85923	2185636	25.3289605
55	0.00900755	85556	771	85170.5	2099713	24.5419725
56	0.00985251	84785	835	84367.5	2014542.5	23.7606003
57	0.01041428	83950	874	83513	1930175	22.9919595
58	0.01141014	83076	948	82602	1846662	22.2285859
59	0.01215483	82128	998	81629	1764060	21.479398
60	0.01313058	81130	1065	80597.5	1682431	20.7374707
61	0.01418048	80065	1135	79497.5	1601833.5	20.0066633
62	0.01523281	78930	1202	78329	1522336	19.2871658
63	0.0165427	77728	1286	77085	1444007	18.577694
64	0.0179483	76442	1372	75756	1366922	17.8818189
65	0.01932323	75070	1451	74344.5	1291166	17.1994938
66	0.02075506	73619	1528	72855	1216821.5	16.5286339
67	0.02238576	72091	1614	71284	1143966.5	15.8683678
68	0.02405559	70477	1695	69629.5	1072682.5	15.2203201
69	0.02599055	68782	1788	67888	1003053	14.5830741
70	0.02817752	66994	1888	66050	935165	13.9589366
71	0.03025652	65106	1970	64121	869115	13.3492305
72	0.03299002	63136	2083	62094.5	804994	12.7501584
73	0.03562213	61053	2175	59965.5	742899.5	12.168108
74	0.03862264	58878	2274	57741	682934	11.5991372
75	0.04197839	56604	2376	55416	625193	11.0450322
76	0.04566233	54228	2476	52990	569777	10.5070628

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
77	0.04988399	51752	2582	50461	516787	9.9858363
78	0.05435794	49170	2673	47833.5	466326	9.48395363
79	0.05934659	46497	2759	45117.5	418492.5	9.00041938
80	0.06449073	43738	2821	42327.5	373375	8.53662719
81	0.07012097	40917	2869	39482.5	331047.5	8.09070802
82	0.07617504	38048	2898	36599	291565	7.66308347
83	0.082562	35150	2902	33699	254966	7.25365576
84	0.08913019	32248	2874	30811	221267	6.86141776
85	0.09587279	29374	2816	27966	190456	6.48382924
86	0.10330243	26558	2744	25186	162490	6.1183071
87	0.11104464	23814	2644	22492	137304	5.76568405
88	0.11943786	21170	2528	19906	114812	5.42333491
89	0.1282943	18642	2392	17446	94906	5.09097736
90	0.13782469	16250	2240	15130	77460	4.76676923
91	0.14784502	14010	2071	12974.5	62330	4.44896502
92	0.15879621	11939	1896	10991	49355.5	4.13397269
93	0.16980417	10043	1705	9190.5	38364.5	3.8200239
94	0.18117162	8338	1511	7582.5	29174	3.4989206
95	0.19201826	6827	1311	6171.5	21591.5	3.16266296
96	0.20222836	5516	1115	4958.5	15420	2.79550399
97	0.21146914	4401	931	3935.5	10461.5	2.37707339
98	0.22032451	3470	765	3087.5	6526	1.88069164
99	0.2286919	2705	619	2395.5	3438.5	1.27116451
100	1	2086	2086	1043	1043	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.6: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $k = 588$  y  $z = 2$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.01577075	100000	1577	99211.5	7310388	73.10388
1	0.00149013	98423	147	98349.5	7211176.5	73.2671886
2	0.00076167	98276	75	98238.5	7112827	72.3760328
3	0.00042391	98201	42	98180	7014588.5	71.4309274
4	0.00039545	98159	39	98139.5	6916408.5	70.4612771
5	0.00035415	98120	35	98102.5	6818269	69.4890848
6	0.00028958	98085	28	98071	6720166.5	68.5137024
7	0.00021724	98057	21	98046.5	6622095.5	67.5331236
8	0.00027725	98036	27	98022.5	6524049	66.5474826
9	0.00026083	98009	26	97996	6426026.5	65.5656776
10	0.00028593	97983	28	97969	6328030.5	64.582943
11	0.00029796	97955	29	97940.5	6230061.5	63.6012608
12	0.00030993	97926	30	97911	6132121	62.6199477
13	0.00047804	97896	47	97872.5	6034210	61.6389842
14	0.00059836	97849	59	97819.5	5936337.5	60.6683512
15	0.00070027	97790	68	97756	5838518	59.7046528
16	0.00086165	97722	84	97680	5740762	58.7458505
17	0.00121464	97638	119	97578.5	5643082	57.7959606
18	0.00133336	97519	130	97454	5545503.5	56.8658774
19	0.00134591	97389	131	97323.5	5448049.5	55.9411176
20	0.00163048	97258	159	97178.5	5350726	55.015793
21	0.00163437	97099	159	97019.5	5253547.5	54.1050629
22	0.00177245	96940	172	96854	5156528	53.1929854
23	0.00188708	96768	183	96676.5	5059674	52.2866443
24	0.00191611	96585	185	96492.5	4962997.5	51.3847647
25	0.00203189	96400	196	96302	4866505	50.482417
26	0.00215257	96204	207	96100.5	4770203	49.5842481
27	0.00218511	95997	210	95892	4674102.5	48.6900893
28	0.0022216	95787	213	95680.5	4578210.5	47.7957395
29	0.00225751	95574	216	95466	4482530	46.9011447
30	0.00240067	95358	229	95243.5	4387064	46.0062501
31	0.0023525	95129	224	95017	4291820.5	45.1157954
32	0.00250831	94905	238	94786	4196803.5	44.2211
33	0.00255762	94667	242	94546	4102017.5	43.3310182
34	0.00260272	94425	246	94302	4007471.5	42.440789
35	0.00269786	94179	254	94052	3913169.5	41.5503403
36	0.00283638	93925	266	93792	3819117.5	40.6613521
37	0.00299445	93659	280	93519	3725325.5	39.775414
38	0.00307047	93379	287	93235.5	3631806.5	38.8931826
39	0.00318423	93092	296	92944	3538571	38.0115477

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.0034088	92796	316	92638	3445627	37.1312018
41	0.00353242	92480	327	92316.5	3352989	36.2563689
42	0.00371684	92153	343	91981.5	3260672.5	35.3832485
43	0.0039205	91810	360	91630	3168691	34.5135715
44	0.00410734	91450	376	91262	3077061	33.6474686
45	0.00439743	91074	400	90874	2985799	32.7843182
46	0.00485067	90674	440	90454	2894925	31.9267375
47	0.00517991	90234	467	90000.5	2804471	31.0799809
48	0.00546109	89767	490	89522	2714470.5	30.2390689
49	0.00589581	89277	526	89014	2624948.5	29.4022929
50	0.00627475	88751	557	88472.5	2535934.5	28.5735879
51	0.00665867	88194	587	87900.5	2447462	27.7508901
52	0.00729699	87607	639	87287.5	2359561.5	26.9334813
53	0.00779955	86968	678	86629	2272274	26.1277021
54	0.00850859	86290	734	85923	2185645	25.3290648
55	0.00900762	85556	771	85170.5	2099722	24.5420777
56	0.00985243	84785	835	84367.5	2014551.5	23.7607065
57	0.01041438	83950	874	83513	1930184	22.9920667
58	0.01141005	83076	948	82602	1846671	22.2286942
59	0.01215488	82128	998	81629	1764069	21.4795076
60	0.01313057	81130	1065	80597.5	1682440	20.7375817
61	0.01418045	80065	1135	79497.5	1601842.5	20.0067757
62	0.01523286	78930	1202	78329	1522345	19.2872799
63	0.01654269	77728	1286	77085	1444016	18.5778098
64	0.01794827	76442	1372	75756	1366931	17.8819366
65	0.01932323	75070	1451	74344.5	1291175	17.1996137
66	0.02075511	73619	1528	72855	1216830.5	16.5287562
67	0.02238569	72091	1614	71284	1143975.5	15.8684926
68	0.02405564	70477	1695	69629.5	1072691.5	15.2204478
69	0.02599062	68782	1788	67888	1003062	14.5832049
70	0.02817726	66994	1888	66050	935174	13.959071
71	0.03025692	65106	1970	64121	869124	13.3493687
72	0.03298966	63136	2083	62094.5	805003	12.7503009
73	0.03562229	61053	2175	59965.5	742908.5	12.1682555
74	0.03862265	58878	2274	57741	682943	11.5992901
75	0.0419783	56604	2376	55416	625202	11.0451912
76	0.04566256	54228	2476	52990	569786	10.5072287
77	0.0498837	51752	2582	50461	516796	9.9860102
78	0.05435832	49170	2673	47833.5	466335	9.48413667
79	0.0593461	46497	2759	45117.5	418501.5	9.00061294
80	0.06449105	43738	2821	42327.5	373384	8.53683296
81	0.070121	40917	2869	39482.5	331056.5	8.09092798

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.0761751	38048	2898	36599	291574	7.66332002
83	0.08256181	35150	2902	33699	254975	7.25391181
84	0.08912943	32248	2874	30811	221276	6.86169685
85	0.09587433	29374	2816	27966	190465	6.48413563
86	0.10330099	26558	2743	25186.5	162499	6.11864598
87	0.1110459	23815	2645	22492.5	137312.5	5.76579887
88	0.11943673	21170	2528	19906	114820	5.4237128
89	0.12829562	18642	2392	17446	94914	5.0914065
90	0.13782215	16250	2240	15130	77468	4.76726154
91	0.14785179	14010	2071	12974.5	62338	4.44953605
92	0.1587889	11939	1896	10991	49363.5	4.13464277
93	0.1698135	10043	1705	9190.5	38372.5	3.82082047
94	0.18116415	8338	1511	7582.5	29182	3.49988007
95	0.19200799	6827	1311	6171.5	21599.5	3.16383477
96	0.20218481	5516	1115	4958.5	15428	2.79695431
97	0.21222223	4401	934	3934	10469.5	2.37889116
98	0.22495207	3467	780	3077	6535.5	1.88505913
99	0.21295754	2687	572	2401	3458.5	1.28712319
100	1	2115	2115	1057.5	1057.5	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.7: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $k = 26012550$  y  $z = 2$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.00675559	100000	676	99662	7383580	73.8358
1	0.00267164	99324	265	99191.5	7283918	73.3349241
2	0.00080297	99059	80	99019	7184726.5	72.5297701
3	0.00036152	98979	36	98961	7085707.5	71.5879884
4	0.00035454	98943	35	98925.5	6986746.5	70.6138534
5	0.00034504	98908	34	98891	6887821	69.6386642
6	0.00028655	98874	28	98860	6788930	68.6624391
7	0.00022964	98846	23	98834.5	6690070	67.6817474
8	0.00026443	98823	26	98810	6591235.5	66.6973832
9	0.00026566	98797	26	98784	6492425.5	65.7148041
10	0.00028231	98771	28	98757	6393641.5	64.7319709
11	0.00029355	98743	29	98728.5	6294884.5	63.7501848
12	0.00032612	98714	32	98698	6196156	62.7687663
13	0.00046264	98682	46	98659	6097458	61.7889585
14	0.00058893	98636	58	98607	5998799	60.8175413
15	0.00071213	98578	70	98543	5900192	59.8530301
16	0.00089866	98508	89	98463.5	5801649	58.8952065
17	0.00115122	98419	113	98362.5	5703185.5	57.9480131
18	0.00131113	98306	129	98241.5	5604823	57.014048
19	0.0014158	98177	139	98107.5	5506581.5	56.0883048
20	0.00156524	98038	153	97961.5	5408474	55.1671189
21	0.00166485	97885	163	97803.5	5310512.5	54.2525668
22	0.0017698	97722	173	97635.5	5212709	53.3422259
23	0.00186558	97549	182	97458	5115073.5	52.4359399
24	0.00194329	97367	189	97272.5	5017615.5	51.5330194
25	0.00203643	97178	198	97079	4920343	50.6322727
26	0.00212582	96980	206	96877	4823264	49.7346257
27	0.00218394	96774	211	96668.5	4726387	48.83943
28	0.00222931	96563	215	96455.5	4629718.5	47.9450566
29	0.00228239	96348	220	96238	4533263	47.05093
30	0.00235089	96128	226	96015	4437025	46.1574671
31	0.00240195	95902	230	95787	4341010	45.2650623
32	0.00247883	95672	237	95553.5	4245223	44.3726796
33	0.00254785	95435	243	95313.5	4149669.5	43.4816315
34	0.00261821	95192	249	95067.5	4054356	42.5913522
35	0.00271307	94943	258	94814	3959288.5	41.7017421
36	0.00283394	94685	268	94551	3864474.5	40.8140096
37	0.00296189	94417	280	94277	3769923.5	39.9284398
38	0.00308111	94137	290	93992	3675646.5	39.0457153
39	0.00321498	93847	302	93696	3581654.5	38.1648268

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.00337444	93545	316	93387	3487958.5	37.2864236
41	0.00353582	93229	330	93064	3394571.5	36.4111113
42	0.00371147	92899	345	92726.5	3301507.5	35.5386764
43	0.00391028	92554	362	92373	3208781	34.669285
44	0.00414632	92192	382	92001	3116408	33.8034537
45	0.00444284	91810	408	91606	3024407	32.9420216
46	0.00478968	91402	438	91183	2932801	32.0868362
47	0.00514043	90964	468	90730	2841618	31.2389297
48	0.00549264	90496	497	90247.5	2750888	30.397896
49	0.00587036	89999	528	89735	2660640.5	29.5630007
50	0.00627765	89471	562	89190	2570905.5	28.7345117
51	0.00673342	88909	599	88609.5	2481715.5	27.9129841
52	0.00725503	88310	641	87989.5	2393106	27.0989242
53	0.00782161	87669	686	87326	2305116.5	26.2934047
54	0.00843176	86983	733	86616.5	2217790.5	25.496827
55	0.00907458	86250	783	85858.5	2131174	24.7092638
56	0.00976925	85467	835	85049.5	2045315.5	23.9310553
57	0.01051038	84632	890	84187	1960266	23.1622318
58	0.01132025	83742	948	83268	1876079	22.4030833
59	0.01219122	82794	1009	82289.5	1792811	21.6538759
60	0.01314094	81785	1075	81247.5	1710521.5	20.914856
61	0.01417755	80710	1144	80138	1629274	20.1867674
62	0.01530671	79566	1218	78957	1549136	19.4698238
63	0.01653474	78348	1295	77700.5	1470179	18.7647292
64	0.01785312	77053	1376	76365	1392478.5	18.0716974
65	0.01925475	75677	1457	74948.5	1316113.5	17.3911955
66	0.02074829	74220	1540	73450	1241165	16.7227836
67	0.02235273	72680	1625	71867.5	1167715	16.0665245
68	0.02408795	71055	1712	70199	1095847.5	15.4225248
69	0.02597803	69343	1801	68442.5	1025648.5	14.790945
70	0.0280433	67542	1894	66595	957206	14.1720115
71	0.03030542	65648	1989	64653.5	890611	13.5664605
72	0.03279848	63659	2088	62615	825957.5	12.9747169
73	0.03555246	61571	2189	60476.5	763342.5	12.3977603
74	0.03861169	59382	2293	58235.5	702866	11.8363477
75	0.04202514	57089	2399	55889.5	644630.5	11.2916762
76	0.04584248	54690	2507	53436.5	588741	10.7650576
77	0.05011087	52183	2615	50875.5	535304.5	10.2582163
78	0.05486905	49568	2720	48208	484429	9.77301888
79	0.0601465	46848	2818	45439	436221	9.31141137
80	0.06595439	44030	2904	42578	390782	8.87535771
81	0.07227904	41126	2973	39639.5	348204	8.46676069

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.07906731	38153	3017	36644.5	308564.5	8.08755537
83	0.08621582	35136	3029	33621.5	271920	7.73907104
84	0.09356334	32107	3004	30605	238298.5	7.42201078
85	0.10088617	29103	2936	27635	207693.5	7.13649796
86	0.10789594	26167	2823	24755.5	180058.5	6.8811289
87	0.11424209	23344	2667	22010.5	155303	6.65280158
88	0.11952603	20677	2471	19441.5	133292.5	6.44641389
89	0.12332118	18206	2245	17083.5	113851	6.25348786
90	0.12520032	15961	1998	14962	96767.5	6.0627467
91	0.12476605	13963	1742	13092	81805.5	5.8587338
92	0.12168276	12221	1487	11477.5	68713.5	5.62257589
93	0.11570619	10734	1242	10113	57236	5.33221539
94	0.10670948	9492	1013	8985.5	47123	4.96449642
95	0.09470132	8479	803	8077.5	38137.5	4.49787711
96	0.07983673	7676	613	7369.5	30060	3.91610214
97	0.06241952	7063	441	6842.5	22690.5	3.21258672
98	0.04289813	6622	284	6480	15848	2.39323467
99	0.02185622	6338	139	6268.5	9368	1.47806879
100	0.99999934	6199	6199	3099.5	3099.5	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.8: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $k = 18$  y  $z = 3$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.01577196	100000	1577	99211.5	7310381	73.10381
1	0.0014899	98423	147	98349.5	7211169.5	73.2671174
2	0.00076172	98276	75	98238.5	7112820	72.3759616
3	0.00042391	98201	42	98180	7014581.5	71.4308561
4	0.00039545	98159	39	98139.5	6916401.5	70.4612058
5	0.00035415	98120	35	98102.5	6818262	69.4890135
6	0.00028958	98085	28	98071	6720159.5	68.513631
7	0.00021723	98057	21	98046.5	6622088.5	67.5330522
8	0.00027725	98036	27	98022.5	6524042	66.5474112
9	0.00026083	98009	26	97996	6426019.5	65.5656062
10	0.00028593	97983	28	97969	6328023.5	64.5828715
11	0.00029796	97955	29	97940.5	6230054.5	63.6011893
12	0.00030993	97926	30	97911	6132114	62.6198762
13	0.00047804	97896	47	97872.5	6034203	61.6389127
14	0.00059836	97849	59	97819.5	5936330.5	60.6682797
15	0.00070027	97790	68	97756	5838511	59.7045812
16	0.00086165	97722	84	97680	5740755	58.7457788
17	0.00121464	97638	119	97578.5	5643075	57.7958889
18	0.00133336	97519	130	97454	5545496.5	56.8658056
19	0.00134591	97389	131	97323.5	5448042.5	55.9410457
20	0.00163048	97258	159	97178.5	5350719	55.0157211
21	0.00163437	97099	159	97019.5	5253540.5	54.1049908
22	0.00177245	96940	172	96854	5156521	53.1929131
23	0.00188708	96768	183	96676.5	5059667	52.286572
24	0.00191611	96585	185	96492.5	4962990.5	51.3846922
25	0.00203189	96400	196	96302	4866498	50.4823444
26	0.00215257	96204	207	96100.5	4770196	49.5841753
27	0.00218511	95997	210	95892	4674095.5	48.6900164
28	0.00222161	95787	213	95680.5	4578203.5	47.7956664
29	0.00225751	95574	216	95466	4482523	46.9010714
30	0.00240068	95358	229	95243.5	4387057	46.0061767
31	0.00235249	95129	224	95017	4291813.5	45.1157218
32	0.00250831	94905	238	94786	4196796.5	44.2210263
33	0.00255762	94667	242	94546	4102010.5	43.3309443
34	0.00260272	94425	246	94302	4007464.5	42.4407149
35	0.00269786	94179	254	94052	3913162.5	41.550266
36	0.00283638	93925	266	93792	3819110.5	40.6612776
37	0.00299445	93659	280	93519	3725318.5	39.7753393
38	0.00307047	93379	287	93235.5	3631799.5	38.8931077
39	0.00318423	93092	296	92944	3538564	38.0114725

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.00340881	92796	316	92638	3445620	37.1311263
41	0.00353241	92480	327	92316.5	3352982	36.2562933
42	0.00371684	92153	343	91981.5	3260665.5	35.3831725
43	0.0039205	91810	360	91630	3168684	34.5134953
44	0.00410734	91450	376	91262	3077054	33.647392
45	0.00439742	91074	400	90874	2985792	32.7842414
46	0.00485068	90674	440	90454	2894918	31.9266603
47	0.00517992	90234	467	90000.5	2804464	31.0799034
48	0.00546107	89767	490	89522	2714463.5	30.2389909
49	0.00589582	89277	526	89014	2624941.5	29.4022145
50	0.00627476	88751	557	88472.5	2535927.5	28.573509
51	0.00665865	88194	587	87900.5	2447455	27.7508107
52	0.00729702	87607	639	87287.5	2359554.5	26.9334014
53	0.00779951	86968	678	86629	2272267	26.1276217
54	0.00850864	86290	734	85923	2185638	25.3289837
55	0.00900756	85556	771	85170.5	2099715	24.5419959
56	0.00985251	84785	835	84367.5	2014544.5	23.7606239
57	0.01041429	83950	874	83513	1930177	22.9919833
58	0.01141013	83076	948	82602	1846664	22.2286099
59	0.01215483	82128	998	81629	1764062	21.4794224
60	0.01313058	81130	1065	80597.5	1682433	20.7374954
61	0.01418048	80065	1135	79497.5	1601835.5	20.0066883
62	0.01523281	78930	1202	78329	1522338	19.2871912
63	0.0165427	77728	1286	77085	1444009	18.5777197
64	0.0179483	76442	1372	75756	1366924	17.8818451
65	0.01932323	75070	1451	74344.5	1291168	17.1995204
66	0.02075507	73619	1528	72855	1216823.5	16.5286611
67	0.02238575	72091	1614	71284	1143968.5	15.8683955
68	0.02405559	70477	1695	69629.5	1072684.5	15.2203485
69	0.02599056	68782	1788	67888	1003055	14.5831031
70	0.0281775	66994	1888	66050	935167	13.9589665
71	0.03025656	65106	1970	64121	869117	13.3492612
72	0.03298999	63136	2083	62094.5	804996	12.7501901
73	0.03562215	61053	2175	59965.5	742901.5	12.1681408
74	0.03862264	58878	2274	57741	682936	11.5991712
75	0.04197838	56604	2376	55416	625195	11.0450675
76	0.04566235	54228	2476	52990	569779	10.5070997
77	0.04988396	51752	2582	50461	516789	9.98587494
78	0.05435798	49170	2673	47833.5	466328	9.48399431
79	0.05934655	46497	2759	45117.5	418494.5	9.0004624
80	0.06449076	43738	2821	42327.5	373377	8.53667292
81	0.07012096	40917	2869	39482.5	331049.5	8.0907569

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.07617504	38048	2898	36599	291567	7.66313604
83	0.08256201	35150	2902	33699	254968	7.25371266
84	0.08913013	32248	2874	30811	221269	6.86147978
85	0.09587291	29374	2816	27966	190458	6.48389732
86	0.10330229	26558	2744	25186	162492	6.11838241
87	0.11104477	23814	2644	22492	137306	5.76576804
88	0.11943774	21170	2528	19906	114814	5.42342938
89	0.12829446	18642	2392	17446	94908	5.09108465
90	0.13782436	16250	2240	15130	77462	4.76689231
91	0.14784556	14010	2071	12974.5	62332	4.44910778
92	0.15879542	11939	1896	10991	49357.5	4.13414021
93	0.16980501	10043	1705	9190.5	38366.5	3.82022304
94	0.18117082	8338	1511	7582.5	29176	3.49916047
95	0.19201974	6827	1311	6171.5	21593.5	3.16295591
96	0.20222408	5516	1115	4958.5	15422	2.79586657
97	0.21129917	4401	930	3936	10463.5	2.37752783
98	0.22078228	3471	766	3088	6527.5	1.88058196
99	0.22839116	2705	618	2396	3439.5	1.2715342
100	1	2087	2087	1043.5	1043.5	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.9: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $k = 588$  y  $z = 3$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.01577079	100000	1577	99211.5	7310382	73.10382
1	0.00149024	98423	147	98349.5	7211170.5	73.2671276
2	0.00076155	98276	75	98238.5	7112821	72.3759718
3	0.00042395	98201	42	98180	7014582.5	71.4308663
4	0.00039545	98159	39	98139.5	6916402.5	70.461216
5	0.00035415	98120	35	98102.5	6818263	69.4890236
6	0.00028958	98085	28	98071	6720160.5	68.5136412
7	0.00021724	98057	21	98046.5	6622089.5	67.5330624
8	0.00027725	98036	27	98022.5	6524043	66.5474214
9	0.00026083	98009	26	97996	6426020.5	65.5656164
10	0.00028593	97983	28	97969	6328024.5	64.5828817
11	0.00029796	97955	29	97940.5	6230055.5	63.6011995
12	0.00030993	97926	30	97911	6132115	62.6198864
13	0.00047804	97896	47	97872.5	6034204	61.6389229
14	0.00059836	97849	59	97819.5	5936331.5	60.6682899
15	0.00070027	97790	68	97756	5838512	59.7045915
16	0.00086166	97722	84	97680	5740756	58.7457891
17	0.00121463	97638	119	97578.5	5643076	57.7958991
18	0.00133335	97519	130	97454	5545497.5	56.8658159
19	0.00134593	97389	131	97323.5	5448043.5	55.941056
20	0.00163045	97258	159	97178.5	5350720	55.0157314
21	0.00163439	97099	159	97019.5	5253541.5	54.1050011
22	0.00177245	96940	172	96854	5156522	53.1929235
23	0.00188708	96768	183	96676.5	5059668	52.2865823
24	0.00191611	96585	185	96492.5	4962991.5	51.3847026
25	0.00203189	96400	196	96302	4866499	50.4823548
26	0.00215256	96204	207	96100.5	4770197	49.5841857
27	0.00218511	95997	210	95892	4674096.5	48.6900268
28	0.0022216	95787	213	95680.5	4578204.5	47.7956769
29	0.00225753	95574	216	95466	4482524	46.9010819
30	0.00240064	95358	229	95243.5	4387058	46.0061872
31	0.00235252	95129	224	95017	4291814.5	45.1157323
32	0.00250829	94905	238	94786	4196797.5	44.2210368
33	0.00255762	94667	242	94546	4102011.5	43.3309548
34	0.00260272	94425	246	94302	4007465.5	42.4407254
35	0.00269786	94179	254	94052	3913163.5	41.5502766
36	0.00283638	93925	266	93792	3819111.5	40.6612883
37	0.00299444	93659	280	93519	3725319.5	39.7753499
38	0.00307047	93379	287	93235.5	3631800.5	38.8931184
39	0.00318424	93092	296	92944	3538565	38.0114833

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.00340879	92796	316	92638	3445621	37.1311371
41	0.00353243	92480	327	92316.5	3352983	36.2563041
42	0.00371684	92153	343	91981.5	3260666.5	35.3831834
43	0.00392049	91810	360	91630	3168685	34.5135062
44	0.00410733	91450	376	91262	3077055	33.647403
45	0.00439745	91074	400	90874	2985793	32.7842524
46	0.00485065	90674	440	90454	2894919	31.9266714
47	0.00517991	90234	467	90000.5	2804465	31.0799144
48	0.00546112	89767	490	89522	2714464.5	30.2390021
49	0.00589579	89277	526	89014	2624942.5	29.4022257
50	0.00627473	88751	557	88472.5	2535928.5	28.5735203
51	0.00665874	88194	587	87900.5	2447456	27.7508221
52	0.00729688	87607	639	87287.5	2359555.5	26.9334129
53	0.00779967	86968	678	86629	2272268	26.1276332
54	0.00850843	86290	734	85923	2185639	25.3289952
55	0.00900784	85556	771	85170.5	2099716	24.5420076
56	0.00985216	84785	835	84367.5	2014545.5	23.7606357
57	0.01041466	83950	874	83513	1930178	22.9919952
58	0.01140979	83076	948	82602	1846665	22.228622
59	0.01215505	82128	998	81629	1764063	21.4794345
60	0.01313053	81130	1065	80597.5	1682434	20.7375077
61	0.01418038	80065	1135	79497.5	1601836.5	20.0067008
62	0.01523295	78930	1202	78329	1522339	19.2872039
63	0.01654266	77728	1286	77085	1444010	18.5777326
64	0.01794825	76442	1372	75756	1366925	17.8818581
65	0.0193232	75070	1451	74344.5	1291169	17.1995338
66	0.02075523	73619	1528	72855	1216824.5	16.5286747
67	0.02238552	72091	1614	71284	1143969.5	15.8684094
68	0.02405569	70477	1695	69629.5	1072685.5	15.2203627
69	0.02599088	68782	1788	67888	1003056	14.5831177
70	0.02817654	66994	1888	66050	935168	13.9589814
71	0.03025794	65106	1970	64121	869118	13.3492766
72	0.03298871	63136	2083	62094.5	804997	12.7502059
73	0.03562285	61053	2175	59965.5	742902.5	12.1681572
74	0.03862256	58878	2274	57741	682937	11.5991882
75	0.04197799	56604	2376	55416	625196	11.0450852
76	0.04566316	54228	2476	52990	569780	10.5071181
77	0.04988282	51752	2582	50461	516790	9.98589426
78	0.05435944	49170	2673	47833.5	466329	9.48401464
79	0.05934492	46497	2759	45117.5	418495.5	9.0004839
80	0.06449188	43738	2821	42327.5	373378	8.53669578
81	0.07012062	40917	2869	39482.5	331050.5	8.09078134

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.0761753	38048	2898	36599	291568	7.66316232
83	0.08256214	35150	2902	33699	254969	7.25374111
84	0.08912771	32248	2874	30811	221270	6.86151079
85	0.09587777	29374	2816	27966	190459	6.48393137
86	0.10329699	26558	2743	25186.5	162493	6.11842006
87	0.11104938	23815	2645	22492.5	137306.5	5.76554692
88	0.11943364	21170	2528	19906	114814	5.42342938
89	0.12829925	18642	2392	17446	94908	5.09108465
90	0.13781469	16250	2239	15130.5	77462	4.76689231
91	0.14786387	14011	2072	12975	62331.5	4.44875455
92	0.15876914	11939	1896	10991	49356.5	4.13405645
93	0.16983061	10043	1706	9190	38365.5	3.82012347
94	0.18120555	8337	1511	7581.5	29175.5	3.49952021
95	0.19196484	6826	1310	6171	21594	3.16349253
96	0.20111699	5516	1109	4961.5	15423	2.79604786
97	0.21155843	4407	932	3941	10461.5	2.37383708
98	0.23041689	3475	801	3074.5	6520.5	1.87640288
99	0.21127518	2674	565	2391.5	3446	1.28870606
100	1	2109	2109	1054.5	1054.5	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

Tabla A.10: Tabla de Mortalidad de Hombres, México 2010 con  $k = 26012550$  y  $z = 3$

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.00886452	100000	886	99557	7355253	73.55253
1	0.00287471	99114	285	98971.5	7255696	73.2055613
2	0.00057632	98829	57	98800.5	7156724.5	72.4152273
3	0.00027223	98772	27	98758.5	7057924	71.4567286
4	0.00039049	98745	39	98725.5	6959165.5	70.4761304
5	0.00038674	98706	38	98687	6860440	69.5037789
6	0.00029555	98668	29	98653.5	6761753	68.5303543
7	0.00023429	98639	23	98627.5	6663099.5	67.5503553
8	0.00025424	98616	25	98603.5	6564472	66.5659933
9	0.00026935	98591	27	98577.5	6465868.5	65.5827459
10	0.00028118	98564	28	98550	6367291	64.6005742
11	0.00029083	98536	29	98521.5	6268741	63.6187891
12	0.00033407	98507	33	98490.5	6170219.5	62.6373709
13	0.00045386	98474	45	98451.5	6071729	61.658194
14	0.00058268	98429	57	98400.5	5973277.5	60.6861545
15	0.00071808	98372	71	98336.5	5874877	59.7210283
16	0.00090792	98301	89	98256.5	5776540.5	58.763802
17	0.00113697	98212	112	98156	5678284	57.8166008
18	0.0013091	98100	128	98036	5580128	56.8820387
19	0.00143141	97972	140	97902	5482092	55.9557016
20	0.00155805	97832	152	97756	5384190	55.0350601
21	0.00166588	97680	163	97598.5	5286434	54.1199222
22	0.00176813	97517	172	97431	5188835.5	53.2095481
23	0.0018618	97345	181	97254.5	5091404.5	52.3026812
24	0.00194717	97164	189	97069.5	4994150	51.3991808
25	0.00203816	96975	198	96876	4897080.5	50.498381
26	0.00212283	96777	205	96674.5	4800204.5	49.6006747
27	0.00218405	96572	211	96466.5	4703530	48.7049041
28	0.00223175	96361	215	96253.5	4607063.5	47.8104576
29	0.00228393	96146	220	96036	4510810	46.9162524
30	0.0023459	95926	225	95813.5	4414774	46.022705
31	0.00240634	95701	230	95586	4318960.5	45.1297322
32	0.00247647	95471	236	95353	4223374.5	44.2372501
33	0.0025454	95235	242	95114	4128021.5	43.3456345
34	0.00261936	94993	249	94868.5	4032907.5	42.4547861
35	0.00271453	94744	257	94615.5	3938039	41.565049
36	0.00283248	94487	268	94353	3843423.5	40.6767439
37	0.00295882	94219	279	94079.5	3749070.5	39.7910241
38	0.00308428	93940	290	93795	3654991	38.9077177
39	0.00322076	93650	302	93499	3561196	38.0266524

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
40	0.00337455	93348	315	93190.5	3467697	37.1480589
41	0.00353561	93033	329	92868.5	3374506.5	36.2721454
42	0.0037081	92704	344	92532	3281638	35.3990982
43	0.00390485	92360	361	92179.5	3189106	34.5290819
44	0.00414521	91999	381	91808.5	3096926.5	33.6626105
45	0.00444442	91618	407	91414.5	3005118	32.8005195
46	0.00478894	91211	437	90992.5	2913703.5	31.9446503
47	0.00514421	90774	467	90540.5	2822711	31.0960297
48	0.0055	90307	497	90058.5	2732170.5	30.2542494
49	0.00587117	89810	527	89546.5	2642112	29.4189066
50	0.00627458	89283	560	89003	2552565.5	28.5896027
51	0.00673055	88723	597	88424.5	2463562.5	27.7668981
52	0.00724999	88126	639	87806.5	2375138	26.9516147
53	0.00782145	87487	684	87145	2287331.5	26.1448158
54	0.00843483	86803	732	86437	2200186.5	25.3468947
55	0.00908339	86071	782	85680	2113749.5	24.5582078
56	0.00977513	85289	834	84872	2028069.5	23.7787933
57	0.01051534	84455	888	84011	1943197.5	23.0086733
58	0.01131687	83567	946	83094	1859186.5	22.247855
59	0.0121848	82621	1007	82117.5	1776092.5	21.4968652
60	0.01313246	81614	1072	81078	1693975	20.7559365
61	0.0141713	80542	1141	79971.5	1612897	20.0255395
62	0.01530853	79401	1216	78793	1532925.5	19.3061233
63	0.01654522	78185	1294	77538	1454132.5	18.5986123
64	0.01787242	76891	1374	76204	1376594.5	17.9031941
65	0.01928247	75517	1456	74789	1300390.5	17.2198379
66	0.02078076	74061	1539	73291.5	1225601.5	16.5485411
67	0.02238491	72522	1623	71710.5	1152310	15.8891095
68	0.02411793	70899	1710	70044	1080599.5	15.2413927
69	0.02600476	69189	1799	68289.5	1010555.5	14.6057249
70	0.02806882	67390	1892	66444	942266	13.9822822
71	0.03033565	65498	1987	64504.5	875822	13.3717365
72	0.03283795	63511	2086	62468	811317.5	12.7744406
73	0.03561061	61425	2187	60331.5	748849.5	12.1912821
74	0.03869238	59238	2292	58092	688518	11.622911
75	0.04211611	56946	2398	55747	630426	11.0705932
76	0.0458983	54548	2504	53296	574679	10.53529
77	0.05003271	52044	2604	50742	521383	10.0181193
78	0.0544914	49440	2694	48093	470641	9.5194377
79	0.05923664	46746	2769	45361.5	422548	9.0392333
80	0.0642391	43977	2825	42564.5	377186.5	8.57690384
81	0.06950061	41152	2860	39722	334622	8.13136664

x	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
82	0.07507368	38292	2875	36854.5	294900	7.70134754
83	0.0810741	35417	2871	33981.5	258045.5	7.28592201
84	0.08767918	32546	2854	31119	224064	6.88453266
85	0.09510397	29692	2824	28280	192945	6.49821501
86	0.10355197	26868	2782	25477	164665	6.12866607
87	0.11314471	24086	2725	22723.5	139188	5.77879266
88	0.12384183	21361	2645	20038.5	116464.5	5.45220261
89	0.13536369	18716	2533	17449.5	96426	5.15206241
90	0.14713244	16183	2381	14992.5	78976.5	4.8802138
91	0.15824512	13802	2184	12710	63984	4.63584988
92	0.16748909	11618	1946	10645	51274	4.41332415
93	0.17340313	9672	1677	8833.5	40629	4.20068238
94	0.17437962	7995	1394	7298	31795.5	3.97692308
95	0.16879424	6601	1114	6044	24497.5	3.71118012
96	0.15514472	5487	851	5061.5	18453.5	3.36313104
97	0.13217616	4636	613	4329.5	13392	2.88869715
98	0.09897096	4023	398	3824	9062.5	2.25267214
99	0.05498301	3625	199	3525.5	5238.5	1.44510345
100	0.99999984	3426	3426	1713	1713	0.5

Fuente: Elaboración propia con datos proporcionados por el INEGI

## Glosario

1.- **Algoritmo:** Es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos.

2.- **Código fuente:** El código fuente de un programa informático (o software) es un conjunto de líneas de texto que son las instrucciones, escritas en un determinado lenguaje de programación, que debe seguir la computadora para ejecutar dicho programa. Por tanto, en el código fuente de un programa está escrito por completo su funcionamiento.

3.- **Estadístico de prueba:** En estadística un estadístico de prueba es una medida cuantitativa, derivada de un conjunto de datos de una muestra, con el objetivo de estimar o inferir características de una población o modelo estadístico.

Más formalmente, un estadístico es una función medible  $T$  que, dada una muestra estadística de valores  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , les asigna un número,  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , que sirve para estimar determinado parámetro de la distribución de la que procede la muestra. Así, por ejemplo, la media de los valores de una muestra (media muestral) sirve para estimar la media de la población de la que se ha extraído la misma; la varianza muestral podría usarse para estimar la varianza poblacional, etc. Esto se denomina como realizar una estimación puntual.

4.- **Excel:** Microsoft Excel es una aplicación distribuida por Microsoft Office para hojas de cálculo. Este programa es desarrollado y distribuido por Microsoft, y es utilizado normalmente en tareas financieras y contables.

5.- **Gráfica de Líneas:** Conjunto de puntos unidos por segmentos de líneas. Por lo general esta gráfica se utiliza para mostrar una tendencia.

6.- **Inferencia Estadística:** La Inferencia Estadística es la parte de la estadística matemática que se encarga del estudio de los métodos para la obtención del modelo de probabilidad (forma funcional y parámetros que determinan la función de distribución) que sigue una

variable aleatoria de una determinada población, a través de una muestra (parte de la población) obtenida de la misma.

Los dos problemas fundamentales que estudia la inferencia estadística son el "Problema de la estimación" y el "Problema del contraste de hipótesis".

7.- **Lenguaje de programación:** Un lenguaje de programación es un lenguaje formal diseñado para expresar procesos que pueden ser llevados a cabo por máquinas como las computadoras.

8.- **Macros de Excel:** Las macros son un grupo de instrucciones programadas bajo el entorno VBA (Visual Basic para Aplicaciones), cuya tarea principal es la automatización de tareas repetitivas y la resolución de cálculos complejos.

9.- **Máxima Verosimilitud:** En estadística, la estimación por máxima verosimilitud (conocida también como EMV y, en ocasiones, MLE por sus siglas en inglés) es un método habitual para ajustar un modelo y encontrar sus parámetros.

10.- **Programa:** Un programa informático es un conjunto de instrucciones que una vez ejecutadas realizarán una o varias tareas en una computadora.

11.- **Programación:** En informática, es el proceso de diseñar, codificar, depurar y mantener el código fuente de programas computacionales. El propósito de la programación es crear programas que exhiban un comportamiento deseado.

12.- **Prueba de Hipótesis:** Dentro de la inferencia estadística, un contraste de hipótesis (también denominado test de hipótesis o prueba de significación) es un procedimiento para juzgar si una propiedad que se supone en una población estadística es compatible con lo observado en una muestra de dicha población. Fue iniciada por Ronald Fisher y fundamentada posteriormente por Jerzy Neyman y Karl Pearson.

Mediante esta teoría, se aborda el problema estadístico considerando una hipótesis determinada ó nula  $H_0$  y una hipótesis alternativa  $H_1$ , y se intenta dirimir cuál de las dos es la hipótesis verdadera, tras aplicar el problema estadístico a un cierto número de experimentos.

13.- **Triángulo de Pascal:** En matemática, el triángulo de Pascal es una representación de los coeficientes binomiales ordenados en forma triangular. Es llamado así en honor al matemático francés Blaise Pascal, quien introdujo esta notación en 1654.

Ejemplo para  $n=3$ :

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \end{array}$$

14.- **Visual Basic:** Visual Basic es un lenguaje de programación dirigido por eventos, desarrollado por Alan Cooper para Microsoft. Este lenguaje de programación es un dialecto de BASIC (Código simbólico de instrucciones todo-propósito para principiantes en español), con importantes agregados. Su primera versión fue presentada en 1991, con la intención de simplificar la programación utilizando un ambiente de desarrollo completamente gráfico que facilitara la creación de interfaces gráficas y, en cierta medida, también la programación misma.

## Referencias

Bowers, N. L., Gerber H.U., Hickman J. C., Jones, D. A. y Nesbitt, C. J. (1997) *Actuarial Mathematics*. 2° ed. Illinois: The Society of Actuaries.

Capa, H. y Lara, K. (2002). *Construcción de Tablas de Mortalidad de la Población Ecuatoriana con Base en el Censo 2001 y Estadísticas Vitales*. Disponible en: [http://www.math.epn.edu.ec/IX\\_memorias/docs/.../CapaLara2.doc](http://www.math.epn.edu.ec/IX_memorias/docs/.../CapaLara2.doc). Última consulta: 08/01/2012.

Caramasa V. (2011). *La Peste en el Siglo XVII*. Disponible en: <http://biombohistorico.blogspot.mx/2010/12/la-peste-en-el-siglo-xvii.html>. Última consulta: 18/04/2014.

Cernuschi, F. y Greco, F. (1968). *Teoría del Error*. EUDEBA, Buenos Aires. Disponible en: <http://presencias.net/indpdm.html>. Última consulta 07/01/2012.

Chan, F. Y. (1984) A Generalization of Whittaker-Henderson Graduation. *Transactions of Society of Actuaries*. Vol.36 pp. 183 – 211.

Ellis, C. (2011). *Errores en los Censos*. UNFPA, Santiago de Chile. Disponible en: [http://www.eclac.cl/celade/noticias/paginas/3/45123/UNFPA\\_Ellis\\_Errores.pdf](http://www.eclac.cl/celade/noticias/paginas/3/45123/UNFPA_Ellis_Errores.pdf). Última consulta: 07/01/2012.

Hernández, S. (2005). *Historia de la estadística*. Disponible en: <http://www.uv.mx/cienciahombre/revistae/vol18num2/articulos/historia/>. Última consulta: 18/04/2014.

Instituto Nacional de Estadística e Informática (2011). *Tablas de Mortalidad*. Disponible en: <http://www.inei.gov.pe/biblioineipub/bancopub/Est/LIb0336/cap31.htm>. Última consulta: 10/03/2012.

Instituto Nacional de Estadística e Informática (2012). *Métodos de Construcción de Tablas Abreviadas*. Disponible en: <http://www.inei.gov.pe/biblioineipub/bancopub/Est/LIb0336/cap35.htm>. Última consulta: 15/01/2012.

Instituto Tecnológico de Chihuahua (2012). *Prueba del Signo*. Disponible en: <http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/estadistica1/cap04c.html>. Última consulta: 26/03/2012.

Keyfitz, N. y Caswell, H. (1977) *Applied Mathematical Demography*. 1° ed. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Knorr, F. E. (1984) Multidimensional Whittaker-Henderson Graduation. *Transactions of Society of Actuaries*. Vol.36 pp. 213 – 255.

Manzano V. (1995). *Prueba de Rachas*. Inferencia Estadística. Aplicaciones con SPSS/PC Ra-ma 1995.

Moreno, A. (2001). *Control Avanzado, Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*. Universidad Nacional de Ingeniería, Perú. Disponible en: <http://es.scribd.com/doc/63567436/4/Derivadas-e-Integrales-con-Matrices-y-Vectores>. Última consulta: 18/03/2012.

Morton, D. M. (1946) *Elements of Graduation*. 1° ed. USA: The Actuarial Society of America.

Muñoz J. (2014). *La Factorización de Cholesky*. Disponible en:  
<http://www.geocities.ws/jucamucas/Fchol.html>. Última consulta: 18/04/2014.

Organización Panamericana de la Salud (2003). *La Tabla de Vida: una técnica para resumir la mortalidad y la sobrevivencia*. Disponible en:  
[http://www.paho.org/spanish/dd/ais/be\\_v24n4-tabla\\_vida.htm](http://www.paho.org/spanish/dd/ais/be_v24n4-tabla_vida.htm). Última consulta: 24/02/2012.

Pérez, R. y López, A. J. (2011) *Métodos Estadísticos para Economía y Empresa*. 1° ed. Oviedo: Pérez, R. y López, A. J.

Schuette, D. R. (1978) A Linear Programming Approach to Graduation. *Transactions of Society of Actuaries*. Vol.30 pp. 407 – 475.

Siegel, J.S. y Swason, D. A. (2004) *The Methods and Materials of Demography*. 2° ed. San Diego, California: Siegel, J.S. y Swason, D. A.

Thompson, R. J. (1996) *Whittaker-Henderson Likelihood Enhanc.* 1° ed. USA: Thompson, R. J.

Zarruk, A., Villegas, A. M. y Ortiz, F. (2010) Aspectos Teóricos. *Tablas de Mortalidad, Evolución en el Sector Asegurador Colombiano*. Vol. 35 pp. 420 – 469.