Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# LA ECUACIÓN DE FERMAT EN EL CAMPO DE LAS FUNCIONES MEROMORFAS SOBRE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JOSÉ JUAN ZACARÍAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ

2014

**Hoja de Datos del Jurado**

1.Datos del alumno
Juan
Zacarías
José
7772107803
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
409008775

2. Datos del tutor
Dr
Santiago Alberto
Verjovsky
Solá

3. Datos del sinodal 1
Dr
Adolfo
Guillot
Santiago

4. Datos del sinodal 2
Dr
Carlos Alfonso
Cabrera
Ocañas

5. Datos del sinodal 3
Dr
Guillermo Javier Francisco
Sienra
Loera

6. Datos del sinodal 4
Dr
Gregor
Weingart

7. Datos del trabajo escrito
La ecuación de Fermat en el campo de las
funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann
37 p.
2014

# Índice general

# Agradecimientos

A mis padres, Guillermo Juan y Aida Zacarías, por darme la vida y por apoyarme en las decisiones que he tomado, gracias por el tiempo que me dieron para que yo pudiera dedicarme a estudiar.

A mis hermanitas Lupe y Jessi por siempre acordarse de mí.

A mi familia del D.F. Alberto, Ericka, Dali, Leo y a la tía Elisa por que me adoptaron como uno más de la familia, me dieron hospedaje y alimentación durante toda la carrera y me enseñaron muchas cosas de la vida que no sabía, me inculcaron muchos valores que los tendré presente por el resto de mi vida.

A la tía Elisa por estár siempre al pendiente y cuidar de nosotros.

A Leo por traerme de mi pueblo a estudiar matemáticas en la UNAM, gracias hermano.

A Antonia Sanchez, por todo su cariño y apoyo, gracias por estar conmigo.

A Erick Rodriguez, por ser un buen amigo y por todas las veces que hablamos sobre matemáticas.

A Cithi, a doña Tere y a su familia por siempre ser tan amables conmigo y por todos los ánimos que me dan.

A Adriana Gonzalez, por toda la paciencia que me tuvo en la facultad cuando fué mi ayudante y también por darse el tiempo para escuchar mis ideas.

A mis abuelos maternos, Angelina Flores y Máximo Zacarías por haberme criado durante varios años. Siempre estaré agradecido con ustedes.

A mis abuelos paternos, Celerina Miranda y Baltazar Juan por sus consejos.

A mi tía Ethi por que siempre me ha ayudado.

Al Ing. Olegario Wendulain por prepararme durante los concursos de matemáticas del bachillerato, los cuales me animaron muchísimo para estudiar matemáticas. También agradezco a su esposa Paula Ucán por todo su apoyo, los dos me trataron como a un hijo.

Al Ing. Mario por toda la ayuda que me ha dado.

Al Dr. Alberto Verjovsky por aceptar dirigir mi tesis, por ser un gran maestro y por ser un ejemplo para nosotros. Es un honor ser alumno.

Al Dr. Adolfo Guillot, por leer cuidadosamente la tesis y darme muy buenas observaciones y comentarios.

Al Dr. Gregor Weingart por siempre darse un tiempo para discutir sobre matemáticas y para responder dudas de los alumnos.

Al Dr. Carlos Cabrera por haberme recomendado con el Dr. Alberto y por siempre darme ánimos para continuar.

A la Dra. Edith Corina, por esas palabras de ánimo que me dió al final del seminario de Representaciones de Álgebras.

A los profesores: Diana Avella Alaminos, Héctor Méndez, Javier Paez, Leon Kushner, Luis Briseño, Eugenio Garnica, Alejandro Illanes, Manuel Falconi, Francisco Raggi, Daniela Mariyet y Ernesto Rosales. A cada uno de ellos interrumpí en sus cubículos para preguntales mis dudas, fueran o no mis profesores. Gracias por su tiempo.

A todos mis amigos y compañeros de la Facultad de Ciencias: Mindi, Jorge, German, Yazz, Prisma, Leonardo, Carlos, Fer, Cris, Shei.

Y mis amigos y compañeros del IMATE Cuernavaca: Maye, Chucho, Aremi, Cristina, Vane, Miyagui.

A mis compañeros y hermanos académicos: Otto, Yadira, Juan Manuel, Juan Pablo, Tellez y Efras por sus consejos y por que me invitaron a platicarles sobre la tesis en su seminario.

A Liz, por estar al pendiente de mí cuando llegué a Cuernavaca, por la ayuda que da a los estudiantes. Más que una trabajadora es una amiga para nosotros.

Al Programa Universitario México Nación Multicultural, por el apoyo económico que recibí durante la carrera y parte de la tesis. También por fomentar la convivencia entre los estudiantes indígenas.

Y agradezco a la beca Telmex, al SNI y al proyecto PAPIIT por el apoyo económico que recibí de ellos en algún periodo, mientras escribía la tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ciencias por todas las facilidades que me ofrecieron y por que estudiar en ellas es lo mejor que me ha pasado en la vida.

Al Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca de la UNAM, por haberme alojado mientras escribí la tesis, gracias por el café y los jardines y ese ambiente tan alegre y familiar.

# Introducción

Una de las conjeturas mas profundas de las matemáticas que permaneció abierta por poco más de 350 años fue el *Último Teorema de Fermat*, éste dice que la ecuación

$$X^n + Y^n = Z^n, \ XYZ \neq 0 \tag{1}$$

no tiene solución en los enteros para $n \geq 3$. Es decir, la ecuación

$$X^n + Y^n = 1 \tag{2}$$

no tiene soluciones en los racionales para $n > 2$. Este teorema, después de grandes avances logrados por varios matemáticos, fue demostrado por Andrew Wiles en 1995 [**1**], con la colaboración de Richard Taylor.

Muchos de los problemas concernientes a ecuaciones diofánticas, se generalizan a campos de funciones, como en el caso del último teorema de Fermat. Nosotros estamos interesados en el campo de las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann $S$, que será denotado por $\mathcal{M}(S)$. Por ejemplo, las funciones meromorfas sobre la esfera de Riemann, las cuales no son mas que las funciones racionales con coeficientes complejos, denotado por $\mathbb{C}(t)$. Podemos notar fácilmente que la ecuación (2) tiene soluciones en $\mathbb{C}(t)$ si y sólo si la ecuación (1) tiene soluciones en el anillo de los polinomios con coeficientes complejos, denotado por $\mathbb{C}[t]$. Es un resultado clásico que la ecuación (1) no tiene soluciones en dicho anillo [1] y existen varias maneras de probarlo, por ejemplo se sigue del Teorema de Mason-Stothers (ver Corolario A.4 en el Apéndice A), publicado primero por W. Wilson Stothers en [**2**] (1981) y redescubierto por R. C. Mason en [**3**] (1984).

Shanks en su libro [**6**] (pag. 157), discute una prueba dada por Chevyshev usando integración. Otra demostración fue dada por Greenleaf en [**5**] mediante la técnica de *descenso de Fermat*.

Pero la demostración más simple y geométrica se hace mediante superficies de Riemann, de la siguiente manera:

Una solución de la ecuación (2) en $\mathbb{C}(t)$ induce un mapeo holomorfo de la esfera de Riemann a la curva de Fermat que tiene género $(n-1)(n-2)/2$, pero se sabe que no hay mapeos holomorfos de la esfera de Riemann a superficies de Riemann compactas de género mayor que cero. $\square$

Al parecer, esta prueba ahora es muy conocida, sin embargo el Dr. Alberto Verjovsky la descubrió por su cuenta hace tiempo y gracias a él, el autor supo de

[1] Aparentemente Liouville fue el primero en estudiarlo [**4**] pag. 263

dicha demostración por primera vez y fue la idea que motivó esta tesis.

Gross observa en [**7**] que el resultado anterior se sigue de un Teorema de Uniformización de funciones en [**8**]. En [**7**] Gross estudia la ecuación de Fermat en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, describe a todas las soluciones para $n = 2$, da un contraejemplo para $n = 3$ y prueba que el Último Teorema de Fermat es válido para $n > 3$ en dicho campo.

En esta tesis se escribe con detalle la prueba del último teorema de Fermat para $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ esbozada anteriormente (ver Teorema 4.18) y la versión débil para $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ demostrada por Gross (ver Teorema 4.26).

También el autor generaliza algunos resultados dados en [**7**], a cualquier superficie de Riemann. Por ejemplo, demuestra la existencia de soluciones no constantes de la ecuación de Fermat para $n = 2$ en el campo de sus funciones meromorfas y si además la superficie es simplemente conexa, se describe la forma estas (ver Teorema 4.17).

Además, se determina una fórmula explícita de las soluciones de la ecuación de Fermat de grado tres en el campo de las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann simplemente conexa y no compacta (ver Teorema 4.24), este último, es un resultado original del autor, con la cuál se responde afirmativamente a una conjetura formulada en [**7**] (Conjetura 1, pág. 87), la cual afirma que todas las funciones meromorfas en el plano complejo que satisfacen la ecuación $x^3 + y^3 = 1$, son funciones elípticas de funciones enteras (ver Corolario 4.25).

En el Apéndice A, se presenta un breve comentario sobre otros problemas diofánticos en campos de funciones.

Capítulo 1

# Superficies de Riemann

En este capítulo se introduce el concepto de superficie de Riemann, nuestro principal objeto de estudio, y se definen los mapeos holomorfos entre ellas, en particular, se definen a las funciones holomorfas y meromorfas sobre éstas. El grupo de automorfismos holomorfos de una superficie de Riemann actúa de forma natural en ella, en la sección 2 se estudian las condiciones bajo las cuales el cociente de esta acción también es una superficie de Riemann. En la última sección se estudian las propiedades básicas, pero fundamentales, de los mapeos holomorfos, las cuales son generalizaciones de las propiedades de las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Por ejemplo, se prueba el teorema de identidad, el teorema del mapeo abierto, el teorema de la preimagen discreta, el teorema de suprayectividad; el último implica que todas las funciones holomorfas sobre una superficie de Riemann compacta son constantes. Y la propiedad más importante: que todo mapeo holomorfo puede modelarse localmente por funciones de la forma $z \mapsto z^m$, que entre otras cosas, implica que toda función holomorfa biyectiva es un biholomorfismo.

## 1. Definiciones básicas

Sea $X$ un espacio topológico, una *carta* (compleja) en $X$ es una pareja $(\varphi, U)$, donde $U$ es un abierto de $X$ y $\varphi$ es un homeomorfismo de $U$ a un abierto del plano complejo. Dos cartas $(\varphi, U)$ y $(\phi, V)$ en $X$ son *compatibles* si $U \cap V \neq \emptyset$ y la función

$$\varphi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \tag{3}$$

es holomorfa. Un *atlas* (holomorfo) en $X$ es un conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ cuyas cartas son compatibles y $X = \bigcup U_\alpha$. Una *estructura compleja* en $X$ es un atlas holomorfo maximal, es decir, contiene a cualquier carta que sea compatible con cada uno de sus elementos.

Definición 1.1. Una *superficie de Riemann* es un espacio topológico Hausdorff, conexo y con una estructura compleja.

Un atlas holomorfo siempre está contenido en un único atlas maximal, por eso basta dar un atlas holomorfo para determinar la estructura compleja.

El primer ejemplo de superficie de Riemann es el de una región $U$ del plano complejo, cuya estructura compleja está determinada por el atlas $\{(id, U)\}$.

El segundo ejemplo es la *esfera de Riemann*, denotada por $\mathbb{C}_\infty$ o por $\widehat{\mathbb{C}}$. Si $\infty$ es un punto que no está en el plano complejo, la esfera de Riemann es $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: $U \subseteq \mathbb{C}_\infty$ es abierto si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto con la topología usual o $U$ es de la forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, para algún compacto $K \subseteq \mathbb{C}$.

Consideremos los abiertos

$$
\begin{array}{rcl}
U_0 & = & \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \text{ y} \\
U_1 & = & \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/2\} \cup \{\infty\}.
\end{array} \tag{4}
$$

Definimos el mapeo $\varphi_0$ en $U_0$ como $z \mapsto z$ y el mapeo $\varphi_1$ en $U_1$ como $z \mapsto 1/z$ si $z \neq \infty$ e $\infty \mapsto 0$. Un atlas complejo de $\mathbb{C}_\infty$ la constituyen las cartas $(\varphi_0, U_0)$ y $(\varphi_1, U_1)$.

Topológicamente, $\mathbb{C}_\infty$ es la esfera de dimensión dos. Un homeomorfismo entre estos espacios está dado por la proyección estereográfica

$$
(x, y, w) \mapsto x/(1-w) + iy/(1-w) \tag{5}
$$

para toda $(x, y, w) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ y $(0,0,1) \mapsto \infty$.

Definición 1.2. Sea $f : R \to S$ un mapeo *continuo* entre dos superficies de Riemann $R$ y $S$ con estructuras complejas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente, $f$ es un *mapeo holomorfo* si para cualquier $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, y cualquier $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ con $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, la función

$$
\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V) \tag{6}
$$

es holomorfa.

Estudiaremos con más detalle las propiedades de los mapeos holomorfos en la última sección de este capítulo; veremos que basta verificar la holomorficidad en un atlas holomorfo y no necesariamente en toda la estructura compleja. En otras palabras, basta encontrar para cada punto $p$ en $R$ una carta $\varphi$ alrededor de $p$ y otra carta $\psi$ alrededor de $f(p)$ tal que $\psi f \varphi^{-1}$ sea una función holomorfa. Además, probaremos que la inversa de una función holomorfa biyectiva es holomorfa.

Definición 1.3. Un mapeo $f : R \to S$ entre dos superficies de Riemann es un *biholomorfismo* si es biyectivo y holomorfo. Y decimos que dos superficies de Riemann $R$ y $S$ son *conformemente equivalentes* si hay un biholomorfismo entre ellas.

Observemos que el mapeo identidad de una superficie de Riemann en sí misma es un mapeo holomorfo; la composición de dos mapeos holomorfos también es holomorfo y los mapeos inversos son holomorfos. Entonces, el conjunto de biholomorfismos de una superficie de Riemann $S$ en sí misma forma un grupo, que denotaremos por $Aut(S)$.

## 2. Acciones sobre superficies de Riemann

En esta sección estudiaremos las acciones de grupos de biholomorfismos sobre superficies de Riemann, daremos condiciones del grupo bajo las cuales el espacio cociente resulta también una superficie de Riemann.

Es conocido que la acción de un grupo $G$ sobre un conjunto $X$ induce una relación de equivalencia en $X$, a saber, dos elementos estan relacionados si están en la misma órbita. Lo curioso es que toda relación de equivalencia sobre un conjunto arbitrario proviene de la acción de un grupo, lo cual nos dice que la acción de un grupo sobre un conjunto no impone restricción alguna en la relación de equivalencia que induce:

Proposición 1.4. *Sea $X$ un conjunto y una relación de equivalencia arbitraria $\sim$ en $X$, entonces existe un grupo $G$ que actúa en $X$ cuya relación de equivalencia inducida en $X$ coincide con $\sim$.*

Demostración. Las clases de equivalencia de $\sim$ forman una partición de $X$, $X = \bigcup U_\alpha$. Definimos $G$ como el conjunto de los mapeos biyectivos $g : X \to X$, tales que $g(U_\alpha) = U_\alpha$, donde la operación es la composición. Observe que $G$ es un grupo y que la acción $(g, x) \mapsto g(x)$ induce la misma relación de equivalencia en $X$ que $\sim$. □

De ahora en adelante supondremos que $G$ es un grupo que actúa por *biholomorfismos* en una superficie de Riemann $X$ y que el espacio de órbitas $X/G$ está dotado de la topología cociente. Entonces la proyección natural, $\pi : X \to X/G$, es continua, suprayectiva y abierta.

Definición 1.5. Sea $X$ una superficie de Riemann y $G$ un grupo de biholomorfismos de $X$ actuando en ella:

- Decimos que la acción es *libre* si los elementos de $G$ distintos de la identidad no tienen puntos fijos en $X$.
- La acción es *propiamente discontinua* si para cualquier compacto $K$ de $X$, el conjunto de los elementos $g \in G$ tales que $g(K) \cap K \neq \emptyset$ es finito.
- La acción es *errante* si para cada $x \in X$, existe un abierto $U$, vecindad de $x$, tal que el conjunto de las $g \in G$ tales que $U \cap g(U) \neq \emptyset$, es finito.

Observe que, por ser $X$ Hausdorff, una acción *libre* de $G$ sobre $X$ es errante si y sólo si cada $x \in X$ tiene una vecindad $U$ tal que los trasladados $gU$ son todos ajenos, es decir, $U \cap g(U) \neq \emptyset$ solamente para $g = e$.

Los siguientes teoremas nos dan condiciones para que $X/G$ sea una superficie de Riemann.

Teorema 1.6. *Si $G$ actúa en $X$ de forma libre y errante de tal forma que $X/G$ es Hausdorff, entonces $X/G$ es una superficie de Riemann.*

Demostración. Como $\pi : X \to X/G$ es continua y suprayectiva $X/G$ es conexo, por hipótesis $X/G$ es Hausdorff, así que sólo resta encontrar un atlas holomorfo para $X/G$. Como la acción es errante y por la maximalidad de la estructura compleja de $X$, para cada $x \in X$ existe una carta $(U_x, \varphi_x)$ tal que $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Denotemos por $\pi_x$ al mapeo $\pi : U_x \to \pi(U_x)$, observemos que $\pi_x$ es biyectiva, abierta y continua. Definimos el atlas de $X/G$ como $\{(\pi(U_x), \varphi_x \pi_x^{-1})\}$. Sean $(\pi(U_x), \varphi_x \pi_x^{-1})$, $(\pi(U_y), \varphi_y \pi_y^{-1})$ dos cartas no ajenas.

Primero veamos que $\pi_x^{-1}\pi_y$ es holomorfo en $\pi_y^{-1}(\pi(U_y) \cap \pi(U_x))$. Sea $u_y \in \pi_y^{-1}(\pi(U_y) \cap \pi(U_x))$, entonces existe $g_0 \in G$ tal que $g_0 u_y = u_x$ para algún $u_x \in U_x$. Como $g_0$ es continua, $g_0^{-1}(U_x) \cap U_y$ es una vecindad abierta de $u_y$ contenida en $\pi_y^{-1}(\pi(U_x) \cap \pi(U_y))$. En $g_0^{-1}(U_x) \cap U_y$, $\pi = \pi_y$ y en $g_0(g_0^{-1}(U_x) \cap U_y)$, $\pi = \pi_x$, entonces dado que $\pi = \pi g_0$, se sigue que en $g_0^{-1}(U_x) \cap U_y$, $\pi_y = \pi_x g_0$, entonces en $g_0^{-1}(U_x) \cap U_y$ vecindad de $u_y$, $\pi_x^{-1}\pi_y = g_0$ es holomorfa. Por lo tanto, $\pi_x^{-1}\pi_y$ es holomorfa en $\pi_y^{-1}(\pi(U_x) \cap \pi(U_y))$.

Entonces el mapeo $(\varphi_x \pi_x^{-1})(\varphi_y \pi_y^{-1})^{-1} = \varphi_x(\pi_x^{-1}\pi_y)\varphi_y^{-1}$ es holomorfo en $\varphi_y \pi_y^{-1}$ $(\pi(U_x) \cap \pi(U_y)) \subseteq \varphi_y(U_y)$. Por lo tanto las cartas son compatibles. Entonces $X/G$ es una superficie de Riemann. □

LEMA 1.7. *Si $G$ es un grupo de biholomorfismos de una superficie de Riemann $X$, y $U_1$, $U_2$ son vecindades abiertas ajenas de dos puntos $x$, $y$ respectivamente tales que $\pi(x) \neq \pi(y)$ y $g(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ solamente para un número finito de elementos de $G$ entonces existen vecindades abiertas $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$ de $x$ y de $y$ respectivamente tales que $g(V_1) \cap V_2 = \emptyset$ para todo $g \neq Id$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $g(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ sólo para un número finito de elementos de $G$, digamos $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Como $\pi(x) \neq \pi(y)$, $g_i(x) \neq y$ para cada $i$. Entonces para cada $i$, existen vecindades abiertas ajenas $U_i' \subseteq U_2$, $U_i'' \subseteq g_i(U_1)$ de $y$ y $g_i(x)$ respectivamente. Definimos $V_1 = \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(U_i'')$, $V_2 = \bigcap_{i=1}^n U_i'$, observemos que $x \in V_1$ y $y \in V_2$ y además $g(V_1) \cap V_2 = \emptyset$ para toda $g \neq id$, pues si $g \notin \{g_1, \ldots, g_n\}$, como $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$ y $g(U_1) \cap U_2 = \emptyset$, y si $g = g_i$ para algún $i$, entonces $g(V_1) \subseteq U_i''$ y $V_2 \subseteq U_i'$, por lo tanto $g(V_1) \cap V_2 = \emptyset$. □

El siguiente lema nos dice que una acción propiamente discontinua de un grupo de biholomorfismos induce un espacio cociente bueno:

LEMA 1.8. *Si $G$ actúa en $X$ de forma libre y propiamente discontinua entonces $X/G$ es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x$, $y \in X$ tales que $\pi(x) \neq \pi(y)$, como $X$ es Hausdorff y localmente compacto existen vecindades abiertas ajenas $U_1$, $U_2$ de $x$ y $y$ respectivamente cuyas cerraduras son compactas. Como la acción es propiamente discontinua y $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ es compacto, $g(U_1 \cup U_2) \cap (U_1 \cup U_2) \neq \emptyset$ solamente para un número finito de $g$'s en $G$. Entonces $g(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ solo para un número finito de $g$'s en $G$, por el Lema 1.7, existen $V_1$, $V_2$ vecindades de $x$ y de $y$ tales que $g(V_1) \cap V_2 = \emptyset$. Entonces como $\pi$ es una función abierta, $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son dos abiertos ajenos vecindades, de $\pi(x)$ y $\pi(y)$. □

Como $X$ es localmente compacto, toda acción propiamente discontinua es errante, así que se sigue el siguiente corolario:

COROLARIO 1.9. *Si $G$ actúa en $X$ de forma libre y propiamente discontinua, entonces $X/G$ es una superficie de Riemann.*

Veamos una aplicación de lo anterior:

EJEMPLO 1.10. Consideremos $\Lambda := \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ el grupo de traslaciones dado por $z \mapsto z + n\omega_1 + m\omega_2$, para cada $n, m \in \mathbb{Z}$, y $w_1$, $w_2$ dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. $\Lambda$ actúa en $\mathbb{C}$ de forma libre y propiamente discontinua, por lo tanto $\mathbb{C}/\Lambda$ es una superficie de Riemann, conocida como el *toro complejo*.

Denotaremos por $\Delta$ al disco unitario en $\mathbb{C}$, el cual es conocido como el *disco de Poincaré*. Más adelante probaremos que todas las superficies de Riemann son conformemente equivalentes al cociente de la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco de Poincaré módulo un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$. La prueba se hará mediante la teoría de espacios cubrientes y suponiendo *el teorema de uniformización*. Este último, dice que esencialmente sólo hay tres superficies de Riemann simplemente conexas, $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ y $\Delta$. Una consecuencia de esto es que todas las superficies de Riemann tienen una *base numerable*.

## 3. Mapeos holomorfos

A lo largo de la sección, $R$ y $S$ denotarán superficies de Riemann con estructuras complejas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Los mapeos $f : R \to S$ se tomarán *continuos*. El siguiente lema nos muestra que basta verificar la "holomorficidad" en un atlas holomorfo.

LEMA 1.11. *$f : R \to S$ es holomorfo si y sólo si existen dos atlas complejos $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$, $\{(\psi_\beta, V_\beta)\}$ de $R$ y $S$ respectivamente, tales que si $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$, la función*

$$\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta) \tag{7}$$

*es holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el regreso. Supongamos que existen $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$, $\{(\psi_\beta, V_\beta)\}$ atlas complejos de $R$ y $S$ respectivamente, que satisfacen (7). Sean $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ y $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tales que $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, verificaremos que

$$\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V) \tag{8}$$

es holomorfo.

Sea $z \in \varphi(U \cap f^{-1}(V))$, existen $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ y $(\psi_\beta, V_\beta)$ tal que $\varphi^{-1}(z) \in U_\alpha$ y $f\varphi^{-1}(z) \in V_\beta$, entonces $z \in \varphi(f^{-1}(V_\beta \cap V) \cap (U \cap U_\alpha))$, que es una vecindad abierta de $z$ donde la función

$$\psi f \varphi^{-1} = (\psi\psi_\beta^{-1})(\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha \varphi^{-1}) \tag{9}$$

es holomorfa. Como $z$ fue arbitraria, $\psi f \varphi^{-1}$ es holomorfa en todo $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$. □

Así, las funciones holomorfas de variable compleja con valores complejos son holomorfas, vistas como mapeos entre superficies de Riemann. Los mapeos holomorfos que tienen como codominio el plano o la esfera de Riemann son de especial interés.

DEFINICIÓN 1.12. Los mapeos holomorfos de una superficie de Riemann $S$ al plano complejo son llamadas funciones holomorfas sobre $S$ y al conjunto de ellas se denota por $\mathcal{O}(S)$. Y los mapeos holomorfos a $\mathbb{C}_\infty$ son llamados funciones meromorfas sobre $S$, al conjunto de ellas es donotado por $\mathcal{M}(S)$.

Es natural preguntarse lo siguiente: ¿Cuándo existen tales funciones sobre una superficie de Riemann?. El siguiente teorema nos asegura que las superficies de Riemann *no compactas* siempre admiten funciones holomorfas *no constantes* sobre ellas:

TEOREMA 1.13. *Cualquier superficie de Riemann no compacta $S$ es Stein, es decir, se cumple lo siguiente:*

(i) *$\mathcal{O}(S)$ separa puntos, en el sentido que, dados dos puntos distintos $x$, $y$, hay una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(S)$ con $f(x) \neq f(y)$.*
(ii) *Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $S$ sin puntos de acumulación, entonces existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(S)$ con $\limsup_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$.*

La demostración de este teorema no es nada elemental, pero puede consultarse en [**12**] (Corolario 26.8, pág. 205). Por otro lado, en el caso de las superficies de Riemann compactas, es fácil notar (Corolario 1.19 de este texto) que no pueden existir funciones holomorfas no constantes definidas sobre ellas, sin embargo, sí admiten funciones meromorfas no constantes. Así mismo, este es un teorema muy profundo que necesita muchas herramientas para su demostración, las cuales no desarrollaremos en esta tesis, pero puede consultarse en el Capítulo 2 de [**11**].

Lo que resta del capítulo, lo dedicaremos a probar las propiedades básicas de los mapeos holomorfos entre superficies de Riemann.

Si $R$ y $S$ son dos conjuntos, el *igualador* de dos mapeos $f,\ g : R \to S$, de define como

$$eq(f,g) := \{p \in R | f(p) = g(p)\}. \tag{10}$$

Si $A$ es un subconjunto de un espacio topológico $S$, denotaremos por $der(A)$ al conjunto de puntos de acumulación de $A$.

Proposición 1.14. *Sean $R$ y $S$ espacios topológicos, con $S$ Hausdorff. Si $f$ y $g$ son funciones continuas de $R$ a $S$, entonces $eq(f,g)$, y por consiguiente $der(eq(f,g))$, es cerrado. Por lo tanto, $f$ y $g$ son iguales si coinciden en un conjunto denso de $R$.*

Demostración. Si $p \notin eq(f,g)$, entonces existen dos abiertos ajenos $U$, $V$ tal que $f(p) \in U$, $g(p) \in V$, entonces $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de $p$ que no intersecta a $eq(f,g)$. $\square$

El siguiente lema nos dice que $der(eq(f,g))$ es un conjunto abierto:

Lema 1.15. *Sean $f$ y $g$ dos mapeos holomorfos de $R$ a $S$. Si $p \in der(eq(f,g))$, entonces existe $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$ y $f = g$ en $U$.*

Demostración. Por la Proposición 1.14, $f(p) = g(p)$. Existe una carta $(\psi, V)$ en $\mathcal{B}$ tal que $g(p) = f(p) \in V$, por la maximalidad de $\mathcal{A}$ podemos elegir una carta $(\varphi, U)$ tal que $p \in U$ y $U \subseteq f^{-1}(V)$, entonces $\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ y $\psi g \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ son funciones holomorfas que coinciden en el conjunto $\varphi(eq(f,g) \cap U)$ con un punto de acumulación $\varphi(p)$. Por el Teorema de Identidad para funciones holomorfas con dominio un subconjunto de $\mathbb{C}$ (vea [**13**], pág. 320), se sigue que $\psi f \varphi^{-1} = \psi g \varphi^{-1}$ en $\varphi(U)$, por lo tanto $f = g$ en $U$. $\square$

La siguiente proposición nos dice que basta que dos funciones holomorfas coincidan en un conjunto con un punto de acumulación para que sean iguales:

Proposición 1.16 (Teorema de Identidad). *Sean $f,\ g$ dos mapeos holomorfos de $R$ a $S$. Si $der(eq(f,g)) \neq \emptyset$, entonces $eq(f,g) = S$.*

Demostración. El conjunto $der(eq(f,g))$ es cerrado y abierto por la Proposición 1.14 y el Lema 1.15, pero como $R$ es conexa $der(eq(f,g)) = R$ y por lo tanto $eq(f,g) = R$. $\square$

Utilizando la versión del mapeo abierto en el caso complejo, tenemos un análogo en los mapeos holomorfos entre superficies de Riemann:

Proposición 1.17 (Teorema del Mapeo Abierto). *Si $f : R \to S$ un mapeo holomorfo no constante, entonces $f$ es un mapeo abierto.*

Demostración. Sea $W$ abierto de $R$, y sea $f(p) \in f(W)$ con $p \in W$. Existe $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tal que $f(p) \in V$. Por la maximalidad de $\mathcal{A}$ podemos elegir una carta $(\varphi, U)$ tal que $p \in U$ y $U \subseteq W \cap f^{-1}(V)$, entonces la función

$$\psi f \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \tag{11}$$

es holomorfa. Por el teorema de identidad esta función no puede ser constante, entonces por el teorema del mapeo abierto para funciones holomorfas con dominio un subconjunto de $\mathbb{C}$ (vea [**15**], pág. 99), la función $\psi f \varphi^{-1}$ es abierta. Por lo tanto, $f(U) = \psi^{-1}((\psi f \varphi^{-1})(\varphi(U)))$ es abierto y $f(p) \in f(U) \subseteq f(W)$. □

Proposición 1.18 (Teorema de suprayectividad). *Sea $f : R \to S$ un mapeo holomorfo no constante, con $R$ compacta. Entonces $f$ es suprayectivo y $S$ es compacta.*

Demostración. Como $f$ es continua y $S$ es Hausdorff, $f(R)$ es cerrado. Y por el Teorema del Mapeo Abierto $f(S)$ es abierto. Así, el resultado se sigue de la conexidad de $S$. □

Tenemos como corolario que las superficies de Riemann compactas no admiten funciones holomorfas no constantes:

Corolario 1.19. *Toda función holomorfa en una superficie de Riemann compacta es constante.*

La siguiente proposición nos servirá para definir, más adelante, el concepto de grado de un mapeo entre superficies de Riemann compactas:

Proposición 1.20 (Preimagen Discreta). *Sea $f : R \to S$ un mapeo holomorfo no constante. Entonces para cualquier $y \in S$, la preimagen $f^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de $R$. En particular, si $S$ es compacta, $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito para cualquier $y \in R$.*

Demostración. Basta verificar el caso cuando $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Si $f^{-1}(y)$ tuviera un punto de acumulación, el teorema de identidad nos diría que $f$ es la función constante $y$. Por último, todo conjunto infinito en un compacto tiene un punto de acumulación, por lo tanto $f^{-1}(y)$ es finito si $R$ es compacto. □

Lema 1.21. *Sea $f$ una función holomorfa en una vecindad $U$ de $0$ en $\mathbb{C}$, no constante, con $f(0) = 0$. Existe un único entero $k \geq 1$ tal que en una vecindad $U'$ alrededor de $0$ podemos encontrar una función holomorfa $g$ con $g'(0) \neq 0$ y $f(z) = g(z)^k$ en $U'$.*

Demostración. Consideremos la expansión de $f$ en su serie de Taylor alrededor de 0, sea $k$ el orden de 0, $k \geq 1$ porque $f(0) = 0$,

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots \tag{12}$$

Entonces $f(z) = a_k z^k (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots)$, donde $b_i = a_{k+i}/a_k$. Hay una vecindad $U'$ suficientemente pequeña donde existe una función $h$ bien definida tal que $h(z) = (1 + b_1 z + \ldots)^{1/k}$. Entonces podemos tomar $g(z)$ como $a_k^{1/k} z h(z)$.

Supongamos que $f(z) = g(z)^m$, podemos suponer que $f$ no se anula en $\partial U'$, entonces el número de ceros de $f$ (contados con multiplicidad) en $U'$ (vea [**15**], pág. 97) es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U'} \frac{f(z)}{f'(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g^m(z)}{m g(z)^{m-1} g'(z)} dz = \frac{1}{2\pi i m} \int_{\partial U'} \frac{g(z)}{g'(z)} dz, \tag{13}$$

como $f(0) = 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U'} \frac{f(z)}{f'(z)} dz \neq 0, \tag{14}$$

por lo tanto $m$ es el número de ceros de $g$ en $U'$ entre el número de ceros de $f$ en $U'$ (contados con multiplicidad), esto prueba la unicidad de $k$. $\square$

DEFINICIÓN 1.22. Sea $p \in S$, diremos que la carta $(\phi, U) \in \mathcal{A}$ está centrada en $p$, si $\phi(p) = 0$.

El siguiente teorema nos dice que las funciones holomorfas entre superficies de Riemann pueden modelarse localmente por funciones de la forma $z \mapsto z^m$.

TEOREMA 1.23. *Si $f : R \to S$ es un mapeo holomorfo, para cada $p \in S$ hay un único entero $k_p \geq 1$ tal que podemos encontrar $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ centrada en $p$, y $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ centrada en $f(p)$, tal que $\psi f \varphi^{-1}(z) = z^{k_p}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la maximalidad de la estructura compleja, podemos escoger cartas $(\varphi_1, W) \in \mathcal{A}$, $(\psi, V) \in \mathcal{B}$, centradas en $p$ y $f(p)$ respectivamente, tal que $W \subseteq f^{-1}(V)$, así la función $\psi f \varphi_1^{-1} : \varphi_1(W) \to \psi(V)$ es holomorfa y satisface la condición del Lema 1.21. Entonces existe un único entero $k_p$, tal que en una vecindad $U'$ de 0 podemos encontrar una función holomorfa $g$ con $g'(0) \neq 0$, y tal que $\psi f \varphi_1^{-1}(z) = g(z)^{k_p}$. Por el teorema de la función inversa existen vecindades $U_1$ de 0 y $U_2$ de $g(0) = 0$ tal que $g$ tiene una inversa holomorfa en dicha vecindad, por lo tanto podemos definir la carta $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ centrada en $p$, donde $U = \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U')$ y $\varphi = g\varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U') \to g(U_1 \cap U')$, de tal forma que $\psi f \varphi^{-1}(z) = z^{k_p}$. $\square$

DEFINICIÓN 1.24. Sea $f : R \to S$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann. La *multiplicidad* de $f$ en $p$, denotada por $mult_p(f)$, es el único entero $k_p$ del Teorema 1.23.

Diremos que las cartas $(\varphi, U)$ y $(\psi, V)$ ponen a $f$ en su *forma normal* si en la expresión local $f$ es de la forma $z \mapsto z^m$.

COROLARIO 1.25. *Si un mapeo biyectivo $f : R \to S$ entre dos superficies de Riemann es holomorfo, entonces su inversa $f^{-1}$ también es holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $f$ es una función abierta, $f^{-1}$ también es continua. Consideremos los atlas $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ que consisten de las cartas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, que satisfacen las condiciones del teorema anterior. Entonces para cada $q \in S$ existen cartas $(\varphi, U) \in \mathcal{A}'$, $(\psi, V) \in \mathcal{B}'$, tales que $q \in V$ y $f^{-1}(q) \in U$ tal que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^k. \tag{15}$$

Como $f$ es inyectiva $k$ tiene que ser 1, así $\varphi f^{-1} \psi^{-1}(z) = z$ es holomorfa. Por lo tanto, $f^{-1}$ es holomorfa. $\square$

Capítulo 2

# Curvas algebraicas

Para verificar que la curva de Fermat de grado $n$ es una superficie de Riemann compacta, es necesario estudiar objetos un poco más generales conocidos como curvas algebraicas afines y proyectivas sobre $\mathbb{C}$. En la primera sección demostraremos el teorema de la función implícita, que nos permitirá dotar de una estructura compleja a las curvas algebraicas afines suaves. Utilizaremos un teorema que nos asegura que los ceros de un polinomio irreducible es conexo, para probar que los ceros de un polinomio irreducible y no singular definen una superficie de Riemann. En la segunda sección se estudia la topología del plano proyectivo complejo; por ejemplo, se demuestra que es conexo, normal, segundo numerable y compacto. Además se prueba que puede cubrirse por tres abiertos que son copias de $\mathbb{C}^2$. Finalizamos el capítulo demostrando que las curvas algebraicas proyectivas son superficies de Riemann compactas, si el polinomio homogéneo que los genera es no singular.

## 1. Curvas algebraicas afines

Sea $U$ una región del plano complejo, y sea $f$ una función holomorfa en $U$. La gráfica de $f$:

$$G_f := \{(z, f(z)) | z \in U\}, \tag{16}$$

con la topología inducida de $\mathbb{C}^2$ es homeomorfa a $U$, mediante el homeomorfismo dado por la proyección en la primera entrada: $\pi_1 : G_f \to U$, $(z, f(z)) \mapsto z$. Así, $G_f$ es Hausdorff, conexa y con un atlas holomorfo dado por $\{(\pi_1, G_f)\}$. Análogamente, el conjunto $G'_f := \{(f(z), z) | z \in U\}$ también es una superficie de Riemann, con atlas holomorfo dado por $\{(\pi_2, G'_f)\}$, donde $\pi_2 : G'_f \to U$ es la proyección en la segunda entrada: $(f(z), z) \mapsto z$. Hay espacios que localmente son la gráfica de una función, usando lo anterior es posible darle una estructura compleja a dichos espacios. Un ejemplo muy importante de ellos son las curvas algebraicas afines suaves, que son los ceros en $\mathbb{C}^2$ de un polinomio $f \in \mathbb{C}[z, w]$, que denotaremos por $V(f) := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 | f(a, b) = 0\}$, tal que en cada uno de sus puntos alguna de las parciales es distinta de cero.

Teorema 2.1 (Teorema de la función implícita). *Supongamos que $(a, b) \in V(f(z, w))$ tal que $\partial f / \partial w$ no se anula en $(a, b)$. Entonces existe un disco $D_1$ centrado en $a$, un disco $D_2$ centrado en $b$ y un mapeo holomorfo $\phi : D_1 \to D_2$ con $\phi(a) = b$ tal que*

$$V(f) \cap (D_1 \times D_2) = \{(z, \phi(z)) | z \in D_1\}. \tag{17}$$

Demostración. Recordemos que si $f$ es una función holomorfa en una región contenida en la cerradura de un disco $D$, que no se anula en $\partial D$, entonces el número de ceros de $f$ en $D$, contados con multiplicidad, está dada por la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(w)}{f(w)}dw. \tag{18}$$

Si sólo hay un cero $w_1$ de $f$ en $D$, entonces $w_1$ queda determinado por la integral

$$w_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{wf'(w)}{f(w)}dw. \tag{19}$$

Para cada $z$ definimos la función $f_z(w) = f(z,w)$. Como $\partial f/\partial w \neq 0$ en $(a,b)$, $f_a'$ no se anula en $b$. Por el teorema de la función inversa, existe un disco $D_2$ centrado en $b$, tal que $b$ es el único cero de $f$ en la cerradura de $D_2$. Puesto que la cerradura de $D_2$ es compacta, existe una $\epsilon > 0$ tal que $|f_a| > 2\epsilon$ en $\partial D_2$. Por la continuidad de $f$, existe $\delta$ tal si $|z-a| < \delta$, $|f_z(w) - f_a(w)| < \epsilon$ para toda $w \in \partial D_2$, entonces $|f_z| > \epsilon$ en $\partial D_2$. Aplicando la fórmula (18) a la función $f_z$ para cada $z$, se tiene que

$$h(z) := \int_{\partial D_2}\frac{f_z'(w)}{f_z(w)}dw, \tag{20}$$

es una función continua, luego, existe $\delta'$ tal que si $|z-a| < \delta'$, $|h(z)-h(a)| < 1$, pero como $h$ sólo toma valores enteros, se sigue que para $z \in D(a,\delta')$, $h(z) = h(a) = 1$, entonces podemos aplicar la fórmula (19) a cada $f_z$, obteniendo

$$\phi(z) := \int_{\partial D_2}\frac{wf_z'(w)}{f_z(w)}dw. \tag{21}$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann la función $\phi : D_1 \to D_2$ es holomorfa y satisface (17), donde $D_1 = D(a,\delta')$. $\square$

Se cumple un resultado análogo si la parcial $\partial f/\partial z$ no se anula en $(a,b)$, es decir, existirían discos $D_1$ y $D_2$ alrededor de $a$ y $b$ respectivamente, y una función holomorfa $\psi : D_2 \to D_1$ tal que $\psi(b) = a$ y

$$V(f) \cap (D_1 \times D_2) = G_\psi'. \tag{22}$$

Entonces si en cada punto de $V(f)$ alguna de las parciales de $f$ es distinta de cero, $V(f)$ localmente es la gráfica de alguna función.

Definición 2.2. Una *curva plana afín* es un conjunto de la forma $V(f)$, para algún $f \in \mathbb{C}[z,w]$. La curva plana afín $V(f)$ es suave si $\partial f/\partial z$ o $\partial f/\partial w$ es distinta de cero en cada punto de $V(f)$.

Sea $V(f)$ una curva plana afín suave y un punto $p = (a,b) \in V(f)$, como $V(f)$ es suave existen discos $D_1$ y $D_2$ alrededor de $a$ y $b$, respectivamente, tal que

$$V(f) \cap (D_1 \times D_2) = G_\phi \quad \text{o} \quad V(f) \cap (D_1 \times D_2) = G_\psi' \tag{23}$$

para alguna función holomorfa $\phi : D_1 \to D_2$ con $\phi(a) = b$ ó $\psi : D_2 \to D_1$ con $\psi(b) = a$. Entonces $(\pi_1, G_\phi)$ o $(\pi_2, G_\psi')$ es una carta alrededor de $p$. Tomemos dos de estas cartas alrededor de un punto $p \in V(f)$; si las dos cartas se obtienen de $\pi_1$, es decir, son de la forma $(\pi_1, G_\phi)$ y $(\pi_1, G_{\phi'})$, la composición $\pi_1\pi_1^{-1}$ es la identidad en $\pi_1(G_\varphi \cap G_{\varphi'})$, se sigue algo análogo cuando las dos cartas se obtienen de $\pi_2$. Sólo nos queda el caso cuando las cartas son de la forma $(\pi_1, G_\phi)$ y $(\pi_2, G_\psi')$, entonces $\pi_2\pi_1^{-1} : \pi_1(G_\phi \cap G_\psi') \to \pi_2(G_\phi \cap G_\psi')$ es igual al mapeo $z \mapsto \phi(z)$ en tal dominio; similarmente, $\pi_1\pi_2^{-1}$ es igual al mapeo $z \mapsto \psi(z)$ en $\pi_2(G_\phi \cap G_\psi')$. Por lo tanto, los cambios de coordenadas son holomorfos. Para que $V(f)$ sea conexo es necesaria una condición sobre el polinomio $f$. Esta condición viene dada en el siguiente teorema, que no demostraremos aquí porque requiere maquinaria de geometría algebraica (vea [**16**], pág 18, y sección 9.5).

Teorema 2.3. *Si $f \in \mathbb{C}[z, w]$ es irreducible, entonces $V(f)$ es conexo.*

Resumimos la discusión anterior en el siguiente teorema:

Teorema 2.4. *Si $f \in \mathbb{C}[z, w]$ es irreducible y $V(f)$ es suave, entonces $V(f)$ es una superficie de Riemann.*

## 2. Topología del plano proyectivo

Esta sección está dedicada a probar que el plano proyectivo complejo es conexo, segundo numerable, compacto y normal[1] abierta finita tal que cada abierto es homeomorfo a $\mathbb{C}^2$. El grupo multiplicativo de los complejos, $\mathbb{C}^*$, actúa en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ (o en general en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$) por multiplicación: $(\lambda, p) \mapsto \lambda p$. Definimos al *plano proyectivo complejo* como el cociente de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ bajo esta acción:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^2 := \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*. \tag{24}$$

Consideremos la proyección natural $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2$, denotaremos por $[a : b : c]$ a $\pi(a, b, c)$ y supondremos que el plano proyectivo complejo esta dotado con la topología cociente.

Como la acción por multiplicación es una acción por homeomorfismos, $\pi$ es abierta, por lo tanto $\mathbb{P}^2$ es segundo numerable y conexo. Observemos que $\mathbb{P}^2$ también se puede obtener como el cociente de $\mathbb{S}^5$ por $\mathbb{S}^1$, donde la acción está dada también por multiplicación, así $\mathbb{P}^2$ es compacto. El hecho de que $\mathbb{P}^2$ es un espacio normal, se sigue de los dos lemas siguientes (para la prueba del Lema 2.5 vea [**17**] Lema 73.3, pág. 443).

Lema 2.5. *Sea $\pi : E \to X$ un mapeo cociente cerrado. Si $E$ es normal entonces $X$ también lo es.*

Lema 2.6. *El mapeo cociente $\pi : \mathbb{S}^5 \to \mathbb{P}^2$ es cerrado.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{S}^5$ un subconjunto cerrado, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \mathbb{S}^1 \cdot A = \{g \cdot v : v \in A,\ g \in \mathbb{S}^1\}. \tag{25}$$

Luego $\pi^{-1}(\pi(A))$ es la imagen de un subconjunto cerrado $\mathbb{S}^1 \times A$ en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^5$ bajo la multiplicación que es un mapeo continuo

$$\cdot : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^5 \to \mathbb{S}^5. \tag{26}$$

Puesto que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^5$ es compacto, $\mathbb{S}^1 \times A$ es compacto, por lo tanto $\pi^{-1}(\pi(A))$ es compacto, pero como $\mathbb{S}^5$ es Hausdorff, $\pi^{-1}(\pi(A))$ es cerrado. Por lo tanto $\pi$ es una función cerrada. □

Como en $\mathbb{P}^2$ los puntos son cerrados, ya que las rectas complejas menos el cero son cerradas en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, se sigue el siguiente corolario:

Corolario 2.7. *$\mathbb{P}^2$ es un espacio topológico Hausdorff.*

[1] Un espacio topológico es normal para cualquiera par de cerrados $A$ y $B$ existen vecindades ajenas $U$ y $V$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Notemos que $\mathbb{P}^2$ puede ser cubierto por los siguientes conjuntos

$$U_i = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_i \neq 0\} \quad \text{con} \quad i = 0, 1, 2. \tag{27}$$

Puesto que $\pi^{-1}(U_i) = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 | z_i \neq 0\}$, cada $U_i$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{P}^2$.

Proposición 2.8. *Cada $U_i$, con $i = 0, 1, 2$, es homeomorfa a $\mathbb{C}^2$.*

Demostración. Tenemos una función bien definida $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^2$ dado por $[x, y, z] \mapsto (y/x, z/x)$, esta función es biyectiva, con inversa $\phi_0^{-1} : \mathbb{C}^2 \to U_0$ dada por $(a, b) \mapsto [1, a, b]$, este mapeo es continuo porque se obtiene de la composición $(a, b) \mapsto (1, a, b) \mapsto [1 : a : b]$. El mapeo continuo $\bar{\phi}_0 : \pi^{-1}(U_0) \to \mathbb{C}^2$, $(a, b, c) \mapsto (b/a, c/a)$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\bar{\phi}_0"'] & U_0 \arrow[d, "\phi_0"] \\ & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd} \tag{28}$$

Observemos que $\pi : \pi^{-1}(U_0) \to U_0$ es un mapeo cociente, entonces por la *propiedad universal del cociente*, $\phi_0$ es continua. Similarmente se prueba que $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}^2$, dado por $[x : y : z] \mapsto (x/y, z/y)$, y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{C}^2$, dado por $[x : y : z] \mapsto (x/z, y/z)$, son homeomorfismos. □

## 3. Curvas algebraicas proyectivas

En esta sección probaremos que las curvas algebraicas proyectivas dadas por polinomios homogéneos no singulares son superficies de Riemann compactas.

Definición 2.9. Un polinomio $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado $d$, es *homogéneo* si para toda $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z). \tag{29}$$

Por ejemplo $F(x, y, z) = x^n + y^n - z^n$ es un polinomio homogéneo de grado $n$. Observemos que si $F$ es un polinomio homogéneo, $F(a, b, c) = 0$ si y sólo si $F(x, y, z) = 0$ para toda $(x, y, z) \in [a : b : c]$. Entonces el siguiente conjunto está bien definido.

$$V(F) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 | F(x, y, z) = 0\}, \tag{30}$$

y es llamado la *curva algebraica proyectiva* asociada a $F$. Así, $V(F)$ es un subespacio Hausdorff de $\mathbb{P}^2$. Además, observemos que $\pi^{-1}(V(F)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\} | F(x, y, z) = 0\} = F^{-1}\{0\} \setminus \{\bar{0}\}$ es cerrado, por lo tanto, $V(F)$ es cerrado en el compacto $\mathbb{P}^2$. Así, $V(F)$ es compacto.

Definición 2.10. Un polinomio homogéneo $F(x, y, z)$ es *no singular* si no hay solución para el sistema de ecuaciones

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{31}$$

en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, es decir, si no hay soluciones no nulas del sistema (31) en $\mathbb{C}^3$.

Cada intersección $V_i(F) = V(F) \cap U_i$ es homeomorfo a una curva algebraica plana,

$$V_0(F) \cong V(F(1,y,z)) \quad V_1(F) \cong V(F(x,1,z)) \quad V_2(F) \cong V(F(x,y,1)) \tag{32}$$

donde los homeomorfismos están dados por la restricción de cada $\phi_i$, dados en la la Proposición 2.8. Identificaremos a $V_i(F)$ con su curva algebraica afín asociada.

LEMA 2.11. *Supongamos que $F(x,y,z)$ es un polinomio homogéneo de grado $d$. Entonces $F$ es no singular si y sólo si cada $V_i(F)$ es una curva algebraica afín suave.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $V_0(F)$ no es suave, entonces existe una solución $(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^2$ del sistema de ecuaciones

$$f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{33}$$

donde $f(y,z) := F(1,y,z)$. Afirmamos que $[1 : y_0 : z_0]$ es una solución común al sistema (31). Claramente $[1 : y_0 : z_0]$ satisface el sistema

$$F = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{34}$$

La otra parcial es igual a cero por la fórmula de Euler:

$$d \cdot F = x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{35}$$

Podemos aplicar un razonamiento análogo en los otros casos cuando $V_1(F)$ ó $V_2(F)$ no sean suaves. La otra implicación sigue la misma línea de razonamiento. □

Un polinomio $f \in \mathbb{C}[y,z]$ de grado $d$ se puede descomponer en polinomios homogéneos $f_{(i)}$ de grado $i$,

$$f = f_{(0)} + \ldots + f_{(d)}. \tag{36}$$

Entonces el polinomio

$$F(x,y,z) = x^d f_{(0)} + x^{d-1} f_{(1)} + \ldots + f_{(d)} \tag{37}$$

es un polinomio homogéneo de grado $d$, tal que $F(1,y,z) = f$. Observemos que $F(x,y,z) = x^d f(y/x, z/x)$. $F$ es conocido como la *homogeneización* de $f$.

LEMA 2.12. *Si $f \in \mathbb{C}[x,y]$ de grado $d$ y $F$ es la homogeneizacion de $f$, entonces $f$ es irreducible si y sólo si $F$ es irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f$ es reducible, entonces $f = gh$ donde $g$ y $h$ son de grado mayor o igual a uno. Entonces $F = GH$, donde $F$, $G$ y $H$ son las homogenizaciones respectivas de $f$, $g$ y $h$ respectivamente. Comparando su descomposición en polinomios homogéneos podemos ver que $G$ y $H$ también son homogéneos de grado mayor o igual que uno. Entonces $F$ es reducible. Recíprocamente si $F = GH$, entonces $f(y,z) = F(1,y,z) = G(1,y,z)H(1,y,z)$. □

TEOREMA 2.13. *Todo polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[x,y,z]$ no singular es irreducible.*

Sólo daremos un esbozo de la demostración. Supongamos que $F = F_1F_2$ es reducible. Sean $C_i$ sus curvas algebraicas asociadas, del teorema de Bézout ([**16**] pág. 31) se sigue que existe $p \in C_1 \cap C_2$, se puede verificar que $p$ es un punto singular de $F$.

Así, si $F$ es un polinomio homogéneo, por el Teorema 2.11 en [**18**] pág. 66, $V(F)$ es conexo.

El resto de la sección la dedicaremos a construir un atlas holomorfo sobre $V(F)$. Observe que si $F$ es un polinomio no singular cada una de las $\phi_i(V_i(F))$ es una superficie de Riemann. Como $V_i(F)$ es homeomorfo a $\phi_i(V_i(F))$, podemos transferir, mediante el mapeo $\phi_i$, la estructura compleja de $\phi(V_i(F))$ a $V_i(F)$. Como $V_i(F)$ es un abierto de $V(F)$, las cartas de $V_i(F)$ serán cartas de $V(F)$. Por ejemplo, para $V_0(F)$ las cartas son de la forma $[x : y : z] \mapsto y/x$ o $[x : y : z] \mapsto z/x$ con dominios adecuados. Se obtienen cocientes similares en las cartas de $V_1(F)$ y de $V_2(F)$.

Verificaremos que los cambios de coordenadas son holomorfos. Sea $p \in V_0(F) \cap V_1(F)$, $p = [x : y : z]$ con $x, y \neq 0$. Supongamos que $\phi_0 = y/x$ es una carta alrededor de $p$ para $V_0(F)$, y $\phi_1 = z/y$ es una carta alrededor de $p$ para $V_1(F)$. Ahora $\phi_0^{-1}(w) = [1 : w : h(w)]$ para alguna función holomorfa $h$ (localmente $\phi_0(V_0(F))$ es la gráfica de $h$). Entonces $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(w) = h(w)/w$ que es holomorfo pues $w \neq 0$. Se sigue un razonamiento análogo para las demás $V_i(F)$. Resumiendo los resultados anteriores tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.14. *Si $F$ es un polinomio homogéneo no singular. Entonces la curva algebraica proyectiva $V(F)$ es una superficie de Riemann compacta.*

Capítulo 3

# Espacios cubrientes

En este capítulo estudiaremos a los cubrientes holomorfos de las superficies de Riemann. Demostraremos, con la ayuda de la teoría de espacios cubrientes topológicos (ver Sección 1.3 en [**19**]), que toda superficie de Riemann tiene un único cubriente holomorfo simplemente conexo (cubriente universal); además probaremos que los levantamientos a cubrientes holomorfos son holomorfos. Y mediante el *teorema de uniformización* demostraremos que cualquier superficie de Riemann es conformemente equivalente a un cociente $R/G$, donde $R$ es, o bien la esfera de Riemann, el plano complejo o el disco, y $G$ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ que actúa en $R$ de forma libre y propiamente discontinua.

## 1. Cubrientes holomorfos

Recordemos que un *espacio cubriente* de un espacio $X$, es un espacio $\widetilde{X}$ y un mapeo $p : \widetilde{X} \to X$ suprayectivo que satisface la siguiente condición: Existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de $X$ tal que para cada $\alpha$, $p^{-1}(U_\alpha)$ es una unión disjunta de subconjuntos abiertos de $\widetilde{X}$, cada uno de los cuales es mapeado homeomorficamente por $p$. De la definición se sigue directamente que $p : \widetilde{X} \to X$ es continua, un homeomorfismo local, abierta y sus fibras $p^{-1}(x)$ son discretas. Además $\widetilde{X}$ es Hausdorff, si $X$ lo es. Denotaremos por $G(\widetilde{X})$ o simplemente por $G$, cuando no se preste a confusión, al grupo de automorfismos del cubriente. Recordemos que un homeomorfismo $g : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, es un automorfismo del cubriente $p : \widetilde{X} \to X$, si manda fibras en fibras, es decir, si hace conmutar el siguiente diagrama:

(38)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

Nosotros estamos interesados en cubrientes en los cuales el espacio es una superficie de Riemann y el mapeo $p$ es holomorfo:

Definición 3.1. Si $X$ es una superficie de Riemann, un *espacio cubriente holomorfo* de $X$, es un espacio cubriente $p : \widetilde{X} \to X$, tal que $\widetilde{X}$ es una superficie de Riemann y $p$ es un mapeo holomorfo.

El siguiente Lema es consecuencia directa del Corolario 1.25:

Lema 3.2. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente holomorfo y $U$ una región (subconjunto abierto y conexo) de $\widetilde{X}$, tal que $p : U \to p(U)$ es un homeomorfismo, entonces $p : U \to p(U)$ es un biholomorfismo.*

La siguiente proposición es la herramienta principal que utilizaremos posteriormente, se obtiene de observar que los mapeos cubrientes son biholomorfismos locales:

PROPOSICIÓN 3.3. *Si* $p : \widetilde{X} \to X$ *es un cubriente holomorfo de* $X$ *y* $f : Y \to X$ *un mapeo holomorfo, entonces los levantamientos de* $f$ *con respecto a* $p$ *son holomorfos. Y un levantamiento holomorfo existe si* $f_*(\pi_1(Y, y)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$, *donde* $f(y) = p(\widetilde{x})$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que hay un atlas holomorfo $\mathcal{B}$ de $\widetilde{X}$ tal que para cada $(\psi, V) \in \mathcal{B}$, $V$ es conexa y $p : V \to p(V)$ es un homeomorfismo. Sean $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, una carta de $Y$, y $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tales que $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$. Como $f(\widetilde{f}^{-1}(V) \cap U) \subseteq p(V)$, se sigue que $\widetilde{f} = p^{-1} f$ en $\widetilde{f}^{-1}(V) \cap U$. Además, por el Lema 3.2 se tiene que $p : V \to p(V)$ es un biholomorfismo, entonces $\psi \widetilde{f} \varphi^{-1} = \psi p^{-1} f \varphi^{-1}$ es holomorfo en $\varphi(\widetilde{f}^{-1}(V) \cap U)$. La segunda afirmación se sigue de la versión topológica y de la primera afirmación. □

El siguiente corolario nos dice que los automorfismos de un cubriente holomorfo son biholomorfismos:

COROLARIO 3.4. *Si* $p : \widetilde{X} \to X$ *es un espacio cubriente holomorfo de* $X$, *entonces los elementos de* $G(\widetilde{X})$ *son holomorfos.*

Todos los cubrientes holomorfos y simplemente conexos de una superficie de Riemann son isomorfos:

PROPOSICIÓN 3.5. *Si* $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ *son dos cubrientes universales y holomorfos, entonces* $\widetilde{X}_1$ *es conformemente equivalente a* $\widetilde{X}_2$.

DEMOSTRACIÓN. Por ser cubrientes universales existe $f : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ un isomorfismo de espacios cubrientes, aplicando la Proposición 3.3 a $f$ y a $f^{-1}$ se sigue el resultado. □

A continuación probaremos que de hecho, siempre existe un cubriente holomorfo simplemente conexo para cualquier superficie de Riemann:

PROPOSICIÓN 3.6. *Toda superficie de Riemann* $X$ *tiene un cubriente universal holomorfo.*

DEMOSTRACIÓN. Como toda superficie de Riemann es conexa por trayectorias, localmente conexa por trayectorias y semilocalmente simplemente conexa, existe un cubriente universal (topológico) de $X$, $p : \widetilde{X} \to X$. Tenemos que $\widetilde{X}$ es conexo, y por ser $X$ Hausdorff, $\widetilde{X}$ también lo es. Por eso, sólo resta dar una estructura compleja a $\widetilde{X}$ y verificar que el mapeo cubriente resulta holomorfo.

Por la maximalidad de la estructura compleja de $X$ y por ser $p : \widetilde{X} \to X$ un homeomorfismo local podemos suponer, para cada $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, que existe un abierto $U_{\widetilde{x}}$ tal que $p : U_{\widetilde{x}} \to p(U_{\widetilde{x}})$ es un homeomorfismo y $(\varphi_{\widetilde{x}}, p(U_{\widetilde{x}}))$ es una carta de $X$. Afirmamos que $\{(\varphi_{\widetilde{x}} p, U_{\widetilde{x}})\}$ es un atlas holomorfo de $\widetilde{X}$. Basta ver que son compatibles. Sean $(\varphi_1 p, U_1)$, $(\varphi_2 p, U_2)$ dos cartas tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. $\varphi_1 p(U_1 \cap U_2) \subseteq \varphi_1(p(U_1))$, entonces en $\varphi_1 p(U_1 \cap U_2) \subseteq \varphi_1(p(U_1))$, $(\varphi_2 p)(\varphi_1 p)^{-1} = \varphi_2 \varphi_1^{-1}$ es holomorfa.

Sean $(\varphi_1 p, U_1)$, $(\varphi_2, U_2)$ cartas de $\widetilde{X}$ y $X$, respectivamente, tales que $p^{-1}(U_2)\cap U_1 \neq \emptyset$, $\varphi_1 p(p^{-1}(U_2)\cap U_1) = \varphi_1(U_2 \cap p(U_1)) \subseteq \varphi_1(p(U_1))$, entonces en $\varphi_1 p(p^{-1}(U_2)\cap U_1)$, $\varphi_2 p(\varphi_1 p)^{-1} = \varphi_2\varphi_1^{-1}$ es holomorfa. Por lo tanto $p$ es holomorfa. $\square$

Proposición 3.7. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente holomorfo, entonces $G(\widetilde{X})$ actúa en $\widetilde{X}$ de forma libre y errante.*

Demostración. La acción es libre por la unicidad de los levantamientos (con respecto a los puntos bases), al ser $\widetilde{X}$ conexo. Si $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, existe una vecindad abierta $U$ de $\widetilde{x}$ tal que $p : U \to p(U)$ es un homeomorfismo. Supongamos que $gU \cap U \neq \emptyset$, entonces existe $u \in U$ tal que $gu \in U$, como $p(g(u)) = p(u)$ y $p$ es inyectiva en $U$, $gu = u$, entonces $g = e$. Por lo tanto la acción es libre y errante. $\square$

Se puede verificar que si $p : \widetilde{X} \to X$ es un *cubriente normal*, el mapeo $G\widetilde{x} \mapsto p(\widetilde{x})$ establece un homeomorfismo de $\widetilde{X}/G$ a $X$, por lo tanto $\widetilde{X}/G$ es Hausdorff si $X$ lo es. Si el cubriente también es holomorfo, se sigue del Teorema 1.6 que $\widetilde{X}/G$ es una superficie de Riemann.

Teorema 3.8. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es un espacio cubriente normal y holomorfo, entonces $\widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ es conformemente equivalente a $X$.*

Demostración. Sabemos que el mapeo $F : \widetilde{X}/G \to X$, dado por $G\widetilde{x} \mapsto p(\widetilde{x})$ es un homeomorfismo. Daremos un atlas holomorfo que lo hace localmente holomorfo. Podemos encontrar un atlas holomorfo $\mathcal{A}$ de $\widetilde{X}/G$ tal que para cada carta $(\varphi\pi^{-1}, \pi(U)) \in \mathcal{A}$, $p : U \to p(U)$ es un homeomorfismo, donde $(U, \varphi)$ es alguna carta de $\widetilde{X}$ con $U$ conexo y $\pi : U \to \pi(U)$ es un homeomorfismo. Sea $(\varphi\pi^{-1}, \pi(U)) \in \mathcal{A}$, y sea $(\psi, V)$ carta en $X$, tales que $F^{-1}(V)\cap\pi(U) \neq \emptyset$. Observemos que en $\pi(U)$ $F = p\pi^{-1}$, entonces en $(\varphi\pi^{-1})(F^{-1}(V)\cap\pi(U)) = \varphi(p^{-1}(V)\cap U)$, la función $\psi F(\varphi\pi^{-1})^{-1} = \psi F\pi\varphi^{-1} = \psi p\pi^{-1}\pi\varphi^{-1} = \psi p\varphi^{-1}$ es holomorfa. Por lo tanto $\widetilde{X}/G(\widetilde{X})$ es conformemente equivalente a $X$. $\square$

El siguiente teorema es uno de los más importantes de las matemáticas, no lo demostraremos en este trabajo, pero puede consultarse en [**11**] en el capítulo 2.

Teorema 3.9 (Uniformización). *Si $X$ es una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces $X$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ o a $\Delta$.*

Proposición 3.10. *Si $G$ es un grupo de biholomorfismos de una superficie de Riemann $X$, entonces el espacio cociente $X/G$ es Hausdorff y el mapeo $\pi : X \to X/G$ es un cubriente si y sólo si $G$ actúa de forma libre y propiamente discontinua.*

Demostración. El regreso se sigue del Lema 1.8 y de la Proposicion 1.40 en [**19**]. Supongamos que $X/G$ es Hausdorff y que la proyección $\pi : X \to X/G$ es un mapeo cubriente. Veamos que para cualquier par de puntos $(x_1, x_2) \in X \times X$, existen vecindades $U_1$ de $x_1$ y $U_2$ de $x_2$ tales que $g(U_1)\cap U_2 \neq \emptyset$ para a lo más una $g \in G$, si $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ se sigue el resultado al ser $X/G$ Hausdorff. Si $x_1 = g(x_2)$, tomemos $U_1$ una vecindad de $x_1$ que es mapeado homemórficamente por $\pi$ a $X/G$, y $U_2 := g(U_1)$. Si $g'(U_1)\cap U_2 \neq \emptyset$, $g^{-1}g'(U_1)\cap U_1 \neq \emptyset$, entonces $\pi g^{-1}g'(p) = \pi(p)$ para algún $p \in U_1$, entonces $g^{-1}g'(p) = p$, por lo tanto $g' = g$.

Ahora sea $K$ un compacto de $X$. Puesto que $K \times K$ es compacto hay una cubierta finita de $K \times K$ de vecindades de la forma $U_1 \times U_2$ tales que $gU_1 \cap U_2$

es vacío, para a lo más una $g \in G$. Por lo tanto el conjunto de $g \in G$ tales que $gK \cap K \neq \emptyset$ es finito, ya que si $x \in gK \cap K$, $(g^{-1}x, x) \in U_1 \times g(U_1) =: U_1 \times U_2$ para algún $U_1$. □

Teorema 3.11. *Toda superficie de Riemann $X$ tiene como cubriente universal holomorfo a $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ o a $\Delta$. Además, $X$ es conformemente equivalente al cociente de alguno de ellos módulo un subgrupo de $PSL(2,\mathbb{C})$ que actúa en él de forma libre y propiamente discontinua.*

Demostración. Supongamos que $R$ denota a $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ o a $\Delta$. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubriente universal holomorfo de $X$. Por el Teorema 3.9 existe un biholomorfismo $f : \widetilde{X} \to R$, entonces $pf^{-1} : R \to X$, es un cubriente normal y holomorfo, así, del Teorema 3.8 se sigue que $R/G(R)$ es conformemente equivalente a $X$. Veremos en la siguiente sección que los automorfismos holomorfos de $R$ son un subgrupo de $PSL(2,\mathbb{C})$. Como $\pi : R \to R/G(R)$ es un cubriente normal y conexo con $R/G(R)$ Hausdorff se sigue de la Proposición 3.10 que la acción es libre y propiamente discontinua. □

Puesto que la esfera, el plano y el disco tienen una base numerable, se tiene que el cociente por un grupo de biholomorfismos de estos objetos, también tiene una base numerable. Así, tenemos del Teorema 3.11 el siguiente corolario:

Corolario 3.12. *Toda superficie de Riemann tiene una base numerable.*

## 2. Los tres cubrientes universales

Vimos en la sección anterior que los únicos cubrientes universales holomorfos de las superficies de Riemann son: la esfera de Riemann, el plano complejo y el disco de Poincaré. Esta sección se dedica a estudiar los autormorfismos holomorfos de estos tres espacios, que como mencionamos, son subgrupos de las transformaciones de Möbius denotado por $PSL(2,\mathbb{C})$.

Como consecuencia, probaremos que la esfera solamente puede cubrir a ella misma, que el plano cubre o bien al plano mismo, al plano agujerado o al toro; y por lo tanto toda superficie de Riemann compacta de género mayor que uno tiene como cubriente universal al disco.

Lema 3.13. *Las funciones meromorfas sobre $\mathbb{C}_\infty$ son las funciones racionales.*

Demostración. Claramente las funciones racionales son meromorfas sobre $\mathbb{C}_\infty$. Sea $f$ una función meromorfa sobre $\mathbb{C}_\infty$, puesto que $f$ tiene un número finito de polos en $\mathbb{C}$, digamos $\beta_1, \ldots, \beta_s$ de orden $n_1, \ldots, n_s$ respectivamente. Entonces la función

$$g(z) = (z-\beta_1)^{n_1}(z-\beta_2)^{n_2} \cdots (z-\beta_s)^{n_s} f(z) \tag{39}$$

es analítica en $\mathbb{C}$, así $g$ tiene una serie de Taylor

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{40}$$

para toda $z \in \mathbb{C}$ ([**9**], pág. 177). Como $g$ es meromorfa en $\infty$ (ya que $f$ lo es), se sigue que $g(1/z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots$ es meromorfa en 0, y entonces $a_j = 0$ a partir de una cierta $j$. Entonces $g$ es polinomio, por lo tanto

$$f(z) = g(z)(z-\beta_1)^{-n_1} \cdots (z-\beta_s)^{-n_s} \tag{41}$$

es una función racional. □

TEOREMA 3.14. *El conjunto de automorfismos holomorfos de* $\mathbb{C}_\infty$ *es igual a* $PSL(2, \mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in Aut(\mathbb{C}_\infty)$, por lema anterior $f$ es una función racional, pero como $f$ tiene sólo un polo y un cero, $f \in PSL(2, \mathbb{C})$. □

TEOREMA 3.15. *El conjunto de automorfismos holomorfos de* $\mathbb{C}$ *es igual al subgrupo de* $PSL(2, \mathbb{C})$ *que tiene por elementos a las transformaciones de la forma* $az + b$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in Aut(\mathbb{C})$, veamos que $f$ se extiende de forma holomorfa a la esfera de Riemann. Definamos $f(\infty) = \infty$, como $f$ es propia (la preimagen inversa de un conjunto compacto es compacto), se sigue que $f$ es continua en $\infty$, y por el Teorema de extensión de Riemann se sigue que $f$ es holomorfa en $\infty$. Así, por el Teorema 3.14, $f \in PSL(2, \mathbb{C})$; pero como $f$ fija a $\infty$, $f(z) = az + b$. □

TEOREMA 3.16. *El conjunto de automorfismos del disco de Poincaré* $\Delta$ *es igual al subgrupo de* $PSL(2, \mathbb{C})$ *que tiene por elementos a las transformaciones de la forma*

$$\frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}. \tag{42}$$

DEMOSTRACIÓN. Se puede verificar que los mapeos de la forma (42) forman un subgrupo $G$ de $Aut(\Delta)$. Sea $g \in Aut(\Delta)$, así $|g(0)| < 1$. Existen $a, \ c \in \mathbb{C}$ tales que

$$g(0) = -\tfrac{\bar{c}}{a}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1. \tag{43}$$

Definamos $f$ como en (42). Entonces $h = fg \in Aut(\Delta)$ y $h(0) = 0$. Por Lema de Schwarz ([**20**], pág. 70-71) , $|h(z)| \leq |z|$, aplicando lo mismo a $h^{-1}(z)$ en $h(z)$, se sigue que $h(z) = e^{i\theta} z$ para alguna constante real $\theta$, por lo tanto $g \in f^{-1}h \in G$. □

TEOREMA 3.17. *Si* $X$ *tiene como cubriente universal holomorfo a* $\mathbb{C}_\infty$*, entonces* $X = \mathbb{C}_\infty$.

Esto se sigue directamente del hecho que todo automorfismo de $\mathbb{C}_\infty$ tiene al menos un punto fijo.

LEMA 3.18. *Los elementos de* $PSL(2, \mathbb{C})$ *sin puntos fijos en* $\mathbb{C}$ *son las traslaciones.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T(z) = az + b/cz + d$ una transformación de Möbius sin puntos fijos en el plano, entonces $\infty$ es un punto fijo, por lo tanto $c = 0$, pero si $a \neq d$, $b/(d - a) \in \mathbb{C}$ es un punto fijo de $T$, por lo tanto $T$ es una traslación. □

Vamos a identificar al grupo de traslaciones con $\mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 3.19. *Un grupo de traslaciones que actúa de forma errante en* $\mathbb{C}$ *es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Como la acción es libre y errante las órbitas son discretas. Hay una biyección $\phi$ del grupo $G$ a un órbita $Gz$, mediante el mapeo $z \mapsto w + z$ con inversa $w \mapsto w - z$ que son continuas porque la suma lo es. Por lo tanto $G$ es discreto. □

Lema 3.20. *Si $H$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{C}$, entonces $H$ tiene que ser cíclico o generado por dos elementos.*

Demostración. Supongamos que $H$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{C}$ contenido en una recta, entonces $H$ es isomorfo a un subgrupo discreto de $\mathbb{R}$, por lo tanto es cíclico.

Si $H$ no está contenido en una recta, existen dos elementos en $H$ linealmente independientes, $\omega_1$ y $\omega_2$. Puesto que $H$ es discreto, $w_1$ y $w_2$ se pueden elegir con la norma más pequeña. Entonces, los elementos de $H$ que son de la forma $a\omega_1 + b\omega_2$ con $0 \leq a, b < 1$, son iguales a cero.

Por lo tanto si $w \in H$, como $\{\omega_1, \omega_2\}$ es una base para $\mathbb{C}$ (como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) existen $a,\ b \in \mathbb{R}$ tal que $w = a\omega_1 + b\omega_2 = [a]\omega_1 + [b]\omega_2 + \{a\}\omega_1 + \{b\}\omega_2$, donde $[x]$ y $\{x\}$ denotan la parte entera y fraccionaria de $x$, respectivamente. Entonces $\{a\}\omega_1 + \{b\}\omega_2 \in H$, por lo anterior $\{a\}\omega_1 + \{b\}\omega_2 = 0$, luego $H$ está generado por $\omega_1,\ \omega_2$. □

De los lemas anteriores podemos descrbir topológicamente a todas las superficies de Riemann que tienen como cubriente universal holomorfo al plano complejo.

Teorema 3.21. *Si $S$ tiene como cubriente universal al plano complejo, entonces $S$ es el plano mismo, el plano agujerado o un toro.*

Demostración. Tenemos que $S$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C}/G(\mathbb{C})$. Como $G(\mathbb{C}) \subseteq PSL(2, \mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{C}$ de forma libre y errante se sigue de los lemas anteriores que $G(\mathbb{C})$ es un grupo de traslaciones cíclico o generado por dos elementos. Así, si $G$ es la identidad, $\mathbb{C}/G(\mathbb{C})$ es conforme a $\mathbb{C}$. Si $G(\mathbb{C})$ es cíclico distinto de la identidad, $\mathbb{C}/G(\mathbb{C})$ es conforme al plano agujerado y por último, éste es conformemente equivalente a un toro si $G(\mathbb{C})$ está generado por dos elementos. □

Corolario 3.22. *El cubriente universal holomorfo de una superficie de Riemann compacta, de género mayor o igual a uno, es el disco de Poincaré $\Delta$.*

Capítulo 4

# La curva de Fermat

El Teorema 2.14 nos dice que la curva algebraica proyectiva $V(X^n + Y^n - Z^n)$ es una superficie de Riemann compacta, la cual llamaremos *la curva de Fermat de grado* $n$ y será denotada por $F_n$.

En la primera sección de este capítulo probaremos que toda superficie de Riemann compacta es triangulable, asi como la célebre fórmula de Hurwitz. En la segunda sección se determina explícitamente el género de la curva de Fermat de grado $n$. Finalmente, en la última, se estudian las soluciones de la ecuación de Fermat en el campo de las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann.

Se demuestra la existencia de soluciones de la ecuación de Fermat para $n \leq 2$, y para $n = 3$ cuando la superficie no es compacta. Utilizando la teoría de espacios cubrientes, describiremos la forma de dichas soluciones en el caso de las *simplemente conexas*, y demostraremos un resultado de Gross, el cual dice que no hay soluciones en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ para $n > 3$. También en esa sección probaremos el último teorema de Fermat en $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ vía superficies de Riemann, que en un principio era el objetivo de la tesis.

## 1. Fórmula de Hurwitz

El siguiente lema nos da una fórmula simple para calcular la multiplicidad de un mapeo en un punto (ver Definicion 1.24) sin tener que encontrar las cartas que la ponen en su forma normal:

Lema 4.1. *Sean $f : R \to S$ un mapeo holomorfo entre dos superficies de Riemann y $(\varphi, U)$, $(\psi, V)$ dos cartas alrededor de $p$ y $f(p)$ respectivamente, si $h = \psi f \varphi^{-1}$ y $z_0 = \varphi(p)$, la multiplicidad de $f$ en $p$ está dada por:*

$$mult_p(f) = 1 + ord_{z_0}\left(\frac{dh}{dz}\right). \tag{44}$$

Demostración. Vimos en la prueba de la fórmula normal (Teorema 1.23) y en el Lema 1.21, que la multiplicidad de $p$ es el orden del cero de la fórmula local, con las cartas centradas en $p$ y $f(p)$. Como $\varphi' = \varphi - z_0$ y $\psi' = \psi - \psi(f(p))$ son dos cartas centradas en $p$ y $f(p)$, la multiplicidad de $f$ en $p$ es el orden del cero de $h(z) - h(z_0)$, el cual es igual a $1 + ord_{z_0}(h')$. □

Este lema muestra que los puntos donde $f$ tiene multiplicidad al menos dos forman un conjunto discreto, ya que estos puntos corresponden a ceros de la derivada de la fórmula local $h$ de $f$.

Definición 4.2. Sea $f : R \to S$ un mapeo holomorfo no constante. Un punto $p \in R$ es de *ramificación* de $f$ si $mult_p(f) \geq 2$.

Así, los puntos de ramificación de un mapeo holomorfo sobre una superficie de Riemann compacta forman un conjunto finito.

Cuando $R$ y $S$ son compactas, los mapeos entre estas superficies tienen propiedades muy importantes, por ejemplo, la suma

$$d_y(f) := \sum_{p \in f^{-1}(y)} mult_p(f), \tag{45}$$

es independiente del punto $y \in S$. La idea de la prueba es observar que el mapeo $y \mapsto d_y(f)$ es localmente constante y que $R$ es conexo, para ver los detalles puede consultar [**10**] en la Proposición 4.8 pág. 47-48.

Lo anterior nos permite definir el *grado de un mapeo holomorfo*, $f : R \to S$, entre dos superficies de Riemann compactas

$$deg(f) := \sum_{p \in f^{-1}(y)} mult_p(f). \tag{46}$$

Supongamos que $S$ es una superficie de Riemann compacta, una triangulación de $S$, es una cubierta de cerrados, cada uno homeomorfo a un triángulo, tales que cualesquiera dos, o son disjuntos, o se intersectan solamente en un vértice o en una arista. La *característica de Euler*, con respecto a una triangulación, con $v$ vértices, $a$ aristas, y $t$ triangulos, se define como $v - a + t$. Se puede probar haciendo *refinamientos* que dicho número no depende de la triangulación.

Lema 4.3. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo holomorfo no constante entre dos superficies de Riemann compactas, tal que $Y$ es triangulable, entonces $X$ triangulable.*

Demostración. Tomemos una triangulación de $Y$, refinando la triangulación podemos suponer que las imágenes de los puntos de ramificación están contenidos en el conjunto de los vértices de la triangulación. Por la forma normal de $f$, existe una cubierta abierta finita $\{U_\alpha\}$, con la siguiente propiedad: si $U_\alpha$ no tiene imágenes de puntos de ramificación $p^{-1}(U_\alpha)$ se descompone en una unión disjunta de abiertos que son mapeados homeomórficamente por $f$. En otro caso, $U_\alpha$ tiene sólo una imagen de un punto de ramificación y en este caso $p^{-1}(U_\alpha)$ se descompone en una unión ajena de abiertos tales que cada uno de esos abiertos junto con $U_\alpha$ ponen a $f$ en su forma normal. Como toda superficie de Riemann es *metrizable* (ver Corolario 2 en [**11**], pág. 179), la superficie $Y$ es un espacio métrico compacto, por lo tanto existe una $\epsilon > 0$ tal que cada $x \in Y$, $D(x, \epsilon)$ está contenido en una $U_\alpha$ (número de Lebesgue). Podemos refinar la triangulación tal que cada triángulo tenga un radio menor que $\epsilon > 0$. Entonces esta nueva triangulación tiene la propiedad de que cada triángulo está contenido en un abierto $U_\alpha$, por lo tanto el levantamiento a $Y$ también es una triangulación. □

Del teorema de existencia de funciones meromorfas no constantes sobre las superficies de Riemann y el lema anterior se sigue lo siguiente:

Corolario 4.4. *Toda superficie de Riemann compacta es triangulable.*

Entonces, toda superficie de Riemann compacta $S$ tiene asociada su característica de Euler, que denotaremos por $\chi(S)$. Definimos el *género* $g(S)$ de la superficie como $2 - 2g(S) = \chi(S)$. El siguiente teorema relaciona el género de dos superficies de Riemann compactas:

TEOREMA 4.5 (Formula de Hurwitz). *Sea $F : X \to Y$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces*

$$\chi(X) = deg(F)\chi(Y) - \sum_{p\in X}(mult_p(F) - 1). \tag{47}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una triangulación de $Y$ como en el Lema 4.3, y la triangulación en $X$ que resulta al levantar dicha triangulación. Digamos que hay $v$ vértices, $e$ aristas y $t$ triángulos en la triangulación de $Y$ y $v'$ vértices, $e'$ aristas y $t'$ triángulos en la triangulación de $X$. Observe que cada triángulo se levanta a $deg(F)$ triángulos en $X$, entonces $t' = deg(F)t$. Similarmente $e' = deg(F)e$. Ahora fijamos un vértice $q \in Y$, el número de preimágenes de $q$ en $X$ es:

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p\in F^{-1}(q)} 1 = deg(F) + \sum_{p\in F^{-1}(q)} (1 - mult_p(F)). \tag{48}$$

Por lo tanto el número total de preimágenes de vértices de $Y$ es:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{vert.\ q\ de\ Y} (deg(F) + \sum_{p\in F^{-1}(q)} (1 - mult_p(F)) \\ &= deg(F)v - \sum_{vert.\ q\ de\ Y}\ \sum_{p\in F^{-1}(q)} (mult_p(F) - 1) \\ &= deg(F)v - \sum_{vert.\ p\ de\ X} (mult_p(F) - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \chi(X) &= v' - a' + t' \\ &= deg(F)v - \sum_{vert.\ p\ de\ X} (mult_p(F) - 1) - deg(F)a + deg(F)t \\ &= deg(F)\chi(Y) - \sum_{p\in X}(mult_p(F) - 1) \end{aligned}$$

□

Se siguen directamente de la Fórmula de Hurwitz los siguientes corolarios:

COROLARIO 4.6. *Los géneros de dos superficies de Riemann compactas conformemente equivalentes son iguales.*

COROLARIO 4.7. *Si $f : X \to Y$ es un mapeo entre dos superficies de Riemann compactas, entonces $g(X) \geq g(Y)$.*

## 2. La curva de Fermat

Para calcular el género de la curva de Fermat, aplicaremos la Fórmula de Hurwitz a un mapeo holomorfo de ella a $\mathbb{P}^1$.

LEMA 4.8. *El mapeo $G : F_n \to \mathbb{P}^1$, dado por*

$$[x : y : z] \mapsto [x : z] \tag{49}$$

*es de grado $n$, con $n$ puntos de ramificación cada uno de multiplicidad $n$.*

Demostración. El Lema 4.6 en [**10**] (pág. 46) dice que $G$ es ramificado en $p$ si y sólo si $\partial F/\partial y(p) = 0$, pero $\partial F/\partial y(x, y, z) = 0$ si y sólo si $y = 0$, entonces los puntos ramificados son de la forma $[1 : 0 : z]$ con $z^n = 1$, por lo tanto $G$ tiene $n$ puntos de ramificación. Sea $p$ un punto de ramificación de $G$, los mapeos $[1 : y : z] \mapsto y$ y $[1 : y] \mapsto y$ son cartas alrededor de $p$ y $G(p)$ respectivamente, observe que bajo esta carta, $p \mapsto 0$. La inversa de la primera carta es $u \mapsto [1 : u : h(u)]$ para alguna función holomorfa $h$, cerca de cero. Entonces la expresión local de $G$ es $u \mapsto h(u)$. Si la curva de Fermat es de grado $n = 1$, $h(u) = u + 1$; así, cero es de orden 0 en $h'$ y para $n > 1$, cerca de cero $h(u) = \sqrt[n]{u^n + 1}$, por lo tanto

$$h'(u) = (\frac{1}{n-1})(u^n + 1)nu^{n-1}$$

entonces cero es de orden $n - 1$. Luego, por el Teorema 4.1, la multiplicidad de $p$ es $1 + ord_0(h') = n$. Por último, observe que $G^{-1}([1 : 1]) = [1 : 0 : 1]$, así, por el análisis anterior

$$deg(f) = \sum_{p \in G^{-1}\{[1:1]\}} mult_p(f) = mult_{[1:0:1]}(f) = n. \tag{50}$$

□

Aplicando la Fórmula de Hurwitz (Teorema 4.5) al mapeo $G : F_n \to \mathbb{P}^1$ y el lema anterior, se sigue que:

Corolario 4.9. *El género de la curva de Fermat $F_n$ es*

$$g(F_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{51}$$

En general esta fórmula es válida para cualquier curva algebraica (plana) proyectiva suave de grado $n$, pero no lo probaremos aquí por que necesitamos más herramientas de geometría algebraica (ver Proposición 2.6, pág. 70 en [**10**]):

Teorema 4.10 (Fórmula de Plücker). *Sea $X$ una curva algebraica proyectiva suave de grado $d$, con $n$ nodos y no otras singularidades. Entonces el género de $X$ está dado por*

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - n. \tag{52}$$

Observe que para $n \geq 3$ el género de $F_n$ es mayor o igual a uno, entonces del Corolario 4.7 se sigue directamente lo siguiente:

Corolario 4.11. *Toda función holomorfa de $\mathbb{C}_\infty$ a la curva de Fermat $F_n$, con $n \geq 3$, es constante.*

Observación 4.12. También el Corolario 4.11 se sigue del Teorema de uniformización. Ya que $F_n$ tiene como cubriente universal al plano o al disco, así el mapeo holomorfo se levanta a una función holomorfa sobre la esfera, por lo tanto tiene que ser constante.

## 3. Soluciones en $\mathcal{M}(S)$

Comenzaremos probando que una solución de la ecuación de Fermat en $\mathcal{M}(S)$ induce un mapeo holomorfo de la superficie a la curva de Fermat de grado $n$:

Observación 4.13. Sean $f$, $g$ funciones meromorfas en una superficie de Riemann $S$, tal que $f^n + g^n = 1$, entonces $f$ y $g$ tienen los mismos polos del mismo orden, por que si $h_1+h_2 = 1$, $h_1$ y $h_2$ tienen los mismos polos de los mismos órdenes y $h^n$ tiene los mismos polos que $h$ pero de orden $n$ veces el orden de $h$.

Lema 4.14. *Si $f$, $g$ son funciones meromorfas en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ tales que $f^n + g^n = 1$. Entonces el mapeo dado por $p \mapsto [f(p) : g(p) : 1]$ fuera de los polos se puede extender un mapeo holomorfo $F_{f,g} : D \to F_n$ en todo $D$.*

Demostración. Si $p$ es un polo de $f$ (por lo tanto de $g$), definimos $F_{f,g}(p) = \lim_{z\to p} F_{f,g}(z)$, este límite existe por que $F_{f,g}(p) = \lim_{z\to p}[f(z) : g(z) : 1] = [\lim_{z\to p}(z-p)^{ord_p(f)}f(z) : \lim_{z\to p}(z-p)^{ord_p(f)}g(z) : 0]$, como $ord_p(f) = ord_p(g)$ los límites de las dos primeras coordenadas son distintas de cero.

Observe que el mapeo $F_{f,g} : D \to F_n$ es continuo por definición. Supongamos que $z \in D$ no es un polo, entonces hay una carta $(V, \psi)$, alrededor de $[f(z) : g(z) : 1]$ donde $V \subseteq U_2$ (vea ecuación (27)) y $\psi$ es o bien $[x : y : z] \mapsto x/z$ o $[x : y : z] \mapsto y/z$. Para $D$ tomemos la carta $(U, Id)$, donde $U$ es un abierto contenido en $F^{-1}_{f,g}(V)$, en el cual $f$ y $g$ son holomorfas, entonces $\psi F_{f,g} Id : U \to \psi(V)$, está dada por

$$z \mapsto f(z) \quad \text{ó} \quad z \mapsto g(z) \tag{53}$$

que es holomorfa en cualquiera de los casos. Y si $p$ es un polo de $f$ (por lo tanto de $g$), existe una carta $(V, \psi)$ alrededor de $F_{f,g}(p)$, donde $V \subseteq U_0$ y $\psi$ es de la forma $[x : y : z] \mapsto y/x$ o $[x : y : z] \mapsto z/x$, tomemos una carta $(U, Id)$ alrededor de $p$ tal que $U \subseteq F^{-1}_{f,g}(V)$ no contiene otro polos más y tal que $1/f$ es holomorfa en $U$. Entonces la composición $\psi F_{f,g} Id : U \to \psi(V)$, está dada por

$$z \mapsto \frac{g(z)}{f(z)} \quad \text{ó} \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)} \tag{54}$$

que en cualquiera de los casos es holomorfa. □

Corolario 4.15. *Si $f$, $g$ son dos funciones meromorfas en una superficie de Riemann $S$ tales que $f^n+g^n = 1$, entonces el mapeo definido como $p \mapsto [f(p) : g(p) : 1]$ fuera de los polos se puede extender a un mapeo holomorfo en $S$, $F_{f,g} : S \to F_n$.*

Demostración. Si $p \in S$ es polo, definimos $F_{f,g}(p) := \lim_{w\to p} F_{f,g}(w)$, para ver que está bien definida tomemos una carta $(U, \varphi)$ alrededor de $p$, denotemos por $z_0 = \varphi(p)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to p} F_{f,g}(w) &= \lim_{z\to z_0} [f\varphi^{-1}(z) : g\varphi^{-1}(z) : 1] \\
&= \lim_{z\to z_0} [(z-z_0)^{ord_p(f)} f\varphi^{-1}(z) : \\
&\quad (z-z_0)^{ord_p(f)} g\varphi^{-1}(z) : (z-z_0)^{ord_p(f)}] \\
&= [\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{ord_p(f)} f\varphi^{-1}(z) : \lim_{z\to 0}(z-z_0)^{ord_p(f)} g\varphi^{-1}(z) : \\
&\quad \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{ord_p(f)}]
\end{aligned}$$

Como $ord_{z_0}(f\varphi^{-1}(z)) = ord_p(f) = ord_p(g) = ord_{z_0}(g\varphi^{-1}(z))$ se tiene que los límites de las dos primeras entradas de la coordenada homogénea de la última igualdad, son distintas de cero. $F_{f,g}$ es continua por definición. Se sigue del Lema 4.14 que $F_{f\varphi^{-1},g\varphi^{-1}}$ es holomorfa en una vecindad de $z_0$. Además, tenemos que

$F_{f,g}$ es holomorfa en una vecindad de $p$ si y sólo si $F_{f,g}\varphi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad de $z_0$, pero $F_{f,g}\varphi^{-1} = F_{f\varphi^{-1}, g\varphi^{-1}}$, por lo tanto $F_{f,g}$ es holomorfa en una vecindad de $p$. □

Observación 4.16. Si $S$ es una superficie de Riemann, la existencia de una solución no constante de la ecuación de Fermat en $\mathcal{M}(S)$ para $n = 1$, es equivalente a la existencia de un función meromorfa no constante sobre $S$.

Teorema 4.17. *Si $S$ es una superficie de Riemann, siempre existen soluciones no constantes de la ecuación (2) en $\mathcal{M}(S)$ para $n = 2$ y si $S$ es simplemente conexa todas las soluciones son de la forma*

$$f(z) = \frac{2\alpha(z)}{1+\alpha(z)^2} \quad y \quad g(z) = \frac{1-\alpha(z)^2}{1+\alpha(z)^2}, \tag{55}$$

*donde $\alpha$ es una función meromorfa no constante sobre $S$.*

Demostración. Sea $\alpha$ una función meromorfa no constante sobre $S$, las funciones

$$f(z) := \frac{2\alpha(z)}{1+\alpha(z)^2} \quad y \quad g(z) := \frac{1-\alpha(z)^2}{1+\alpha(z)^2}. \tag{56}$$

forman una solución no constante de la ecuación (2).

Consideremos las funciones

$$\widetilde{f}(z) := \frac{2z}{1+z^2} \quad y \quad \widetilde{g}(z) := \frac{1-z^2}{1+z^2} \tag{57}$$

$F_{\widetilde{f},\widetilde{g}} : \mathbb{C}_\infty \to F_2$ es una función holomorfa y biyectiva, por lo tanto es un biholomorfismo y particularmente un cubriente holomorfo.

Cualquier solución $f$ y $g$ de la ecuación (2) en $\mathcal{M}(S)$, induce el mapeo holomorfo $F_{f,g}$, si $S$ es *simplemente conexa*, $F_{f,g}$ tiene un levantamiento holomorfo $\alpha(z)$ a la esfera de Riemann,

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}_\infty \arrow[d, "F_{\widetilde{f},\widetilde{g}}"] \\ S \arrow[ur, dotted, "\alpha"] \arrow[r, "F_{f,g}"'] & F_2 \end{tikzcd} \tag{58}$$

Observe que en los puntos que no son polos de $f$ (y por lo tanto de $g$), se tiene que

$$[f(p) : g(p) : 1] = [\widetilde{f}(\alpha(p)) : \widetilde{f}(\alpha(p)) : 1]. \tag{59}$$

Así que fuera de los polos de $f$, se tienen las igualdades

$$f(z) = \frac{2\alpha(z)}{1+\alpha(z)^2} \quad y \quad g(z) = \frac{1-\alpha(z)^2}{1+\alpha(z)^2}. \tag{60}$$

Pero el Teorema de Identidad nos asegura la igualdad en todo el dominio. □

La versión del último teorema de Fermat para el campo de las funciones racionales se sigue del Corolario 4.11:

Teorema 4.18. *La ecuación (2) no tiene soluciones no constantes en $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ para $n > 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Si existieran $f,\, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ que satisfacen la ecuación (2) para $n > 2$, $F_{f,g} : \mathbb{C}_\infty \to F_n$ sería un mapeo holomorfo, que por el Corolario 4.11 debe de ser constante. Claramente fuera de los polos de $f$ y $g$ son constantes; así, por el Teorema de Identidad tiene que ser constante en $S$. $\square$

Repasaremos algunos teoremas concernientes a curvas elípticas para estudiar las soluciones de la ecuación de Fermat, en el campo de las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann no compacta, para el caso $n = 3$.

Una *curva elíptica sobre* $\mathbb{C}$, o simplemente *curva elíptica*, es una curva algebraica proyectiva suave de género 1, por ejemplo, la curva de Fermat de grado tres.

Se puede verificar que el polinomio

$$Y^2Z - 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3, \tag{61}$$

que resulta de la homogeneización del polinomio

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \tag{62}$$

define una curva no singular si y sólo si las raíces del polinomio $4x^3 - g_2x - g_3$ son distintas, pero esto pasa si y sólo si $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Por lo tanto, se sigue de la Fórmula de Plücker, que la curva (61) es una curva elíptica si y sólo si $\Delta \neq 0$.

Decimos que una curva elíptica está en la *forma normal de Weierstrass* si es una curva algebraica determinada por los ceros de un polinomio de la forma dada en (61), en este caso sólo hay un punto con tercera coordenada homogénea igual a cero, que llamaremos *punto distinguido* y que denotaremos por $O$.

Dada una latiz $\Lambda$ de $\mathbb{C}$, la función $\wp := \wp(\Lambda)$ de Weierstrass asociada, satisface la ecuación diferencial

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{63}$$

donde $g_2$ y $g_3$ son constantes que dependen de $\Lambda$, dadas por

$$\begin{aligned} g_2 &:= 60 \sum_{\omega \in \Lambda\setminus 0} \omega^{-4} \\ g_3 &:= 140 \sum_{\omega \in \Lambda\setminus 0} \omega^{-6} \end{aligned}$$

(ver Teorema 3.10.4 en la pág. 96 de [**13**]).

TEOREMA 4.19. *Sea $g_2 = g_2(\Lambda)$ y $g_3 = g_3(\Lambda)$ las cantidades asociadas a $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. El polinomio*

$$4x^3 - g_2x - g_3 \tag{64}$$

*tiene raíces distintas.*

Para su demostración consulte el Teorema 3.10.7 y el Teorema 3.10.9 en [**13**] (pág. 97 y 98).

TEOREMA 4.20. *Sean $g_1$ y $g_2$ las constantes asociadas a $\Lambda$ y sea $E$ la curva definida por homogenización del polinomio*

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{65}$$

*que por el teorema anterior es una curva elíptica. Si el mapeo* $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \to E$ *está definido como*

$$z \mapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1], \tag{66}$$

*si* $z \neq \Lambda$ *y* $\Lambda \mapsto O$*, donde* $O = [0 : 1 : 0]$ *es el punto distinguido de* $E$*, entonces* $\phi$ *es un biholomorfismo entre estas dos superficies de Riemann.*

Consulte Proposición 10 en [**14**] (pág. 24) para detalles. El siguiente teorema nos dice que cualquier ecuación de la forma (62) se puede realizar por una latiz:

Teorema 4.21 (Teorema de uniformización de funciones elípticas). *Sean* $c_2$ *y* $c_3$ *números complejos que satisfacen* $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$*. Entonces existe una latiz* $\Lambda$ *que satisface*

$$g_2(\Lambda) = c_2 \quad y \quad g_3(\Lambda) = c_3. \tag{67}$$

Para la demostración consulte Corolario 6.5.8 en [**13**] pág. 287. Como corolario de los teorema anteriores, se sigue que las curvas elípticas en la forma normal de Weierstrass se pueden uniformizar por medio de alguna función $\wp$:

Teorema 4.22. *Si* $E$ *es una curva elíptica sobre* $\mathbb{C}$*, dada en la forma normal de Weierstrass. Existe una lattice* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ *y un biholomorfismo* $\phi : \mathbb{C}/\Lambda \to E$ *dado por*

$$z \mapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1] \quad si \quad z \neq \Lambda \tag{68}$$

*y* $\Lambda \mapsto O$*, donde* $O$ *es el punto distinguido de* $E$*.*

Ahora, daremos un biholomorfismo de una curva elíptica en su forma de Weierstrass a la curva de Fermat de grado 3:

Teorema 4.23. *Sea* $E$ *la curva elíptica definida por* $y^2 = 4x^3 - 1$*. El mapeo* $\widetilde{A}$ *dado por* $[x : y : z] \to [z - 3^{-1/2}y : z + 3^{-1/2}y : 2x]$ *es un biholomorfismo entre la curva* $E$ *en la forma normal de Weierstrass y la curva de Fermat de grado 3.*

Demostración. Consideremos la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

cuya inversa está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

La transformación lineal definida por $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ es un homeomorfismo, y como una transformación lineal manda rectas en rectas, $A$ define un homemorfismo de $\mathbb{P}^2$ en sí mismo que coincide con $\widetilde{A}$, dado por $\pi(p) \mapsto \pi(Ap)$, donde $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2$ es la proyección canónica. Veamos que define una biyección entre $E$ y $F_3$. Supongamos que $[x : y : z] \in E$, entonces

$$\begin{aligned} (z - y/\sqrt{3})^3 + (z + y/\sqrt{3})^3 &= 2z^3 + 2y^2 z \\ &= 2z^3 + 2(4x^3 - z^3) \\ &= (2x)^3. \end{aligned}$$

Por otro lado la inversa $(\widetilde{A})^{-1} : F_3 \to E$ inducida por $A^{-1}$ está dada por $[x : y : z] \mapsto [z : \sqrt{3}(y-x) : x+y]$, los puntos de $F_3$ caen en $E$ por que

$$3(y-x)^2(x+y) - 4z^3 + (x+y)^3 = -4z^3 + 4y^3 + 4x^3$$

Por lo tanto la transformación induce un homeomorfismo de $E$ a $F_3$. Además, ya que las coordenadas homogéneas de $\widetilde{A}$ y de su inversa son polinomios lineales, $\widetilde{A}$ es un biholomorfismo. $\square$

Con lo anterior podemos demostrar la existencia de las soluciones para $n = 3$, cuando $S$ no es compacta.

TEOREMA 4.24 (José Juan). *Si $S$ es una superficie de Riemann no compacta, entonces siempre existe una solución de la ecuación (2) para $n = 3$ en $\mathcal{M}(S) \setminus \mathbb{C}$ y si además $S$ es simplemente conexa todas las soluciones son de la forma*

$$f = \frac{1}{2\wp(\alpha)}(1 - 3^{-1/2}\wp'(\alpha)) \quad y \quad g = \frac{1}{2\wp(\alpha)}(1 + 3^{-1/2}\wp'(\alpha)), \tag{71}$$

*para alguna $\alpha \in \mathcal{O}(S) \setminus \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f$ y $g$ una solución de la ecuación (2) con $n = 3$, entonces $f$ y $g$ definen una función holomorfa $F_{f,g} : S \to F_3$. Sea $E$ la curva elíptica definida por la ecuación $y^2 = 4x^3 - 1$. Por el Teorema 4.22 existe un latiz $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ tal que la aplicación $\phi : C/\Lambda \to E$ dada en el Teorema 4.20 es un biholomorfismo. Puesto que $\widetilde{A}$ también es un biholomorfismo, la composición $\widetilde{A}\phi\pi : \mathbb{C} \to F_3$ es un cubriente holomorfo, así si $S$ es *simplemente conexa* del teorema del levantamiento existe una $\alpha$, holomorfa sobre $S$, que hace conmutar el siguiente diagrama

(72)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\
 & \mathbb{C}/\Lambda \arrow[d, "\phi"] \\
 & E \arrow[d, "\widetilde{A}"] \\
S \arrow[uuur, "\alpha"] \arrow[r, "F_{f,g}"] & F_3
\end{tikzcd}$$

Fuera de los polos se tiene que

$$f = \frac{1}{2\wp(\alpha)}(1 - 3^{-1/2}\wp'(\alpha)) \quad y \quad g = \frac{1}{2\wp(\alpha)}(1 + 3^{-1/2}\wp'(\alpha)) \tag{73}$$

Y por el teorema de identidad son iguales en $S$.

Por otro lado, una superficie de Riemann no compacta arbitraria $S$ es una variedad Stein (Teorema 1.13), por lo tanto existe una $\alpha \in \mathcal{O}(S) \setminus \mathbb{C}$. Definiendo $f$ y $g$ como en (73) se tiene una solución de la ecuación de Fermat para $n = 3$ en $\mathcal{M}(S) \setminus \mathbb{C}$. $\square$

Se sigue como corolario del teorema anterior, una conjetura formulada por Gross en [**7**] (Conjetura 1):

Corolario 4.25. *Todas las soluciones de la ecuación (2) en* $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ *con* $n = 3$ *son funciones elípticas de funciones enteras.*

Finalizamos demostrando un resultado de Gross que dice que el último teorema de Fermat es válido en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ para $n > 3$:

Teorema 4.26 (Gross). *La ecuación (2) no tiene soluciones no constantes en* $\mathcal{M}(\mathbb{C})$*, para* $n > 3$.

Demostración. Una solución $f$ y $g$ en $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ de la ecuación (2), induce el mapeo holomorfo $F_{f,g} : \mathbb{C} \to F_n$. Puesto que $n$ es mayor que tres, $F_n$ tiene como cubriente universal holomorfo al disco $\Delta$, por lo tanto $F_{f,g}$ se levanta a una función holomorfa acotada sobre $\mathbb{C}$, del Teorema de Liouville se sigue que este levantamiento es constante. Y por lo tanto también $f$ y $g$. $\square$

Capítulo 5

# Conclusiones

Resumimos en los cuadros 1 y 2, la descripción de las soluciones de la ecuación de Fermat de grado menor que tres, en las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann simplemente conexa:

| n | Existen | Forma de las soluciones |
|---|---|---|
| 1 | Sí | $f = \alpha$, $g = 1 - \alpha$ con $\in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ |
| 2 | Sí | $f = 2\alpha/(1 + \alpha^2)$, $g(z) = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$ donde $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ |
| $n > 2$ | No | |

CUADRO 1. Soluciones en $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$

| n | Existen | Forma de las soluciones |
|---|---|---|
| 1 | Sí | $f = \alpha$, $g = 1 - \alpha$. |
| 2 | Sí | $f = 2\alpha/(1 + \alpha^2)$, $g(z) = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2)$, donde $\alpha \in \mathcal{M}(S)$. |
| 3 | Sí | $f = (1/2\wp(\alpha))(1 - 3^{-1/2}\wp'(\alpha))$ y $g = (1/2\wp(\alpha))(1 + 3^{-1/2}\wp'(\alpha))$, $\alpha \in \mathcal{O}(S)$. |
| $n > 3$ | No | cuando $S = \mathbb{C}$. |

CUADRO 2. Soluciones en $\mathcal{M}(S)$, con $S = \mathbb{C},\ \Delta$.

También enlistamos a continuación algunos problemas que podrían estudiarse como continuación de este trabajo:

- Determinar si el último teorema de Fermat es válido en el campo de las funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta arbitraria.
- Determinar la existencia de soluciones de la ecuación de Fermat en $\mathcal{M}(S)$, para $n > 3$ y $S$ una superficie de Riemann no compacta. Y en caso de existir, describir la forma de las soluciones.
- Estudiar la finitud de familias de superficies de Riemann, vía espacios de Teichmüller.

El autor tiene un interés particular en el tercer punto, y planea continuar parte de su trabajo en esa dirección, con el objetivo de entender la prueba del teorema de Mordell[1] para campos de funciones. Él considera que esta tesis ha contribuido mucho a su formación como matemático, por que le ha proporcionado bases y un lenguaje adecuado para abordar tópicos más avanzados.

[1] Ver Apéndice A

Apéndice A

# Otros problemas diofánticos

Esta sección está dedicada a dar un breve comentario sobre otros problemas diofánticos sobre campos de funciones y su relación con el último teorema de Fermat. El propósito de este apéndice es despertar el interés del lector para que indague sobre el tema. El autor aún está comprendiendo los temas que se explican aquí, así que puede que algunos conceptos no sean muy precisos.

El primero de los problemas que presntaremos, es conocido como el Teorema de Faltings, conjeturada por Mordell en 1922 [**25**] y demostrado por Faltings en 1983 [**21**]. El teorema dice lo siguiente:

Teorema A.1. *Si $X$ es una curva algebraica proyectiva de género $g \geq 2$ definida sobre un campo numérico $K$ y $L/K$ es una extensión finita entonces $X(L)$ es finita.*

Vamos a entender un poco este enunciado. Supongamos que $X$ es una curva algebraica proyectiva sobre un campo algebraicamente cerrado $E$, es decir, sus ceros están en $\mathbb{P}^n(E)$ y su ideal está generado por polinomios homogéneos con coeficientes en $E$, tal que dicho ideal es primo; decimos que $X$ está definido sobre un campo $k$ si su ideal puede generarse por polinomios con coeficientes en $k$. Si $X$ es una curva algebraica sobre $E$ definida sobre $k$, y $K/k$ una extensión de campos, el conjunto de puntos $K$-racionales de $X$ se define como:

$$X(K) = X \cap \mathbb{P}^n(K). \tag{74}$$

Así, el teorema de Faltings dice que el número de puntos $L$-racionales de una curva algebraica de género mayor que uno, definida sobre un campo numérico $K$ es finito. Para fijar ideas, consideremos la curva de Fermat $X = V(X^n + Y^n - Z^n)$, ésta es una curva algebraica de género mayor que uno para $n$ mayor que tres, además está definida sobre $\mathbb{Q}$, si tomamos $K = \mathbb{Q}$, el teorema nos dice que sólo hay un número finito de racionales que satisfacen la ecuación (salvo múltiplos). Por lo tanto, el Teorema de Faltings es una versión débil del último teorema de Fermat para $n > 3$.

Este teorema tiene una versión para campos de funciones que fue formulada por Lang en [**28**] y fue probada por Manin en 1963 [**26**]. La formulación es la siguiente:

Teorema A.2. *Sea $X$ una curva algebraica (irreducible no singular) de género mayor que uno, definida sobre un campo de funciones $F$ sobre $k$ de característica cero. Si $X(F)$ es infinito, entonces existe una curva $X_0$ definida sobre $k$, isomorfa a $X$ sobre $F$ y, salvo un número finito de puntos, $X(F)$ está contenida en la imagen de $X_0(k)$ bajo este isomorfismo.*

Entendemos por campo de funciones $F$ sobre $k$, a una extensión finitamente generada y regular. Donde una extensión $F/k$ es regular, si es una extensión separable y $k$ es algebraicamente cerrado en $F$.

Se puede verificar que este teorema se puede reducir al caso cuando $k = \mathbb{C}$ y $K$ es de *grado de trascendencia 1.*

El campo de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta es un campo finitamente generado sobre $\mathbb{C}$ de grado de trascendencia 1 ([**29**] Corolario 1, pág 33), y recíprocamente, cualquier campo de funciones finitamente generado sobre $\mathbb{C}$, de grado de trascendencia 1, se puede realizar como el campo de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann compacta ([**29**] Corolario 2 pág. 34). Por lo tanto, la conjetura de Mordell se reduce a curvas definidas en el campo de funciones meromorfas sobre alguna superficie de Riemann compacta.

El segundo problema que consideraremos es la conjetura $ABC$, que aún permanece abierta. Como mencionamos en la introducción, Stothers (1981) [**2**] y Mason (1981) [**3**] probaron independientemente el siguiente teorema:

TEOREMA A.3 (Mason-Stothers). *Si $f$, $g$ y $h$ son tres polinomios primos relativos en $\mathbb{C}[t]$ tales que $f + g = h$, entonces*

$$\text{máx}\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} \leq N_0(fgh) - 1 \tag{75}$$

*donde $N_0(fgh)$ es el número de raíces distintas de $fgh$.*

De este resultado, se sigue inmediatamente el teorema de Fermat en $\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$:

COROLARIO A.4. *La ecuación (1) no tiene soluciones no constantes en $\mathbb{C}[z]$ para $n > 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f$, $g$ y $h$ son soluciones no constantes de la ecuación (1). Aplicando el Teorema de Mason,

$$\begin{aligned} ndeg(f) = deg(f^n) &\leq deg(rad(f^n g^n h^n)) - 1 \leq deg(fgh) - 1 \\ &= deg(f) + deg(g) + deg(h) - 1. \end{aligned}$$

Aplicando el mismo argumento a $g$ y $h$ se sigue que

$$n \leq 3 - \frac{3}{deg(f) + deg(g) + deg(h)} \leq 2. \tag{76}$$

$\square$

Masser y Oesterlé, explotando la analogía entre campos de funciones y campos numéricos, asi como la versión para polinomios, formularon una conjetura que aún permanece sin respuesta:

CONJETURA A.5. Sea $\epsilon > 0$, existe una constante $C(\epsilon)$ para la cual se cumple lo siguiente: Sean $a$, $b$ y $c$ tres números enteros primos dos a dos y $a + b = c$, entonces

$$\text{máx}\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\epsilon)(rad(abc))^{1+\epsilon} \tag{77}$$

Donde el radical de un número $n = \prod p_i^{\alpha_i}$, está dado por $rad(n) := \prod p_i$.

Este problema es uno de los más importantes en la teoría de números. Varias conjeturas se siguen fácilmente de ella, por ejemplo, la conjetura de Mordell, el último teorema de Fermat asintótico, el teorema de Fermat-Catalan, entre muchos más.

El último teorema de Fermat asintótico dice que el último teorema de Fermat es cierto para $n$ suficientemente grande.

Así, como en el teorema de Faltings, también existe una versión de este problema para campos de funciones, pero para entender el enunciado necesitamos más herramientas, las cuales no hemos desarrollado en esta tesis y por el momento no están a nuestro alcance, sin embargo, puede ser tema para un estudio futuro. Por el momento sólo nos limitaremos a enunciar los teoremas de la conjetura ABC para *campos de funciones*, tanto en su versión algebraica, como en su versión analítica:

Sea $X$ una superficie proyectiva suave, $D$ un divisor normal de cruce y simple de $X$, $B$ una curva suave proyectiva y $p : X \to B$ un morfismo no constante.

TEOREMA A.6 (ABC versión algebraica). *Sean $p : X \to B$ y $D$ como antes y sea $\epsilon > 0$. Entonces dado una curva proyectiva suave $Y$ y un morfismo $f : Y \to X$ cuya imágen no está contenida en $D$, la siguiente desigualdad se cumple*

$$(K_X(D); Y) \leq (1+\epsilon)(N_D^{(1)}(Y) + \chi(Y)) + O_\epsilon([Y : B]). \tag{78}$$

Las constantes implícitas dependen solamente de $X$, $D$, $p$ y $\epsilon$. Además, se debe suponer que el morfismo $pf : Y \to B$ no es constante.

TEOREMA A.7 (ABC versión analítica). *Sean $p : X \to B$ y $D$ como antes y sea $\epsilon > 0$. Si $(Y, g)$ es una superficie de Riemann parabólica y $f : Y \to X$ es un mapeo holomorfo con imágen densa. Entonces la siguiente desigualdad se cumple*

$$(K_X(D) : Y)(r) \leq (1+\epsilon)(N_D^{(1)}(Y)(r) + \chi(Y)(r)) + O_\epsilon([Y : B](r) + log(r(H : Y)(r))),$$

*excepto en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Donde las constantes implícitas, dependen solamente de $X$, $D$, $p$, $f$ y $\epsilon$ pero no de $r$.*

Estos teoremas fueron demostrados por McQuillan [**30**] y por Yamanoi [**31**] respectivamente. El lector interesado puede consultar [**32**] y [**33**] para una exposición más detallada de la conjetura $ABC$ sobre campos de funciones.

# Bibliografía


[1] Andrew Wiles (May 1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. Annals of Mathematics 141 (3): pp. 443–551

[2] Stothers, W. W. (1981), Polynomial identities and hauptmoduln, Quarterly J. Math. Oxford, 2 32: 349–370.

[3] Mason, R. C. (1984), Diophantine Equations over Function Fields, London Mathematical Society Lecture Note Series 96, Cambridge, England: Cambridge University Press.

[4] Paulo Ribenboim. (1995). 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-90432-0.

[5] Greenleaf, Newcomb On Fermat's equation in $\mathbb{C}(t)$. Amer. Math. Monthly 76 1969 808–809. 10.13

[6] Shanks, Daniel. Solved and Unsolved Problems in Number Theory. Second edition. Chelsea Publishing Company, New York, 1978. ISBN 0-8284-0297-3.

[7] Gross, Fred On the equation $f^n + g^n = 1$. II. Bull. Amer. Math. Soc. 74 1968 647–648.

[8] Lester R. Ford, Automorphic Functions. Chelsea, New York, 1951; pp. 229-240

[9] Ahlfors, Lars V. Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. ISBN: 0-07-000657-1 30-01.

[10] Rick Miranda. Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Colorado State University-AMS, 1995. ISBN-10: 0-8218-0268-2, ISBN-13: 978-0-8218- 0268-7.

[11] Farkas, H. M.; Kra, I. Riemann surfaces. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, 1992. ISBN 0-387-97703-1.

[12] Forster, Otto. Lectures on Riemann surfaces. Graduate texts in mathematics, 81. Springer-Verlag, New York, 1981. ISBN 0-387-90617-7.

[13] G.A. Jones and D. Singerman. Complex Functions: an algebraic and geometric viewpoint. Cambridge University Press, 1987. ISBN 0-521-30893-3.

[14] Koblitz Neal. Introduction to elliptic curves and modular forms. Graduate texts in mathematics, 97. Springer-Verlag, New York, 1984. ISBN 0-387-96029-5.

[15] Conway, John B. Functions of one complex variable. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York, 1978. ISBN: 0-387-90328-3

[16] Gerd Fischer. Plane Algebraic Curves. Heinrich-Heine-Universität-AMS, 2001. ISBN-10: 0-8218-2122-9, ISBN-13: 978-0-8218-2122-0

[17] Munkres, James R. Topology. 2nd ed. Prentice Hall Inc., Upper Sadle River, NJ 07458, 2000. ISBN 0-13-181629-2.

[18] Griffiths, Phillip A. Introduction to algebraic curves. Translated from the Chinese by Kuniko Weltin. Translations of Mathematical Monographs, 76. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. x+221 pp. ISBN: 0-8218-4530-6

[19] Hatcher, Allen(1-CRNL) Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0 55-01 (55-00)

[20] Beardon, A. F. A primer on Riemann surfaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, 78. Cambridge University Press, 1984. ISBN: 0-521-27104-5.

[21] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Inv. Math. 73 (1983), 349-366. (Translation in [**22**]).

[22] G. Cornell and J. H. Silverman, eds., Arithmetic Geometry, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1962.

[23] Joseph H. Silverman. The arithmetic of elliptic curves. Second edition. Graduate texts in mathematics, 106. Springer-Verlag, New York, 2009. ISBN 978-0-387-09493-9.

[24] J. Coates, S.-T. Yau, eds., Elliptic Curves, Modular Forms & Fermat's Last Theorem, International Press, 2nd Edition, 1997.
[25] Mordell, Louis J. (1922). On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees. Proc. Cambridge Philos. Soc. 21: 179–192.
[26] Manin, Ju. I. (1963). Rational points on algebraic curves over function fields. Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya 27: 1395–1440. ISSN 0373-2436. translation: Trans., II. Ser., Amer. Math. Soc. 50 (1966) pp.189-234.
[27] Coleman, Robert F. (1990). Manin's proof of the Mordell conjecture over function fields. L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. IIe Série 36 (3): 393–427. ISSN 0013-8584. MR 1096426.
[28] S. Lang, Integral points on curves, Pub. Math. IHES, 1960.
[29] Danilov, V. I.; Shokurov, V. V. Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes. Translation by D. Coray and V. N. Shokurov. Translation edited by I. R. Shafarevich. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 23. Springer-Verlag, Berlin, 1994. vi+307 pp. ISBN: 3-540-51995-5.
[30] McQuillan, Michael, Old and new techniques in function fields artithmetics, preprint.
[31] Yamanoi, Katsutoshi. The second main theorem for small functions and related problems. Acta Math. 192 (2004), no. 2, 225-294.
[32] C. Gasbarri. The strong ABC conjecture over function fields [after McQuillan and Yamanoi]. arXiv:0811.3153v1.
[33] C. Gasbarri. Lectures on the ABC conjecture over function fields, preprint.