UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

El operador de Dirac bajo transformaciones conformes de métrica

TESIS

Que para optar por el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta

Alfonso Ortiz Ávila

Director de tesis

Dr. Elmar Wagner

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

MÉXICO, D.F. 13 de mayo de 2014

Abstract

Given a spin manifold with riemannian metric g, the Dirac operator in the conformal metric $e^{2h}g$ is computed in terms of the one in g using local coordinates. The relation between the Dirac operators of the conformally related manifolds is used to obtain directly the Dirac operators for the manifolds of constant curvature $\mathbb{S}^n$ and $\mathbb{H}^n$ by means of the already known operator in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: Dirac operator, spin connection, conformal metrics, manifolds of constant curvature.

Resumen

Dada una variedad de espín con métrica de Riemann g, el operador de Dirac en la métrica conforme $e^{2h}g$ es calculado en términos del que se tiene en la métrica inicial g en coordenadas locales. La relación obtenida entre los operadores de Dirac de las variedades conformemente relacionadas es utilizado para obtener de manera directa los operadores de Dirac en las variedades de curvatura constante $\mathbb{S}^n$ y en $\mathbb{H}^n$ a partir del ya conocido para $\mathbb{R}^n$.

Palabras clave: operador de Dirac, conexión de espín, métricas conformes, variedades de curvatura constante.

Índice general

Introducción

Dada una variedad de Riemann (M, g), una métrica conforme o conformemente equivalente a la métrica inicial g está definida por $e^{2h}g$ donde $h : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable. En el presente trabajo de tesis, nos ocupamos de encontrar la manera en que el operador de Dirac definido para una variedad de espín, cambia con respecto de una transformación conforme de la métrica con la que se había definido el operador de Dirac inicial. El conocer este resultado encuentra su principal justificación en el hecho de que una vez establecido el operador de Dirac en $\mathbb{R}^n$, podremos obtener los operadores de Dirac en las variedades de espín $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{H}^n$ de manera directa. Esto debido a que por definición, el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ está dotado de una métrica conformemente equivalente a la métrica euclidiana del $\mathbb{R}^n$. De manera análoga, la métrica inducida en $\mathbb{S}^n$ como subvariedad del $\mathbb{R}^{n+1}$ es una métrica conforme a la métrica euclidiana, para ésto, usaremos el atlas dado por proyecciones estereográficas “norte” y “sur”, lo cual tiene la ventaja adicional de requerir sólo dos cartas para cubrir a $\mathbb{S}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ el problema de encontrar un operador diferencial de primer orden, tal que su segunda iteración sea el operador de Laplace $\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ nos lleva a proponer lo siguiente,

$$D = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\delta_{ij}$, lo cual define al álgebra de Clifford $\mathbb{C}l(n)$, esto nos lleva a buscar representaciones irreducibles no triviales de $\mathbb{C}l(n)$. Ocurre que $\mathbb{C}l(n)$ tiene una representación irreducible de dimensión compleja $2^{[\frac{n}{2}]}$ y por lo tanto D no es un operador diferencial en el haz tangente, sino en un haz vectorial complejo de dimensión $2^{[\frac{n}{2}]}$. D es el llamado operador de Dirac.

Nuestro enfoque para generalizar la definición del operador de Dirac a una variedad de Riemann, M, es proceder de manera local con las respectivas correcciones derivadas de la naturaleza propia de la geometría diferencial de dicha variedad. Es de esperarse que en lugar de que en este caso aparezca $\frac{\partial}{\partial x_i}$ en la definición de D, ocurra que debamos considerar la derivada covariante en un haz vectorial de fibra $\mathbb{C}^{\dim(M)}$,

$$D = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \nabla_{e_i},$$

además de que necesitamos definir los γ_i de manera compatible con el cambio de cartas, esto se logra mediante la definición de un haz fibrado tal que sus secciones tienen la estructura de álgebra de Clifford.

Una derivada covariante en el haz vectorial E

$$\nabla : \Gamma(\mathrm{T}M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

está determinada por los símbolos de Christoffel, los cuales deben satisfacer ciertas condiciones de transformación entre cambio de cartas del haz E. La derivada de espín

$$\nabla^{spin} : \Gamma(\mathrm{T}M) \times \Gamma(S) \to \Gamma(S)$$

se define a través de los símbolos de Christoffel obtenidos mediante el isomorfismo que existe entre $\mathfrak{spin}(n)$ y $\mathfrak{so}(n)$. Las cuales son las álgebras de Lie de los grupos de estructura de los haces de espín S y tangente $\mathrm{T}M$, respectivamente. Es de esta manera que la construcción de la derivada de espín depende de la métrica de Riemann en M, ya que la derivada covariante que consideramos en $\mathrm{T}M$ es precisamente la derivada de Levi-Civita, la cual queda completamente determinada por la métrica de M, mediante la relación

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

Procedemos a obtener una expresión que relaciona los símbolos de Christoffel de la derivada de Levi-Civita en la métrica g con aquellos correspondientes a la métrica $e^{2h}g$. La relación que encontramos de manera directa

$$A_i^{\zeta} = e^{-h} \left(A_i^{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})_i^k \phi_{\alpha\beta} \left(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_i} \mathrm{id} \right) \phi_{\beta\alpha} \right)$$

no permite de manera inmediata proporcionar símbolos de Christoffel para la definición de la derivada de espín, ahora relativa a la métrica $e^{2h}g$. Esta situación es resuelta en la sección **2.3**, donde nos ocupamos de reexpresar la relación obtenida mediante manipulaciones no triviales, para lograr definir la deseada derivada de espín. Obtenemos finalmente la relación buscada

$$\tilde{D} = e^{-h} \left(D + \frac{n-1}{2} \gamma \left(\mathrm{grad}(h) \right) \right),$$

donde D es el operador de Dirac en (M, g) y $\tilde{D}$ es el respectivo operador de Dirac en $(M, e^{2h}g)$.

CAPÍTULO 1

Fundamentos

Incluimos aquí resultados que se emplearán para el desarrollo de los capítulos siguientes, sus demostraciones pueden encontrarse en la bibliografía [2–4, 6, 7] y [9], mientras que las pruebas y construcciones que presentamos de manera explícita no se hayan presentadas de la manera en que las requerimos o simplemente no aparecen en las referencias citadas.

1.1. Haces vectoriales

En lo subsecuente, $\mathbb{K}$ denotará indistintamente al campo de los números reales $\mathbb{R}$ o bien al de los complejos $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.1. *Un haz vectorial diferenciable de fibra $\mathbb{K}^m$ sobre la variedad diferenciable M es una tríada ordenada (E, π, M) donde*

$$\pi : E \to M$$

es una aplicación diferenciable suprayectiva tal que para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x) =: E_x$ está dotado de la estructura de un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y además se cumple la siguiente condición de trivialización local: para cada $x \in M$ existe un difeomorfismo

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^m$$

donde U_α es vecindad abierta de x, tal que para cada $y \in U_\alpha$

$$\phi_\alpha|_{E_y} : E_y \to \{y\} \times \mathbb{K}^m$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. La pareja (U_α, ϕ_α) se llama carta del haz vectorial.

Definición 1.1.2. *Dado haz vectorial (E, π, M) y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ cubierta por abiertos para M tal que cada (U_α, ϕ_α) es carta del haz E, para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definimos las funciones de transición de haz $\phi_{\alpha\beta}$ mediante*

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, v) = (x, \phi_{\alpha\beta}(x)v)$$

para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $v \in \mathbb{R}^n$.

Observación 1.1.3. *Las funciones de transición de haz definidas previamente cumplen con*

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Gl}(\mathbb{K}, m),$$

esto es claro del hecho de que ϕ_α *es difeomorfismo para cada* $\alpha \in I$ *y dado que* $\phi_\alpha|_{\pi^{-1}(y)}$ *es lineal.*

En relación a la observación anterior, hacemos la siguiente

Definición 1.1.4. *Si para toda pareja de índices* α, β *ocurre que* $\phi_{\alpha\beta} \in G \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{K}, m)$*, decimos que el haz vectorial en cuestión tiene grupo de estructura* G*.*

Proposición 1.1.5. *Si* $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta), (U_\gamma, \phi_\gamma)$ *son cartas de haz tales que* $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$*, entonces las funciones de transición de haz correspondientes cumplen con la llamada condición de cociclo, esto es*

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\alpha}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m},\\ \phi_{\alpha\beta}(x) \circ \phi_{\beta\alpha}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m},\\ \phi_{\alpha\beta}(x) \circ \phi_{\beta\gamma}(x) \circ \phi_{\gamma\alpha}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}.\end{aligned}$$

Proposición 1.1.6. *Dadas* M *variedad diferenciable con atlas diferenciable* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *y funciones* $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(\mathbb{K}, m)$*, cada vez que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$*, que satisfacen la condición de cociclo, entonces*

$$E := \left. \coprod_{\alpha\in I} U_\alpha \times \mathbb{K}^m \right/ \sim$$

donde

$$U_\alpha \times \mathbb{K}^m \ni (p, v) \sim (q, w) \in U_\beta \times \mathbb{K}^m$$

si y sólo si

$$p = q \quad \text{y} \quad v = \phi_{\alpha\beta}(q)w,$$

define un haz vectorial diferenciable de fibra $\mathbb{K}^m$ *sobre* M *con proyección* $\pi : E \to M$ *dada por* $\pi([(p, v)]) = p$*.*

Demostración. Una demostración de este hecho puede encontrarse por ejemplo en [9]. ∎

Observación 1.1.7. *Dada variedad diferenciable* M *con atlas* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *y* (E, π, M) *haz vectorial que es localmente trivial sobre los abiertos de la cubierta* $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$*, podemos conseguir un atlas para* M *tal que* (E, π, M) *es trivial sobre los abiertos de dicho atlas. Debido a esto, en lo que sigue, supondremos que se cumple esta propiedad para cuando fijemos un atlas para* M *y un haz vectorial* (E, π, M)*.*

Ejemplo 1.1.8. *Dado $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ atlas diferenciable para la variedad M de dimensión n, definimos el haz tangente de M mediante*

$$\mathrm{T}M := \coprod_{\alpha\in I} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \Big/ \sim$$

donde

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^n \ni (p, v) \sim (q, w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^n$$

si y sólo si

$$p = q \quad \text{y} \quad v = \phi_{\alpha\beta}(q)w$$

con funciones de transición de haz dadas por

$$\phi_{\alpha\beta}(x) := D(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x). \tag{1.1}$$

Con esta definición de haz tangente, por $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ entenderemos la clase de equivalencia $[(p, e_i)]$, para $(p, e_i) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Tenemos que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}_{i=1}^n$ es considerada como la base canónica de $\pi^{-1}(p) \subset \mathrm{T}M$, definida de manera local en la carta U_α. También emplearemos la descripción del plano tangente T_pM mediante clases de equivalencia de curvas por $p \in M$ que se puede encontrar en [4] o bien en [9].

Ejemplo 1.1.9. *De manera análoga definimos el haz cotangente de M mediante*

$$\mathrm{T}^*M := \coprod_{\alpha\in I} U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^* \Big/ \sim$$

donde

$$U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^* \ni (p, v) \sim (q, w) \in U_\beta \times (\mathbb{R}^n)^*$$

si y sólo si

$$p = q \quad \text{y} \quad v = \phi^*_{\alpha\beta}(q)w$$

con funciones de transición de haz dadas por

$$\phi^*_{\alpha\beta}(x) := (D(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})^{-1})^T(x),$$

donde A^T denota la matriz transpuesta de A.

Dada $\{e_i\}_{i=1}^n$ base de $\pi^{-1}(p) \subset \mathrm{T}M$ no necesariamente ortonormal, definimos su base dual mediante

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \tag{1.2}$$

la cual es una base para $\pi^{-1}(p) \subset \mathrm{T}^*M$.

Observación 1.1.10. *Dado (E, π, M) haz vectorial de fibra $\mathbb{R}^m$ con funciones de transición de haz $\Phi_{\alpha\beta}$, si U_α, U_β son dos cartas de M sobre las cuales el haz E es trivial, usamos la siguiente notación $S_i^\alpha(p) := [(p, e_i)]$ para cada $p \in U_\alpha$, donde $\{e_i\}_{i=1}^m$ es la base canónica del $\mathbb{R}^m$. Tenemos entonces que $\{S_i^\alpha(p)\}_{i=1}^m$ forma una base de $\pi^{-1}(p) \subset E$, luego, para todo $p \in U_\beta$ de igual manera definimos la base local $\{S_i^\beta(p)\}_{i=1}^m$. Entonces, si $p \in U_\beta \cap U_\alpha$, se cumple la siguiente relación*

$$S_i^\alpha = \sum_{k=1}^m (\Phi_{\beta\alpha})_i^k S_k^\beta, \tag{1.3}$$

de aquí en adelante, omitiremos el punto $p \in M$ en cuestión, cuando no haya riesgo de confusión.

Demostración. De la definición de S_i^α

$$\begin{aligned}
S_i^\alpha &= [(p, e_i)] \\
&= [(p, \Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\alpha}e_i)] \\
&= [(p, \Phi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix}(\Phi_{\beta\alpha})_i^1 \\ \vdots \\ (\Phi_{\beta\alpha})_i^m\end{pmatrix})] \\
&= [(p, \begin{pmatrix}(\Phi_{\beta\alpha})_i^1 \\ \vdots \\ (\Phi_{\beta\alpha})_i^m\end{pmatrix})] \qquad \text{por definición de la relación de equivalencia en } E \\
&= \sum_{k=1}^m (\Phi_{\beta\alpha})_i^k [(p, e_k)] \\
&= \sum_{k=1}^m (\Phi_{\beta\alpha})_i^k S_k^\beta.
\end{aligned}$$

∎

Nuestra definición de haz vectorial nos permite considerar nuevas funciones de transición de haz que nos resultarán convenientes en el análisis de la conexión de Levi-Civita que realizamos en la sección 2.4, dichas funciones de transición están determinadas por la identificación de distintas bases de la misma fibra $\pi^{-1}(p) \subset E \cong \{p\} \times \mathbb{R}^m$. Por ejemplo, si $\{\sigma_i^\alpha\}_{i=1}^n$ es base de $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ con $p \in U_\alpha$ y $\{\sigma_i^\beta\}_{i=1}^n$ base de $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ con $p \in U_\beta$, sabemos que existe transformación lineal

$\phi_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_{\alpha\beta}(\sigma_i^\beta) = \sigma_i^\alpha$. Por un argumento similar al de la observación 1.1.10, tenemos que

$$\sigma_i^\alpha = \sum_{j=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})_i^j \sigma_j^\beta. \tag{1.4}$$

En particular, si $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}_{i=1}^n$ donde $\frac{\partial}{\partial x_i} = [(p, e_i)]$ y $\frac{\partial}{\partial y_i} = [(p, e_i)]$ son las bases canónicas para el haz tangente definido localmente en las cartas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β), respectivamente, entonces podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} (\phi_{\beta\alpha})_i^k \frac{\partial}{\partial y_k} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})_j^k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.6}$$

con $\phi_{\beta\alpha}$, $\phi_{\alpha\beta}$ funciones de transición en $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Ahora, si $\{dx_i\}_{i=1}^n$ y $\{dy_i\}_{i=1}^n$ son las bases duales de las bases $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_i}\}_{i=1}^n$ respectivamente, entonces podemos escribir:

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})_k^i dy_k \tag{1.7}$$

$$dy_j = \sum_{k=1}^{n} (\phi_{\beta\alpha})_k^j dx_k \tag{1.8}$$

con $\phi_{\beta\alpha}$, $\phi_{\alpha\beta}$ funciones de transición en $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

1.2. Álgebra de Clifford $\mathbb{C}l(\mathrm{T}_pM, g)$

Definición 1.2.1. *Dado el producto interno g en $\mathbb{R}^n$, definimos el álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^n$ asociada a g, denotada mediante $Cl(\mathbb{R}^n, g)$, como el álgebra real generada por los elementos $v \in \mathbb{R}^n$ con la regla de multiplicación*

$$vw + wv = -2g(v, w).$$

Dada $\{e_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ obtenemos una base para $Cl(n, g)$ mediante

$$Cl(n, g) = gen\{1; e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} : k = 1, \dots, n, \quad 1 \leq i_j < i_{j+1} \leq n, \quad j = 1, \dots, k-1\}.$$

Debido a que $\mathrm{T}_pM \cong \mathbb{R}^n$ usaremos la identificación $Cl(\mathrm{T}_pM, g) = Cl(\mathbb{R}^n, g)$.

Definición 1.2.2. *Definimos los grupos* $\mathrm{Spin}(n), \mathrm{Pin}(n) \subset Cl(n, g)$ *como los grupos generados multiplicativamente de la siguiente manera*

$$\mathrm{Pin}(n) := \dot{g}en\{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_k} : k \in \mathbb{N}, \quad v_i \in \mathbb{R}^n, \quad \|v_i\| = 1\},$$

$$\mathrm{Spin}(n) := \dot{g}en\{v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_{2k}} : k \in \mathbb{N}, \quad v_i \in \mathbb{R}^n, \quad \|v_i\| = 1\},$$

donde $\dot{g}en$ indica que consideraremos el grupo generado a diferencia de la notación de espacio lineal generado, que se empleó anteriormente.

Spin(n) y Pin(n) resultan ser grupos de Lie con la topología heredada de $Cl(n, g)$ como espacio vectorial real.

Definición 1.2.3. *Definimos un antiautomorfismo en $Cl(n, g)$ mediante*

$$^t : Cl(n, g) \to Cl(n, g)$$

$$(v_1 \dots v_k)^t = v_k v_{k-1} \dots v_1.$$

Observación 1.2.4. *Si $w \in \mathrm{Spin}(n)$ entonces $w^{-1} = w^t$.*

Proposición 1.2.5. *Dado $w \in \mathrm{Pin}(n)$, la aplicación $\lambda(w)(x) = wxw^{-1}$ es una reflexión ortogonal y, además*

$$\lambda : \mathrm{Pin}(n) \to \mathrm{O}(n),$$

$$\lambda\big|_{\mathrm{Spin}(n)} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

son homomorfismos suprayectivos. Además, la aplicación $\lambda(w)x : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ es cubriente $2:1$ y para $n \geq 3$ dicha aplicación resulta ser el cubriente universal de SO(n).

Demostración. Una demostración de estos hechos puede encontrarse en [3] o bien en [6]. ∎

De la proposición anterior tenemos que λ induce un isomorfismo de álgebras de Lie

$$d\lambda_e : \mathrm{T}_e\mathrm{Spin}(n) = \mathfrak{spin}(\mathfrak{n}) \to \mathrm{T}_e\mathrm{SO}(n) = \mathfrak{so}(\mathfrak{n}).$$

Buscaremos ahora una descripción del álgebra de Lie $\mathfrak{spin}(\mathfrak{n})$. Para esto, dados $e_i, e_j \in \{e_1, \ldots, e_n\}$, con $i < j$, elementos de la base canónica del $\mathbb{R}^n$, consideramos la curva en Spin(n)

$$\begin{aligned} c(t) &= e_i(-\cos(t)e_i + \operatorname{sen}(t)e_j) \\ &= \cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_ie_j. \end{aligned}$$

Observamos que $c(0) = \mathbb{1}$, $c'(0) = e_ie_j$, entonces $e_ie_j \in \mathfrak{spin}(\mathfrak{n})$,

$$dim(gen\{e_ie_j : i < j\}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

y por otro lado, sabemos también que

$$\begin{aligned} dim(\mathfrak{spin}(\mathfrak{n})) &= dim(\mathfrak{so}(n)) \\ &= dim(\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A = -A^T\}) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

entonces $dim(gen\{e_ie_j : i < j\}) = dim(\mathfrak{so}(n)) = dim(\mathfrak{spin}(n))$ por lo tanto

$$\mathfrak{spin}(n) = gen\{e_ie_j : i < j\}.$$

Ahora para determinar de manera explícita el isomorfismo $d\lambda$, bastará conocer sus valores en la base, para esto, si $k \notin \{i, j\}$

$$\begin{aligned} \lambda(c(t))e_k &= (\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_ie_j)e_k(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_ie_j)^t \\ &= (\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_ie_j)e_k(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_je_i) \\ &= (\cos(t)e_k + \operatorname{sen}(t)e_ie_je_k)(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)e_ie_j) \\ &= \cos^2(t)e_k - \operatorname{sen}(t)\cos(t)e_ke_ie_j + \operatorname{sen}(t)\cos(t)e_ie_je_k - \operatorname{sen}^2(t)e_ie_je_ke_ie_j \\ &= (\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t))e_k \\ &= e_k. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lambda(c(t))e_i &= (\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_ie_j)e_i(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_je_i) \\ &= (\cos(t)e_i + \operatorname{sen}(t)e_ie_je_i)(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_je_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos(t)e_i + \operatorname{sen}(t)e_j)(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_je_i)\\
&= \cos^2(t)e_i + \operatorname{sen}(t)\cos(t)e_j + \operatorname{sen}(t)\cos(t)e_j - \operatorname{sen}^2(t)e_i\\
&= (\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t))e_i + 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)e_j\\
&= \cos(2t)e_i + \sin(2t)e_j.
\end{aligned}
$$

Mediante un cálculo análogo obtenemos que

$$\lambda(c(t))e_j = \cos(2t)e_j - \sin(2t)e_i.$$

Concluimos entonces que

$$
\lambda(c(t)) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & 0\\
0 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & \cos 2t & & & & -\operatorname{sen} 2t & & & \\
 & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots\\
 & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & \operatorname{sen} 2t & & & & \cos 2t & & & \\
 & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix},
$$

de donde

$$
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda(c(t)) = d\lambda_e(e_ie_j) = 2\begin{pmatrix}
0 & & & & & & 0\\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & & -1 & & \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & 0
\end{pmatrix}.
$$

Definición 1.2.6. *Para $i < j$ definimos*

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & -1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

para $j < i$ $E_{ij} := -E_{ji}$ y para $i = j$ $E_{ij} := 0$.

Observamos que $E_{ij}^T = -E_{ij} \in \mathfrak{so}(n)$ y obtenemos de esto que $\mathfrak{so}(n) = gen\{E_{ij} : i < j\}$, por lo tanto $(d\lambda_e)^{-1}$ está dado por

$$(d\lambda_e)^{-1}(E_{ij}) = \frac{1}{2}e_i e_j. \tag{1.9}$$

Definición 1.2.7. *La complejificación del álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^n, g)$ se define por*

$$\mathbb{C}l(\mathbb{R}^n, g) := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} Cl(\mathbb{R}^n, g)$$

con multiplicación dada por

$$\alpha(\beta \otimes_{\mathbb{R}} x) := \alpha\beta \otimes_{\mathbb{R}} x.$$

Usualmente escribiremos αx en lugar de $\alpha \otimes_{\mathbb{R}} x$.

Considerando la definición anterior, tenemos la siguiente inclusión

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{R}^n, g) &\hookrightarrow \mathbb{C}l(\mathbb{R}^n, g) \\ x &\mapsto 1 \otimes_{\mathbb{R}} x. \end{aligned}$$

1.3. Representación de $\mathbb{C}l(n, g)$

En esta sección enunciamos los resultados relativos a representaciones del álgebra de Clifford que se utilizarán en lo subsecuente. La demostración de los mismos se puede encontrar en [3].

Proposición 1.3.1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existen isomorfismos de álgebras*

$$\mathbb{C}l(n,g) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \text{ si } n = 2k,$$
$$\mathbb{C}l(n,g) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \text{ si } n = 2k+1.$$

Definición 1.3.2. *Obtenemos una representación de* $\mathbb{C}l(n)$ *como matrices complejas mediante el isomorfismo anterior para el caso* $n = 2k$

$$\gamma : \mathbb{C}l(n,g) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}),$$

y para $n = 2k+1$*, consideraremos la proyección en el primer componente, esto es*

$$\gamma : \mathbb{C}l(n,g) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

Considerando la representación anterior γ, obtenemos una representación del grupo $\mathrm{Spin}(n)$ mediante la restricción

$$\gamma|_{\mathrm{Spin}(n)} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2^k}).$$

Proposición 1.3.3. *La representación del grupo* $\mathrm{Spin}(n)$ *es una representación fiel, esto es,* $\gamma : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2^k}) = \mathrm{Gl}(\mathbb{C}^{2^k})$ *es inyectiva.*

1.4. Haz de Espín

En lo que sigue, emplearemos la propiedad de que para una variedad de Riemann orientable M, el grupo de estructura de $\mathrm{T}M$ es $\mathrm{SO}(n)$. Una demostración de este hecho se puede encontrar por ejemplo en [6].

Definición 1.4.1. *Dada* (M,g) *variedad de Riemann orientable con funciones de transición del haz tangente*

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{SO}(n),$$

decimos que M *es variedad de espín real si existen*

$$\hat{\phi}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Spin}(n) \subset \mathbb{C}l(n,g)$$

funciones diferenciables tales que

$$\phi_{\alpha\beta} = \lambda(\hat{\phi}_{\alpha\beta})$$

donde

$$\lambda : \mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{2:1} \mathrm{SO}(n)$$

es la aplicación cubriente dada en proposición 1.2.5 y las funciones $\hat{\phi}_{ij}$ son tales que satisfacen la condición de cociclo, que se menciona en la proposición 1.1.5.

EJEMPLO 1.4.2. *Algunos ejemplos de variedades de espín.*

- *Toda variedad con una sola carta es variedad de espín.*
- *Para $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n$ con atlas dado por proyección estereográfica es variedad de espín.*

DEMOSTRACIÓN. Para el primer ejemplo, dado que las funciones de transición del haz tangente ϕ_{11} son siempre $id \in \mathrm{SO}(n)$ para cada $p \in M$, la condición de variedad de espín se satisface tomando $\hat{\phi}_{11} = id \in \mathrm{Spin}(n)$.

Para el segundo ejemplo, si $n \geq 3$, la intersección de los dominios de las cartas norte y sur $U_N \cap U_S$ es simplemente conexo, además, dado que Spin(n) es simplemente conexo, el teorema 5.1 de [8] garantiza que existe $\hat{\phi}_{\alpha\beta}$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\lambda"] \\ U_N \cap U_S \arrow[ur, dotted, "\hat{\phi}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "\phi_{\alpha\beta}"'] & \mathrm{SO}(n), \end{tikzcd}$$

ahora, suponiendo que ya se ha elegido $\hat{\phi}_{ij} \in \mathrm{Spin}(n)$ que corresponde a $\phi_{ij} \in \mathrm{SO}(n)$, definimos $\hat{\phi}_{ji} := (\hat{\phi}_{ij})^{-1}$ con lo cual la condición de cociclo se satisface ya que no existe composición de tres funciones de transición en Spin(n) todas ellas distintas que pudiese mostrar que M no fuera variedad de espín. El caso $n = 2$ difiere del anteriormente presentado ya que $U_N \cap U_S$ no es simplemente conexo. Éste puede consultarse en [9]. ∎

EJEMPLO 1.4.3. *Como ejemplo de variedades orientables que no son variedades de espín tenemos a $\mathbb{C}P^{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para una demostración de este hecho, véase la sección 2.1 de [3].*

Las funciones de transición $\hat{\phi}_{\alpha\beta} \in \mathrm{Spin}(n)$ definidas en 1.4.1 son elementos en un grupo de Lie, entonces, mediante la representación que aparece en la proposición 1.3.3

$$\gamma : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2^k})$$

definimos

$$\tilde{\phi}_{\alpha\beta} := \gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta}).$$

Definición 1.4.4. *Dada M variedad de espín real y funciones $\hat{\phi}_{\alpha\beta} \in \mathrm{Spin}(n)$ que satisfacen las condiciones de la definición 1.4.1, definimos*

$$\tilde{\phi}_{\alpha\beta} := \gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta}) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2^k})$$

y

$$S := \coprod_{\alpha\in I} U_\alpha \times \mathbb{C}^{2^k} \Big/ \sim$$

donde

$$U_\alpha \times \mathbb{C}^{2^k} \ni (x_\alpha, s_\alpha) \sim (x_\beta, s_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{C}^{2^k}$$

si y sólo si

$$x_\alpha = x_\beta \quad \text{y} \quad s_\alpha = \tilde{\phi}_{\alpha\beta} s_\beta.$$

El haz vectorial de fibra $\mathbb{C}^{2^k}$

$$(S, \pi, M)$$

se llama haz de espín de M.

1.5. El haz de endomorfismos del haz de Espín

Definición 1.5.1. *Un haz fibrado de fibra un álgebra, o haz fibrado de álgebra, denotado (E, π, B, A) está definido por un espacio total E, una aplicación continua suprayectiva $\pi : E \to B$, tal que para cada $p \in B$, $\pi^{-1}(p) =: E_p \subset E$ tiene la estructura de un álgebra compleja, y se satisface la siguiente condición de trivialización local, para cada $p \in B$ existe U vecindad de p y un difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) = U \times A$, tal que para cada $y \in U$, $\phi_y := \phi|_{E_y} : E_y \to \{y\} \times A$ es isomorfismo de álgebras.*

Dado (S, π, M) el haz de espín de M, podemos construir un haz fibrado de álgebra

$$(\mathrm{End}(S), \pi, M, \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2^k})) \quad \text{, con } n = 2k \text{ o } n = 2k+1, \text{ n=dim(M)},$$

donde la fibra está dada por el conjunto de endomorfismos de $\mathbb{C}^{2^k}$ que identificaremos con el álgebra de las matrices $\mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$, éste haz lo llamaremos el haz de endomorfismos del haz espín.

Definición 1.5.2. *Considerando las funciones de transición de haz de la definición del haz de espín $\tilde{\phi}_{\alpha\beta}$ (véase definición 1.4.4), definimos el haz de endomorfismos del haz de espín mediante*

$$\mathrm{End}(S) := \coprod_{a\in I} U_\alpha \times \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C}) \Big/ \sim$$

donde

$$U_\alpha \times \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C}) \ni (p, A^\alpha) \sim (q, A^\beta) \in U_\beta \times \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$$

si y sólo si

$$p = q \quad \text{y} \quad A^\alpha = \tilde{\phi}_{\alpha\beta} A^\beta \tilde{\phi}_{\beta\alpha}.$$

Es claro que se satisfacen los requerimientos de la definición de haz de álgebra para este haz. Más aún, la estructura de álgebra se preserva entre cartas, definiendo localmente la multiplicación punto a punto, esto es

Observación 1.5.3. *Dados* $(p, A_1), (p, A_2) \in U_\alpha \times \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$*,* $a, b \in \mathbb{C}$*, ocurre que*

$$\tilde{\phi}_{\beta\alpha}(aA_1 + bA_2)\tilde{\phi}_{\alpha\beta} = a\tilde{\phi}_{\beta\alpha}A_1\tilde{\phi}_{\alpha\beta} + b\tilde{\phi}_{\beta\alpha}A_2\tilde{\phi}_{\alpha\beta}$$

y también

$$\tilde{\phi}_{\beta\alpha}(A_1A_2)\tilde{\phi}_{\alpha\beta} = \tilde{\phi}_{\beta\alpha}A_1\tilde{\phi}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{\beta\alpha}A_2\tilde{\phi}_{\alpha\beta},$$

entonces

$$a[(p, A_1)] + b[(p, A_2)] := [(p, aA_1 + bA_2)] \quad y$$
$$[(p, A_1)][(p, A_2)] := [(p, A_1A_2)]$$

están bien definidas.

Una vez que contamos con el haz fibrado que nos permite modelar la multiplicación requerida para definir el operador de Dirac, el siguiente paso es mostrar que en efecto podemos definir matrices que nos sirvan para poder escribir el operador de Dirac.

Si $(x_\alpha, \gamma_i^\alpha) \in U_\alpha \times \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$ ocurre que

$$(x_\alpha, \gamma_i^\alpha) \sim (x_\beta, \gamma(\hat{\phi}_{\beta\alpha})\gamma_i^\alpha\gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta})) \in U_\beta \times \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C}) \tag{1.10}$$

donde $\gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta})$ son las funciones de transición del haz S. Dada $\{e_i^\alpha\}_{i=1}^n$ bases ortonormal de T_pU_α, dado que TM tiene grupo de estructura SO(n), por la observación 1.1.10, la correspondencia de bases en los espacios tangentes está dada por $e_i^\alpha = \sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k e_k^\beta$, con $\phi_{\alpha\beta} \in \mathrm{SO}(n)$. Luego, como el cubriente

$$\lambda : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$$

está dado por

$$\lambda(\hat{\phi})(v) = \hat{\phi}v\hat{\phi}^{-1} = \phi(v)$$

donde $\hat{\phi}v\hat{\phi}^{-1}$ es el producto en $\mathbb{C}l(n,g)$ que corresponde a la transformación ortogonal $\phi(v)$, tenemos entonces que la aplicación $\phi_{\beta\alpha}(v)$ corresponde a la multiplicación en el álgebra Clifford, $\hat{\phi}_{\beta\alpha}v\hat{\phi}_{\alpha\beta}$. Queremos definir una aplicación

$$\gamma : \mathrm{T}_pM \to \pi^{-1}(p) \subset \mathrm{End}(S)$$

lineal tal que $\gamma(e_i)\gamma(e_j) + \gamma(e_j)\gamma(e_i) = -2\delta_{ij}\mathrm{id}$, con la cual definiremos una representación del álgebra de Clifford

$$\gamma : \mathbb{C}l(\mathrm{T}_pM, g) \to \pi^{-1}(p) \subset \mathrm{End}(S).$$

Definimos

$$\gamma^\alpha(e_i^\alpha) = \gamma_i^\alpha := \gamma_i, \tag{1.11}$$

donde $\gamma_i \in \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$ son matrices tales que $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\delta_{ik}\mathrm{id}$. Luego, la equivalencia expresada en (1.10) implica que

$$\begin{aligned}
\gamma_i^\alpha &= \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\gamma(\sum_{k=1}^n(\phi_{\beta\alpha})_i^k e_k^\beta)\tilde{\phi}_{\beta\alpha}\\
&= \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\gamma((\phi_{\beta\alpha})(e_i^\beta))\tilde{\phi}_{\beta\alpha}\\
&= \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\gamma(\hat{\phi}_{\beta\alpha}e_i^\beta\hat{\phi}_{\alpha\beta})\tilde{\phi}_{\beta\alpha}\\
&= \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\gamma(\hat{\phi}_{\beta\alpha})\gamma(e_i^\beta)\gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta})\tilde{\phi}_{\beta\alpha}\\
&= \tilde{\phi}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{\beta\alpha}\gamma_i^\beta\tilde{\phi}_{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{\beta\alpha}\\
&= \gamma_i^\beta,
\end{aligned}$$

lo cual muestra que (1.11) define una representación del álgebra de Clifford de manera global.

CAPÍTULO 2

Derivada covariante en el haz de espín

2.1. Derivada covariante en haces vectoriales

DEFINICIÓN 2.1.1. *Una derivada covariante o conexión en el haz vectorial (E,π,M) de fibra* $\mathbb{K}^m$*, es una aplicación* $\mathbb{R}$*-bilineal de* $\Gamma(\mathrm{T}M) \times \Gamma(E)$ *en* $\Gamma(E)$*, que cumple las siguientes condiciones para* $X, X_1, X_2 \in \Gamma(\mathrm{T}M), Y, Z \in \Gamma(E)$ *y* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$

1. $\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y, \quad \nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y.$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad \nabla_X(fY) = (X.f)Y + f\nabla_X Y.$

Dados $X \in \Gamma(\mathrm{T}M)$, $Y \in \Gamma(E)$ y un abierto $U \subset M$ sobre el cual tanto $\mathrm{T}M$ como E son triviales, podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j S_j,$$

donde las secciones locales $\{S_1, ..., S_m\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ forman una base de $\pi^{-1}(p) \subset E$, y de $\pi^{-1}(p) \subset \mathrm{T}M$ respectivamente, para todo $p \in U_\alpha$. Si

$$\nabla : \Gamma(\mathrm{T}M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

es una derivada covariante, tenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{j=1}^{m} Y^j S_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(Y^j S_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} S_j + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} S_j \right). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Definición 2.1.2. *Definimos los símbolos de Christoffel* Γ_{ij}^{k} *asociados a la conexión* ∇*, en el abierto* U*, por la expresión*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} S_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k} S_k.$$

Observamos que según (2.1), basta conocer los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^{k} para determinar completamente a la derivada covariante en cuestión. Relacionada con la anterior definición, hacemos la siguiente

Definición 2.1.3. *La i-ésima matriz de símbolos de Christoffel* $A_i \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$*, relativa a las bases* $\{S_i\}_{i=1}^{m}$, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^{n}$ *, la definimos por*

$$(A_i)_{j,k=1}^{m} := \left(\Gamma_{ij}^{k}\right)_{j,k=1}^{m}.$$

De manera más general, dado abierto $U \subset M$ tal que tanto el haz (E, π, M) como $\mathrm{T}M$ son triviales sobre U, podemos considerar m secciones locales linealmente independientes

$$e_i : U \to U \times \mathbb{R}^m, p \mapsto e_i(p),$$

con $i = 1, \ldots, m$ y n secciones locales linealmente independientes

$$f_j : U \to U \times \mathbb{R}^n, p \mapsto f_j(p),$$

con $j = 1, \ldots, n$. Tenemos entonces que $\{e_i(p)\}_{i=1}^{m} \subset \{p\} \times U$ y $\{f_j(p)\}_{j=1}^{n} \subset \{p\} \times U$ forman una base para cada $p \in U$ en los respectivos casos. Los símbolos de Christoffel asociados a una conexión en (E, π, M) en las bases $\{e_i(p)\}_{i=1}^{m}$ y $\{f_j(p)\}_{j=1}^{n}$ están dados por

$$\nabla_{f_i(p)} e_j(p) = \sum_{k=1}^{m} (A_i)_j^k e_k(p). \tag{2.2}$$

Definición 2.1.4. *Dada* (M, g) *una variedad de Riemann, diremos que* ∇*, una derivada covariante en el haz tangente* $(\mathrm{T}M, \pi, M)$*, es de Riemann o compatible con la métrica, si para* X*,* Y*,* $Z \in \Gamma(\mathrm{T}M)$ *se cumple que:*

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Definición 2.1.5. *Decimos que la derivada covariante en* $(\mathrm{T}M, \pi, M)$ *es libre de torsión si dados* $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$*, se cumple*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

donde $[X, Y]$ *denota el corchete de Lie de* X *y* Y*.*

Sabemos que existe una única derivada covariante en $(\mathrm{T}M, \pi, M)$ que es de Riemann y libre de torsión, a ésta se le denota también como la derivada de Levi-Civita.

Proposición 2.1.6. *Los símbolos de Christoffel asociados a la derivada de Levi-Civita se pueden calcular mediante*

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l}\right), \tag{2.3}$$

donde g_{ij} *denota a* $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ *y* g^{ij} *es la entrada* i, j *de la inversa de la matriz* $(g_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Demostración. Una demostración de este hecho puede encontrarse por ejemplo en [2] o en [6]. ∎

2.2. Transformación de símbolos de Christoffel respecto a cartas de haces

Si ∇ es una derivada covariante en el haz (E, π, M) , $\sum_{k=1}^{m} Y_{\alpha}^{k} S_{k}^{\alpha}, \sum_{k=1}^{m} Y_{\beta}^{k} S_{k}^{\beta}$ son secciones sobre trivializaciones locales U_α y U_β respectivamente, y denotando mediante $\{e_i^{\alpha}\}_{i=1}^{n}$, $\{e_i^{\beta}\}_{i=1}^{n}$ a bases del haz tangente, no necesariamente ortonormales, en las trivializaciones locales U_α y U_β respectivamente, tenemos lo siguiente

$$\nabla_{e_j^{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{m} Y_{\alpha}^{k} S_{k}^{\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{m} (e_j^{\alpha}.Y_{\alpha}^{k}) S_{k}^{\alpha} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} Y_{\alpha}^{k} (A_j^{\alpha})_{k}^{l} S_{l}^{\alpha}. \tag{2.4}$$

Ahora determinaremos la manera en que se transforman los símbolos de Christoffel con respecto a las funciones de transición en los haces $\mathrm{T}M$ y (E, π, M), $\phi_{\alpha\beta}$ y $\Phi_{\alpha\beta}$ respectivamente, las cuales son las funciones de transición que relacionan a la base $\{S_i^{\alpha}\}$ con $\{S_i^{\beta}\}$ y $\{e_i^{\alpha}\}$ con $\{e_i^{\beta}\}$ de manera respectiva. Para esto reescribimos (2.4) considerando (1.4):

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_j^{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{m} Y_{\alpha}^{k} S_{k}^{\alpha}\right) &= \nabla_{\sum_{i=1}^{n}((\phi_{\beta\alpha})_j^i e_i^{\beta}}\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Y_{\alpha}^{k} (\Phi_{\beta\alpha})_k^l S_l^{\beta}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} (\phi_{\beta\alpha})_j^i \nabla_{e_i^{\beta}}\left(Y_{\alpha}^{k} (\Phi_{\beta\alpha})_k^l S_l^{\beta}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \left(\left((\phi_{\beta\alpha})_j^i (e_i^{\beta}.Y_{\alpha}^{k})(\Phi_{\beta\alpha})_k^l + (\phi_{\beta\alpha})_j^i Y_{\alpha}^{k} (e_i^{\beta}.\Phi_{\beta\alpha})_k^l\right) S_l^{\beta}\right) \\
&+ \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} (\phi_{\alpha\beta})_j^i Y_{\alpha}^{k} (\Phi_{\beta\alpha})_k^l (\nabla_{e_i^{\beta}} S_l^{\beta})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^i_j(e^{\beta}_i.Y^k_\alpha)\right)(\Phi_{\beta\alpha})^l_k S^{\beta}_{l} + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Y^k_\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^i_j\left(e^{\beta}_i.\Phi_{\beta\alpha}\right)^l_k S^{\beta}_{l}\right)\\
&+ \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(\phi_{\beta\alpha})^i_j Y^k_\alpha(\Phi_{\beta\alpha})^l_k(A^{\beta}_i)^h_l S^{\beta}_{h}\\
&= \sum_{k=1}^{m}(e^{\alpha}_j.Y^k_\alpha)S^{\alpha}_{k} + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} Y^k_\alpha\left(e^{\alpha}_j.(\Phi_{\beta\alpha})^l_k\right)(\Phi_{\alpha\beta})^h_l S^{\alpha}_{h}\\
&+ \quad \sum_{r=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^i_j Y^k_\alpha(\Phi_{\beta\alpha})^l_k(A^{\beta}_i)^h_l(\Phi_{\alpha\beta})^r_h S^{\alpha}_{r}.
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que la última expresión obtenida y la ecuación (2.4) son iguales

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Y^k_\alpha}{\partial x_j}\right)S^{\alpha}_{k} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} Y^k_\alpha(A^{\alpha}_j)^r_k S^{\alpha}_{r} &= \sum_{k=1}^{m}(e^{\alpha}_j.Y^k_\alpha)S^{\alpha}_{k} + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} Y^k_\alpha\left(e^{\alpha}_j.(\Phi_{\beta\alpha})^l_k\right)(\Phi_{\alpha\beta})^h_l S^{\alpha}_{h}\\
&+ \quad \sum_{r=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^i_j Y^k_\alpha(\Phi_{\beta\alpha})^l_k(A^{\beta}_i)^h_l(\Phi_{\alpha\beta})^r_h S^{\alpha}_{r},
\end{aligned}
$$

de donde:

$$
(A^{\alpha}_j)^r_k = \sum_{l=1}^{m}\left(e^{\alpha}_j.(\Phi_{\beta\alpha})^l_k\right)(\Phi_{\alpha\beta})^r_l + \sum_{h=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^i_j(\Phi_{\beta\alpha})^l_k(A^{\beta}_i)^h_l(\Phi_{\alpha\beta})^r_h. \tag{2.5}
$$

De lo anterior obtenemos la siguiente proposición

Proposición 2.2.1. *Suponiendo que M es una variedad con atlas diferenciable $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sobre los abiertos del cual el haz vectorial (E,π,M) de fibra $\mathbb{R}^m$ es trivial; dada ∇ una derivada covariante en (E,π,M), los símbolos de Christoffel se transforman de U_α a U_β según* (2.5) *y viceversa, si las matrices $(A^{\alpha}_l)^m_{l=1}$, $(A^{\beta}_l)^m_{l=1}$ se transforman según* (2.5) *entonces la ecuación* (2.1) *no depende de la carta y define una derivada covariante para (E,π,M).*

Observación 2.2.2. *La expresión* (2.5) *se puede interpretar como la siguiente multiplicación de matrices*

$$
A^{\alpha}_j = \Phi_{\alpha\beta}(e^{\alpha}_j.\Phi_{\beta\alpha}) + \sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^i_j\Phi_{\alpha\beta}A^{\beta}_i\Phi_{\beta\alpha}.
$$

Esta será la notación que emplearemos de aquí en adelante.

2.3. Derivación de la conexión de espín a través de la conexión de Levi-Civita

Dado un abierto $U \subset M$ sobre el cual TM es trivial, podemos considerar n secciones locales linealmente independientes

$$f_i : U \to U \times \mathbb{R}^n.$$

Luego, mediante el algoritmo de ortonormalización de Gram Schmidt, obtenemos n secciones locales ortonormales $e_i : U \to U \times \mathbb{R}^n$ tales que $\{e_i(p)\}_{i=1}^n \subset \mathrm{T}_pM$ forman una base ortonormal para cada $p \in M$.

Proposición 2.3.1. *Dada $\{e_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de T_pM, la i-ésima matriz de símbolos de Christoffel asociada a la derivada de Levi-Civita en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$, denotada A_i, cumple con*

$$A_i \in \mathfrak{so}(n).$$

Demostración. Por la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita y debido a que en una vecindad de p podemos garantizar que $\delta_{ij} = g(e_i, e_j)$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= e_k.g(e_i, e_j) \\ &= g(\nabla_{e_k} e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_{e_k} e_j) \\ &= g(\sum_{j=1}^{n} (A_k)_i^j e_j, e_j) + g(e_i, \sum_{i=1}^{n} (A_k)_j^i e_i) \\ &= (A_k)_i^j + (A_k)_j^i, \end{aligned}$$

de donde $A_k^T = -A_k$. ∎

Tenemos entonces que dados $Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de T_pM, la derivada de Levi-Civita en coordenadas locales se escribe como

$$\nabla_{e_i} Y = \sum_{j=1} \left((e_i.Y^j)e_j + Y^j \sum_{k=1}^{m} (A_i)_j^k e^k \right)$$

con $A_i \in \mathfrak{so}(n)$. Debido a esto, intuimos la posibilidad de usar el isomorfismo

$$d\lambda^{-1} : \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{spin}(n)$$

que aparece en (1.9) para conseguir símbolos de Christoffel que nos permitan definir una derivada covariante en el haz de espín. A continuación, mostramos por qué los símbolos de Christoffel obtenidos de esta manera efectivamente definen una derivada covariante en el haz de espín.

PROPOSICIÓN 2.3.2. *Denotando la matriz de símbolos de Christoffel, en una base ortonormal, que definen la conexión de Levi-Civita en el haz tangente en la carta de haz* U_α *por* A_i^α*, si definimos*

$$\tilde{A}_i^\alpha := \gamma(d\lambda^{-1}(A_i^\alpha)), \tag{2.6}$$

entonces las matrices $\tilde{A}_i^\alpha$ *definen una derivada covariante en el haz de espín.*

DEMOSTRACIÓN. Valiéndonos de la representación fiel que la proposición 1.3.3 nos provee y por la condición de ser variedad de espín real, definición 1.4.1, las funciones de transición del haz de espín están dadas por

$$\Phi_{\alpha\beta} := \gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta}) : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2^k}). \tag{2.7}$$

Dado que la representación del álgebra de Clifford γ de $\mathfrak{spin}(n)$ en $\mathrm{Gl}(\mathbb{C}^{2^k})$ es inyectiva, tenemos que $\ker(\gamma) = \{e\}$. Entonces la aplicación lineal

$$\tilde{\lambda} := \gamma \circ (d\lambda)^{-1} : \mathfrak{so}(n) \to \gamma(\mathfrak{spin}(n)) \subset \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$$

es inyectiva, por lo tanto un isomorfismo entre $\mathfrak{so}(n)$ y su imagen $\gamma(\mathfrak{spin}(n)) \cong \mathfrak{spin}(n)$ en $\mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$. Entonces

$$\tilde{A}_i^\beta = \Phi_{\beta\alpha}(e_i^\beta.\Phi_{\alpha\beta}) + \sum_{j=1}^m (\phi_{\alpha\beta})_i^j \Phi_{\beta\alpha}\tilde{A}_j^\alpha \Phi_{\alpha\beta}$$

si y sólo si

$$\tilde{\lambda}^{-1}(\tilde{A}_i^\beta - \Phi_{\beta\alpha}(e_i^\beta.\Phi_{\alpha\beta}) - \sum_{j=1}^m (\phi_{\alpha\beta})_i^j \Phi_{\beta\alpha}\tilde{A}_j^\alpha \Phi_{\alpha\beta}) = 0.$$

Dado que $\tilde{\lambda}$ y $d\lambda$ son isomorfismos, podemos considerar

$$\tilde{\lambda}^{-1} := d\lambda \circ \gamma^{-1} : \gamma(\mathfrak{spin}(n)) \to \mathfrak{so}(n). \tag{2.8}$$

Para $p \in M$, consideremos el vector $e_i^\beta = [c_i] \in \mathrm{T}_{c_i(0)}M = \mathrm{T}_pM$, con $c_i : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ curva diferenciable, según la descripción del plano tangente que se mencionó en el ejemplo 1.1.8, entonces por (2.7), la diferenciabilidad y linealidad de γ,

$$\begin{aligned}\Phi_{\beta\alpha}(e_i^\beta.\Phi_{\alpha\beta}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_{\beta\alpha}(c_i(0))\Phi_{\alpha\beta}(c_i(t)) \\ &= \gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_{=0} \hat{\phi}_{\beta\alpha}(c_i(0))\hat{\phi}_{\alpha\beta}(c_i(t))\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^{-1}(\Phi_{\beta\alpha}(e_i^{\beta}.\Phi_{\alpha\beta})) &= d\lambda\circ\gamma^{-1}\circ\gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\hat{\phi}_{\beta\alpha}(c_i(0))\hat{\phi}_{\alpha\beta}(c_i(t))\\ &= d\lambda(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\hat{\phi}_{\beta\alpha}(c_i(0))\hat{\phi}_{\alpha\beta}(c_i(t))\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda(\hat{\phi}_{\beta\alpha}(c_i(0))\hat{\phi}_{\alpha\beta}(c_i(t))\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_{\beta\alpha}(c_i(0))\phi_{\alpha\beta}(c_i(t))\\ &= \phi_{\beta\alpha}(e_i^{\beta}.\phi_{\alpha\beta}).\end{aligned}$$

Consideremos $g_i^{\alpha}:(-\epsilon,\epsilon)\to \mathrm{SO}(n)$ curva diferenciable tal que $g_i^{\alpha}(0)=\mathrm{id}$ y

$$(g_i^{\alpha})'(0)=A_i^{\alpha}\in\mathfrak{so}(n)=\mathrm{T}_e\mathrm{SO}(n),\ \text{para } i=1,\dots,n.$$

Observemos que existe un único levantamiento continuo $\tilde{g}_i^{\alpha}(t)\in\mathrm{Spin}(n)$ tal que

$$\tilde{g}_i^{\alpha}(0)=\mathrm{id}\in\mathrm{Spin}(n).$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}d\lambda((\tilde{g}_i^{\alpha})'(0)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\lambda(\tilde{g}_i^{\alpha}(t))\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g_i^{\alpha}(t)\\ &= (g_i^{\alpha})'(0)\\ &= A_i^{\alpha},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\lambda(\tilde{g}_i^{\alpha}(t))=g_i^{\alpha}(t)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i^{\alpha} &:= \gamma\circ d\lambda^{-1}(A_i^{\alpha})\\ &= \gamma\circ d\lambda^{-1}\circ d\lambda((\tilde{g}_i^{\alpha})'(0))\\ &= \gamma(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{g}_i^{\alpha}(t)).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Luego entonces, por (2.8) y (2.9)

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^{-1}(\Phi_{\beta\alpha}\tilde{A}_j^{\alpha}\Phi_{\alpha\beta}) &= d\lambda\circ\gamma^{-1}\left(\gamma(\hat{\phi}_{\beta\alpha})\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{g}_i^{\alpha}(t)\right)\gamma(\hat{\phi}_{\alpha\beta})\right)\\ &= d\lambda(\hat{\phi}_{\beta\alpha}(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{g}_j^{\alpha}(t))\hat{\phi}_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d\lambda(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\hat{\phi}_{\beta\alpha}(\tilde{g}^{\alpha}_{j}(t))\hat{\phi}_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\lambda\left(\hat{\phi}_{\beta\alpha}(\tilde{g}^{\alpha}_{j}(t))\hat{\phi}_{\alpha\beta}\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_{\beta\alpha}(g^{\alpha}_{j}(t))\phi_{\alpha\beta}) \\
&= \phi_{\beta\alpha}\,(g^{\alpha}_{j})'(0)\,\phi_{\alpha\beta} \\
&= \phi_{\beta\alpha}A^{\alpha}_{j}\phi_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Usando además la linealidad de $\tilde{\lambda}^{-1}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\lambda}^{-1}\left(\tilde{A}^{\beta}_{i} - \Phi_{\beta\alpha}(e^{\beta}_{i}\Phi_{\alpha\beta}) - \sum_{j=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})^{j}_{i}\Phi_{\beta\alpha}\tilde{A}^{\alpha}_{j}\Phi_{\alpha\beta}\right) &= \tilde{\lambda}^{-1}(\tilde{A}^{\beta}_{i}) - \tilde{\lambda}^{-1}(\Phi_{\beta\alpha}(e^{\beta}_{i}\Phi_{\alpha\beta})) - \sum_{j=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})^{j}_{i}\tilde{\lambda}^{-1}(\Phi_{\beta\alpha}\tilde{A}^{\alpha}_{j}\Phi_{\alpha\beta}) \\
&= A^{\beta}_{i} - \phi_{\beta\alpha}(e^{\beta}_{i}.\phi_{\alpha\beta}) - \sum_{j=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})^{j}_{i}\phi_{\beta\alpha}A^{\alpha}_{j}\phi_{\alpha\beta} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por la observación 2.2.2 aplicada a la derivada de Levi-Civita en las bases ortonormales $\{e^{\alpha}_{i}\}^{n}_{i=1}$ y $\{e^{\beta}_{j}\}^{n}_{j=1}$. Entonces, dado que $\tilde{\lambda}^{-1}$ es inyectiva, concluimos que

$$
\tilde{A}^{\beta}_{i} - \Phi_{\beta\alpha}(e^{\beta}_{i}.\Phi_{\alpha\beta}) - \sum_{j=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})^{j}_{i}\Phi_{\beta\alpha}\tilde{A}^{\alpha}_{j}\Phi_{\alpha\beta} = 0,
$$

es decir, $\tilde{A}^{\beta}_{i}$ satisface las fórmulas de transformación necesarias para que estos símbolos de Christoffel definan una derivada covariante en el haz de espín. ∎

2.4. Transformación de la conexión de Levi-Civita bajo cambios conformes de métrica

PROPOSICIÓN 2.4.1. *Dada $h \in C^{\infty}(M)$, si denotamos por $\hat{\Gamma}^{k}_{ij}$ los símbolos de Christoffel asociados a la derivada de Levi-Civita compatible con la métrica $e^{2h}g$, que es conformemente equivalente a g, la relación entre éstos y los símbolos de Christoffel Γ^{k}_{ij} es*

$$
\hat{\Gamma}^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij} + \delta_{kj}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial h}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} g^{kl}g_{ji}\frac{\partial h}{\partial x_l}.
$$

Demostración. Usando (2.3) para calcular $\hat{\Gamma}^k_{ij}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^k_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} e^{-2h} g^{kl}\Big(\frac{\partial(e^{2h}g_{lj})}{\partial x_i} + \frac{\partial(e^{2h}g_{il})}{\partial x_j} - \frac{\partial(e^{2h}g_{ij})}{\partial x_l}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} e^{-2h} g^{kl}\left(2e^{2h}\frac{\partial h}{\partial x_i}g_{lj} + e^{2h}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + 2e^{2h}\frac{\partial h}{\partial x_j}g_{il} + e^{2h}\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - 2e^{2h}\frac{\partial h}{\partial x_l}g_{ij} - e^{2h}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right) + \sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(g_{lj}\frac{\partial h}{\partial x_i} + g_{li}\frac{\partial h}{\partial x_j} - g_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_l}\right)\\
&= \Gamma^k_{ij} + \delta_{kj}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial h}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} g^{kl} g_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_l}.
\end{aligned}$$

∎

Entonces, según la proposición anterior, cuando cambiamos conformemente de métrica obtenemos las siguientes matrices

$$\left(A^\alpha_i + \delta_{kj}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial h}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} g^{kl} g_{ji}\frac{\partial h}{\partial x_l}\right)^{n}_{j,k=1},$$

y usaremos la siguiente notación para abreviar

$$H_i := \left(\delta_{kj}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial h}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} g^{kl} g_{ji}\frac{\partial h}{\partial x_l}\right)^{n}_{j,k=1}. \tag{2.10}$$

Dada la variedad de Riemann (M, g) y (U_α, ϕ_α), carta para M sobre la cual TM es trivial, podemos considerar nuevas cartas (U_β, ϕ_β) y (U_ζ, ϕ_ζ) donde $U_\beta = U_\zeta = U_\alpha$, tales que $e^\alpha_i := \sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})^k_i \frac{\partial}{\partial x_k}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$ forman una base ortonormal en la métrica g y que $e^\zeta_i := e^{-h}e^\alpha_i = \sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\zeta})^k_i \frac{\partial}{\partial x_k}$ es base ortonormal en la métrica $e^{2h}g$ que es conformemente equivalente a g.

Ocurre entonces que

$$\phi_{\zeta\beta} = e^h\phi_{\alpha\beta}, \quad \phi_{\beta\zeta} = e^{-h}\phi_{\beta\alpha}.$$

Denotaremos por A^ι_j a la j-ésima matriz de símbolos de Christoffel en la base de la ι-ésima carta para $\iota \in \{\alpha, \beta, \zeta\}$. Por la observación 2.2.2

$$A^\alpha_i = \phi_{\alpha\beta}(e^\alpha_i.\phi_{\beta\alpha}) + \sum_k (\phi_{\beta\alpha})^k_i \phi_{\alpha\beta}(A^\beta_k)\phi_{\beta\alpha}$$

donde A_i^α es la i-ésima matriz de símbolos de Christoffel en la base ortonormal $\{e_i^\alpha\}_{i=1}^n$ y A_k^β es la respectiva matriz de símbolos de Christoffel en la base $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}_{i=1}^n$.

Luego, denotando por $\hat{\Gamma}_k$ la k-ésima matriz de símbolos de Christoffel en la métrica $e^{2h}g$ y en la base $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}_{i=1}^n$, la i-ésima matriz de símbolos de Christoffel A_i^ζ en la base ortonormal $\{e_i^\zeta\}_{i=1}^n$, se relacionan con la k-ésima matriz de símbolos de Christoffel $\hat{\Gamma}_k$ mediante

$$\begin{aligned}
A_i^\zeta &= \phi_{\zeta\beta}(e_i^\zeta.\phi_{\beta\zeta}) + \sum_k^n (\phi_{\beta\zeta})_i^k \phi_{\zeta\beta}(\hat{\Gamma}_k)\phi_{\beta\zeta} \\
&= e^{-h}e^h\phi_{\alpha\beta}(e_i^\alpha.(e^{-h}\phi_{\beta\alpha})) + e^{-h}\sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k \phi_{\alpha\beta}(\hat{\Gamma}_k x)\phi_{\beta\alpha} \\
&= e^{-h}\left(-(e_i^\alpha.h)\mathrm{id} + \phi_{\alpha\beta}(e_i^\alpha.\phi_{\beta\alpha}) + \sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k \phi_{\alpha\beta}(A_k^\beta + H_k)\phi_{\beta\alpha}\right) \quad \text{por proposición 2.4.1} \\
&= e^{-h}\left(A_i^\alpha + \sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k \phi_{\alpha\beta} H_k \phi_{\beta\alpha} - (e_i^\alpha.h)\mathrm{id}\right) \\
&= e^{-h}\left(A_i^\alpha + \sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k \left(\phi_{\alpha\beta} H_k \phi_{\beta\alpha} - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id}\right)\right) \\
&= e^{-h}\left(A_i^\alpha + \sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k \phi_{\alpha\beta}\left(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id}\right)\phi_{\beta\alpha}\right). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

En lo que sigue, nos ocuparemos de reformular la expresión $\sum_{k=1}^n (\phi_{\beta\alpha})_i^k \phi_{\alpha\beta}\left(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_i}\mathrm{id}\right)\phi_{\beta\alpha}$ de tal manera que conociendo la preimagen de A_i^α en $\mathfrak{spin}(n)$ bajo (1.9), nos sea fácil determinar la respectiva preimagen de A_i^ζ.

Lema 2.4.2. *Podemos reescribir* $H_i - \frac{\partial h}{\partial x_i}\mathrm{id}$ *de la siguiente manera*

$$H_i - \frac{\partial h}{\partial x_i}\mathrm{id} = \left(\sum_{l=1}^n g^{ml}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j} g\left(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial h}{\partial x_l} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\right)_{j,m=1}^n .$$

Demostración. Usando la expresión (2.10), tenemos

$$\begin{aligned}
H_i &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\delta_{kj} + \frac{\partial h}{\partial x_j}\delta_{ik} - \sum_{l=1}^n g^{kl}\frac{\partial h}{\partial x_l} g_{ij}\right)_{j,m=1}^n \\
&= \frac{\partial h}{\partial x_i}\mathrm{id} + \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\delta_{im} - \sum_{l=1}^n g^{ml}\frac{\partial h}{\partial x_l} g_{ij}\right)_{j,m=1}^n ,
\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$H_i - \frac{\partial h}{\partial x_i}\mathrm{id} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\delta_{im} - \sum_{l=1}^{n} g^{ml}\frac{\partial h}{\partial x_l}g_{ij}\right)_{j,m=1}^{n}.$$

Ahora, observando que $\delta_{im} = \sum_{l=1}^{n} g^{ml} g_{li}$, podemos concluir

$$\begin{aligned} H_i - \frac{\partial h}{\partial x_i}\mathrm{id} &= \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}g_{li} - \frac{\partial h}{\partial x_l}g_{ji}\right)\right)_{j,m=1}^{n} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}(\frac{\partial h}{\partial x_j}g(\frac{\partial}{\partial x_l},\frac{\partial}{\partial x_i}) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}))\right)_{j,m=1}^{n}. \end{aligned}$$

∎

Continuando en este sentido, tenemos el siguiente

LEMA 2.4.3.

$$\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k\left(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id}\right) = \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}(\frac{\partial h}{\partial x_j}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^{\alpha}) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\frac{\partial}{\partial x_j}, e_i^{\alpha}))\right)_{j,m=1}^{n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el lema anterior podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k\left(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id}\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k\left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}g(\frac{\partial}{\partial x_l},\frac{\partial}{\partial x_k}) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k})\right)\right)\right)_{j,m=1}^{n} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}g(\frac{\partial}{\partial x_l},\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k\frac{\partial}{\partial x_k}) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\frac{\partial}{\partial x_j},\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k\frac{\partial}{\partial x_k})\right)\right)_{j,m=1}^{n} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^{\alpha}) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\frac{\partial}{\partial x_j}, e_i^{\alpha})\right)\right)_{j,m=1}^{n}. \end{aligned}$$

∎

Luego, tenemos el siguiente

LEMA 2.4.4.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id})\right)\phi_{\beta\alpha} = \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}(e_k^{\alpha}.h)g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^{\alpha}) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(e_k^{\alpha}, e_i^{\alpha})\right)_{k,m=1}^{n}$$

DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso de la proposición previa,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id})\right)\phi_{\beta\alpha} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\frac{\partial}{\partial x_j}, e_i^\alpha)\right)_j^m (\phi_{\beta\alpha})_k^j\right)_{k,m=1}^n$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left(\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_k^j\frac{\partial}{\partial x_j}\right).h\right)g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(\sum_{j=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_k^j\frac{\partial}{\partial x_j}, e_i^\alpha)\right)_j^m\right)_{k,m=1}^n$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left((e_k^\alpha.h)\, g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(e_k^\alpha, e_i^\alpha)\right)_j^m\right)_{k,m=1}^n.$$

∎

Ahora, observando que para cada $X = \sum_{s=1}^n X^s \frac{\partial}{\partial x_s} \in \Gamma(\mathrm{T}U_\alpha)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} g^{ml}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, X) &= \sum_{s,l=1}^{n} g^{ml}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, X^s\frac{\partial}{\partial x_s}) \\
&= \sum_{s,l=1}^{n} g^{ml}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_s})X^s \\
&= \sum_{s,l=1} g^{ml}g_{ls}X^s \\
&= \sum_{s=1} \delta_{ms}X^s \\
&= X^m \\
&= dx_m(\sum_{s=1}^{n} X^s\frac{\partial}{\partial x_s}) \\
&= dx_m(X),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{l=1}^{n} g^{ml}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, X) = dx_m(X). \tag{2.12}$$

LEMA 2.4.5.

$$\sum_{l,m=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})_m^j g^{ml}g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) = g(e_j^\alpha, e_i^\alpha).$$

DEMOSTRACIÓN. Debido a (1.2), (1.5) y (2.12) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{l,m=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})_m^j g^{ml} g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) &= \sum_{m=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})_m^j dx_m(e_i^\alpha)\\ &= e_\alpha^{*j}(e_i^\alpha)\\ &= \delta_{ji}\\ &= g(e_j^\alpha, e_i^\alpha).\end{aligned}$$

∎

DEFINICIÓN 2.4.6. *Dada $f \in C^\infty(M)$, definimos el vector* $\mathrm{grad}(f) \in \mathrm{T}_pM$ *mediante*

$$g(\mathrm{grad}(f), X) := df(X) = X.f$$

para todo $X \in \mathrm{T}_pM$.

LEMA 2.4.7. *Dada $h \in C^\infty(M)$, en coordenadas locales se tiene que*

$$\mathrm{grad}(h) = \sum_{s,t=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_t} g^{ts}\frac{\partial}{\partial x_s}.$$

DEMOSTRACIÓN. En coordenadas locales tenemos

$$\begin{aligned}g(\sum_{s,t=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_t}g^{ts}\frac{\partial}{\partial x_s}, \sum_{r=1}^{n}X^r\frac{\partial}{\partial x_r}) &= \sum_{r,s,t=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_t}g^{ts}g(\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_r})X^r\\ &= \sum_{r,s,t=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_t}g^{ts}g_{sr}X^r\\ &= \sum_{r,t=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_t}\delta_{tr}X^r\\ &= \sum_{r=1}^{n}X^r\frac{\partial h}{\partial x_r}\\ &= (\sum_{r=1}^{n}X^r\frac{\partial}{\partial x_r}).h\\ &= dh(\sum_{r=1}^{n}X^r\frac{\partial}{\partial x_r})\\ &= dh(X).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{grad}(h) = \sum_{s,t=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_t} g^{ts} \frac{\partial}{\partial x_s}$. ∎

LEMA 2.4.8. *Dada la base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ en $\mathrm{T}U_\alpha$, tenemos lo siguiente*

$$\text{grad}(h) = \sum_{i=1}^{n} (e_i.h)e_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el vector $\text{grad}(h)$ escrito en la base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, $\text{grad}(h) = \sum_{i=1}^{n} c^i e_i$, donde $c^i \in \mathbb{R}$ son funciones del punto en cuestión, en principio indeterminadas. Luego,

$$\begin{aligned} c^i &= g(\sum_{j=1}^{n} c^j e_j, e_i) \\ &= g(\text{grad}(h), e_i) \\ &= dh(e_i) \\ &= e_i.h, \end{aligned}$$

entonces $\text{grad}(h) = \sum_{i=1}^{n}(e_i.h)e_i$. ∎

LEMA 2.4.9.

$$\sum_{l,m=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})^j_m g^{ml} \frac{\partial h}{\partial x_l} = e^\alpha_j.h.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \sum_{l,m=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})^j_m g^{ml} \frac{\partial h}{\partial x_l} &= \sum_{l,m,s=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})^j_m \delta_{ms} g^{sl} \frac{\partial h}{\partial x_l} \\ &= \sum_{l,m,s=1}^{n} (\phi_{\alpha\beta})^j_m dx_m(\frac{\partial}{\partial x_s}) g^{sl} \frac{\partial h}{\partial x_l} \\ &= \sum_{l,s=1}^{n} e^{*j}_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_s}) g^{sl} \frac{\partial h}{\partial x_l} \\ &= e^{*j}_\alpha \left(\sum_{l,s=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_l} g^{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \\ &= e^{*j}_\alpha(\text{grad}(h)) && \text{por lema 2.4.7} \\ &= g(e^\alpha_j, \text{grad}(h)) \\ &= dh(e^\alpha_j) = e^\alpha_j.h. \end{aligned}$$

∎

De los cálculos anteriores se sigue

Lema 2.4.10.

$$\sum_{i=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k\phi_{\alpha\beta}(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id})\phi_{\beta\alpha} = \Big((e_k^\alpha.h)\delta_{ji} - (e_j^\alpha.h)\delta_{ki}\Big)_{k,j=1}^n .$$

Demostración. Del lema 2.4.4 se sigue

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha\beta}\left(\sum_{k=1}^{n}(\phi_{\beta\alpha})_i^k(H_k - \frac{\partial h}{\partial x_k}\mathrm{id})\right)\phi_{\beta\alpha} &= \phi_{\alpha\beta}\left(\sum_{l=1}^{n} g^{ml}\left((e_k^\alpha.h)g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(e_k^\alpha, e_i^\alpha)\right)\right)_{k,m=1}^n \\
&= \left(\sum_{l,m=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})_m^j g^{ml}\left((e_k^\alpha.h)g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) - \frac{\partial h}{\partial x_l}g(e_k^\alpha, e_i^\alpha)\right)\right)_{k,m=1}^n \\
&= \left(\sum_{l,m=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})_m^j g^{ml}(e_k^\alpha.h)g(\frac{\partial}{\partial x_l}, e_i^\alpha) - \sum_{l,m=1}^{n}(\phi_{\alpha\beta})_m^j g^{ml}\frac{\partial h}{\partial x_l}g(e_k^\alpha, e_i^\alpha)\right)_{k,j=1}^n \\
&= \Big(g(e_j^\alpha, e_i^\alpha)(e_k^\alpha.h) - (e_j^\alpha.h)g(e_k^\alpha, e_i^\alpha)\Big)_{k,j=1}^n \qquad \text{por lemas 2.4.5 y 2.4.9} \\
&= \Big((e_k^\alpha.h)\delta_{ji} - (e_j^\alpha.h)\delta_{ki}\Big)_{k,j=1}^n .
\end{aligned}$$

∎

Finalmente obtenemos la siguiente proposición que nos dice cómo la ecuación (2.11) se puede expresar de manera conveniente.

Proposición 2.4.11. *Si A_i^ζ denota la matriz de símbolos de Christoffel en la métrica $e^{2h}g$ y A_j^α a la respectiva matriz en la métrica original g, entonces tenemos la siguiente relación*

$$A_i^\zeta = e^{-h}\left(A_i^\alpha + \sum_{m=1}^{n}(e_m^\alpha.h)E_{mi}\right)$$

con los E_{mi} dados por la definición 1.2.6.

Demostración. Por el lema 2.4.10 tenemos

$$\begin{aligned}
A_i^\zeta &= e^{-h}\left(A_i^\alpha + \Big(((e_k^\alpha.h)\delta_{ji} - (e_j^\alpha.h)\delta_{ki})\Big)_{k,j=1}^n\right) \\
&= e^{-h}\left(A_i^\alpha + \sum_{m=1}^{n}(e_m^\alpha.h)E_{mi}\right).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2.5. El operador de Dirac bajo transformaciones conformes de métrica

Lema 2.5.1. *El haz de espín de (M, g) y el respectivo para $(M, e^{2h}g)$ son iguales. De esto concluimos además que los haces de endomorfismos en cada caso coinciden.*

Demostración. Dadas $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{e^{-h}e_i\}_{i=1}^n$ bases ortonormales en (T_pM, g) y $(\mathrm{T}_pM, e^{2h}g)$ respectivamente, y $\{\gamma_i\} \subset \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$ tales que $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\delta_{ij}\mathrm{id}$, definimos

$$\gamma_g(e_i) := \gamma_i \in \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C}), \quad \gamma_{e^{2h}g}(e^{-h}e_i) := \gamma_i \in \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C}),$$

de donde $\gamma_{e^{2h}g}(e_i) = e^h\gamma_i = e^h\gamma_g(e_i)$. Ahora, si $\phi_{\alpha\beta} \in \mathrm{SO}(n)$ son las funciones de transición de $\mathrm{T}M$ que se levantan mediante el cubriente $2:1$, $\lambda : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ a $\hat{\phi}^g_{\alpha\beta} = v_1 \cdots v_{2k}$ para el caso (M, g) y a $\hat{\phi}^{e^{2h}g}_{\alpha\beta} = (e^{-h}v_1)\cdots(e^{-h}v_{2k})$ para el caso de $(M, e^{2h}g)$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\gamma_{e^{2h}g}(\hat{\phi}^{e^{2h}g}_{\alpha\beta}) &= e^{-h}\gamma_{e^{2h}g}(v_1)\cdots e^{-h}\gamma_{e^{2h}g}(v_{2k}) \\
&= \gamma_g(v_1)\cdots\gamma_g(v_{2k}) \\
&= \gamma_g(v_1\cdots v_{2k}) \\
&= \gamma_g(\hat{\phi}^g_{\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

Encontramos entonces que los haces de espín asociados a (M, g) y a $(M, e^{2h}g)$ al estar definidos mediante las mismas funciones de transición, coinciden; por lo tanto los correspondientes haces de endomorfismos de ambos haces son iguales. $\blacksquare$

Gracias al lema anterior, podemos considerar al operador de Dirac con respecto a g y $e^{2h}g$ actuando en secciones del mismo haz de espín. Procedemos a establecer el resultado principal de esta tesis.

Teorema 2.5.2. *Si $\tilde{D}$ denota el operador de Dirac para la variedad M en la métrica $e^{2h}g$, conformemente equivalente a la métrica original g en M, entonces*

$$\tilde{D} = e^{-h}\left(D + \frac{n-1}{2}\gamma\left(\mathrm{grad}(h)\right)\right)$$

donde D es el operador de Dirac en M con la métrica inicial g y γ es la representación del álgebra de Clifford para M.

Demostración. Dada la base ortonormal $\{e_i^{\zeta}\}_{i=1}^n$ según la métrica $e^{2h}g$ en la carta U_α, por definición del operador de Dirac en la métrica conforme

$$
\begin{aligned}
\tilde{D} &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{e^{2h}g}(e_i^{\zeta})\tilde{\nabla}^{Spin}_{e_i^{\zeta}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{e^{2h}g}(e_i^{\zeta})\left(e_i^{\zeta}. + \tilde{A_i^{\zeta}}\right) && \text{por proposición 2.3.2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left(e^{-h}e_i^{\alpha}. + e^{-h}(\tilde{A}_i^{\alpha} + \sum_{m=1}^{n}(e_m^{\alpha}.h)\tilde{E}_{mi})\right) && \text{por proposición 2.4.11} \\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{-h}\left(\gamma_i e_i^{\alpha}. + \gamma_i\tilde{A}_i^{\alpha} + \gamma_i \sum_{m=1}^{n}(e_m^{\alpha}.h)\tilde{E}_{mi}\right) \\
&= e^{-h}\left(D + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n}(e_m^{\alpha}.h)\gamma_m\gamma_i\right) && \text{por (1.9) y (2.6)} \\
&= e^{-h}\left(D - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n}(e_m^{\alpha}.h)\gamma_m\gamma_i\gamma_i\right) \\
&= e^{-h}\left(D + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n}(e_m^{\alpha}.h)\gamma_m\right) \\
&= e^{-h}\left(D + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n}\gamma((e_m^{\alpha}.h)e_m^{\alpha}) - \gamma((e_i^{\alpha}.h)e_i^{\alpha}) + \gamma((e_i^{\alpha}.h)e_i^{\alpha})\right)\right) \\
&= e^{-h}\left(D + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\gamma((e_m^{\alpha}.h)e_m^{\alpha}) - \gamma((e_i^{\alpha}.h)e_i^{\alpha})\right)\right) && \text{por lema 2.4.8} \\
&= e^{-h}\left(D + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\gamma(\text{grad}(h)) - \gamma((e_i^{\alpha}.h)e_i^{\alpha})\right)\right) \\
&= e^{-h}\left(D + n\frac{1}{2}\gamma(\text{grad}(h)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\gamma((e_i^{\alpha}.h)e_i^{\alpha})\right) \\
&= e^{-h}\left(D + n\frac{1}{2}\gamma(\text{grad}(h)) - \frac{1}{2}\gamma(\text{grad}(h))\right) && \text{por lema 2.4.8}
\end{aligned}
$$

$$=e^{-h}\left(D+\frac{n-1}{2}\gamma(\mathrm{grad}(h))\right).$$

■

CAPÍTULO 3

El operador de Dirac en espacios de curvatura seccional constante

Como aplicación de nuestro resultado sobre cómo cambia el operador de Dirac bajo transformaciones conformes de métrica, en lo que sigue calcularemos el operador de Dirac para las variedades de Riemann de curvatura seccional constante $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{H}^n$, para esto, será necesario calcular primero el operador de Dirac en $\mathbb{R}^n$.

3.1. Álgebra de Clifford para $\mathbb{R}^n$

Procederemos a dar una representación de $\mathbb{C}l(n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ como matrices complejas de dimensión $2^k \times 2^k$, donde $n = 2k$ o $n = 2k + 1$, la manera en que haremos ésto es recursiva siguendo la construcción que aparece indicada en [1]. Escribiremos $\gamma_i^{(n)}$ para indicar la i-ésima matriz para el caso de $\mathbb{R}^n$. Necesitamos entonces, matrices $\{\gamma_i^{(n)}\}_{i=1}^n \subset \mathrm{M}_{2^k\times 2^k}(\mathbb{C})$ que cumplan

$$\gamma_i^{(n)}\gamma_j^{(n)} + \gamma_j^{(n)}\gamma_i^{(n)} = -2\delta_{ij}\mathrm{id}. \tag{3.1}$$

El caso base es $\mathbb{R}$ para el cual tenemos la matriz

$$\gamma_1^{(1)} = \mathrm{i} \in \mathrm{M}_{2^0\times 2^0}(\mathbb{C}),$$

luego, para $n > 1$ par, definimos las n matrices que necesitamos en términos de las $n-1$ anteriones mediante $\gamma_i^{(n)} := \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n-1)} \\ -\gamma_i^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix}$ para $i < n$ y $\gamma_n^{(n)} := \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}$. Mientras que si $n > 1$ es impar, definimos $\gamma_i^{(n)} := \gamma_i^{(n-1)}$ para $i < n$ y $\gamma_n^{(n)} := \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id} \end{pmatrix}$, en ambos casos, $\mathrm{id} \in \mathrm{M}_{2^{k-1}\times 2^{k-1}}(\mathbb{C})$.

Proposición 3.1.1. *El procedimiento de recursión previamente descrito nos provee de una representación del álgebra de Clifford $\mathbb{C}l(n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ para cada n.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre la dimensión del espacio en cuestión. El caso base para cuando n es impar es $n = 1$, para el cual la definición de $\gamma_1^{(1)}$ satisface (3.1).

Luego, el caso base para n par es $n = 2$, entonces, por definición

$$\gamma_1^{(2)} := \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{(1)} \\ -\gamma_1^{(1)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2^{(2)} := \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\gamma_1^{(2)}\gamma_1^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2^{(2)}\gamma_2^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)} + \gamma_2^{(2)}\gamma_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = 0.$$

Suponemos ahora que la proposición es válida para n impar y probaremos su validez para $n+1$. En este caso $\gamma_i^{(n+1)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n)} \\ -\gamma_i^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$ para $i < n+1$ y $\gamma_{n+1}^{(n+1)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}$. Necesitamos mostrar que el conjunto $\{\gamma_i^{(n+1)}\}_{i=1}^{n+1}$ satisface (3.1), para esto si $i \neq j$, con $i, j < n+1$,

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(n+1)}\gamma_j^{(n+1)} + \gamma_j^{(n+1)}\gamma_i^{(n+1)} &= -\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n)} \\ -\gamma_i^{(n)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^{(n)} \\ -\gamma_j^{(n)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^{(n)} \\ -\gamma_j^{(n)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n)} \\ -\gamma_i^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_i^{(n)}\gamma_j^{(n)} + \gamma_j^{(n)}\gamma_i^{(n)} & 0 \\ 0 & \gamma_i^{(n)}\gamma_j^{(n)} + \gamma_j^{(n)}\gamma_i^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\delta_{ij}\mathrm{id} & 0 \\ 0 & -2\delta_{ij}\mathrm{id} \end{pmatrix} \\ &= -2\delta_{ij}\mathrm{id}. \end{aligned}$$

Luego, para $i < n+1$,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}^{(n+1)}\gamma_i^{(n+1)} + \gamma_i^{(n+1)}\gamma_{n+1}^{(n+1)} &= -\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n)} \\ -\gamma_i^{(n)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n)} \\ -\gamma_i^{(n)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_i^{(n)} & 0 \\ 0 & -\gamma_i^{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_i^{(n)} & 0 \\ 0 & -\gamma_i^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

además, para $i < n+1$,

$$\left(\gamma_i^{(n+1)}\right)^2 = -\begin{pmatrix} -\left(\gamma_i^{(n)}\right)^2 & 0 \\ 0 & -\left(\gamma_i^{(n)}\right)^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

y también

$$\left(\gamma_{n+1}^{(n+1)}\right)^2 = -\begin{pmatrix} \mathrm{id}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

Ahora, suponemos que nuestra proposición es válida para n par y buscaremos mostrar su validez para $n+1$. Como $n+1$ es impar, por definición $\gamma_i^{(n+1)} := \gamma_i^{(n)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n-1)} \\ -\gamma_i^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix}$ para $i < n+1$ y $\gamma_{n+1}^{(n+1)} := \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id} \end{pmatrix}$, ocurre entonces que para $i, j \leq n+1$, con $i \neq j$,

$$\gamma_i^{(n+1)}\gamma_j^{(n+1)} + \gamma_j^{(n+1)}\gamma_i^{(n+1)} = \gamma_i^{(n)}\gamma_j^{(n)} + \gamma_j^{(n)}\gamma_i^{(n)} = -2\delta_{ij}\mathrm{id}$$

por hipótesis de inducción. Luego, para $i < n+1$,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}^{(n+1)}\gamma_i^{(n+1)} + \gamma_i^{(n+1)}\gamma_{n+1}^{(n+1)} &= -\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n-1)} \\ -\gamma_i^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n-1)} \\ -\gamma_i^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_i^{(n-1)} \\ -\gamma_i^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n-1)} \\ \gamma_i^{(n-1)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, para $i < n+1$,

$$\left(\gamma_i^{(n+1)}\right)^2 = -\begin{pmatrix} -\left(\gamma_i^{(n)}\right)^2 & 0 \\ 0 & -\left(\gamma_i^{(n)}\right)^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

y también

$$\left(\gamma_{n+1}^{(n+1)}\right)^2 = -\begin{pmatrix} \mathrm{id}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

∎

3.2. Operador de Dirac en $\mathbb{R}^n$

Dado que la representación del álgebra de Clifford en $\mathbb{R}^n$ está definida de manera recursiva, la definición del operador de Dirac en $\mathbb{R}^n$ también será de esta naturaleza.

Teorema 3.2.1. *El operador de Dirac en $\mathbb{R}$ está dado por*

$$\underset{\mathbb{R}}{D} = \gamma_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_1} = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

y para $n \geq 2$ el operador de Dirac en $\mathbb{R}^n$ está dado por una de las dos siguientes expresiones que dependen de la paridad de n, si $n = 2k$,

$$\underset{\mathbb{R}^n}{D} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{D} + \mathrm{id}\frac{\partial}{\partial x_n} \\ -\underset{\mathbb{R}^{n-1}}{D} + \mathrm{id}\frac{\partial}{\partial x_n} & 0 \end{pmatrix}$$

y si $n = 2k + 1$,

$$\underset{\mathbb{R}^n}{D} = \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{D} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -\mathrm{id} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_n},$$

donde $\mathrm{id} \in \mathrm{M}_{2^{k-1}\times 2^{k-1}}(\mathbb{C})$ *en ambos casos.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre n. Los casos base son $n = 2$ y $n = 3$, para estos, calculamos las representaciones de Clifford explícitamente. Si $n = 2$, según el procedimiento de recursión que hemos establecido, tenemos que

$$\gamma_1^{(2)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{(1)} \\ -\gamma_1^{(1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2^{(2)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} \underset{\mathbb{R}^2}{D} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \underset{\mathbb{R}}{D} + \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\underset{\mathbb{R}}{D} + \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, para $\mathbb{R}^3$

$$\gamma_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2^{(2)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3^{(2)} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \underset{\mathbb{R}^3}{D} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= \underset{\mathbb{R}^2}{D} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

tenemos entonces que la proposición es cierta para nuestra base de inducción. Suponemos ahora que tenemos la validez de la misma para n par y buscaremos probar que la proposición es válida para $n+1$. Tenemos que para el operador de Dirac en $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{R}^{n+1}}{D} &= \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma_{n+1}^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \\ &= \underset{\mathbb{R}^n}{D} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}.\end{aligned}$$

Luego, si n es impar, el operador de Dirac en $\mathbb{R}^{n+1}$ lo obtenemos mediante

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{R}^{n+1}}{D} &= \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma_{n+1}^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i^{(n)} \\ -\gamma_i^{(n)} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \\ &= \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \underset{\mathbb{R}^n}{D} + \mathrm{id}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \\ -\underset{\mathbb{R}^n}{D} + \mathrm{id}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

∎

3.3. Operador de Dirac en $\mathbb{S}^n$

Consideraremos en $\mathbb{S}^n$ el atlas dado por proyecciones estereográficas norte y sur, denotadas ϕ_N, ϕ_S respectivamente, estas son

$$\phi_N : U_N := \mathbb{S}^n \backslash \{(0, \dots, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_N(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$$

con inversa

$$\phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_N, \quad \phi_N^{-1}(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, ..., \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} - 1 \right),$$

$$\phi_S : U_S := \mathbb{S}^n \backslash \{(0, \dots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_S(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$$

con inversa

$$\phi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_S, \quad \phi_S^{-1}(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, ..., \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, 1 - \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \right).$$

El siguiente resultado nos permite obtener el operador de Dirac en $\mathbb{S}^n$ a partir de nuestro teorema principal, teorema 2.5.2.

Lema 3.3.1. *Considerando a $\mathbb{S}^n$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$, tenemos que $\mathbb{S}^n$ induce sobre $\varphi_N(U_N)$ y sobre $\varphi_S(U_S)$ una métrica conformemente equivalente a la métrica de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. De las expresiones de las cartas ϕ_N y ϕ_S observamos que bastará que calculemos la métrica para un caso, ya que será totalmente análogo el otro. Además, será suficiente que calculemos el operador de Dirac en una carta. Denotaremos por $\mathrm{gen}_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ el espacio tangente a $\varphi_N(U_N)$ en x, aunque no escribiremos el punto para no saturar la notación. Luego, por definición de métrica inducida, tenemos que $< \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >_x := < \frac{\partial \varphi_N^{-1}}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_N^{-1}}{\partial x_j} >_{\varphi_N(x)^{-1}}$. Explícitamente, el i-ésimo básico está dado por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \left(-4x_1 x_i, ..., 2(1 + \sum_{k=1}^n x_k^2) - 4x_i^2, ..., -4x_i x_n, -4x_i \right).$$

Considerando la métrica inducida del $\mathbb{S}^n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle &= \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^4} \left(16 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^n x_k^2 x_j^2 + 4 \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_j^2 \right)^2 + 16 x_j^2 \right) \\
&= \frac{4}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^4} \left(4x_j^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 - 4x_j^4 + \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^2 - 4x_j^2 \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) + 4x_j^4 + 4x_j^2 \right) \\
&= \frac{4}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^4} \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^2 \\
&= \frac{4}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^2}.
\end{aligned}$$

Luego si $i \neq j$

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^4} \left(16 x_j x_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^n x_k^2 - 8x_j x_i (1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_i^2) - 8x_i x_j (1 + \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_j^2) + 16 x_i x_j \right)$$

$$= \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^n x_i^2)^4}\left(-8x_jx_i^3 - 8x_j^3x_i + 16x_jx_i^3 - 8x_ix_j^3 - 8x_i^3x_j + 16x_ix_j^3\right)$$
$$= 0.$$

Tenemos entonces que la métrica en $\phi_N(U_N)$ está dada por

$$\left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \frac{4}{(1+\sum_{k=1}^n x_k^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

∎

TEOREMA 3.3.2. *En coordenadas locales* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\underset{\mathbb{S}^n}{D} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left((1+\sum_{j=1}^n x_j^2)\frac{\partial}{\partial x_i} - (n-1)x_i\right)\gamma_i$$
$$= \frac{1}{2}(1+\sum_{j=1}^n x_j^2)\underset{\mathbb{R}^n}{D} - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i\gamma_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Esto es consecuencia directa del teorema 2.5.2 con $g = e^{2h} < .,. >_{\mathbb{R}^n}$ y del lema anterior. En este caso $h = \frac{1}{2}ln\left(\frac{4}{(1+\sum_{k=1}^n x_k^2)^2}\right) = ln\left(\frac{2}{1+\sum_{k=1}^n x_k^2}\right)$, entonces tenemos que

$$grad(h) = -\sum_{i=1}^n \frac{2x_i}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

por lo tanto

$$\gamma(grad(h)) = -\sum_{i=1}^n \frac{2x_i}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\gamma_i,$$

debido a que $\underset{\mathbb{R}^n}{D} = \sum_{i=1}^n \gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces

$$\underset{\mathbb{S}^n}{D} = \frac{1+\sum_{j=1}^n x_j^2}{2}\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{2x_i}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2}\gamma_i\right)$$
$$= \frac{1+\sum_{j=1}^n x_j^2}{2}\sum_{i=1}^n \gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i\gamma_i$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left((1+\sum_{j=1}^n x_j^2)\frac{\partial}{\partial x_i} - (n-1)x_i\right)\gamma_i$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2)\underset{\mathbb{R}^n}{D} - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\gamma_i.$$

$\blacksquare$

3.4. El operador de Dirac en $\mathbb{H}^n$

Consideraremos dos modelos del espacio hiperbólico, uno de ellos es el semiplano superior, denotado $\mathbb{H}^n$ que se define como

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

dotado de la métrica

$$\left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} := \frac{1}{x_n^2}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces el siguiente

Teorema 3.4.1. *El operador de Dirac en el semiplano superior $\mathbb{H}^n$ está dado por*

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{H}^n}{D} &= x_n \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{n-1}{2}\gamma_n \\ &= x_n \underset{\mathbb{R}^n}{D} - \frac{n-1}{2}\gamma_n.\end{aligned}$$

Demostración. En este caso $h = ln(\frac{1}{x_n})$, por lo tanto $grad(h) = -\frac{1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$. Obtenemos entonces por aplicación directa de 2.5.2

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{H}^n}{D} &= e^{-ln(\frac{1}{x_n})}\left(\underset{\mathbb{R}^n}{D} + \frac{n-1}{2}\gamma(-\frac{1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n})\right) \\ &= x_n\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{n-1}{2}\gamma(-\frac{1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n})\right) \\ &= x_n\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{n-1}{2}\gamma_n \\ &= x_n\underset{\mathbb{R}^n}{D} - \frac{n-1}{2}\gamma_n.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

El segundo modelo que consideraremos es el llamado disco de Poincaré. Para definir este modelo, necesitamos el hiperboloide

$$\mathbb{H}_1^n := \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 1 - x_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$$

dotado de la métrica de Minkowski, que es la métrica pseudoriemanniana inducida por la forma cuadrática

$$\mathrm{Q}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = -x_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, la carta $\phi : \mathbb{H}_1^n \to \mathbb{D}^n$, donde

$$\mathbb{D}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

definida por

$$\phi((x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$$

con inversa

$$\phi^{-1}((x_1, \ldots, x_n)) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}(2x_1, \ldots, 2x_n, 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2).$$

El disco de Poincaré es el espacio $\mathbb{D}^n$ con la métrica que ϕ le induce. El siguiente lema nos ayudará a obtener el operador de dirac en $\mathbb{D}^n$.

Lema 3.4.2. *La métrica que ϕ^{-1} induce en $\mathbb{D}^n$ está dada por*

$$\left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \frac{4}{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

la cual es conforme a la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. El espacio tangente $\mathrm{T}_p\mathbb{D}^n = gen_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$, donde $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_i}$, explícitamente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \left(4x_1x_i, ..., 2(1 - \sum_{k=1}^n x_k^2) + 4x_i^2, ..., 4x_ix_n, 4x_i\right),$$

y la métrica la calculamos considerando

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle_{\mathbb{D}^n} =< \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x_i} >_{\mathbb{H}_1^n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^4}\left(16x_i^2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n x_k^2 + 4(1-\sum_{k=1}^n x_k^2 + 2x_i^2)^2 - 16x_i^2\right)\\
&= \frac{4}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^4}\left(4x_i^2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n x_k^2 + (1-\sum_{k=1}^n x_k^2)^2 + 4x_i^2(1-\sum_{k=1}^n x_k^2) + 4x_i^4 - 4x_i^2\right)\\
&= \frac{4}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^4}\left((1-\sum_{k=1}^n x_k^2)^2\right)\\
&= \frac{4}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^2},
\end{aligned}
$$

luego, si $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
\langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\rangle_{\mathbb{D}^n} &= \frac{1}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^4}\left(16x_jx_i\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^n x_k^2 + 8x_jx_i\left(1-\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_i^2\right) + 8x_ix_j\left(1-\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_i^2\right) - 16x_ix_j\right)\\
&= \frac{1}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^4}\left(16x_jx_i\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^n x_k^2 - 8x_jx_i\sum_{k=1}^n x_k^2 + 16x_jx_i^3 - 8x_ix_j\sum_{k=1}^n x_k^2 + 16x_ix_j^3\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

∎

Teorema 3.4.3. *El operador de Dirac en el disco de Poincaré $\mathbb{D}^n$ está dado por*

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathbb{D}^n}{D} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left((1-\sum_{j=1}^n x_j^2)\frac{\partial}{\partial x_i} + (n-1)x_i\right)\gamma_i\\
&= \frac{1}{2}(1-\sum_{j=1}^n x_j^2)\underset{\mathbb{R}^n}{D} - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i\gamma_i.
\end{aligned}
$$

Demostración. Esto es consecuencia directa del teorema 2.5.2 y del lema 3.4.2, en este caso tenemos que

$$
h = ln\left(\frac{2}{(1-\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\right) = ln(2) - ln(1-\sum_{i=1}^n x_i^2),
$$

de donde

$$grad(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Mediante aplicación de nuestro teorema principal, teorema 2.5.2, calculamos el operador de Dirac en $\mathbb{D}^n$ mediante

$$\begin{aligned}
\underset{\mathbb{D}^n}{D} &= \frac{(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2)}{2} \left(\underset{\mathbb{R}^n}{D} + \frac{n-1}{2} \gamma \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\
&= \frac{(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2)}{2} \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{n-1}{2} x_i \gamma_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left((1 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2) \frac{\partial}{\partial x_i} + (n-1) x_i \right) \gamma_i \\
&= \frac{1}{2} (1 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2) \underset{\mathbb{R}^n}{D} - \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_i.
\end{aligned}$$

∎

Bibliografía

[1] R. Camporesi, A. Higuchi: *On the eigenfunctions of the Dirac operator on spheres and real hyperbolic spaces*. Journal of Geometry and Physics 20 (1996), 1-18.

[2] P. do Carmo: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.

[3] T. Friedrich: *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. American Mathematical Society, Providence, 2000.

[4] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Darmstadt, 1987.

[5] N. Hitchin: *Harmonic spinors*. Advances in Mathematics 14 (1974), 1-55.

[6] J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[7] H. Lawson Jr, M. L. Michelsohn: *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1989.

[8] W.S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer, Harrisonburg, VA, 1967.

[9] A. Ortiz-Ávila: *El operdador de Dirac en $\mathbb{S}^2$ en coordenadas locales*. Tesis de licenciatura, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, 2012.