



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

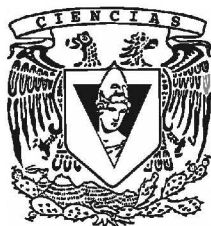
EXISTENCIA DE SUPERFICIES DE ÁREA MÍNIMA

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A :

ADRIÁN PÉREZ BUSTAMANTE



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE GILBERTO FLORES GALLEGOS**

2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Pérez
Bustamante
Adrián
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304178380

2. Datos del tutor

Dr
Jorge Gilberto
Flores
Gallegos

3. Datos del sinodal 1

Dra
Clara Eugenia
Garza
Hume

4. Datos del sinodal 2

Dr
Nils
Heye
Ackermann

5. Datos del sinodal 3

Dr
Renato Carlos
Calleja
Castillo

6. Datos del sinodal 4

Dra
María de la Luz Jimena
de Teresa
de Oteyza

7. Datos del trabajo escrito

Existencia de superficies de área mínima
86 p
2014

Índice general

Introducción	III
1. Superficies Mínimas y el Funcional de Área	1
1.1. Coordenadas Isotermas y Mapeo Conforme	9
2. El Problema de Plateau	13
2.1. Formulación del problema	13
2.2. El principio variacional	17
2.3. Solución del problema	30
2.3.1. Lema de Courant-Lebesgue y sus consecuencias	30
2.3.2. Primera prueba	35
2.3.3. Una prueba utilizando funciones armónicas	40
3. La Solución del Problema de Plateau es de Área Mínima	43
3.1. Lema de ϵ -conformalidad de Morrey	43
3.2. Una prueba moderna	49
4. Aproximación a algunos problemas concretos	53
4.1. Una aproximación gráfica	53
4.1.1. Condición de frontera: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in S^1$	54
4.1.2. Condición de frontera: $f(\theta) = \cos(\theta) \operatorname{sen}(2\theta)$	56
5. Conclusiones	59
A. Trazas y desigualdad generalizada de Sobolev	61
A.1. El operador Traza	61
A.2. Desigualdad generalizada de Sobolev	65
B. Funciones armónicas	69
B.1. Resultados Clásicos	69
B.2. Teoremas de convergencia	71
B.3. Principio de reflexión de Schwarz en el círculo	73
C. Operadores Elípticos	77
C.1. Espacios de Hölder	78
C.2. El problema de Dirichlet	80

Introducción

Uno de los grandes logros de los métodos directos en el cálculo de variaciones ha sido la solución del problema de Plateau, nombrado así en honor al físico belga J.A.F. Plateau. El problema original puede expresarse en la siguiente pregunta: *Dada una curva de Jordan cerrada, Γ , ¿Existe una superficie de área mínima cuya frontera sea Γ ?*

En su artículo "*Statique expérimentale et théorique de liquides soumis aux seules forces moléculaires*", de 1873, Plateau notó que todo contorno hecho de un solo alambre cerrado, cualquiera que fuera su forma, sostenía una película de jabón. El modelo matemático de un alambre delgado es una curva de Jordan de longitud finita. Además, los objetos matemáticos que modelan películas de jabón son superficies en \mathbb{R}^3 , cada una de estas superficies (películas de jabón) alcanza una energía potencial que es proporcional al área de la superficie. Entonces, por el principio de trabajo virtual de Johann Bernoulli, las películas de jabón en estado de equilibrio corresponden a superficies de área mínima.

El párrafo anterior hace razonable el pensar que cualquier curva cerrada de Jordan rectificable es la frontera de, al menos, una superficie de área mínima, ya que siempre hay una película de jabón. Sin embargo, como bien dijo R. Courant:

Evidencia empírica jamás podrá establecer existencia matemática. Sólo una prueba matemática de existencia puede asegurar que la descripción matemática del fenómeno físico es adecuada.

El problema matemático, arriba expuesto como el problema de Plateau, fue un gran desafío para los matemáticos. Durante el siglo XIX fue resuelto para algunos contornos especiales, Γ , pero una solución lo suficientemente general se obtuvo hasta 1930/31 por J. Douglas¹ y, simultáneamente, por T. Radó². Tiempo después R. Courant e, independientemente, L. Tonelli dieron una solución simplificando los métodos utilizados por Douglas y Radó. Aquí presentaremos el enfoque de Courant-Tonelli para resolver el problema de Plateau.

Mucho antes de que Douglas y Radó dieran una solución al problema de Plateau, Lagrange observó que si una superficie S minimiza el área para una frontera fija Γ (i.e. es de área mínima), entonces, S es un punto crítico del funcional de área y, necesariamente, S tiene que ser una superficie mínima³. Sin embargo, es importante notar que una superficie mínima (un punto crítico del funcional de área), en general, no es de área mínima. Partiendo de esto es posible formular una versión más general del problema de Plateau: *Dada una curva de Jordan cerrada y rectificable Γ , encontrar una superficie mínima cuya*

¹Véase [8].

²Véase [16].

³Una superficie es mínima si su curvatura media es cero en todos sus puntos.

frontera sea Γ . Entonces, el problema de área mínima para Γ es más sofisticado que el segundo problema de Plateau arriba planteado: el primero pide encontrar una superficie que minimice el área mientras que el segundo tiene que ver con los puntos críticos del funcional de área.

A partir de las ideas expuestas en el párrafo anterior se ha trazado el desarrollo de este trabajo. Comenzaremos resolviendo un problema menos exigente, i.e., empezaremos encontrando una superficie mínima (punto crítico del funcional de área) para, posteriormente, verificar que la superficie mínima encontrada también es de área mínima (lo cual no sucede siempre).

Cuando uno trata de formular y resolver el problema de Plateau muchas dificultades salen a la luz. Una de éstas es el hecho de que existen soluciones matemáticas al problema de Plateau que no pueden *crearse* haciendo experimentos con pompas de jabón. Esto es lo que se espera de los puntos críticos que no minimizan el área, ya que éstos corresponden a películas de jabón inestables, éstas serían las películas que se destruyen por la más pequeña perturbación provocada, digamos, por un pequeño movimiento del alambre o por una ligera corriente de aire. También podría ocurrir que las soluciones (matemáticas) del problema de Plateau tengan puntos rama (i.e. $\nabla X = 0$, lo que no permite que haya un plano tangente) y que no sean inyectivas (i.e. que haya auto-intersecciones). Sin embargo, ambos fenómenos no se dan en el caso físico, esto es una consecuencia de las tres leyes que postuló Plateau⁴ después de realizar sus famosos experimentos. Posteriormente Osserman exhibió, dando una prueba matemática, que una solución del problema de Plateau, que además minimice el área, no puede tener puntos rama. Estos resultados de regularidad están fuera de los alcances de esta tesis, sin embargo, se mencionan para que el lector se dé una idea de los alcances que tiene este problema.

En términos del desarrollo de capítulos los pasos a seguir serán los siguientes. Comenzaremos este trabajo observando la relación entre las superficies mínimas y el funcional de área, verificaremos lo que ya hemos mencionado: una superficie mínima es un punto crítico del funcional de área. Parametrizando esta superficie mínima con coordenadas isotermas

$$|X_u|^2 = |X_v|^2, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

la condición de ser una superficie mínima se traducirá en que

$$\Delta X = 0.$$

En el capítulo siguiente empezaremos a estudiar el ya mencionado problema de Plateau. Con base en las ideas expuestas arriba nos enfocaremos en resolver el problema de Plateau más general, i.e., encontrar una superficie de área mínima, un problema menos exigente. Luego haremos un análisis del funcional de Dirichlet y su relación con el funcional de área, este análisis arrojará como resultado que las soluciones a nuestro problema de Plateau

⁴Primera ley: *Tres superficies de jabón se intersectan a lo largo de una línea. El ángulo formado por los planos tangenciales a dos superficies que se intersectan, en cualquier punto a lo largo de la línea de intersección de las tres superficies, es de 120° .*

Segunda ley: *Cuatro líneas, todas formadas por la intersección de tres superficies, se intersectan en un punto y el ángulo formado por cada par de ellas es de $109^\circ 28'$.*

Tercera ley: *Una película de jabón que puede moverse libremente sobre una superficie la intersecta en un ángulo de 90° .*

son los mínimos del funcional de Dirichlet. Posteriormente nuestra tarea será minimizar el funcional de Dirichlet, aquí daremos dos métodos de minimización: uno será construyendo una sucesión minimizante de funciones armónicas y otro mediante el uso de resultados clásicos del cálculo de variaciones. Cabe recalcar que ambos métodos se basan en el Lema de Courant-Lebesgue, un resultado crucial para este trabajo.

Para finalizar, en el último capítulo, verificaremos que la superficie mínima que encontramos al minimizar el funcional de Dirichlet es, en efecto, una superficie de área mínima. Esto es una consecuencia de la íntima relación del funcional de Dirichlet y el funcional de área. Primero exhibiré una prueba del lema de ϵ -conformalidad de Morrey, en realidad mostraré un caso especial del lema, sin embargo, la prueba de este caso especial y la prueba del caso general son, en esencia, bastante parecidas. La inclusión de esta prueba se debe a que el lema de Morrey es una referencia clásica del tema y por lo bastante singular que resulta su prueba. Debido a que el lema de Morrey no será suficiente para probar lo que deseamos, daré otra prueba del resultado utilizando los métodos desarrollados en el Capítulo 2. Esto concluirá nuestra búsqueda de una superficie de área mínima.

Capítulo 1

Superficies Mínimas y el Funcional de Área

Iniciaremos este capítulo recordando algunos conceptos básicos de Geometría Diferencial. Nuestro primer objetivo es presentar la teoría necesaria para entender el concepto de curvatura media, este concepto es fundamental para poder estudiar a las superficies mínimas y la relación que tienen éstas con las superficies de área mínima.

Definición 1.1. *Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si, para cada $p \in S$, existe una vecindad V en \mathbb{R}^3 y una función $X : U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que*

1. X es diferenciable (i.e. $X \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$).
2. X es invertible.
3. Para cada $q \in U$, la diferencial $\nabla X_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La condición 3 es equivalente a pedir que las dos columnas (X_u, X_v) de la matriz ∇X_q sean linealmente independientes ó, equivalentemente, que el vector $X_u \wedge X_v \neq 0$. Más adelante lidiaremos, esencialmente, con superficies que pueden ser descritas sólo por una parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para fines prácticos, en algunos momentos, identificaremos a las superficies con su parametrización, i.e., diremos que X es una superficie. Esperamos que esto no confunda al lector.

El trabajar con superficies regulares nos permite definir el concepto de plano tangente.

Definición 1.2. *El plano tangente a la superficie regular S en el punto p es el conjunto*

$$T_p(S) := \{\alpha'(0) \mid \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3, \alpha \text{ diferenciable y } \alpha(0) = p\}$$

No es difícil demostrar que el conjunto $T_p(S)$ es un espacio vectorial. Aun más, $T_p(S)$ es un plano perpendicular al vector $X_u \wedge X_v$ que pasa por el punto p y que, además, $\{X_u, X_v\}$ es una base de este plano¹.

¹Véase, por ejemplo: [7].

Definición 1.3. Sea S una superficie regular. La forma cuadrática $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2 \geq 0$$

se llama la **primera forma fundamental** de la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, en el punto $p \in S$.

Es posible expresar la primera forma fundamental en términos de la base $\{X_u, X_v\}$, del plano tangente, asociada a una parametrización $X(u, v)$ en p , esto de la siguiente manera: Un elemento $w \in T_p(S)$ es un vector tangente a una curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$; tal que, $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, así, obtenemos que

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= (u')^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle X_u, X_v \rangle + (v')^2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= (u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G \end{aligned}$$

donde

$$E := \langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2, \quad F := \langle X_u, X_v \rangle \quad \text{y} \quad G := \langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2$$

son los coeficientes de la forma cuadrática (primera forma fundamental) en la base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(S)$.

Definición 1.4. Sea S una superficie regular. Una **región regular**, R , de S es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su frontera, ∂R , es la imagen de un difeomorfismo regular (i.e., la diferencial no es cero) excepto en un número finito de puntos, cuyo dominio es el círculo.

Tomando en cuenta la definición anterior y notando que la función $|X_u \wedge X_v|$ proporciona el área del paralelogramo generado por los vectores X_u y X_v , podemos intuir la siguiente definición (para ver una justificación véase, por ejemplo: [5] ó [7]).

Definición 1.5. S una superficie regular. Sea $R \subseteq S$ una región regular acotada contenida en una vecindad coordenada de la parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. El número positivo

$$\iint_Q |X_u \wedge X_v| \, du \, dv =: A(R), \quad Q = X^{-1}(R)$$

es el **área** de R .

Ahora, la siguiente fórmula

$$|X_u \wedge X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \tag{1.1}$$

nos lleva a que

$$A(R) = \iint_Q |X_u \wedge X_v| \, du \, dv = \iint_Q \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} \, du \, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

La fórmula (1.1) se verifica desarrollando cada término. En el caso en que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sea una región regular acotada y S se pueda cubrir con una sola parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ denotaremos el área de la superficie por $A(X)$.

Antes de comenzar nuestro análisis del funcional de área introduciremos los siguientes conceptos, los cuales son de gran importancia.

Definición 1.6. Una superficie regular, S , es **orientable** si admite un campo diferenciable de vectores unitarios en toda la superficie, i.e., si el campo

$$N_p = N(p) := \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(p), \quad p \in S$$

es diferenciable.

N_p es conocido como el mapeo de Gauss. No es difícil observar que N_p es diferenciable. La diferencial, dN_p , de N en p es un mapeo lineal de $T_p(S)$ en $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$. Dado que $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(\mathbb{S}^2)$ son planos paralelos, dN_p puede considerarse como un mapeo de $T_p(S)$ en $T_p(S)$. La transformación lineal $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ opera de la siguiente manera:

Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S tal que $\alpha(0) = p$, consideremos la curva parametrizada $N \circ \alpha(t) =: N(t)$ en \mathbb{S}^2 , i.e., restringimos el vector normal N a la curva $\alpha(t)$. Luego, el vector tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ es un vector en $T_p(S)$. Este vector indica como varía N restringido a $\alpha(t)$, en $t = 0$; i.e., dN_p mide como se aleja N de $N(p)$ en una vecindad de p . En el caso de curvas esta medida está dada por un número (la curvatura), en el caso de superficies está caracterizada por un mapeo lineal.

Proposición 1.1. La diferencial $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ del mapeo de Gauss es un operador lineal auto-adjunto².

El hecho de que dN_p sea un operador auto-adjunto nos permite asociarle a dN_p la siguiente forma cuadrática.

Definición 1.7. La forma cuadrática $II_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle$$

se llama la **segunda forma fundamental** de S en p .

Para obtener una interpretación geométrica de esta forma cuadrática necesitaremos de la siguiente definición.

Definición 1.8. Sea S una superficie regular y C una curva regular en S que pasa por un punto $p \in S$, i.e., $p \in C \subset S$. Sea k la curvatura³ de C en p y θ tal que $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C en p y N es el vector normal a S en p . El número $k_n := k \cos(\theta)$ se denomina la **curvatura normal de C en p** . (En otras palabras, k_n es la longitud de la proyección del vector k_n sobre el vector normal a la superficie en p ; con un signo dado por la orientación de S en p .)

Para dar una interpretación a la segunda forma fundamental, II_p , consideremos una curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$ y tal que $\alpha(0) = p$, aquí s es la longitud

²La prueba puede verse, por ejemplo, en : [7].

³Si C es una curva regular, parametrizada por $\alpha(t)$, su curvatura se define como:

$$k := |\alpha''(t)|.$$

de arco de C . Si denotamos por $N(s)$ la restricción del vector normal N a la curva $\alpha(s)$, tenemos que:

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$$

y

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N, k_n \rangle(p) \\ &= k_n(p). \end{aligned}$$

En otros términos, el valor de la segunda forma fundamental, II_p , evaluada en un vector unitario $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por p y es tangente a v .

Una consecuencia más de que el operador dN_p sea autoadjunto es que para cada $p \in S$ existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ y $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Además, k_1 y k_2 son el máximo y el mínimo, respectivamente, de la segunda forma fundamental, II_p , restringida al círculo unidad de $T_p(S)$; es decir, son los valores extremos de la curvatura normal en p . Esto motiva las siguientes definiciones.

Definición 1.9. *La curvatura normal máxima, k_1 , y la curvatura normal mínima, k_2 , se denominan **las curvaturas principales en p** . Las direcciones correspondientes, es decir, las direcciones dadas por los vectores propios e_1 y e_2 , se denominan **las direcciones principales en p** .*

Definición 1.10. *Sea S una superficie regular. Si $p \in S$ y $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ es la diferencial del mapeo de Gauss. Se define a **la curvatura media, H , de S en p** como el negativo de un medio de la traza de la matriz asociada a dN_p (i.e. $H = -\frac{1}{2} \text{traza}(dN_p)$).*

Analicemos un poco la definición anterior. La matriz asociada a dN_p en la base $\{e_1, e_2\}$ de vectores propios es

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$$

luego, el negativo de un medio de la traza, i.e., la curvatura media, es $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. He aquí por que se le llama curvatura media, ya que sólo es el promedio de la curvatura normal máxima y la curvatura normal mínima. Recordemos que la traza de una matriz es invariante bajo cambios de base.

La definición de curvatura media arriba expuesta resulta un poco difícil de manejar en situaciones generales, sin embargo, es posible dar una expresión para la curvatura media en coordenadas locales. Primero examinemos como luce la segunda forma fundamental en coordenadas locales:

Sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva parametrizada sobre una superficie S , entonces,

$$\alpha'(t) = X_u u' + X_v v'$$

y, notando que $dN_p(X_u) = N_u$ y $dN_p(X_v) = N_v$, se tiene que

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u y N_v pertenecen a $T_p(S)$, éstos son de la forma

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \quad (1.2)$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v. \quad (1.3)$$

Por lo tanto,

$$dN_p(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v$$

es decir, en la base $\{X_u, X_v\}$, la matriz de coeficientes asociada a dN_p es

$$dN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, haciendo algo similar a lo hecho arriba con la primera forma fundamental, y dado que dN_p es autoadjunto, podemos dar una expresión de la segunda forma fundamental en términos de la base $\{X_u, X_v\}$, i.e.,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = (u')^2 \langle N, X_{uu} \rangle + 2u'v' \langle N, X_{uv} \rangle + (v')^2 \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= (u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g \end{aligned}$$

donde

$$e := \langle N, X_{uu} \rangle = -\langle N_u, X_u \rangle \quad (1.4)$$

$$f := \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle \quad (1.5)$$

$$g := \langle N, X_{vv} \rangle = -\langle N_v, X_v \rangle. \quad (1.6)$$

Para consultar los detalles véase [7].

Con esta información podemos obtener a las entradas, a_{ij} , de la matriz dN en función de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental. De las ecuaciones (1.2) y (1.3) tenemos que

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F$$

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G$$

Estas ecuaciones se pueden poner en forma matricial, i.e.,

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Estas expresiones nos permiten escribir a la curvatura media en función de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, a saber:

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right)$$

es decir,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (1.7)$$

Con esta expresión para la curvatura media estamos en condiciones de estudiar las superficies mínimas y su conexión con el funcional de área.

Definición 1.11. *Una superficie regular parametrizada, S , es **mínima** si su curvatura media es cero en todos sus puntos (i.e., $H(p) = 0 \quad \forall p \in S$).*

Para entender porqué usamos la palabra “mínima” para este tipo de superficies será necesario introducir la noción de variaciones normales. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada. Escojamos un dominio acotado $D \subseteq U$ y una función diferenciable $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$. La *variación normal* de $X(\overline{D})$, determinada por h , es el mapeo

$$\phi : \overline{D} \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que}$$

$$\phi(u, v, \epsilon) = X(u, v) + \epsilon h(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}, \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$$

Ahora, para cada $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, el mapeo

$$X_\epsilon : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

$$X_\epsilon(u, v) = \phi(u, v, \epsilon)$$

es una superficie parametrizada tal que

$$\frac{\partial X_\epsilon}{\partial u} = X_u + \epsilon h_u N + \epsilon h N_u$$

$$\frac{\partial X_\epsilon}{\partial v} = X_v + \epsilon h_v N + \epsilon h N_v.$$

Luego, si denotamos por E_ϵ , F_ϵ y G_ϵ a los coeficientes de la primera forma fundamental de X_ϵ , obtenemos:

$$\begin{aligned} E_\epsilon &= \left\langle \frac{\partial X_\epsilon}{\partial u}, \frac{\partial X_\epsilon}{\partial u} \right\rangle = \langle X_u + \epsilon h_u N + \epsilon h N_u, X_u + \epsilon h_u N + \epsilon h N_u \rangle \\ &= E + \epsilon h_u \langle X_u, N \rangle + \epsilon h \langle X_u, N_u \rangle + \epsilon h_u \langle N, X_u \rangle + \epsilon^2 h_u^2 \langle N, N \rangle \\ &\quad + \epsilon^2 h h_u \langle N, N_u \rangle + \epsilon h \langle N_u, X_u \rangle + \epsilon^2 h h_u \langle N_u, N \rangle + \epsilon^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle \end{aligned}$$

Partiendo de aquí, recordando que $\{X_u, X_v\} \perp N$, pues N es la normal a la superficie, y también que

$$dN_p(X_u) = N_u \in T_p(S)$$

$$dN_p(X_v) = N_v \in T_p(S)$$

(Véase [7]) obtenemos las siguientes igualdades (haciendo un cálculo análogo al de arriba para G y F):

$$\begin{aligned} E_\epsilon &= E + 2\epsilon h \langle X_u, N_u \rangle + \epsilon^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + \epsilon^2 h_u^2 \\ F_\epsilon &= F + \epsilon h (\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + \epsilon^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + \epsilon^2 h_u h_v \\ G_\epsilon &= G + 2\epsilon h \langle X_v, N_v \rangle + \epsilon^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + \epsilon^2 h_v^2 \end{aligned}$$

Ahora, utilizando las relaciones (1.4), (1.5), (1.6) y (1.7); llegamos a que:

$$\begin{aligned} E_\epsilon G_\epsilon - F_\epsilon^2 &= (E - 2\epsilon h e + \epsilon^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + \epsilon^2 h_u^2)(G - 2\epsilon h g + \epsilon^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + \epsilon^2 h_v^2) \\ &\quad - (F - 2\epsilon h f + \epsilon^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle \epsilon^2 h_u h_v)^2 \\ &= EG - 2\epsilon h g E - 2\epsilon h e G - F^2 + 4\epsilon h f F + o(\epsilon) \\ &= EG - F^2 - 2\epsilon h (gE - 2fF + eG) + o(\epsilon) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4\epsilon h H) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

donde $o(\epsilon)$ es tal que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$$

y H es la curvatura media. El cálculo anterior nos permite expresar el área de la superficie X_ϵ , i.e.,

$$A(\epsilon) := A(X_\epsilon) = \iint_D \sqrt{E_\epsilon G_\epsilon - F_\epsilon^2} \, du \, dv = \iint_D \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4\epsilon h H) + o(\epsilon)} \, du \, dv$$

Luego, la siguiente diferencia

$$\begin{aligned} A(\epsilon) - A(0) &= \iint_D \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4\epsilon h H) + o(\epsilon)} \, du \, dv - \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\ &= - \iint_D \frac{[4\epsilon h H(EG - F^2) + o(\epsilon)]}{\sqrt{(EG - F^2)(1 - 4\epsilon h H) + o(\epsilon)} + \sqrt{EG - F^2}} \, du \, dv \end{aligned}$$

nos permite concluir que la función

$$\begin{aligned} A(\cdot) : (-\epsilon_0, \epsilon_0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \epsilon &\longmapsto A(\epsilon) := A(X_\epsilon) \end{aligned}$$

es diferenciable en $\epsilon = 0$ y además

$$A'(0) = -2 \iint_D hH\sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (1.8)$$

Con lo expuesto arriba estamos en condiciones de justificar el uso de la palabra “mínima” para nombrar a las superficies cuya curvatura media es cero (i.e., $H \equiv 0$).

Proposición 1.2. *Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada y sea $D \subseteq U$ un dominio acotado. Entonces X es mínima si y sólo si $A'(0) = 0$ para cualquier D y cualquier variación normal de $X(\overline{D})$.*

Prueba: Si $H \equiv 0$, la relación (1.8) implica que $A'(0) = 0$.

Por otro lado, supongamos que existe $q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$. Sea $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable, tal que $h(q) = H(q)$ y $h \equiv 0$ fuera de una vecindad, W , de q . Entonces, $A'(0) < 0$ para la variación determinada por h , pues, h y H tienen el mismo signo en W .

q.e.d.

La proposición anterior asegura que cualquier región acotada, $X(\overline{D})$, de **una superficie mínima, es un punto crítico del funcional de área** para cualquier variación normal de $X(\overline{D})$. Dado que el punto crítico puede no ser un mínimo, la palabra “mínima” parece un tanto inadecuada. Empero, esta definición permanece hasta nuestros días en honor a J.L. Lagrange, quien la introdujo en el año 1760.

Para finalizar con nuestro análisis del funcional de área y su relación con las superficies mínimas será conveniente introducir, para una superficie regular parametrizada, el **vector de curvatura media**, que se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{H} := HN$$

donde H es la curvatura media y \mathbf{N} es el vector normal unitario a la superficie.

El significado geométrico de la dirección de \mathcal{H} puede adquirirse de la ecuación (1.8), procediendo así: escogemos $h = H$, luego, para esta variación particular

$$A'(0) = -2 \iint_D \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \leq 0.$$

esto significa que si deformamos $X(\overline{D})$ en la dirección del vector \mathcal{H} , el área, en principio, no crece.

1.1. Coordenadas Isotermas y Mapeo Conforme

El vector \mathcal{H} definido arriba tiene otra interpretación bastante importante que es muy utilizada en la teoría de superficies mínimas y que será fundamental para nosotros.

Definición 1.12. Una superficie regular parametrizada, $X(u, v)$, es *isoterma* si y sólo si

$$|X_u|^2 = |X_v|^2 \quad \text{y} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

Proposición 1.3. Sea $X = X(u, v)$ una superficie regular parametrizada. Supongamos que X es isoterma. Entonces,

$$\Delta X = 2\lambda^2 \mathcal{H}$$

donde $\lambda^2 := |X_u|^2 = |X_v|^2$ y $\Delta X = X_{uu} + X_{vv}$.

Prueba: Por hipótesis

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad \text{y} \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

derivando estas expresiones, tenemos que

$$\langle X_u, X_{uu} \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0$$

luego,

$$\langle X_u, X_{uu} \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle$$

de aquí deducimos que

$$\langle X_u, X_{uu} + X_{vv} \rangle = 0 \tag{1.9}$$

y análogamente se deduce que

$$\langle X_v, X_{uu} + X_{vv} \rangle = 0. \tag{1.10}$$

Las ecuaciones (1.9) y (1.10) indican que el vector $X_{uu} + X_{vv}$ es paralelo a N . Como X es isoterma, la fórmula (1.7) se reduce a

$$H = \frac{1}{2} \frac{(e + g)}{\lambda^2}$$

luego, por (1.4) y (1.6)

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle.$$

Por lo tanto

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathcal{H}$$

ya que $X_{uu} + X_{vv}$ es paralelo a N .

q.e.d.

De aquí se desprende el siguiente Corolario que es crucial para el desarrollo de esta tesis.

Corolario 1.1. Sea $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una superficie regular parametrizada. Supongamos que X es isoterma. Entonces X es mínima si y sólo si $\Delta X = 0$.

Para finalizar este capítulo estudiaremos la relación entre un mapeo conforme y una parametrización en coordenadas isotermas, esto será de utilidad más adelante.

Definición 1.13. Sean S y S' superficies regulares. Un difeomorfismo $\phi : S \rightarrow S'$ se llama **conforme** si para todo $p \in S$ y cualesquiera $v_1, v_2 \in T_p(S)$, se tiene que

$$\langle d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle$$

donde λ^2 es una función diferenciable en S y tal que $\lambda^2(p) \neq 0 \quad \forall p \in S$.

La interpretación geométrica de la anterior definición es que los ángulos se preservan bajo mapeos conformes. Veamos, sean $\alpha : I \rightarrow S$ y $\beta : I \rightarrow S$ dos curvas en S que se intersectan, digamos, en $t = 0$ (sin pérdida de generalidad podemos suponer que están parametrizadas con el mismo parámetro). El ángulo, θ , en $t = 0$ está dado por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{|\alpha'| |\beta'|}$$

Ahora, un mapeo conforme, $\phi : S \rightarrow S'$, transforma α y β en las curvas $\phi \circ \alpha : I \rightarrow S'$ y $\phi \circ \beta : I \rightarrow S'$, respectivamente. Estas curvas se intersectan en $t = 0$ y el ángulo, θ' , entre ellas está dado por:

$$\cos(\theta') = \frac{\langle d\phi(\alpha'), d\phi(\beta') \rangle}{|d\phi(\alpha')| |d\phi(\beta')|} = \frac{\lambda^2 \langle \alpha', \beta' \rangle}{\lambda^2 |\alpha'| |\beta'|} = \cos(\theta).$$

Lo anterior muestra que las curvas $\phi \circ \alpha$ y $\phi \circ \beta$, se intersectan con un ángulo idéntico al de las curvas α y β .

Proposición 1.4. Un difeomorfismo, $\phi : S \rightarrow S'$, es un mapeo conforme si y sólo si para todo $p \in S$ y para todo $v \in T_p(S)$ se cumple

$$I_{\phi(p)}(d\phi_p(v)) = \lambda^2 I_p(v)$$

donde I es la primera forma fundamental.

Prueba: Si ϕ es conforme, tomando $v_1 = v_2$ en la definición, llegamos a que $I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1)) = \lambda^2 I_p(v_1)$.

Por otro lado, supongamos que $I_{\phi(p)}(d\phi_p(v)) = \lambda^2 I_p(v)$ para toda $v \in T_p(S)$. Sean $v_1, v_2 \in T_p(S)$. Claramente se tiene la siguiente identidad (recordemos que $T_p(S)$ es un espacio vectorial):

$$\begin{aligned} I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1 + v_2)) &= I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1) + d\phi_p(v_2)) \\ &= I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1)) + 2\langle d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2) \rangle + I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_2)) \end{aligned}$$

es decir,

$$I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1 + v_2)) - I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1)) - 2\langle d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2) \rangle - I_{\phi(p)}(d\phi_p(v_2)) = 0. \quad (1.11)$$

Análogamente,

$$I_p(v_1 + v_2) - I_p(v_1) - 2\langle v_1, v_2 \rangle - I_p(v_2) = 0. \quad (1.12)$$

Multiplicando (1.12) por λ^2 , igualando con (1.11) y utilizando nuestra hipótesis (i.e., $I_{\phi(p)}(d\phi_p(v)) = \lambda^2 I_p(v)$), concluimos que:

$$\langle d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2) \rangle = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle.$$

q.e.d.

Proposición 1.5. Sean $X : U \rightarrow S$ y $\bar{X} : U \rightarrow \bar{S}$ parametrizaciones tales que $E = \lambda^2 \bar{E}$, $F = \lambda^2 \bar{F}$ y $G = \lambda^2 \bar{G}$ en U ; donde λ^2 es una función diferenciable en U , tal que $\lambda^2(p) \neq 0 \quad \forall p \in U$. Entonces, el mapeo $\phi := \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{S}$ es conforme.

Prueba: Sea $p \in X(U)$ y $w \in T_p(S)$. Sabemos que w es tangente a una curva $X(\alpha(t))$, en $t = 0$, donde $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en U , luego, w puede escribirse como

$$w = X_u u' + X_v v' \quad (t = 0).$$

Ahora, también sabemos que el vector $d\phi_p(w)$ es tangente a la curva $\bar{X}(\alpha(t))$, $t = 0$, luego

$$d\phi_p(w) = \bar{X}_u u' + \bar{X}_v v' \quad (t = 0).$$

Entonces, como

$$I_p(w) = (u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G$$

e

$$I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = (u')^2 \bar{E} + 2u'v'\bar{F} + (v')^2 \bar{G}$$

podemos concluir que

$$I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = \lambda^2 I_p(w) \quad \forall p \in S \quad \forall w \in T_p(S).$$

Por lo tanto, ϕ es conforme.

q.e.d.

Corolario 1.2. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una superficie regular parametrizada. Si X es isoterma, entonces, X es un mapeo conforme.

Prueba: Sea $Y : U \subseteq \mathbb{R}^2 \hookrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^3$, el mapeo inclusión. Claramente, Y , es una superficie regular parametrizada. Notemos que

$$E_Y = 1, \quad F_Y = 0 \quad y \quad G_Y = 1.$$

Definamos $\lambda^2(p) := \frac{1}{E(p)}$, λ^2 está bien definida, porque X es una superficie regular ($X_u \neq 0$). Además, X isoterma implica que

$$E_Y = \lambda^2 E, \quad F_Y = \lambda^2 F \quad y \quad G_Y = \lambda^2 G.$$

Por último, utilizando la proposición anterior llegamos a que

$$X = X \circ Y^{-1} : U \longrightarrow S$$

es un mapeo conforme.

q.e.d.

Entonces, cada vez que hablemos de una parametrización isoterma estaremos hablando, también, de un mapeo conforme.

Capítulo 2

El Problema de Plateau

A continuación nos disponemos a resolver el Problema de Plateau. Empezaremos argumentando por qué le llamaremos solución del problema de Plateau a una superficie mínima. Después expondremos el principio variacional que nos llevará a encontrar una solución, del Problema de Plateau, mediante la minimización de un funcional. Para finalizar verificaré que la superficie mínima que encontramos también es de área mínima.

2.1. Formulación del problema

Una primera aproximación al problema de Plateau nos llevaría a tratar de minimizar el funcional de área

$$A(X) = \iint_B |X_u \wedge X_v| \, du \, dv = \iint_B \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} \, du \, dv$$

en la clase de superficies¹ $X \in C(\bar{B}; \mathbb{R}^3)$ que, restringidas a la frontera, son un homeomorfismo de ∂B en Γ . Sin embargo, este método produce, literalmente, soluciones con *cabellos*. Esto se puede ver de la siguiente manera. Supongamos que $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ es un círculo contenido en el plano (x, y) , es decir

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

y sea $K(\Gamma) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ el disco acotado por Γ . Como consecuencia del principio del máximo, la única superficie mínima, X , de clase $C(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B; \mathbb{R}^3)$ que mapea ∂B sobre Γ (como homeomorfismo) y que, en B , satisface

$$\Delta X = 0 \tag{2.1}$$

y

$$|X_u|^2 = |X_v|^2, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0 \tag{2.2}$$

es un mapeo conforme², regular, de \bar{B} sobre $K(\Gamma)$.

Por otro lado, entre los mínimos del funcional de área $A(X)$, hay mapeos, $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

¹A partir de aquí sólo consideraremos el caso en que las superficies pueden cubrirse con una única parametrización

²Revisar el Teorema 1.2.

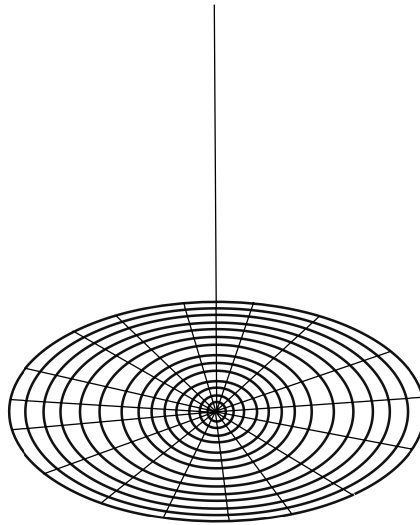


Figura 2.1: Superficie con un *cabello*.

que parametrizan conjuntos que se pueden ver como *discos con cabellos* acotados por Γ . Por ejemplo, consideremos el conjunto

$$K^*(\Gamma) = K(\Gamma) \cup I$$

donde $K(\Gamma)$ es el disco definido arriba e I es el *cabello*

$$I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0, 0 \leq z \leq 1\}$$

que crece en el centro de $K(\Gamma)$, Figura 2.1.

Ahora, no es difícil notar que $K^*(\Gamma)$ puede parametrizarse por el mapeo $X \in C^\infty(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, dado por:

$$X(u, v) = \begin{cases} (0, 0, \phi(r)) & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ (\psi(r) \cos(\theta), \psi(r) \sin(\theta), 0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{u^2 + v^2}$,

$$\phi(r) := e^{4\left(1 - \frac{1}{1-4r^2}\right)} \quad \text{y} \quad \psi(r) := e^{4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4r^2-1}\right)}.$$

Notemos que la superficie $X(u, v)$ no es regular³ para $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, lo cual es evidente por el hecho de que todo el disco $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ es mapeado en el *cabello* I . Aún más, esta superficie minimiza el funcional de área, ya que el *cabello* I no contribuye al área de la superficie.

En consecuencia, si quisiéramos utilizar el problema variacional de encontrar un mínimo de $A(X)$ sobre la clase $C(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, nos encontraríamos con estas soluciones nada agradables. Con el fin de encontrar una solución razonable que satisfaga las ecuaciones (2.1) y (2.2), tenemos que deshacernos de estas soluciones con cabellos. Una forma de hacer esto

³En el sentido de la Definición 1.1.

se deriva de la relación que tienen los puntos críticos del funcional de Dirichlet en dos dimensiones

$$D(X) = \frac{1}{2} \iint_B (|X_u|^2 + |X_v|^2) du dv = \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X|^2 du dv$$

y el funcional de área $A(X)$. Esta relación puede notarse observando que

$$\sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2} \leq \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2} \leq \frac{1}{2} (|X_u|^2 + |X_v|^2)$$

de aquí que $A(X) \leq D(X)$. Aún más, la igualdad se obtiene si las relaciones conformes (2.2) se cumplen, i.e.,

$$A(X) = D(X) \quad \text{si y sólo si} \quad |X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v. \quad (2.3)$$

Es decir, *los valores del funcional de área y del funcional de Dirichlet coinciden exactamente cuando se evalúan en una superficie, X , parametrizada con coordenadas isotermas (conformes) y, en general, la integral de Dirichlet es mayor que el funcional de área.*

Esta observación hace que la idea de que los mínimos de $D(X)$ sean también mínimos de $A(X)$ parezca plausible. De hecho, esta percepción es correcta, sólo hay que plantear el problema de minimización en una clase adecuada (la cual definiremos a detalle más adelante). Nuestro análisis del problema partirá de esta idea, es decir, minimizaremos $D(X)$ en vez de $A(X)$ y, después de hacer esto, probaremos que los mínimos de $D(X)$ en cierta clase, \mathcal{C} , son superficies mínimas que también minimizan el funcional de área. Algunas de las ventajas de utilizar la integral de Dirichlet, $D(X)$, en el proceso de minimización son las siguientes:

- No es conveniente llevar a cabo el proceso de minimización sobre superficies regulares, esto debido a que esta clase no es cerrada con respecto a la convergencia uniforme o con respecto a la convergencia en H^1 (el espacio de Sobolev de funciones en L^2 con derivadas débiles de cuadrado integrable) y, por esto, la convergencia de sucesiones minimizantes en esta clase será muy difícil (o incluso imposible) de obtener. Sin embargo, si admitimos superficies más generales para la minimización, las superficies con *cabellos* pueden aparecer cuando tratemos de minimizar a $A(X)$. Estas superficies con *cabellos* serían excluidas si, en vez de $A(X)$, tratamos de minimizar a $D(X)$.
- Las sucesiones minimizantes de $D(X)$ tienen mejores propiedades de compacidad que las de $A(X)$.

Las afirmaciones que se hacen en los puntos anteriores se basan en que la expresión $|p|^2 + |q|^2$ se anula sólo si $p = 0$ y $q = 0$, mientras que $|p \wedge q|$ se anula para cualquier par de vectores colineales p y q . Además, $A(X)$ es invariante bajo cualquier cambio de parámetros⁴ mientras que $D(X)$ permanece invariante sólo bajo reparametrizaciones conformes, es decir, el grupo de simetrías para el funcional de Dirichlet es considerablemente más pequeño, pues, la relación $D(X \circ g) = D(X)$ sólo se da para difeomorfismos conformes de B .

⁴Véase [7].

Proposición 2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado. Sea $\phi(u, v) = (\lambda(u, v), \mu(u, v))$ un difeomorfismo conforme de $\bar{\Omega}$ en $\bar{\Omega}'$. Sea $X \in H^1(\Omega'; \mathbb{R}^3)$ y $Y := X \circ \phi$. Entonces

$$\iint_{\Omega} (|Y_u|^2 + |Y_v|^2) du dv = \iint_{\Omega'} (|X_\lambda|^2 + |X_\mu|^2) d\lambda d\mu$$

Prueba: Por la regla de la cadena para derivadas débiles (podemos usarla, ya que $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}'$ es difeomorfismo; ver por ejemplo: [2]), tenemos:

$$Y_u = X_\lambda \lambda_u + X_\mu \mu_u$$

$$Y_v = X_\lambda \lambda_v + X_\mu \mu_v$$

de aquí que:

$$|Y_u|^2 = \langle Y_u, Y_u \rangle = \lambda_u^2 |X_\lambda|^2 + 2\lambda_u \mu_u \langle X_\lambda, X_\mu \rangle + \mu_u^2 |X_\mu|^2 \quad (2.4)$$

$$|Y_v|^2 = \langle Y_v, Y_v \rangle = \lambda_v^2 |X_\lambda|^2 + 2\lambda_v \mu_v \langle X_\lambda, X_\mu \rangle + \mu_v^2 |X_\mu|^2 \quad (2.5)$$

Como ϕ es conforme, debe de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemman:

$$\lambda_u = \mu_v \quad \lambda_v = -\mu_u$$

Esto, aunado a (2.4) y (2.5), nos lleva a que:

$$|Y_u|^2 + |Y_v|^2 = (\lambda_u^2 + \lambda_v^2) |X_\lambda|^2 + (\mu_u^2 + \mu_v^2) |X_\mu|^2 = (|X_\lambda|^2 + |X_\mu|^2) (\lambda_u^2 + \lambda_v^2)$$

luego,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (|Y_u|^2 + |Y_v|^2) du dv &= \iint_{\Omega} (|X_\lambda|^2 + |X_\mu|^2) (\lambda_u^2 + \lambda_v^2) du dv = \iint_{\Omega} (|X_\lambda|^2 + |X_\mu|^2) \det(\nabla \phi) du dv \\ &= \iint_{\Omega'} (|X_\lambda|^2 + |X_\mu|^2) d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se tiene por el teorema de cambio de variable para la integral de Lebesgue (el teorema puede verse en [2]).

q.e.d.

Con base a lo expuesto arriba nos disponemos a definir a qué le llamaremos una solución del problema de Plateau. Primero recordemos qué es una curva de Jordan. Sea

$$B := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}.$$

Definición 2.1. Una **curva de Jordan cerrada**, Γ , en \mathbb{R}^n es un subconjunto de \mathbb{R}^n ($\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$) que es homeomorfo a ∂B . Distinguiendo un homeomorfismo fijo $\gamma : \partial B \rightarrow \Gamma$ equipamos a Γ con una orientación (i.e. Γ está orientada por γ).

Nota: A partir de aquí al mencionar el conjunto B nos referiremos a la bola unitaria con centro en el origen, como arriba.

Definición 2.2 (Solución al problema de Plateau). Dada una curva cerrada de Jordan, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una **solución al problema de Plateau para la curva de frontera** Γ , si cumple las siguientes 3 condiciones:

$$X \in C^0(\bar{B}; \mathbb{R}^3) \cap C^2(B; \mathbb{R}^3) \quad \text{y} \quad \Delta X = 0 \quad (2.6)$$

$$|X_u|^2 = |X_v|^2 \quad \text{y} \quad X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{en } B \quad (2.7)$$

$$\text{La restricción } X|_{\partial B} \text{ es un homeomorfismo de } \partial B \text{ en } \Gamma \quad (2.8)$$

Ya está, nuestra definición de solución al problema no es más que encontrar una superficie mínima, parametrizada con coordenadas isotermas⁵, que tenga como frontera a la curva Γ . Recordemos que las superficies mínimas son puntos críticos del funcional de área, entonces, a primera vista, parece que nuestra definición de solución al problema de Plateau puede que no sea de área mínima, sin embargo, como se verá más adelante, debido a los métodos utilizados para encontrar una solución a este problema, la solución que encontraremos también será de área mínima. Ésto se observará en capítulos posteriores.

Para proseguir nuestro análisis, en la siguiente sección, estudiaremos la relación de esta definición con los mínimos del funcional de Dirichlet.

2.2. El principio variacional

Con el fin de relacionar los mínimos de la integral de Dirichlet, $D(X)$, y la Definición (2.2) verificaremos ciertos principios variacionales que cumple $D(X)$. Para que estos principios funcionen será necesario introducir una clase de funciones admisibles apropiada para llevar a cabo el proceso de minimización. Empezaremos esta sección definiendo la clase de funciones sobre la que minimizaremos el funcional $D(X)$.

Primero, el espacio natural para llevar a cabo estos procesos de minimización es $H^1(B; \mathbb{R}^3)$ el espacio de Sobolev de funciones en $L^2(B; \mathbb{R}^3)$ con derivadas débiles de cuadrado integrable, este espacio es muy conveniente debido a sus propiedades de convergencia, pues, recordemos que el producto escalar

$$\langle X, Y \rangle_{H^1} = \iint_B (X \cdot Y + X_u \cdot Y_u + X_v \cdot Y_v) \, du \, dv = \iint_B (X \cdot Y + \nabla X \cdot \nabla Y) \, du \, dv$$

induce la norma

$$\|X\|_{H^1}^2 = \iint_B (|X|^2 + |\nabla X|^2) \, du \, dv = \iint_B (|X|^2 + |X_u|^2 + |X_v|^2) \, du \, dv$$

con la cual $H^1(B; \mathbb{R}^3)$ es completo. Aquí

$$\nabla X = \begin{pmatrix} D_u x & D_v x \\ D_u y & D_v y \\ D_u z & D_v z \end{pmatrix} = (X_u \quad | \quad X_v).$$

⁵Recordar el Corolario 1.1.

D_u y D_v denotan a las derivadas débiles con respecto a u y v , respectivamente.

Ahora, necesitamos considerar la condición de frontera (2.8), de la Definición 2.2, esta condición es equivalente a pedir que $X|_{\partial B}$ sea una función continua y estrictamente monótona (i.e. inyectiva) de ∂B en Γ . Sin embargo, esta condición no es cerrada bajo la convergencia uniforme (ni bajo la convergencia en H^1) en ∂B , ya que el límite uniforme de funciones estrictamente monótonas, en general, no es una función estrictamente monótona. Lo que sí se puede asegurar es que el límite es una función débilmente monótona. Para ser más precisos consideremos la siguiente

Definición 2.3. *Supongamos que Γ es una curva cerrada de Jordan en \mathbb{R}^n y que está orientada por un homeomorfismo $\gamma : \partial B \rightarrow \Gamma$. Entonces, una función continua y suprayectiva, $\phi : \partial B \rightarrow \Gamma$, es **débilmente monótona** si y sólo si existe una función continua y no decreciente, $\tau : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\tau(2\pi) = \tau(0) + 2\pi$ y $\phi(e^{i\theta}) = \gamma(e^{i\tau(\theta)})$.*

En otras palabras, ϕ es débilmente monótona si las imágenes $\phi(w)$ se mueven sobre Γ en una dirección constante cuando w se mueve sobre ∂B en una dirección constante. Las imágenes pueden quedarse fijas pero nunca moverse en sentido contrario si w se mueve monótonamente en ∂B . Además, $\phi(w)$ recorre Γ sólo una vez si w atraviesa ∂B sólo una vez.

Lema 2.1. *Sea Γ una curva cerrada de Jordan y $\{\phi_n\}$ una sucesión de funciones débilmente monótonas (continuas y suprayectivas) de ∂B sobre Γ . Supongamos que las funciones ϕ_n convergen uniformemente en ∂B a una función $\phi : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, ϕ es una función continua y débilmente monótona de ∂B en Γ .*

Prueba: La convergencia uniforme implica la continuidad de ϕ . Veamos que ϕ es débilmente monótona.

Para cada ϕ_n existe τ_n que cumple la definición de arriba. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\tau_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si este no fuera el caso reemplazamos $\tau_n(\theta)$ por

$$\tilde{\tau}_n(\theta) := \tau_n(\theta) - \tau_n(0).$$

Claramente $\tilde{\tau}_n$ es continua y no decreciente, además $\tilde{\tau}_n(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_n(2\pi) &= \tau_n(2\pi) - \tau_n(0) = \tau_n(0) + 2\pi - \tau_n(0) \\ &= \tilde{\tau}_n(0) + 2\pi. \end{aligned}$$

Con esta elección de $\tilde{\tau}_n$, y considerando la función $\arg(re^{i\theta}) = \theta$ con la rama $\theta \in (0, 2\pi)$, tenemos que

$$\tilde{\tau}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta = 0 \\ \arg(\gamma^{-1}(\phi_n(e^{i\theta}))) & \text{si } \theta \in (0, 2\pi) \\ 2\pi & \text{si } \theta = 2\pi \end{cases}$$

luego, la convergencia uniforme de ϕ_n implica que

$$\tau_n(\theta) \longrightarrow \tau := \arg(\gamma^{-1}(\phi(e^{i\theta}))) \quad \text{uniformemente en } [0, 2\pi]$$

además, τ es continua, no decreciente y

$$\phi(e^{i\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(e^{i\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(e^{i\tau_n(\theta)}) = \gamma(e^{i\tau(\theta)}).$$

q.e.d.

Esta convergencia, de las funciones débilmente monótonas, nos motiva a que la monotonía débil tenga que ser la condición de frontera de nuestra clase de funciones admisibles. Antes de definir la clase, recordemos que cualquier función en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$ posee una función traza⁶ $X|_{\partial B} \in L^2(\partial B; \mathbb{R}^3)$ (El problema es que ∂B tiene medida cero, respecto a B , luego, hablar de $X|_{\partial B}$ -en el sentido usual -no tiene mucho sentido. La noción de operador traza resuelve este inconveniente).

Definición 2.4. Dada una curva cerrada de Jordan, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, diremos que **la función** $X : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **es de clase** $C(\Gamma)$, respecto a una orientación fija $\gamma : \partial B \longrightarrow \Gamma$ si $X \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$ y su traza $X|_{\partial B}$ puede ser representada por una función continua, suprayectiva y débilmente monótona $\phi : \partial B \longrightarrow \Gamma$.

Es decir,

$$C(\Gamma) = \{ X \in H^1(B; \mathbb{R}^3) \mid X|_{\partial B} \in C(\partial B; \mathbb{R}^3) \text{ es una parametrización deb. monótona de } \Gamma \}.$$

Ahora estamos en condiciones de establecer nuestros principios variacionales, éstos quedarán establecidos en los siguientes lemas.

Lema 2.2. $X \in C(\Gamma)$ cumple la condición (2.6) si y sólo si

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} D(X + \epsilon\phi) \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(B; \mathbb{R}^n)$$

Prueba: Antes que nada notemos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} D(X + \epsilon\phi) \right|_{\epsilon=0} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \left(\iint_B |\nabla X + \epsilon \nabla \phi|^2 \, du \, dv - \iint_B |\nabla X|^2 \, du \, dv \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \left[\iint_B (|\nabla X|^2 + 2\epsilon(\nabla X \cdot \nabla \phi) + \epsilon^2 |\nabla \phi|^2) \, du \, dv - \iint_B |\nabla X|^2 \, du \, dv \right] \\ &= \iint_B (\nabla X \cdot \nabla \phi) \, du \, dv \\ &= \iint_B (X_u \cdot \phi_u + X_v \cdot \phi_v) \, du \, dv. \end{aligned}$$

⁶Véase el Apéndice A.

Esto nos permite observar que si X satisface $\left. \frac{d}{d\epsilon} D(X + \epsilon\phi) \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(B; \mathbb{R}^n)$ entonces, X es una solución débil⁷ del problema

$$(P) \begin{cases} \Delta X = 0 & \text{en } B \\ X|_{\partial B} = \Gamma \end{cases}$$

El teorema de representación de Riez nos permite encontrar una solución débil al problema (P) (ver por ejemplo: [2], [10] ó el Apéndice B). Además, gracias a algunos muy conocidos resultados de regularidad⁸, esta solución débil es una solución clásica (ya que $B = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ es bastante regular), por lo tanto X satisface la condición (2.6).

q.e.d.

Lema 2.3. $X \in C(\Gamma)$. Supongamos que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$$

para cualquier familia de difeomorfismos $\{g_\epsilon\}_{|\epsilon| < \epsilon_0}$, $g_\epsilon : \bar{B} \rightarrow \bar{B}_\epsilon$ (aquí $\bar{B}_\epsilon := g_\epsilon(B)$) que dependen diferenciablemente del parámetro ϵ y tal que $g_0 = id$. Entonces, X cumple la condición (2.7).

Para poder demostrar este lema necesitaremos de los siguientes resultados.

Lema 2.4 (Fundamental del cálculo de variaciones). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx = 0$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces $u \equiv 0$ en $L^2(\Omega)$.

Prueba: Sabemos que

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$$

(Véase, por ejemplo: [11], Corolario 19.24) entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u - \psi\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon.$$

Utilizando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} u^2(x)dx = \int_{\Omega} (u^2(x) - u(x)\psi(x))dx = \int_{\Omega} u(x)(u(x) - \psi(x))dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} u^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (u(x) - \psi(x))^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u - \psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \epsilon \|u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

⁷Véase B.2, Apéndice B.

⁸Ver Lema B.1, Apéndice B.

Como ϵ es arbitrario, tenemos que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Por lo tanto $u \equiv 0$ en $L^2(\Omega)$.

q.e.d.

Corolario 2.1. Si $u, v \in L^2(\Omega)$ son tales que

$$\int_{\Omega} (u(x)\phi(x) + v(x)\psi(x))dx = 0 \quad \forall \phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces, $u \equiv 0$ y $v \equiv 0$ en $L^2(\Omega)$.

Prueba: Tomando $\psi \equiv 0$, tenemos que

$$\int_{\Omega} u(x)\phi(x)dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces, por el Lema 2.4, $u \equiv 0$ luego

$$\int_{\Omega} v(x)\psi(x)dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto $v \equiv 0$.

q.e.d.

Lema 2.5. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. Si $g \in C^1(B; B')$ es biyectiva y localmente invertible⁹, entonces, g es un difeomorfismo.

Prueba: La hipótesis de biyectividad, automáticamente, nos permite construir una función inversa global. La diferenciabilidad de la inversa se sigue del Teorema de la función inversa, ya que para cada $x \in B$ se tiene $\nabla g(x) \neq 0$ (recordemos que la diferenciabilidad es una propiedad local).

q.e.d.

Prueba (Lema 2.3): Sea $\tau \in C^1(\bar{B}; \mathbb{R}^2)$ y para los $\epsilon \in \mathbb{R}$ tales que $|\epsilon| \|\nabla \tau\|_{L^\infty} < 1$ consideremos los mapeos

$$g_\epsilon := id + \epsilon \tau : B \rightarrow B_\epsilon := g_\epsilon(B).$$

Notemos que

$$\nabla g_\epsilon = id + \epsilon \nabla \tau$$

esto, junto a la condición $|\epsilon| \|\nabla \tau\|_{L^\infty} < 1$, nos lleva a que g_ϵ es localmente invertible, pues,

$$(\nabla g_\epsilon)^{-1} = (id + \epsilon \nabla \tau)^{-1} = id - \epsilon \nabla \tau + \epsilon^2 \nabla \tau^2 - \epsilon^3 \nabla \tau^3 + \epsilon^4 \nabla \tau^4 - \dots \quad (2.9)$$

⁹Una función g es localmente invertible si $\det(\nabla g) \neq 0$ para toda x en el dominio. Recordemos que en este escrito ∇g denota a la matriz jacobiana.

esta serie converge uniformemente por la elección de ϵ , luego, ∇g_ϵ es invertible, entonces, $\det(\nabla g_\epsilon) \neq 0$, por lo tanto g_ϵ es localmente invertible. Además, la función g_ϵ es biyectiva (la inyectividad se tiene por que g_ϵ es solo una perturbación de la identidad; la suprayectividad se tiene por definición). Entonces, por el Lema 2.5, g_ϵ es un difeomorfismo de \overline{B} en \overline{B}_ϵ (el difeomorfismo de B en B_ϵ que nos da el Lema 2.5 se extiende a la frontera, ya que $\tau \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^2)$). Ahora, por la regla de la cadena para derivadas débiles:

$$\begin{aligned} D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon) &= \frac{1}{2} \iint_{B_\epsilon} |\nabla(X \circ g_\epsilon^{-1})|^2 d\omega = \frac{1}{2} \iint_{B_\epsilon} |((\nabla X) \circ g_\epsilon^{-1}) \cdot \nabla g_\epsilon^{-1}|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X((\nabla g_\epsilon^{-1}) \circ g_\epsilon)|^2 \det(\nabla g_\epsilon) du dv \end{aligned}$$

Observemos que $g_\epsilon^{-1} \circ g_\epsilon = id$, entonces,

$$(\nabla g_\epsilon^{-1} \circ g_\epsilon) \nabla g_\epsilon = id$$

luego, la relación (2.9) nos lleva a que

$$(\nabla g_\epsilon^{-1} \circ g_\epsilon) = (\nabla g_\epsilon)^{-1} = id - \epsilon \nabla \tau + o(\epsilon) \quad (2.10)$$

donde $o(\epsilon)$ es tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0.$$

Digamos que $\tau = (\mu, \lambda)$, entonces, tenemos que

$$g_\epsilon(u, v) = (u + \epsilon \mu(u, v), v + \epsilon \lambda(u, v))$$

y que

$$\nabla g_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon \mu_u & \epsilon \mu_v \\ \epsilon \lambda_u & 1 + \epsilon \lambda_v \end{pmatrix}$$

luego,

$$\det(\nabla g_\epsilon) = 1 + \epsilon(\mu_u + \lambda_v) + o(\epsilon) \quad (2.11)$$

Considerando a $X = (x, y, z)$, se tiene

$$\nabla X = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

donde las entradas de esta última matriz son derivadas débiles. Ahora, utilizando la relación (2.10), podemos calcular que

$$\begin{aligned}
|\nabla X((\nabla g_\epsilon^{-1}) \circ g_\epsilon)|^2 &= |\nabla X(id - \epsilon \nabla \tau + o(\epsilon))|^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \mu_u + o(\epsilon) & -\epsilon \mu_v + o(\epsilon) \\ -\epsilon \lambda_u + o(\epsilon) & 1 - \epsilon \lambda_v + o(\epsilon) \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} x_u(1 - \epsilon \mu_u) - \epsilon x_v \lambda_u + o(\epsilon) & x_v(1 - \epsilon \lambda_v) - \epsilon x_u \mu_v + o(\epsilon) \\ y_u(1 - \epsilon \mu_u) - \epsilon y_v \lambda_u + o(\epsilon) & y_v(1 - \epsilon \lambda_v) - \epsilon y_u \mu_v + o(\epsilon) \\ z_u(1 - \epsilon \mu_u) - \epsilon z_v \lambda_u + o(\epsilon) & z_v(1 - \epsilon \lambda_v) - \epsilon z_u \mu_v + o(\epsilon) \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= (x_u(1 - \epsilon \mu_u) - \epsilon x_v \lambda_u)^2 + (y_u(1 - \epsilon \mu_u) - \epsilon y_v \lambda_u)^2 \\
&\quad + (z_u(1 - \epsilon \mu_u) - \epsilon z_v \lambda_u)^2 + (x_v(1 - \epsilon \lambda_v) - \epsilon x_u \mu_v)^2 \\
&\quad + (y_v(1 - \epsilon \lambda_v) - \epsilon y_u \mu_v)^2 + (z_v(1 - \epsilon \lambda_v) - \epsilon z_u \mu_v)^2 + o(\epsilon) \\
&= x_u^2(1 - \epsilon \mu_u)^2 - 2\epsilon x_u x_v \lambda_u(1 - \epsilon \mu_u) + y_u^2(1 - \epsilon \mu_u)^2 \\
&\quad - 2\epsilon y_u y_v \lambda_u(1 - \epsilon \mu_u) + z_u^2(1 - \epsilon \mu_u)^2 - 2\epsilon z_u z_v \lambda_u(1 - \epsilon \mu_u) \\
&\quad + x_v^2(1 - \epsilon \lambda_v)^2 - 2\epsilon x_u x_v \mu_v(1 - \epsilon \lambda_v) + y_v^2(1 - \epsilon \lambda_v)^2 \\
&\quad - 2\epsilon y_u y_v \mu_v(1 - \epsilon \lambda_v) + z_v^2(1 - \epsilon \lambda_v)^2 - 2\epsilon z_u z_v \mu_v(1 - \epsilon \lambda_v) + o(\epsilon) \\
&= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 - 2\epsilon \mu_u(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) - 2\epsilon \lambda_u(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\
&\quad + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - 2\epsilon \lambda_v(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - 2\epsilon \mu_v(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) + o(\epsilon) \\
&= |X_u|^2 + |X_v|^2 - 2\epsilon(\mu_u |X_u|^2 + \lambda_v |X_v|^2) + (\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v)
\end{aligned}$$

es decir,

$$|\nabla X((\nabla g_\epsilon^{-1}) \circ g_\epsilon)|^2 = |\nabla X|^2 - 2\epsilon(\mu_u |X_u|^2 + \lambda_v |X_v|^2) + (\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v) \quad (2.12)$$

Entonces, por (2.11) y (2.12) llegamos a la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon) &= \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X((\nabla g_\epsilon^{-1}) \circ g_\epsilon)|^2 \det(\nabla g_\epsilon) \, du \, dv \\
&= \frac{1}{2} \iint_B [|\nabla X|^2 - 2\epsilon(\mu_u |X_u|^2 + \lambda_v |X_v|^2) + (\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v) + \epsilon(\mu_u + \lambda_v)|\nabla X|^2 + o(\epsilon)] \, du \, dv
\end{aligned}$$

Esto nos permite ver que la función $\epsilon \mapsto D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon)$ es diferenciable en $\epsilon = 0$ y además

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\epsilon} D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon)|_{\epsilon=0} \\
&= -\frac{1}{2} \iint_B [2(\mu_u |X_u|^2 + \lambda_v |X_v|^2) + (\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v) - (\mu_u + \lambda_v)(|X_u|^2 + |X_v|^2)] \, du \, dv \\
&= -\frac{1}{2} \iint_B [|X_u|^2(\mu_u - \lambda_v) + |X_v|^2(\lambda_v - \mu_u) - 2(\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v)] \, du \, dv \\
&= -\frac{1}{2} \iint_B [(\mu_u - \lambda_v)(|X_u|^2 - |X_v|^2) + 2(\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v)] \, du \, dv
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{d}{d\epsilon} D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon)|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{2} \iint_B [(\mu_u - \lambda_v)(|X_u|^2 - |X_v|^2) + 2(\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v)] du dv$$

Luego, por hipótesis tenemos que

$$-\frac{1}{2} \iint_B [(\mu_u - \lambda_v)(|X_u|^2 - |X_v|^2) + 2(\lambda_u + \mu_v)(X_u \cdot X_v)] du dv = 0 \quad \forall \tau = (\mu, \lambda) \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^2)$$

pues, dado τ construimos una familia de difeomorfismos $\{g_\epsilon\}_{|\epsilon| < \epsilon_0}$ que cumple las hipótesis. Ahora, tomando dos funciones $\phi, \psi \in C_0^\infty(B)$, consideremos los problemas

$$(P_1) \begin{cases} \Delta h = \phi & \text{en } B \\ h = 0 & \text{en } \partial B \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} \Delta k = \psi & \text{en } B \\ k = 0 & \text{en } \partial B \end{cases}$$

(P_1) y (P_2) tienen solución h y k respectivamente, aún más, $h, k \in C^\infty(\overline{B})$ (los problemas pueden resolverse de la siguiente manera: primero los formulamos débilmente¹⁰, así, habrá una solución débil gracias al teorema de representación de Riez y, por los resultados de regularidad citados anteriormente [10]-, esta solución débil pertenece a la clase $C^\infty(\overline{B})$; otra forma sería utilizando la función de Green, véase [10]).

A continuación, definamos las funciones

$$\mu := h_u + k_v \quad \text{y} \quad \lambda := k_u - h_v$$

de esta forma $\mu, \lambda \in C^\infty(\overline{B})$, luego, $\tau := (\mu, \lambda) \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^2)$. También se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\mu_u - \lambda_v = \phi \quad \text{y} \quad \mu_v + \lambda_u = \psi$$

de aquí que

$$-\frac{1}{2} \iint_B [\phi(|X_u|^2 - |X_v|^2) + 2\psi(X_u \cdot X_v)] du dv = 0 \quad \forall \phi, \psi \in C_0^\infty(B)$$

luego, por el corolario del Lema 2.4, llegamos a que

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v \quad \text{en } B$$

q.e.d.

Los Lemas 2.2 y 2.3 indican que, si $X \in C(\Gamma)$, X cumple las condiciones (2.6) y (2.7) de la Definición 2.2 si X es un *punto crítico* de $D(X)$ en el siguiente sentido:

1. $\left. \frac{d}{d\epsilon} D(X + \epsilon\phi) \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(B; \mathbb{R}^3)$

¹⁰Véase (B.3), Apéndice B.

2. $\left. \frac{d}{d\epsilon} D(X \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$ para cualquier familia de difeomorfismos $\{g_\epsilon\}_{|\epsilon| < \epsilon_0}$, $g_\epsilon : \overline{B} \rightarrow \overline{B}_\epsilon$, que dependen diferenciablemente del parámetro ϵ y tal que $g_0 = id$.

Para entender mejor el párrafo anterior notemos que las variaciones del tipo 1 pueden ser consideradas como variaciones de las variables dependientes, i.e., variaciones de la superficie X ; mientras que las variaciones del tipo 2 corresponden a variaciones de las variables independientes, i.e., variaciones de la parametrización. Para clarificar el segundo punto, observemos que en la prueba del Lema 2.3 consideramos el siguiente cambio de coordenadas:

$$(u, v) \mapsto (u + \epsilon\mu(u, v), v + \epsilon\lambda(u, v))$$

i.e., sólo perturbamos el espacio de parámetros. Entonces, variar las superficies y encontrar un punto crítico es encontrar una superficie armónica. Además, variar la parametrización y encontrar un punto crítico, en este sentido, es encontrar un mapeo conforme.

Para proseguir en nuestra búsqueda por relacionar los mínimos del funcional de Dirichlet y las soluciones al problema de Plateau será de gran ayuda el siguiente resultado:

Lema 2.6. *Si X_0 es un mínimo de $D(X)$ en $C(\Gamma)$, entonces, X_0 es un punto crítico de $D(X)$ (i.e., X_0 cumple 1. y 2.)*

Prueba: Claramente X_0 cumple la condición 1, esto no es más que el principio de Dirichlet. Para probar la condición 2 procederé por reducción al absurdo. Supongamos que existe una familia de difeomorfismos $\{g_\epsilon\}_{|\epsilon| < \epsilon_0}$ tal que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} D(X_0 \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \neq 0 \quad (2.13)$$

donde $B_\epsilon := g_\epsilon(B)$. Considerando a $f : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\epsilon \mapsto D(X_0 \circ g_\epsilon^{-1}; B_\epsilon) =: f(\epsilon)$$

la condición (2.13) puede escribirse como

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} f(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \neq 0$$

entonces, o bien, $f(\epsilon)$ es creciente en 0, o bien, $f(\epsilon)$ es decreciente en 0; en cualquiera de los dos casos existe $\epsilon \neq 0$ tal que $f(\epsilon) < f(0)$, i.e.,

$$D(X_\epsilon; B_\epsilon) < D(X_0; B)$$

donde $X_\epsilon := X_0 \circ g_\epsilon^{-1}$. Ahora, como B_ϵ es la imagen de B bajo un difeomorfismo, tenemos que, en particular, B_ϵ es simplemente conexo, luego, existe un mapeo conforme $\tau_\epsilon : \overline{B} \rightarrow$

\bar{B}_ϵ (por el teorema de Riemman existe $\tau : B \rightarrow B_\epsilon$ conforme, este mapeo se puede extender a la frontera)¹¹, así, obtenemos que

$$(X_\epsilon \circ \tau_\epsilon)|_{\partial B}$$

es débilmente monótona, esto porque tanto g_ϵ como τ_ϵ son biyectivas en la frontera. Por lo tanto

$$\tilde{X}_\epsilon := X_\epsilon \circ \tau_\epsilon \in C(\Gamma)$$

luego, por la Proposición (2.1), se cumple:

$$D(\tilde{X}_\epsilon) = D(X_\epsilon; B_\epsilon) < D(X_0) = \min\{D(X)|X \in C(\Gamma)\}$$

esto último representa una contradicción.

q.e.d.

Teorema 2.2. *Si X es un mínimo de $D(X)$ en $C(\Gamma)$, entonces, X es solución al problema de Plateau, i.e., X cumple la Definición 2.2, a saber:*

- $X \in C^0(\bar{B}; \mathbb{R}^3) \cap C^2(B; \mathbb{R}^3)$ y $\Delta X = 0$.
- $|X_u|^2 = |X_v|^2$ y $X_u \cdot X_v = 0$ en B .
- La restricción $X|_{\partial B}$ es un homeomorfismo de ∂B en Γ .

Prueba: Por los Lemas 2.2, 2.3 y 2.6, X cumple (2.6) y (2.7) de la Definición 2.2. Basta probar (2.8).

Como $X \in C(\Gamma)$, entonces, $X|_{\partial B}$ es débilmente monótona, de aquí que $X|_{\partial B}$ es continua y suprayectiva. **P.D.** $X|_{\partial B}$ es inyectiva.

Supongamos que $X|_{\partial B}$ no es inyectiva, entonces, dado que $X|_{\partial B}$ es débilmente monótona, podemos encontrar un arco

$$C := \{e^{i\theta} \mid \theta_1 < \theta < \theta_2\}$$

que es mapeado a un solo punto $\bar{0} \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e.,

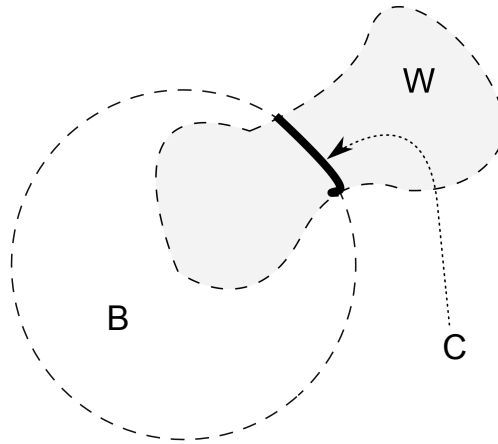
$$X(e^{i\theta}) = \bar{0} \quad \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

Ahora, por el principio de reflexión de Schwarz, podemos extender $X(w)$ como una función armónica en una vecindad (símplemente conexa), W , de C (para los detalles de esta extensión véase el Apéndice B, Corolario B.4 y Corolario B.5).

¹¹Esta extensión a la frontera se puede hacer por medio del Teorema de Osgood - Caratheodory.

Teorema 2.1 (Osgood - Caratheodory). *Si A_1 y A_2 son regiones acotadas y simplemente conexas cuyas fronteras γ_1 y γ_2 , respectivamente, son curvas simples cerradas y continuas, entonces, cualquier biyección conforme de A_1 en A_2 puede extenderse a una función continua y biyectiva de $A_1 \cup \gamma_1$ en $A_2 \cup \gamma_2$.*

Los detalles pueden verse en [13].



Sea \tilde{X} la función extendida, i.e.,

$$\tilde{X}(w) = \begin{cases} X(w) & \text{si } w \in B \\ -X(\frac{w}{|w|^2}) & \text{si } w \notin B \end{cases}$$

Primero notemos que la función

$$F := X_u - iX_v$$

es analítica en B , pues, X es armónica en B . Por la misma razón la función

$$\tilde{F}(w) := \tilde{X}_u - i\tilde{X}_v$$

es analítica en W ($C \subseteq W$). Además, $F = \tilde{F}$ en B . Aun más

$$|\tilde{X}_u|^2 - |\tilde{X}_v|^2 = 0 = \tilde{X}_u \cdot \tilde{X}_v \quad \text{en } C \quad (2.14)$$

esta última igualdad se obtiene por la naturaleza de la extensión (i.e. la extensión es C^1 en \bar{B}). De hecho (2.14) también se cumple en todo W , basta con utilizar la regla de la cadena para comprobarlo.

Por otro lado, sabemos que $\tilde{X}(e^{i\theta}) = 0$ en C , entonces

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{X}(e^{i\theta}) = 0 \quad \text{en } C \quad (2.15)$$

Ahora,

$$\tilde{X}_u = \tilde{X}_\theta \theta_u + \tilde{X}_r r_u \quad \text{y} \quad \tilde{X}_v = \tilde{X}_\theta \theta_v + \tilde{X}_r r_v$$

luego, por (2.15), tenemos que

$$\tilde{X}_u = \tilde{X}_r r_u \quad \text{y} \quad \tilde{X}_v = \tilde{X}_r r_v \quad \text{en } C \quad (2.16)$$

y por (2.14), podemos concluir que:

$$|\tilde{X}_r|^2 (r_u^2 - r_v^2) = |\tilde{X}_u|^2 - |\tilde{X}_v|^2 = 0 \quad \text{en } C \quad (2.17)$$

y

$$|\tilde{X}_r|^2 r_u r_v = \tilde{X}_u \cdot \tilde{X}_v = 0 \quad \text{en } C. \quad (2.18)$$

La condición (2.17) nos lleva a los siguientes casos:

Caso 1: $|\tilde{X}_r|^2 = 0$, entonces, $\tilde{X}_r = 0$ y, por (2.16), se tiene que $\tilde{X}_u = 0 = \tilde{X}_v$ en C .

Caso 2: $|\tilde{X}_r|^2 \neq 0$, entonces, $r_u^2 - r_v^2 = 0$, i.e., $r_u^2 = r_v^2$. Por (2.18), tenemos que $r_u r_v = 0$, multiplicando por r_u se tiene que $r_u^2 r_v = 0$, luego, $r_v^3 = 0$, entonces, $r_v = 0$. Por lo tanto, por (2.16) y (2.17), tengo que $\tilde{X}_v = 0 = \tilde{X}_u$ en C .

Resumiendo, las relaciones conformes (2.14) aunadas a que $\tilde{X}(e^{i\theta}) = 0$ en C , implican que

$$\tilde{X}_v = 0 = \tilde{X}_u \quad \text{en } C$$

por lo tanto

$$\tilde{F} \equiv 0 \quad \text{en } C(\subseteq W).$$

Ahora, como \tilde{F} es analítica en W , entonces, $\tilde{F} \equiv 0$ en W (pues, los ceros de las funciones analíticas son aislados). Entonces $\tilde{X} \equiv cte = \bar{0}$ en W , luego

$$X \equiv cte = 0 \quad \text{en } B$$

(ya que $F = \tilde{F} = 0$ en $W \cap B \subseteq B$), lo cual nos lleva a una contradicción, pues, $X \in C(\Gamma)$, i.e., $X|_{\partial B}$ (la traza de X) no es constante en ∂B .

q.e.d.

El Teorema 2.2 nos muestra el camino para resolver el problema de Plateau, ya que los mínimos de $D(X)$ sobre $C(\Gamma)$ van a ser soluciones del problema de Plateau. En el siguiente capítulo nos enfocaremos en el problema de minimizar a $D(X)$.

Antes de comenzar nuestro proceso de minimización debemos asegurarnos de que $C(\Gamma) \neq \emptyset$, pues, si $C(\Gamma)$ fuera vacío el problema de minimizar $D(X)$ sobre $C(\Gamma)$ no tendría solución. A continuación estudiaremos algunos casos en los que $C(\Gamma) \neq \emptyset$.

Empezaremos estudiando el caso en el que Γ puede ser vista como la gráfica de una función continua restringida al círculo unitario.

Proposición 2.2. *Sea $f \in C(\bar{B}; \mathbb{R})$ y supongamos que*

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ y } z = f(x, y)\}.$$

Entonces $C(\Gamma) \neq \emptyset$.

Prueba: Primero notemos que la parametrización

$$\phi(x, y) := (x, y, f(x, y)) \quad (x, y) \in \partial B$$

es débilmente monótona. Claramente es continua y biyectiva, de aquí se sigue la monotonía débil.

Ahora, consideremos el problema

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B \\ u = f & \text{en } \partial B \end{cases}$$

Sabemos que la función

$$u(w) = \begin{cases} \frac{(1-|w|^2)}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{|w-z|^2} ds_y & \text{si } w \in B \\ f(w) & \text{si } w \in \partial B \end{cases}$$

es solución al problema (P). Dado que $C^2(B) \subseteq H^1(B)$, tenemos que la superficie

$$X^*(x, y) := (x, y, u(x, y)) \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$$

y, además

$$X^*|_{\partial B}(x, y) = (x, y, f(x, y)) = \Gamma.$$

Por lo tanto, $X^* \in C(\Gamma)$, i.e., $C(\Gamma) \neq \emptyset$.

q.e.d.

En general es suficiente pedir que Γ sea rectificable. A continuación haré un esbozo del argumento¹². Sea $\phi : \partial B \rightarrow \Gamma$ una orientación de Γ , entonces, su representación en serie de Fourier

$$\phi(e^{i\theta}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sen(n\theta)] \quad (2.19)$$

$A_n, B_n \in \mathbb{R}^3$, converge en $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^3)$. Si $w = \rho e^{i\theta} \in B$ y

$$X(w) := \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sen(n\theta)] \quad (2.20)$$

entonces, la convergencia uniforme de (2.19) implica la convergencia uniforme de esta última serie. De hecho, se sabe que la serie converge a

$$X(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\psi}) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \psi)} d\psi.$$

Este mapeo es armónico¹³ en B y se extiende continuamente a \bar{B} , con $X|_{\partial B}(w) = \phi(w)$. Además, utilizando la convergencia uniforme de (2.20), no es difícil calcular que

$$D(X) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n|^2 + |B_n|^2).$$

Por lo tanto, el mapeo $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pertenece a $H^1(\bar{B}; \mathbb{R}^3)$ si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n|^2 + |B_n|^2) < \infty. \quad (2.21)$$

Es decir, si (2.21) se cumple, entonces, $C(\Gamma) \neq \emptyset$. Por último, utilizando la representación (2.19), se puede demostrar que si ϕ es rectificable, entonces, se satisface (2.21). Así, teniendo en mente el esbozo expuesto arriba, podemos concluir el siguiente lema.

Lema 2.7. *Si Γ es rectificable, entonces, $C(\Gamma) \neq \emptyset$.*

¹²Para ver los detalles y/o un argumento diferente ver: [6] y [18]

¹³Véase, por ejemplo: [3].

2.3. Solución del problema

En la presente sección nos enfocaremos a resolver el problema de minimizar el funcional $D(X)$ sobre la clase $C(\Gamma)$, pues, gracias al Teorema 2.2, ésta es una forma de resolver lo que arriba llamamos el problema de Plateau. De hecho, el objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Si $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva cerrada de Jordan tal que $C(\Gamma) \neq \emptyset$, entonces, existe $\tilde{X} \in C(\Gamma)$ tal que*

$$D(\tilde{X}) = \inf_{C(\Gamma)} D(X).$$

A continuación presentaremos dos pruebas de este resultado, una prueba será por medio de un teorema clásico del cálculo de variaciones y la segunda prueba será gracias a las propiedades de convergencia que tienen las funciones armónicas. Incluimos ambas pruebas con el fin de entender mejor el proceso de minimización y por el hecho de que las dos se basan en los siguientes Lemas.

2.3.1. Lema de Courant-Lebesgue y sus consecuencias

Lema 2.8 (Courant-Lebesgue). *Para cualesquiera $X \in H^1(B; \mathbb{R}^n)$, $w \in \bar{B}$ y $\delta \in (0, 1)$, existe $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, tal que, si s denota la longitud de arco en $C_\rho = C_\rho(w) := \partial B_\rho(w) \cap B$ ($B_\rho(w)$ es la bola con centro en w y radio ρ), se tiene que $X_s \in L^2(C_\rho)$ y*

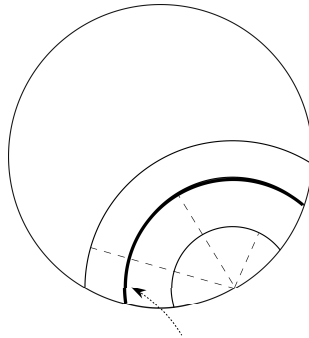
$$\int_{C_\rho} |X_s|^2 ds \leq \frac{8D(X)}{\rho |\log(\rho)|}.$$

Prueba: Por el teorema de Fubini (para la integral de Lebesgue) se tiene que

$$X_s \in L^2(C_\rho; \mathbb{R}^n).$$

Ahora

$$2D(X) = \iint_B |\nabla X|^2 du dv \geq \iint_{(B_{\sqrt{\delta}}(w) \setminus B_\delta(w)) \cap B} |\nabla X|^2 du dv = \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} \left(|X_r|^2 + \frac{1}{\rho^2} |X_\theta|^2 \right) \rho d\theta d\rho$$



Como s representa la longitud de arco en C_ρ , tenemos que $s = \rho\theta$, $ds = \rho d\theta$ y

$$\frac{1}{\rho^2}|X_\theta|^2 = |X_s|^2$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} \left(|X_\rho|^2 + \frac{1}{\rho^2}|X_\theta|^2 \right) \rho d\theta d\rho &= \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \int_{\rho\theta_1(\rho)}^{\rho\theta_2(\rho)} (|X_\rho|^2 + |X_s|^2) ds d\rho \geq \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{\rho} \int_{C_\rho} \rho |X_s|^2 ds d\rho \\ &= \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{\rho} f(\rho) d\rho \quad \text{donde} \quad f(\rho) := \int_{C_\rho} \rho |X_s|^2 ds. \end{aligned}$$

Luego,

$$2D(X) \geq \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{\rho} f(\rho) d\rho \geq \left(\inf_{\delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}} f(\rho) \right) \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{d\rho}{\rho}$$

Ahora, para todo $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, se cumple que

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{d\rho}{\rho} = \ln(\rho) \Big|_{\delta}^{\sqrt{\delta}} = \ln\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\delta}\right) = -\frac{1}{2} \ln(\delta) = \frac{1}{2} |\ln(\delta)| \geq \frac{1}{2} |\ln(\rho)|.$$

Como f es continua, existe $\rho_0 \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, tal que ρ_0 es un mínimo de f , entonces

$$2D(X) \geq \left(\inf_{\delta \leq \rho \leq \sqrt{\delta}} f(\rho) \right) \int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{d\rho}{\rho} \geq f(\rho_0) \frac{1}{2} |\ln(\rho_0)| = \frac{1}{2} |\ln(\rho_0)| \int_{C_{\rho_0}} \rho_0 |X_s|^2 ds.$$

Por lo tanto

$$\int_{C_{\rho_0}} |X_s|^2 ds \leq \frac{4D(X)}{\rho_0 |\ln(\rho_0)|}.$$

q.e.d.

Más adelante, durante nuestro proceso de minimización, tendremos que encontrar una sucesión minimizante, $\{X_k\}$, cuyos valores en la frontera, $X_k|_{\partial B}$, contengan una subsucesión que converja uniformemente en ∂B . Para poder encontrar una sucesión con estas características, deberemos modificar un poco nuestro dominio $C(\Gamma)$, imponiendo la siguiente *condición de los tres puntos*:

Sean $P_j = e^{i\frac{2\pi j}{3}}$, $j = 1, 2, 3$. y Q_1, Q_2, Q_3 una terna orientada de puntos en Γ . Definamos

$$C^*(\Gamma) := \{X \in C(\Gamma) \mid X(P_j) = Q_j, j = 1, 2, 3.\} \quad (2.22)$$

Al trabajar en esta nueva clase obtendremos la compacidad necesaria para minimizar $D(X)$ sobre $C^*(\Gamma)$. Esto, aunado a que tenemos la igualdad

$$\inf_{C(\Gamma)} D(X) = \inf_{C^*(\Gamma)} D(X) \quad (2.23)$$

nos llevará a resolver el problema de minimización.

En este momento, la inclusión de la clase $C^*(\Gamma)$ puede parecer un poco artificial, sin embargo, en páginas subsecuentes quedará más claro el porqué de su inserción y, también, expondré la demostración de la relación (2.23).

El definir esta nueva clase nos lleva al siguiente resultado crucial.

Lema 2.9. *La inclusión $C^*(\Gamma) \hookrightarrow C^0(\partial B; \mathbb{R}^3)$ es compacta, i.e., subconjuntos D -acotados de $C^*(\Gamma)$ son equicontinuos en $C^0(\partial B; \mathbb{R}^3)$.*

Para demostrar este resultado recurriremos al Teorema de Arzela-Ascoli y a el muy importante lema de Courant-Lebesgue.

Definición 2.5. *Sea H un espacio métrico. $A \subseteq H$ es **relativamente compacto** si y sólo si \bar{A} es compacto.*

Teorema 2.4 (Arzela-Ascoli). *Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto \mathcal{F} de $C^0(K; \mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{F} \subseteq C^0(K; \mathbb{R}^n)$) es relativamente compacto en $C^0(K; \mathbb{R}^n)$ si y sólo si \mathcal{F} es equicontinuo y acotado en $C^0(K; \mathbb{R}^n)$.*

La prueba puede verse en [2].

Lema 2.10. *Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva cerrada de Jordan. Dado $\epsilon > 0$, existe $\epsilon_1 > 0$, tal que, si $x, y \in \Gamma$ y $|x - y| < \epsilon_1$, entonces, hay un sub-arco, $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ con extremos en x y y contenido en alguna bola de radio ϵ en \mathbb{R}^3 .*

Prueba: Supongamos que no existe ϵ_1 que cumpla la propiedad. Entonces, existen sucesiones de puntos $\{x_m\}, \{y_m\} \subseteq \Gamma$, tales que,

$$|x_m - y_m| \longrightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

y cualquier sub-arco, $\tilde{\Gamma}_m \subseteq \Gamma$, con extremos en x_m y y_m , debe de intersectar a $\partial B_\epsilon(x_m)$, pues $\tilde{\Gamma}_m$ no se queda contenido en cualquier bola con radio ϵ , en particular no se queda contenido en la bola que tiene centro en x_m . Entonces, para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\exists z_m \in \tilde{\Gamma}_m \cap \partial B_\epsilon(x_m) \neq \emptyset.$$

Luego, por la compacidad de Γ y dado que $\{x_m\}, \{y_m\}, \{z_m\} \subseteq \Gamma$, s.p.g., podemos suponer que existen $x, y, z \in \Gamma$, tales que

$$x_m \longrightarrow x \quad y_m \longrightarrow y \quad z_m \longrightarrow z.$$

Además, $|x - z| = \epsilon$, pues, $|x_m - z_m| = \epsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces, existen θ_1, θ_2 y θ_3 ($0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \theta_3 < 2\pi$), tales que, si γ es una orientación de Γ ,

$$\gamma(e^{i\theta_1}) = x, \quad \gamma(e^{i\theta_2}) = z \quad \text{y} \quad \gamma(e^{i\theta_3}) = y$$

pues, z_m siempre está entre y_m y x_m , esto, aunado a (2.24), implica que existen $w_1, w_2 \in \partial B$, $w_1 \neq w_2$, tales que

$$\gamma(w_1) = x = y = \gamma(w_2)$$

esta última igualdad implica una contradicción, ya que γ es un homeomorfismo.

q.e.d.

Estos lemas serán de gran ayuda para demostrar el Lema 2.9

Prueba (Lema 2.9): Primero notemos que la inclusión $C^*(\Gamma) \hookrightarrow C^0(\partial B; \mathbb{R}^3)$ es cerrada, esto por el Lema 2.1.

Observemos que si

$$\|X\|_{H^1} \leq M$$

entonces,

$$D(X) \leq M$$

la prueba únicamente depende de que $D(X)$ esté acotado.

Notemos también que, si $X \in C^*(\Gamma)$, entonces, $X(\partial B) = \Gamma$, de aquí que cualquier subconjunto de $C^*(\Gamma)$ está uniformemente acotado en $C^0(\partial B; \mathbb{R}^3)$. Para concluir que la inclusión es compacta basta demostrar que subconjuntos D -acotados de $C^*(\Gamma)$ son equicontinuos (por el Teorema de Arzela-Ascoli).

Sean $\epsilon > 0$, $w_0 \in \partial B$ y $\mathcal{F} \subseteq C^*(\Gamma)$, tales que,

$$D(X) \leq M \quad \forall X \in \mathcal{F}, \quad M \in \mathbb{R}.$$

Sea $\epsilon > 0$, queremos demostrar que existe $\delta > 0$ (que sólo depende de ϵ, M, Γ, Q_i), tal que, para toda $w \in \partial B$ se cumple

$$|X(w) - X(w_0)| < 2\epsilon \quad \text{si} \quad |w - w_0| < \delta \quad \forall X \in \mathcal{F}.$$

Sea δ_0 , tal que, cualquier bola de radio $\sqrt{\delta_0}$ contiene a lo más uno de los P_i 's (los que aparecen en la definición de $C^*(\Gamma)$). Sea ϵ_0 , tal que, cualquier bola de radio ϵ_0 , en \mathbb{R}^3 , contiene a lo más uno de los Q_i 's. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\epsilon < \epsilon_0$.

Ahora, escojamos $\epsilon_1 > 0$, tal que, $\epsilon_1 < \epsilon$ y, para cualesquiera $x, y \in \Gamma$ tales que $|x - y| < \epsilon_1$, existe un sub-arco, $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$, con extremos en x y y , contenido en alguna bola de radio ϵ . Esto lo podemos hacer por el Lema 2.10.

Nota: Por la elección de ϵ_0 , para $x, y \in \Gamma$, tales que $|x - y| < \epsilon_1$, el sub-arco $\tilde{\Gamma}_{x,y} \subseteq \Gamma$ que se queda en alguna bola de radio ϵ ($\epsilon < \epsilon_0$), es único y está caracterizado por el hecho de que $\tilde{\Gamma}$ contiene a lo más uno de los Q_i 's.

Tomemos la δ más grande tal que $0 < \delta \leq \delta_0$ y

$$|\ln(\delta)| \geq \frac{16\pi M}{\epsilon_1^2} \geq \frac{16\pi D(X)}{\epsilon_1^2} \quad \forall X \in \mathcal{F}.$$

Sea $X \in \mathcal{F}$, entonces, por el lema de Courant-Lebesgue, existe $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$, tal que

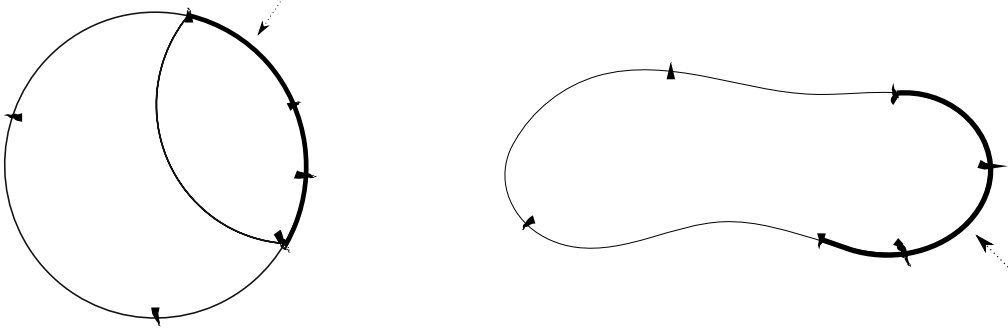
$$\int_{\tilde{C}_\rho} |X_s|^2 ds \leq \frac{8D(X)}{\rho |\ln(\rho)|}$$

$$C_\rho = C_\rho(w) := \partial B_\rho(w) \cap B$$

Sean w_1, w_2 la intersección de C_ρ con ∂B , i.e., $\{w_1, w_2\} = C_\rho \cap \partial B$. Sea

$$\tilde{C}_\rho := \partial B \cap B_\rho(w_0)$$

i.e., \tilde{C}_ρ es el sub-arco de ∂B que va de w_1 a w_2 , el cual, contiene a lo más uno de los P_i 's (ya que, $\rho \leq \sqrt{\delta} \leq \sqrt{\delta_0}$). Sean $X_1 := X(w_1), X_2 := X(w_2)$ y $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ el sub-arco con extremos X_1 y X_2 que contiene a lo más uno de los Q_i 's, lo último se cumple por la monotonía débil de $X|_{\partial B}$.



También, por la monotonía débil

$$X(\tilde{C}_\rho) = \tilde{\Gamma}.$$

Aún más, si $X = (x, y, z)$, parametrizando a $C_\rho(w_0)$ por longitud de arco (respecto a w_0), se tiene que: $w_1 = \rho\theta_1, w_2 = \rho\theta_2$ y, utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |X_1 - X_2|^2 &= |X(w_1) - X(w_2)|^2 = \left| \int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} X_s ds \right|^2 \\ &= \left(\int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} x_s ds \right)^2 + \left(\int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} y_s ds \right)^2 + \left(\int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} z_s ds \right)^2 \\ &\leq 2\rho\pi \left(\int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} x_s^2 ds + \int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} y_s^2 ds + \int_{\rho\theta_1}^{\rho\theta_2} z_s^2 ds \right) \\ &= 2\rho\pi \int_{C_\rho} |X_s|^2 ds \leq \frac{16\pi D(X)}{|\ln(\rho)|} \\ &\leq \frac{16\pi M}{|\ln(\delta)|} \\ &\leq \epsilon_1^2 \end{aligned}$$

i.e.,

$$|X_1 - X_2| < \epsilon_1.$$

Por la elección de ϵ_1 , $\tilde{\Gamma}$ está contenido en una bola de radio ϵ , $\tilde{\Gamma} \subseteq B_\epsilon$ (por la nota expuesta arriba, sabemos que, efectivamente, $\tilde{\Gamma}$ es el sub-arco, i.e., $\tilde{\Gamma}$ contiene a lo más un Q_i).

Luego, si $w \in \partial B \cap B_\delta(w_0) \subseteq \tilde{C}_\rho$, i.e., $|w - w_0| < \delta$, entonces

$$X(w) \in X(\partial B \cap B_\delta(w_0)) \subseteq X(\tilde{C}_\rho) = \tilde{\Gamma} \subseteq B_\epsilon$$

por lo tanto

$$|X(w) - X(w_0)| < 2\epsilon.$$

Observemos que δ sólo depende de M y ϵ_1 ; mientras que esta última depende de ϵ, Γ y de los Q_i 's.

q.e.d.

Ahora, con los Lemas expuestos arriba, estamos en condiciones de probar el Teorema 2.3.

2.3.2. Primera prueba

Empezaremos por dar una prueba que utiliza un teorema clásico del Cálculo de Variaciones.

Definición 2.6. Sea H un espacio de Hilbert. Diremos que la sucesión $\{x_n\} \subset H$ converge débilmente¹⁴ a x en H ($x_n \rightharpoonup x$) si y sólo si

$$\langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

Por ejemplo, si $H = H^1(B; \mathbb{R}^3)$, entonces, $X_n \rightharpoonup X$ si y sólo si

$$\iint_B (X_n \cdot Y + \nabla X_n \cdot \nabla Y) \, du \, dv \longrightarrow \iint_B (X \cdot Y + \nabla X \cdot \nabla Y) \, du \, dv \quad \forall Y \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$$

Definición 2.7. Sea H un espacio de Hilbert, $M \subseteq H$. Una función $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ es **débilmente semicontinua inferiormente (d.s.i.)** en M si y sólo si cada vez que $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en M , entonces,

$$E(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(x_n)$$

Definición 2.8. Una función, $E : M \rightarrow \mathbb{R}$, es **coerciva** si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $|x_n| \rightarrow \infty$, entonces, $E(x_n) \rightarrow \infty$, si $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.5. Sea H un espacio de Hilbert separable, $M \subseteq H$ débilmente cerrado¹⁵ en H . Sea $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ d.s.i. y coerciva. Entonces, existe un minimizador $x_0 \in M$ tal que

$$E(x_0) = \inf_{x \in M} E(x) = \min_{x \in M} E(x)$$

¹⁴Una definición más general se da en el Apéndice A.

¹⁵Un conjunto es débilmente cerrado si es cerrado respecto a la topología débil, i.e., M es débilmente cerrado si y sólo si para toda sucesión $\{x_m\} \subseteq M$ débilmente convergente a x ($x_m \rightharpoonup x$), se tiene que $x \in M$.

Prueba: Sea

$$a_0 = \inf_{x \in M} E(x) \geq -\infty.$$

Consideremos una sucesión minimizante $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $E(x_n) \rightarrow a_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, como E es coercivo, $\{x_n\}$ está acotada en H , luego, existe una subsucesión débilmente convergente (ver por ejemplo: [2]), i.e., existe $x_0 \in H$ tal que $x_n \rightharpoonup x_0$ débilmente en H . Entonces, como M es débilmente cerrado, se tiene que $x_0 \in M$. Dado que E es d.s.i. tenemos que

$$a_0 \leq E(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(x_n) = a_0$$

Por lo tanto $E(x_0) = a_0$.

q.e.d.

Nuestro objetivo es utilizar el Teorema 2.5 para encontrar un mínimo de $D(X)$. Para verificar que D cumple las hipótesis serán de gran ayuda las siguientes proposiciones.

Proposición 2.3. Sean H un espacio de Hilbert y $\alpha : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una función bilineal, continua y simétrica, tal que $\alpha(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H$. Entonces, la función $E(x) := \alpha(x, x)$ es débilmente semicontinua inferiormente.

Prueba: Supongamos que $x_m \rightharpoonup x$ débilmente en H . Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha(x_m - x, x_m - x) &\leq \alpha(x_m, x_m) + \alpha(x, x) - 2\alpha(x_m, x) + \alpha(x, x) - \alpha(x, x) \\ &= \alpha(x_m, x_m) - \alpha(x, x) + 2\alpha(x - x_m, x) \end{aligned}$$

i.e.,

$$0 \leq E(x_m) - E(x) + 2\alpha(x - x_m, x). \quad (2.25)$$

Dado que x es fijo y $\alpha(x, \cdot)$ es una función lineal y continua en H , por el teorema de representación de Riesz, existe un único $y \in H$ tal que

$$\alpha(x, x - x_m) = \langle y, x - x_m \rangle \rightarrow 0 \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty$$

pues, $x_m \rightharpoonup x$ débilmente en H . Por lo tanto, tomando el límite en (2.25), obtenemos

$$E(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(x_m).$$

q.e.d.

Lema 2.11. La función $D : H^1(B; \mathbb{R}^3) \times H^1(B; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$D(X, Y) = \frac{1}{2} \iint_B (\nabla X \cdot \nabla Y) \, du \, dv = \frac{1}{2} \iint_B (X_u \cdot Y_u + X_v \cdot Y_v) \, du \, dv$$

es bilineal, continua y simétrica.

Prueba: Claramente $D(X, Y)$ es bilineal y simétrica. Para demostrar que es continua en $H^1(B; \mathbb{R}^3) \times H^1(B; \mathbb{R}^3)$, notemos que,

$$\begin{aligned} |D(X, Y)| &\leq \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X \cdot \nabla Y| \, du \, dv \leq \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X| |\nabla Y| \, du \, dv \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\iint_B |\nabla X|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_B |\nabla Y|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \|X\|_{H^1} \|Y\|_{H^1} \end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad de la forma bilineal $D(X, Y)$.

q.e.d.

Corolario 2.2. *El funcional*

$$D(X) = \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X|^2 \, du \, dv$$

es débilmente semicontinuo inferiormente.

Prueba: La demostración es automática, utilizando la Proposición 2.3 y el Lema 2.11.

q.e.d.

Para poder demostrar la coercividad de $D(X)$ utilizaremos el siguiente teorema, la prueba puede verse en [19] (también se pone un esbozo de ésta en el Apéndice A).

Teorema 2.6 (Desigualdad generalizada de Sobolev). *Para cualquier dominio acotado, Ω , de clase C^1 , existe una constante $c = c(\Omega)$, tal que, para cualquier función $u \in H^1(\Omega)$, se tiene*

$$\iint_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq c \left(\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, do \right).$$

Nota: Cabe recalcar que en la integral $\int_{\partial\Omega} |u|^2 \, do$, el integrando es la traza de u .

Corolario 2.3. *El funcional*

$$D(X) = \frac{1}{2} \iint_B |\nabla X|^2 \, du \, dv$$

es coercivo en $C(\Gamma)$.

Prueba: Si $X \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$, entonces, por el Teorema 2.6:

$$\iint_B |X|^2 du dv \leq c \left(\iint_B |\nabla X|^2 du dv + \int_{\partial B} |X|^2 do \right) \leq \tilde{c} (D(X) + \|X\|_{L^\infty(\partial B)}^2)$$

luego, para $X \in C(\Gamma)$, se tiene que

$$\|X\|^2 = \iint_B (|X|^2 + |\nabla X|^2) du dv = \iint_B |X|^2 du dv + 2D(X) \leq \hat{c} (D(X) + a(\Gamma))$$

donde $a(\Gamma)$ es una constante que depende de la curva Γ . De esta última desigualdad se obtiene la coercividad.

q.e.d.

Para utilizar el Teorema 2.5 sobre el funcional $D(X)$, $D : C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, bastaría probar que $C(\Gamma)$ es débilmente cerrado en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, sin embargo, el resultado no es cierto, ésto debido a la acción del grupo de mapeos conformes del disco en sí mismo

$$G := \left\{ g(w) = e^{i\phi} \frac{a+w}{1+\bar{a}w} \mid a \in \mathbb{C}, |a| < 1, \phi \in \mathbb{R} \right\}.$$

y a la invariancia de $D(X)$ bajo difeomorfismos conformes (véase la Proposición 2.1).

Proposición 2.4. Sean $X \in C(\Gamma)$ y $X \circ G := \{X \circ g \mid g \in G\}$ la órbita conforme de X . Entonces, para cualquier X , la cerradura débil de $X \circ G$ contiene un mapeo constante.

Prueba: Consideremos primero el caso en que $\phi \in C^1(\bar{B}; \mathbb{R}^3) \cap C(\Gamma)$. Sea

$$g_m(w) := \frac{a_m + w}{1 + \bar{a}_m w}$$

donde, $a_m \in \mathbb{C}$, $|a_m| < 1$ y $a_m \rightarrow 1$ si $m \rightarrow \infty$. Claramente $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq G$ y

$$g_m(w) \rightarrow 1 \text{ uniformemente en } \bar{B} \setminus \{-1\}$$

entonces,

$$\phi_m := \phi \circ g_m \rightarrow \phi(1) \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

puntualmente en B . Ahora, por la invariancia conforme de $D(X)$ tenemos que

$$D(\phi_m) = D(\phi) < \infty \quad \text{y} \quad \|\phi_m\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{L^\infty} < \infty$$

argumentando de la misma forma que en la prueba del Corolario 2.3, tenemos que $\{\phi_m\}$ está acotada en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, esto implica la existencia de una subsucesión débilmente convergente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, i.e., *s.p.g.*

$$\phi_m \rightharpoonup \phi_0 \equiv \phi(1) = \text{cte} \quad \text{débilmente en } H^1(B; \mathbb{R}^3) \quad (2.26)$$

por lo tanto, $\{\phi_m\}$ se acumula (débilmente) a una función constante.

Ahora, para $X \in C(\Gamma)$, definamos $X_m := X \circ g_m^{-1}$, claramente $X_m \in C(\Gamma)$ y, una vez más, por la invariancia conforme de D y el Teorema 2.6, tenemos que

$$\|X_m\|^2 \leq \tilde{c}(D(X_m) + a(\Gamma)) = \tilde{c}(D(X) + a(\Gamma))$$

esto implica que $\{X_m\}$ está acotada en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$ y, por esto, podemos extraer una sucesión débilmente convergente, i.e., existe $X_0 \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$ tal que $X_m \rightharpoonup X_0$ débilmente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$. Para demostrar que $X_0 \equiv cte$ es suficiente probar que

$$\iint_B \nabla X_0 \cdot \nabla \phi \, du \, dv = 0 \quad \forall \phi \in C^1(\bar{B}; \mathbb{R}^3).$$

Sea $\phi \in C^1(\bar{B}; \mathbb{R})$ y ϕ_m como arriba. Por la invariancia conforme de D y la convergencia débil de X_m , tenemos

$$\begin{aligned} \iint_B \nabla X_0 \cdot \nabla \phi \, du \, dv &= 2D(X_0, \phi) = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} D(X_m, \phi) \\ &= 2 \lim_{m \rightarrow \infty} D(X \circ g_m^{-1}, \phi) = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} D(X, \phi \circ g_m) \\ &= 2 \lim_{m \rightarrow \infty} D(X, \phi_m) = 0 \end{aligned}$$

ya que $\phi_m \rightharpoonup \phi(1) \equiv cte$ débilmente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$. Por lo tanto, $X_0 \equiv cte$ en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$.

q.e.d.

La proposición anterior indica que $C(\Gamma)$ no es débilmente cerrado en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$. Sin embargo, la invariancia de D respecto a G nos permite «factorizar» el grupo simétrico, G . La manera más conveniente de hacer ésto es imponiendo una «condición de tres puntos» en las funciones admisibles.

Proposición 2.5. *Dadas cualesquiera tercias $(\phi_1, \phi_2, \phi_3), (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ tales que $0 \leq \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < 2\pi$ y $0 \leq \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 < 2\pi$; existe un único $g \in G$ tal que*

$$g(e^{i\psi_j}) = e^{i\phi_j} \quad j = 1, 2, 3.$$

Prueba: La prueba es inmediata notando que cualquier transformación de Möbius queda determinada por su valor en tres puntos¹⁶.

q.e.d.

La proposición anterior sugiere normalizar las funciones admisibles, i.e., la clase $C(\Gamma)$, como se hizo arriba -ver (2.22) -es decir, al definir la clase

$$C^*(\Gamma) := \{X \in C(\Gamma) \mid X(P_j) = Q_j, \, j = 1, 2, 3.\}$$

como arriba, *factorizamos* el grupo conforme G y, aún más, $C^*(\Gamma)$ sí va a ser débilmente cerrado en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$.

Proposición 2.6. *$C^*(\Gamma)$ es débilmente cerrado en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$.*

¹⁶Véase, por ejemplo, [3].

Prueba: Sea $\{X_m\} \subseteq C^*(\Gamma)$, tal que, $X_m \rightharpoonup X$ débilmente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$. Por la convergencia débil $\{X_m\}$ está acotada, además

$$D(X_m) \leq \|X_m\| < c \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 2.9, existe una subsucesión tal que (s.p.g) $X_m \rightarrow X$ uniformemente en ∂B , luego, por el Lema 2.1, $X|_{\partial B}$ es débilmente monótona y, por la convergencia uniforme, $X(P_i) = Q_i$, $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto $X \in C^*(\Gamma)$, i.e., $C^*(\Gamma)$ es débilmente cerrado.

q.e.d.

Ya que hemos probado este resultado tenemos una prueba del Teorema 2.3, el cual se puede reformular de la siguiente forma:

Teorema 2.7. *Sea Γ una curva cerrada de Jordan en \mathbb{R}^3 , tal que, $C(\Gamma) \neq \emptyset$. Entonces, existe una solución al problema de Plateau, i.e., existe $X : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface la Definición 2.2.*

Prueba: Sean Q_1, Q_2 y Q_3 tres distintos puntos en Γ , con esta tripleta, definimos $C^*(\Gamma)$ como arriba. Dado que D es coercivo (Corolario 2.3), débilmente semicontinuo inferiormente (Corolario 2.2) y, además, $C^*(\Gamma) \subseteq H^1(B; \mathbb{R}^3)$ es débilmente cerrado (Proposición 2.6); el Teorema 2.5 asegura que existe $X_0 \in C^*(\Gamma)$ tal que

$$D(X_0) = \inf_{C^*(\Gamma)} D(X).$$

Ahora, para cada $X \in C(\Gamma)$, la Proposición 2.5 afirma que existe un único difeomorfismo conforme $g \in G$, tal que

$$X \circ g =: X' \in C^*(\Gamma).$$

Por la invariancia de D bajo difeomorfismos conformes $D(X') = D(X)$. Luego, si

$$A := \{X' \in C^*(\Gamma) \mid \exists X \in C(\Gamma) \text{ y } g \in G \text{ tal que } X \circ g = X'\} \subseteq C^*(\Gamma)$$

tenemos que

$$\inf_{C^*(\Gamma)} D(X) \geq \inf_{C(\Gamma)} D(X) = \inf_A D(X') \geq \inf_{C^*(\Gamma)} D(X).$$

Por lo tanto

$$D(X_0) = \inf_{C^*(\Gamma)} D(X) = \inf_{C(\Gamma)} D(X)$$

entonces, por el Lema 2.2, X_0 es una solución del problema de Plateau.

q.e.d.

2.3.3. Una prueba utilizando funciones armónicas

A continuación mostraremos otra forma de minimizar el funcional de Dirichlet, $D(X)$ sobre la clase $C(\Gamma)$. Esta prueba utiliza las propiedades de compacidad de las funciones armónicas.

Prueba (Teorema 2.3): Sea $\{X_k\} \subseteq C^*(\Gamma)$ una sucesión minimizante, i.e., una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_k) = \inf_{C^*(\Gamma)} D(X) =: d^*(\Gamma).$$

Esta sucesión existe, pues, $0 \leq D(X)$.

Afirmación: Podemos considerar $X_k \in C(\bar{B}; \mathbb{R}^n) \cap C^2(B; \mathbb{R}^n)$ tales que $\Delta X_k = 0$. Si X_k no cumpliera estas condiciones, reemplazamos X_k por la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta Z_k = 0 & \text{en } B \\ Z_k = X_k & \text{en } \partial B \end{cases}.$$

Esta solución, Z_k , pertenece a $C(\bar{B}; \mathbb{R}^n) \cap C^2(B; \mathbb{R}^n)$ (véase Teorema B.3). Además, es bien sabido que esta solución, Z_k , minimiza¹⁷ $D(Z)$ sobre los $Z \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$ tales que $Z - X_k \in H_0^1(B; \mathbb{R}^n)$ (recordemos que $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$).

Como consecuencia de esta última observación tenemos que

$$D(Z_k) \leq D(X_k)$$

y además, por construcción, $Z_k \in C^*(\Gamma)$, luego,

$$d^*(\Gamma) \leq D(Z_k).$$

Esto nos lleva a que

$$d^*(\Gamma) \leq D(Z_k) \leq D(X_k) \longrightarrow d^*(\Gamma)$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(Z_k) = d^*(\Gamma). \quad (2.27)$$

Hemos construido una sucesión minimizante en $C^*(\Gamma)$ de mapeos armónicos que son continuos en \bar{B} , tal y como afirmamos arriba.

Ahora, la relación (2.27) implica que existe un número $M > 0$ tal que

$$D(Z_k) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, por el Lema 2.9, existe una subsucesión de $\{Z_k|_{\partial B}\}$, la cual denotaré de la misma forma, y una función $\phi \in C(\partial B; \mathbb{R}^n)$, tales que

$$Z_k|_{\partial B} \longrightarrow \phi \quad \text{uniformemente en } \partial B \quad (2.28)$$

Esta última convergencia nos garantiza que existe una función, $Z \in C(\bar{B}) \cap C^2(B)$, armónica en B , tal que

$$Z_k \longrightarrow Z \quad \text{uniformemente en } B$$

(ver el Teorema B.6, Apéndice 2). También, por el Lema 2.1 y (2.28), sabemos que

$$Z|_{\partial B} = \phi$$

¹⁷Esto no es más que el principio de Dirichlet. Los mínimos del funcional de Dirichlet son soluciones débiles de la ecuación de Laplace, ver la prueba del Lema 2.6.

es débilmente monótona. Luego, $Z \in C^*(\Gamma)$ y, por lo tanto,

$$d^*(\Gamma) \leq Z.$$

Por otro lado, si denotamos a

$$D_\rho(Z) := \iint_{B_\rho(0)} |\nabla Z|^2 dx$$

el Teorema B.2, Apéndice B, implica que para todo $\rho < 1$,

$$D_\rho(Z) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_\rho(Z_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} D(Z_k) = d^*(\Gamma).$$

Luego, si $\rho \rightarrow 1$, tenemos que

$$D(Z) \leq d^*(\Gamma).$$

Por lo tanto,

$$D(Z) = d^*(\Gamma).$$

Utilizando el mismo argumento de la prueba del Teorema 2.7, concluimos que

$$D(Z) = d^*(\Gamma) = \inf_{C(\Gamma)} D(X).$$

q.e.d.

Una de las ventajas de esta prueba es que, dado que minimizamos sobre funciones armónicas, el mínimo que encontramos, a priori, es diferenciable y tal que $\Delta X = 0$.

Capítulo 3

La Solución del Problema de Plateau es de Área Mínima

Hasta ahora hemos probado que si $C(\Gamma) \neq \emptyset$, entonces, existe al menos una superficie mínima (i.e. de curvatura media igual a cero) en la clase $C(\Gamma)$. Además, esta solución del problema de Plateau se obtuvo minimizando $D(X)$ en $C(\Gamma)$. Para cerrar el arco argumental de este escrito aún faltaría demostrar que

$$\inf_{C(\Gamma)} A(X) = \inf_{C(\Gamma)} D(X). \quad (3.1)$$

es decir, la superficie mínima que encontramos minimiza el funcional de área en la clase $C(\Gamma)$. Aunque cualquier mínimo de $D(X)$ satisface

$$D(X) = A(X)$$

no es nada claro que el mínimo de la integral de Dirichlet sobre $C(\Gamma)$ también sea un mínimo del funcional de área sobre $C(\Gamma)$. El objetivo de este capítulo es verificar la relación (3.1). Empezaremos por esbozar una prueba del lema de ϵ -conformalidad de Morrey, el cual es una referencia clásica en la literatura para dar una prueba de (3.1). Después daremos un esquema de una prueba “más moderna”, de (3.1), la cual utiliza los métodos empleados en el capítulo anterior para encontrar un mínimo de $D(X)$.

3.1. Lema de ϵ -conformalidad de Morrey

Definición 3.1. Sea $X = X(u, v)$, $(u, v) \in \bar{B}$, una parametrización de una superficie S . Diremos que $X = X(u, v)$ es **una parametrización ϵ -conforme** ($\epsilon > 0$) si y sólo si

$$D(X) < A(X) + \epsilon.$$

A grandes rasgos, el lema de ϵ -conformalidad de Morrey dice que uno puede introducir una parametrización ϵ -conforme si consideramos un tipo especial de parametrizaciones de una superficie.

Lema 3.1. Sea $X = X(x, y) \in C^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^m)$ una parametrización de una superficie regular S . Entonces, para cada $\epsilon > 0$, S posee una parametrización ϵ -conforme. Es decir, existe X_ϵ tal que

$$D(X_\epsilon) < A(X_\epsilon) + \epsilon = A(X) + \epsilon.$$

La prueba será expuesta más adelante, antes daré un resultado necesario y algunos comentarios.

Lema 3.2. Sean $a, b, c \in C^\infty(\bar{B})$ tales que

$$|a|, |b|, |c| \leq M \quad y \quad ac - b^2 = 1. \quad (3.2)$$

Entonces existe una transformación continua e inyectiva $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ de B en B tal que:

i) La transformación $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ pertenece a $C^\infty(B)$ y es invertible, $(x(\xi, \eta), (y(\xi, \eta)))$ es la transformada inversa.

ii) Las funciones $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\eta_x = -(b\xi_x + c\xi_y) \quad \eta_y = a\xi_x + b\xi_y$$

Prueba: Por el Corolario C.1, Apéndice C, sabemos que el problema

$$(P) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(au_x + bu_y) + \frac{\partial}{\partial y}(bu_x + cu_y) = 0 & \text{en } B \\ u = x & \text{en } \partial B \end{cases}$$

tiene una solución $u \in C^\infty(\bar{B})$. Además, se sabe que las primeras derivadas, de la solución al problema (P), no se anulan simultáneamente¹ (i.e., si $u_x(x_0, y_0) = 0$, entonces, $u_y(x_0, y_0) \neq 0$ y si $u_y(x_0, y_0) = 0$, entonces, $u_x(x_0, y_0) \neq 0$)², esto es una consecuencia de la condición $u = x$ en ∂B .

También existe una *conjugada elíptica*³, $v(x, y)$, que satisface la misma ecuación que u y las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} v_x &= -(bu_x + cu_y) \\ v_y &= au_x + bu_y. \end{aligned}$$

Lo primero a notar es que la transformación

$$T(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$$

¹Este resultado no se probará en este trabajo, cabe recalcar que no es un problema sencillo. Para obtener bibliografía al respecto, véase: [14], [15] o [12].

²Esta condición también puede escribirse como $u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2 > 0$ para todo $(x, y) \in B$.

³Esta función se construye igual que la conjugada armónica, en el caso en el que $\Delta u = 0$. La función v queda definida por la siguiente fórmula:

$$v(x, y) := \int_0^y [au_x(0, s) + bu_y(0, s)] ds - \int_0^x [bu_x(s, y) + cu_y(s, y)] ds.$$

es invertible. Basta verificar que el determinante de la matriz jacobiana es diferente de cero. En efecto:

$$\begin{aligned} u_x v_y - u_y v_x &= u_x (a u_x + b u_y) + u_y (b u_x + c u_y) \\ &= a (u_x)^2 + 2b u_x u_y + c (u_y)^2 \\ &\geq \lambda_0 (u_x^2 + u_y^2) \end{aligned}$$

la desigualdad se tiene ya que el problema (P) es un problema elíptico (véase Definición C.1, Apéndice C) y esta última cantidad es diferente de cero, ya que $u_x^2 + u_y^2 > 0$.

Si la imagen de la transformación T fuera B , ya habríamos acabado, sin embargo, esto es algo que no podemos asegurar. Lo que sí sabemos es que, debido a la continuidad de T , $T(B)$ es simplemente conexo. Consideremos el mapeo conforme (y analítico), dado por el Teorema de Riemann

$$G : T(B) \longrightarrow B$$

tal que

$$G(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v)).$$

Entonces el mapeo

$$G \circ T : B \longrightarrow B$$

tal que

$$(x, y) \longmapsto (\xi(u(x, y), v(x, y)), \eta(u(x, y), v(x, y)))$$

es invertible. Veamos que satisface las relaciones requeridas. Como G es conforme se satisface

$$\xi_u = \eta_v \quad \text{y} \quad \xi_v = -\eta_u$$

luego⁴,

$$\begin{aligned} a\xi_x + b\xi_y &= a(\xi_u u_x + \xi_v v_x) + b(\xi_u u_y + \xi_v v_y) \\ &= (a u_x + b u_y)\xi_u + (a v_x + b v_y)\xi_v \\ &= v_y \xi_u - u_y \xi_v \\ &= v_y \eta_v + u_y \eta_u \\ &= \eta_y \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} b\xi_x + c\xi_y &= b(\xi_u u_x + \xi_v v_x) + c(\xi_u u_y + \xi_v v_y) \\ &= (b u_x + c u_y)\xi_u + (b v_x + c v_y)\xi_v \\ &= -v_x \eta_v - u_x \eta_u \\ &= -\eta_x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G \circ T$ es el mapeo buscado.

q.e.d.

⁴Utilizando las relaciones asociadas

$$u_x = b v_x + c v_y \quad \text{y} \quad u_y = -(a v_x + b v_y).$$

Prueba (Lema 3.1): Sea $\epsilon > 0$. Con base en E, F y G , los coeficientes de la primera forma fundamental de X , definimos:

$$\tilde{E} := E + \frac{1}{n}G, \quad \tilde{F} := F, \quad \tilde{G} := G + \frac{1}{n}E \quad (3.3)$$

donde n es tal que se satisface la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} dx dy &= \iint_B \sqrt{EG - F^2 + \frac{1}{n}(E^2 + G^2) + \frac{1}{n^2}EG} dx dy \\ &< \iint_B \sqrt{EG - F^2} dx dy + \epsilon/2 \\ &= A(X) + \epsilon/2 \end{aligned}$$

Definamos, también,

$$\tilde{H} := (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{1/2} = \sqrt{EG - F^2 + \frac{1}{n}(E^2 + G^2) + \frac{1}{n^2}EG}.$$

Es sencillo notar que \tilde{H} se anula si y sólo si E y G se anulan simultáneamente. La hipótesis de que X sea una superficie regular implica que E y G no se anulan simultáneamente (pues, $|X_u|^2 + |X_v|^2 > 0$ en una superficie regular), i.e., $\tilde{H} \neq 0$ en \bar{B} . Esta observación nos permite definir

$$a := \frac{\tilde{G}}{\tilde{H}}, \quad b := \frac{-\tilde{F}}{\tilde{H}}, \quad c := \frac{\tilde{E}}{\tilde{H}}. \quad (3.4)$$

Claramente $a, b, c \in C^\infty(\bar{B})$ y están acotadas, pues $X \in C^\infty(\bar{B})$ y el denominador se anula si y sólo si X no es regular en ese punto. Aún más, por construcción

$$ac - b^2 = 1.$$

Luego, por el Lema 3.2, existe una transformación, $(u(x, y), v(x, y)) \in C^\infty(B; B)$ (con inversa $x(u, v), y(u, v)$) tal que

$$v_x = -(bu_x + cu_y) \quad (3.5)$$

$$v_y = au_x + bu_y \quad (3.6)$$

$$u_x v_y - u_y v_x \neq 0. \quad (3.7)$$

Derivando y realizando el álgebra necesaria, es claro que $X(u, v) = X(u(x, y), v(x, y))$ es una reparametrización de X , que cumple:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &:= u_x v_y - u_y v_x = au_x^2 + 2bu_x u_y + cu_y^2 = av_x^2 + 2bv_x v_y + cv_y^2 \neq 0 \quad (3.8) \\ \mathfrak{E} &:= |X_x|^2 = \frac{Ev_y^2 - 2Fv_x v_y + Gu_x^2}{\mathfrak{J}^2} \\ \mathfrak{G} &:= |X_y|^2 = \frac{Eu_y^2 - 2Fu_x u_y + Gu_x^2}{\mathfrak{J}^2} \\ \mathfrak{F} &:= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{-Eu_y v_y + F(u_x v_y + u_y v_x) - Gu_x v_x}{\mathfrak{J}^2} \\ \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 &= \frac{EG - F^2}{\mathfrak{J}^2} \end{aligned}$$

Definamos $\tilde{\mathfrak{E}}, \tilde{\mathfrak{F}}$ y $\tilde{\mathfrak{G}}$ en términos de \tilde{E}, \tilde{F} y \tilde{G} con las mismas fórmulas de arriba, es decir,

$$\tilde{\mathfrak{E}} := \frac{\tilde{E}v_y^2 - 2\tilde{F}v_xv_y + \tilde{G}v_x^2}{\mathfrak{J}^2} \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathfrak{G}} := \frac{\tilde{E}u_y^2 - 2\tilde{F}u_xu_y + \tilde{G}u_x^2}{\mathfrak{J}^2} \quad (3.10)$$

$$\tilde{\mathfrak{F}} := \frac{-\tilde{E}u_yv_y + \tilde{F}(u_xv_y + u_yv_x) - \tilde{G}u_xv_x}{\mathfrak{J}^2} \quad (3.11)$$

$$\tilde{\mathfrak{E}}\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{\mathfrak{F}}^2 = \frac{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}{\mathfrak{J}^2} \quad (3.12)$$

De aquí podemos deducir las siguientes relaciones:
Primero, dado que $E \leq \tilde{E}$ y $G \leq \tilde{G}$ se tiene que

$$\mathfrak{E} \leq \tilde{\mathfrak{E}} \quad \text{y} \quad \mathfrak{G} \leq \tilde{\mathfrak{G}}. \quad (3.13)$$

Luego, utilizando las relaciones (3.4), (3.8), (3.9) y (3.10); deducimos que

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \tilde{\mathfrak{G}}. \quad (3.14)$$

También, usando (3.4), (3.5) y (3.6); observamos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}} &:= \frac{-\tilde{E}u_yv_y + \tilde{F}(u_xv_y + u_yv_x) - \tilde{G}u_xv_x}{\mathfrak{J}^2} \\ &= \tilde{H} \left[\frac{-cu_y(au_x + bu_y) - bu_x(au_x + bu_y) + bu_y(bu_x + cu_y) + au_x(bu_x + cu_y)}{\mathfrak{J}^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\tilde{\mathfrak{F}} = 0. \quad (3.15)$$

Por último, de (3.14) y (3.15), deducimos que

$$\frac{1}{2} (\tilde{\mathfrak{E}} + \tilde{\mathfrak{G}}) = \sqrt{\tilde{\mathfrak{E}}\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{\mathfrak{F}}^2}. \quad (3.16)$$

Para finalizar, recordando que \mathfrak{J} es el jacobiano de la transformación $u(x, y), v(x, y)$ y utilizando (3.12), (3.13) y (3.16), verifiquemos que $X(u, v) = X(u(x, y), v(x, y))$ es la reparametrización buscada:

$$\begin{aligned} 2D(X; u, v) &= \iint_B (\mathfrak{E} + \mathfrak{G}) \, du \, dv \leq \iint_B (\tilde{\mathfrak{E}} + \tilde{\mathfrak{G}}) \, du \, dv \\ &= 2 \iint_B (\tilde{\mathfrak{E}}\tilde{\mathfrak{G}} - \tilde{\mathfrak{F}}^2)^{1/2} \, du \, dv = 2 \iint_B (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)^{1/2} \, dx \, dy \\ &< 2 \iint_B (EG - F^2)^{1/2} \, dx \, dy + \epsilon \\ &= 2A(X) + \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $X(u, v)$ es nuestra parametrización ϵ -conforme y $X = X(u, v) \in C^\infty(B)$.

q.e.d.

Si

$$C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n) := \{X \in C^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n) \mid X \text{ es una superficie regular}\}$$

nuestra versión del lema de ϵ -conformalidad de Morrey nos permite probar que

$$\inf_{C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)} D(X) = \inf_{C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)} A(X)$$

ya que, para empezar, la desigualdad

$$\inf_{C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)} A(X) \leq \inf_{C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)} D(X)$$

siempre se cumple. Por otro lado, si $X \in C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)$, entonces, por el Lema 3.1 existe $\tau_n : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ tal que $X_n := X \circ \tau_n \in C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)$ y

$$\inf_{C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)} D(X) \leq D(X_n) \leq A(X) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

luego,

$$\inf_{C(\Gamma) \cap C_R^\infty(\bar{B}; \mathbb{R}^n)} D(X) \leq A(X)$$

y de aquí se sigue la desigualdad faltante.

En su artículo, [15], Morrey prueba el Lema 3.1 con hipótesis más débiles, sólo pide que X sea una parametrización en $H^1(B; \mathbb{R}^3) \cap C(B; \mathbb{R}^3)$, algunos de los motivos por los cuales expongo el resultado con hipótesis más fuertes son los siguientes:

- Primero, suponer que X es una superficie regular se justifica por el hecho de que los mínimos de $D(X)$ son superficies regulares⁵.
- La prueba que aquí presento es, esencialmente, la misma prueba que Morrey expone. Básicamente el autor prueba lo que nosotros y luego lo extiende a su caso, esta extensión del resultado definitivamente no es trivial⁶.
- La demostración de Morrey, al igual que la exhibida aquí, resulta insatisfactoria para nuestro caso. Ya que sólo podríamos concluir que

$$\inf_{C(\Gamma) \cap C^0(B; \mathbb{R}^3)} D(X) = \inf_{C(\Gamma) \cap C^0(B; \mathbb{R}^3)} A(X).$$

Incluimos la prueba por ser una referencia clásica del tema y por su, muy singular, argumento (¡La reparametrización se construye con la solución de un problema elíptico!). En la siguiente sección incluimos una prueba de (3.1) completamente satisfactoria.

⁵Nos referimos al siguiente resultado de regularidad:

$$\text{Si } X \text{ minimiza } D \text{ en } C(\Gamma), \text{ entonces, } \nabla X(\omega) \neq 0 \text{ para toda } \omega \in B.$$

Esto implica que el mínimo de D es una superficie regular. Los detalles pueden verse en [18], Teorema 5.8.

⁶Véase [14] y [15].

3.2. Una prueba moderna

En esta sección daremos una prueba completa de la relación

$$\inf_{C(\Gamma)} A(X) = \inf_{C(\Gamma)} D(X). \quad (3.17)$$

Al probar esta igualdad podremos concluir que la solución, que ya encontramos, del problema de Plateau (Definición 2.2) también es una superficie de área mínima.

Para obtener este resultado introduciremos el funcional

$$A^\epsilon(X) := (1 - \epsilon)A(X) + \epsilon D(X).$$

Al tratar de minimizarlo sobre la clase $C(\Gamma)$ encontraremos una superficie, en $C(\Gamma)$, que simultáneamente minimiza el funcional de área, $A(X)$, y la integral de Dirichlet, $D(X)$. Para esto será necesario el siguiente resultado.

Lema 3.3. *El funcional $A : H^1(B; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$A(X) = \iint_B \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2} \, du \, dv = \iint_B |X_u \wedge X_v| \, du \, dv$$

es débilmente semicontinuo inferiormente, i.e., si $\{X_n\} \subseteq H^1(B; \mathbb{R}^3)$, tal que, $X_n \rightharpoonup X$ débilmente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$A(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} A(X_n). \quad (3.18)$$

Prueba (Esbozo): Primero, se puede notar que

$$A(Z) = \sup \left\{ \iint_B \phi \cdot (Z_u \wedge Z_v) \, du \, dv \mid \phi \in C_c^\infty(B; \mathbb{R}^3), |\phi| \leq 1 \right\} \quad (3.19)$$

esto es una consecuencia de que $C_c^\infty(B; \mathbb{R}^3)$ es denso en $L^2(B; \mathbb{R}^3)$.

Ahora, es suficiente demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_B \phi \cdot (X_{n,u} \wedge X_{n,v}) \, du \, dv = \iint_B \phi \cdot (X_u \wedge X_v) \, du \, dv \quad (3.20)$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(B; \mathbb{R}^3)$ tal que $|\phi| \leq 1$, ya que (3.19) y (3.20) implican que

$$\begin{aligned} \iint_B \phi \cdot (X_u \wedge X_v) \, du \, dv &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_B \phi \cdot (X_{n,u} \wedge X_{n,v}) \, du \, dv \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ \iint_B \psi \cdot (X_{n,u} \wedge X_{n,v}) \, du \, dv \mid \psi \in C_c^\infty(B; \mathbb{R}^3), |\psi| \leq 1 \right\} \right] \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A(X_n) \end{aligned}$$

Luego, tomando el supremo sobre todas las $\phi \in C_c^\infty(B; \mathbb{R}^3)$ tal que $|\phi| \leq 1$, concluimos (3.18).

Para probar (3.20) se considera $Z \in C^2(B; \mathbb{R}^3)$, entonces, para $\phi \in C_c^\infty(B; \mathbb{R}^3)$ tenemos que⁷

$$\iint_B \phi \cdot (Z_u \wedge Z_v) \, du \, dv = -\frac{1}{2} \iint_B [\phi_u \cdot (Z \wedge Z_v) + \phi_v \cdot (Z_u \wedge Z)] \, du \, dv \quad (3.21)$$

luego, por densidad, es posible extender (3.21) para $Z \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$.

Por último, si $X_n \rightharpoonup X$ débilmente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, entonces, $\{X_n\}$ está acotada. Luego, por el Teorema de Rellich (ver Apéndice A, Teorema A.5) y el Teorema A.7, tenemos que $X_n \rightarrow X$ (converge en norma) en $L^2(B; \mathbb{R}^3)$, esto, junto con la identidad (3.21), implica la relación (3.20).

q.e.d.

Corolario 3.1. *El funcional $A^\epsilon : H^1(B; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$A^\epsilon(X) = (1 - \epsilon)A(X) + \epsilon D(X) \quad 0 \leq \epsilon \leq 1$$

es débilmente semicontinuo inferiormente.

Prueba: Es una consecuencia inmediata del Lema 3.3 y el Corolario 2.2.

q.e.d.

Ahora, consideremos el problema de minimizar A^ϵ sobre la clase $C(\Gamma)$, con $\epsilon \in (0, 1]$. Como A^ϵ es invariante bajo difeomorfismos conformes (pues, A es invariante bajo cualquier difeomorfismo y D bajo los conformes), podemos encontrar una subsucesión minimizante $\{X_n\} \subseteq C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, tal que

$$A^\epsilon(X_n) \rightarrow a(\epsilon) := \inf_{C^*(\Gamma)} A^\epsilon(X) = \inf_{C(\Gamma)} A^\epsilon(X)$$

entonces,

$$(1 - \epsilon)A(X_n) + \epsilon D(X_n) = A^\epsilon(X_n) \leq a(\epsilon) + 1$$

si n es suficientemente grande. Por este motivo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$D(X_n) \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, utilizando la desigualdad generalizada de Sobolev (Teorema A.8, Apéndice A) observamos que $\{X_n\}$ está acotada en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, entonces, existe⁸ una subsucesión $\{X_{n_j}\}$ que converge débilmente en $H^1(B; \mathbb{R}^3)$, i.e., existe $X^\epsilon \in H^1(B; \mathbb{R}^3)$, tal que

$$X_{n_j} \rightharpoonup X^\epsilon \quad \text{si } j \rightarrow \infty$$

⁷Después de utilizar la primera fórmula de Green

$$\iint_\Omega v \Delta u \, dx + \iint_\Omega Du \cdot Dv \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

y recordando que $\frac{\partial}{\partial u}(X \wedge Z) = X_u \wedge Z + X \wedge Z_u$.

⁸Ver Lema A.2, Apéndice A.

pero, $\{X_n\} \subseteq C^*(\Gamma)$ y $C^*(\Gamma)$ es débilmente cerrado (Proposición 2.6), entonces, $X^\epsilon \in C^*(\Gamma)$, luego, por el Corolario 3.1

$$a(\epsilon) \leq A^\epsilon(X^\epsilon) \leq \liminf A^\epsilon(X_{n_j}) = a(\epsilon).$$

Por lo tanto,

$$A^\epsilon(X^\epsilon) = a(\epsilon) = \inf_{C^*(\Gamma)} A^\epsilon(X) = \inf_{C(\Gamma)} A^\epsilon(X)$$

Ahora, dado que X^ϵ es un mínimo de A^ϵ en $C(\Gamma)$, tenemos que

$$\left. \frac{d}{d\mu} A^\epsilon(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu) \right|_{\mu=0} = 0$$

para cualquier familia de difeomorfismos $\{g_\mu\}_{|\mu| < \mu_0}$, $g_\mu : \bar{B} \rightarrow \bar{B}_\mu$, que dependen diferenciablemente de μ y tal que $g_0 = id$ (esto por las mismas razones que se exponen en el Lema 2.6). Además, como A es invariante bajo difeomorfismos, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} A^\epsilon(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu) &= \frac{d}{d\mu} [(1 - \epsilon)A(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu) + \epsilon D(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu)] \\ &= \frac{d}{d\mu} [(1 - \epsilon)A(X^\epsilon) + \epsilon D(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu)] \\ &= \frac{d}{d\mu} \epsilon D(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left. \frac{d}{d\mu} D(X^\epsilon \circ g_\mu^{-1}; B_\mu) \right|_{\mu=0} = 0$ para cualquier familia de difeomorfismos $\{g_\mu\}$ como arriba. Luego, el Lema 2.3, asegura que

$$|X_u^\epsilon|^2 = |X_v^\epsilon|^2 \quad \text{y} \quad \langle X_u^\epsilon, X_v^\epsilon \rangle = 0.$$

Así, hemos demostrado el siguiente lema.

Lema 3.4. *Dado $\epsilon \in (0, 1]$, existe $X^\epsilon \in C(\Gamma)$ tal que $A^\epsilon(X^\epsilon) = \inf_{C(\Gamma)} A^\epsilon(X)$ y, además,*

$$|X_u^\epsilon|^2 = |X_v^\epsilon|^2 \quad \text{y} \quad \langle X_u^\epsilon, X_v^\epsilon \rangle = 0.$$

El lema anterior y la relación (2.3), implican que $A(X^\epsilon) = D(X^\epsilon)$, luego,

$$A^\epsilon(X^\epsilon) = A(X^\epsilon) = D(X^\epsilon) \quad \text{si} \quad 0 < \epsilon \leq 1. \quad (3.22)$$

También, dado que $A(X) \leq D(X)$ y que X^ϵ es un mínimo, tenemos

$$A^\epsilon(X^\epsilon) \leq A^\epsilon(X) = (1 - \epsilon)A(X) + \epsilon D(X) \leq D(X) \quad \forall X \in C(\Gamma) \quad \forall \epsilon \in (0, 1] \quad (3.23)$$

Ahora, tomando $\epsilon' \in (0, 1]$, existe $X^{\epsilon'} \in C(\Gamma)$ (mínimo de $A^{\epsilon'}$). Por (3.22) y (3.23), tenemos que

$$D(X^\epsilon) = A^\epsilon(X^\epsilon) \leq D(X^{\epsilon'}) \quad \forall \epsilon, \epsilon' \in (0, 1] \quad \text{ya que} \quad X^{\epsilon'} \in C(\Gamma).$$

Por lo tanto,

$$A^\epsilon(X^\epsilon) = A(X^\epsilon) = D(X^\epsilon) \equiv cte \quad \forall \epsilon \in (0, 1] \quad (3.24)$$

Consideremos

$$\alpha(\Gamma) := \inf_{C(\Gamma)} A(X) \quad \text{y} \quad \beta(\Gamma) := \inf_{C(\Gamma)} D(X)$$

entonces, para toda $\epsilon, \epsilon' \in (0, 1]$

$$\alpha(\Gamma) \leq A(X^\epsilon) = A^\epsilon(X^\epsilon) = A^{\epsilon'}(X^{\epsilon'}) \leq A^{\epsilon'}(X) \quad \forall X \in C(\Gamma)$$

tomando el límite cuando $\epsilon' \rightarrow +0$, tenemos

$$\alpha(\Gamma) \leq A(X^\epsilon) \leq A(X) \quad \forall X \in C(\Gamma). \quad (3.25)$$

Por otro lado

$$\beta(\Gamma) \leq D(X^\epsilon) = A^\epsilon(X^\epsilon) \leq A^\epsilon(X) \leq D(X) \quad \forall X \in C(\Gamma)$$

es decir,

$$\beta(\Gamma) \leq D(X^\epsilon) \leq D(X) \quad \forall X \in C(\Gamma). \quad (3.26)$$

Para finalizar, las relaciones (3.25) y (3.26), implican que

$$\alpha(\Gamma) = A(X^\epsilon) \quad \forall \epsilon \in (0, 1]$$

y

$$\beta(\Gamma) = D(X^\epsilon) \quad \forall \epsilon \in (0, 1]$$

entonces, por (3.24) tenemos que

$$\beta(\Gamma) = D(X^\epsilon) = A(X^\epsilon) = \alpha(\Gamma) \quad \forall \epsilon \in (0, 1].$$

Por lo tanto, hemos probado que

$$\inf_{C(\Gamma)} D(X) = \inf_{C(\Gamma)} A(X)$$

es decir, los mínimos de $D(X)$, los cuales son soluciones del problema de Plateau, son superficies de área mínima.

Capítulo 4

Aproximación a algunos problemas concretos

En capítulos anteriores se ha explicado la teoría necesaria para probar la existencia de una superficie de área mínima cuya frontera es una curva fija. Sin embargo, en la práctica este problema es bastante complicado. Por ejemplo, que tal si queremos encontrar explícitamente la superficie cuya frontera es la gráfica de la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in S^1.$$

¿Cómo procedería el lector? La idea de encontrar una sucesión minimizante, utilizada anteriormente en este trabajo, parece no ser la indicada para este problema concreto. Por otro lado, en el caso de que el lector crea saber cual es la superficie que minimiza el área ¿cómo lo comprobaría?. Uno podría empezar (siguiendo las ideas de este trabajo) comprobando si la superficie es mínima, i.e., una vez dada una parametrización X , comprobar que

$$\Delta X = 0, \quad |X_u|^2 = |X_v|^2 \quad y \quad X_u \cdot X_v = 0 \quad (4.1)$$

además de la condición de frontera, claro está. En el caso en que la parametrización propuesta no cumpla estas ecuaciones y el lector siga convencido de que la superficie propuesta es la que minimiza el área, el lector tendría que encontrar una parametrización de la superficie, digamos Y , tal que Y cumpla las ecuaciones (4.1) junto con la condición de frontera. Este problema para Y es bastante complejo y, por ahora, está fuera del alcance del autor de esta tesis.

4.1. Una aproximación gráfica

El problema expuesto arriba fue uno de los tantos con los que tuve que lidiar al llevar a cabo este escrito, lamentablemente no pude encontrar ésta y otras soluciones a algunos problemas concretos. Sin embargo, me fue posible encontrar un software el cual representa un modelo computacional del proceso de evolución (de una superficie) vía el vector de curvatura media —recordemos que el proceso de *variar* una superficie en la dirección del vector de curvatura media hace que el área no crezca. El software mencionado arriba fue desarrollado por Ken Brakke, que pertenece al departamento de matemáticas de la Universidad de Susquehanna. El programa tiene por nombre *Surface*

Evolver, cabe recalcar que no tiene costo y puede conseguirse en la siguiente dirección electrónica: <http://www.susqu.edu/brakke/evolver/evolver.html>

Sin entrar mucho en detalles, lo que hace el programa es lo siguiente: Las superficies son representadas como complejos simpliciales (este puede pensarse como una unión de *triángulos*), el usuario tiene que definir una superficie inicial. El software simula la evolución de la superficie a una de energía mínima mediante el método del descenso más rápido (la evolución va en la dirección del gradiente). Esto es equivalente a la evolución vía curvatura media, ya que el gradiente y el vector de curvatura media son paralelos.

A continuación se expondrán algunas observaciones hechas con la ayuda de este software.

4.1.1. Condición de frontera: $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in S^1$.

La siguiente secuencia de figuras representa la evolución de una superficie por curvatura media. La última figura nos da una idea de cómo se ve la superficie mínima con esta condición de frontera.

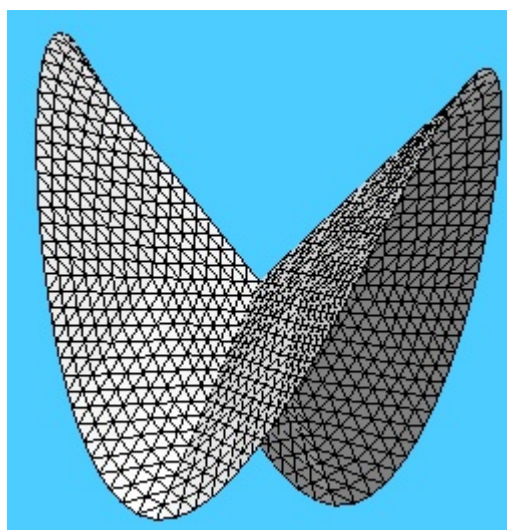


Figura 4.1: Superficie inicial. Los puntos en la frontera están sobre la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

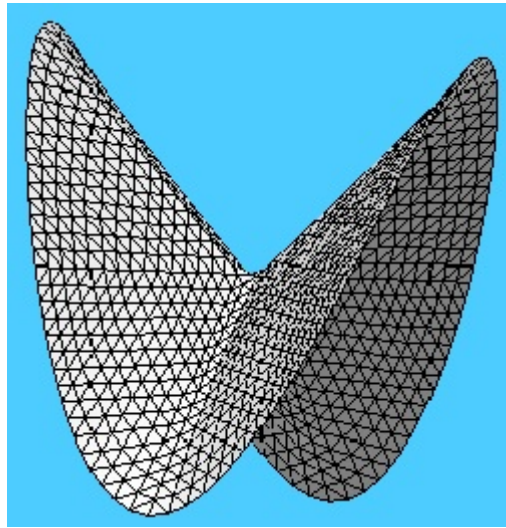


Figura 4.2: Superficie después de una iteración del método del descenso más rápido. Área=5.66449714185223.

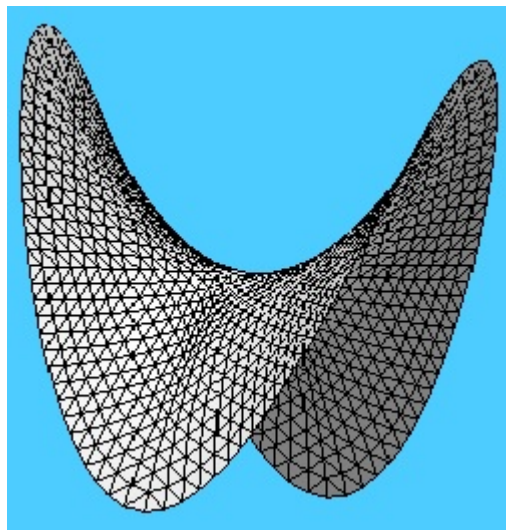


Figura 4.3: Superficie después de 100 iteraciones. Área=5.30558525585561.

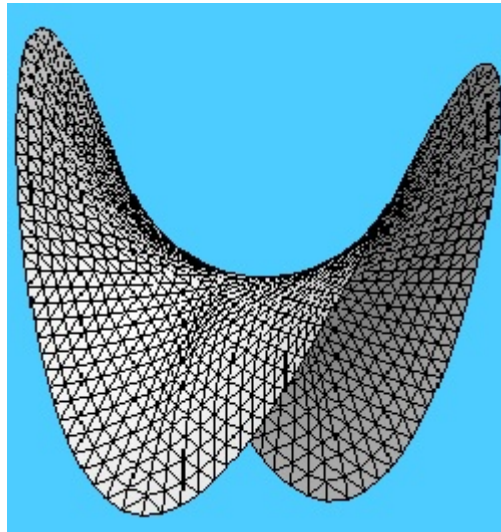


Figura 4.4: Superficie después de 500 iteraciones. Área=5.28587733778402. Tanto el área como la gráfica de la superficie no sufren gran cambio aplicando más iteraciones.

4.1.2. Condición de frontera: $f(\theta) = \cos(\theta) \sin(2\theta)$

Aquí incluimos otro caso de evolución por curvatura media.

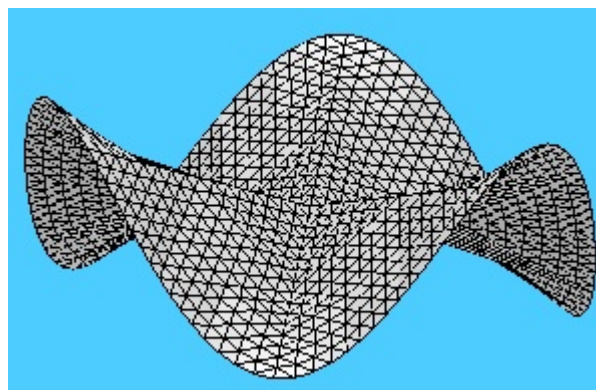


Figura 4.5: Superficie inicial. Los puntos en la frontera están sobre la gráfica de la función $f(\theta) = \cos(\theta) \sin(2\theta)$.

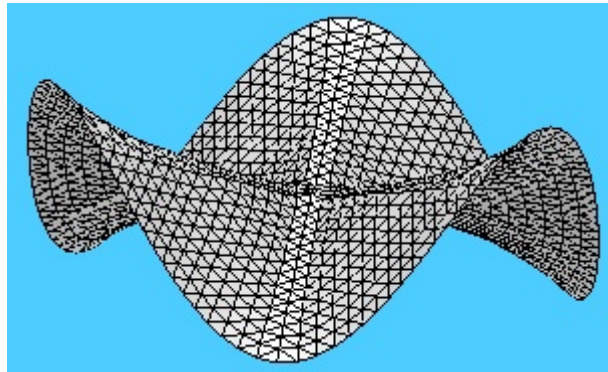


Figura 4.6: Superficie después de una iteración. Área=4.60794111411690.

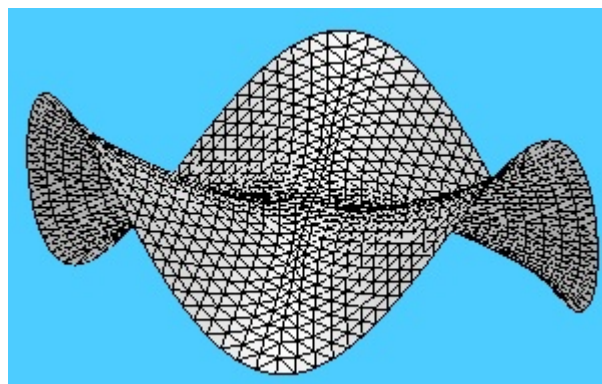


Figura 4.7: Superficie después de 10 iteraciones. Área=4.44020198100606.

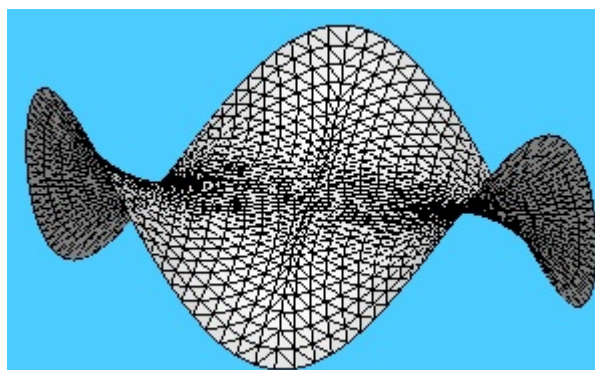


Figura 4.8: Superficie después de 500 iteraciones. Área=4.31907763074954. Tanto el área como la gráfica de la superficie no sufren gran cambio aplicando más iteraciones.

Un último comentario. Analizando un poco las gráficas expuestas arriba, parece que las superficies de área mínima que se van a alcanzar son *localmente* planas, esto es algo que se puede esperar de la condición de que tienen que ser superficies mínimas, .i.e., su curvatura media se anula en todos los puntos.

Capítulo 5

Conclusiones

Algunos conceptos de la geometría diferencial y el análisis matemático fueron la base para el desarrollo de esta tesis. Comenzamos definiendo lo que son las superficies mínimas y probando que estas son puntos críticos del funcional de área. En seguida definimos la clase $C(\Gamma)$, observamos que la clase es no vacía si la curva Γ es rectificable y que, sobre esta clase, los mínimos del funcional de Dirichlet son superficies parametrizadas con coordenadas isotermas y que satisfacen la ecuación de Laplace, es decir, son superficies mínimas. Nuestra primera conclusión fue que los mínimos del Funcional de Dirichlet, sobre la clase $C(\Gamma)$, son puntos críticos del funcional de área.

Con esta idea en mente, se procedió a demostrar la existencia de un mínimo del funcional de Dirichlet sobre la clase $C^*(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$, posteriormente se comprobó que los mínimos sobre $C^*(\Gamma)$ también son mínimos sobre $C(\Gamma)$. Esto nos permite concluir que el funcional de Dirichlet tiene, al menos, un mínimo sobre la clase $C(\Gamma)$. La elección de minimizar sobre la nueva clase, $C^*(\Gamma)$, se debe a que la clase original no es débilmente cerrada. Para probar que la clase $C^*(\Gamma)$ sí es débilmente cerrada fue necesario demostrar que la inclusión $C^*(\Gamma) \hookrightarrow C^0(\partial B; \mathbb{R}^3)$ es compacta.

Para finalizar, una vez demostrado que el funcional de Dirichlet tiene un mínimo y que este mínimo es un punto crítico del funcional de área, se probó que cualquier mínimo del funcional de Dirichlet, sobre la clase $C(\Gamma)$, también es un mínimo del funcional de área, sobre $C(\Gamma)$. Es decir, el punto crítico del funcional de área (que sabíamos que existía) es, en efecto, un mínimo del funcional de área. Esto nos permite concluir el objetivo de esta tesis, a saber, se demostró la existencia de una superficie, con condición de frontera dada por Γ , que minimiza el área.

Pese a que se demostró la existencia de la superficie en cuestión, algunas dudas quedan abiertas. Por ejemplo, dada una curva de Jordan, cerrada y rectificable, en \mathbb{R}^3 lo expuesto en esta tesis nos permite concluir que existe una superficie que tiene como frontera a esta curva y que es de área mínima. Sin embargo, el método que se utilizó para probar la existencia no nos permite decir quién es la superficie que afirmamos que existe, es decir, no conocemos alguna parametrización explícita de esta superficie, no sabemos cual es la "forma" de la superficie, cómo se ve.

Encontrar una parametrización (explícita) para esta superficie es un problema bastante complejo, empero, si lo que queremos es darnos una idea de la apariencia de esta superficie podemos recurrir a alternativas como la presentada en el capítulo 4 o, mejor aun, recurrir a los experimentos con burbujas de jabón que se mencionaron en la introducción. Es decir, el lector puede hacerse de un alambre cerrado, moldearlo como la curva que le interese, sumergirlo en agua con abundante jabón y, al retirar el alambre del agua, la pompa de jabón que se crea es la imagen de la superficie buscada.

Apéndice A

Trazas y desigualdad generalizada de Sobolev

En este apéndice discutiré brevemente la posibilidad de asignarle “valores en la frontera” a una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, asumiendo que Ω es de clase C^1 , de tal forma que si $u \in C(\bar{\Omega})$, entonces, u asume valores en $\partial\Omega$ de la forma habitual.

El problema subyacente es que una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, en general, no es continua y, de hecho, sólo está definida para casi todo $x \in \Omega$. Como $\partial\Omega$ tiene medida cero (respecto a la medida de Ω), no tiene mucho sentido hablar de “ u restringido a $\partial\Omega$ ”. La noción del operador traza resuelve este problema.

Antes de definir este operador, daré algunos resultados y definiciones.

A.1. El operador Traza

Definición A.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es de clase C^k si y sólo si para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ y una función $\gamma \in C^k(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R})$ tal que (después de reordenar y renombrar a los ejes, si es necesario)

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

Más adelante será necesario cambiar de coordenadas en una vecindad de un punto $x_0 \in \partial\Omega$ de tal forma que “aplanemos” la frontera. Para ser más específicos, si $x_0 \in \partial\Omega$, Ω de clase C^k , entonces, existen r y γ como arriba. Con esta información definimos

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (\text{A.1})$$

y

$$\Psi(y_1, \dots, y_n) := (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (\text{A.2})$$

Claramente $\Phi = \Psi^{-1}$. Aun más, el mapeo

$$x \longmapsto \Phi(x) = y$$

“aplana” a $\partial\Omega$ cerca de x_0 y

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\gamma_{x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\gamma_{x_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\det \nabla\Phi = 1 = \det \nabla\Psi \quad (\text{A.3})$$

El siguiente resultado es la base para construir el operador traza, la demostración puede verse, por ejemplo, en [9].

Teorema A.1. *Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, de clase C^1 y que $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, existe $\{u_n\} \subseteq C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que*

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en } W^{k,p}(\Omega)$$

Teorema A.2. *Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado y de clase C^1 . Entonces, existe un operador lineal y acotado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

$$i) \quad Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ si } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$$

$$ii) \quad \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ para cada } u \in W^{1,p}(\Omega)$$

donde C es una constante que depende sólo de p y de Ω .

Prueba: Primero supongamos que $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Supongamos también que $x_0 \in \partial\Omega$ y que $\partial\Omega$ es “plano” en una vecindad de x_0 , i.e., $\partial\Omega$ está contenido en el plano $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ cerca de x_0 . Sea r tal que, si $B = B(x_0, r)$, entonces

$$B^+ := B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \subseteq \bar{\Omega}$$

y

$$B^- := B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

esto se tiene porque $\partial\Omega$ es “plano” cerca de x_0 .

Elijamos una función $\xi \in C_0^\infty(B)$ tal que $\xi \geq 0$ en B y $\xi \equiv 1$ en $\hat{B} := B(x_0, \frac{r}{2}) \subseteq B$. Sea

$$\Gamma := \partial\Omega \cap \hat{B} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

y denotemos

$$x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \cong \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}.$$

Entonces, utilizando el teorema de la divergencia¹ y la desigualdad de Young², obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} |u|^p dx' &\leq \int_{\{x_n=0\} \cap B} \xi |u|^p dx' = - \iint_{B^+} (\xi |u|^p)_{x_n} dx \\
&= - \iint_{B^+} [|u|^p \xi_{x_n} + p |u|^{p-1} (\text{sign}(u)) u_{x_n} \xi] dx \\
&\leq \iint_{B^+} (|u|^p |\xi_{x_n}| + p |u|^{p-1} |u_{x_n}| |\xi|) dx \\
&\leq \iint_{B^+} \left(\|\xi_{x_n}\|_{L^\infty} |u|^p + \frac{|u_{x_n}|^p}{p} + \frac{(p-1) |p \xi|^{p/p-1}}{p} |u|^p \right) dx \\
&\leq C \iint_{B^+} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx
\end{aligned}$$

Ahora, si $x_0 \in \partial\Omega$, pero $\partial\Omega$ no es “plano” cerca de x_0 , utilizando la función Φ definida en (A.1) “aplanamos” $\partial\Omega$ cerca de x_0 y deducimos la estimación anterior. Luego, por (A.3) y aplicando un cambio de variable llegamos a que

$$\int_{\Gamma} |u|^p ds \leq C \iint_{\Omega} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx$$

donde Γ es un subconjunto abierto de $\partial\Omega$ que contiene a x_0 .

Como $\partial\Omega$ es compacto existe un número finito de puntos $x_0^i \in \partial\Omega$ y de subconjuntos abiertos $\Gamma_i \subseteq \partial\Omega$ ($i = 1, \dots, N$) tales que

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$$

y

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Luego, si escribimos

$$Tu := u|_{\partial\Omega}$$

tenemos que

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{A.4}$$

¹El teorema dice que

$$\iint_{\Omega} \text{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot nds.$$

Nótese que utilizamos el campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $F = (0, 0, \dots, 0, \xi |u|^p)$ y que la normal unitaria exterior al plano $\{x_n = 0\}$ es $(0, 0, \dots, 0, -1)$.

²**Desigualdad de Young:** Si $a, b \geq 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

donde C es una constante que no depende de u .

Hasta ahora hemos probado (A.4) para funciones $u \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe $\{u_m\} \subseteq C_0^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega).$$

Aun más, por (A.4) se tiene que

$$\|Tu_m - Tu_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (\text{A.5})$$

es decir, $\{Tu_m\}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$, luego, definimos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Tu_m =: Tu \in L^p(\partial\Omega).$$

Notemos que, por densidad, Tu satisface (A.4).

Veamos que la definición de Tu no depende de la elección de $\{u_m\}$, es decir, no depende de la elección de las funciones suaves que se aproximan a u . Esto se observa de la siguiente manera: Supongamos que $\{v_m\} \subseteq C_0^\infty(\bar{\Omega})$ es otra sucesión tal que

$$v_m \longrightarrow u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega).$$

Consideremos la sucesión $\{z_1 = u_1, z_2 = v_1, z_3 = u_2, z_4 = v_2, \dots\}$, luego, por (A.5),

$$\|Tz_m - Tz_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|z_m - z_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C (\|z_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u - z_k\|_{W^{1,p}(\Omega)})$$

entonces, $\{Tz_m\}$ es de Cauchy, luego,

$$Tz := \lim_{m \rightarrow \infty} Tz_m.$$

Por lo tanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Tu_m = \lim_{m \rightarrow \infty} Tz_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} Tz_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} Tv_m.$$

Por último, es una consecuencia de la prueba³ del Teorema A.1 que la sucesión $\{u_m\}$ que converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$ también converge a u uniformemente en $\bar{\Omega}$, de aquí que $Tu = u|_{\partial\Omega}$.

q.e.d.

Definición A.2. Diremos que Tu es **la traza de u en $\partial\Omega$** , donde T es el operador traza definido arriba.

El siguiente Teorema explica como son las funciones cuya traza es cero, véase [9].

Teorema A.3. Supongamos que Ω es acotado, de clase C^1 y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces,

$$Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad \text{si y sólo si} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(Aquí, $W_0^{1,p}(\Omega)$ es la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$).

³Véase, por ejemplo, [9].

A.2. Desigualdad generalizada de Sobolev

Como lo menciona el título de esta sección, nuestro propósito es dar una generalización de la desigualdad (clásica) de Sobolev. No está demás recordar este resultado, para consultar una prueba véase, por ejemplo, en [2], [9] ó [10].

Teorema A.4. *Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado y que $u \in H_0^1(\Omega)$ (recordemo, entonces, existe una constante $C = C(n, \Omega)$ tal que*

$$\iint_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (\text{A.6})$$

Antes de generalizar este resultado para funciones $u \in H^1(\Omega)$, será necesario recordar algunos resultados.

Teorema A.5 (Rellich-Kondrachov). *Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado y de clase C^1 . Entonces, el encaje*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad (\text{A.7})$$

es compacto.

El Teorema (A.2) indica que $H^1(\Omega)$ se encaja en $L^2(\partial\Omega)$, pero no sólo pasa esto, de hecho el encaje es compacto, esto es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema A.6. *Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado y de clase C^1 . Entonces, el encaje*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega) \quad (\text{A.8})$$

es compacto⁴.

Definición A.3. *Sea B un espacio de Banach. Diremos que x_n **converge débilmente a x en B** ($x_n \rightharpoonup x$ en B) si y sólo si para cualquier función lineal y acotada*

$$l : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se cumple que

$$l(x_n) \longrightarrow l(x) \text{ en } \mathbb{R}^n$$

Si B fuera un espacio de Hilbert, entonces, por el teorema de representación de Riesz,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{si y sólo si} \quad \langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in B \quad (\text{A.9})$$

La prueba de los siguientes resultados puede encontrarse en [17].

Lema A.1. *Cualquier sucesión débilmente convergente es acotada.*

Lema A.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $\{x_n\} \subseteq H$ es acotada, entonces, $\{x_n\}$ contiene una subsucesión débilmente convergente.*

⁴Véase, por ejemplo, [1] y [19]

Teorema A.7. Sean B y V dos espacios de Banach, $T : B \hookrightarrow V$ lineal, continuo y compacto. Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en B , entonces, $Tx_n \rightarrow Tx$ en V . (i.e., un operador compacto manda sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes).

Prueba: Supongamos que $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en B . Por el Lema anterior sabemos que $\|x_n\|$ está acotada. Sea $y_n := Tx_n$, entonces,

$$l(y_n) - l(y) = (l \circ T)x_n - (l \circ T)x \quad \forall l \text{ lineal y continua}$$

luego,

$$y_n \rightharpoonup y \text{ débilmente en } V$$

pues $l \circ T$ es lineal y continua.

Supongamos que y_n no converge a y (en norma), entonces, existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{y_{n_k}\} \subseteq \{y_n\}$ tal que

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \epsilon.$$

Como $\{x_{n_k}\}$ está acotada y T es compacto, $\{y_{n_k}\}$ contiene una subsucesión convergente (que denotaré por y_{n_k}), i.e.,

$$y_{n_k} \rightarrow \bar{y} \neq y \text{ en } V.$$

Aun más, $\{y_{n_k}\}$ debe de converger débilmente a \bar{y} , lo cual es una contradicción, pues el límite débil es único. Por lo tanto y_n converge a y en norma.

q.e.d.

Teorema A.8 (Desigualdad generalizada de Sobolev). Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado y de clase C^1 , entonces, existe una constante $C = C(\Omega)$ tal que para cualquier $u \in H^1(\Omega)$ se cumple:

$$\iint_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \left(\iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |u|^2 ds \right)$$

Prueba (Esbozo): Se procede por contradicción. Supongamos que para toda $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 > m \left(\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right). \quad (\text{A.10})$$

Por homogeneidad se puede suponer que

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

luego, por (A.10), $\{u_m\}$ está acotada en $H^1(\Omega)$, entonces, existe⁵ $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H^1(\Omega).$$

Recordando que los encajes

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

⁵Recordemos que las bolas cerradas en espacios de Hilbert son débilmente compactas, véase, por ejemplo: [2] ó [17]

y

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

son compactos y el Teorema (A.7), sabemos que

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } L^2(\Omega)$$

y

$$u_n|_{\partial\Omega} \longrightarrow u|_{\partial\Omega} \text{ en } L^2(\partial\Omega)$$

donde $u_n|_{\partial\Omega}$ es la traza de la función u_n . Aun más, utilizando (A.10) concluimos que

$$\nabla u_m \longrightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega)$$

y

$$u_m \longrightarrow 0 \text{ en } L^2(\partial\Omega).$$

Es decir, $u|_{\partial\Omega} = 0$ y $\nabla u = 0$. Ahora, el Teorema (A.3) implica que $u \in H_0^1(\Omega)$, luego, podemos utilizar el Teorema (A.6) y obtener que $u = 0$ en $L^2(\Omega)$, sin embargo,

$$0 = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$$

esto último es una muy clara contradicción.

q.e.d.

Apéndice B

Funciones armónicas

B.1. Resultados Clásicos

A continuación se presentarán varios resultados sobre funciones armónicas, algunos de estos son considerados como “clásicos”, así que nos ahorraremos las demostraciones, si el lector desea consultarlas véase, por ejemplo, [10].

Definición B.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Una función $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω si y sólo si $\Delta u = 0$ en Ω .

Teorema B.1 (Propiedad del Valor Promedio). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω , entonces, para cualquier bola $B =: B_R(y) \subset\subset \Omega$, se cumplen las siguientes relaciones:

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, ds$$
$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \iint_B u \, dx$$

donde ω_n es el volumen de la bola unitaria de dimensión n .

Teorema B.2 (Principio del máximo). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω . Entonces, si Ω es acotado,

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad x \in \Omega.$$

Aún más, si existe $y \in \Omega$ tal que

$$u(y) = \sup_{\Omega} u$$

entonces u es constante.

Teorema B.3. Sea $B = B_R(0)$ y ϕ una función continua en ∂B . Entonces, la función

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\phi(y)}{|x-y|^n} \, ds_y & \text{si } x \in B \\ \phi(x) & \text{si } x \in \partial B \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

pertenece a $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y satisface $\Delta u = 0$.

Corolario B.1. Sea ϕ una función continua en ∂B . Si u es una solución al problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B \\ u = \phi & \text{en } \partial B \end{cases}$$

Entonces, $u \in C^\infty(B)$.

Prueba: Claramente u es de la forma (B.1) y de esta expresión se sigue el resultado.

q.e.d.

En base a los últimos dos teoremas podemos dar el resultado converso del Teorema B.1, es decir:

Teorema B.4. Sea $u \in C(\Omega)$. Supongamos que

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, ds$$

para toda $B := B_R(y) \subset\subset \Omega$. Entonces, u es armónica en Ω .

Ya que estamos en esto será conveniente recordar la formulación débil (o formulación variacional) del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace y de Poisson.

Definición B.2. Una función $u \in H^1(\Omega)$ es una **solución débil de la ecuación de Laplace** ($\Delta u = 0$) si y sólo si

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = 0 \quad (\text{B.2})$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definición B.3. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Una función $u \in H^1(\Omega)$ se llama una **solución débil de la ecuación de Poisson** ($\Delta u = f$) si y sólo si para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ se cumple que

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \iint_{\Omega} f \cdot v = 0 \quad (\text{B.3})$$

Una forma de encontrar una solución débil a la ecuación (B.3) es la siguiente:

Si g es el valor en la frontera de f (i.e., $f - g \in H_0^1(\Omega)$)¹, haciendo $w := u - g \in H_0^1(\Omega)$ buscamos una solución a

$$\iint_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = - \iint_{\Omega} f \cdot v - \iint_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla v \quad (\text{B.4})$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Ahora la desigualdad (A.6), implica que

$$\langle u, v \rangle := \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

¹Esto puede quedar más claro si el lector consulta el Apéndice A, Teorema A.3.

es un producto escalar equivalente en $H_0^1(\Omega)$. Aun más

$$\iint_{\Omega} f \cdot v \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq c \|f\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}.$$

De aquí que

$$Lv := - \iint_{\Omega} f \cdot v - \iint_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla v$$

defina un funcional lineal y acotado en $H_0^1(\Omega)$. Luego, la ecuación que queremos resolver se traduce en

$$\langle w, v \rangle = Lv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Para finalizar, el teorema de representación de Riez indica que existe una única w que satisface la ecuación (B.4).

Claramente cualquier función armónica cumple (B.2) y una función $u \in C^2(\Omega)$ que cumple la ecuación de Poisson (en el sentido clásico) va a satisfacer (B.3). Por otro lado, al encontrar una solución débil a estos problemas uno se pregunta si estas soluciones son soluciones clásicas, en algunos casos esto es cierto. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado de regularidad².

Lema B.1. *Si $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de $\Delta u = f$ con $f \in C^\infty(\Omega)$, entonces, $u \in C^\infty(\Omega)$.*

B.2. Teoremas de convergencia

Teorema B.5. *Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^2(\Omega)$, tal que $\Delta u_k = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Si $u_k \rightarrow u$ uniformemente en Ω , entonces, $\Delta u = 0$ en Ω .*

Prueba: Por el Teorema B.4 es suficiente probar que

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, ds \quad \forall B = B_R(y) \subset\subset \Omega.$$

Por hipótesis, y el Teorema B.1 cada u_n satisface la propiedad del valor promedio. Ahora, dado $\epsilon > 0$, por la convergencia uniforme, existe k tal que

$$\left| u(y) - \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, ds \right| \leq |u(y) - u_k(y)| + \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} |u(s) - u_k(s)| \, ds < \epsilon.$$

q.e.d.

Corolario B.2. *Si $A := \{u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \mid \Delta u = 0\} \subseteq C(\Omega)$. Entonces A es completo (con la topología de la convergencia uniforme).*

Prueba: El teorema anterior asegura que A es cerrado. $C(\Omega)$ es completo (con la topología de la convergencia uniforme). Esto asegura que A es completo. **q.e.d.**

²La prueba puede consultarse en [?].

Teorema B.6. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado. Sea $\{u_k\} \subseteq C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u_k = 0$ en Ω y $u_k|_{\partial\Omega} =: \phi_k \rightarrow \phi$ uniformemente en $\partial\Omega$, si $k \rightarrow \infty$. Entonces, existe $u \in C^2(\Omega)$ armónica tal que $u_k \rightarrow u$ uniformemente en Ω y $u|_{\partial\Omega} = \phi$

Prueba: Por el principio del máximo sabemos que

$$\sup_{\Omega} |u_k(x) - u_j(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\phi_k(x) - \phi_j(x)|.$$

Por hipótesis sabemos que $\{\phi_k\}$ es de Cauchy, esto, junto con la desigualdad anterior, implica que $\{u_k\}$ también es de Cauchy. Luego, por el Corolario B.2, existe $u \in C^2(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ uniformemente en Ω . Claramente $u|_{\partial\Omega} = \phi$.

q.e.d.

Teorema B.7. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, u armónica en Ω y Ω' un compacto tal que $\Omega' \subset \Omega$. Entonces

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq \frac{n}{d} \sup_{\Omega} |u|$$

donde $d := \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Prueba: Sea $y \in \Omega$, elijamos R tal que $B_R(y) \subset \subset \Omega$. Como u es armónica, entonces, ∇u es armónico; utilizando la propiedad del valor promedio y el teorema de la divergencia ($\iint_B \text{div} \mathbf{w} \, dx = \int_{\partial B} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds$, con \mathbf{n} el normal unitario) sobre los campos $u_j = ue_j$, $j = 1, \dots, n$, obtenemos que

$$\nabla u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \iint_B \nabla u \, dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B} u \mathbf{n} \, ds.$$

Entonces

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\Omega} |u| \quad \forall R < d_y := \text{dist}(y, \partial\Omega).$$

Pasando al caso límite llegamos a que

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{n}{d_y} \sup_{\Omega} |u| \leq \frac{n}{d} \sup_{\Omega} |u| \quad \forall y \in \Omega'$$

y por la compacidad de Ω' podemos concluir que existe $y^* \in \Omega'$ tal que

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| = |\nabla u(y^*)| \leq \frac{n}{d} \sup_{\Omega} |u|$$

q.e.d.

Corolario B.3. Sea $\{u_k\} \subseteq C^2(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ uniformemente en Ω y además $\Delta u_k = 0$, entonces, para todo $\Omega' \subset \Omega$ compacto se cumple que $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$ uniformemente en Ω' .

Prueba: Por el Teorema B.5 sabemos que u es armónica, entonces, $u_k - u$ es armónica en Ω . Luego, por el teorema anterior

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u_k - \nabla u| = \sup_{\Omega'} |\nabla(u_k - u)| \leq \frac{n}{d} \sup_{\Omega} |u_k - u| \rightarrow 0 \quad \text{si } k \rightarrow \infty$$

q.e.d.

Teorema B.8. Sea $\{u_k\} \subseteq C^2(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ uniformemente en Ω y además $\Delta u_k = 0$, entonces, para todo $\Omega' \subset \Omega$ compacto,

$$D_{\Omega'}(u_k) \rightarrow D_{\Omega'}(u)$$

donde $D_{\Omega'}(u)$ es el funcional de Dirichlet sobre el dominio Ω' . Es decir,

$$\iint_{\Omega'} |\nabla u_k(x)| dx \rightarrow \iint_{\Omega'} |\nabla u(x)| dx.$$

Prueba: Notemos que

$$|D_{\Omega'}(u_k) - D_{\Omega'}(u)| \leq \iint_{\Omega'} \left| |\nabla u_k(x)|^2 - |\nabla u(x)|^2 \right| dx \leq Vol(\Omega') \sup_{\Omega'} \left| |\nabla u_k|^2 - |\nabla u|^2 \right| \rightarrow 0$$

La convergencia a 0 se sigue por el corolario anterior y dado que la norma es una función continua.

q.e.d.

B.3. Principio de reflexión de Schwarz en el círculo

Empezaremos recordando el principio de reflexión de Schwarz (en el plano), este es un resultado clásico de Análisis Complejo (Véase [?] ó [13]).

Teorema B.9 (Principio de reflexión de Schwarz). Sea A una región en \mathbb{R}_+^2 cuya frontera, $\partial\Omega$, intersecta al eje real en el intervalo $[a, b]^3$. Sea f analítica en A y continua en $A \cup (a, b)$. Sea

$$\bar{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in A\}$$

la reflexión de A . Si f es real en (a, b) , entonces la función

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A \cup (a, b) \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \bar{A} \end{cases}$$

es analítica en $A \cup (a, b) \cup \bar{A}$ (y es la única continuación analítica de f en $A \cup (a, b) \cup \bar{A}$).

Es posible extender este principio de reflexión a círculos, reemplazando la conjugación compleja por la reflexión en el círculo. Considerando a las rectas como círculos de radio infinito, el teorema anterior sería un caso especial de esta reflexión.

Para poder probar este principio generalizado será necesario recordar como es la reflexión en el círculo y su relación con las transformaciones de Möbius. La reflexión en el círculo queda establecida por la siguiente proposición.

Proposición B.1. Sea C un círculo (o una línea recta) y z un punto fuera de C (i.e. $z \notin C$). Entonces, todos los círculos que pasan por z y que intersectan a C ortogonalmente se intersectan en un sólo punto \tilde{z} (si z es el centro de C , entonces, \tilde{z} es el punto al infinito)⁴.

³ $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

⁴Véase [13]

Definición B.4. Sea C un círculo, o una línea recta, y z un punto fuera de C . El único punto \tilde{z} que se obtiene en la Proposición (B.1) se llama **la reflexión de z en C** . Si $z \in C$, tomamos $\tilde{z} = z$.

Observación: Si C es el eje real, entonces, $\tilde{z} = \bar{z}$.

Proposición B.2. Si G es una transformación de Möbius y C es un círculo (o una línea recta), entonces, g manda la reflexión de z en C a la reflexión de $g(z)$ en $g(C)$, es decir,

$$g(\tilde{z}) = [g(z)]^\sim$$

Prueba: Como g manda círculos en círculos y es conforme, la familia de círculos que pasa por z y es ortogonal a C es mapeada a la familia de círculos que pasa por $g(z)$ y es ortogonal a $g(C)$. Entonces, la intersección de la primera familia, que es \tilde{z} , debe ser mapeada a la intersección de la segunda familia, que es $[g(z)]^\sim$.

q.e.d.

De hecho, dado el centro y el radio del círculo, C , podemos saber quién es la reflexión de z en C , esto es lo que afirma la siguiente proposición⁵.

Teorema B.10. Si C es un círculo (o una recta) el mapeo $z \mapsto \tilde{z}$ es una composición de transformaciones de Möbius y conjugaciones complejas, es decir, si C es un círculo de radio R y centro z_0 , entonces,

$$\tilde{z} = \overline{\left(\frac{z_0 z + R^2 - |z_0|^2}{z - z_0} \right)}$$

Claramente, si C es el círculo unitario con centro en el origen, entonces,

$$\tilde{z} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

Teorema B.11 (Principio de reflexión de Schwarz en el círculo). Sea A una región acotada en el interior o exterior de un círculo C_1 (o en algún lado de una línea), tal que parte de su frontera es un arco en C_1 (i.e. $\gamma := \partial A \cap C_1 \neq \emptyset$). Supongamos que f es analítica en A , continua en $A \cup \gamma$ y que $f(\gamma)$ es un arco Γ de otro círculo (o línea) C_2 . Sea

$$\tilde{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{z} \in A\}$$

la reflexión de A en C_1 . Entonces, la función

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A \cup \gamma \\ f(\tilde{z})^\sim & \text{si } z \in \tilde{A} \end{cases}$$

(la segunda \sim denota la reflexión en C_2) es analítica en $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$ (y es la única continuación analítica de f en $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$).

⁵Véase [13].

Prueba: Supongamos que A está en el interior de C_1 y que $f(A)$ está en el interior de C_2 , los otros casos son análogos. Sea T_i , $i = 1, 2$, la transformación de Möbius que manda C_i en el eje real y el interior de C_i al semiplano superior (\mathbb{R}_+^2). Ahora, si $w \in T_1(A) \subseteq \mathbb{R}_+^2$, definimos

$$h : T_1(A) \longrightarrow T_2(f(A))$$

tal que

$$h(w) = T_2(f(T_1^{-1}(w)))$$

la cual es analítica y, por el principio de reflexión de Schwarz, $\overline{h(\overline{w})}$ es la continuación analítica de h en $\overline{T_1(A)}$. Luego, utilizando el hecho de que T_i preserva la reflexión en círculos y que la conjugación compleja es la reflexión en el eje real, tenemos que si $z \in \tilde{A}$, entonces, $T_1\tilde{z} = \overline{T_1z} \in \overline{T_1(A)}$, luego,

$$\overline{h(\overline{T_1z})} \in \overline{T_2(f(A))}$$

y por lo tanto

$$f(\tilde{z})^\sim = T_2^{-1}(\overline{h(\overline{T_1z})}).$$

de esta última expresión se obtiene la analiticidad.

q.e.d.

Con base en este teorema podemos extender el principio de reflexión a las funciones armónicas.

Corolario B.4 (Principio de reflexión de Schwarz en el círculo para funciones armónicas). *Sea A una región acotada y simplemente conexa en el interior o exterior de un círculo C_1 (o en algún lado de una línea), tal que parte de su frontera es un arco en C_1 (i.e. $\gamma := \partial A \cap C_1 \neq \emptyset$). Supongamos que u es armónica en A , continua en $A \cup \gamma$ y que $u(\gamma) = 0$. Sea*

$$\tilde{A} := \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{z} \in A\}$$

la reflexión de A en C_1 . Entonces, la función

$$U(z) := \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in A \cup \gamma \\ -u(\tilde{z}) & \text{si } z \in \tilde{A} \end{cases}$$

es armónica en $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$.

Prueba: Como u es armónica y A simplemente conexo sabemos que u es la parte imaginaria de una función analítica⁶, f , en A (i.e., $u = \text{Im}(f)$ con f analítica en A). La función analítica

$$f = \hat{u} + iu$$

cumple las hipótesis del teorema anterior, donde C_2 es el eje real y T_2 la función identidad, luego, recordando que la reflexión en el eje real es la conjugación compleja, la función

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A \cup \gamma \\ \overline{f(\tilde{z})} & \text{si } z \in \tilde{A} \end{cases}$$

⁶Véase, por ejemplo: [13], Capítulo 2, Proposición 2.5.8.

es analítica en $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$. Por lo tanto, la parte imaginaria de g es armónica en $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$, es decir,

$$\operatorname{Im}(g) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in A \cup \gamma \\ -u(\tilde{z}) & \text{si } z \in \tilde{A} \end{cases}$$

es armónica en $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$

q.e.d.

Como un caso especial, en el círculo unitario, tenemos el siguiente corolario.

Corolario B.5. *Si $C_1 = \partial B$ es el círculo unitario, γ un subarco de C_1 y $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ una función armónica en B tal que $u(\gamma) = 0$, entonces, existe una vecindad, W , (simplemente conexa) de γ , tal que la función*

$$U(z) := \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in B \cup \gamma \\ -u\left(\frac{z}{|z|^2}\right) & \text{si } z \in W - B \end{cases}$$

es armónica en $B \cup W$.

La prueba es una consecuencia inmediata del Corolario B.4 y el Teorema B.10.

Apéndice C

Operadores Elípticos

En esta sección se presentará una breve introducción al estudio de los operadores diferenciales lineales elípticos de la forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)D_iu(x) + c(x)u(x) \quad (\text{C.1})$$

donde $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $u, a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$.

Definición C.1. Diremos que el operador L es **elíptico en** $x \in \Omega$ si y sólo si la matriz simétrica $A := [a^{ij}(x)]$ es positiva ($\langle A\xi, \xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), es decir, si $\lambda(x)$ y $\Lambda(x)$ denotan el menor y mayor valor propio de la matriz $[a^{ij}(x)]$, respectivamente, entonces

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Dado que A es una matriz simétrica, tiene sentido hablar del menor, y el mayor, valor propio de la matriz A , ya que sus valores propios son reales. Notemos también que es suficiente pedir que $\lambda(x)$, el menor valor propio, sea positivo para que el operador sea elíptico. Esto justifica la siguiente definición.

Definición C.2. L es **elíptico en** Ω si el menor valor propio de la matriz A es positivo para toda $x \in \Omega$, i.e., si $\lambda = \lambda(x) > 0$ en Ω .

Definición C.3. L es **estrictamente elíptico en** Ω si existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda = \lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ para toda $x \in \Omega$.

Tal vez el operador elíptico más simple que podemos encontrar es el operador de Laplace, Δu , y algunas de sus propiedades también lo son de los operadores elípticos, como lo muestra es siguiente Teorema¹.

Teorema C.1 (Principio del máximo). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y L elíptico en Ω . Supongamos que $Lu \geq 0$ (≤ 0) y $c = 0$ en Ω , con $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Entonces, el máximo (mínimo) de u en $\bar{\Omega}$ se alcanza en $\partial\Omega$, es decir,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

¹Para consultar la prueba de este Teorema, y la del Teorema C.2, véase [10].

Gracias al Teorema anterior es posible deducir una estimación para funciones, u , que son soluciones del problema no homogéneo, $Lu = f$, en dominios acotados. Esta desigualdad será de gran importancia más adelante.

Teorema C.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Supongamos que L es elíptico en Ω y tal que $Lu = f$ en Ω , $c \leq 0$ y $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Entonces*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + K \sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda}$$

donde λ es el valor propio más pequeño de la matriz A (como arriba) y K es una constante que depende sólo del diámetro de Ω y de $\beta := \sup \frac{|\mathbf{b}|}{\lambda}$ ($\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$).

C.1. Espacios de Hölder

El operador (C.1) presenta algunas propiedades interesantes si se consideran a su dominio e imagen como espacios de Hölder.

Definición C.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, $x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0, 1)$. Diremos que f es **Hölder continua con exponente α en x_0** si y sólo si*

$$[f]_{\alpha, x_0} := \sup_{\Omega} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty.$$

Definición C.5. Ω , α y f como arriba. Diremos que f es **Hölder continua con exponente α en Ω** si y sólo si

$$[f]_{\alpha; \Omega} := \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Ahora, podemos definir los espacios de Hölder de la siguiente manera:

$$C^\alpha(\bar{\Omega}) = C^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) := \{f \in C^0(\bar{\Omega}) \mid f \text{ es Hölder continua con exp. } \alpha \text{ en } \Omega\} \quad (\text{C.2})$$

$$C^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) := \{f \in C^k(\bar{\Omega}) \mid D_i f \in C^\alpha(\bar{\Omega}), |j| = k\} \quad (\text{C.3})$$

El siguiente paso es dotar a los espacios $C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$ de una norma. Dado que, si $u \in C^k(\bar{\Omega})$, entonces, $u \in C^{k-1, \alpha}(\bar{\Omega})$ ($k \geq 1$), las siguientes expresiones no carecen de sentido.

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{k=0}^n \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^\beta u| \quad (\text{C.4})$$

$$\|u\|_{C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{j=0}^k \sup_{|\beta|=j} [D^\beta u]_{\alpha; \Omega} \quad (\text{C.5})$$

Por ejemplo, cuando $k = 2$ tenemos que

$$\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} \{ \sup_{\Omega} |u_x|, \sup_{\Omega} |u_y| \} + \sup_{\Omega} \{ \sup_{\Omega} |u_{xx}|, \sup_{\Omega} |u_{xy}|, \sup_{\Omega} |u_{yy}| \}$$

$$\|u\|_{C^{2, \alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} + [u]_{\alpha; \Omega} + \sup \{ [u_x]_{\alpha; \Omega}, [u_y]_{\alpha; \Omega} \} + \sup \{ [u_{xx}]_{\alpha; \Omega}, [u_{xy}]_{\alpha; \Omega}, [u_{yy}]_{\alpha; \Omega} \}$$

Teorema C.3. Los espacios $C^k(\bar{\Omega})$ y $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ equipados con las normas (C.4) y (C.5), respectivamente, son espacios de Banach.

Lema C.1. Si $u, v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, entonces, $uv \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $\|uv\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq \|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\|v\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$.

Lema C.2. Supongamos que $L : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ es de la forma (C.1), es estrictamente elíptico en $\bar{\Omega}$ y que $a^{ij}, b^j, c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. Entonces, L es acotado, i.e.,

$$\|L\| = \sup_{\substack{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ u \neq 0}} \frac{\|Lu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} < \infty.$$

Prueba: Por hipótesis podemos suponer que $\|a^{ij}\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \|b^j\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \|c\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq M$, con M una constante positiva. Utilizando el Lema C.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\|Lu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} &\leq \frac{\sum_{i,j=1}^n \|a^{ij} D_{ij}u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \sum_{j=1}^n \|b^j D_j u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|cu\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\leq \frac{\sum_{i,j=1}^n \|a^{ij}\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \|D_{ij}u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \sum_{j=1}^n \|b^j\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \|D_j u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|c\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\leq \frac{\sum_{i,j=1}^n M(\|D_{ij}u\|_{C(\bar{\Omega})} + [D_{ij}u]_{\alpha;\Omega}) + \sum_{j=1}^n M(\|D_j u\|_{C(\bar{\Omega})} + [D_j u]_{\alpha;\Omega})}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\quad + \frac{M(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{\alpha,\Omega})}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\leq \frac{n^2 M(\sup_{|\beta|=2} \|D_\beta u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{|\beta|=2} [D_\beta u]_{\alpha;\Omega})}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\quad + \frac{nM(\sup_{|\beta|=1} \|D_\beta u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{|\beta|=1} [D_\beta u]_{\alpha;\Omega})}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\quad + \frac{M(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{\alpha,\Omega})}{\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}} \\ &\leq n^2 M =: C \end{aligned}$$

esta última desigualdad se tiene por (C.4) y (C.5).

q.e.d.

Definición C.6. Un dominio acotado, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, es de clase $C^{k,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, si para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe una bola $B = B(x_0)$ y una función biyectiva $\psi : B \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

- i) $\psi(B \cap \Omega) \subseteq \mathbb{R}_+^n$
- ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subseteq \partial\mathbb{R}_+^n$
- iii) $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$ y $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$

Para este tipo de espacios y dominios, tenemos el siguiente resultado para el operador L^2 .

Teorema C.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que, Ω es de clase $C^{2,\alpha}$, $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Supongamos que $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ es una solución de $Lu = f$ en Ω , $u = \phi$ en $\partial\Omega$, y que los coeficientes de L son tales que*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.6})$$

y

$$\|a^{ij}\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \|b^j\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \|c\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq \Lambda \quad (\text{C.7})$$

donde λ y Λ son constantes positivas. Entonces,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|\phi\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}) \quad (\text{C.8})$$

donde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$ es una constante.

C.2. El problema de Dirichlet

Más adelante daremos condiciones suficientes para que el problema de Dirichlet, $Lu = f$, tenga solución. Para esto nos valdremos del teorema de punto fijo de Banach.

Definición C.7. *Sea V un espacio vectorial normado. Una función $T : V \rightarrow V$ es una **contracción** si y sólo si existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \theta\|x - y\| \quad \forall x, y \in V.$$

Teorema C.5 (Punto fijo de Banach). *Sea B un espacio de Banach y $T : B \rightarrow B$ una contracción. Entonces, T tiene un único punto fijo, i.e., existe una única solución de la ecuación $Tx = x$.*

Prueba: Dado $x_0 \in B$ definimos $x_n := T^n x_0 \in V$, $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq m$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \\ &= \|T^{n-1}x_1 - T^{n-1}x_0\| + \|T^{n-2}x_1 - T^{n-2}x_0\| + \cdots + \|T^m x_1 - T^m x_0\| \\ &\leq \theta^{n-1}\|x_1 - x_0\| + \theta^{n-2}\|x_1 - x_0\| + \cdots + \theta^m\|x_1 - x_0\| \\ &= (\theta^{n-1} + \theta^{n-2} + \cdots + \theta^m)\|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{\theta^m - \theta^{n-1}}{1 - \theta}\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\theta^m}{1 - \theta}\|x_1 - x_0\| \rightarrow 0, \text{ si } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es de Cauchy, luego, como B es de Banach, existe $x \in B$ tal que $x_n \rightarrow x$ en B , entonces, dado que T es continua,

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

²Véase [10].

Esto implica que x es un punto fijo.

Para probar la unicidad supongamos que existen $x, y \in B$ tales que $Tx = x$ y $Ty = y$, entonces

$$\|Tx - Ty\| \leq \theta \|x - y\| = \theta \|Tx - Ty\|$$

la desigualdad anterior se satisface si y sólo si $\theta = 1$, esto es una contradicción, pues $\theta \in (0, 1)$.

q.e.d.

A continuación consideraremos el problema de Dirichlet para $Lu = f$ en un dominio acotado,

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. El procedimiento para resolver este problema con coeficientes variables será el de reducirlo al caso de coeficientes constantes. A grandes rasgos, el método que utilizaré (conocido como método de continuidad) consiste en tomar una solución al problema $\Delta u = f$ y, de aquí, llegar a una solución de $Lu = f$ mediante soluciones de una familia continua de ecuaciones que “conectan” a $\Delta u = f$ con $Lu = f$.

Teorema C.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $C^{2,\alpha}$ y L un operador estrictamente elíptico en Ω tal que $a^{i,j}, b^i, c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $c \leq 0$. Si el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = \phi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una solución $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ para cualesquiera $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Entonces, el problema

$$(P) = \begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = \phi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una (única) solución $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ para cualesquiera $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Aun más, si $a^{i,j}, b^i, c \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y Ω es de clase C^∞ , entonces, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ³.

Prueba: Antes que nada consideremos las siguiente observaciones

- Notemos que es suficiente considerar el caso en el que $u = 0$ en $\partial\Omega$, pues, resolver el problema (P) es equivalente a resolver el problema

$$\begin{cases} Lv = f - L\phi & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Por hipótesis sabemos que

$$\|a^{i,j}\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \|b^i\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \|c\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq M \quad (\text{C.9})$$

y que, por la elipticidad de L , existe λ tal que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A_1\xi, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, x \in \Omega \quad (\text{C.10})$$

³La última afirmación, con respecto a la regularidad, puede consultarse en [?], Teorema 6.17 y Teorema 8.14. La teoría de regularidad está más allá de los propósitos de este escrito, por esto no inculuimos este resultado aquí.

donde A_1 es la matriz de coeficientes, $[a^{i,j}(x)]$, asociada a el operador L . Consideremos la siguiente familia de operadores

$$L_t u := tLu + (1-t)\Delta u \quad 0 \leq t \leq 1$$

Notemos que $L_0 = \Delta$ y $L_1 = L$. Además, el operador L_t cumple (C.10), pues, dado que L y Δ son elípticos, sabemos que

$$\langle A_0 \xi, \xi \rangle \geq |\xi|^2 \quad \text{y} \quad \langle A_1 \xi, \xi \rangle \geq \lambda_1 |\xi|^2 > 0$$

donde A_0 y A_1 son las matrices asociadas a $L_0 = \Delta$ y a $L_1 = L$, respectivamente. Luego, por la linealidad del producto escalar,

$$\begin{aligned} \langle A_t \xi, \xi \rangle &= \langle (tA_1 + (1-t)A_0) \xi, \xi \rangle = t \langle A_1 \xi, \xi \rangle + (1-t) \langle A_0 \xi, \xi \rangle \geq [t\lambda_1 + (1-t)] |\xi|^2 \\ &\geq \begin{cases} |\xi|^2 & \text{si } \lambda_1 \geq 1 \\ \lambda_1 |\xi|^2 & \text{si } 1 > \lambda_1 \end{cases} \end{aligned}$$

es decir,

$$\langle A_t \xi, \xi \rangle \geq \min(\lambda_1, 1) |\xi|^2$$

por lo tanto, el operador L_t cumple (C.10).

- Ahora, si consideramos a L_t como un operador tal que

$$L_t : B_1 \longrightarrow B_2$$

donde $B_1 := \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \mid u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$ y $B_2 := C^\alpha(\bar{\Omega})$, entonces, L_t está acotado para toda $t \in [0, 1]$ (esto es una consecuencia del Lema C.2).

Notemos que, por el Teorema C.2, cualquier solución, u_t , del problema

$$\begin{cases} L_t u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

cumple que

$$\|u_t\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u_t| \leq C \sup_{\bar{\Omega}} |f| \leq C \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$$

donde C sólo depende de Ω y λ_1 . Luego, utilizando esta última desigualdad y el Teorema C.4, concluimos que

$$\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq \tilde{C} \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$$

es decir,

$$\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq \tilde{C} \|Lu_t\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \quad (\text{C.12})$$

donde $\tilde{C} = \tilde{C}(n, \alpha, \lambda_1, M, \Omega)$.

- Por último, recordemos que encontrar una solución al problema (C.11) es equivalente a que el mapeo

$$L_t : B_1 \longrightarrow B_2$$

sea suprayectivo.

Después de todas las observaciones hechas arriba, procederemos a probar el teorema: Supongamos que, para $s \in [0, 1]$, existe una solución, u_s , del problema (C.11), es decir, L_s es sobre. Además, u_s cumple (C.12) por lo que L_s es inyectivo, por lo tanto podemos invertir el mapeo L_s , i.e., existe

$$L_s^{-1} : B_2 \longrightarrow B_1$$

el operador inverso de L_s . Sea $t \in [0, 1]$, entonces, la ecuación

$$L_t u = f$$

es equivalente a la ecuación

$$\begin{aligned} L_s u &= f + (L_s - L_t)u \\ &= f + sL_1 u + (1 - s)L_0 u - tL_1 u - (1 - t)L_0 u \\ &= f + (t - s)L_0 u - (t - s)L_1 u \end{aligned}$$

y, por la linealidad del operador L_s esta última ecuación es equivalente a

$$u = L_s^{-1} y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)u.$$

Definiendo el mapeo

$$T : B_1 \longrightarrow B_1$$

como

$$Tu := L_s^{-1} y + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)u$$

obtenemos que encontrar una función, u , que resuelva $L_t u = f$ es equivalente a resolver la ecuación $u = Tu$, i.e., es equivalente a encontrar un punto fijo de T . Luego, por el Teorema del punto fijo de Banach es suficiente probar que T es una contracción. Notemos que

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_{B_1} &= |t - s| \|L_s^{-1}(L_0 - L_1)u - L_s^{-1}(L_0 - L_1)v\|_{B_1} \\ &\leq |t - s| \|L_s^{-1}\| \|(L_0 - L_1)(u - v)\|_{B_2} \\ &\leq |t - s| M \|L_0 - L_1\| \|u - v\|_{B_1} \\ &\leq |t - s| M (\|L_0\| + \|L_1\|) \|u - v\|_{B_1}. \end{aligned}$$

Las últimas desigualdades tienen sentido pues, por el Teorema (C.2), $L_0 = \Delta$ y $L_1 = L$ están acotados. Luego, por la desigualdad de arriba, T es una contracción si

$$|t - s| < \delta := [M(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1}.$$

Es decir L_t es sobre para toda $t \in [0, 1]$, tal que $|t - s| < \delta$. Dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en sub-intervalos de longitud menor que δ , y repitiendo el argumento anterior (un número finito de veces), podemos concluir que L_t es suprayectiva para todo $t \in [0, 1]$ suponiendo que lo es para una $s \in [0, 1]$, fija. En particular para $s = 0$.

Es decir, hemos demostrado que si, para una s fija, existe una solución u_s del problema $L_s u = f$, entonces, para todo $t \in [0, 1]$, existe una solución al problema $L_t u = f$. Esto concluye la prueba, pues sabemos que hay una solución para $s = 0$.

q.e.d.

Corolario C.1. Sean $a, b, c \in C^{1,\alpha}(\bar{B})$ (B es la bola unitaria), tales que $|a|, |b|, |c| \leq M$, $a > 0$ y $ac - b^2 = 1$. Entonces, el problema

$$(P) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(au_x + bu_y) + \frac{\partial}{\partial y}(bu_x + cu_y) = 0 & \text{en } B \\ u = x & \text{en } \partial B \end{cases}$$

tiene una (única) solución u . Aun más, si $a^{i,j}, b^i, c \in C^\infty(\bar{\Omega})$, entonces, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Prueba: Dado que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B \\ u = x & \text{en } \partial B \end{cases}$$

tiene una (única) solución, de hecho esta solución es $u = x$ en B , es suficiente probar que (P) es estrictamente elíptico.

Reescribiendo la ecuación de arriba como

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + (a_x + b_y)u_x + (b_x + c_y)u_y = 0$$

entonces, la matriz de coeficientes asociada al problema (P) es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

luego, utilizando que $ac - b^2 = 1$, los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4}$$

$$\lambda_2 = a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4}.$$

Primero notemos que estos valores son reales, esto se obtiene porque $ac - b^2 = 1$ implica que $ac \geq 1$, luego,

$$1 \leq ac \leq \frac{(a + c)^2}{4}$$

es decir,

$$0 \leq (a + c)^2 - 4.$$

Claramente ambos valores propios son positivos.

Sólo falta demostrar que existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda_1 \geq \lambda > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4} = \frac{\sqrt{(a + c)^2} - \sqrt{(a + c)^2 - 4}}{4} \\ &= \frac{4}{\sqrt{(a + c)^2} + \sqrt{(a + c)^2 - 4}} \geq \frac{4}{2\sqrt{(a + c)^2}} = \frac{2}{a + c} \\ &\geq \frac{1}{M} \end{aligned}$$

Por lo tanto el problema (P) es estrictamente elíptico, el resultado se sigue del Teorema C.6.

q.e.d.

Bibliografía

- [1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces*. Academic Press. New York-San Francisco-London. 1975.
- [2] BREZIS, H. *Análisis Funcional*. Alianza Editorial. Madrid. 1984.
- [3] CONWAY, J. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag. New York. 1978.
- [4] COURANT, R. *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces*. Dover. New York. 2005.
- [5] COURANT, R. Et. al. *Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol. II*. Limusa, México D.F. 1974.
- [6] DIERKES, U. Et. al. *Minimal surfaces*. Springer-Verlag. Berlin. 2010.
- [7] DO CARMO, M. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall. 1976.
- [8] DOUGLAS, J. *Solution of the problem of Plateau*. Trans. Am. Math. Soc. 33, 263-321 (1931).
- [9] EVANS, C.L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. Rhode Island. 1998.
- [10] GILBARG, D. y TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag. Berlin. 1977.
- [11] JOST, J. *Postmodern Analysis*. Springer. Third Edition. 2005.
- [12] LICHTENSTEIN, L. *On the theory of elliptic partial differential equations*. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Vol.II (3), 1280-1334.
- [13] MARSDEN, J. y HOFFMAN, M. *Basic Complex Analysis*. W.H. Freeman and Company. New York. 1987.
- [14] MORREY, C.B. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*. Trans. Am. Math. Soc. **43**, 126-166 (1938).
- [15] MORREY, C.B. *The problem of Plateau on a Riemannian manifold*. Ann. Math. (2) **49**, 807-851 (1948).
- [16] RADÓ, T. *The problem of the least area and the problem of Plateau*. Math. Z. 32, 763-796 (1930).

- [17] SIMON, B. y REED, M. *Methods of modern mathematical physics. Vol. 1.* Academic Press. New York. 1972.
- [18] STRUWE, M. *Plateau's problem and the calculus of variations.* Princeton University Press. 1988.
- [19] STRUWE, M. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag. 2000.