



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**CUANTIZACIÓN DE UN MODELO TIPO GOWDY  $T^3$  ACOPLADO A MATERIA  
ESCALAR**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)**

**PRESENTA:**  
**FIS. JORGE JAVIER HERNÁNDEZ GÓMEZ**

**TUTOR**  
**DR. JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR**  
**DR. RODOLFO PATRICIO MARTÍNEZ Y ROMERO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**MÉXICO, D. F. MARZO 2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*How small a thought it takes to fill a life.*

**Ludwig Wittgenstein**

*amar es combatir, si dos se besan  
el mundo cambia, encarnan los deseos,  
el pensamiento encarna, brotan las alas  
en las espaldas del esclavo, el mundo  
es real y tangible, el vino es vino,  
el pan vuelve a saber, el agua es agua,  
amar es combatir, es abrir puertas,  
dejar de ser fantasma con un número  
a perpetua cadena condenado  
por un amo sin rostro;*

*el mundo cambia  
si dos se miran y se reconocen,  
amar es desnudarse de los nombres:  
“déjame ser tu puta”, son palabras  
de Eloísa, mas él cedió a las leyes,  
la tomó por esposa y como premio  
lo castraron después;*

*mejor el crimen,  
los amantes suicidas, el incesto  
de los hermanos como dos espejos  
enamorado de su semejanza  
mejor comer el pan envenenado,  
el adulterio en lechos de ceniza,  
los amores feroces, el delirio,  
su yedra ponzoñosa, el sodomita  
que lleva por clavel en la solapa  
un gargajo, mejor ser lapidado  
en las plazas que dar vuelta a la noria  
que exprime la substancia de la vida,  
cambia la eternidad en horas huecas,  
los minutos en cárceles, el tiempo  
en monedas de cobre y mierda abstracta;*

*los dos se desnudaron y se amaron  
por defender nuestra porción eterna,  
nuestra ración de tiempo y paraíso,  
tocar nuestra raíz y recobrarlos,  
recobrar nuestra herencia arrebatada  
por ladrones de vida hace mil siglos,  
los dos se desnudaron y besaron  
porque las desnudeces enlazadas  
saltan el tiempo y son invulnerables,  
nada las toca, vuelven al principio,  
no hay tú ni yo, mañana, ayer ni nombres,  
verdad de dos en sólo un cuerpo y alma,  
oh ser total...*

Octavio Paz  
*Piedra de Sol*

EL FUTURO PERTENECE A AQUELLOS QUE CREEN EN LA  
BELLEZA DE SUS SUEÑOS

A Juan Pablo  
TE AMO

*El amor es la única fuerza real del mundo, el único motor del género humano.  
El odio, su dualidad. La hermandad y la amistad, son solo amor. Toda la vida  
es puro amor.*

**Jorge J. Hernández Gómez**

*El calor de los ojos de los enamorados derrite la barrera que la carne impone  
y los deja pasar de lleno a la contemplación del alma.*

**Laura Esquivel**

*Hay besos que pronuncian por sí solos  
la sentencia de amor condenatoria,  
hay besos que se dan con la mirada  
hay besos que se dan con la memoria.*

*Hay besos silenciosos, besos nobles  
hay besos enigmáticos, sinceros  
hay besos que se dan sólo las almas  
hay besos por prohibidos, verdaderos.*

*Hay besos que calcinan y que hieren,  
hay besos que arrebatan los sentidos,  
hay besos misteriosos que han dejado  
mil sueños errantes y perdidos.*

*Hay besos problemáticos que encierran  
una clave que nadie ha descifrado,  
hay besos que engendran la tragedia  
cuantas rosas en broche han deshojado.*

*Hay besos perfumados, besos tibios  
que palpitan en íntimos anhelos,  
hay besos que en los labios dejan huellas  
como un campo de sol entre dos hielos.*

*Hay besos que parecen azucenas  
por sublimes, ingenuos y por puros,  
hay besos traicioneros y cobardes,  
hay besos maldecidos y perjuros.*

*Judas besa a Jesús y deja impresa  
en su rostro de Dios, la felonía,  
mientras la Magdalena con sus besos  
fortifica piadosa su agonía.*

*Desde entonces en los besos palpita  
el amor, la traición y los dolores,  
en las bodas humanas se parecen  
a la brisa que juega con las flores.*

*Hay besos que producen desvaríos  
de amorosa pasión ardiente y loca,  
tú los conoces bien son besos míos  
inventados por mí, para tu boca.*

*Besos de llama que en rastro impreso  
llevan los surcos de un amor vedado,  
besos de tempestad, salvajes besos  
que solo nuestros labios han probado.*

*¿Te acuerdas del primero...? Indefinible;  
cubrió tu faz de cárdenos sonrojos  
y en los espasmos de emoción terrible,  
llenaron sé de lágrimas tus ojos.*

*¿Te acuerdas que una tarde en loco exceso  
te vi celoso imaginando agravios,  
te suspendí en mis brazos... vibró un beso,  
y qué viste después...? Sangre en mis labios.*

*Yo te enseñe a besar: los besos fríos  
son de impasible corazón de roca,  
yo te enseñé a besar con besos míos  
inventados por mí, para tu boca.*

Gabriela Mistral

*Belief, like fear or love, is a force to be understood as we understand the Theory of Relativity and Principles of Uncertainty: phenomenon that determine the course of our lives. Yesterday, my life was headed in one direction. Today, it is headed in another. Yesterday I believed that I would never have done what I did today. These forces that often remake time and space, that can shape and alter who we imagine ourselves to be, begin long before we are born and continue after we perish. Our lives and our choices, like quantum trajectories, are understood moment to moment. At each point of intersection, each encounter suggests a new potential direction.*

Isaac Sachs  
*Cloud Atlas*

*All you need is love*  
John Lennon / Paul McCartney

Tanto que agradecer, y tan poco espacio... Es imprescindible aclarar que el orden de mi gratitud es meramente un accidente de mi mente torpe y desordenada.

En primera instancia, agradezco por esta vida que tengo, por la oportunidad de volver a visitar mi Gaia querida, en este espacio y este tiempo precisos. ¡Gracias!

Agradezco a mi Universidad, mi Universidad Nacional Autónoma de México, y en particular a mi muy querida Facultad de Ciencias, por darme la oportunidad de volver a alojarme en su seno, en mis múltiples facetas académicas. ¡Gracias!

Agradezco profundamente a mi tutor principal, el Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada, por haberme sugerido el trabajo de tesis, por haberme introducido a estos temas y haberme desarrollado el amor y la pasión por ellos, por haberme aceptado en su seno académico, por haberme enseñado más allá de mis posibilidades y de su verdadera responsabilidad, por haber sido duro y estricto hasta las lágrimas cuando fue necesario, pero en particular, por ese increíble ejercicio de paciencia... Por aguantar mis burradas, mi inmensa ignorancia, e incluso mi desidia. Tanto en las buenas, como en las malas, ¡y vaya que hubo malas! aunque él nunca lo supiera jamás. ¡Gracias!

A los miembros de mi comité tutor, el Dr. Hernando Quevedo Cubillos, y el Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero, agradezco, en primera instancia, que hayan aceptado conformar mi comité tutor, así como su apoyo incondicional semestre a semestre, durante este tiempo, así como su confianza tanto en el proyecto como en mi desempeño académico. En particular al Dr. Quevedo, por su tremendo interés, no solo en el desarrollo de este trabajo, sino en mi y en mi formación profesional, así como por sus comentarios siempre positivos y constructivos. ¡Gracias!

A los sinodales que conforman el jurado de este trabajo, Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada, Dr. Hernando Quevedo Cubillos, Dr. Daniel Eduardo Sudarsky Saionz, Dr. Juan Manuel García Islas, y Dr. Hugo Aurelio Morales Tecotl, agradezco encarecidamente sus cuidadosa revisión al presente, así como por sus precisos y siempre adecuados comentarios y sugerencias que permitieron enriquecer este trabajo, así como ampliar mi visión del mismo; agradezco las oportunidades, su tiempo, en fin... ¡Gracias!

A mis padres, agradezco su confianza en mi proyecto profesional de vida, así como su constante presencia, apoyo,

sustento y substancia. Por que sin su inmenso esfuerzo, probablemente hubiera sido mucho más escarpada la cuesta. ¡Gracias!

Agradezco a mi papa, por que creo entender las coyunturas que le han acontecido y por que valoro cada ápice de esfuerzo, por muy chico o grande que haya podido haber sido, por continuar apoyándome en la medida de las circunstancias, con gran responsabilidad y determinación. ¡Gracias!

Agradezco mucho a mi mami, que en los ires y venires de la vida probablemente ha tenido que tolerar mucho mas de lo necesario, en aras de procurar un mejor yo, aunque seguramente he estado casi siempre muy por debajo de las expectativas. ¡Gracias!

A mi tío Rafael, agradezco sus cuidados y atenciones, el estar siempre sin realmente estar, el siempre buscar razón de mi y el preocuparse de mi avance, de mi desarrollo. ¡Gracias!

Sigo en eterna deuda con mi muy queridísima Ta, a quien agradezco su presencia siempre constante y sus cuidados y atenciones, su compañía, educación, etcétera, que sin ellos, no puedo siquiera vislumbrar que sería de mi ahora. In Memoriam. ¡Gracias!

A mi muy querida tía Chayo, le agradezco primero que haya estado entre nosotros y que haya sido quien fue, pero en particular le agradezco la oportunidad de haber permitídomme atenderla y procurarla en la medida de mi alcance, durante su último tiempo. In Memoriam. ¡Gracias!

A mi abuelito Jorge, agradezco todo lo que he aprendido de él a través de la historia y la imagería; de tanto que se dijo y se sigue diciendo de él. Por ser el mejor ejemplo a seguir. In Memoriam. ¡Gracias!

A mi tío Ando y a mis hermanos Octavio y Paulo, les agradezco el estar pendiente de mi. ¡Gracias!

A Vivita, mi Vivi querida, por TODO. Por seguir apoyándome y preocupándose por mi, por seguirme carreando y animando, por haberme principalmente permitido seguir ocupando un espacio físico en el cubículo y en FAM. Por aguantarme lo que haya tenido que aguantarme, ya sea consciente o inconscientemente de mi parte. Por esa tierna y tan cuidadosa amistad; por todo. ¡Gracias!

*Death is not an event in life: we do not live to experience death. If we take eternity to mean not infinite temporal duration but timelessness, then eternal life belongs to those who live in the present. Our life has no end in the way in which our visual field has no limits.*

**Ludwig Wittgenstein**

*But every day I go to work I'm making a bet that the universe is simple, symmetric, and aesthetically pleasing, a universe that we humans, with our limited perspective, will someday understand.*

**George Smoot**

A Raúl Gómez, agradezco la oportunidad de haber podido seguir en el laboratorio, y por permitirme seguir intentando ser útil a FAM. Agradezco que hayamos podido colaborar durante este tiempo y haber, por tanto, podido cosechar sendos productos académicos que, junto con Vivi, ciertamente nos tomaron desprevenidos por su insospechado éxito y alcance. Ojalá podamos seguir colaborando fructíferamente mucho tiempo más. ¡Gracias!

A Rosalía, a Pepe y a Marilí, agradezco con mucha profusidad su amistad, apoyo, comprensión y cariño. Agradezco igualmente su inmensa preocupación e interés en mi desarrollo personal y en mi desempeño académico, el estarme correteando y siempre al pendiente de TODO. A Nico y Juaco. ¡Gracias!

A Manolo y José Luis, agradezco su tiempo, su tolerancia, su espacio, su comprensión, paciencia y confianza como compañeros de cubículo, así como colegas y compañeros, durante este tiempo. ¡Gracias!

A los chicos de FAM, agradezco su compañerismo y solidaridad durante todo este tiempo; en particular, agradezco a Chus y a Shir por su linda y sincera amistad, agradezco la oportunidad que me dan de verlos juntos y felices, construyendo un mejor futuro para ustedes y para todos. Aunque nuestro contacto haya sido limitado, principalmente por culpa mía. ¡Gracias!

Agradezco al Instituto Politécnico Nacional, en particular al Centro de Desarrollo Aeroespacial, el haberme brindado la posibilidad de incorporarme a sus filas, donde puedo ofrecer todo mi conocimiento y mi capacidad y ponerlo al servicio de la patria. Agradezco por darme chance de empezar a poder ir sorteando las dificultades inherentes al gran sistema en el que estamos ineludiblemente inmersos. Reitero mi compromiso con el desarrollo de la investigación de punta que México necesita con urgencia para ponernos al nivel de cualquiera otra nación. ¡Gracias!

Agradezco especial e infinitamente al Ing. Sergio Viñals Padilla, por la confianza de permitirme formar parte de la élite académica que seleccionó para conformar al CDA, a la cual pertenezco con orgullo y cariño, porque él está orquestando la coyuntura específica necesaria para parir a un México con independencia total en estos menesteres; por ser aquella persona que posee la visión, experiencia y talento que nos van a permitir lograrlo. ¡Gracias!

Agradezco igualmente al Ing. Jorge Gómez Villarreal, por haber permitido integrarme al equipo de investigadores que tan adecuadamente coordina, por tanto apoyo, substancia y comprensión, por hacer del ambiente de trabajo un goce intelectual y un espacio amplio, liberador, flexible, tranquilo y adaptable. ¡Gracias!

Agradezco de la misma manera a todos mis compañeros de trabajo que conformamos la coordinación. A Rodrigo y a Arturo por su amistad tan peculiar y blasfema, por que transforman el momento en risas y diversión. A Claus, por que sin su invaluable apoyo, la coordinación simplemente no podría funcionar; por que es un punto de confianza y tranquilidad para todos los que trabajamos a su lado (igualmente que al peque del Iñaki, gracias por vivir). A Mario, por recorrer paralelamente conmigo los tortuosos laberintos de la burocracia humana. A Benja, a Manolo y a Irán, por que formamos un equipo de trabajo excepcional; con quienes me gustaría explorar mayores posibilidades de colaboración y amistad. ¡Gracias!

Agradezco a todos los que conformamos el CDA, por todo lo que son, todo lo que integramos, y todo lo que vamos a lograr. En particular agradezco a Yola por todo su apoyo, su increíble y brutal eficiencia, su inmensa calidez profesional y humana, por alentarme/alentarnos siempre a ayudar, a ser mejores seres humanos con los demás y con nuestro entorno, por ser tan cariñosa y dedicada con su trabajo. A todos mis demás compañeros, por permitirme estar colaborando a su lado; a Heberto López, a Alejandra Miranda, a Miguel Álvarez Montalvo, a Jorge Meléndez, a Arturo Solis, a Rodolfo de la Rosa, a Luis Enrique Iñiguez , a Carlos Urbina, a Salvador Terrones, a Lorenzo Hernández, y a una lista interminable de gente que escapa a mi memoria; a toda la chaviza de “las ranas”. Y mi muy peculiar agradecimiento a “las Lupitas” que siempre mantienen impecable y bonito nuestro lugar de trabajo, igualmente que todos los adorables personajes de intendencia del CEC Allende. ¡Gracias!

A Nadia, Nadiita, mi mejor y única amiga (aunque te enojas xD), te agradezco demasiadas cosas. Te agradezco que seas tan bella y hermosa, te agradezco que seas tan noble, tierna, linda, dulce, tan buena amiga, tan desinteresada, tan obsesiva... Te agradezco, aunque siempre busqué mas yo, que me hayas dejado entrar aunque sea un poquito dentro de tu vida y de tu ser. Te agradezco que seas una de los mejores seres humanos que he conocido jamás. Te quiero demasiado. ¡Gracias!

*I like to say, when asked why I pursue science, that it is to satisfy my curiosity, that I am by nature a searcher, trying to understand. Now, in my 80s, I am still searching. Yet I know that the pursuit of science is more than the pursuit of understanding. It is driven by the creative urge, the urge to construct a vision, a map, a picture of the world that gives the world a little more beauty and coherence than it had before. Somewhere in the child that urge is born.*

**John Archibald Wheeler**

*Never stay up on the barren heights of cleverness, but come down  
into the green valleys of silliness.*

**Ludwig Wittgenstein**

Casi por último, aunque no por ello menos importante, sino todo lo contrario, a mi muy amado Juan Pablo. Mi mejor amigo, la personita que ha hecho por mi más que nadie, con muy poco en realidad. Si algo realmente agradezco a este periodo de tiempo, así como a la vida misma, es darme la oportunidad de conocerte y tratarte, de poder descubrir el fantástico ser humano que eres, todas tus facetas y tus claroscuros que sabes que me encantan. Te agradezco que seas tan puro, tan tierno, tan dulce, tan lindo conmigo, tan endemoniadamente comprensivo, maduro y buen amigo, tan noble, tan profundamente hermoso y bello. Te he dicho hasta el cansancio todo lo que te amo, y lo que te admiro; que estoy orgulloso de ti y que se que no tienes límites para salir adelante. Te agradezco que me hayas permitido formar parte tan importante de tu vida, que me hayas permitido hacer TODO lo que he hecho por ti. Te agradezco que me inspires constantemente a vivir, a continuar en este esfuerzo, a seguirte motivando y ayudando TAN ampliamente. Agradezco tantos y tantos momentos tan bonitos y especiales, tan llenos de esa felicidad tan llena de paz, tan única que inunda todo nuestro ser, todo el espacio y todo el tiempo; por que a tu lado, NADA mas importa y el resto de la vida desaparece! Agradezco tu amistad, tu amor, tu tiempo, tu vida... por que somos una sola vida. Te amo pura y tiernamente. ¡Gracias!

Agradezco de una manera muy peculiar a mis queridos terrólogos, mis alumnos y los demás, por que me han permitido ampliar mi visión del mundo, de la vida y de las ciencias; por haberme hecho partícipe de sus amor y pasión por nuestra Tierra hermosa, y por enseñarme más de lo poco que pude yo, mala y torpemente, enseñarles. Los amo. ¡Gracias!

Agradezco bien especialmente a mi amigo Louis, Louis Hanotel, por todo lo que implica nuestra amistad. Te agradezco, amigo, por ser tan lindo, buena onda, inocente, y especialmente por ser tan profundamente inteligente. Te agradezco por las hiper estimulantes charlas que tenemos, por ese intercambio académico e intelectual tan intenso cuando estamos juntos, por enseñarme con tanta paciencia griego y todo lo que sabes, por ser tan excelente estudiante y pronto un GRAN físico. Te agradezco esas salidas tan espectaculares que hemos tenido, donde hemos tenido esas épicas charlas que abordan tan sendos y variados temas, desde la gramática del indo-europeo hasta la teoría cuántica de campos, desde el griego clásico hasta poesía en francés. Agradezco que seas tan genial y lindo conmigo. Te admiro profundamente. ¡Gracias!

A Rodrigo, por su insospechada amistad llena de un intercambio intelectual estimulante, por ser tan maduro, tan comprensivo y tan leal, tan consternado siempre por mi salud mental y emocional. Gracias por estarme siempre psicoanalizándome, aunque prometiste no hacerlo. Por esta amistad tan linda que estamos tejiendo a

tantos niveles de la existencia humana, a pesar de la distancia y el poco tiempo. ¡Gracias!

I specially thank to my best pal Tom, for his friendship. For having chosen the best career in this world. For sharing with me his love and his bumps throughout his journey with physics; for letting me help him with books, recommendations, etc. For those almost endless and very stimulant arguments about physics, life and the world. For letting me try to stupidly skype-teach him a little bit of science. For his kindness and for opening a small window to his life and own world. You are awesome! Thank you!

To my best online friend, David, Dave, ddavey. For your invaluable friendship in the last years; for your concern about my feelings, my life and my personal disorders. For being so cute, tender, and sexy (lol) with me. For amazing ability to stimulate my mind with your wonderful worlds (as well as I tried to do with you). For sharing my passion for English, for letting me share with you my incipient literature, for your endless patience by correcting me and loving me. For being my accomplice in our so exciting and unique class of love. For tolerating my outbursts of craziness, loneliness, and being by my side no matter why, no matter what. For opening a small door to my greatest love, the UK; for our endless discussions and the richest of intellectual interchange. For our mutual love. Thank you!

Al Alí, le agradezco ser tan único y especial como es. Tan abierto de mente y de todo. Te agradezco tu amistad, tu locura tan especial, tus creencias, y el hecho de apoyarnos en todo lo que podamos. ¡Gracias!

A mi querido Fa, mi Fabián. Fabi, te agradezco que lo hayas hecho tan especial y glorioso durante el tiempo tan corto que decidiste que durara. Te quiero. ¡Gracias!

A mi Carlitos, te agradezco tanto y tan poco al mismo tiempo. Te agradezco todo el sacrificio que hiciste por mi, y todo lo que me diste. Gracias por tu tiempo, y por tu cariño y sinceridad mientras la hubo. Agradezco que me hayas permitido crecer a mi como ser humano y darme cuenta de todo lo que soy capaz de hacer por alguien. Agradezco que me hayas permitido amarte en la dimensión que lo hice, que me hayas dejado ayudarte como lo hice, y que hayas ocupado el lugar que ocupaste en su tiempo y espacio precisos. ¡Gracias!

Agradezco a CONACyT el apoyo parcial a través del programa de becas para estudios de posgrado nacionales (CVU No. 288474). ¡Gracias!

*We are asleep. Our Life is a dream. But we wake up sometimes,  
just enough to know that we are dreaming.*

**Ludwig Wittgenstein**

Agradezco igualmente el apoyo del proyecto PAPIIT IN117012-3, DGAPA-UNAM para la presentación de los resultados de esta investigación en el Canadian American Mexican Conference on Graduate Students 2013, que se llevó a cabo en Waterloo, Canadá, en Agosto de 2013, con la presentación del trabajo intitulado *On the quantization of a polarized Gowdy  $T^3$ -like model with scalar matter*. ¡Gracias!

*The more the universe seems comprehensible, the more it also seems pointless ... If there is no point in the universe that we discover by the methods of science, there is a point that we can give the universe by the way we live, by loving each other, by discovering things about nature, by creating works of art. And that—in a way, although we are not the stars in a cosmic drama, if the only drama we're starring in is one that we are making up as we go along, it is not entirely ignoble that faced with this unloving, impersonal universe we make a little island of warmth and love and science and art for ourselves. That's not an entirely despicable role for us to play.*

**Steven Weinberg**

*Of all the indications that existence at bottom has a simplicity beyond anything we imagine today, there is none more inspiring than the unsurpassed simplicity of gravity, as we now see it. Someday, surely, we will see the principle underlying existence as so simple, so beautiful, so obvious that we will all say to each other, 'Oh, how could we all have been so blind, so long? ... How could it have been any different? ... How could we have been so stupid?'*

**John Archibald Wheeler**

# Índice general

Índice	I
Notación	III
Introducción	1
<b>1. Teoría Cuántica de Campos en Fondos Curvos</b>	<b>7</b>
1.1. Sistemas dinámicos finitos . . . . .	7
1.1.1. Teoría clásica . . . . .	8
1.1.2. Cuantización en un espacio de Hilbert . . . . .	10
1.1.2.1. Ambigüedad en la elección del espacio de Hilbert de una partícula . . . . .	12
1.1.2.2. Unicidad de la representación de la teoría cuántica . . . . .	13
1.2. Teoría clásica de campos en fondos curvos . . . . .	14
1.2.1. Evolución clásica . . . . .	16
1.3. Teoría cuántica de campos en fondos curvos . . . . .	17
1.4. Implementabilidad unitaria de transformaciones simplécticas . . . . .	19
1.4.1. Transformaciones de Bogolyubov . . . . .	19
1.4.2. Transformaciones simplécticas y su implementación unitaria . . . . .	20
<b>2. El Modelo: Cosmología Inhomogénea Tipo Gowdy <math>T^3</math> Acoplada a Materia Escalar no Masiva</b>	<b>23</b>
2.1. Modelo cosmológico de Gowdy $T^3$ polarizado . . . . .	28
2.2. Modelo cosmológico tipo Gowdy $T^3$ polarizado acoplado con materia escalar no masiva . . . . .	31
<b>3. Sobre la Unitariedad y Unicidad de la Cuantización a la Fock del Modelo</b>	<b>35</b>
3.1. Cuantización a la Fock: primer propuesta . . . . .	35
3.1.1. Evolución temporal e implementabilidad . . . . .	37
3.2. Cuantización a la Fock unitaria y única . . . . .	40
3.2.1. Evolución cuántica unitaria . . . . .	41

3.2.2. Sobre la unicidad en la representación de las RCC . . . . .	43
3.2.3. Sobre la unicidad en la parametrización del modelo . . . . .	46
<b>Discusión</b>	<b>51</b>
<b>Apéndices</b>	<b>55</b>
<b>A. El espacio de Hilbert para sistemas lineales con número finito de grados de libertad</b>	<b>57</b>
A.1. Sobre el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}$ . . . . .	57
A.1.1. Espacio de Hilbert de una partícula para un sistema de $n$ osciladores armónicos desacoplados	61
<b>B. Transformaciones de Bogolyubov</b>	<b>63</b>
<b>C. Breviario sobre simetrías en Relatividad General</b>	<b>67</b>
C.1. Isometrías . . . . .	67
C.2. Similaridades . . . . .	68
C.3. Clasificación (isométrica) de modelos cosmológicos . . . . .	68
C.3.1. Modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	69
C.3.2. Modelos cosmológicos de Bianchi ( $G_3$ ) . . . . .	69
C.3.2.1. Soluciones tipo Bianchi I autosimilares . . . . .	70
C.3.3. Modelos cosmológicos tipo $G_2$ . . . . .	70
<b>Referencias</b>	<b>73</b>

## Notación, convenciones y terminología

En todo momento, salvo que se indique lo contrario, se usa una métrica con signatura  $(-, +, +, +)$ . A lo largo del texto se trabajará con la convención de índices repetidos de Einstein para la suma:

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} B^{\alpha} \equiv A_{\alpha} B^{\alpha},$$

donde la suma es sobre todos los posibles valores que pueda tomar el índice  $\alpha$ .

Para el manejo de tensores, se usará la notación de índices abstractos de R. Wald [25], donde se usan índices latinos para referirse a los tensores mientras que se usan índices griegos para referirse a sus componentes. Por ejemplo,  $T^a_{bc}$  es un tensor tipo  $(\frac{1}{2})$  con componentes  $T^{\alpha}_{\beta\mu}$ . Las componentes de los tensores de Riemann  $R^a_{bcd}$  y de Ricci  $R_{ab}$  son, respectivamente,  $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$  y  $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$ .

Se considerarán unidades geométricas:  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$  y  $8\pi G = 1$ .

### Lista de símbolos usados durante el trabajo

$\mathcal{O}$ ,	observable	$\Sigma_t$ ,	hipersuperficie de Cauchy al tiempo $t$
$\Gamma$ ,	espacio fase canónico	$h_{ab}$ ,	métrica inducida por $g_{ab}$ en $\Sigma$
$\mathcal{S}$ ,	espacio fase covariante	$D_a$ ,	operador derivada compatible con $h_{ab}$
$\tau_{(t_i, t_j)}$ ,	evolución en $\Gamma$ , de $t_i$ a $t_j$	$N$ ,	función lapso
$T_{(t_i, t_j)}$ ,	evolución en $\mathcal{S}$ , de $t_i$ a $t_j$	$n^a$ ,	vector unitario normal (en dirección al futuro) a $\Sigma$
$\Omega(\cdot, \cdot)$ ,	estructura simpléctica	$N^a$ ,	vector de corrimiento
$\bar{A}$ ,	complejo-conjugado de $A$	$\varphi_{\phi}$ ,	configuración del campo $\phi$
$V_{\mathbb{C}}$ ,	complejización del espacio vectorial $V$	$\pi_{\phi}$ ,	momento del campo $\phi$
$\mathcal{S}^{\pm}$ ,	espacio de frecuencias positivas y negativas	$E_t$ ,	mapeo encajamiento al tiempo $t$
$\mathcal{H}$ ,	espacio de Hilbert	$I_{E_t}$ ,	isomorfismo entre $\Gamma$ y $\mathcal{S}$ asociado al encaje $E_t$
$\mathcal{F}$ ,	espacio de Fock	$(\varphi, \pi)$ ,	datos de Cauchy del campo
$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ ,	espacio de Fock simétrico	$K_{\mu}$ ,	proyección ortogonal respecto al producto interior $\mu$
$J$ ,	estructura compleja	$\phi^{\pm}$ ,	parte de frecuencias positivas y negativas del campo $\phi$
$\mathcal{F}_J$ ,	espacio de Fock asociado a $J$	$G_{ab}$ ,	tensor de Einstein
$\mathcal{H}_J$ ,	espacio de Hilbert de una partícula asociado a $J$	$T_{ab}$ ,	tensor de energía-momento
$\mu(\cdot, \cdot)$ ,	producto interno	$R^a_{bcd}$ ,	tensor de Riemann
$\hat{A}_J$ ,	operador de aniquilación asociado a $J$	$R_{ab}$ ,	tensor de Ricci
$\hat{C}_J$ ,	operador de creación asociado a $J$	$R$ ,	escalar de Ricci
$\hat{W}$ ,	operador de Weyl	$a(t)$ ,	factor de escala
$g_{ab}$ ,	métrica del espacio-tiempo	$e_{p,k}, e_{q,k}$ ,	$k$ -ésimo elemento de la base en $\Gamma$
$\Delta$ ,	operador de Laplace-Beltrami	$Y_{p,k}, Y_{q,k}$ ,	$k$ -ésimo elemento de la base en $\mathcal{S}$
$\nabla_a$ ,	operador derivada compatible con $g_{ab}$		



# Introducción

*The effort to understand the universe is one of the very few things that lifts human life a little above the level of farce, and gives it some of the grace of tragedy.*

**S. Weinberg**

---

Una de las áreas más álgidas y de mayor interés dentro de la física teórica y observacional de hoy en día es la cosmología moderna, a la luz de cuyo desarrollo se ha logrado un vertiginoso avance en conseguir el anhelo humano de comprender al Universo, así como de plantear una vasta e interesante serie de nuevas preguntas. Posiblemente la búsqueda del entendimiento del cosmos haya sido la actividad antropogénica *par excellence* desde que el hombre cobró conciencia de si mismo, y le ha servido, desde entonces, para entronar falacias, esclavizar multitudes, perpetuarse en el poder y, afortunadamente también, para el desarrollo del conocimiento. En la tradición occidental de la cual somos herederos, de la observación aguda, Aristóteles fue capaz de imaginar un cosmos formado por esferas cristalinas concéntricas a la tierra, inmersas en una quintaesencia, capaces de dar cuenta de los movimientos celestes. Medio milenio después, el helénico Claudio Ptolomeo hizo un avance notable al desarrollar, bajo la premisa geocéntrica aristotélica y la perfección de la geometría circular, un modelo que permitió calcular, y por tanto predecir, las posiciones de los astros con cierta precisión; este hecho sin precedentes hizo valer al tratado ptoloméico el nombre de Almagesto (Al Magister, “el más grande”) entre la posteridad Árabe, lugar en donde las ideas aristotélicas y ptoloméicas se resguardaron mientras la oscuridad reinó en Europa: el cristianismo hubo llegado. No fue sino hasta principios del “nuevo milenio”, cuando Aristóteles y Ptolomeo asaltan nuevamente Europa a través de los cruzados, dotando a la Iglesia de un marco teórico: la trinidad Aristóteles-Ptolomeo-Cristo. Y fue hasta el siglo XVI que otro salto notable ocurre en nuestra concepción cósmica, proveniente de un lugar insospechado: del seno de la misma iglesia cristiana; de la mano del canónigo polaco Nicolás Copérnico, la humanidad retornó a las ideas heliocéntricas de Aristarco de Samos, y nos proveyó con un modelo de cálculo similar al ptolemaico, desentronizando el antropocentrismo como elemento fundamental de la cosmogonía universal. Posteriormente, la obcecación absoluta de Tycho Brahe y Johannes Kepler permitió romper con cualquier rastro directo de divinidad, al derruir el cimiento circular perfecto de la astronomía de los últimos dos mil años: la cinemática planetaria por fin había sido develada, aunque no comprendida en sus fundamentos. Y no fue sino hasta cien años después que Sir Isaac Newton redondeó,

impulsó y fundamentó el entendimiento del Universo hasta ese momento, estableciendo las leyes dinámicas que darían cuenta del movimiento planetario: la gravitación universal. Newton sentó las bases de lo que habría de ser la ciencia en las siguientes centurias, una era de gran prosperidad y progreso en nuestro entendimiento del cosmos, al punto de haber creído comprenderlo completamente, como afirma eventualmente Laplace: "... podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría concebir un intelecto que en cualquier momento dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen; si este intelecto fuera lo suficientemente vasto como para someter los datos a análisis, podría condensar en una simple fórmula el movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente sus ojos". Dicha concepción cósmica tomó aún mayor fuerza en los albores del siglo XX cuando, ante las evidentes incompatibilidades entre la física newtoniana y la recién fundada (aunque sólidamente basada en casi un siglo de experimentación) teoría electromagnética, Albert Einstein introdujo la teoría de la relatividad especial, y prontamente se vio en la necesidad de formular una teoría gravitacional que estuviera de acuerdo con los principios de la relatividad especial, retirando el papel hegemónico y absoluto de la gravitación newtoniana. Así nació la relatividad general, que hoy en día es nuestra mejor teoría física para describir y entender la naturaleza del espacio-tiempo, y muy prontamente surgió la cosmología moderna (que, además de tener como pilar a la relatividad general, considera adicionalmente como principio rector al Principio Copernicano<sup>1</sup> o Cosmológico) la cual constituye hoy en día "la herramienta" más fina que tenemos para comprender el cosmos: su pasado, presente y futuro.

El Principio Cosmológico constituye la piedra angular del Modelo Cosmológico Estándar, que consta de espacio-tiempos *perfectamente* homogéneos e isótropos, con cierto contenido de materia-energía (radiación y/o materia): los llamados modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Es importante destacar, sin embargo, que la descripción del Universo mediante modelos tipo FLRW constituye, en realidad, una idealización del mismo en la medida en la que éste es más bien *esencialmente homogéneo e isótropo a gran escala*<sup>2</sup> (nosotros mismos somos una inhomogeneidad del universo). Uno de los cimientos observacionales que otorgan validez al Principio Cosmológico (y que al mismo tiempo revela la *no* perfección en homogeneidad e isotropía) es la radiación cósmica del fondo de microondas (CMBR o CMB simplemente, por sus siglas en inglés) que es básicamente "la fotografía" de nuestro Universo cuando éste era muy joven (aunque ya fuera de la era planckiana) y que muestra a un Universo temprano *esencialmente* homogéneo e isótropo, con desviaciones de una parte en  $10^5$  aproximadamente (ver por ejemplo [1], [2]). A pesar de que el Principio Cosmológico ha sido una aproximación muy fructífera, permitiendo el desarrollo intensivo de la cosmología moderna y la indagación profunda de la naturaleza e historia de nuestro Universo<sup>3</sup>, hay diversas cuestiones aún sin resolver, como lo es el problema de la energía y materia oscuras, la

<sup>1</sup>Que nos dice, a *grosso modo*, que no existen puntos ni direcciones privilegiadas en el universo.

<sup>2</sup>Cuando se hacen promedios sobre la distribución de materia-energía sobre unos toscos 100 MPc ( $\sim 10^9$  años-luz).

<sup>3</sup>Por ejemplo, la evidencia de hoy en día apunta a que la geometría espacial del Universo es plana, sabemos que el Universo tiene una edad finita (i.e. hubo un "nacimiento" -singularidad cosmológica inicial- "Big Bang") y está compuesto por apenas un 4% de materia ordinaria (bariónica), mientras que el restante 96% está formado aparentemente por una misteriosa materia oscura ( $\sim 26\%$ ) y una

asimetría materia-antimateria, la inflación<sup>4</sup> y una explicación plenamente satisfactoria y fundamentada sobre la gestación de las semillas primordiales que dieron lugar a la formación de estructura en el Universo, entre otras interesantes interrogantes. Un costo inherente a tomar una suposición tan fuerte (como homogeneidad e isotropía perfectas) es que cualquier aspecto relacionado con la formación de estructura (proveniente de inhomogeneidades primordiales), así como la estructura misma, es completamente despreciado. Los modelos FLRW omiten, en efecto, inhomogeneidades y anisotropías en el Universo, por lo que para abordar el problema de las inhomogeneidades se suele entonces considerar *perturbaciones* sobre dichos modelos, para con ello plantear escenarios cosmológicos más próximos a la realidad. El campo de la cosmología inhomogénea es hoy en día una de las áreas de mayor estudio, entre los pioneros del área estuvo R.C.Tolman, quien desde los años treinta del siglo pasado [3] había apuntado ya la importancia y necesidad de desarrollar modelos cosmológicos inhomogéneos.

Varios de los problemas que actualmente se estudian en cosmología se remontan en la historia cosmológica hasta el origen mismo del Universo, donde el dominio de la gravitación einsteiniana se diluye mientras se tiende al régimen en el que habría de dominar una hipotética teoría de la gravitación cuántica, en la llamada *era planckiana*. En ésta, en una etapa que abarca tiempos del orden de  $t_p \sim 10^{-44} s$ , se presume que simple y llanamente no existía un espacio-tiempo como un continuo y que los efectos físicos eran de naturaleza puramente gravito-cuántica; infelizmente, y no obstante los esfuerzos que durante más de setenta años se han llevado a cabo, no se posee aún una teoría de la gravitación cuántica que concilie gravedad y mecánica cuántica, por lo que los secretos del Universo planckiano siguen a buen resguardo de la naturaleza. Muchas son las dificultades que se han planteado como obstáculos para conseguir una teoría de gravitación cuántica, entre ellas probablemente la más significativa sea el papel dual que como campo fundamental y escenario juega la métrica, un hecho que no encontramos en ninguna otra de nuestras teorías físicas, donde los campos (actores) y el escenario (espacio-tiempo) son entes independientes y no interactuantes entre sí. Actualmente hay numerosas propuestas tendientes a proporcionar una descripción cuántica para el campo gravitacional, entre ellas destacan la Gravedad Cuántica de Lazos [4] y la llamada “Teoría” de Cuerdas [5] (esta última tiene pretensiones aún mayores y la cuantización del campo gravitacional sería *uno* de sus resultados). A lo largo de décadas, y a falta de una teoría completa y satisfactoria de gravedad cuántica, se ha recurrido al estudio de la cuantización de *modelos de simetría reducida en gravedad* como “laboratorios teóricos” donde se pueden poner a prueba programas y técnicas de cuantización para la gravedad, en estos modelos se aterrizan en forma concreta cuestiones conceptuales y técnicas que eventualmente pueden ser de utilidad en la búsqueda de la teoría completa. De entre dichos modelos, son los denominados modelos con simetría intermedia, o midisuperespacios, aquellos que tienen mayor interés, pues son éstos (a diferencia de los llamados minisuperespacios) los que retienen todavía grados locales de libertad y, por consiguiente, son genuinas teorías de campo que capturan parte de las dificultades que la cuantización de la gravedad plantea. En general, la cuantización de midisuperespacios se lleva a cabo en el marco de la Teoría de Cuántica de Campos en Fondos Curvos (TCCFC) donde la cuantización resultante, se espera,

---

todavía más enigmática energía oscura ( $\sim 70\%$ ).

<sup>4</sup>Era hipotética del Universo en la que éste se expandió exponencialmente en un factor mayor de  $10^{27}$ , entre  $t \sim 10^{-36} s$  y  $t \sim 10^{-32} s$ .

corresponderá al límite de bajas energías de una hipotética teoría de la gravedad cuántica.

Cabe destacar que la TCCFC es una teoría que no está libre de ambigüedades; en efecto, dado un sistema de campos, existe una infinidad de representaciones de las relaciones de conmutación canónicas (RCC) unitariamente inequivalentes, por consiguiente, es necesario introducir criterios físicos extra que permitan seleccionar una representación predilecta. El problema de la ambigüedad en las RCC se agudiza conforme se tienen menos simetrías; mientras que en Minkowski la invariancia bajo Poincaré permite seleccionar una cuantización predilecta, para espacio-tiempos curvos, las simetrías (si es que todavía las hay) suelen no ser suficientes para fijar una cuantización predilecta. A la ambigüedad en la representación de las RCC hay que añadir que un segundo tipo de ambigüedad: la selección de variables fundamentales. Es sabido que mientras que dos representaciones clásicas para un mismo sistema relacionadas a través de una transformación canónica son equivalentes, sus contrapartes cuánticas no lo son en general, pues la transformación canónica no necesariamente tiene como contraparte a un operador unitario. En suma, cuando se cuantiza un sistema en TCCFC, deben buscarse criterios físicos que permitan eliminar estas ambigüedades en aras de obtener una descripción cuántica robusta y físicamente plausible.

En el marco de la cuantización de cosmologías inhomogéneas, una clase de midisuperespacios que ha recibido particular atención por parte de la comunidad son los modelos de Gowdy [6, 7], pues son los modelos cosmológicos inhomogéneos más sencillos que existen. A pesar de haber sido introducidos en el primer lustro de los setenta, es apenas hasta hace pocos años que se han logrado sortear las dificultades inherentes a la TCCFC para cuantizar estos sistemas, y proveer una cuantización completa, consistente y *única*, en la denominada cuantización CCMV (acrónimo de Corichi Cortez Mena Velhinho) [8, 9, 10, 11], eliminando las ambigüedades utilizando dos criterios: invariancia ante las simetrías e implementabilidad unitaria de la dinámica.

En este trabajo se considerará la cuantización de una cosmología inhomogénea, a saber, un modelo cosmológico tipo Gowdy  $T^3$  polarizado con materia escalar. Se proveerá, aprovechando los resultados de la cuantización CCMV, una cuantización *única* para el modelo. El sistema consta de dos grados locales de libertad, uno geométrico y otro material, y es equivalente a dos campos escalares propagándose en un espacio-tiempo tipo FLRW compacto y plano; uno de los grados locales de libertad corresponde a introducir inhomogeneidades geométricas (i.e., perturbación de la geometría homogénea e isotrópica de fondo) mientras que el otro corresponde a introducir inhomogeneidades materiales (i.e., rompe la homogeneidad del contenido de materia) y son justamente tales inhomogeneidades propagándose en el FLRW las que serán cuantizadas a la Fock. El trabajo se divide en tres capítulos principales. En el Capítulo 1 se presenta de manera breve, aunque autocontenida, algunos elementos formales de la TCCFC, poniendo especial énfasis en las diferentes elecciones que pueden realizarse a la hora de construir la cuantización en espacio de Hilbert. En el Capítulo 2 se presenta el modelo a cuantizar, y se muestra la equivalencia de éste con un fondo FLRW sobre el cual se propagan inhomogeneidades geométricas unidimensionales y cuyo contenido material es inhomogéneo, provisto por un campo escalar. En concreto, el midisuperespacio de interés corresponde a un sistema de TCCFC de dos campos escalares axisimétricos en un fondo curvo y la cuantización que se llevará a cabo es sobre los grados locales de libertad (inhomogeneidades) dejando el fondo FLRW intacto. El Capítulo 3 está dedicado

justamente a cuantizar dichos campos (a nivel cinemático). Se presenta una primera cuantización que, aún siendo la más natural e invariante ante las simetrías, carece de una implementación unitaria de la dinámica. Hay quienes arguyen que la carencia de una implementación unitaria de la dinámica puede sortearse a la luz de otros esquemas abstractos de cuantización en TCCFC, como la Cuantización Algebraica; sin embargo, y dado el papel preponderante que la cuantización sobre espacio de Hilbert ha tenido desde los años 20's del siglo pasado y la importancia de la evolución unitaria como un pilar de la teoría cuántica, en este trabajo se busca conservar estos elementos y proveer por tanto una cuantización en espacio de Hilbert *con* implementación unitaria de la dinámica; es decir, se busca preservar los atributos que se tienen en la Mecánica Cuántica ordinaria, como la conservación de la probabilidad y la existencia de un cuadro de Schrödinger. Por consiguiente, se descarta la primer cuantización y se construye una nueva descripción cuántica, invariante ante las simetrías, y que efectivamente implemente de manera unitaria la dinámica. Siguiendo la línea argumentativa de la cuantización CCMV, se obtiene que la cuantización del modelo cosmológico inhomogéneo con implementación unitaria de la dinámica e invariancia ante las simetrías que aquí se presenta, es *única*, tanto en la representación de las RCC, como en la elección de variables fundamentales que se hace. Por último, se presenta una discusión, en ésta se hace un breve recuento, se mencionan posibles trabajos a futuro y se comenta sobre como podría abordarse la relación entre la cuantización aquí presentada con aquella que podría construirse considerando estados de Hadamard. El trabajo se complementa, para efectos de autocontención y claridad, con tres apéndices que abundan sobre diversos aspectos formales y técnicos que son mencionados a lo largo del texto. Cabe especificar que cualquier falta o fallo en la exposición de los temas aquí presentes, así como en el contenido, es absoluta y únicamente responsabilidad mía.



# Capítulo 1

# Teoría Cuántica de Campos en Fondos Curvos

*The beginner... should not be discouraged if... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites.*

*P. Halmos*

---

La cuantización de modelos de simetría reducida en gravedad con un número infinito de grados de libertad (modelos de midi-superspacio [12]) conlleva el estudio del comportamiento y propagación de campos cuánticos en fondos curvos. Esta es un área de investigación activa hoy en día, particularmente en el estudio de sistemas donde tanto fenómenos cuánticos como gravitacionales son igualmente importantes<sup>5</sup>. Puesto que la teoría cuántica de campos en fondos curvos (TCCFC) trata la cuantización de campos en fondos clásicos efectivos, no captura evidentemente toda la complejidad que supondría una teoría cuántica de la gravedad completa. Sin embargo, como límite de bajas energías, la TCCFC retiene parte de la complejidad de una hipotética teoría cuántica de la gravitación y por consiguiente, su análisis es una importante guía para comprender algunas de las características que una futura teoría cuántica del campo gravitacional habrá de poseer. En este capítulo se presentará brevemente (aunque de forma autocontenida) la cuantización de campos lineales en fondos curvos sobre espacios de Hilbert. El objetivo fundamental de este capítulo es tanto introducir la herramienta matemática como enfatizar las dificultades y ambigüedades que supone la cuantización de campos en un espacio-tiempo curvo.

## 1.1. Sistemas dinámicos finitos

Antes de abordar el problema de campos (i.e., sistemas con un número infinito de grados de libertad) es conveniente revisar sistemas con un espacio fase de dimensionalidad finita (i.e., sistemas con número finito de

---

<sup>5</sup>Por ejemplo, partículas en las vecindades de agujeros negros.

grados de libertad). En particular, sistemas lineales finitos.

### 1.1.1. Teoría clásica

El estado de un sistema con  $n$  grados de libertad en mecánica clásica se describe en el espacio fase  $\Gamma$ , que es el haz cotangente<sup>6</sup> del espacio de configuraciones  $\mathfrak{q}$ ; i.e.,  $\Gamma = T^*\mathfrak{q}$ . El espacio fase es una variedad simpléctica<sup>7</sup>, es decir, es un par  $(\Gamma, \Omega_{ab})$  que consta de una variedad diferencial  $\Gamma$  de dimensión  $2n$  y de una 2-forma simpléctica  $\Omega_{ab}$ , que es una forma cerrada y no degenerada<sup>8</sup>, de modo que tiene (una única) inversa  $\Omega^{ab}$ ,  $\Omega^{\alpha\beta}\Omega_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$ . La 2-forma simpléctica canónica es

$$\Omega_{ab} = (dp_{\mu})_a \wedge (dq^{\mu})_b = 2(\nabla_{[a}p_{\mu})(\nabla_{b]}q^{\mu}). \quad (1.1)$$

La dinámica clásica está determinada por la función Hamiltoniana en el espacio fase,  $H : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . El campo vectorial Hamiltoniano en  $\Gamma$  es  $h^a = \Omega^{ab}\nabla_b H$  y las curvas integrales de  $h^a$  son las trayectorias de evolución; i.e., dado un estado (un punto)  $s$  en  $\Gamma$ , éste evoluciona a lo largo de la curva integral de  $h^a$  que pasa por  $s$ . De manera más precisa, dado un sistema coordenado  $y = (q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) \in \Gamma$ , las curvas integrales  $Y(t)$  de  $h^a$  (i.e., las curvas cuyo vector tangente  $dy^a/dt$  es  $h^a \in T\Gamma$ ) describen las trayectorias dinámicas en  $\Gamma$  y son el resultado de resolver las ecuaciones  $h^a = dy^a/dt$ , o bien

$$\frac{dy^a}{dt} = \Omega^{ab} \frac{\partial H}{\partial y^b}, \quad (1.2)$$

que no son otras que las ecuaciones de Hamilton. Claramente, cualquier  $y_0 \in \Gamma$  se puede considerar como un dato (o condición) inicial (a  $t = 0$ ) adecuado para especificar completamente una solución  $Y(t)$  a las ecuaciones de movimiento (1.2). Los teoremas de existencia y unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias establecen así un isomorfismo  $I$  entre el espacio fase (de datos iniciales)  $\Gamma$  y el espacio de soluciones  $\mathcal{S}$  a las ecuaciones de Hamilton (1.2),  $I : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$ . De esta manera el espacio fase de la teoría se puede considerar, ya sea como el espacio fase *canónico*  $\Gamma$ , o bien como el espacio fase *covariante*  $\mathcal{S}$ . Cabe señalar que la identificación se puede hacer considerando un  $t = \bar{t}$  diferente de cero como tiempo de referencia; el isomorfismo en tal caso lo denotamos por  $I_{\bar{t}} : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$ . Así, tenemos que en el espacio  $\Gamma$  la evolución de  $t = t_1$  a  $t = t_2$  está dada por  $\tau_{(t_1, t_2)} = I_{t_2}^{-1} \circ I_{t_1} : \Gamma \rightarrow \Gamma$ , mientras que en el espacio  $\mathcal{S}$  dicha evolución viene determinada por  $T_{(t_1, t_2)} = I_{t_1} \circ I_{t_2}^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

Una observable  $f$  es una función real  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  suave (de clase  $C^{\infty}$ ). El conjunto de todas las observables,  $\mathcal{O}$ , cuenta con una estructura algebraica llamada paréntesis de Poisson,

$$\{f, g\} = \Omega^{ab} \nabla_a f \nabla_b g, \quad (1.3)$$

<sup>6</sup> $T^*\mathfrak{q} = \bigcup_x T^*\mathfrak{q}_x \forall x \in \mathfrak{q}$ , donde  $T^*\mathfrak{q}_x = \{V^* | V \in T\mathfrak{q}_x, x \in \mathfrak{q}\}$ , con  $V^*$  el vector cotangente (dual) asociado a  $V \in T\mathfrak{q}_x$ .

<sup>7</sup>El término *simpléctico* proviene de la palabra griega [13] *συνπλέκειν*, que significa *entrelazar* o *entretrejer* (*intertwine* en inglés), muy apropiado para la estructura de las ecuaciones de Hamilton donde  $\dot{q}$  se obtiene a partir de  $\partial_p H$  y  $\dot{p}$  a partir de  $-\partial_q H$ . Hermann Weyl introdujo dicho término en 1939 en [14].

<sup>8</sup>La cerradura significa que  $d\Omega = \nabla_{[c}\Omega_{ab]} = 0$ , mientras que la no-degeneración [15] que  $\forall x^a \neq 0 \exists v^a | \Omega_{ab}x^a v^b \neq 0$  donde  $x^a, v^a \in T\Gamma_x$ .

donde  $\{\cdot, \cdot\} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  es un operador bilineal, antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi,  $\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$ .

Decimos que un sistema es lineal si la función Hamiltoniana  $H$  es cuadrática,

$$H(t; y) = \frac{1}{2} K_{\mu\nu}(t) y^\mu y^\nu, \quad (1.4)$$

de manera que las ecuaciones de movimiento (1.2) son lineales,

$$\frac{dy^\mu}{dt} = \Omega^{\mu\rho} K_{\rho\nu} y^\nu \quad (1.5)$$

El espacio de soluciones  $\mathcal{S}$  y de datos iniciales  $\Gamma$  son entonces espacios vectoriales. Por lo tanto, podemos identificar vectores  $y^a$  del espacio tangente a  $\Gamma$  con puntos  $y$  de  $\Gamma$ , es decir, el espacio tangente a cualquier punto  $y \in \Gamma$ ,  $T_y \Gamma$ , se puede identificar con  $\Gamma$  misma (la identificación es independiente del punto que se elija). Esto permite definir la *estructura simpléctica*  $\Omega$ ,

$$\Omega(y_1, y_2) = \Omega_{ab} y_1^a y_2^b, \quad (1.6)$$

donde  $y_i$  es el punto en  $\Gamma$  identificado con el vector  $y_i^a$ . La estructura simpléctica es una función bilineal  $\Omega : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , antisimétrica y no degenerada. De (1.1) se sigue que

$$\Omega(y_1, y_2) = p_{1\mu} q_2^\mu - p_{2\mu} q_1^\mu, \quad (1.7)$$

donde se identifica a  $y_i = (q_i^\mu, p_{i\mu}) \in \Gamma$ ,  $i = 1, 2$ , con el vector  $y_i^a = q_i^\mu (\partial/\partial q^\mu)^a + p_{i\mu} (\partial/\partial p_\mu)^a$ . El espacio fase de un sistema dinámico lineal es así un espacio vectorial simpléctico  $(\Gamma, \Omega)$ , i.e. un espacio vectorial  $\Gamma$  equipado con una estructura simpléctica  $\Omega$ .

Dada cualquier  $\bar{y} = (\bar{q}^\mu, \bar{p}_\mu) \in \Gamma$  fija, la función

$$\Omega(\bar{y}, \cdot) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.8)$$

es una función lineal que, de acuerdo con (1.7), mapea el elemento  $y = (q^\mu, p_\mu) \in \Gamma$  a  $\Omega(\bar{y}, y) = \bar{p}_\mu q^\mu - p_\mu \bar{q}^\mu \in \mathbb{R}$ . Las observables son sumas de productos de funciones  $\Omega(y, \cdot)$ , y por consiguiente  $\{\Omega(y, \cdot)\}$  es el conjunto de las observables *básicas*. El paréntesis de Poisson entre observables básicas está dado por

$$\{\Omega(y_1, \cdot), \Omega(y_2, \cdot)\} = -\Omega(y_1, y_2). \quad (1.9)$$

Dado el isomorfismo  $I : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$ , se define una estructura simpléctica natural en  $\mathcal{S}$ ; a saber:  $\Omega_{\mathcal{S}}(Y_1, Y_2) = \Omega(I^{-1}Y_1, I^{-1}Y_2)$ , donde  $I^{-1}Y_i = y_i \in \Gamma$  es el dato de Cauchy de la solución  $Y_i$ . En el caso de sistemas dinámicos lineales, no es difícil mostrar [16] que el llamado producto simpléctico

$$s(t) = \Omega_{\mathcal{S}}(Y_1, Y_2), \quad (1.10)$$

es conservado, es decir,  $ds/dt = 0$ . En adelante, y para simplificar notación, denotaremos a la estructura simpléctica  $\Omega_{\mathcal{S}}$  en  $\mathcal{S}$  simplemente por  $\Omega$ ; ello no llevará confusión alguna con la estructura simpléctica en  $\Gamma$ , pues en general los

argumentos en la estructura simpléctica, o el propio contexto, dejarán bien claro a cual de las estructuras simplécticas se está haciendo referencia. En  $\mathcal{S}$  el Paréntesis de Poisson entre las observables básicas  $\{\Omega(Y, \cdot)\}$  está dado por

$$\{\Omega(Y_1, \cdot), \Omega(Y_2, \cdot)\} = -\Omega(Y_1, Y_2) \quad (1.11)$$

Es importante señalar que las transformaciones canónicas (como la evolución) son simplectomorfismos; es decir, dada una transformación canónica  $M : \Gamma \rightarrow \Gamma$ ,  $\Omega(My_1, My_2) = \Omega(y_1, y_2)$  para todo  $y_1, y_2 \in \Gamma$ . Claramente ocurre lo mismo en  $\mathcal{S}$ .

### 1.1.2. Cuantización en un espacio de Hilbert

La cuantización en un espacio de Hilbert consiste esencialmente en (i) especificar un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , (ii) promover el conjunto de las observables básicas<sup>9</sup>  $\Omega(\xi, \cdot)$  a operadores  $\widehat{\Omega}(\xi, \cdot)$  que satisfagan la condición de cuantización de Dirac<sup>10</sup>, i.e. las relaciones de conmutación canónicas (RCC)

$$\left[ \widehat{\Omega}(\xi_1, \cdot), \widehat{\Omega}(\xi_2, \cdot) \right] = -i\widehat{\Omega}(\xi_1, \xi_2), \quad (1.12)$$

y (iii) representar a dichos operadores como operadores hermíticos en el Hilbert  $\mathcal{H}$ . El valor de una observable  $\widehat{O}$  (construida a partir de las observables básicas  $\widehat{\Omega}(y, \cdot)$ ) en un estado cuántico  $\Psi \in \mathcal{H}$  del sistema es el valor de expectación de  $\widehat{O}$  en  $\Psi$ , i.e.  $\langle \widehat{O} \rangle_\Psi$ . La evolución es dictada por la contraparte cuántica  $\widehat{H}$  de la Hamiltoniana clásica  $H$ . Así, la transformación finita de evolución de  $t_0$  a  $t$  está dada por el operador unitario  $\widehat{U}(t_0, t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  que, sobre el espacio de Hilbert, genera  $\widehat{H}$ . Formalmente,  $\widehat{U}(t_0, t) = \exp\left(-i \int_{t_0}^t \widehat{H} d\tilde{t}\right)$ . De manera equivalente puede adoptarse el cuadro de Schrödinger (donde evolucionan los estados,  $\Psi(t) = \widehat{U}\Psi(t_0)$ ) o el de Heisenberg (donde evolucionan los operadores,  $\widehat{O}(t) = \widehat{U}^\dagger \widehat{O}(t_0) \widehat{U}$ ).

En este apartado se delinearé la cuantización de un sistema lineal de dimensionalidad finita; en particular, se pondrá especial énfasis en la especificación del espacio de Hilbert de la teoría cuántica. La construcción está basada en la estructura vectorial simpléctica de  $\mathcal{S}$ , aunque puede llevarse a cabo también, y de forma análoga, empleando el espacio fase canónico<sup>11</sup>  $\Gamma$ .

El primer paso en la construcción consiste en complejizar el espacio de soluciones reales y suaves,  $\mathcal{S}$ ; es decir, considerar el espacio<sup>12</sup>  $\mathcal{S}_\mathbb{C}$ . Una vez hecha la complejización, se extiende la estructura simpléctica a  $\mathcal{S}_\mathbb{C}$  (por linealidad), y se considera el mapeo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}_\mathbb{C} \times \mathcal{S}_\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

<sup>9</sup> $\xi$  denota a  $y \in \Gamma$  o a  $Y \in \mathcal{S}$ , dependiendo de si la construcción se realiza a partir del espacio fase canónico o bien, del espacio fase covariante respectivamente.

<sup>10</sup>En general, dadas las observables clásicas  $f$  y  $g$ , la condición de cuantización de Dirac establece que las contrapartes cuánticas  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  deben satisfacer  $[\widehat{f}, \widehat{g}] = i\widehat{\{f, g\}}$ .

<sup>11</sup>Mientras que la construcción basada en  $\mathcal{S}$  conduce a una representación de Fock, la construcción basada en  $\Gamma$  conduce a una representación a la Schrödinger

<sup>12</sup>Dado un espacio vectorial  $V$ , su complejización  $V_\mathbb{C}$  puede expresarse como  $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$  [17].

$$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle = -i\Omega(\bar{v}, w), \quad (1.13)$$

donde la barra denota conjugación compleja. Recordemos que una función  $((\cdot, \cdot)) : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$  sobre un espacio vectorial complejo  $W$  es un producto interno [18] si para toda  $x, y, z \in W$  y para toda  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$((x, x)) \geq 0 \text{ y } ((x, x)) = 0 \text{ si y sólo si } x = 0, \quad (1.14)$$

$$((x, y + z)) = ((x, y)) + ((x, z)), \quad (1.15)$$

$$((x, \alpha y)) = \alpha((x, y)), \quad (1.16)$$

$$((x, y)) = \overline{((y, x))}. \quad (1.17)$$

El mapeo (1.13) satisface claramente (1.15)-(1.17) pero no la condición de positividad (1.14) en todo  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ; por ejemplo,  $\langle v, v \rangle$  es nulo para toda  $v$  en el sector real (o, análogamente, en el puramente imaginario) de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . Considerando la complejización  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S} \oplus i\mathcal{S}$ , se tiene que cualquier  $v \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  se puede expresar como  $v = \text{Re}(v) + i\text{Im}(v)$ , donde  $\text{Re}(v) \in \mathcal{S}$  y  $\text{Im}(v) \in \mathcal{S}$  son respectivamente la parte real e imaginaria de  $v$ . Un cálculo directo muestra que<sup>13</sup>  $\langle v, v \rangle = 2\Omega(\text{Re}(v), \text{Im}(v))$ , de manera que existen  $v \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle$  es positivo, negativo o nulo (ver Apéndice A). Sea  $V_{\mathbb{C}}^+$  el conjunto de todos los  $v \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle > 0$ . Denotemos a los elementos de  $V_{\mathbb{C}}^+$  por  $v^+$ . De acuerdo a la definición (1.13), es obvio que  $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = -\langle v, v \rangle$ ; así que el conjunto  $V_{\mathbb{C}}^- \equiv \overline{V_{\mathbb{C}}^+}$  es el conjunto de todos los elementos  $v^- = \overline{v^+}$  en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v^-, v^- \rangle < 0$ .

Ahora bien, es importante notar que  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+ = V_{\mathbb{C}}^+ \cup \{0\}$  no es un espacio vectorial (ver Apéndice A). Sin embargo, puede hallarse un subespacio  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tal que (i) el mapeo (1.13) es positivo definido en  $\mathcal{H}$ , (ii) el subespacio  $\mathcal{H}$  es cerrado bajo (1.13) (y por consiguiente es un espacio de Hilbert), (iii)  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  es la suma directa de  $\mathcal{H}$  y su complejo conjugado  $\overline{\mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ , y (iv) para cualesquiera  $v^+ \in \mathcal{H}$  y  $w^- \in \overline{\mathcal{H}}$  ocurre que  $\langle v^+, w^- \rangle = 0$  (ver Apéndice A). Una vez que  $\mathcal{H}$  ha sido especificado, el espacio de Hilbert de la teoría es el espacio de Fock simétrico asociado a  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ . Es por esta razón que a  $\mathcal{H}$  usualmente se le conoce como el espacio de Hilbert de una partícula.

Un punto de gran relevancia es que  $\mathcal{H}$  *no es único*. En efecto, hay una infinidad de posibles elecciones como espacio de Hilbert de una partícula (todos aquellos subespacios de  $\mathcal{S}$  que satisfagan los cuatro puntos anteriores). Los diferentes espacios de Hilbert de una partícula están relacionados entre sí por transformaciones tipo Bogolyubov (ver Apéndice A y sección 1.4.1): dados  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$ , sus bases  $\{b_j\}_{j=1}^n$  y  $\{b'_j\}_{j=1}^n$  están relacionadas por  $b'_j = \alpha_j b_j + \beta_j \bar{b}_j$ , donde los coeficientes de Bogolyubov  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  satisfacen que  $|\alpha_j|^2 - |\beta_j|^2 = 1$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . De esta manera, la base de  $\mathcal{H}'$  es una combinación de las bases de  $\mathcal{H}$  y  $\overline{\mathcal{H}}$  (y viceversa, la base de  $\mathcal{H}$  es una combinación de las bases de  $\mathcal{H}'$  y  $\overline{\mathcal{H}'}$ ). La no unicidad de  $\mathcal{H}$  es una ambigüedad en la construcción de la teoría cuántica que, sin embargo, no representa ningún problema en el caso de sistemas con un número finito de grados de libertad, debido al teorema de Stone-von Neumann. Antes de continuar con la construcción de la teoría cuántica, es conveniente abundar sobre la no unicidad del espacio de Hilbert de una partícula.

<sup>13</sup>De la conservación del producto simpléctico en  $\mathcal{S}$  se sigue que  $\langle v, v \rangle$  es constante en  $t$ .

### 1.1.2.1. Ambigüedad en la elección del espacio de Hilbert de una partícula

Dada cualquier  $Y \in \mathcal{S}$ , es fácil ver (directamente de (A.7)) que  $Y = Y^+ + Y^-$ , donde  $Y^+ \in \mathcal{H}$  y  $Y^- = \overline{Y^+} \in \overline{\mathcal{H}}$ . Así, se tiene una relación lineal, uno a uno y sobre entre  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{H}$ . Sea  $J : \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  un mapeo lineal cuyos eigenespacios sean  $\mathcal{H}$  y  $\overline{\mathcal{H}}$ , con eigenvalores  $+i$  y  $-i$ , respectivamente; esto es,  $JY^{\pm} = \pm iY^{\pm}$ . Evidentemente,  $J^2 = -\mathbb{I}$ . Puesto que  $Y = Y^+ + Y^-$ , entonces  $JY = iY^+ - iY^- \in \mathcal{S}$  y  $J^2Y = -Y$ , i.e. la restricción de  $J$  a  $\mathcal{S}$  es igualmente un mapeo lineal  $J : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  con  $J^2 = -\mathbb{I}$ . De  $Y = Y^+ + Y^-$  y  $JY = iY^+ - iY^-$  se sigue inmediatamente que

$$Y^{\pm} = \frac{1}{2}(Y \mp iJY). \quad (1.18)$$

El producto interno (1.13) en  $\mathcal{H}$  puede escribirse entonces como

$$\langle Y_1^+, Y_2^+ \rangle = -i\Omega(\overline{Y_1^+}, Y_2^+) = \Omega(\overline{JY_1^+}, Y_2^+). \quad (1.19)$$

Dadas cualesquiera  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}$  se verifica que

$$\operatorname{Re} \langle Y_1^+, Y_2^+ \rangle = \frac{1}{2}\Omega(JY_1, Y_2). \quad (1.20)$$

Como  $\operatorname{Re} \langle Y_1^+, Y_2^+ \rangle = \operatorname{Re} \langle Y_2^+, Y_1^+ \rangle$  entonces  $J$  debe ser un simplectomorfismo. Claramente (1.20) satisface (1.14)-(1.17), por lo que

$$\mu_{\mathbb{R}}(Y_1, Y_2) = \Omega(JY_1, Y_2) \quad (1.21)$$

es un producto interno real en  $\mathcal{S}$ . Ahora se puede ver que el producto (1.19) en  $\mathcal{H}$  no es más que la extensión de (1.21) a  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ,

$$\mu(Y_1^+, Y_2^+) = \Omega(\overline{JY_1^+}, Y_2^+). \quad (1.22)$$

De esta manera, tenemos que dado un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  (i.e., dada una descomposición específica de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ , o equivalentemente una separación específica de las soluciones,  $Y = Y^+ + Y^-$ ) se tiene que éste define un mapeo lineal  $J$ , cuyos espacios propios son  $\mathcal{H}$  y  $\overline{\mathcal{H}}$ , con eigenvalores  $+i$  y  $-i$ , respectivamente. El mapeo  $J$  es un simplectomorfismo con la propiedad de que  $J^2 = -\mathbb{I}$ . Además, la contracción de  $J$  con la estructura simpléctica,  $\Omega(J\cdot, \cdot)$ , define un producto interno real (1.21) en el espacio de soluciones  $\mathcal{S}$ , cuya extensión a  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  es justamente el producto interno en  $\mathcal{H}$ . El mapeo lineal  $J$  restringido a  $\mathcal{S}$ ,  $J : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es igualmente un simplectomorfismo lineal, con  $J^2 = -\mathbb{I}$ ; esto es, el simplectomorfismo  $J$  es una estructura compleja. En resumen, se tiene que un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  define una estructura compleja  $J$ . Lo importante y relevante en la construcción de la teoría cuántica, es que la afirmación inversa es también verdadera: dada una estructura compleja  $J$  en  $\mathcal{S}$ , tal que  $J$  sea “ $\Omega$ -compatible” (i.e. que  $\mu_{\mathbb{R}}(\cdot, \cdot) = \Omega(J\cdot, \cdot)$  defina un producto interno sobre  $\mathcal{S}$ ), el espacio  $\mathcal{H}$  es el definido por el espacio de las frecuencias positivas  $S^+ = \{Y^+\}$  dadas por (1.18), y donde el producto interno es la extensión (1.22) de  $\mu_{\mathbb{R}}(\cdot, \cdot)$ . En otras palabras, dada una  $J$  que sea  $\Omega$ -compatible, se tiene un  $\mathcal{H}$ . Puesto que hay una infinidad de estructuras complejas compatibles con  $\Omega$ , entonces hay una infinidad de espacios de Hilbert de una partícula,  $\mathcal{H}$  (i.e. hay una infinidad de posibles descomposiciones de las soluciones en frecuencias positivas y negativas). Ésta es la ambigüedad

en la elección del espacio de Hilbert de una partícula. Dadas dos estructuras complejas, digamos  $J$  y  $J'$ , se tendrán los espacios correspondientes  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$ , cuya relación es a través de una transformación tipo Bolyubov (ver Apéndice A). Asociado a el conjunto de estructuras complejas  $\{J\}$  compatibles con  $\Omega$  se tiene entonces la familia de espacios de Hilbert de una partícula  $\{\mathcal{H}_J\}$  y, por consiguiente, de espacios de Fock,

$$\mathcal{F}_J \equiv \mathcal{F}_S(\mathcal{H}_J) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left( \bigotimes_S^k \mathcal{H}_J \right). \quad (1.23)$$

Se tiene así que a partir de una  $J$  se construye un espacio de Hilbert  $\mathcal{F}_J$  para la teoría, de tal manera que *la estructura compleja “parametriza” (codifica) la ambigüedad en la elección del espacio de Hilbert de la teoría cuántica*. A partir de este momento, únicamente se considerarán  $J$ 's  $\Omega$ -compatibles, pues el objetivo es (a partir de  $\mathcal{S}$ ) construir el espacio de Hilbert de estados cuánticos.

Los operadores  $\widehat{\Omega}(Y, \cdot)$ , que satisfacen las RCC (1.12), son los operadores fundamentales que se representan y actúan en  $\mathcal{F}_J$ . Los operadores de aniquilación y creación en  $\mathcal{F}_J$  están dados por [19, 20]  $\widehat{\mathcal{A}}_J(\overline{Y^+}) = \widehat{\Omega}(J\overline{Y^+}, \cdot)$  y  $\widehat{\mathcal{C}}_J(Y^+) = \widehat{\Omega}(JY^+, \cdot)$ . De esta manera, queda completamente especificada la teoría cuántica de un sistema dinámico con un número finito  $n$  de grados de libertad. El espacio de Hilbert junto con los correspondientes operadores de creación y aniquilación,  $(\mathcal{F}_J, \widehat{\mathcal{C}}_J, \widehat{\mathcal{A}}_J)$ , constituyen la teoría cuántica del sistema (asociada a la estructura compleja  $J$ ). La representación asociada a  $J$ ,  $(\mathcal{F}_J, \widehat{\mathcal{C}}_J, \widehat{\mathcal{A}}_J)$ , puede escribirse simplemente como  $(\mathcal{F}_J, \widehat{\Omega}_J)$ , pues  $\widehat{\Omega}(Y, \cdot) = i\widehat{\mathcal{A}}_J(\overline{Y^+}) - i\widehat{\mathcal{C}}_J(Y^+)$  (véase por ejemplo [19, 20]), y es en dicho sentido que a  $\widehat{\Omega}$  se le asocia una estructura compleja,  $\widehat{\Omega}_J$ .

Así que la infinidad de representaciones está parametrizada por la familia de estructuras complejas  $\Omega$ -compatibles, por lo que la ambigüedad en el proceso de cuantización radica en la elección de  $J$ . Cabe entonces preguntarse si hay alguna  $J$  predilecta. En otras palabras, diferentes estructuras complejas proveen diferentes representaciones, pero ¿son estas representaciones unitariamente equivalentes o no? ¿la ambigüedad en la elección del espacio de Hilbert de una partícula plantea un problema de unicidad en la representación de las RCC?

### 1.1.2.2. Unicidad de la representación de la teoría cuántica

Dos representaciones, digamos  $(\mathcal{F}_1, \widehat{\Omega}_1)$  y  $(\mathcal{F}_2, \widehat{\Omega}_2)$ , son representaciones equivalentes si ambas conllevan las mismas predicciones físicas. Resulta que en el caso de teorías lineales con un *número finito* de grados de libertad (y bajo ciertas condiciones de continuidad), la infinidad de representaciones son en realidad representaciones unitariamente equivalentes. La unicidad en la representación de teorías lineales con un número finito de grados de libertad es enunciada en el teorema de Stone-von Neumann, que se presentará a continuación (después de algunos breves comentarios y puntualizaciones).

Los operadores fundamentales  $\widehat{\Omega}(Y, \cdot)$  son (en general) no acotados, de manera que para evitar complicaciones con el dominio de definición es útil considerar la versión exponencial de éstos,

$$\widehat{W}(Y) = e^{i\widehat{\Omega}(Y, \cdot)}, \quad (1.24)$$

donde  $\widehat{W}(Y)$  son llamados operadores de Weyl. La hermiticidad de los operadores fundamentales  $\widehat{\Omega}$  y las RCC (1.12) están capturadas en las relaciones de Weyl,

$$\widehat{W}^\dagger(Y) = \widehat{W}(-Y), \quad \widehat{W}(Y_1) \widehat{W}(Y_2) = e^{\frac{i}{2}\Omega(Y_1, Y_2)} \widehat{W}(Y_1 + Y_2). \quad (1.25)$$

**Teorema 1.1.1.** (Teorema de Stone-von Neumann [16, 18]) *Sea  $(\mathcal{S}, \Omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita, y sean  $(\mathcal{F}_1, \widehat{W}_1(Y))$  y  $(\mathcal{F}_2, \widehat{W}_2(Y))$  dos representaciones unitarias, irreducibles<sup>14</sup> y fuertemente continuas<sup>15</sup> de las relaciones de Weyl (1.25). Entonces  $(\mathcal{F}_1, \widehat{W}_1(Y))$  y  $(\mathcal{F}_2, \widehat{W}_2(Y))$  son unitariamente equivalentes.*

La construcción de la teoría cuántica a partir de una estructura compleja  $J$   $\Omega$ -compatible, satisface las hipótesis del teorema de Stone-von Neumann. Más aún, cualquier representación unitaria, fuertemente continua e irreducible de las relaciones de Weyl tiene una estructura compleja asociada. Así, se tiene que dadas cualesquiera dos representaciones  $(\mathcal{F}_1, \widehat{W}_1(Y))$  y  $(\mathcal{F}_2, \widehat{W}_2(Y))$ , construidas a partir de dos estructuras complejas compatibles con  $\Omega$ ,  $J_1$  y  $J_2$ , éstas serán unitariamente equivalentes y, por consiguiente, físicamente indistinguibles.

Es importante destacar que, en el teorema de Stone-von Neumann, la hipótesis de que  $\mathcal{S}$  es de dimensión finita es fundamental [16, 18]. Para sistemas con espacio fase de dimensión infinita (i.e., sistemas de campo) el teorema de Stone-von Neumann no se satisface y debe enfrentarse el problema de un número infinito de representaciones no unitariamente equivalentes. En teoría de campos no hay un análogo al teorema de Stone-von Neumann que remueva la ambigüedad.

## 1.2. Teoría clásica de campos en fondos curvos

En esta sección se considera el caso de sistemas con un número infinito de grados de libertad, y se revisa la teoría de campos clásicos que se propagan en fondos curvos. En particular, la discusión se enfoca al sistema de campo más simple: el campo escalar real de Klein-Gordon. En la siguiente sección se discute la cuantización de dicho sistema.

El campo de Klein-Gordon es un campo escalar real (masivo o no). La ecuación de campo de Klein-Gordon fue propuesta como una ecuación de onda cuántica relativista por Schrödinger<sup>16</sup> e, independientemente, por Gordon y Klein, entre 1925 y 1927. La ecuación surge, esencialmente, de sustituir en la relación de dispersión relativista  $E^2 = p^2 + m^2$  las identificaciones  $E \rightarrow i\partial/\partial t$  y  $p_k \rightarrow -i\partial/\partial x^k$  [21], donde  $t$  es la coordenada temporal y  $x^k$  son coordenadas espaciales. Así, se tiene que (en espacio de Minkowski) el campo de Klein-Gordon  $\phi$  habrá de obedecer la ecuación  $(-\partial_t^2 + \Delta - m^2)\phi = 0$ , donde  $\Delta$  denota el Laplaciano en las superficies de Cauchy  $\Sigma = \mathbb{R}^3$  y  $m$  es la masa del campo  $\phi$ . La generalización de esta ecuación a cualquier espacio-tiempo curvo globalmente

<sup>14</sup> $(\mathcal{F}, \widehat{W}(y))$  es una *representación irreducible* de Weyl si  $\nexists$  un subespacio propio de  $\mathcal{F}$  (salvo el  $\{0\}$ ) invariante ante todos los operadores de Weyl  $\widehat{W}(y)$ .

<sup>15</sup>La continuidad fuerte se refiere a que  $\lim_{Y \rightarrow 0} \|\widehat{W}(Y)h - h\| = 0, \forall h \in \mathcal{F}$ .

<sup>16</sup>Schrödinger arribó antes, en 1925, a (1.26), pero no la publicó debido a los problemas técnicos y conceptuales que representaba.

hiperbólico se lleva a cabo notando que  $-\partial_t^2 + \Delta$  se escribe en forma covariante como  $\nabla_a \nabla^a$ , donde  $\nabla_a$  es el operador derivada compatible con la métrica. Por tanto, en un fondo curvo  $(M, g_{ab})$  globalmente hiperbólico, la ecuación de Klein-Gordon es

$$(\nabla_a \nabla^a - m^2) \phi = 0, \quad (1.26)$$

La ecuación (1.26) se puede derivar, mediante el principio variacional, de la acción

$$S_{KG} = \int_M \mathcal{L}_{KG} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.27)$$

donde  $\mathcal{L}_{KG}$  es la densidad Lagrangiana para el campo escalar,

$$\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (\nabla_a \phi \nabla^a \phi + m^2 \phi^2). \quad (1.28)$$

Como  $M$  es globalmente hiperbólica, ésta es foliable, i.e.  $M \approx \Sigma \times \mathbb{I}$ , donde  $\Sigma$  es una hipersuperficie de Cauchy e  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ . Considerando la descomposición (3 + 1)

$$t^a = N n^a + N^a, \quad (1.29)$$

donde  $t^a$  es el flujo vectorial del tiempo que define (y es definido por) la función  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  (coordenada temporal) via  $t^a \nabla_a t = 1$ . Las superficies de Cauchy  $\Sigma_t$  de la foliación corresponden a valores constantes de la función  $t$ . La ecuación (1.29) es una descomposición del vector  $t^a$  en sus partes tangencial y normal a  $\Sigma_t$ . La proyección tangente es el denominado vector de corrimiento  $N^a$ , mientras que la proyección normal (respecto a la métrica  $g_{ab}$ ) es  $N n^a$ , donde  $n^a$  es el vector unitario normal (en dirección al futuro) a  $\Sigma$  y  $N$  es la función de lapso. Bajo (1.29), la densidad Lagrangiana (1.28) toma la forma

$$\mathcal{L}_{KG} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{H}_{KG}, \quad (1.30)$$

donde

$$\varphi = \phi|_{\Sigma_0}, \quad \pi = \sqrt{h} n^a \nabla_a \phi|_{\Sigma_0}, \quad (1.31)$$

denotan la configuración y el momento del campo respectivamente, referidos a la superficie de Cauchy de referencia  $\Sigma_0$  (a tiempo inicial -de referencia-  $t = t_0$ ),  $h$  es el determinante de la métrica  $h_{ab}$  inducida por  $g_{ab}$  en  $\Sigma_0$  y  $\mathcal{H}_{KG}$  es la densidad Hamiltoniana del campo escalar,

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \pi^2 + \sqrt{h} N D_a \varphi D^a \varphi + \sqrt{h} N m^2 \varphi^2 + 2\pi N^a D_a \varphi \right), \quad (1.32)$$

con  $D_a$  el operador derivada compatible con la métrica espacial  $h_{ab}$ .

La descripción del campo escalar se puede hacer en el espacio fase covariante o en el espacio fase canónico. En el primer caso, se considera el espacio vectorial simpléctico  $(\mathcal{S}, \Omega_{\mathcal{S}})$  de soluciones suaves  $\mathcal{S} = \{\phi\}$  a la ecuación de Klein-Gordon (1.26), donde

$$\Omega_{\mathcal{S}}(\phi_1, \phi_2) = \int \sqrt{h} (\phi_2 n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1 n^a \nabla_a \phi_2), \quad (1.33)$$

mientras que la descripción de espacio fase canónico consiste en considerar el espacio vectorial simpléctico  $(\Gamma, \Omega_\Gamma)$  de datos de Cauchy (datos iniciales)  $\Gamma = \{\varphi, \pi\}$  con

$$\Omega_\Gamma\left((\varphi_1, \pi_1), (\varphi_2, \pi_2)\right) = \int (\pi_1 \varphi_2 - \pi_2 \varphi_1). \quad (1.34)$$

Dada una superficie de Cauchy, digamos  $\Sigma_0$ , hay una correspondencia uno-a-uno entre  $\Gamma$  y  $\mathcal{S}$ , como explicita (1.31). Las observables fundamentales son  $\Omega(\xi, \cdot)$ , donde  $\xi$  denota un elemento de  $\Gamma$  ó de  $\mathcal{S}$ , según sea el caso considerado. El paréntesis de Poisson en  $\Gamma$  y  $\mathcal{S}$  está dado en completa analogía con (1.9) y (1.11); es decir,

$$\{\Omega(\xi_1, \cdot), \Omega(\xi_2, \cdot)\} = -\Omega(\xi_1, \xi_2). \quad (1.35)$$

Para completar la descripción clásica del campo de Klein-Gordon (KG), cabe discutir con cierto detalle la evolución temporal. Ésta, por supuesto, está provista por el Hamiltoniano  $H_{KG} = \int \mathcal{H}_{KG}$  (donde la densidad Hamiltoniana está dada por (1.32)). Las curvas integrales del campo Hamiltoniano  $X^a = \Omega_\Gamma^{ab} \nabla_b H_{KG}$  son las trayectorias dinámicas en  $\Gamma$ . De hecho, la relación uno-a-uno (1.31) establece un isomorfismo  $I_0 : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$ , lo que también permite determinar las trayectorias dinámicas en  $\mathcal{S}$ . En muchas ocasiones es útil, sin embargo, especificar la transformación simpléctica de evolución sin apelar explícitamente al Hamiltoniano. En la siguiente subsección se trata justamente la evolución sin considerar (de manera explícita) al Hamiltoniano.

### 1.2.1. Evolución clásica

En el contexto de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos, la evolución temporal consiste en considerar la evolución de estados en el espacio de datos iniciales de Cauchy entre hipersuperficies de Cauchy a diferentes tiempos. Dada la evolución de estados en  $\Gamma$ , se establece la evolución en  $\mathcal{S}$  a través del isomorfismo entre estos dos espacios. Si bien la hiperbolicidad global garantiza la existencia de una foliación del espacio-tiempo por hipersuperficies de Cauchy tipo espacio, no restringe de modo alguno la manera en que dichas hipersuperficies estarán “encajadas” en el espacio-tiempo, i.e. la manera en que  $\Sigma$  es inmersa en  $(M, g_{ab})$ . Formalmente, la clase de mapeos que “encajan”  $\Sigma$  en  $M$  (y producen la foliación) son mapeos de clase  $C^\infty$ ,  $E_t : \Sigma \rightarrow M$ , donde  $E_t(\Sigma)$  es una superficie de Cauchy para toda  $t$  y donde  $E_{t_2}(\Sigma)$  es la superficie de Cauchy “futura” de  $E_{t_1}(\Sigma)$ , para  $t_2 > t_1$ . Mientras que los datos de Cauchy,  $(\varphi, \pi)$  son funciones de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}$ , el campo  $\phi$  es una función real sobre  $M$ . Dado un encaje  $E_{\bar{t}}$  (superficie de Cauchy  $\bar{t} = cte$ ) éste establece un isomorfismo  $I_{E_{\bar{t}}} : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$  según la relación

$$\varphi = \phi \circ E_{\bar{t}}, \quad \pi = \left( \sqrt{\hbar n^a} \nabla_a \phi \right) \circ E_{\bar{t}}. \quad (1.36)$$

Sean  $E_i(\Sigma)$  y  $E_f(\Sigma)$  las hipersuperficies de Cauchy correspondientes a  $t_i = cte$  y  $t_f = cte$ , con  $t_i < t_f$ . La evolución  $\tau_{(i,f)} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  entre las superficies de Cauchy  $E_i(\Sigma)$  y  $E_f(\Sigma)$  es el mapeo<sup>17</sup>

$$\tau_{(i,f)} = I_{E_f}^{-1} \circ I_{E_i}. \quad (1.37)$$

<sup>17</sup>En completa analogía con la descripción hecha en el apartado 1.1.1.

*In extenso*, la evolución en  $\Gamma$  consiste en (i) considerar datos iniciales  $(\varphi, \pi)_i$  respecto a  $E_i(\Sigma)$ , (ii) hallar la solución  $\phi$  correspondiente a la ecuación de Klein-Gordon (i.e., hallar la  $\phi$  con datos de Cauchy  $(\varphi, \pi)_i$  a  $t_i$ ) y (iii) determinar los datos de Cauchy  $(\varphi, \pi)_f$  de  $\phi$  a  $t_f$ , mediante (1.36) con  $E_{\bar{t}} = E_f$ . Así, se tiene que  $\tau_{(i,f)}(\varphi, \pi)_i = (\varphi, \pi)_f$ .

El mapeo de evolución en el espacio fase covariante,  $T_{(i,f)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es simplemente

$$T_{(i,f)} = I_{E_i} \circ \tau_{(i,f)} \circ I_{E_i}^{-1}. \quad (1.38)$$

Nótese que si  $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$  denota la evolución de  $\phi \in \mathcal{S}$ , i.e.  $\tilde{\phi} = T_{(i,f)}\phi$ , dadas (1.38) y (1.37), se tiene que  $I_{E_i}^{-1}\tilde{\phi} = I_{E_f}^{-1}\phi$ , i.e. que el dato de Cauchy *evolucionado* a  $t = t_f$  de la *solución inicial*  $\phi$  es igual al dato de Cauchy *inicial* a  $t = t_i$  de la *solución evolucionada*  $\tilde{\phi}$ ,

$$\left( \varphi_f(\phi), \pi_f(\phi) \right) = \left( \varphi_i(\tilde{\phi}), \pi_i(\tilde{\phi}) \right). \quad (1.39)$$

Es importante notar que tanto  $T$  como  $\tau$  son symplectomorfismos, i.e.  $\Omega_S(T\cdot, T\cdot) = \Omega_S(\cdot, \cdot)$  y  $\Omega_\Gamma(\tau\cdot, \tau\cdot) = \Omega_\Gamma(\cdot, \cdot)$ .

### 1.3. Teoría cuántica de campos en fondos curvos

Para llevar a cabo la cuantización del campo de Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo se considerará el espacio vectorial simpléctico<sup>18</sup>  $(\mathcal{S}, \Omega_S)$ , de dimensión infinita, y se procederá a construir el espacio de Hilbert de la teoría a través del formalismo desarrollado en la sección 1.1.2. El primer paso en la construcción consiste en introducir una estructura compleja  $J : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  compatible con la estructura simpléctica<sup>19</sup>  $\Omega$ , i.e. una  $J$  tal que

$$\mu_{\mathbb{R}}(\phi_1, \phi_2) = \Omega(J\phi_1, \phi_2) \quad (1.40)$$

define un producto interno real en  $\mathcal{S}$  (en completa analogía con (1.21)). La estructura compleja separa las soluciones  $\phi$  en frecuencias positivas y negativas,  $\phi = \phi^+ + \phi^-$  (cf. (1.18)), con

$$\phi^\pm = \frac{1}{2}(\phi \mp iJ\phi) \quad (1.41)$$

y donde claramente  $J\phi^\pm = \pm i\phi^\pm$ . La complejización de  $\mathcal{S}$  es la suma directa de los espacios complejos de soluciones de frecuencias positivas y negativas,  $\mathcal{S}_J^+ = \{\phi^+\}$  y  $\mathcal{S}_J^- = \{\phi^-\}$ , definidos por  $J$ . La extensión natural de (1.40) a  $\mathcal{S}_J^+$  es (cf. (1.22))

$$\mu(\phi_1^+, \phi_2^+) = \Omega(\overline{J\phi_1^+}, \phi_2^+). \quad (1.42)$$

El espacio de Hilbert de una partícula asociado a  $J$ ,  $\mathcal{H}_J$ , se obtiene al completar  $\mathcal{S}_J^+$  respecto a (1.42). El espacio de Hilbert de la teoría cuántica es el espacio de Fock simétrico (1.23),  $\mathcal{F}_J \equiv \mathcal{F}_{\text{sim}}(\mathcal{H}_J)$ , donde ahora  $\mathcal{H}_J$

<sup>18</sup>La construcción que se presenta a continuación partiendo de  $\mathcal{S}$  lleva a una cuantización *a la Fock*. Si en lugar de partir del espacio de soluciones,  $\mathcal{S}$ , se considera el espacio fase canónico  $\Gamma$ , la cuantización lleva a la representación de Schrödinger. Los detalles sobre la relación entre ambas representaciones, a la Fock y de Schrödinger, puede consultarse en [19].

<sup>19</sup>Para simplificar notación, en adelante se suprimirá el subíndice  $S$  de  $\Omega$ .

es de dimensión infinita, a diferencia de lo que ocurría para sistemas con número finito de grados de libertad,  $n$ , donde  $\mathcal{H}_J$  es  $2n$ -dimensional .

Las variables clásicas fundamentales  $\Omega(\phi, \cdot)$  se promueven a operadores Hermíticos  $\widehat{\Omega}(\phi, \cdot)$  que satisfagan las RCC, (1.12), que provienen del álgebra de Poisson clásica sobre  $S$ ,  $\{\Omega(\phi_1, \cdot), \Omega(\phi_2, \cdot)\} = -\Omega(\phi_1, \phi_2)$ , i.e.

$$\left[ \widehat{\Omega}(\phi_1, \cdot), \widehat{\Omega}(\phi_2, \cdot) \right] = -i \Omega(\phi_1, \phi_2) \widehat{\mathbb{I}}, \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S} \quad (1.43)$$

Además, para todo  $\zeta \in \mathcal{H}_J$  y  $\bar{\zeta} \in \overline{\mathcal{H}_J}$ , los operadores de aniquilación y creación en  $\mathcal{F}_J$  están dados por [19, 20]

$$\widehat{\mathcal{A}}_J(\bar{\zeta}) = \widehat{\Omega}(J\bar{\zeta}, \cdot), \quad \widehat{\mathcal{C}}_J(\zeta) = \widehat{\Omega}(J\zeta, \cdot) \quad (1.44)$$

Puesto que existe una infinidad de diferentes estructuras complejas compatibles con  $\Omega$ , se tiene entonces que (al igual que para sistemas finitos) hay una infinidad de representaciones  $(\mathcal{F}_J, \widehat{\Omega}_J(\phi, \cdot))$  de las RCC. Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurre con el caso de dimensionalidad finita, el número infinito de grados de libertad impide aplicar el teorema de Stone-von Neumann y, consecuentemente, se tiene que lidiar con una infinidad de representaciones y, en particular, con una infinidad de éstas *no unitariamente equivalentes*.

De todas las posibles infinitas representaciones  $(\mathcal{F}_J, \widehat{\Omega}_J(\phi, \cdot))$ , la pregunta pertinente es, ¿cuál de todas ellas (i.e. qué estructura compleja) es la físicamente viable?, ¿qué criterios físicos adicionales habrá que considerar para que, al imponerlos, se seleccione una representación (estructura compleja) físicamente predilecta? Vale la pena recordar que en los libros de teoría cuántica de campos estándar, donde el fondo es el espacio de Minkowski, dicha ambigüedad nunca aparenta presentarse, y la construcción de la teoría es directa. Sin embargo, hay que reparar que en tal caso se impone la invariancia ante el grupo de Poincaré (propia del espacio-tiempo de Minkowski), lo que selecciona en realidad *una* estructura compleja<sup>20</sup>. No obstante, las simetrías, cuando se trata de espacio-tiempos más generales o sistemas manifiestamente no estacionarios, no son suficientes para seleccionar una estructura compleja predilecta, y por ende, deben buscarse criterios adicionales a las simetrías del fondo para seleccionar una estructura compleja físicamente predilecta.

Una opción es reconocer que tanto en la mecánica cuántica como en la teoría cuántica de campos estándar, la unitariedad del operador de evolución juega un papel central, garantizando la conservación de la probabilidad. De esta manera, con miras a restringir el conjunto de posibles estructuras complejas y, en el mejor de los casos, seleccionar (módulo equivalencia unitaria) *una* sólo, un criterio sensato adicional sería imponer, además de las simetrías, el *criterio de evolución unitaria*<sup>21</sup>. Es decir, se pedirá que  $J$  (además de ser compatible con  $\Omega$  e invariante ante las simetrías) sea tal que implemente unitariamente la transformación simpléctica de evolución en la teoría cuántica (i.e. en  $\mathcal{F}_J$ ). Es importante destacar que los criterios juntos de *simetría e implementabilidad unitaria de la dinámica* no necesariamente seleccionarán una *única* clase de equivalencia en forma genérica, aunque para muchos sistemas sí lo harán. En los casos en los que se pueda encontrar dicha clase de equivalencia, estos criterios fijan una cuantización predilecta y el proceso de cuantización (libre de ambigüedades) termina ahí; de lo contrario, deben

<sup>20</sup>Notablemente, sólo hay *una*, módulo equivalencia unitaria, estructura compleja invariante de Poincaré.

<sup>21</sup>En general, suele haber una infinidad de representaciones en las cuales la contraparte cuántica de la evolución es *no* unitaria.

encontrarse criterios adicionales para seleccionar *una* clase de equivalencia. En tanto que el criterio de unitariedad consiste en la *implementación unitaria de la transformación simpléctica de evolución*, es conveniente entonces precisar cuándo una transformación simpléctica es implementada en forma unitaria.

## 1.4. Implementabilidad unitaria de transformaciones simplécticas

Para un adecuado entendimiento de la implementabilidad cuántica unitaria de transformaciones simplécticas, es necesario discutir primero transformaciones de Bogolyubov. Estas transformaciones no sólo permitirán introducir matemáticamente el concepto de implementabilidad de transformaciones simplécticas, sino que además (y fundamentalmente) permiten indagar sobre la relación entre las diferentes representaciones de las RCC, producto de la ambigüedad inherente en el proceso de cuantización del sistema.

### 1.4.1. Transformaciones de Bogolyubov

Dadas dos representaciones de Fock  $(\mathcal{F}_1, \widehat{\Omega}_1)$  y  $(\mathcal{F}_2, \widehat{\Omega}_2)$ , surgidas de dos estructuras complejas sobre  $\mathcal{S}$ ,  $J_1$  y  $J_2$ , ¿qué condiciones son necesarias y suficientes para garantizar la equivalencia unitaria entre dichas representaciones? El problema radica en caracterizar la equivalencia o no de las distintas representaciones a través de las correspondientes estructuras complejas, lo que equivale a una caracterización mediante el producto interior real (1.21).

Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  dos productos en  $\mathcal{S}$  asociados, respectivamente, a las estructuras complejas  $J_1$  y  $J_2$  (ambas compatibles con  $\Omega$ ). Se dice que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  definen normas equivalentes en  $\mathcal{S}$  si para toda  $\phi \in \mathcal{S}$  existen constantes positivas  $A, B$  tales que [16]:

$$A\mu_1(\phi, \phi) \leq \mu_2(\phi, \phi) \leq B\mu_1(\phi, \phi). \quad (1.45)$$

En el caso de que (1.45) no se satisfaga (i.e. que  $\mu_1$  y  $\mu_2$  no definan normas equivalentes), entonces es posible mostrar que la relación entre  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  no puede ser unitaria, i.e. (1.45) es una condición necesaria para la equivalencia unitaria entre las representaciones. Si por el contrario, los productos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  satisfacen (1.45), toda sucesión será de Cauchy en  $\mu_1$  si y sólo si lo es en  $\mu_2$  [16]. Por tanto, los espacios de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  serán subespacios del mismo espacio  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}, \mu}$  (donde  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}, \mu}$  es  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  completado respecto a la extensión de  $\mu_1$  o  $\mu_2$ , de manera indistinta).

Dado que (1.45) es una condición necesaria para la equivalencia unitaria entre representaciones, falta establecer las condiciones suficientes para determinar cuando hay equivalencia unitaria. Supóngase que la condición necesaria (1.45) se satisface y, por tanto, que  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son subespacios de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}, \mu}$ . Considérense las proyecciones ortogonales respecto al producto interior de  $\mathcal{H}_i$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_i}$ ,  $K_i : \mathcal{S}_{\mathbb{C}, \mu} \rightarrow \mathcal{H}_i$  y  $\overline{K}_i : \mathcal{S}_{\mathbb{C}, \mu} \rightarrow \overline{\mathcal{H}_i}$ , con  $i = 1, 2$ , y sean  $\alpha_j^i := K_{j1\mathcal{H}_i}$  y  $\beta_j^i := \overline{K}_{j1\mathcal{H}_i}$ . Se puede demostrar (ver Apéndice B) que dichos mapeos satisfacen las propiedades

$$\alpha_1^{2\dagger} \alpha_1^2 - \beta_1^{2\dagger} \beta_1^2 = \mathbb{I} \quad , \quad \alpha_1^{2\dagger} \overline{\beta}_1^2 = \beta_1^{2\dagger} \overline{\alpha}_1^2,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^{2\dagger} &= \alpha_2^1 \quad , & \alpha_2^{1\dagger} \alpha_2^1 - \beta_2^{1\dagger} \beta_2^1 &= \mathbb{I}, \\ \alpha_2^{1\dagger} \overline{\beta_2^1} &= \beta_2^{1\dagger} \overline{\alpha_2^1} \quad , & \overline{\beta_1^{2\dagger}} &= -\beta_2^1. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Los mapeos  $\{\alpha_j^i, \beta_j^i \mid i, j = 1, 2; i \neq j\}$  con las propiedades (1.46) conforman lo que se llama en la literatura *transformación de Bogolyubov*. Así, el siguiente teorema, finalmente, establece las condiciones *necesarias y suficientes* para que dos representaciones sean unitariamente equivalentes<sup>22</sup>.

**Teorema 1.4.1.** *Dos teorías cuánticas definidas por las estructuras complejas  $J_1$  y  $J_2$  son unitariamente equivalentes si (a) los productos  $\mu_1$  y  $\mu_2$  asociados a  $J_1$  y  $J_2$  satisfacen (1.45) y (b) el mapeo antilineal  $\beta_2^1$  (equivalentemente  $\beta_1^2$ ) cumple  $\text{Tr}(\beta_2^{1\dagger} \beta_2^1) < \infty$  (equivalentemente  $\text{Tr}(\beta_1^{2\dagger} \beta_1^2) < \infty$ ).*

### 1.4.2. Transformaciones simplécticas y su implementación unitaria

El teorema 1.4.1 permite establecer cuándo una transformación simpléctica es unitariamente implementable, i.e. cuando un simplectomorfismo (transformación canónica) tiene como contraparte cuántica un operador unitario. Obsérvese que dada una  $J$  y una transformación simpléctica  $g$ , esta última induce una estructura compleja  $J' = gJg^{-1}$ . Se dice que la transformación simpléctica  $g$  será unitariamente implementable si  $J$  y  $J'$  dan lugar a representaciones de las RCC unitariamente equivalentes (i.e. si la parte antilineal  $\beta$  de la transformación de Bogolyubov es Hilbert-Schmidt,  $\text{Tr}(\beta^\dagger \beta) < \infty$ , respecto a  $\mathcal{H}$  o  $\mathcal{H}'$  indistintamente).

Para explicitar la implementabilidad unitaria de una transformación simpléctica, considérese que el campo escalar se propaga en un fondo cuyas hipersuperficies de Cauchy son compactas, de tal manera que se puede llevar a cabo una descomposición del campo en series de Fourier. Considérense dos estructuras complejas distintas  $J_j$ ,  $j = 1, 2$ ; éstas provienen de dos descomposiciones diferentes del campo en frecuencias positivas y negativas,

$$\phi(x) = \sum_n a_n^{(j)} f_n^{(j)+}(x) + \overline{a_n^{(j)}} f_n^{(j)-}(x), \tag{1.47}$$

donde las bases  $\{f_n^{(j)+}(x), f_n^{(j)-}(x)\}$  son ortonormales respecto a los correspondientes productos  $\Omega\left(\overline{J_j[\cdot]}, \cdot\right)$ ,  $J_j f^{(j)\pm} = \pm i f^{(j)\pm}$ , y los modos de frecuencia negativa son la conjugación compleja de los de frecuencia positiva,  $f_n^{(j)-} = \overline{f_n^{(j)+}}$ . Los espacios de Hilbert de una partícula correspondientes a las diferentes descomposiciones se obtienen completando  $\mathcal{S}_{J_j^+}$ , que es el espacio generado por  $\{f_n^{(j)+}\}$ , respecto  $\mu_j(\cdot, \cdot) = \Omega\left(\overline{J_j[\cdot]}, \cdot\right)$ . Así, se tienen los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  distintos, construidos a partir de las estructuras complejas  $J_1$  y  $J_2$ .

Supóngase que los productos internos  $\mu_j$  satisfacen la condición (1.45), de manera que  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\overline{\mathcal{H}_1}$  y  $\overline{\mathcal{H}_2}$  son subespacios de  $\mathcal{S}_{C,\mu}$  y, por consiguiente, todo  $\xi_2 \in \mathcal{H}_2$  puede expresarse como la suma de elementos de  $\mathcal{H}_1$  y  $\overline{\mathcal{H}_1}$ ,  $\xi_2 = \chi_1 + \overline{\zeta_1}$ ,  $\chi_1 \in \mathcal{H}_1$  y  $\zeta_1 \in \overline{\mathcal{H}_1}$ . En particular, considérese que para todo  $k$ , el  $k$ -ésimo elemento de la base de  $\mathcal{H}_2$ , bajo  $K_1$ , es proyectado a lo largo del  $k$ -ésimo elemento de la base de  $\mathcal{H}_1$ , y que bajo  $\overline{K_1}$ , es proyectado a lo largo del  $k$ -ésimo elemento de la base de  $\overline{\mathcal{H}_1}$ , es decir,  $K_1 f_k^{(2)+} = (\alpha_1^2)_k f_k^{(1)+}$  y  $\overline{K_1} f_k^{(2)+} = (\overline{\beta_1^2})_k f_k^{(1)-}$ . Puesto que

<sup>22</sup>Para la prueba de este teorema, ver, por ejemplo, [16].

$K_1 + \overline{K_1} = \mathbb{I}$ , entonces se sigue que

$$f_k^{(2)+} = (\alpha_1^2)_k f_k^{(1)+} + (\overline{\beta_1^2})_k f_k^{(1)-}. \quad (1.48)$$

No es difícil comprobar que se satisfacen las relaciones (1.46) en términos de coeficientes, en particular  $|(\alpha_1^2)_k|^2 - |(\beta_1^2)_k|^2 = 1, \forall k$ . Así, (1.48) es una transformación de Bogolyubov y los coeficientes  $\{(\alpha_1^2)_k, (\beta_1^2)_k\}$  son los denominados coeficientes de Bogolyubov de la transformación. De (1.48) se sigue que los coeficientes de la expansión (i.e., las variables tipo aniquilación y creación asociadas a las diferentes estructuras complejas) estarán relacionados por la transformación (también llamada de Bogolyubov):

$$a_k^{(1)} = (\alpha_1^2)_k a_k^{(2)} + (\beta_1^2)_k \overline{a_k^{(2)}}. \quad (1.49)$$

Nótese que la variable tipo aniquilación de la representación 1,  $a_k^{(1)}$ , es una combinación de las variables tipo aniquilación y creación de la representación 2,  $a_k^{(2)}$  y  $\overline{a_k^{(2)}}$ , de tal manera que en la teoría cuántica habrá una mezcla de operadores de creación y aniquilación al pasar de una representación a la otra y, evidentemente, los vacíos  $|0\rangle_1$  y  $|0\rangle_2$  no coincidirán. Además de la condición (1.45), se requiere la condición de la traza sobre la parte antilineal de la transformación de Bogolyubov (1.49) -Teorema 1.4.1- para garantizar que las representaciones surgidas de las estructuras complejas  $J_j$  sean unitariamente equivalentes. Un cálculo directo muestra que

$$\text{Tr}(\beta^\dagger \beta) = \sum_k \left\langle (\beta_1^2)_k f_k^{(1)+}, (\beta_1^2)_k f_k^{(1)+} \right\rangle_{\mathcal{H}_1} = \sum_k |(\beta_1^2)_k|^2. \quad (1.50)$$

Por tanto, la condición de equivalencia unitaria es

$$\text{Tr}(\beta^\dagger \beta) = \sum_k |(\beta_1^2)_k|^2 < \infty, \quad (1.51)$$

es decir, que los coeficientes de la parte antilineal de la transformación de Bogolyubov,  $(\beta_1^2)_k$ , deben ser de cuadrado sumable. Nótese que

$$J_1 f_k^{(2)+} = i(\alpha_1^2)_k f_k^{(1)+} - i(\overline{\beta_1^2})_k f_k^{(1)-}, \quad J_2 f_k^{(2)+} = i(\alpha_1^2)_k f_k^{(1)+} + i(\overline{\beta_1^2})_k f_k^{(1)-},$$

de tal manera que

$$(J_2 - J_1) f_k^{(2)+} = 2i(\overline{\beta_1^2})_k f_k^{(1)-}.$$

Así, la condición de equivalencia unitaria se traduce en pedir que  $\mathcal{J} := (J_2 - J_1)$  sea Hilbert-Schmidt, pues

$$\text{Tr}(\mathcal{J}^\dagger \mathcal{J}) = \sum_k \left\langle \mathcal{J} f_k^{(2)+}, \mathcal{J} f_k^{(2)+} \right\rangle_{\mathcal{H}_2} = 4 \sum_k |\beta_k|^2 < \infty.$$

De esta manera, se tiene que si  $J_1$  y  $J_2$  dan lugar a representaciones unitariamente equivalentes (i.e. si  $\mathcal{J} := (J_2 - J_1)$  es Hilbert-Schmidt), entonces se dirá que  $J_1$  y  $J_2$  son equivalentes.

En el apartado 1.2.1 se discutieron las transformaciones simplécticas de evolución tanto en  $\Gamma$ ,  $\tau_{i,f} = I_{E_f}^{-1} \circ I_{E_i}$  (cf. relación (1.37)), como en  $\mathcal{S}$ ,  $T_{(i,f)} = I_{E_i} \circ \tau_{(i,f)} \circ I_{E_i}^{-1}$  (cf. relación (1.38)). El conjunto de las transformaciones canónicas  $\{T_i\}$  y  $\{\tau_i\}$  conforman, cada uno, un grupo uniparamétrico de simplectomorfismos. En el caso del

espacio fase  $\mathcal{S}$ , el grupo de transformaciones simplécticas de evolución temporal,  $\{T_t\}$ , será denotado por  $\mathcal{T}_t(\mathcal{S})$ . Es importante enfatizar que mientras para teorías lineales en espacio fase finito, la evolución siempre es unitariamente implementable, en el caso de campos, y de manera concreta en el caso de campo escalar, el grupo  $\mathcal{T}_t(\mathcal{S})$  no siempre es implementado unitariamente; es decir, asociado a  $T_t$  no siempre hay un operador unitario en el espacio de Fock de estados cuánticos. Dada una representación construida a partir de una cierta  $J$ , la evolución temporal será unitariamente implementable (en esa representación) si y sólo si las estructuras complejas  $J$  y la inducida por evolución,  $J_T := T J T^{-1}$ , son estructuras complejas equivalentes  $\forall T \in \mathcal{T}_t(\mathcal{S})$ , es decir si  $(J - J_T)$  es Hilbert-Schmidt (para toda  $T \in \mathcal{T}_t(\mathcal{S})$ ) en el espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_J$  asociado a  $J$  (o, en otras palabras, si  $J$  y  $J_T$  generan representaciones de Fock unitariamente equivalentes para todo  $T \in \mathcal{T}_t(\mathcal{S})$ ).

## Capítulo 2

# El Modelo: Cosmología Inhomogénea Tipo Gowdy $T^3$ Acoplada a Materia Escalar no Masiva

*For me, it is far better to grasp the Universe as it really is than to persist  
in delusion, however satisfying and reassuring.*

*C. Sagan*

---

Una estrategia socorrida en el estudio de la cuantización del campo gravitacional, consiste en cuantizar modelos de simetría reducida en relatividad general. Dependiendo de las simetrías impuestas, se puede obtener un minisuperespacio, que es un modelo reducido en gravitación que posee un número finito de grados de libertad, o un midisuperespacio, que preserva un número infinito de grados de libertad y, por tanto, continúa siendo una teoría de campo. Los mini/midisuperespacios son modelos que históricamente han servido como guía para superar diferentes dificultades conceptuales y técnicas, su utilidad se debe, en gran medida, a que en muchos casos son analíticamente solubles y capturan parte de los problemas que en la cuantización del campo gravitacional deben abordarse. En 1967, De Witt [22] fue quizá el primero en estudiar la cuantización sistemática de un modelo de simetría reducida en gravedad, al considerar un espacio tiempo homogéneo e isótropo con materia. El modelo, por su alta simetría, era un minisuperespacio y por consiguiente el problema quedó reducido a uno de mecánica cuántica ordinaria, completamente resoluble. En 1969 Misner [23] profundizó en el modelo estudiado por De Witt, incorporando más elementos al análisis (e.g., anisotropías). Fue así como nació, a finales de la década de los sesenta, el campo de la cosmología cuántica.

Los minisuperespacios, profusamente investigados desde hace más de cuarenta años, son sin embargo poco útiles

para abordar problemas relacionados con el número infinito de grados de libertad que el campo gravitacional conlleva. Para lidiar con problemas referentes *al campo*, se acude entonces a los midisuperespacios, que proveen una versión ciertamente simplificada pero que captura parte de la problemática que los infinitos grados de libertad implica. El estudio sistemático de la cuantización de midisuperespacios comenzó en los setenta, esencialmente con el trabajo de Kuchař en espacio-tiempos con simetría cilíndrica [24].

En términos muy generales, la reducción por simetrías de una teoría clásica de campos consta de los siguientes pasos: (i) Se especifica la acción del grupo con respecto al cual los campos deben ser invariantes; (ii) se construye el campo mas general que admite la acción de dicho grupo como simetría, el denominado campo invariante, que involucra funciones arbitrarias de una o mas variables (campos reducidos); y (iii) se evalúan las ecuaciones de campo en los campos invariantes, obteniendo las ecuaciones diferenciales (o tal vez algebraicas) para los campos reducidos. Estas son las ecuaciones de campo reducidas para el mini- o midisuperespacio.

El modelo que se estudia en este trabajo es un modelo cosmológico tipo Gowdy  $T^3$ , acoplado con materia escalar no masiva. Este modelo es un modelo cosmológico inhomogéneo, con materia y que posee, como se verá mas adelante, dos grados locales de libertad cuya cuantización es posible llevar a cabo a través de las técnicas de la teoría cuántica de campos en fondos curvos. Debido a los grados locales de libertad, el modelo corresponde a un midisuperespacio. En este capítulo se presentará la teoría clásica del modelo, dejando el problema de la cuantización para el capítulo 3. Antes de comenzar la presentación, se hará un breve repaso de la cosmología estándar, homogénea e isotrópica, de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

### Modelos FLRW

La cosmología estándar moderna está fundamentada en relatividad general y en el Principio Cosmológico. De esta manera, un modelo cosmológico<sup>23</sup> está dado por una variedad diferencial  $M$ , dotada con una métrica con signatura Lorentziana  $g$ , que presenta una singularidad inicial y que a gran escala simula un universo esencialmente homogéneo e isotrópico. Una vez impuestas la simetrías (por ejemplo, homogeneidad e isotropía perfectas), se necesita especificar el contenido de materia-energía que sea compatible con ellas (i.e., especificar el tensor de energía-momento  $T_{ab}$ ) para entonces determinar la dinámica vía las ecuaciones de campo de Einstein<sup>24</sup>

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab}, \tag{2.1}$$

que rigen la interacción materia/energía-geometría y su dinámica (las ecuaciones (2.1) están en unidades geométricas,  $c = 1$  y  $8\pi G = 1$ ). El tensor de Einstein,  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ , tiene divergencia cero (en virtud de las identidades de Bianchi para el tensor de Riemann [25]), lo que implica las ecuaciones de conservación  $T^{ab}_{;b} = 0$ . Dentro de la

<sup>23</sup>Una manera de clasificar los espacio-tiempos, y en particular modelos cosmológicos, es a través de sus propiedades de simetría (ver Apéndice C).

<sup>24</sup>Cabe aclarar que una “mala” especificación de  $T_{ab}$  -incompatibilidad con la geometría- en realidad se determina, *en forma definitiva*, si las ecuaciones de Einstein no tienen solución.

materia más simple que se puede tener, se encuentran el polvo, el fluido perfecto y el campo escalar, cuyos tensores de energía-momento son, respectivamente,

$$T_{ab}^{(P)} = \rho u_a u_b, \quad (2.2)$$

$$T_{ab}^{(FP)} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}, \quad (2.3)$$

$$T_{ab}^{(CE)} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi - m^2 \phi^2), \quad (2.4)$$

donde  $\rho$  denota la densidad de energía (del polvo o fluido perfecto),  $p$  la presión del polvo,  $u^a$  la cuadrivelocidad (del polvo o fluido perfecto), y  $\phi$  al campo escalar real de masa  $m$ .

Como se mencionó anteriormente, la cosmología moderna adopta de manera *ad hoc* el denominado *Principio Cosmológico*, o *Copernicano*, que establece que, a gran escala, el Universo es esencialmente homogéneo e isotrópico, i.e. que no existen posiciones ni direcciones privilegiadas en el Universo. Por “gran escala” se entiende la observación del Universo como el promedio de regiones que abarcan cerca de  $10^9$  años luz ( $\sim 100$  Mpc). El Principio Cosmológico es una propiedad del Universo que esta en buen acuerdo [26, 27] con las observaciones de la distribución de materia a gran escala del Universo, así como con la naturaleza de la radiación cósmica de fondo de microondas<sup>25</sup> (CMB o CMBR por sus siglas en inglés).

Así, una primera aproximación para describir al Universo es mediante modelos cosmológicos *perfectamente homogéneos e isotrópicos*, los cuales, en principio, no contemplan aspectos relacionados con la formación de estructura proveniente de inhomogeneidades primordiales. Sin embargo, las soluciones exactas perfectamente homogéneas e isotrópicas de las ecuaciones de campo (2.1) resultan ser una muy buena aproximación del Universo a gran escala.

El estudio moderno y sistemático de la cosmología inició con el modelo propuesto por Einstein y de Sitter en 1917, de un universo estático [29, 30]. El concepto de un universo en expansión fue introducido por Friedmann y Lemaître [31, 32, 33] en los 20’s, y ganó credibilidad en los 30’s con las observaciones de Hubble [34] y la demostración de Eddington de la inestabilidad del modelo estático de Einstein [33].

De la familia de soluciones exactas a las ecuaciones de campo<sup>26</sup>, aquella que está de acuerdo con la expansión de Hubble y con el Principio Cosmológico es el modelo de FLRW. La métrica de dicho modelo, en tiempo conforme  $\eta$ , (ver Apéndice C) viene dada por la ecuación (C.2),

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -d\eta^2 + \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right\}. \quad (2.5)$$

donde  $a(\eta)$  es el factor de escala (en tiempo conforme  $\eta$ ). Esta es la métrica mas general para espacio-tiempos homogéneos é isotópicos, donde el espacio puede ser, o bien, hiperbólico ( $H^3$ ,  $k = -1$ ), o bien plano ( $\mathbb{R}^3$ ,  $k = 0$ ), o bien esférico ( $S^3$ ,  $k = 1$ ). Es importante destacar que el valor de  $k$  no puede ser predicho por los modelos, sino que este es determinado por las observaciones<sup>27</sup>. Las ecuaciones de campo independientes para fluido perfecto son las

<sup>25</sup>Esta radiación es la “fotografía” del Universo temprano en la *era de la recombinación*, donde parece esencialmente homogéneo e isotrópico, con desviaciones del orden de una parte en  $10^5$ . Fue descubierta por Penzias y Wilson [28] accidentalmente en 1965.

<sup>26</sup>Para fluido perfecto, considerando ecuaciones de estado para radiación y materia.

<sup>27</sup>Actualmente, el primer pico acústico en las observaciones del CMB apuntan a un Universo plano; i.e.  $k = 0$  [1, 35].

siguientes

$$a'^2 + ka^2 = \frac{1}{3}\rho a^4, \quad 2aa'' - a'^2 + ka^2 = -pa^4, \quad (2.6)$$

donde la prima denota derivada respecto a  $\eta$ . La segunda ecuación se puede reescribir de una manera mas sucinta si se elimina la primera derivada usando la primera ecuación, obteniendo así las denominadas ecuaciones de Friedmann,

$$a'^2 + ka^2 = \frac{1}{3}\rho a^4 \quad a'' + ka = \frac{1}{6}(\rho - 3p)a^3, \quad (2.7)$$

Este sistema de ecuaciones está indeterminado, y es necesario introducir una ecuación de estado:  $p = \omega\rho$ , que permite resolver al sistema, y por tanto, determinar la dinámica del espacio-tiempo (dinámica del factor de escala), y de la materia-energía (dinámica de  $\rho$ ). En particular, un universo dominado por materia corresponde a  $\omega = 0$ , mientras que un universo dominado por radiación viene dado por  $\omega = 1/3$ . Para este último caso, por ejemplo, las ecuaciones (2.7) se simplifican a la única ecuación

$$a'' + ka = 0, \quad (2.8)$$

la cual puede ser fácilmente integrada (imponiendo que  $a(\eta = 0) = 0$  - big-bang - )

$$a(\eta) = a_m \begin{cases} \sinh \eta, & k = -1; \\ \eta, & k = 0; \\ \text{sen} \eta, & k = 1. \end{cases} \quad \therefore \quad t = a_m \begin{cases} (\cosh \eta - 1), & k = -1; \\ \eta^2/2, & k = 0; \\ (1 - \cos \eta), & k = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

donde  $a_m$  es una constante de integración y  $t$  es el tiempo cosmológico. Nótese que los universos abierto y plano ( $k = -1, 0$ ) se expanden por siempre, mientras que un universo cerrado ( $k = +1$ ) se expande y después entra en una fase de contracción hasta una gran implosión (big-crunch).

Ciertamente, el Universo posee materia-energía adicional a la radiación. A grandes rasgos, el universo estuvo inicialmente dominado por radiación, posteriormente por materia, y en la actualidad aparentemente por la denominada energía oscura. La descripción mas aceptada (aunque no por todos compartida) que se tiene actualmente del Universo, es provista por el modelo  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter), que especifica que hoy en día nuestro Universo consta de aproximadamente un 4% de materia bariónica, un 26% de materia fría oscura y de un 70% de energía oscura (asociada a una constante cosmológica<sup>28</sup>). Adicionalmente, que de las tres posibles geometrías permitidas en el modelo FLRW, la que parece adecuarse mejor a las mediciones del primer pico acústico de la CMB [1, 35] es la plana ( $k = 0$ ), y que el Universo parece estar en una fase de expansión acelerada [36].

No obstante el éxito de los modelos FLRW, es claro que el Universo no es *perfectamente* homogéneo e isotrópico (hay galaxias, cúmulos de galaxias, grandes vacíos, etc.). Dichos modelos son exitosos para una descripción a gran escala, pero insuficientes para una descripción mas detallada que permita dar cuenta de la formación de estructura. Para abordar el problema de las inhomogeneidades, usualmente se añaden perturbaciones al modelo FLRW.

<sup>28</sup>La cual se incorpora a la teoría considerando la contribución adicional  $\rho_\Lambda = \Lambda$  a la densidad del Universo.

Para estudiar la formación de estructura, usualmente se incorporan pequeñas inhomogeneidades a la distribución de materia, las cuales inducen perturbaciones (inhomogeneidades geométricas) en la métrica en virtud de las ecuaciones de Einstein, (2.1). Aunque el espíritu de este trabajo se aleja de un tratamiento perturbativo, se incluye, por completez, un breve esbozo del tratamiento estándar de perturbaciones en cosmología estándar. Debido a la libertad que se tiene en relatividad general para escoger el sistema coordenado, es importante poder distinguir entre perturbaciones físicas y perturbaciones ficticias inducidas por cambios coordenados, i.e. es necesario encontrar variables que sean invariantes ante dicha elección. Así, se vuelve indispensable clasificar el tipo de perturbaciones que la métrica puede sufrir. La métrica de FLRW con perturbaciones pequeñas es

$$ds^2 = \left[ {}^{(0)}g_{ab} + \delta g_{ab}(x^\nu) \right] dx^a dx^b, \quad (2.10)$$

donde  $\delta g_{ab} \ll |{}^{(0)}g_{ab}|$  y  ${}^{(0)}g_{ab}$  es la métrica de FLRW (2.5). Las perturbaciones métricas pueden clasificarse en tres tipos [2]: escalares, vectoriales y tensoriales.

Las perturbaciones escalares son inducidas por inhomogeneidades en la densidad de energía, y son las más importantes en la formación de estructura. Las perturbaciones vectoriales tienen que ver con los movimientos rotacionales del fluido, mientras que las perturbaciones tensoriales describen ondas gravitacionales, que son grados de libertad del campo gravitacional mismo. Escribiendo la métrica para los distintos tipos de perturbaciones, se pueden obtener sus leyes de transformación bajo un cambio de coordenadas  $x^a \rightarrow \tilde{x}^a = x^a + \xi^a$ . Se pueden construir combinaciones lineales (simples) de funciones (escalares, vectoriales o tensoriales) que resulten invariantes ante cambios de coordenadas, las cuales permiten distinguir entre perturbaciones métricas ficticias y aquellas que son físicas.

Para derivar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las perturbaciones, se linealizan las ecuaciones de Einstein (2.1) entorno al FLRW. El tensor de Einstein se puede escribir entonces como  $G_{ab} = {}^{(0)}G_{ab} + \delta G_{ab} + \dots$ , donde  ${}^{(0)}G_{ab}$  es el tensor de Einstein en el FLRW, y  $\delta G_{ab}$  son los términos lineales en las inhomogeneidades métricas. El tensor de energía-momento se puede separar de una manera similar,  $T_{ab} = {}^{(0)}T_{ab} + \delta T_{ab}$ , de modo que las ecuaciones linealizadas para las perturbaciones, por (2.1), serían  $\delta G_{ab} = \delta T_{ab}$  (en unidades geométricas). Es importante destacar que ni  $\delta G_{ab}$  ni  $\delta T_{ab}$  son necesariamente invariantes ante transformaciones de coordenadas, no obstante, se pueden construir versiones invariantes  $\overline{\delta G}_a^b$  y  $\overline{\delta T}_a^b$  [2]. Así, las ecuaciones de Einstein linealizadas para las perturbaciones se pueden escribir de forma invariante como

$$\overline{\delta G}_a^b = \overline{\delta T}_a^b. \quad (2.11)$$

La finalidad aquí no es hacer un estudio exhaustivo de las perturbaciones en cosmología estándar, sino mostrar de una manera breve cómo se introducen dichas inhomogeneidades en fondo homogéneo e isotrópico. Para un estudio detallado puede verse, por ejemplo, [2]. Históricamente, la conveniencia del estudio de modelos cosmológicos inhomogéneos para un mejor entendimiento del Universo fue señalada, desde la década de los 30's, por Tolman [3]. Desde entonces, las cosmologías inhomogéneas han sido ampliamente estudiadas por su importancia y constituyen un

campo de investigación actualmente. En este capítulo se presenta, justamente, un modelo cosmológico inhomogéneo, no vacío, con dos grados locales de libertad (uno geométrico y uno material). En concreto, el modelo consiste en considerar primero el modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado, que es el modelo cosmológico inhomogéneo más simple que hay en vacío, para posteriormente incorporar inhomogeneidades materiales a dicho modelo, acoplándolo con materia escalar. Como se verá en la parte final de este capítulo, las inhomogeneidades (geométricas y materiales) de nuestro modelo pueden reinterpretarse como inhomogeneidades propagándose en un fondo tipo FLRW específico.

## 2.1. Modelo cosmológico de Gowdy $T^3$ polarizado

El modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  es un espacio-tiempo que posee un grupo de isometrías  $G_2$  actuando de manera diagonal sobre el grupo de órbitas (ver Apéndice C), i.e. se satisface la condición de polarización lineal<sup>29</sup> (de ahí el nombre del modelo), por lo que existe un sistema coordenado natural en el que la métrica puede ser escrita de manera diagonal [33].

Si los parámetros del grupo de isometrías son espaciales, las órbitas serán hipersuperficies tipo espacio y por lo tanto definen una métrica positiva definida sobre ellas. Una hipersuperficie bidimensional que posea un grupo de isometrías de dos parámetros debe ser un espacio de curvatura constante [37]. Sólo hay tres 2-espacios con curvatura constante: la 2-esfera, el espacio hiperbólico y el espacio plano [37] (salvo isomorfismos); sin embargo, sólo el espacio plano puede ser generado por las órbitas de un grupo de isometrías de dos parámetros tipo espacio, lo que descarta a la 2-esfera y al espacio hiperbólico. Puesto que las órbitas del grupo de isometrías se pueden considerar compactas [7], los posibles espacios son el 2-toro, la botella de Klein y el plano proyectivo [7] - dado que éstos son los únicos tres 2-espacios compactos e intrínsecamente planos -. Todos estos espacios tienen como cubierta finita al 2-toro, cuyo grupo de isometrías es  $SO(2) \times SO(2)$ . Como las órbitas del grupo de isometrías son compactas, no hay órbitas degeneradas [7], de manera que dos de las coordenadas tipo espacio pueden elegirse como las coordenadas naturales del grupo. Así, los parámetros del grupo  $SO(2) \times SO(2)$  los denotaremos por  $\sigma$  y  $\delta$ , que van de 0 a  $2\pi$ , de tal manera que  $(\partial/\partial\sigma)^a$  y  $(\partial/\partial\delta)^a$  son vectores de Killing. En términos de  $\sigma$  y  $\delta$ , los movimientos del grupo de isometrías corresponden a añadir constantes a estas coordenadas, por lo que las formas diferenciales  $d\sigma$  y  $d\delta$  son invariantes bajo la acción del grupo. La condición de polarización lineal permite relacionar la norma de los vectores de Killing, eliminando uno de los grados locales de libertad.

Para completar la construcción, falta determinar la métrica de la 2-superficie ortogonal a la 2-superficie generada por los Killing  $(\partial/\partial\sigma)^a$  y  $(\partial/\partial\delta)^a$  (i.e. determinada por las órbitas del grupo de isometrías). La métrica sobre dicha hipersuperficie debe tener signatura  $(-, +)$ , y cabe añadir que la parte espacial debe ser compacta, pues se considera el caso de un espacio-tiempo cuya parte espacial es compacta. Debido a que cualquier métrica bidimensional es conformemente plana, se pueden escoger coordenadas (isotérmicas<sup>30</sup>)  $t, \theta$ , de modo que la métrica sobre las 2-

<sup>29</sup>Es decir, que existen dos vectores de Killing ortogonales a la hipersuperficie cada uno, que conmutan entre si.

<sup>30</sup>El término "isotérmico" proviene del hecho de que en dicha métrica definida para una hipersuperficie tipo espacio (positiva definida), dichas coordenadas satisfacen la ecuación de Laplace, y por tanto sus curvas de nivel son curvas isotermas [37].

superficies tome la forma [37]  $ds^2 = b(t, \theta)(-dt^2 + d\theta^2)$ , donde  $b(t, \theta)$  debe ser positiva definida, por lo que se puede reescribir como  $ds^2 = e^{f(\theta, t)}(-dt^2 + d\theta^2)$ . La función métrica  $f$  no puede depender de las coordenadas  $\sigma$  y  $\delta$ , debido a que debe preservarse la invariancia de la métrica completa ante el grupo de isometrías  $G_2$ , lo que debe ocurrir para cualquier otro campo métrico. En general, la topología de superficies de Cauchy 3-D compactas<sup>31</sup>, e invariantes ante un grupo de biparamétrico de isometrías es limitada. De hecho, cualquiera de ellas debe ser homeomorfa a  $T^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $S^3$  o a un espacio de Lens [7]. De éstas, la única que no posee trayectorias degeneradas es el 3-toro [7], por lo que acorde a esto y a nuestra discusión previa, las superficies de Cauchy del modelo son 3-toros, por lo que la coordenada  $\theta$  toma valores entre 0 y  $2\pi$ . En suma, el elemento de línea del espacio-tiempo con superficies de Cauchy  $T^3$ , y vectores de Killing  $(\partial/\partial\sigma)^a$  y  $(\partial/\partial\delta)^a$  hipersuperficie-ortogonales, y que conmutan entre si es, en la denominada parametrización de Moncrief [40],

$$ds^2 = e^f(-dt^2 + d\theta^2) + t(e^\xi d\sigma^2 + e^{-\xi} d\delta^2), \quad (2.12)$$

donde los campos reducidos  $f$  y  $\xi$  dependen únicamente de  $t$  y  $\theta$ . La coordenada  $t \in \mathbb{R}^+$ , pues a “ $t = 0$ ” hay una singularidad inicial (el escalar de Kretschmann diverge conforme  $t \rightarrow 0$ ). La métrica (2.12) describe el modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  polarizado, que es el modelo cosmológico inhomogéneo más simple (en vacío) que existe, y que fue dado a conocer por R.H. Gowdy en los 70 [7, 6].

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero, para (2.12), son

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{00}^0 &= 2\Gamma_{11}^0 = 2\Gamma_{01}^1 = f_{,0} & 2\Gamma_{00}^1 &= 2\Gamma_{11}^1 = 2\Gamma_{01}^0 = f_{,1} & (2.13) \\ 2\Gamma_{22}^0 &= e^{-f+\xi}(1+t\xi_{,0}) & 2\Gamma_{33}^0 &= e^{-f-\xi}(1-t\xi_{,0}) & 2\Gamma_{22}^1 &= -e^{-f+\xi}t\xi_{,1} & 2\Gamma_{33}^1 &= e^{-f-\xi}t\xi_{,1} \\ 2\Gamma_{02}^2 &= t^{-1}(1+t\xi_{,0}) & 2\Gamma_{03}^3 &= t^{-1}(1-t\xi_{,0}) & 2\Gamma_{12}^2 &= \xi_{,1} & 2\Gamma_{13}^3 &= -\xi_{,1} \end{aligned}$$

donde los índices numéricos (0, 1, 2, 3) corresponden respectivamente a  $(t, \theta, \sigma, \delta)$ , y donde  $_{,0}$  y  $_{,1}$  denotan las derivadas parciales respecto a  $t$  y  $\theta$ . Las componentes estrictamente diferentes de cero del tensor de Ricci son cinco,

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{t^2} - (\xi_{,0})^2 + \frac{f_{,0}}{t} + f_{,11} - f_{,00} \right\}, \quad (2.14)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_{,0}}{t} + f_{,00} - (\xi_{,1})^2 - f_{,11} \right\}, \quad (2.15)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2} e^{\xi-f} \{ \xi_{,0} + t(\xi_{,00} - \xi_{,11}) \}, \quad (2.16)$$

$$R_{33} = -\frac{1}{2} e^{-(f+\xi)} \{ \xi_{,0} + t(\xi_{,00} - \xi_{,11}) \}, \quad (2.17)$$

$$R_{01} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_{,1}}{t} - \xi_{,0}\xi_{,1} \right\}. \quad (2.18)$$

En vacío, las ecuaciones de campo de Einstein ( $R_{ab} = 0$ ) no triviales se pueden reescribir como

$$2f_{,0} = t [(\xi_{,0})^2 + (\xi_{,1})^2] - \frac{1}{t}, \quad (2.19)$$

<sup>31</sup>En el caso no compacto, se tienen las cosmologías de Einstein-Rosen-Bondi, donde el grupo de isometrías  $G_2$  es  $\mathbb{R} \times \mathbb{U}(1)$  [38, 39].

$$f_{,1} = t\xi_{,0}\xi_{,1} \quad , \quad (2.20)$$

$$\xi_{,11} - \xi_{,00} - \frac{1}{t}\xi_{,0} = 0 \quad . \quad (2.21)$$

Las ecuaciones (2.19)-(2.21) son las ecuaciones de campo reducidas que definen al midisuperespacio. Nótese que el único campo métrico independiente es  $\xi$ , pues  $f$  se obtiene por cuadraturas (ecs. (2.19)-(2.20)). Este hecho significa que existe una restricción en el modelo reducido. Tal restricción es global y genera traslaciones en  $\theta$ ,  $T_\alpha : \theta \mapsto \theta + \alpha$ ,  $\forall \alpha \in S^1$ . En efecto, dada una solución genérica a la ecuación (2.21),  $\xi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n h_n(\theta, t) + \overline{a_n h_n(\theta, t)}) \in \mathcal{S}$ , se integra la ecuación (2.20) y por periodicidad en  $\theta$ ,  $f(t, 0) = f(t, 2\pi)$ , se sigue que la restricción está dada por

$$C = \int_0^{2\pi} dx' f_{,1}(x', t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 = 0, \quad (2.22)$$

que efectivamente genera traslaciones en  $\theta$  (ver, por ejemplo, [41]).

Una pregunta natural es si las inhomogeneidades del modelo se propagan o no en algún espacio-tiempo tipo FLRW. Para hallar la respuesta, es necesario explorar primero<sup>32</sup> el sector homogéneo del sistema<sup>33</sup>. Las ecuaciones para el sector homogéneo son

$$\xi_{h,00} + \frac{1}{t}\xi_{h,0} = 0, \quad (2.23)$$

$$2f_{h,0} = t(\xi_{h,0})^2 - \frac{1}{t}. \quad (2.24)$$

donde  $\xi_h(t)$  y  $f_h(t)$  son las componentes homogéneas.

La ecuación (2.23) se puede reescribir trivialmente como una ecuación de Bessel de orden cero, cuya solución es la ecuación (2.25). Dada (2.25), la solución de la ecuación (2.24) viene dada por la ecuación (2.26),

$$\xi_h(t) = A \ln t + B_1, \quad (2.25)$$

$$f_h(t) = \frac{A^2 - 1}{2} \ln t + B_2, \quad (2.26)$$

donde  $A$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son constantes. La métrica (2.12) para el sector homogéneo queda entonces como sigue,

$$ds^2 = e^{B_2} t^{\frac{A^2-1}{2}} (-dt^2 + d\theta^2) + e^{B_1} t^{1+A} d\sigma^2 + e^{-B_1} t^{1-A} d\delta^2. \quad (2.27)$$

Considerando el cambio de variable temporal  $dt' = e^{\frac{B_2}{2}} t^{\frac{A^2-1}{4}} dt$ , la métrica (2.27) se puede escribir como

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dt'^2 + e^{B_2} \left( \frac{A^2 + 3}{4} e^{-\frac{B_2}{2}} t' \right)^{2\frac{A^2-1}{A^2+3}} d\theta^2 \\ & + e^{B_1} \left( \frac{A^2 + 3}{4} e^{-\frac{B_2}{2}} t' \right)^{2\frac{2(1+A)}{A^2+3}} d\sigma^2 + e^{-B_1} \left( \frac{A^2 + 3}{4} e^{-\frac{B_2}{2}} t' \right)^{2\frac{2(1-A)}{A^2+3}} d\delta^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

<sup>32</sup>Posteriormente se analizará si las soluciones homogéneas son isotrópicas o no.

<sup>33</sup>Las componentes de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  se separan en una parte estrictamente homogénea  $g_h$  que depende exclusivamente de la coordenada temporal, así como de una parte estrictamente no homogénea,  $\check{g}$  que depende tanto de  $t$  como de las coordenadas espaciales, de modo que  $g(t, x^i) = g_h(t) + \check{g}(t, x^i)$ ,  $i=1,2,3$ .

Reescalando  $\theta$ ,  $\sigma$  y  $\delta$  en la expresión anterior, quitando las primas, y definiendo

$$p_1 = \frac{A^2 - 1}{A^2 + 3}, \quad p_2 = 2\frac{1 + A}{3 + A^2}, \quad p_3 = 2\frac{1 - A}{3 + A^2}, \quad (2.29)$$

la métrica (2.28) - del sector homogéneo - toma finalmente la forma

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} d\theta^2 + t^{2p_2} d\sigma^2 + t^{2p_3} d\delta^2, \quad (2.30)$$

que es la métrica genérica de un modelo cosmológico de Bianchi I autosimilar (ver Apéndice C). En este caso, (2.29) son exponentes de Kasner y por tanto el sector homogéneo de Gowdy  $T^3$  viene dado por una familia uniparamétrica (parametrizada por la constante  $A \in \mathbb{R}$ ) de espacio-tiempos vacíos de Kasner (ver Apéndice C).

Este espacio anisotrópico, en ningún caso se reduce a un FLRW (i.e.  $\nexists$  el caso  $p_1 = p_2 = p_3$ ). Como se verá en la siguiente sección, para conseguir un modelo donde las inhomogeneidades se propaguen efectivamente en un FLRW (y compatibilizar nuestro modelo con el tratamiento estándar de inhomogeneidades) se acopla el Gowdy  $T^3$  a materia escalar. El modelo resultante, es el modelo cosmológico que constituye el objeto de estudio de este trabajo.

## 2.2. Modelo cosmológico tipo Gowdy $T^3$ polarizado acoplado con materia escalar no masiva

El modelo que se considera en este trabajo consiste en acoplar el Gowdy  $T^3$  con materia escalar. La acción del grupo de isometrías es la misma que la descrita en la sección anterior y consideraremos la misma norma para el elemento de línea, i.e., (2.12). Las componentes estrictamente diferentes de cero del tensor de Einstein, construido a partir del tensor de Ricci (2.14)-(2.18), son

$$G_{00} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} f_{,0} - (\xi_{,0})^2 - (\xi_{,1})^2 \right\}, \quad (2.31)$$

$$G_{11} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} f_{,0} - (\xi_{,0})^2 - (\xi_{,1})^2 \right\}, \quad (2.32)$$

$$G_{22} = \frac{1}{4} e^{\xi-f} \left\{ \frac{1}{t} + 2\xi_{,0} + t \left[ (\xi_{,1})^2 - (\xi_{,0})^2 + 2(\xi_{,00} - \xi_{,11} + f_{,11} - f_{,00}) \right] \right\}, \quad (2.33)$$

$$G_{33} = \frac{1}{4} e^{-(\xi+f)} \left\{ \frac{1}{t} - 2\xi_{,0} + t \left[ (\xi_{,1})^2 - (\xi_{,0})^2 + 2(\xi_{,11} - \xi_{,00} + f_{,11} - f_{,00}) \right] \right\}, \quad (2.34)$$

$$G_{01} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_{,1}}{t} - \xi_{,0}\xi_{,1} \right\}. \quad (2.35)$$

El tensor de energía-momento que se considera es el que corresponde a (2.4), con  $m = 0$  y para la métrica (2.12). Las componentes explícitas de  $T_{ab}$  son entonces las siguientes,

$$\begin{aligned} T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2} \left[ (\phi_{,0})^2 + (\phi_{,1})^2 \right], & T_{22} &= \frac{1}{2} t e^{\xi-f} \left[ (\phi_{,0})^2 - (\phi_{,1})^2 \right], \\ T_{33} &= \frac{1}{2} t e^{-(\xi+f)} \left[ (\phi_{,0})^2 - (\phi_{,1})^2 \right], & T_{\alpha\beta} &= \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \quad (\alpha \neq \beta). \end{aligned} \quad (2.36)$$

De que salvo  $G_{01}$  todas las componentes no diagonales del tensor de Einstein son idénticamente nulas, se sigue que el campo escalar es un invariante ante el grupo abeliano  $G_2$  de isometrías, i.e.  $\phi = \phi(t, \theta)$ . El resto de las ecuaciones de Einstein son:

$$2f_{,0} = t [2(\phi_{,0})^2 + 2(\phi_{,1})^2 + (\xi_{,0})^2 + (\xi_{,1})^2] - \frac{1}{t}, \quad (2.37)$$

$$f_{,1} = t(2\phi_{,0}\phi_{,1} + \xi_{,0}\xi_{,1}), \quad (2.38)$$

$$\xi_{,11} - \xi_{,00} - \frac{1}{t}\xi_{,0} = 0. \quad (2.39)$$

Adicionalmente, se tiene la ecuación para la materia<sup>34</sup>, que no es mas que la ecuación de Klein-Gordon (1.26) en el fondo (2.12),

$$\phi_{,11} - \phi_{,00} - \frac{1}{t}\phi_{,0} = 0. \quad (2.40)$$

Nótese que tanto el campo métrico  $\xi$  como el campo de materia  $\phi$  satisfacen, ambos, exactamente la misma ecuación diferencial. También obsérvese que la ecuación (2.39) para el campo métrico  $\xi$  es la misma que en el modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado (i.e. en vacío); cf. (2.21). De las ecuaciones de campo reducidas (2.37) - (2.40), se sigue nuevamente que  $f$  no es independiente (i.e. se obtiene por cuadraturas si se conocen  $\phi$  y  $\xi$ ), y también que el sistema continúa siendo invariante ante las traslaciones  $T_\alpha : \theta \mapsto \theta + \alpha, \forall \alpha \in S^1$ . Como anteriormente, la no independencia de  $f$  implica la existencia de una restricción global remanente en el modelo reducido; dadas las soluciones genéricas a (2.39) y (2.40),  $\xi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n h_n(\theta, t) + \overline{a_n h_n(\theta, t)}) \in \mathcal{S}$  y  $\phi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n h_n(\theta, t) + \overline{b_n h_n(\theta, t)}) \in \mathcal{S}$  respectivamente, integrando (2.38) y por periodicidad de  $f$ ,  $f(t, 0) = f(t, 2\pi)$ , se obtiene que la restricción esta dada por

$$C_0 = \int_0^{2\pi} dx' f_{,1}(x', t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n (|a_n|^2 + 2|b_n|^2) = 0 \quad (2.41)$$

El modelo, pues, consta de dos grados locales de libertad, uno geométrico ( $\xi$ ) y otro material ( $\phi$ ), así como de una restricción global  $C_0$ . Las ecuaciones de campo reducidas, restringidas al sector homogéneo, son

$$2f_{h,0} = t [2(\phi_{h,0})^2 + (\xi_{h,0})^2] - \frac{1}{t} \quad (2.42)$$

$$\xi_{h,00} + \frac{1}{t}\xi_{h,0} = 0 \quad (2.43)$$

$$\phi_{h,00} + \frac{1}{t}\phi_{h,0} = 0. \quad (2.44)$$

Las soluciones a las ecuaciones (2.43) y (2.44) tienen la misma estructura y son, respectivamente,

$$\xi_h(t) = A \ln t, \quad \phi_h(t) = B \ln t, \quad (2.45)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes<sup>35</sup>. Mediante las ecuaciones (2.45), se puede resolver fácilmente la ecuación (2.42), cuya solución viene dada por

$$f_h(t) = C \ln t, \quad (2.46)$$

<sup>34</sup>La ecuación para la materia proviene de variar la acción de materia respecto a los campos materiales.

<sup>35</sup>Aunque formalmente la solución general de las ecuaciones (2.43) y (2.44) es  $a \ln t + c$ , con  $a$  y  $c$  constantes, dicha solución siempre se puede escribir como (2.45) ya que  $\forall c \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $c = a \ln k$ , además de que las ecuaciones de campo reducidas son invariantes bajo el reescalamiento temporal  $t \mapsto kt$ .

donde  $C = \frac{1}{2}(A^2 + 2B^2 - 1)$ . Por consiguiente, la métrica del sector homogéneo toma la forma

$$ds^2 = t^C(-dt^2 + d\theta^2) + t^{1+A}d\sigma^2 + t^{1-A}d\delta^2. \quad (2.47)$$

Nuevamente, bajo el cambio de variable  $dt'^2 = t^C dt^2$  y después de un reescalamiento adecuado de la parte espacial, esta métrica se puede escribir nuevamente como aquella de un modelo tipo Bianchi I autosimilar, (2.30), donde ahora

$$p_1 = \frac{C}{C+2}, \quad p_2 = \frac{1+A}{C+2}, \quad p_3 = \frac{1-A}{C+2}. \quad (2.48)$$

Obsérvese que los exponentes (2.48) satisfacen  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  siempre, y  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 < 1$  cuando  $A^2 < 2C + 1$ , y esto ocurre siempre que  $B \neq 0$  (i.e. siempre que el sector homogéneo sea no vacío). Como nota al margen, cabe mencionar que los exponentes (2.48) son una solución de Jacobs para fluido perfecto rígido (ver Apéndice C).

Como caso particular, se tiene un espacio-tiempo plano tipo FLRW para los exponentes (2.48). En efecto, la condición  $p_1 = p_2 = p_3$  tiene solución, y esta es  $A = 0$ ,  $B = \sqrt{\frac{3}{2}}$  y  $C = 1$ . La solución homogénea particular que corresponde a un FLRW es, entonces,

$$\xi_h(t) = 0, \quad \phi_h(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln t, \quad f_h(t) = \ln t. \quad (2.49)$$

La métrica tipo FLRW del sector homogéneo queda entonces como

$$ds^2 = t(-dt^2 + d\theta^2 + d\sigma^2 + d\delta^2), \quad (2.50)$$

en tiempo conforme  $t$ . Así pues, se tiene que existe un sector homogéneo fs grados locales de libertad del modelo, se pueden interpretar como un tipo particular de inhomogeneidades (geométricas y materiales) propagándose en dicho fondo FLRW.

La métrica completa del modelo (i.e., que incorpora las inhomogeneidades), es por tanto

$$ds^2 = t \left[ e^{\check{f}} (-dt^2 + d\theta^2) + e^{\check{\xi}} d\sigma^2 + e^{-\check{\xi}} d\delta^2 \right], \quad (2.51)$$

donde  $\check{f} = \check{f}(t, \theta)$  y  $\check{\xi} = \check{\xi}(t, \theta)$  son la parte estrictamente inhomogénea de los campos  $f$  y  $\xi$ . Evidentemente,  $\check{\xi}$  y  $\check{f}$  satisfacen las ecuaciones (2.39) y (2.40); que son en realidad la misma ecuación. El campo dependiente  $f$ , como se ha mencionado en reiteradas ocasiones, se obtiene de las ecuaciones (2.37) y (2.38), por lo que una vez que se encuentra  $f$ , la parte estrictamente inhomogénea se obtiene según la relación  $\check{f} = f - \ln t$ . Ahora es mas transparente la interpretación que se adelantaba: si se “apaga” la parte inhomogénea, i.e. si  $\check{f} = \check{\xi} = 0$ , se recupera inmediatamente (2.50), que es un fondo tipo FLRW (específico) acoplado con materia escalar homogénea ( $\check{\phi} = 0$ ). Así, (2.51) y  $\check{\phi} \neq 0$  corresponden a inhomogeneidades (unidimensionales) introducidas en el citado FLRW.

Para simplificar notación, a partir de este momento se omitirá el símbolo “ $\check{\phantom{x}}$ ” para referirse a las partes estrictamente inhomogéneas de los grados independientes de libertad, que representan el sector en el cual se concentrará el análisis. La parte homogénea de los campos independientes,  $\{\xi_h, \phi_h\}$ , corresponde a un sistema con un número finito de grados de libertad, por lo que su cuantización se lleva a cabo en forma estándar (i.e, empleando las técnicas de

mecánica cuántica ordinaria). No es difícil verificar que el sistema homogéneo puede interpretarse como el de dos osciladores desacoplados, ambos con frecuencia  $\omega = 1/(2t)$ . El Hilbert es  $\mathcal{H}_0 = L^2(d^2q, \mathbb{R}^2)$ .

Los grados locales de libertad  $\phi$  y  $\xi$  satisfacen la ecuación genérica

$$\chi_{,00} + \frac{1}{t}\chi_{,0} - \chi_{,11} = 0, \quad (2.52)$$

que es simplemente la ecuación para un campo de Klein-Gordon axi-simétrico no masivo  $\chi(t, \theta)$ , propagándose en el fondo<sup>36</sup> FLRW (2.50). El problema de la cuantización de inhomogeneidades en el modelo corresponde entonces, en forma efectiva, a cuantizar  $\chi$  en el fondo (2.50). Nótese que la ec.(2.52) puede interpretarse también como la de un campo escalar axi-simétrico propagándose en un fondo ficticio  $ds^2 = -dt^2 + d\theta^2 + t^2d\sigma^2$ ; de hecho, este fondo ficticio fue introducido por M. Pierri [42] en el contexto del modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado, para el único grado local de libertad que hay ahí.

En el siguiente capítulo, se abordará la cuantización a la Fock de las inhomogeneidades unidimensionales (geométricas y de materia) que se propagan en el FLRW (2.50) [i.e., la cuantización a la Fock de  $\chi$  en el fondo (2.50)]. Si  $\mathcal{F}_{(\xi)}$  y  $\mathcal{F}_{(\phi)}$  denotan, respectivamente, los espacios de Hilbert de la teoría cuántica de las inhomogeneidades métrica  $\xi$  y de materia  $\phi$ , entonces el Hilbert cinemático -es decir, sin imponer la restricción global  $C_0$  (2.41) a nivel cuántico- es  $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{F}_{(\xi)} \otimes \mathcal{F}_{(\phi)}$ . Se atacará el problema de la ambigüedad en la cuantización (tanto en la representación de las RCC como en la elección de variables fundamentales) y se obtendrá una cuantización que es *única*, resultado que (cabe señalar) es altamente no trivial.

---

<sup>36</sup>La ecuación que obedece un campo escalar  $\psi$  propagándose en un espacio-tiempo tipo FLRW, plano y  $(n+1)$ -dimensional,  $ds^2 = a^2(-dt^2 + \sum_{j=1}^n dx_j^2)$ , es

$$\ddot{\psi} + (n-1)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} - \Delta\psi + m^2\psi = 0.$$

Así, en el FLRW que se tiene (i.e.,  $(3+1)$  con  $a = \sqrt{t}$ ) un campo no masivo y axi-simétrico satisface efectivamente (2.52).

## Capítulo 3

# Sobre la Unitariedad y Unicidad de la Cuantización a la Fock del Modelo

*Everything should be made as simple as possible, but not one bit simpler.*

*A. Einstein*

---

En el capítulo anterior se vió que los grados locales de libertad del modelo tipo Gowdy  $T^3$  polarizado acoplado con materia escalar no masiva, pueden interpretarse como inhomogeneidades (unidimensionales) propagándose en el fondo FLRW (2.50). Así, el problema de la cuantización de los grados locales de libertad se reduce, en forma efectiva, al problema de cuantizar un campo escalar axi-simétrico no masivo  $\chi$  en el fondo (2.50), cuya dinámica es dictada por la ecuación (2.52). Este capítulo está enteramente dedicado a especificar una cuantización a la Fock para  $\chi$  que sea, además de consistente, *única*. Con ello se obtendrá una descripción cuántica de las inhomogeneidades para el modelo en cuestión, que adicionalmente puede servir como guía para sortear problemas de consistencia y unicidad en otros modelos cosmológicos inhomogéneos.

### 3.1. Cuantización a la Fock: primer propuesta

El sistema a cuantizar consiste, entonces, de un campo escalar no masivo, axisimétrico  $\chi(t, \theta)$ , propagándose en el fondo FLRW plano (2.50),  $ds^2 = t(-dt^2 + d\theta^2 + d\sigma^2 + d\delta^2)$ , con dinámica dictada por (2.52)

$$\chi_{,00} + \frac{1}{t}\chi_{,0} - \chi_{,11} = 0. \quad (3.1)$$

De manera que el sistema continúa siendo invariante ante traslaciones constantes en  $\theta$ ,  $T_\alpha : \theta \mapsto \theta + \alpha$ ,  $\forall \alpha \in S^1$ . La ecuación (3.1) es separable, y tiene (en el sector estrictamente inhomogéneo) como solución funciones de Hankel

de orden cero (y especie dos<sup>37</sup>) en la variable  $t$  y exponenciales complejas en la variable espacial  $\theta$ ; es decir, las soluciones genéricas pueden expresarse como

$$\chi(t, \theta) = \sum_{n \neq 0} \left\{ a_n H_0(|n|t) e^{in\theta} + \overline{a_n} \overline{H_0(|n|t)} e^{-in\theta} \right\}, \quad (3.2)$$

donde  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  son coeficientes de Fourier constantes y la barra denota conjugación compleja. La estructura compleja<sup>38</sup>  $J : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  asociada a la separación del campo (3.2) es

$$J(h_n) = ih_n, \quad J(\overline{h_n}) = -i\overline{h_n}; \quad h_n(t, \theta) = H_0(|n|t) e^{in\theta} \quad (3.3)$$

Es decir, la parte de frecuencias positivas y negativas son, respectivamente, las siguientes:

$$\chi^+ = \sum_{n \neq 0} a_n h_n(t, \theta), \quad \chi^- = \sum_{n \neq 0} \overline{a_n} \overline{h_n(t, \theta)}.$$

Recuérdese que la estructura simpléctica canónica en  $\mathcal{S}$  está dada por la ecuación (1.33); para el caso específico que aquí se trata,  $\sqrt{h} = t^{3/2}$  y  $n^b \nabla_b \chi = (1/\sqrt{t}) \partial_t \chi$ , por lo que  $\sqrt{h} n^b \nabla_b \chi = t \partial_t \chi$  y por tanto

$$\Omega(\chi_1, \chi_2) = 4\pi^2 \oint d\theta t (\chi_2 \partial_t \chi_1 - \chi_1 \partial_t \chi_2), \quad (3.4)$$

donde el factor  $4\pi^2 = \int d\sigma d\delta$  proviene del hecho de que  $\chi$  es axial. No es difícil comprobar que la estructura compleja (3.3) es compatible con la estructura simpléctica (3.4), por lo que define un buen producto interno para construir el Hilbert de una partícula de acuerdo a la prescripción del Capítulo 1. Adicionalmente, nótese que la estructura compleja es invariante  $S^1$ , por lo que proveerá una cuantización a la Fock  $S^1$ -invariante. En efecto, la simetría  $S^1$  significa que  $\chi(t, \theta) = \chi'(t, T_\alpha \theta)$ , donde  $\chi' = \mathcal{T}_\alpha \chi$  denota la transformación del campo  $\chi$  inducida en  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{T}_\alpha$ , por la traslación  $T_\alpha$ . Así, se sigue que  $\mathcal{T}_\alpha \chi(t, \theta) = \chi(t, T_\alpha^{-1} \theta)$  y por consiguiente que  $\mathcal{T}_\alpha h_n(t, \theta) = \exp(-in\alpha) h_n(t, \theta)$ , que es fácil verificar corresponde un simplectomorfismo. Un cálculo sencillo muestra que  $J$  conmuta con  $\mathcal{T}_\alpha$ ; es decir,  $J = \mathcal{T}_\alpha^{-1} J \mathcal{T}_\alpha$  [i.e.,  $J$  es invariante ante  $\mathcal{T}_\alpha$ ] y por tanto la cuantización a la Fock asociada a  $J$  es  $S^1$ -invariante. El Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_J$  (a partir del cual se construye el espacio de Fock de la teoría  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_J)$ -ver Sección 1.3-) es evidentemente invariante ante  $\mathcal{T}_\alpha$ , así como los operadores de aniquilación y creación del espacio de Fock  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_J)$ ,  $\hat{\mathcal{A}}(\bar{\chi}) = \hat{\Omega}(J\bar{\chi}, \cdot)$  y  $\hat{\mathcal{C}}(\chi) = \hat{\Omega}(J\chi, \cdot)$  [c.f. Ec. (1.44)].

En términos de los generadores del álgebra de Weyl,  $\widehat{W}(\chi)$ , un simplectomorfismo  $\mathcal{R} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  induce un automorfismo  $A_{\mathcal{R}} \cdot \widehat{W}(\chi) \mapsto \widehat{W}(\mathcal{R}\chi)$  en el álgebra. En la representación de espacio de Hilbert de la teoría,  $\mathcal{F}_J$ , el automorfismo  $A_{\mathcal{R}}$  corresponde al mapeo  $A_{\mathcal{R}} \cdot \widehat{W}(\chi) = \widehat{R}^{-1} \widehat{W}(\chi) \widehat{R}$ , donde  $\widehat{R} : \mathcal{F}_J \rightarrow \mathcal{F}_J$  es la contraparte cuántica de  $\mathcal{R}$  en el espacio de Fock. Así, asociado a la transformación simpléctica  $\mathcal{T}_\alpha$ , se tiene el mapeo  $A_{\mathcal{T}} \cdot \widehat{W}(\chi) = \widehat{T}_\alpha^{-1} \widehat{W}(\chi) \widehat{T}_\alpha$ , con  $\widehat{T}_\alpha$  la contraparte cuántica de  $\mathcal{T}_\alpha$ . Del hecho de que las representaciones a la Fock corresponden

<sup>37</sup>La función de Hankel de orden cero y especie dos,  $H_0^{(2)}$ , la denotaremos simplemente por  $H_0$ . Recuérdese que  $H_0^{(2)} = J_0 - iN_0$ , donde  $J_0$  y  $N_0$  son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda (Neumann) especie, respectivamente [43].

<sup>38</sup>En adelante denotaremos por  $\mathcal{S}$  al espacio de soluciones suaves del sector estrictamente inhomogéneo.

a estados algebraicos cuasilibres<sup>39</sup>, y de la invariancia de la estructura compleja  $J$  respecto a  $\mathcal{T}_\alpha$ , se sigue que  $\langle A_{\mathcal{T}} \cdot \widehat{W}(\chi) \rangle$  coincide con  $\langle \widehat{W}(\chi) \rangle$ , donde las expectativas son en el vacío de  $\mathcal{F}_J$ . En efecto,

$$\langle A_{\mathcal{T}} \cdot \widehat{W}(\chi) \rangle = \langle \widehat{W}(\mathcal{T}_\alpha \chi) \rangle = e^{-\frac{1}{4}\Omega(J\mathcal{T}_\alpha \chi, \mathcal{T}_\alpha \chi)},$$

pero  $\Omega(J\mathcal{T}_\alpha \chi, \mathcal{T}_\alpha \chi) = \Omega(\mathcal{T}_\alpha^{-1} J \mathcal{T}_\alpha \chi, \chi)$ , pues  $\mathcal{T}_\alpha$  (y por tanto  $\mathcal{T}_\alpha^{-1}$ ) es un simplectomorfismo. Dado que  $J$  es invariante, entonces  $\Omega(\mathcal{T}_\alpha^{-1} J \mathcal{T}_\alpha \chi, \chi) = \Omega(J\chi, \chi)$ ; es decir,  $\Omega(J\mathcal{T}_\alpha \chi, \mathcal{T}_\alpha \chi) = \Omega(J\chi, \chi)$ . Como  $\langle \widehat{W}(\chi) \rangle = \exp(-\Omega(J\chi, \chi)/4)$ , entonces se sigue que

$$\langle A_{\mathcal{T}} \cdot \widehat{W}(\chi) \rangle = \langle \widehat{W}(\chi) \rangle.$$

Esta última relación significa que la contraparte cuántica de  $\mathcal{T}_\alpha$ ,  $\widehat{T}_\alpha$ , es un operador unitario. En suma, (i) la representación de Fock asociada a la estructura compleja (3.3) es  $S^1$ -invariante y (ii) la transformación simpléctica  $\mathcal{T}_\alpha$  de traslaciones  $S^1$ , es unitariamente implementada en  $\mathcal{F}_J$ .

En el espacio de Fock de la teoría cuántica,  $\mathcal{F}_J$ , construido a partir de  $\mathcal{S}^+ = \{\chi^+\}$ , el operador de campo se escribe formalmente como

$$\widehat{\chi}(t, \theta) = \sum_{n \neq 0} \left\{ \widehat{a}_n h_n(t, \theta) + \widehat{a}_n^\dagger \overline{h_n(t, \theta)} \right\}, \quad (3.5)$$

donde  $\widehat{a}_n$  y  $\widehat{a}_n^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente. La implementación de la evolución temporal corresponde a una transformación de Bogolyubov,  $\widehat{a}_n(t) = \alpha_n(t)\widehat{a}_n + \beta_n(t)\widehat{a}_n^\dagger$ , que a continuación se determinará. En particular, es importante dilucidar si la evolución es o no unitaria (i.e., si la parte antilineal  $\beta_n$  es o no de cuadrado sumable). En caso de no ser unitariamente implementable la dinámica, esta cuantización será descartada, pues no habría cuadro de Schrödinger ni conservación de la probabilidad.

### 3.1.1. Evolución temporal e implementabilidad

Para determinar la evolución del sistema, entre un tiempo inicial  $t_i$  y un tiempo final  $t_f$ , se seguirá la prescripción dada en la sección 1.2.1 en el espacio  $\mathcal{S}$ . Es decir, se considera una solución de la ecuación, se hallan los datos de Cauchy inducidos a  $t = t_f$ , se consideran éstos como datos iniciales a  $t = t_i$ , y se especifica entonces la solución correspondiente a estos datos.

Sea  $\chi(t, \theta) \in \mathcal{S}$  la solución cuyos datos de Cauchy a  $t_f$  son  $[\varphi^{(f)}, \pi^{(f)}]$ ,

$$\varphi^{(f)} = \chi(t_f, \theta) = \sum_{n \neq 0} \left\{ a_n H_0(|n|t_f) e^{in\theta} + \overline{a_n} \overline{H_0(|n|t_f)} e^{-in\theta} \right\}, \quad (3.6)$$

$$\pi^{(f)} = [t\partial_t \chi(t, \theta)]_{t=t_f} = - \sum_{n \neq 0} |n|t_f \left\{ a_n H_1(|n|t_f) e^{in\theta} + \overline{a_n} \overline{H_1(|n|t_f)} e^{-in\theta} \right\}, \quad (3.7)$$

<sup>39</sup>Un estado algebraico es una funcional lineal positiva  $\omega$  sobre el álgebra de Weyl en los complejos. El valor de  $\omega$  sobre los elementos  $a$  del álgebra define la expectativa de  $a$  en el vacío de Fock;  $\omega[a] = \langle a \rangle$  (i.e., asociado a  $\omega$  hay una cuantización a la Fock y viceversa). Un estado algebraico  $\omega$  es cuasilibre si éste es de la forma  $\omega[\widehat{W}(\chi)] = \exp(-\Omega(J\chi, \chi)/4)$ .

donde  $H_1$  es la función de Hankel de orden uno y especie dos<sup>40</sup>. Según la prescripción, la solución evolucionada,  $\tilde{\chi}$ , debe tener como datos de Cauchy a  $[\varphi^{(f)}, \pi^{(f)}]$ , pero en la superficie de Cauchy  $t = t_i$ . De manera genérica, los datos de Cauchy para  $\tilde{\chi}$  en la superficie  $t = t_i$  están dados por

$$\varphi^{(i)} = \sum_{n \neq 0} \left\{ \widetilde{a}_n H_0(|n|t_i) e^{in\theta} + \overline{\widetilde{a}_n H_0(|n|t_i)} e^{-in\theta} \right\}, \quad (3.8)$$

$$\pi^{(i)} = - \sum_{n \neq 0} |n|t_i \left\{ \widetilde{a}_n H_1(|n|t_i) e^{in\theta} + \overline{\widetilde{a}_n H_1(|n|t_i)} e^{-in\theta} \right\}. \quad (3.9)$$

De la condición de igualdad (1.39) de la prescripción, y de la ortogonalidad  $\oint \exp[i(m-n)\theta] d\theta = 2\pi\delta_{m,n}$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\widetilde{a}_m H_0(|m|t_i) + \overline{\widetilde{a}_{-m} H_0(|m|t_i)} = a_m H_0(|m|t_f) + \overline{a_{-m} H_0(|m|t_f)}, \quad (3.10)$$

$$\widetilde{a}_m H_1(|m|t_i) + \overline{\widetilde{a}_{-m} H_1(|m|t_i)} = \left( \frac{t_f}{t_i} \right) \left[ a_m H_1(|m|t_f) + \overline{a_{-m} H_1(|m|t_f)} \right]. \quad (3.11)$$

Para simplificar notación, los coeficientes  $\widetilde{a}_m$  -por tratarse de los coeficientes de la solución evolucionada- serán denotados por  $a_m^{(f)}$ , mientras que los coeficientes de la solución inicial continuarán siendo denotados simplemente por  $a_m$ . Multiplicando las ecuaciones (3.10) y (3.11) por  $\overline{H_1(|m|t_i)}$  y  $\overline{H_0(|m|t_i)}$  respectivamente, y utilizando la relación  $(\overline{H_0(x)}H_1(x) - \overline{H_1(x)}H_0(x)) = 4i/(\pi x)$ , se obtiene al tomar la diferencia que  $a_m^{(f)}$  está dada por

$$\begin{aligned} a_m^{(f)} &= \frac{i\pi|m|}{4} \left[ t_i H_0(|m|t_f) \overline{H_1(|m|t_i)} - t_f H_1(|m|t_f) \overline{H_0(|m|t_i)} \right] a_m \\ &\quad + \frac{i\pi|m|}{4} \left[ t_i \overline{H_0(|m|t_f)} H_1(|m|t_i) - t_f \overline{H_1(|m|t_f)} H_0(|m|t_i) \right] \overline{a_{-m}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La evolución es pues dictada por la transformación (3.12), que corresponde a una transformación de Bogolyubov  $a_m^{(f)} = \alpha_m a_m + \beta_m \overline{a_{-m}}$ , cuyos coeficientes son dependientes del tiempo inicial y final [i.e.,  $\alpha_n = \alpha_n(t_i, t_f)$  y  $\beta_n = \beta_n(t_i, t_f)$ ] dados explícitamente por

$$\alpha_m = \frac{i\pi|m|}{4} \left[ t_i H_0(|m|t_f) \overline{H_1(|m|t_i)} - t_f H_1(|m|t_f) \overline{H_0(|m|t_i)} \right], \quad (3.13)$$

$$\beta_m = \frac{i\pi|m|}{4} \left[ t_i \overline{H_0(|m|t_f)} H_1(|m|t_i) - t_f \overline{H_1(|m|t_f)} H_0(|m|t_i) \right]. \quad (3.14)$$

y que satisfacen que  $|\alpha_m|^2 - |\beta_m|^2 = 1$  para toda  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  y toda  $t_i, t_f \in \mathbb{R}^+$ . Evidentemente, para  $t_f = t_i$   $\alpha_m = 1$  y  $\beta_m = 0$ ; sin embargo, para  $t_f \neq t_i$  genéricamente se tiene que  $\beta_m \neq 0$ . Ello significa que al promover las constantes  $a_m$  y  $a_m^{(f)}$  a operadores, el operador de aniquilación a  $t = t_f$ ,  $\hat{a}_m^{(f)}$ , es una combinación de los operadores de aniquilación y creación a  $t = t_i$ ,  $\hat{a}_m$  y  $\hat{a}_m^\dagger$ ; i.e.,  $\hat{a}_m^{(f)} = \alpha_m \hat{a}_m + \beta_m \hat{a}_{-m}^\dagger$ . El vacío es, por consiguiente, no invariante ante evolución temporal. Si  $|0_i\rangle$  denota el vacío a  $t = t_i$  (i.e.,  $a_m|0_i\rangle = 0$  para toda  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ), se tiene que  $\langle 0_i | \hat{a}_m^{(f)\dagger} \hat{a}_m^{(f)} | 0_i \rangle = |\beta_m|^2$  que es, genéricamente, distinta de cero.

Una pregunta natural es si la evolución dada por la transformación de Bogolyubov (3.13)-(3.14) es o no unitariamente implementable en la representación de Fock  $\mathcal{F}_J$  asociada a la estructura compleja (3.3). Para dar respuesta

<sup>40</sup>Recuérdese que  $dH_0(x)/dx = -H_1(x)$  [43], por consiguiente,  $dH_0(|n|t)/dt = -|n|H_1(|n|t)$ .

a esta pregunta, debe determinarse si la parte antilineal  $\beta_m$  de la transformación de Bogolyubov es o no de cuadrado sumable (ver la discusión presentada en la parte final del Capítulo 1). El problema de sumabilidad cuadrada depende del comportamiento de  $\beta$  en el régimen ultravioleta ( $m \gg 1$ ), puesto que el comportamiento de  $H_0$  y  $H_1$  en la región asintótica  $m \gg 1$  es

$$H_\nu(|m|t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi|m|t}} e^{-i\{|m|t - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\}}, \quad (3.15)$$

$\nu = 0, 1$ , se tiene entonces que, sustituyendo (3.15) en (3.14), el comportamiento de  $\beta_m$  en la región ultravioleta es

$$\beta_m(t_i, t_f) \approx \frac{i}{2\sqrt{t_i t_f}} (t_f - t_i) e^{i|m|(t_f + t_i)}. \quad (3.16)$$

Por consiguiente,

$$|\beta_m|^2 = \frac{1}{4t_i t_f} (t_f - t_i)^2,$$

y claramente  $\sum_{m \neq 0} |\beta_m|^2$  diverge (salvo cuando  $t_f = t_i$ ); i.e., la parte antilineal de la transformación de Bogolyubov (3.12) no es de cuadrado sumable y consecuentemente la dinámica no es unitariamente implementable. La carencia de una contraparte cuántica unitaria para la evolución, implica que en la cuantización a la Fock  $S^1$ -invariante construida a partir de la estructura compleja (3.3) no hay cuadro de Schrödinger y que tampoco se cuente con la noción estándar de conservación de la probabilidad. Estas carencias hacen que como cuantización *en espacio de Hilbert*, la descripción cuántica que se ha dado sea poco admisible. Es deseable, por tanto, buscar una cuantización en espacio de Hilbert que no tenga esta falta de unitariedad. Con tal fin, nótese primero que asintóticamente los modos del campo se comportan, según (3.15), como sigue

$$h_n = H_0(|n|t) e^{in\theta} \approx \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\pi/4} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} M_n; \quad M_n = \frac{e^{-i|n|t} e^{in\theta}}{\sqrt{|n|}}, \quad (3.17)$$

donde se evidencia que salvo por un factor de  $1/\sqrt{t}$ , asintóticamente, los modos  $h_n$  se comportan como los modos de Minkowski,  $M_n$ , para un campo escalar no masivo (para una foliación inercial). Puesto que la dinámica de un campo escalar en Minkowski es unitariamente implementable (para foliaciones inerciales), la relación (3.17) sugiere entonces considerar el reescalado del campo  $\zeta(t, \theta) = \sqrt{t}\chi(t, \theta)$ , pues en el nuevo campo  $\zeta$  se tendrá en el régimen ultravioleta que los modos se comportarán exactamente como modos de Minkowski. Cabe señalar que la transformación  $\chi \rightarrow \zeta = \sqrt{t}\chi$  corresponde a una transformación canónica, por lo que clásicamente la descripción con  $\chi$  o  $\zeta$  son equivalentes. A continuación se presentará la cuantización a la Fock considerando como variable fundamental del sistema al campo  $\zeta$ , en particular se proveerá una representación de las RCC  $S^1$ -invariante y donde la dinámica es efectivamente unitariamente implementable; más aún, se probará que existe una única cuantización (módulo equivalencia unitaria)  $S^1$ -invariante que admite implementación unitaria de la dinámica, y que ésta ocurre solamente en la descripción que considera como variable fundamental al campo  $\zeta$ .

### 3.2. Cuantización a la Fock unitaria y única

Bajo la transformación (canónica) dependiente del tiempo  $\chi(t, \theta) \rightarrow \zeta(t, \theta) = \sqrt{t}\chi(t, \theta)$ , la ecuación de Klein-Gordon (3.1) para el campo  $\chi$  en el FLRW (2.50) toma la forma

$$\zeta_{,00} - \zeta_{,11} + \frac{1}{4t^2}\zeta = 0. \quad (3.18)$$

Esta ecuación corresponde a la de un campo escalar real  $\zeta$ , axi-simétrico, con masa dependiente del tiempo,  $m = 1/(2t)$ , propagándose en el fondo de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + d\theta^2 + d\sigma^2 + d\delta^2. \quad (3.19)$$

Como la ecuación (3.18) no depende explícitamente de la coordenada  $\theta$ , el sistema reescalado hereda del sistema original la simetría  $S^1$ ; i.e. invariancia ante traslaciones espaciales  $T_\alpha : \theta \mapsto \theta + \alpha, \forall \alpha \in S^1$ .

De la solución (3.2) y el reescalado, se sigue que  $\zeta$ , en el sector estrictamente inhomogéneo, está dada por

$$\zeta(t, \theta) = \sum_{n \neq 0} \left\{ a_n u_n(t, \theta) + \overline{a_n u_n(t, \theta)} \right\}, \quad u_n(t, \theta) = \sqrt{t} h_n(t, \theta) = \sqrt{t} H_0(|n|t) e^{in\theta}. \quad (3.20)$$

La estructura compleja asociada a la descomposición (3.20) es,

$$J_0(u_n) = iu_n, \quad J_0(\overline{u_n}) = -i\overline{u_n}, \quad (3.21)$$

por consiguiente, el espacio de frecuencias positivas/negativas es  $\mathcal{S}^\pm = \{\zeta^\pm\}$ , donde  $\zeta^+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n u_n(x, t)$  y  $\zeta^- = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_n u_n(x, t)}$ . La estructura compleja (3.21) es, claramente,  $S^1$ -invariante y no es difícil probar que es compatible con la estructura simpléctica del sistema reescalado,

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2) = 4\pi^2 \oint d\theta (\zeta_2 \partial_t \zeta_1 - \zeta_1 \partial_t \zeta_2). \quad (3.22)$$

El espacio de Hilbert de la teoría cuántica se construye a partir del espacio de soluciones  $\mathcal{S} = \{\zeta\}$  y la estructura compleja  $J_0$  (3.21) según la prescripción del Capítulo 1. Como resultado, se obtiene un espacio de Fock  $\mathcal{F}_{J_0}$  en el cual los operadores de creación y aniquilación están dados por (1.44). No es difícil verificar que  $J_0$  es invariante ante traslaciones  $S^1$ , por lo que, como antes, la cuantización a la Fock es invariante  $S^1$ .

El operador de campo es, formalmente,

$$\widehat{\zeta}(t, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \widehat{a}_n u_n(t, \theta) + \widehat{a}_n^\dagger \overline{u_n(t, \theta)} \right\}. \quad (3.23)$$

La transformación simpléctica de evolución  $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  corresponde cuánticamente, en el cuadro de Heisenberg, a una transformación de Bogolyubov  $\widehat{a}_n(t) = \alpha_n \widehat{a}_n + \beta_n \widehat{a}_n^\dagger$ . La contraparte cuántica de  $T$  será un operador unitario si la parte antilineal  $\beta$  de la transformación de Bogolyubov es de cuadrado sumable; i.e.,  $\sum_{n \neq 0} |\beta_n|^2 < \infty$ . A continuación se probará que la dinámica en la cuantización del sistema reescalado es unitariamente implementable, lo que confirma la plausibilidad e importancia del análisis ultravioleta que se hizo para los modos  $h_n$ , y que permitió establecer el reescalado como una alternativa para conseguir una cuantización con dinámica unitaria.

### 3.2.1. Evolución cuántica unitaria

Dado que el coeficiente de Bogolyubov  $\beta_n$  se extrae del simplectomorfismo clásico de evolución temporal, debe entonces determinarse este mapeo simpléctico. La evolución del campo entre las hipersuperficies de Cauchy  $\Sigma_i = t_i$  y  $\Sigma_f = t_f$  está dada por la prescripción descrita en la sección 1.2.1 para el espacio  $\mathcal{S}$ . De manera explícita, la evolución  $T_{(i,f)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\tilde{\zeta} = T_{(i,f)}\zeta$  se determina como sigue: Sea  $\zeta$  una solución de la ecuación (3.18) con datos de Cauchy, a  $t = t_f$ ,  $(\varphi^{(f)}, \pi^{(f)})$ . La solución evolucionada,  $\tilde{\zeta} = T_{(i,f)}\zeta$ , es la solución cuyos datos de Cauchy, a  $t = t_i$ , son  $(\varphi^{(i)}, \pi^{(i)})$  con  $\varphi^{(i)} = \varphi^{(f)}$  y  $\pi^{(i)} = \pi^{(f)}$ .

El cálculo a realizar es el mismo que el de la Sección 3.1.1, pero ahora para el campo  $\zeta$  (i.e., modos  $u_n$  en lugar de modos  $h_n$ ). La evolución determina la relación entre los coeficientes de Fourier  $a_n$  y  $a_n^{(f)}$  de las soluciones inicial y final (recuérdese que los coeficientes de Fourier son los que caracterizan a las distintas soluciones). Sea  $\zeta(t, \theta) \in \mathcal{S}$ , los datos de Cauchy a  $t_f$  de  $\zeta$  son

$$\varphi^{(f)} = \zeta(t_f, \theta) = \sum_{n \neq 0} \left[ a_n u_n(t_f, \theta) + \overline{a_n} \overline{u_n(t_f, \theta)} \right], \quad (3.24)$$

$$\pi^{(f)} = [\partial_t \zeta(t, \theta)]_{t=t_f} = \sum_{n \neq 0} \left[ a_n \partial_t u_n(t_f, \theta) + \overline{a_n} \overline{\partial_t u_n(t_f, \theta)} \right], \quad (3.25)$$

donde  $u_n(t_f, \theta) = \sqrt{t_f} H_0(|n|t_f) \exp(in\theta)$  y  $\partial_t u_n(t_f, \theta) = [H_0(|n|t_f) - 2|n|t_f H_1(|n|t_f)] \exp(in\theta) / (2\sqrt{t_f})$ . Por otro lado, los datos de Cauchy a  $t = t_i$  de la solución evolucionada,  $\tilde{\zeta}$ , son (de manera genérica)

$$\varphi^{(i)} = \tilde{\zeta}(t_i, \theta) = \sum_{n \neq 0} \left[ a_n^{(f)} u_n(t_i, \theta) + \overline{a_n^{(f)}} \overline{u_n(t_i, \theta)} \right], \quad (3.26)$$

$$\pi^{(i)} = [\partial_t \tilde{\zeta}(t, \theta)]_{t=t_i} = \sum_{n \neq 0} \left[ a_n^{(f)} \partial_t u_n(t_i, \theta) + \overline{a_n^{(f)}} \overline{\partial_t u_n(t_i, \theta)} \right]. \quad (3.27)$$

De las igualdades  $\varphi^{(i)} = \varphi^{(f)}$  y  $\pi^{(i)} = \pi^{(f)}$  [Cf. Ec. (1.39)] de la prescripción se sigue, utilizando la relación de ortogonalidad  $\oint \exp[i(n-m)\theta] = 2\pi\delta_{nm}$ , que

$$a_m^{(f)} v_m(t_i) + \overline{a_{-m}^{(f)}} \overline{v_m(t_i)} = a_m v_m(t_f) + \overline{a_{-m}} \overline{v_m(t_f)}, \quad (3.28)$$

$$a_m^{(f)} \partial_t v_m(t_i) + \overline{a_{-m}^{(f)}} \overline{\partial_t v_m(t_i)} = a_m \partial_t v_m(t_f) + \overline{a_{-m}} \overline{\partial_t v_m(t_f)}, \quad (3.29)$$

donde  $v_m(t) = u_m \exp(-im\theta)$ . Multiplicando (3.28) por  $\overline{\partial_t v_m(t_i)}$  y (3.29) por  $\overline{v_m(t_i)}$ , la diferencia da

$$\begin{aligned} \left[ v_m(t_i) \overline{\partial_t v_m(t_i)} - \overline{v_m(t_i)} \partial_t v_m(t_i) \right] a_m^{(f)} &= \left[ v_m(t_f) \overline{\partial_t v_m(t_i)} - \overline{v_m(t_i)} \partial_t v_m(t_f) \right] a_m \\ &+ \left[ v_m(t_f) \partial_t v_m(t_i) - \overline{v_m(t_i)} \partial_t v_m(t_f) \right] \overline{a_{-m}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Utilizando la expresión explícita para  $v_m(t_i)$ ,  $\partial_t v_m(t_i)$  [y sus complejo conjugadas] en términos de las funciones de Hankel, y la relación  $\left( \overline{H_0(x)} H_1(x) - \overline{H_1(x)} H_0(x) \right) = 4i/(\pi x)$ , no es difícil ver que

$$\left[ v_m(t_i) \overline{\partial_t v_m(t_i)} - \overline{v_m(t_i)} \partial_t v_m(t_i) \right] = \frac{4i}{\pi}.$$

Por consiguiente, se tiene que

$$a_m^{(f)} = \alpha_m(t_i, t_f)a_m + \beta_m(t_i, t_f)\overline{a_{-m}}, \quad (3.31)$$

donde

$$\alpha_m(t_i, t_f) = \frac{i\pi}{4} \left[ \overline{v_m(t_i)} \partial_t v_m(t_f) - v_m(t_f) \overline{\partial_t v_m(t_i)} \right], \quad (3.32)$$

$$\beta_m(t_i, t_f) = \frac{i\pi}{4} \left[ \overline{v_m(t_i)} \partial_t v_m(t_f) - \overline{v_m(t_f)} \partial_t v_m(t_i) \right]. \quad (3.33)$$

Mediante un cálculo directo se verifica que  $|\alpha_m|^2 - |\beta_m|^2 = 1$  para toda  $t_i, t_f \in \mathbb{R}^+$  y  $m \neq 0$ . Sustituyendo en (3.33) las expresiones explícitas  $v_m(t) = \sqrt{t}H_0(|m|t)$  y  $\partial_t v_m(t) = [H_0(|m|t) - 2|m|tH_1(|m|t)]/(2\sqrt{t})$  se tiene que la parte antilineal  $\beta_m$  de la transformación de Bogolyubov es

$$\beta_m = \frac{i\pi}{8\sqrt{t_i t_f}} \left\{ (t_i - t_f) \overline{H_0(|m|t_i)H_0(|m|t_f)} + 2|m|t_i t_f \left[ \overline{H_1(|m|t_i)H_0(|m|t_f)} - \overline{H_0(|m|t_i)H_1(|m|t_f)} \right] \right\}. \quad (3.34)$$

En el régimen asintótico ( $|m| \gg 1$ ) el comportamiento de  $\beta_m$  está dado, usando (3.15), por

$$\beta_m(t_i, t_f) \approx \frac{i(t_i - t_f)}{4|m|t_i t_f} e^{i|m|(t_i + t_f)}. \quad (3.35)$$

De tal manera que  $|\beta_m|^2 \sim 1/|m|^2$ , y por tanto  $\sum_{m \neq 0} |\beta_m|^2 < \infty$ . Es decir, la transformación de Bogolyubov (3.31) es unitariamente implementable en la representación de Fock,  $\mathcal{F}_J$  asociada a la estructura compleja (3.21). En el cuadro de Heisenberg, se tiene entonces que la contraparte cuántica de  $T_{(t_i, t_f)}$  es un operador unitario  $\widehat{U}(t_i, t_f)$ ,

$$\widehat{a}_m^{(f)} = \widehat{U}^\dagger(t_i, t_f) \widehat{a}_m \widehat{U}(t_i, t_f) = \alpha_m \widehat{a}_m + \beta_m \widehat{a}_{-m}^\dagger, \quad (3.36)$$

mientras que en el cuadro de Schrödinger los estados de Fock  $\Psi$  evolucionan con  $\widehat{U}$ ,  $\Psi(t_f) = \widehat{U}(t_i, t_f)\Psi(t_i)$ .

La cuantización a la Fock construida a partir de la estructura compleja (3.21), considerando como variable fundamental a  $\zeta$ , provee entonces una descripción cuántica  $S^1$ -invariante con dinámica unitaria para las inhomogeneidades (geométrica y de materia) del modelo. Sin embargo, es oportuno hacer un par de observaciones importantes respecto a la unicidad de esta cuantización:

1. La ambigüedad en la representación de las RCC deja abierta la posibilidad de que pudiese existir otra estructura compleja  $J'$ ,  $S^1$ -invariante, cuya cuantización a la Fock asociada también implementase unitariamente la dinámica y que, sin embargo, no fuese Hilbert-Schmidt con la estructura compleja (3.21). Es decir, que exista una cuantización a la Fock  $S^1$ -invariante con dinámica unitaria inequivalente a la que aquí se ha presentado. Si así fuere el caso, querría decir que los criterios de invariancia  $S^1$  e implementabilidad unitaria de la dinámica no son suficientes para fijar una representación (modulo equivalencia unitaria) de las RCC.
2. Otra ambigüedad inherente en el proceso de cuantización estriba en la elección de variables fundamentales. Dado un sistema clásico, las descripciones de éste a partir de variables fundamentales  $(q, p)$  y  $(Q, P)$ , relacionadas por una transformación canónica, son equivalentes. No obstante, la equivalencia no necesariamente se cumple a nivel cuántico; es decir, la cuantización construida considerando como variables fundamentales a

$(q, p)$  es en general no equivalente a la cuantización que se construye considerando como variables fundamentales a  $(Q, P)$ . De tal manera, cabe preguntarse si existirá alguna otra variable fundamental para el sistema, digamos  $\psi$ , distinta a  $\zeta$ , que provea una cuantización a la Fock  $S^1$ -invariante y con dinámica unitaria. De existir, la pregunta sería si tal cuantización a la Fock es o no unitariamente equivalente a la que aquí se ha presentado.

En las siguientes dos secciones se abordarán estos dos importantes puntos. De hecho, se verá que la cuantización que aquí se ha presentado es *única* (módulo equivalencia unitaria) tanto en la representación de las RCC como en la elección de variables fundamentales, lo que hace a ésta una propuesta muy robusta. En este caso, se puede afirmar entonces que las simetrías y la implementación unitaria de la dinámica seleccionan *una* cuantización predilecta.

### 3.2.2. Sobre la unicidad en la representación de las RCC

La familia de todas las representaciones de Fock invariantes  $S^1$  de las RCC, es provista por la familia de estructuras complejas  $\Omega$ -compatibles que conmutan con  $\mathcal{T}_\alpha, \forall \alpha \in S^1$  (i.e., por la familia de estructuras complejas invariantes  $S^1$  compatibles con la estructura simpléctica). La estructura compleja  $J_0$  (3.21) que se ha considerado en la anterior sección pertenece a tal familia y además, como se ha mostrado en la sección precedente, es tal que la cuantización a la Fock asociada a ella admite la implementación unitaria de la dinámica. Para dilucidar si existe (al menos) una cuantización a la Fock invariante  $S^1$ , no unitariamente equivalente a la asociada a  $J_0$ , en la que la dinámica sea unitariamente implementable también, habrá de reconocerse si en la familia de estructuras complejas invariantes<sup>41</sup> (y  $\Omega$ -compatibles) hay (al menos) una  $J$ , no equivalente<sup>42</sup> a  $J_0$ , que dé lugar a una representación a la Fock donde la contraparte cuántica de la dinámica clásica corresponda a un operador unitario. Para ello es necesario, primero, caracterizar a las estructuras complejas invariantes. Un cuidadoso análisis [10] establece que dada una estructura compleja invariante  $S^1$  (por lo demás, arbitraria)  $J$ , ésta se relaciona con  $J_0$  a través de una transformación simpléctica  $K_J, J = K_J J_0 K_J^{-1}$ , que es una transformación de Bogolyubov “simple”; si  $w_m$  denotan los modos (base) de frecuencia positiva asociados a una estructura compleja invariante  $J$ , entonces  $w_m$  se relaciona con los modos  $u_m$  asociados a  $J_0$  a través de la transformación de Bogolyubov siguiente:

$$w_m = \bar{\kappa}_m u_m - \bar{\lambda}_m \bar{u}_{-m}, \quad |\kappa_m|^2 - |\lambda_m|^2 = 1, \quad \forall m \neq 0.$$

Es decir, si la descomposición asociada a  $J$  es

$$\zeta(t, \theta) = \sum_{m \neq 0} [a_m^J w_m(t, \theta) + \bar{a}_m^J \bar{w}_m(t, \theta)], \quad (3.37)$$

y puesto que la descomposición asociada a  $J_0$  es [Cf. Ec.(3.20)]

$$\zeta(t, \theta) = \sum_{m \neq 0} [a_m u_m(t, \theta) + \bar{a}_m \bar{u}_m(t, \theta)], \quad (3.38)$$

<sup>41</sup>En lo sucesivo por invariante se entenderá  $S^1$ -invariante.

<sup>42</sup>i.e.,  $(J - J_0)$  no es Hilbert-Schmidt.

la transformación simpléctica  $K_J$  establece la relación

$$a_m^J = \kappa_m a_m + \lambda_m \bar{a}_{-m}, \quad (3.39)$$

cuya inversa  $K_J^{-1}$  es

$$a_m = \bar{\kappa}_m a_m^J - \lambda_m \bar{a}_{-m}^J. \quad (3.40)$$

Las representaciones de las RCC construidas a partir de  $J_0$  y  $J$  serán unitariamente equivalentes si y sólo si la parte antilineal de  $K_J$ ,  $\lambda_m$ , es de cuadrado sumable (ver Sección 1.4.2).

Ahora bien, la evolución de las  $a_m^J$  asociadas a la estructura compleja  $J$  es dictada por una transformación de Bogolyubov. La  $a_m^J$  a un tiempo final  $t_f$  está dada en términos de  $a_m^J$  y  $\bar{a}_{-m}^J$  a tiempo inicial  $t_i$ ; i.e.,

$$a_m^J(t_f) = \alpha_m^J a_m^J + \beta_m^J \bar{a}_{-m}^J, \quad (3.41)$$

(la expresión para  $\bar{a}_m^J(t_f)$  se obtiene por conjugación compleja de la anterior expresión) donde  $\alpha_m^J = \alpha_m^J(t_i, t_f)$ ,  $\beta_m^J = \beta_m^J(t_i, t_f)$  y  $|\alpha_m^J|^2 - |\beta_m^J|^2 = 1$  para toda  $t_f, t_i \in \mathbb{R}^+$  y  $m \neq 0$ . Para determinar los coeficientes  $\alpha_m^J$  y  $\beta_m^J$  obsérvese primero que relación (3.39) es válida a cualquier tiempo, por lo que

$$a_m^J(t_f) = \kappa_m a_m(t_f) + \lambda_m \bar{a}_{-m}(t_f) = \kappa_m [\alpha_m a_m + \beta_m \bar{a}_{-m}] + \lambda_m [\bar{\alpha}_m \bar{a}_{-m} + \bar{\beta}_m a_m]$$

donde se ha utilizado (3.31) en la segunda igualdad. Los coeficientes  $\alpha_m$  y  $\beta_m$  están dados por (3.32) y (3.33), respectivamente. Reagrupando, la anterior expresión queda como

$$a_m^J(t_f) = [\kappa_m \alpha_m + \lambda_m \bar{\beta}_m] a_m + [\lambda_m \bar{\alpha}_m + \kappa_m \beta_m] \bar{a}_{-m}.$$

Utilizando la inversa (3.40) a tiempo  $t_i$ , se obtiene entonces que

$$a_m^J(t_f) = [\kappa_m \alpha_m + \lambda_m \bar{\beta}_m] [\bar{\kappa}_m a_m^J - \lambda_m \bar{a}_{-m}^J] + [\lambda_m \bar{\alpha}_m + \kappa_m \beta_m] [\kappa_m \bar{a}_{-m}^J - \bar{\lambda}_m a_m^J].$$

Reagrupando,

$$a_m^J(t_f) = (|\kappa_m|^2 \alpha_m - |\lambda_m|^2 \bar{\alpha}_m + 2i \text{Im}[\bar{\kappa}_m \lambda_m \bar{\beta}_m]) a_m^J + (\kappa_m^2 \beta_m - \lambda_m^2 \bar{\beta}_m - 2i \kappa_m \lambda_m \text{Im}[\alpha_m]) \bar{a}_{-m}^J \quad (3.42)$$

Comparando (3.41) y (3.42) se identifican los coeficientes de Bogolyubov  $\alpha_m^J$  y  $\beta_m^J$ ,

$$\alpha_m^J = |\kappa_m|^2 \alpha_m - |\lambda_m|^2 \bar{\alpha}_m + 2i \text{Im}[\bar{\kappa}_m \lambda_m \bar{\beta}_m], \quad (3.43)$$

$$\beta_m^J = \kappa_m^2 \beta_m - \lambda_m^2 \bar{\beta}_m - 2i \kappa_m \lambda_m \text{Im}[\alpha_m]. \quad (3.44)$$

Evidentemente cuando  $J = J_0$  se tiene que  $\kappa = 1$  y  $\lambda = 0$ , lo que hace que (3.43) y (3.44) den  $\alpha_m^{J_0} = \alpha_m$  y  $\beta_m^{J_0} = \beta_m$ , como debería esperarse. No sobra insistir en que  $\alpha_m$  y  $\beta_m$  en las Ecs.(3.43)-(3.44) corresponden a los coeficientes de Bogolyubov (3.32) y (3.33) de la transformación simpléctica de evolución asociada a la descomposición del campo provista por  $J_0$ .

Ahora bien, que exista una  $J$  invariante (distinta a  $J_0$ ) para la cual la dinámica sea unitariamente implementable, significa que la correspondiente parte antilineal (3.44)  $\beta_m^J$  de la transformación simpléctica de evolución es de cuadrado sumable. La relación unitaria o no con la cuantización construida a partir de  $J_0$ , dependerá de si la  $\lambda_m$  es o no de cuadrado sumable. El notable resultado, que puede probarse con todo rigor<sup>43</sup>, es que cualquier  $J$  invariante que de lugar a una cuantización con implementación unitaria de la dinámica es Hilbert-Schmidt con  $J_0$ ; i.e.,  $\beta_m^J$  es de cuadrado sumable si y sólo si  $\lambda_m$  es de cuadrado sumable. Así, se tiene que cualquier representación a la Fock invariante y con implementación unitaria de la dinámica, construida a partir de la variable fundamental  $\zeta$ , es unitariamente equivalente a la cuantización a la Fock construida con  $J_0$  y que se ha expuesto en la sección previa. La cuantización de Fock asociada a  $J_0$  es, pues, la única (módulo equivalencia unitaria) representación de las RCC invariante  $S^1$  y con implementación unitaria de la dinámica.

En este caso, se tiene por tanto que (al igual que en el modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado [10] y una clase más general de sistemas con masa arbitraria dependiente del tiempo [44]) la imposición de los criterios de invariancia ante las simetrías de norma y la implementabilidad unitaria de la dinámica seleccionan de manera *única* una representación a la Fock de la teoría.

Es importante recordar que la descripción bajo la cual se encontró una implementación unitaria de la evolución clásica, se obtuvo aplicando una transformación canónica a las variables de campo fundamentales (sugerida por un análisis del comportamiento ultravioleta de los modos); en otras palabras, eligiendo una parametrización distinta de los campos. Cabe preguntarse ahora si existe al menos una reparametrización del sistema bajo la cual haya una representación de las RCC que sea invariante ante las simetrías de norma y que implemente unitariamente el mapeo de evolución clásica, pero que a su vez sea unitariamente inequivalente a la que se ha encontrado considerando como campo fundamental a  $\zeta$ . En la siguiente sección se discutirá este punto, que concierne a la ambigüedad en la elección de variables fundamentales. Antes de concluir esta sección, sin embargo, es conveniente puntualizar que  $J_0$  es equivalente a la estructura compleja  $\tilde{J}_0$  (que en forma natural está) asociada al campo escalar no masivo, y es justamente por esta razón que se considera el subíndice cero en la estructura compleja (3.21). En efecto, considérese la transformación de Bogolyubov

$$a_m^{\tilde{J}_0} = \kappa_m a_m + \lambda_m \bar{a}_{-m}, \tag{3.45}$$

$$\kappa_m = \sqrt{\frac{\pi x_0}{8}} \left[ \left( 1 + \frac{i}{2x_0} \right) H_0(x_0) - i H_1(x_0) \right], \quad \lambda_m = \sqrt{\frac{\pi x_0}{8}} \left[ \left( 1 + \frac{i}{2x_0} \right) \overline{H_0(x_0)} - i \overline{H_1(x_0)} \right], \tag{3.46}$$

donde  $x_0 := |m|t_0$ , con  $t_0$  un tiempo de referencia arbitrario. La estructura compleja  $\tilde{J}_0$  asociada a  $a_m^{\tilde{J}_0}$  es evidentemente  $S^1$ -invariante y, además, es Hilbert-Schmidt con  $J_0$ , pues el comportamiento ultravioleta de  $\lambda_m$  en (3.46) es  $|\lambda_m|^2 \sim 1/m^2$ . De (3.45)-(3.46) se sigue que los modos  $w_m = \bar{\kappa}_m u_m - \bar{\lambda}_m \bar{u}_{-m}$  de la descomposición (3.37) definida por  $\tilde{J}_0$  a  $t_0$  están dados por  $w_m(t_0, \theta) = \sqrt{2} \exp(i|m|\theta) / \sqrt{\pi|m|}$  mientras que  $\partial_t w_m(t_0, \theta) = -i\sqrt{2|m|} \exp(i|m|\theta) / \sqrt{\pi}$ . Considerando la normalización de los modos  $u_m$ , se introduce un factor de  $1/\sqrt{8}$ ; i.e.,  $w_m \rightarrow w_m/\sqrt{8}$ . Así, la confi-

<sup>43</sup>Aunque la expresión para  $\beta_m^J$  difiere ligeramente de la que en [10] se considera, la demostración es esencialmente la misma que la que allí se desarrolla.

guración y el momento a  $t = t_0$  están dados por

$$\varphi_\zeta = \zeta|_{t=t_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \neq 0} \left( \frac{1}{\sqrt{2|m|}} a_m^{\tilde{J}_0} e^{i|m|\theta} + \frac{1}{\sqrt{2|m|}} \bar{a}_m^{\tilde{J}_0} e^{-i|m|\theta} \right)$$

y

$$P_\zeta = \partial_t \zeta|_{t=t_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \neq 0} \left( -i\sqrt{\frac{|m|}{2}} a_m^{\tilde{J}_0} e^{i|m|\theta} + i\sqrt{\frac{|m|}{2}} \bar{a}_m^{\tilde{J}_0} e^{-i|m|\theta} \right).$$

Al escribir  $\varphi_\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \neq 0} \varphi_\zeta^m \exp(i|m|\theta)$  y  $P_\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \neq 0} P_\zeta^m \exp(i|m|\theta)$  se obtiene entonces que

$$a_m^{\tilde{J}_0} = \frac{|m|\varphi_\zeta^m + iP_\zeta^m}{\sqrt{2|m|}}, \quad \bar{a}_{-m}^{\tilde{J}_0} = \frac{|m|\varphi_\zeta^m - iP_\zeta^m}{\sqrt{2|m|}}, \quad (3.47)$$

que son justamente las variables tipo aniquilación/creación asociadas a un campo sin masa; de ahí que la cuantización a la Fock asociada a  $\tilde{J}_0$  pueda ser llamada como “la representación de masa cero” de las RCC. Dada la equivalencia unitaria con  $J_0$ , puede aseverarse entonces que la representación de masa cero es la *única* (módulo equivalencia unitaria) representación de las RCC invariante  $S^1$  con implementación unitaria de la dinámica.

En la representación de masa cero la evolución temporal está dictada por la transformación de Bogolyubov

$$a_m^{\tilde{J}_0}(t) = \alpha_m^{\tilde{J}_0} a_m^{\tilde{J}_0} + \beta_m^{\tilde{J}_0} \bar{a}_{-m}^{\tilde{J}_0}, \quad (3.48)$$

donde los coeficientes  $\alpha_m^{\tilde{J}_0}$  y  $\beta_m^{\tilde{J}_0}$  están dados por (3.43) y (3.44), respectivamente, y en cuyas expresiones el coeficiente  $\alpha_m$  está dado por (3.32), el coeficiente  $\beta_m$  por (3.33,3.34) y los coeficientes  $\kappa_m$  y  $\lambda_m$  por (3.46). En adelante, para simplificar notación, los coeficientes  $\alpha_m^{\tilde{J}_0}$  y  $\beta_m^{\tilde{J}_0}$  serán denotados como  $\alpha_m^0$  y  $\beta_m^0$ . En virtud de la equivalencia unitaria entre la representación de masa cero y la cuantización de Fock construida a partir de  $J_0$  (presentada al inicio de esta sección 3.2) se sigue en particular que  $\beta_m^0$  es de cuadrado sumable.

### 3.2.3. Sobre la unicidad en la parametrización del modelo

Para discutir el problema de unicidad asociado a las distintas parametrizaciones de campo fundamental que pueden considerarse (libertad bajo transformaciones canónicas), es conveniente comenzar por hacer algunas observaciones relevantes. Lo primero que debe notarse, es que las transformaciones canónicas permitidas son sólo aquellas que provean una parametrización que respete el grupo de isometrías original y la invariancia ante traslaciones  $S^1$ ; la ecuación de campo que gobierna a la dinámica ha de permanecer como una ecuación de segundo orden, lineal y homogénea, de modo que el espacio de soluciones se mantenga como un espacio vectorial. Estas consideraciones, que tienen por objeto impedir la introducción de inhomogeneidades “espurias”, restringen las posibles redefiniciones del campo en nuestro modelo a escalamientos por funciones que dependen exclusivamente del tiempo (para una discusión al respecto en el contexto del modelo de Gowdy ver [11]). Los escalamientos en la configuración del campo implican que el momento canónicamente conjugado sufre el escalamiento inverso; de hecho, en el momento se tiene que (en general) además del escalamiento inverso, puede haber una contribución lineal del campo.

Antes de proseguir, conviene enfatizar y recordar que en la teoría clásica, cualquier transformación canónica  $\mathfrak{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{s}$  de las variables fundamentales lleva a una descripción equivalente de la teoría. De este modo, se pueden construir las representaciones de las RCC a partir tanto de  $\mathcal{S}$  como de  $\mathfrak{s}$ . Dadas dos representaciones a la Fock  $\mathcal{F}$  y  $\mathfrak{F}$  surgidas de variables básicas/fundamentales relacionadas mediante una transformación canónica, la pregunta natural es si éstas están relacionadas mediante un operador unitario  $\hat{\mathcal{U}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  o no; en caso afirmativo,  $\hat{\mathcal{U}}$  sería la implementación unitaria de la transformación canónica  $\mathfrak{T}$ , mientras que una respuesta en sentido negativo, implicaría que  $\mathcal{F}$  y  $\mathfrak{F}$  son descripciones cuánticas no unitariamente equivalentes (ver figura 3.1).

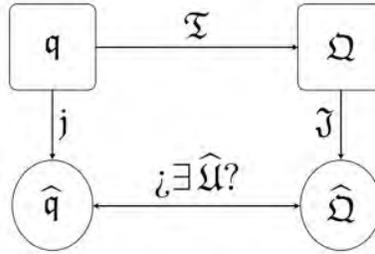


Figura 3.1: Relación entre representaciones de la teoría clásica mapeadas por una transformación canónica y sus respectivas teorías cuánticas. En general, la contraparte cuántica de  $\mathfrak{T}$  no es unitaria.

La transformación canónica del campo  $\zeta(\theta, t)$  dependiente del tiempo más general posible que preserve las propiedades arriba mencionadas, es de la forma [11]

$$\varphi_\phi = f(t)\varphi_\zeta, \quad P_\phi = \frac{P_\zeta}{f(t)} + g(t)\varphi_\zeta, \quad (3.49)$$

donde  $f \neq 0$  (de signo constante). Al tiempo de referencia  $t_0$ , puede considerarse que  $f(t_0) = 1$ ,  $g(t_0) = 0$ , sin pérdida de generalidad<sup>44</sup>. Debido a la dependencia temporal, la evolución del campo  $\phi$  (con configuración  $\varphi_\phi$  y momento  $P_\phi$ ) será diferente a la del campo  $\zeta$ . Puede ocurrir, como se ha visto ya, que en una descripción haya una representación de las RCC que admita dinámica unitaria (como es el caso de  $\zeta$  en la representación de masa cero, o en su equivalente construida a partir de  $J_0$ ) mientras que en otras no (como es el caso de la cuantización que para  $\chi$  se presentó en la Sección 3.1). La pregunta aquí es si existirá una descripción  $\phi$  que sea  $S^1$ -invariante y que admita una implementación unitaria de la dinámica, pero que no sea unitariamente equivalente a representación de masa cero para  $\zeta$  (que es equivalente a la cuantización con  $J_0$ ). Si existiese tal descripción  $\phi$ , entonces se concluiría que  $\zeta$  no es la única variable fundamental a partir de la cual se puede construir una teoría invariante y con implementación unitaria de la dinámica; i.e., la invariancia  $S^1$  y la implementación unitaria de la dinámica no serían criterios suficientes para la elección *única* de variables fundamentales (aunque sí lo son para la elección de las RCC, como se vio en el anterior apartado). Por otro lado, si no existe una descripción  $\phi$  inequivalente, que sea invariante  $S^1$

<sup>44</sup>Cualquier transformación canónica dependiente del tiempo, que dé como resultado nuevas variables que *no* coincidan a  $t_0$  con las originales, se construye aplicando a (3.49) una transformación canónica más, pero independiente del tiempo. Puesto que esta nueva transformación no altera en lo absoluto el análisis que aquí se realizará, puede simplemente ignorarse.

e implemente la dinámica unitariamente, entonces se concluirá que los criterios de invariancia y dinámica unitaria seleccionan *una única* variable fundamental,  $\zeta$ , y que la representación de masa cero (equivalentemente la construida a partir de  $J_0$ ) en esta variable es la única cuantización del sistema (tanto en elección de variable fundamental como de representación de las RCC) que es  $S^1$ -invariante y con implementación unitaria de la dinámica.

Para dilucidar si la invariancia  $S^1$  y la implementación unitaria de la dinámica son (o no) criterios que eliminan el problema de la ambigüedad en la elección de variables fundamentales, se procederá como sigue: (i) Partiendo de la representación de masa cero en la descripción  $\zeta$  se obtendrá, vía la transformación canónica (3.49), la representación de masa cero en la descripción  $\phi$  (ii) se especificará entonces la evolución en la descripción  $\phi$  para la representación de masa cero y (iii) se obtendrá en la descripción  $\phi$  la evolución para cualquier representación  $S^1$ -invariante y se analizará entonces bajo qué condiciones la evolución es unitariamente implementable en las nuevas variables. La evolución en las nuevas variables, y para cualquier elección de estructura compleja  $S^1$ -invariante, se obtiene pues componiendo tres transformaciones, como se verá en forma explícita a continuación:

*Primer transformación: De la representación de masa cero en  $\zeta$  a  $\phi$ ; cambio de variables fundamentales*

Bajo la transformación canónica (3.49), la representación de masa cero en  $\zeta$  [Cf. Ec.(3.47)] es mapeada a la representación de masa cero en la descripción  $\phi$ , cuyas variables tipo aniquilación/creación serán denotadas por  $b_m$  y  $\bar{b}_m$ . Explícitamente:

$$\begin{pmatrix} b_m \\ \bar{b}_{-m} \end{pmatrix} = W_m^{-1} M_m W_m \begin{pmatrix} a_m^{\bar{J}_0} \\ \bar{a}_{-m}^{\bar{J}_0} \end{pmatrix},$$

donde

$$W_m = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2|m|}} & \frac{1}{\sqrt{2|m|}} \\ -i\sqrt{\frac{|m|}{2}} & i\sqrt{\frac{|m|}{2}} \end{pmatrix}, \quad W_m^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{|m|}{2}} & \frac{i}{\sqrt{2|m|}} \\ \sqrt{\frac{|m|}{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2|m|}} \end{pmatrix}, \quad M_m = \begin{pmatrix} f & 0 \\ g & f^{-1} \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra entonces que

$$b_m = L_m a_m^{\bar{J}_0} + A_m \bar{a}_{-m}^{\bar{J}_0}, \quad (3.50)$$

donde

$$L_m = \frac{1}{2} \left( f_+ + i \frac{g}{|m|} \right), \quad A_m = \frac{1}{2} \left( f_- + i \frac{g}{|m|} \right), \quad (3.51)$$

con  $f_{\pm} = f \pm 1/f$ . Es fácil verificar que  $|L_m|^2 - |A_m|^2 = 1$ ; i.e., la transformación (3.50) es de Bogolyubov. La relación para  $\bar{b}_{-m}$  se obtiene de (3.50)-(3.51) por conjugación compleja y realizando el cambio de  $m$  por  $-m$ .

*Segunda transformación: Evolución en  $\phi$  para la representación de masa cero*

Es importante notar que (3.50)-(3.51) es a cualquier tiempo; en particular, al tiempo de referencia  $t = t_0$  se tiene que  $b_m(t_0) = a_m^{\bar{J}_0}(t_0)$  pues  $L_m(t_0) = 1$  y  $A_m(t_0) = 0$ . Usando este hecho, la relación (3.50) y la evolución para las  $a_m^{\bar{J}_0}$ 's [Cf. Ec.(3.48)] se tiene que la evolución en la descripción de campo  $\phi$  para la representación de masa cero está dada por la siguiente transformación de Bogolyubov

$$b_m(t) = \tilde{\alpha}_m^0 b_m + \tilde{\beta}_m^0 \bar{b}_{-m}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\alpha}_m^0 = (\alpha_m^0 L_m + \bar{\beta}_m^0 A_m), \quad \tilde{\beta}_m^0 = (\bar{\alpha}_m^0 A_m + \beta_m^0 L_m) \quad (3.53)$$

y en donde  $b_m = b_m(t_0)$  y  $\bar{b}_{-m} = \bar{b}_{-m}(t_0)$ .

*Tercer transformación: Evolución en la descripción  $\phi$  para cualquier representación  $S^1$ -invariante*

Para determinar la evolución en la descripción de campo  $\phi$ , en cualquier representación  $S^1$ -invariante, considérese primero la Ec.(3.39), que establece la familia de representaciones invariantes;

$$b_m^J(t) = \kappa_m b_m(t) + \lambda_m \bar{b}_{-m}(t). \quad (3.54)$$

Sustituyendo la evolución (3.52) en las  $b_m$ 's se sigue que

$$b_m^J(t) = [\kappa_m \tilde{\alpha}_m^0 + \lambda_m \tilde{\beta}_m^0] b_m + [\lambda_m \bar{\alpha}_m^0 + \kappa_m \tilde{\beta}_m^0] \bar{b}_{-m}.$$

Utilizando la inversa (3.40) al tiempo de referencia  $t = t_0$  se obtiene finalmente que

$$b_m^J(t) = \tilde{\alpha}_m^J b_m^J + \tilde{\beta}_m^J \bar{b}_{-m}^J, \quad (3.55)$$

$$\tilde{\alpha}_m^J = |\kappa_m|^2 \tilde{\alpha}_m^0 - |\lambda_m|^2 \bar{\alpha}_m^0 + 2i \text{Im}[\bar{\kappa}_m \lambda_m \tilde{\beta}_m^0], \quad (3.56)$$

$$\tilde{\beta}_m^J = \kappa_m^2 \tilde{\beta}_m^0 - \lambda_m^2 \bar{\beta}_m^0 - 2i \kappa_m \lambda_m \text{Im}[\tilde{\alpha}_m^0]. \quad (3.57)$$

Donde  $\tilde{\alpha}_m^0$  y  $\tilde{\beta}_m^0$  están dadas por (3.53); es decir, dependen de los coeficientes de Bogolyubov  $\alpha_m^0$ ,  $\beta_m^0$ ,  $L_m$  y  $A_m$ , donde estos últimos dos están dados por (3.51). En suma, se tiene que la parte antilineal  $\tilde{\beta}_m^J$  (3.57) depende de  $\alpha_m^0$ ,  $\beta_m^0$  (de cuadrado sumable),  $f$  y  $g$ .

La pregunta relevante es bajo qué condiciones  $\tilde{\beta}_m^J$  es de cuadrado sumable. Para dar respuesta a la interrogante, se asume que  $\tilde{\beta}_m^J$  es de cuadrado sumable y se analizan las condiciones que tal suposición impone sobre la transformación canónica (3.49).

Un análisis riguroso (esencialmente idéntico al llevado a cabo en [11] para el caso del modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado) muestra que  $\tilde{\beta}_m^J$  es de cuadrado sumable si y sólo si: (i)  $f$  es igual a la unidad ( $f = 1$ ), lo que significa que (3.49) se va a una simple redefinición del momento:  $\varphi_\phi = \varphi_\zeta$ ,  $P_\phi = P_\zeta + g\varphi_\zeta$ . Por consiguiente, ningún reescalamiento del campo  $\zeta$  por una función del tiempo proveerá una descripción en la cual la dinámica pueda implementarse unitariamente<sup>45</sup> (ii) La descripción del sistema en las variables fundamentales ( $\varphi_\phi = \varphi_\zeta$ ,  $P_\phi = P_\zeta + g\varphi_\zeta$ ) con implementación unitaria de la dinámica, es unitariamente equivalente a la representación de masa cero en las variables fundamentales ( $\varphi_\zeta$ ,  $P_\zeta$ ), para cualquier  $g$ . En efecto, para  $f = 1$  se tiene que  $A_m$  en (3.51) es  $A_m = ig/(2|m|)$  y, por tanto, es de cuadrado sumable para cualquier  $g$ . Esto implica (la prueba es simple) que  $\tilde{\beta}_m^0$  es de cuadrado sumable y (siguiendo de nueva cuenta los argumentos que en [10] se exponen) se concluye entonces que  $\tilde{\beta}_m^J$  en (3.57) es de cuadrado sumable si y sólo si  $\lambda_m$  lo es. Cabe señalar que la libertad en la elección del

<sup>45</sup>Este hecho muestra por qué la parametrización usada en la sección 3.1, así como la empleada por Pierri [42] para el modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado, no admite una implementación unitaria de la dinámica bajo ninguna de todas las posibles estructuras complejas invariantes.

momento asociada<sup>46</sup> a  $g$ , puede eliminarse imponiendo el requerimiento adicional de que el vacío de Fock pertenezca al dominio del generador de evolución [11]. Este requerimiento selecciona como momento predilecto a  $P_\zeta$ , que es el momento original. En suma, los criterios de invariancia ante las simetrías y de implementabilidad unitaria de la dinámica seleccionan *un único* campo fundamental y *una única* representación de las RCC; la cuantización que aquí se ha presentado para las inhomogeneidades (geométricas y de materia) del modelo tipo Gowdy  $T^3$  acoplado a materia escalar es pues la *única* (en campo fundamental y representación de las RCC) cuantización invariante  $S^1$  que implementa unitariamente la dinámica. Esta cuantización encuentra sus antecedentes (en fundamentación y guía) en la llamada cuantización<sup>47</sup> CCMV que para el modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado fue especificada durante la década pasada [8, 9, 10, 11].

Finalmente, es importante hacer notar que los resultados aquí presentados son a nivel de espacio de Hilbert cinemático; i.e., sin considerar la constricción global (2.41). Sin embargo, el estudio realizado en este trabajo puede ampliarse al espacio de Hilbert físico, constituido por aquellos estados que satisfagan la constricción a nivel cuántico ( $\mathcal{F}_{\text{Fis}} = \{\Psi \mid \hat{C}_0\Psi = 0\}$ ) siguiendo la línea de razonamiento y técnica trazada por C.G. Torre en [41] para el caso del modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado.

---

<sup>46</sup>Vale la pena hacer notar aquí que si el campo no fuese axi-simétrico, entonces habría restricciones sobre la  $g$  (esencialmente debidas a la degeneración en los valores propios del operador de Laplace-Beltrami) que básicamente suprimen la libertad en la elección del momento (ver [46] y [47]).

<sup>47</sup>CCMV es el acrónimo de Corichi Cortez Mena Velhinho.

# Discusión

*... to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.*

*I. Newton*

---

En este trabajo se estudió la cuantización de un modelo tipo Gowdy  $T^3$  polarizado acoplado con materia escalar no masiva. El sector homogéneo del modelo corresponde a un FLRW con factor de escala  $a(t) = \sqrt{t}$  (en tiempo conforme) y los grados locales de libertad pueden entonces interpretarse como inhomogeneidades en dicho fondo; en concreto, las inhomogeneidades corresponden a dos campos escalares axisimétricos, no masivos, propagándose en el citado FLRW, uno de los cuales introduce inhomogeneidades unidimensionales geométricas (“ondas gravitacionales”) mientras que el otro está asociado a inhomogeneidades en el contenido de materia. Son los grados locales de libertad (inhomogeneidades) las que se cuantizan a la Fock en el fondo efectivo FLRW explotando el hecho de que ambos campos satisfacen la misma ecuación de movimiento (i.e., se considera pues la cuantización de un campo escalar axial no masivo, denotado por  $\chi$ , propagándose en el fondo FLRW). La cuantización más natural para el sistema efectivo carece, sin embargo, de una implementación unitaria de la evolución temporal en el espacio de Hilbert. Un análisis sobre el comportamiento de los modos del campo en el régimen ultravioleta sugiere entonces el cambio a un nuevo campo básico/fundamental ( $\chi \rightarrow \zeta$ ) mediante una transformación canónica dependiente del tiempo  $\zeta = \sqrt{t} \chi$ , llevando el sistema a uno que puede interpretarse como el de un campo escalar axial  $\zeta$ , con masa dependiente del tiempo, propagándose en un fondo minkowskiano compacto (los modos en el ultravioleta de  $\zeta$  se comportan exactamente como aquellos de un campo escalar no masivo en Minkowski). Así pues, se efectúa el reescalado  $\zeta = \sqrt{t} \chi$  y se muestra que la descomposición natural de la solución (i.e., la estructura compleja natural) en la nueva descripción fundamental permite llevar a cabo una cuantización a la Fock que, además de ser invariante ante la simetría de traslación  $S^1$  heredada del sistema original, implementa unitariamente la dinámica. La cuantización en la descripción de variable fundamental reescalada  $\zeta$  tiene entonces propiedades físicamente deseables, como la de poseer un cuadro de Schrödinger bien definido y preservar la noción estándar de conservación de la probabilidad, lo que da robustez a esta propuesta de cuantización a la Fock para el sistema. Cabe enfatizar que la representación

a la Fock  $S^1$ -invariante y con implementación unitaria de la dinámica que se provee es unitariamente equivalente a la “representación de masa cero” para las RCC, de tal suerte que la representación de masa cero para el campo básico/fundamental  $\zeta$  es  $S^1$ -invariante e implementa unitariamente la dinámica.

Una vez que se cuenta con una descripción cuántica predilecta, surge la interrogante natural de si ésta es única o no. Es decir, dada la ambigüedad en teoría de campos, queda todavía por saber si

(a) En la descripción de variable fundamental  $\zeta$  existe o no una representación de las RCC no equivalente a la de masa cero, que sea también  $S^1$ -invariante y admita una implementación unitaria de la dinámica (i.e., ambigüedad en la representación de las RCC).

(b) La libertad en la elección de variables fundamentales permite o no especificar una nueva descripción, digamos  $\phi$ , que clásicamente sea equivalente a la descripción  $\zeta$  pero cuánticamente no, en la cual sea posible construir una representación a la Fock  $S^1$ -invariante y con dinámica unitaria (i.e., ambigüedad en la elección de variables fundamentales).

En otras palabras, queda por saber si los criterios de *implementación unitaria de la dinámica e invariancia ante las simetrías de norma* remueven o no las ambigüedades en la representación de las RCC y en la elección de variables básicas/fundamentales. La respuesta, como se ha visto en la parte final del Capítulo 3, es en sentido afirmativo: los criterios de invariancia ante las simetrías e implementabilidad unitaria de la dinámica seleccionan una *única* (módulo equivalencia unitaria) teoría cuántica del sistema tanto en la representación de las RCC como en la elección de variables fundamentales; i.e., es sólo en la variable fundamental  $\zeta$  y en la representación de masa cero para este campo básico/fundamental que se tiene una representación a la Fock  $S^1$ -invariante con implementación unitaria de la dinámica. Este resultado de unicidad robustece la propuesta tanto de la cuantización llevada a cabo para el modelo en cuestión como de dichos criterios como requerimientos para seleccionar teorías cuánticas predilectas. Cabe advertir, sin embargo, que para sistemas más complicados estos criterios podrían resultar todavía insuficientes para eliminar las ambigüedades y, por consiguiente, sería necesario buscar criterios adicionales que permitan seleccionar *una* cuantización predilecta.

Respecto a la unicidad de la cuantización es importante abundar sobre algunos aspectos. Dado que el modelo finalmente consiste en cuantizar un campo escalar en un fondo de FLRW compacto, podría suponerse que entonces una cuantización apropiada y *única* podría ser especificada empleando el criterio de Hadamard en la descripción  $\chi$  de campo fundamental (puesto que el fondo FLRW considerado es compacto, hay un único vacío de Fock que satisface la condición de Hadamard y, por tanto, una única representación de Hadamard para las RCC) [16]. Aunque los resultados de este trabajo de tesis muestran que en la representación de Hadamard de las RCC no se implementaría unitariamente la dinámica, cabe preguntarse si habrá algún tipo de tensión entre la cuantización *única* que aquí se ha presentado y la cuantización *única* que se puede construir imponiendo el criterio de Hadamard. Si el campo escalar fuese masivo, podría llevarse a cabo un análisis similar al que en [46] se presenta, concluyendo que la traslación de la representación Hadamard a la descripción  $\zeta$  provee una teoría cuántica unitariamente equivalente a la que en este trabajo se ha especificado y, por consiguiente, afirmar que no hay tensión alguna entre las cuantizaciones;

sin embargo, puesto que el campo es no masivo, dicho análisis no puede ser cabalmente reproducido<sup>48</sup> y es, por tanto, necesario investigar más a fondo cómo puede extraerse la relación entre ambas formulaciones para, entonces, determinar si en este caso hay o no tensión entre las dos distintas formulaciones. Este es un tema que queda abierto y que habrá de abordarse.

Por último, es importante enfatizar que aquí se enfocó el problema en la cuantización de los grados locales de libertad propagándose en un fondo efectivo (tipo FLRW). Una continuación natural del presente trabajo, y que en realidad significaría completar la descripción cuántica del modelo, consistiría en tratar de especificar la geometría cuántica para éste; es decir, investigar la posibilidad de definir a partir de la cuantización de los grados locales de libertad que ya se tiene, algún tipo de “operador métrico”  $\hat{g}_{ab}$  y explorar entonces las consecuencias. Esta línea de investigación aproximaría la cuantización del modelo a las ideas de cuantos geométricos, que plantean algunas formulaciones de la gravedad cuántica (e.g. Gravedad Cuántica de Lazos) y es, junto con el estudio comparativo entre la cuantización aquí expuesta y la representación Hadamard de las RCC, una línea de investigación a desarrollar en el futuro próximo.

---

<sup>48</sup>El análisis en [46] está cimentado en la equivalencia unitaria entre estados adiabáticos y de Hadamard para un campo escalar masivo [48].



# Apéndice



# Apéndice A

## El espacio de Hilbert para sistemas lineales con número finito de grados de libertad

*Gentlemen: there's lots of room left in Hilbert space.*

*S. MacLane*

---

En este apéndice se abordarán algunos aspectos formales sobre la construcción del espacio de Hilbert de una partícula,  $\mathcal{H}$ , para los sistemas lineales de dimensión finita mencionados en el texto, y como ejemplo ilustrativo, se construirá  $\mathcal{H}$  para un sistema de  $n$ -osciladores armónicos desacoplados.

### A.1. Sobre el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}$

Considérese un sistema lineal con  $n$  grados de libertad, de manera que la dimensión del espacio de soluciones a las ecuaciones de movimiento (1.2) es  $2n$ -real, y considérese la complejización  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathcal{S} \oplus i\mathcal{S}$  (cuya dimensión es  $2n$ -compleja). Así, todo  $v \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  se expresa como  $v = \text{Re}(v) + i\text{Im}(v)$ , donde  $\text{Re}(v), \text{Im}(v) \in \mathcal{S}$ , y  $\langle v, v \rangle = 2\Omega(\text{Re}(v), \text{Im}(v))$ . El primer punto a demostrar es que efectivamente existen  $v$ 's en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle$  es positivo, negativo o nulo, donde  $\langle v, v \rangle$  definido por (1.13).

La existencia de  $v$ 's diferentes de cero tales que  $\langle v, v \rangle = 0$  es obvia. Ejemplos (como se menciona en el texto) son el sector real y el sector puramente imaginario de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . Es más, si  $\text{Re}(v)$  y  $\text{Im}(v)$  son proporcionales (i.e. si  $\exists r \in \mathbb{R}$  constante tal que  $\text{Re}(v) = r\text{Im}(v)$ ) entonces claramente  $\langle v, v \rangle$  es nulo también, sin que necesariamente  $v = 0$ .

La demostración de que existen  $v$ 's en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle > 0$ , se hace por contradicción. En concreto, se plantea como hipótesis que no hay  $v$ 's en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle > 0$  y se verá que ello conduce a una falsedad.

**Proposición A.1.1.** Si  $\nexists v's \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle > 0$ , entonces  $\nexists v's \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle < 0$ . Es decir,  $\langle v, v \rangle$  es idénticamente nulo en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ .

**Demostración:** Supóngase que existe al menos un  $w \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tal que  $\langle w, w \rangle < 0$ . Dado que  $\langle w, w \rangle = 2\Omega(\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w))$ , entonces  $2\Omega(\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)) < 0$ , pero ello implica que  $-2\Omega(\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)) = 2\Omega(\operatorname{Im}(w), \operatorname{Re}(w)) > 0$ . Puesto que  $2\Omega(\operatorname{Im}(w), \operatorname{Re}(w))$  es igual a  $\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle$ , entonces se tiene que si  $\langle w, w \rangle < 0$ ,  $\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle > 0$ . Es decir, existe  $v \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  ( $v = \bar{w}$ ) tal que  $\langle v, v \rangle > 0$ . Pero esto viola la hipótesis, por lo tanto la no existencia de  $v's$  en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle > 0$ , implica que tampoco existen  $v's$  en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v, v \rangle < 0$  y, por consiguiente,  $\langle v, v \rangle = 0$  en todo  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . ■

Dado que  $\langle v, v \rangle = 2\Omega(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v))$ , entonces  $\langle v, v \rangle = 0$  en todo  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  implica que  $\Omega(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v)) = 0$  para todo  $\operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v) \in \mathcal{S}$ . Es decir, la hipótesis de la proposición A.1.1 implica que la estructura simpléctica  $\Omega$  debe ser nula en todo  $\mathcal{S}$ , lo cual es evidentemente falso. Así, se concluye que existen  $v^+ \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v^+, v^+ \rangle > 0$ . Sea  $V_{\mathbb{C}}^+$  el conjunto de todos los  $v^+ \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . El complejo conjugado de  $V_{\mathbb{C}}^+$ , que denotaremos por  $V_{\mathbb{C}}^-$ , define el conjunto de todos los elementos  $v^-$  (dados por  $v^- = \overline{v^+}$ ) en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  tales que  $\langle v^-, v^- \rangle < 0$ .

Nótese que  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+ = V_{\mathbb{C}}^+ \cup \{0\}$  no es un espacio vectorial. En efecto, dado un  $v^+ \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$ , existe  $w^+ \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$  tal que  $\operatorname{Im}(v^+) + \operatorname{Im}(w^+) = 0$ . Es decir,  $v^+ + w^+ \in \mathcal{S}$  y por consiguiente  $\langle v^+ + w^+, v^+ + w^+ \rangle = 0$  (en otras palabras, la suma de dos elementos en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$  no es necesariamente un elemento de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$ ). Sin embargo, y de manera muy notable, puede especificarse (al menos) un  $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$  que es espacio vectorial (y por consiguiente subespacio de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ) cerrado bajo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (i.e.,  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert).

**Proposición A.1.2.** Existe (al menos) un  $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$  que es (i) un subespacio de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  donde (1.13) es un producto interno bien definido, (ii) es cerrado bajo el mapeo (1.13),  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (es decir,  $\mathcal{H}$  es un Hilbert) y (iii) la suma directa de  $\mathcal{H}$  y su complejo conjugado  $\overline{\mathcal{H}}$  es el espacio vectorial  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . Además,  $\langle v, \bar{w} \rangle = 0$  para todo  $v \in \mathcal{H}$  y  $\bar{w} \in \overline{\mathcal{H}}$ .

**Demostración:** (i) Para mostrar la existencia, bastará con exhibir un espacio vectorial  $\mathcal{H}$  donde el mapeo (1.13) es un producto interno. A continuación se mostrará, por construcción, la existencia de  $n$  elementos de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$ ,  $\{b_k\}_{k=1}^n$ , que son mutuamente ortogonales respecto a (1.13) y unitarios,  $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$ .

El primer paso consiste en especificar una base para el espacio de soluciones suaves reales,  $\mathcal{S}$ . Para ello, considérese la base natural en  $\Gamma$ , es decir

$$e_{p,k} = (0, \dots, 0; 0, \dots, p_k = 1, \dots, 0) \quad y \quad e_{q,j} = (0, \dots, q^j = 1, \dots, 0; 0, \dots, 0), \quad (\text{A.1})$$

donde  $k, j = 1, \dots, n$ . El vector  $e_{p,k}$  es el vector cuya única componente no nula es la  $k$ -ésima componente del momento, que es igual a uno ( $p_k = 1$ ), mientras que  $e_{q,j}$  es el vector cuya única componente no nula es la  $j$ -ésima componente de configuración, que es igual a uno ( $q^j = 1$ ). Evidentemente se tiene que, para cualquier  $y = (q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n) \in \Gamma$ ,

$$y = \sum_j^n (q^j e_{q,j} + p_j e_{p,j}).$$

De (1.7) se sigue que

$$\Omega(e_{p,k}, e_{q,j}) = \delta_{kj}, \quad \Omega(e_{q,k}, e_{q,j}) = 0 \quad y \quad \Omega(e_{p,k}, e_{p,j}) = 0. \quad (\text{A.2})$$

En virtud del isomorfismo  $I : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$ , el conjunto  $\{Y_{p,k}, Y_{q,k}\}$ , donde  $Y_{p,k} = I(e_{p,k})$  e  $Y_{q,k} = I(e_{q,k})$ , es una base para  $\mathcal{S}$ . Además, de (A.2) se sigue que

$$\Omega(Y_{p,k}, Y_{q,j}) = \delta_{kj}, \quad \Omega(Y_{q,k}, Y_{q,j}) = 0 \quad y \quad \Omega(Y_{p,k}, Y_{p,j}) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Considérense los siguientes  $n$  vectores complejos en  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ ,

$$b_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{p,j} + iY_{q,j}). \quad (\text{A.4})$$

Un cálculo directo muestra que, utilizando (A.3),

$$\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (\text{A.5})$$

De esta manera se tiene que los vectores complejos  $\{b_j\}_{j=1}^n$  pertenecen, de hecho, a  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$  y son mutuamente ortogonales respecto a (1.13).

Sea  $\mathfrak{h}$  el espacio generado por  $\{b_j\}_{j=1}^n$ , i.e.  $\mathfrak{h}$  consta de todos los elementos de la forma  $\sum_{j=1}^n A_j b_j$ , donde las  $A_j$ 's son constantes complejas. A continuación se mostrará que  $\mathfrak{h}$  es un subconjunto de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$  y que, además, es un espacio vectorial en el cual (1.13) es un producto interno. Considérese un  $h$  cualquiera en  $\mathfrak{h}$ , entonces  $h = \sum_{j=1}^n A_j b_j$  y

$$\langle h, h \rangle = -i\Omega(\bar{h}, h) = \sum_{k=1}^n |A_k|^2.$$

Es decir,  $\langle h, h \rangle > 0$  para toda  $h \neq 0$  en  $\mathfrak{h}$ , y  $\langle h, h \rangle = 0$  si y sólo si  $h = 0$  (i.e. si  $A_k = 0 \forall k = 1, \dots, n$ ). Con esto se prueba que  $\mathfrak{h} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{C}}^+$ , donde además  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  cumple la condición de positividad (1.14). Puesto que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  cumple el resto de las propiedades (1.15), (1.16) y (1.17), entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en  $\mathfrak{h}$ .

Para demostrar que  $\mathfrak{h}$  es, de hecho, un espacio vectorial, bastará con mostrar que dados cualesquiera  $h$  y  $h'$  en  $\mathfrak{h}$ ,  $h + h' \in \mathfrak{h}$ , pues el resto de las propiedades de espacio vectorial se seguirán trivialmente. Sean  $h$  y  $h'$  cualesquiera dos elementos de  $\mathfrak{h}$  y sea  $h'' = h + h'$ . Escribiendo  $h = \sum_{j=1}^n A_j b_j$  y  $h' = \sum_{j=1}^n A'_j b_j$  se tiene que

$$h'' = \sum_{j=1}^n A''_j b_j; \quad A''_j = A_j + A'_j.$$

Evidentemente  $h'' \in \mathfrak{h}$ . Así,  $\mathfrak{h}$  es un espacio vectorial (de dimensión  $n$ -compleja) y, por consiguiente, subespacio de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ , donde (1.13) es un producto interno bien definido. En otras palabras,  $\mathfrak{h}$  es un espacio pre-Hilbert.

(ii) Se mostrará ahora que  $\mathfrak{h}$  es de hecho completo. i.e., todos los puntos de acumulación están contenidos en  $\mathfrak{h}$ , de modo que este espacio es ya un Hilbert.

Sea  $\{v_k\}$  una sucesión de Cauchy cualquiera. Es decir, dada  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|v_k - v_m\| < \epsilon, \quad \forall k, m > N,$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathfrak{h}$ . Puesto que los elementos de la sucesión pueden escribirse como

$$v_k = \sum_{j=1}^n A_{(k)j} b_j,$$

entonces  $v_k - v_m = \sum_{j=1}^n (A_{(k)j} - A_{(m)j}) b_j$ . Un cálculo directo muestra que

$$\|v_k - v_m\|^2 = \sum_{j,l=1}^n \overline{(A_{(k)j} - A_{(m)j})} (A_{(k)l} - A_{(m)l}) \langle b_j, b_l \rangle = \sum_{j=1}^n |A_{(k)j} - A_{(m)j}|^2.$$

Así, la completez de  $\mathbb{C}$  garantiza que la sucesión de Cauchy  $\{v_k\}$  converge a un elemento en  $\mathfrak{h}$ ; como la sucesión considerada es arbitraria, entonces se concluye que  $\mathfrak{h}$  es completo.

(iii) Sea  $\bar{\mathfrak{h}}$  el espacio vectorial que se obtiene de considerar el complejo conjugado de  $\mathfrak{h}$ . La base inducida por  $\{b_j\}$  en  $\bar{\mathfrak{h}}$  es  $\{\bar{b}_j\}$ , de manera que  $\bar{\mathfrak{h}}$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ -compleja. Puesto que  $\langle \bar{b}_j, \bar{b}_k \rangle = -\langle b_j, b_k \rangle$ , entonces  $\langle \bar{b}_j, \bar{b}_k \rangle = -\delta_{jk}$ . Así, para todo  $\bar{h} \in \bar{\mathfrak{h}}$  diferente de cero ocurre que  $\langle \bar{h}, \bar{h} \rangle < 0$  (y por lo tanto  $\bar{\mathfrak{h}}$  no es un espacio de Hilbert bajo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) y  $\langle \bar{h}, \bar{h} \rangle = 0$  si y sólo si  $\bar{h} = 0$ . De (A.3) y (A.4) es inmediato verificar que  $\langle b_j, \bar{b}_k \rangle = 0$  para cualesquiera  $j, k = 1, \dots, n$ .

Evidentemente,  $\mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}} = \{0\}$ . Más aún, todo elemento de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  puede expresarse como la suma de un elemento de  $\mathfrak{h}$  con uno de  $\bar{\mathfrak{h}}$ . En efecto, sea  $v \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  arbitrario. Dado que  $v$  puede escribirse como

$$v = \operatorname{Re}(v) + i\operatorname{Im}(v); \quad \operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v) \in \mathcal{S},$$

entonces  $\operatorname{Re}(v) = \sum_j (A_j Y_{q,j} + B_j Y_{p,j})$  e  $\operatorname{Im}(v) = \sum_j (C_j Y_{q,j} + D_j Y_{p,j})$ , donde  $A_j, B_j, C_j$  y  $D_j$  son constantes reales. Por consiguiente,

$$v = \sum_{j=1}^n (A_j Y_{q,j} + B_j Y_{p,j}) + i \sum_{j=1}^n (C_j Y_{q,j} + D_j Y_{p,j}) = \sum_{j=1}^n (A_j + iC_j) Y_{q,j} + (B_j + iD_j) Y_{p,j}. \quad (\text{A.6})$$

De (A.4) y su complejo conjugado se sigue que

$$Y_{p,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_j + \bar{b}_j) \quad y \quad Y_{q,j} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{b}_j - b_j). \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo (A.7) en (A.6) se obtiene que

$$v = \sum_{j=1}^n \eta_j b_j + \rho_j \bar{b}_j,$$

donde las constantes complejas  $\eta_j$  y  $\rho_j$  están dadas por  $\eta_j = [(B + C) + i(D - A)] / \sqrt{2}$  y  $\rho_j = [(B - C) + i(D + A)] / \sqrt{2}$ .

Así, se tiene que  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \bar{\mathfrak{h}}$ . Dado que  $\langle b_j, \bar{b}_k \rangle = 0, \forall j, k = 1, \dots, n$ , entonces  $\langle v, \bar{w} \rangle = 0$  para todo  $v \in \mathfrak{h}$  y  $\bar{w} \in \bar{\mathfrak{h}}$ . El espacio  $\mathcal{H}$  de la proposición es justamente  $\mathfrak{h}$ . ■

En la Proposición A.1.2 se menciona que existe *al menos* un  $\mathcal{H}$ . La demostración exhibe en forma constructiva uno, pero nótese que en realidad hay una infinidad. En efecto, considérese el mapeo

$$b'_j = \alpha_j b_j + \beta_j \bar{b}_j, \quad (\text{A.8})$$

(y su complejo conjugado) con  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  tales que  $|\alpha_j|^2 - |\beta_j|^2 = 1$ , para toda  $j = 1, \dots, n$ . Es fácil verificar que

$$\langle b'_j, b'_k \rangle = \delta_{jk}, \quad \langle b'_j, \overline{b'_k} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \overline{b'_j}, \overline{b'_k} \rangle = -\delta_{jk}.$$

El espacio generado por  $\{b'_j\}$ ,  $\mathcal{H}'$ , satisface la Proposición A.1.2. De tal suerte que en lugar de  $\mathcal{H}$ , podría considerarse  $\mathcal{H}'$ . Como existe una infinidad de conjuntos de coeficientes  $\{\alpha_j, \beta_j\}$  que satisfacen la restricción  $|\alpha_j|^2 - |\beta_j|^2 = 1$ , entonces hay una infinidad de diferentes espacios que satisfacen la Proposición A.1.2.

Para concluir vale la pena aclarar un punto sobre la dimensionalidad de  $\mathcal{H}$ . Claramente se puede construir un espacio de Hilbert  $E$  de dimensión compleja  $d < n$  que cumpla con las condiciones (i)-(ii), pero evidentemente  $E \oplus \overline{E} \subsetneq \mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  pues  $\dim(E \oplus \overline{E}) = 2d < \dim \mathcal{S}_{\mathbb{C}} = 2n$ . Adicionalmente, debe notarse que no existe un espacio de dimensión mayor a  $n$  que cumpla la proposición. Si existiese, entonces se concluiría que habría necesariamente un par generador  $(Y_{q,n+1}, Y_{p,n+1})$ , independiente del resto, en  $\mathcal{S}$ ; pero ello implicaría, entonces, que  $\mathcal{S}$  en lugar de tener dimensión  $2n$ -real, tendría dimensión  $2(n+1)$ -real, lo cual es falso pues el sistema considerado tiene  $n$ -real grados de libertad.

A continuación se construirá, como un ejemplo de la aplicación del formalismo desarrollado en este apéndice, el espacio de Hilbert de una partícula para una colección de  $n$  osciladores armónicos desacoplados.

### A.1.1. Espacio de Hilbert de una partícula para un sistema de $n$ osciladores armónicos desacoplados

Considérese el sistema formado por un conjunto de  $n$  osciladores armónicos desacoplados, de masa unitaria, e independientes del tiempo. Sobre el espacio fase canónico  $\Gamma$ , de dimensión  $2n$ -real, y bajo el sistema coordinado  $y = (q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n) \in \Gamma$ , la dinámica es dictada por la función Hamiltoniana  $H : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2\},$$

de modo que las ecuaciones de Hamilton (1.2) toman la forma (para  $j = 1, \dots, n$ )

$$\dot{q}^j = p_j \quad \text{y} \quad \dot{p}_j = -\omega_j^2 q^j. \quad (\text{A.9})$$

Las ecuaciones de movimiento son, evidentemente, lineales en las coordenadas canónicas. La solución genérica para (A.9) es

$$Y_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \text{sen}(\omega_j t).$$

Es decir, una solución genérica  $Y^a \in \mathcal{S}$  al sistema de  $n$ -osciladores armónicos desacoplados es

$$Y^a = \sum_{k=1}^n \left( A_k \tilde{Y}_{q,k}^a + B_k \tilde{Y}_{p,k}^a \right)$$

donde

$$\tilde{Y}_{q,k}^a = (0, \dots, 0, \cos(\omega_k t), 0, \dots, 0) \quad \tilde{Y}_{p,k}^a = (0, \dots, 0, \text{sen}(\omega_k t), 0, \dots, 0)$$

son una base (no necesariamente ortonormal) en  $\mathcal{S}$ . Nótese que el dato de Cauchy  $(q_0^a, p_0^a) \in \Gamma$  de la solución  $Y^a$  es

$$q_0^a = Y^a(0) = \sum A_k \tilde{Y}_{q,k}^a(0), \quad p_0^a = \partial_t Y^a(0) = \sum B_k \partial_t \tilde{Y}_{q,k}^a.$$

De la Ec.(1.7) se tiene que

$$\Omega(Y_1, Y_2) = \sum_{k=1}^n Y_{2,k}(\partial_t Y_{1,k}) - Y_{1,k}(\partial_t Y_{2,k}). \quad (\text{A.10})$$

De manera que (A.3) se satisface para la base

$$Y_{q,k}^a = \left( 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \cos(\omega_k t), 0, \dots, 0 \right) \quad Y_{p,k}^a = \left( 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \text{sen}(\omega_k t), 0, \dots, 0 \right).$$

La complejificación de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ , consiste entonces en todos los elementos de la forma  $v^a = Y_1^a + iY_2^a$  con  $Y_1, Y_2$  cualesquiera elementos en  $\mathcal{S}$ . Siguiendo la prescripción, se considera el subespacio  $n$ -complejo dimensional de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  generado por (A.4)

$$b_k^a := \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{p,j}^a + iY_{q,j}^a) = \left( 0, \dots, 0, \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i\omega_k t}, 0, \dots, 0 \right). \quad (\text{A.11})$$

Es decir, se considera el subespacio

$$\mathcal{S}^+ = \left\{ h^a = \sum_{k=1}^n A_k b_k^a \right\}, \quad (\text{A.12})$$

donde  $A_k$  son constantes complejas. Un cálculo directo muestra que

$$\langle b_k, b_j \rangle = -i\Omega(\bar{b}_k, b_j) = -i\Omega_{ac} \bar{b}_k^a b_j^c = \delta_{kj}$$

y por consiguiente

$$\langle h, h \rangle = -i\Omega(\bar{h}, h) = -i\Omega_{ab} \bar{h}^a h^b = \sum_{k=1}^n |A_k|^2.$$

Así, no es difícil mostrar que  $\langle h_1, h_2 \rangle = -i\Omega(\bar{h}_1, h_2)$  define en efecto un producto interno en  $\mathcal{S}^+$ . Completando este subespacio respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , se obtiene el Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}$  para el conjunto de  $n$ -osciladores desacoplados cuyos elementos son de la forma

$$\mathcal{H} \ni h^a = \left( A_1 \frac{e^{-i\omega_1 t}}{\sqrt{2\omega_1}}, A_2 \frac{e^{-i\omega_2 t}}{\sqrt{2\omega_2}}, \dots, A_n \frac{e^{-i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n}} \right).$$

## Apéndice B

# Transformaciones de Bogolyubov

*Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.*

*A. Einstein*

Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  dos productos en  $\mathcal{S}$  asociados, respectivamente, a las estructuras complejas  $J_1$  y  $J_2$  (ambas  $\Omega$ -compatibles), que definen normas equivalentes [i.e. que satisfacen (1.45)]. Así, los espacios de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_i$  son subespacios de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C},\mu}$  [donde  $\mathcal{S}_{\mathbb{C},\mu}$  es  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  completado respecto a  $\mu_i(\cdot, \cdot) = \Omega(\overline{J_i[\cdot]}, \cdot)$ ,  $i=1,2$ , indistintamente]. Considérense las proyecciones ortogonales respecto al producto interior  $\mu_j$  de  $\mathcal{H}_j$ ,  $K_j : \mathcal{S}_{\mathbb{C},\mu} \rightarrow \mathcal{H}_j$  y  $\overline{K_j} : \mathcal{S}_{\mathbb{C},\mu} \rightarrow \overline{\mathcal{H}_j}$ , con  $j = 1, 2$ . Nótese que la identidad puede entonces escribirse como  $\mathbb{I} = K_j + \overline{K_j}$ .

Sean  $\alpha_j^i := K_{j|\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_j$  y  $\beta_j^i := \overline{K_{j|\mathcal{H}_i}} : \mathcal{H}_i \rightarrow \overline{\mathcal{H}_j}$ . A continuación se mostrarán las relaciones (1.46).

Sean, digamos,  $\phi_i^+, \psi_i^+ \in \mathcal{H}_i$ , y por tanto  $\phi_j^+ = \alpha_j^i \phi_i^+ \in \mathcal{H}_j$  y  $\psi_j^- = \beta_j^i \psi_i^+ \in \overline{\mathcal{H}_j}$ ; entonces,

$$\begin{aligned}
 \mu_i(\phi_i^+, \psi_i^+) &= \Omega(\overline{J_i \phi_i^+}, \psi_i^+) = -i\Omega(\mathbb{I}\phi_i^+, \mathbb{I}\psi_i^+) \\
 &= -i\Omega(\overline{K_j \phi_i^+ + \overline{K_j} \phi_i^+}, K_j \psi_i^+ + \overline{K_j} \psi_i^+) \\
 &= -i\Omega(\overline{\alpha_j^i \phi_i^+ + \beta_j^i \phi_i^+}, \alpha_j^i \psi_i^+ + \beta_j^i \psi_i^+) \\
 &= -i\left\{ \Omega(\overline{\phi_j^+}, \psi_j^+) + \Omega(\overline{\phi_j^+}, \psi_j^-) + \Omega(\overline{\phi_j^-}, \psi_j^+) + \Omega(\overline{\phi_j^-}, \psi_j^-) \right\} \\
 &= \Omega(\overline{J_j \phi_j^+}, \psi_j^+) + \Omega(\overline{J_j \phi_j^+}, \psi_j^-) - \Omega(\overline{J_j \phi_j^-}, \psi_j^+) - \Omega(\overline{J_j \phi_j^-}, \psi_j^-) \\
 &= \mu_j(\phi_j^+, \psi_j^+) + \cancel{\mu_j(\phi_j^+, \psi_j^-)} \overset{0}{\rightarrow} - \cancel{\mu_j(\phi_j^-, \psi_j^+)} \overset{0}{\rightarrow} - \mu_j(\phi_j^-, \psi_j^-) \\
 &= \mu_j(\alpha_j^i \phi_i^+, \alpha_j^i \psi_i^+) - \mu_j(\beta_j^i \phi_i^+, \beta_j^i \psi_i^+) \\
 &= \mu_i(\alpha_j^{i\dagger} \alpha_j^i \phi_i^+, \psi_i^+) - \mu_i(\beta_j^{i\dagger} \beta_j^i \phi_i^+, \psi_i^+) \\
 &= \mu_i\left(\left[\alpha_j^{i\dagger} \alpha_j^i - \beta_j^{i\dagger} \beta_j^i\right] \phi_i^+, \psi_i^+\right).
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\alpha_j^{i\dagger} \alpha_j^i - \beta_j^{i\dagger} \beta_j^i = \mathbb{I}. \quad (\text{B.1})$$

Sean ahora, digamos,  $\phi_i^+ \in \mathcal{H}_i$  y  $\psi_i^- \in \overline{\mathcal{H}_i}$ , por lo que  $\mu_i(\phi_i^+, \psi_i^-) = 0$ , sin embargo

$$\begin{aligned}
\mu_i(\phi_i^+, \psi_i^-) &= \Omega(\overline{J_i \phi_i^+}, \psi_i^-) = -i\Omega(\overline{\mathbb{I} \phi_i^+}, \overline{\mathbb{I} \psi_i^+}) \\
&= -i\Omega(\overline{K_j \phi_i^+ + \overline{K_j} \phi_i^+}, \overline{K_j \psi_i^+ + \overline{K_j} \psi_i^+}) \\
&= -i\Omega(\overline{\alpha_j^i \phi_i^+ + \beta_j^i \phi_i^+}, \overline{\alpha_j^i \psi_i^+ + \beta_j^i \psi_i^+}) \\
&= -i \left\{ \Omega(\overline{\phi_j^+}, \overline{\psi_j^+}) + \Omega(\overline{\phi_j^+}, \overline{\psi_j^-}) + \Omega(\overline{\phi_j^-}, \overline{\psi_j^+}) + \Omega(\overline{\phi_j^-}, \overline{\psi_j^-}) \right\} \\
&= \Omega(\overline{J_j \phi_j^+}, \overline{\psi_j^-}) + \Omega(\overline{J_j \phi_j^+}, \overline{\psi_j^+}) - \Omega(\overline{J_j \phi_j^-}, \overline{\psi_j^-}) - \Omega(\overline{J_j \phi_j^-}, \overline{\psi_j^+}) \\
&= \cancel{\mu_j(\phi_j^+, \psi_j^-)} + \mu_j(\phi_j^+, \psi_j^+) - \mu_j(\phi_j^-, \psi_j^-) - \cancel{\mu_j(\phi_j^-, \psi_j^+)} \\
&= \mu_j(\alpha_j^i \phi_i^+, \beta_j^i \psi_i^-) - \mu_j(\beta_j^i \phi_i^+, \alpha_j^i \psi_i^-) \\
&= \mu_i(\phi_i^+, \alpha_j^{i\dagger} \beta_j^i \psi_i^-) - \mu_i(\phi_i^+, \beta_j^{i\dagger} \alpha_j^i \psi_i^-) \\
&= \mu_i(\phi_i^+, [\alpha_j^{i\dagger} \beta_j^i - \beta_j^{i\dagger} \alpha_j^i] \psi_i^-),
\end{aligned}$$

sin embargo, la última expresión debe ser igual a cero en virtud de que  $\mu_i(\phi_i^+, \psi_i^-) = 0$ , y como  $[\alpha_j^{i\dagger} \beta_j^i - \beta_j^{i\dagger} \alpha_j^i] \psi_i^- \notin \overline{\mathcal{H}_i}$ , entonces se sigue que

$$\alpha_j^{i\dagger} \beta_j^i = \beta_j^{i\dagger} \alpha_j^i. \quad (\text{B.2})$$

Ahora, sean  $\phi_i^+ \in \mathcal{H}_i$  y  $\psi_j^+ \in \mathcal{H}_j$ . Por construcción,  $\psi_i^+ = \alpha_i^j \psi_j^+ \in \mathcal{H}_i$ , por lo que se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_i(\phi_i^+, \alpha_i^j \psi_j^+) &= \mu_i(\phi_i^+, \psi_i^+) = \mu_i(\phi_i^+, \psi_i^+ + \psi_i^-) \\
&= \Omega(\overline{J_i \phi_i^+}, \overline{K_i \psi_j^+ + \overline{K_i} \psi_j^+}) \\
&= -i\Omega(\overline{(K_j + \overline{K_j}) \phi_i^+}, \overline{\mathbb{I} \psi_j^+}) \\
&= -i\Omega(\overline{\alpha_j^i \phi_i^+ + \beta_j^i \phi_i^+}, \overline{\psi_j^+}) \\
&= \Omega(\overline{J_j \phi_j^+ - \overline{J_j} \phi_j^-}, \overline{\psi_j^+}) \\
&= \mu_j(\phi_j^+, \psi_j^+) - \cancel{\mu_j(\phi_j^-, \psi_j^+)} \\
&= \mu_j(\alpha_j^i \phi_i^+, \psi_j^+) \\
&= \mu_i(\phi_i^+, \alpha_j^{i\dagger} \psi_j^+).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\alpha_j^{i\dagger} = \alpha_i^j. \quad (\text{B.3})$$

Finalmente, sean  $\phi_i^- \in \overline{\mathcal{H}_i}$  y  $\psi_j^- \in \overline{\mathcal{H}_j}$ . Por construcción,  $\psi_i^- = \beta_i^j \psi_j^- \in \overline{\mathcal{H}_i}$ , por lo que se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_i(\phi_i^-, \beta_i^j \psi_j^-) &= \mu_i(\phi_i^-, \psi_i^-) = \mu_i(\phi_i^-, \psi_i^- + \psi_i^+) \\
&= \Omega(\overline{J_i \phi_i^-}, \overline{K_i \psi_j^- + \overline{K_i} \psi_j^+}) \\
&= i\Omega(\overline{\mathbb{I} \phi_i^-}, \overline{(K_i + \overline{K_i}) \psi_j^+})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\Omega (K_j \phi_i^+ + \overline{K_j \phi_i^+}, \mathbb{I} \psi_j^+) \\
&= i\Omega (\alpha_j^i \phi_i^+ + \beta_j^i \phi_i^+, \psi_j^+) \\
&= i\Omega (\overline{\phi_j^-} + \overline{\phi_j^+}, \psi_j^+) \\
&= \Omega (\overline{J_j \phi_j^-} - \overline{J_j \phi_j^+}, \psi_j^+) \\
&= \cancel{\mu_j (\phi_j^-, \phi_j^+)} \overset{0}{-} \mu_j (\phi_j^+, \psi_j^+) \\
&= -\mu_j (\overline{\beta_j^i} \phi_i^-, \psi_j^+) \\
&= \mu_i (\phi_i^-, -\overline{\beta_j^i} \psi_j^+).
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\beta_i^j = -\overline{\beta_j^i} \tag{B.4}$$

Y con esto quedan mostradas las propiedades (1.46).



# Apéndice C

## Breviario sobre simetrías en Relatividad General

*Symmetry, as wide or narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection.*

---

*H. Weyl*

### C.1. Isometrías

Sea  $M$  una variedad diferencial  $n$ -dimensional provista de un tensor métrico,  $(M, g)$ . Una isometría es un mapeo de  $M \rightarrow M$  que deja la métrica  $g$  invariante. Por cada isometría en  $M$ , existe un campo vectorial de Killing (CVK)  $\mathbf{k}$ , que satisface la ecuación  $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}g_{ab} = 0$ , que es equivalente a la ecuación de Killing,  $\mathbf{k}_{[a;b]} = 0$ . A  $\mathbf{k}$  se le conoce como un *campo vectorial de Killing* (CVK), y satisface las siguientes propiedades: (i) cualquier combinación lineal con coeficientes constantes de CVK's es un CVK; (ii) el conmutador  $[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]$  (si es diferente de cero) de dos CVK's es un CVK; y (iii) una variedad diferencial admite a lo más un número finito de CVK's linealmente independientes. El conjunto de todos los CVK forma un álgebra de Lie, con base  $\mathbf{k}_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, r$ , donde  $r$  es la dimensión del álgebra (el número de CVK que posee la variedad). Así mismo, el conjunto de todas las isometrías de  $(M, g)$  forman un grupo de Lie  $G_r$  de dimensión  $r$ , el llamado *grupo de isometrías* de  $(M, g)$ . Cada subgrupo unidimensional de  $G_r$  define una familia de curvas cuyo campo tangencial es un CVK. La *órbita* de un punto  $p \in M$  bajo un grupo de simetrías  $G_r$  es el conjunto de todos los puntos en los cuales  $p$  es mapeado cuando todos los elementos de  $G_r$  actúan sobre  $p$ . Los CVK's  $\mathbf{k}_\alpha$  en  $p$  son tangentes a la órbita de  $p$ .

El grupo de isometrías actúa *transitivamente de manera simple* en una órbita si la dimensión de la órbita es igual a la dimensión del grupo  $G_r$ , en cuyo caso los CVK  $\mathbf{k}_\alpha$  evaluados en  $p$  son linealmente independientes. De otra manera, se dice que el grupo actúa *transitivamente de manera multiplicativa* en la órbita. El número de CVK's

linealmente independientes,  $d$ , genera un subespacio del álgebra de Lie de dimensión  $d < r$ , el cual constituye un subgrupo de isometrías que dejan al punto  $p$  fijo; éste es el denominado *subgrupo de isotropía* de  $p$ . Las isotropías en  $p$  se determinan por los CVK's que satisfacen  $k^a = 0$  en  $p$ . Las dimensiones del grupo de isometrías y del subgrupo de isotropía, en función de la dimensión de  $(M, g)$  son  $r \leq \frac{1}{2}n(n+1)$  y  $d \leq \frac{1}{2}n(n-1)$  respectivamente [33].

## C.2. Similaridades

Una similaridad (transformación homotética) en una variedad diferencial  $(M, g)$  es una isometría conforme, i.e. un mapeo  $M \rightarrow M$  que induce una transformación de escala en la métrica, y por tanto preserva ángulos<sup>49</sup>. Por cada similaridad, existe un campo vectorial homotético (CVH) (o campo vectorial de Killing conforme [25])  $\xi$  que satisface la ecuación  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2\kappa g_{ab}$  donde [25]  $\kappa = \frac{1}{n}(\nabla^a \xi_a)$  es una constante y  $n = \dim(M)$ . Un espacio-tiempo  $(M, g)$  cuya métrica admita un CVH propio ( $\kappa \neq 0$ ), se denomina un espacio-tiempo *autosimilar* [33].

De la misma manera, el conjunto de todas las similaridades de  $(M, g)$  forma un grupo de Lie de dimensión finita,  $H_r$ , que es el grupo de similaridades de  $M$ . El grupo  $H_r$  admite un subgrupo  $G_{r-1}$  de isometrías, por lo que cualquier espacio-tiempo autosimilar tiene asociado un grupo de isometrías  $G_{r-1}$  automáticamente. De manera inversa, si se pide que cualquier espacio-tiempo con un grupo de isometrías  $G_r$  acepte adicionalmente un CVH (similaridad) propio, dicho espacio tiempo se vuelve autosimilar, con un grupo de similaridades  $H_{r+1}$ . Equivalentemente, el álgebra de Lie de las similaridades admite una base que consiste en un CVH propio y  $r-1$  CVK's.

## C.3. Clasificación (isométrica) de modelos cosmológicos

Los modelos cosmológicos se suelen clasificar comúnmente respecto a la dimensión  $s$  de las órbitas del grupo de isometría  $G_r$ , así como por la dimensión  $d$  de su subgrupo de isotropía. El valor de  $d$  determina las propiedades isotrópicas del modelo, mientras que  $s$  determina sus propiedades de homogeneidad. Con base en sus propiedades isotrópicas, los modelos se pueden clasificar como [33] (i) *Isotrópico* ( $d = 3$ ), i.e. el grupo de isometrías es al menos  $G_6$  (modelos FLRW); (ii) *Local Simétricamente Rotacional LSR* ( $d = 1$ ), cuyo grupo de isometría es al menos  $G_3$ ; y (iii) *Anisotrópicos* ( $d = 0$ ), en los cuales no existen isotropías. La clasificación basada en las propiedades de homogeneidad de los modelos es [33],

1. *Espacio-tiempos homogéneos* ( $s = 4$ ): Los subgrupos de isotropía son (i)  $d = 4$ , espacios maximalmente simétricos ( $G_8$ ); (ii)  $d = 3$ , el modelo estático de Einstein ( $G_7$ ); (iii)  $d = 1$ , el modelo de Gödel ( $G_5$ ); y (iv)  $d = 0$ , los modelos de Osztvath-Kerr ( $G_4$ ).
2. *Homogéneo en órbitas tridimensionales* ( $s = 3$ ): Las órbitas tipo espacio son 3-superficies homogéneas. Los subgrupos de isotropía son (i)  $d = 3$ , los modelos FLRW ( $G_6$ ); (ii)  $d = 1$ , modelos LSR espacialmente ( $G_4$ ); y (iii)  $d = 0$ , los modelos de Bianchi ( $G_3$ ).

<sup>49</sup>Una isometría es un caso particular de similaridad, ya que además de preservar ángulos, preserva longitudes.

3. *Homogéneo en órbitas bidimensionales* ( $s = 2$ ): Para órbitas tipo espacio, los modelos evolucionan en el tiempo y son espacialmente inhomogéneos en una dimensión espacial. Los subgrupos de isotropía son (i)  $d = 1$ , modelos LSR inhomogéneos ( $G_3$ ); y (ii)  $d = 0$ , modelos  $G_2$  Abelianos, como los modelos de Einstein-Rosen y Gowdy.
4. *Homogéneo en órbitas unidimensionales* ( $s = 1$ ): Para órbitas tipo espacio, los modelos evolucionan en el tiempo y son espacialmente inhomogéneos en dos dimensión espaciales. El subgrupo isotrópico es trivial en cada punto ( $d = 0$ ).
5. *Completamente inhomogéneo* ( $s = 0$ ): Los modelos evolucionan temporalmente y son espacialmente inhomogéneos en tres dimensiones espaciales. Algunos ejemplos son los universos tipo Silent, las soluciones de Szekeres, las soluciones de Stephani-Barnes y las soluciones de Oleson.

La clasificación anterior puede generalizarse para considerar similitudes, si se permite que cada caso admita un vector homotético propio. Algunos modelos cosmológicos de interés en este trabajo se esbozan a continuación.

### C.3.1. Modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Esta clase de modelos cosmológicos admiten un grupo abeliano de isometrías  $G_3$  cuyo grupo de órbitas son 3-superficies tipo espacio homogéneas e isotrópicas. La actuación del grupo de isometrías permite expresar la métrica para dicho espacio-tiempo, en coordenadas comóviles esféricas estándar como la métrica de Robertson-Walker<sup>50</sup>:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right\} \quad (\text{C.1})$$

donde  $a(t)$  se le conoce como el factor de escala. El único parámetro libre es  $k$ , y hay tres topologías posibles:  $k = 1$  un espacio cerrado (3-esfera),  $k = 0$  un espacio abierto (plano) y  $k = -1$  un espacio abierto (pseudo-esfera). En coordenadas comóviles trigonométricas, bajo el cambio de variable  $d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}$ , la métrica de FRW se puede escribir como  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2]$ , donde  $\Sigma(\chi) = \text{sen}\chi, \chi, \sinh \chi$  para  $k = 1, 0, -1$  respectivamente. Cualquiera de estas dos métricas se puede reescribir haciendo un cambio variable temporal, reemplazando el tiempo cosmológico  $t$  por el tiempo conforme  $\eta$ , bajo el cambio de variable  $dt = a(\eta)d\eta$ , de modo que:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -d\eta^2 + \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right\} = a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2] \quad (\text{C.2})$$

La imposición del grupo de isometrías  $G_3$  al tensor de energía-momento, resulta en que la clase más general de materia compatible con este tipo de modelos sea un fluido perfecto, con tensor de energía-momento dado por (2.3). En el capítulo 2 se esboza brevemente la dinámica de este modelo.

### C.3.2. Modelos cosmológicos de Bianchi ( $G_3$ )

Los modelos de Bianchi son modelos cuya métrica acepta un grupo de isometrías  $G_3$  actuando transitivamente de manera simple sobre las órbitas del grupo, y por tanto su subgrupo de isotropía es  $d = 0$ . Así el grupo de

<sup>50</sup>El modelo fue estudiado por primera vez por Friedmann y Lemaître; después, Robertson y Walker desarrollaron la métrica (C.1). Por motivos históricos, este modelo es ampliamente conocido únicamente como el espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

órbitas son 3-superficies homogéneas y anisotrópicas. Si la coordenada tipo tiempo es ortogonal al grupo de órbitas, entonces se tienen los modelos de Bianchi ortogonales o *non-tilted*, en cuyo caso la métrica se puede escribir (considerando que la métrica debe ser un invariante del grupo  $G_3$ ) como  $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i dx^j$ . Este tipo de modelos cosmológicos son compatibles con un tensor de energía-momento tipo fluido perfecto [33], (2.3). Los modelos de Bianchi [33, 49] se pueden clasificar en aquellos modelos autosimilares (que poseen un grupo de similitudes  $H_4$  actuando transitivamente de manera simple en el espacio-tiempo), y en aquellos modelos que no lo son. De entre los modelos tipo Bianchi, son de interés en este trabajo aquellos modelos tipo Bianchi I autosimilares.

### C.3.2.1. Soluciones tipo Bianchi I autosimilares

El elemento de línea genérico para las soluciones tipo Bianchi I autosimilares se puede escribir como [33]

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2 \quad (C.3)$$

donde  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son constantes. El vector homotético asociado al grupo de similitudes  $H_4$  es  $\mathbf{X} = t\partial_t + (1 - p_1)x\partial_x + (1 - p_2)y\partial_y + (1 - p_3)z\partial_z$ . Existen tres soluciones exactas para los modelos de Bianchi tipo I autosimilares en vacío y/o con un fluido perfecto. Aquellas acopladas a fluido perfecto tienen ecuación de estado de la forma [33]  $p = p(\rho) = (\gamma - 1)\rho$ , con  $p$  la presión y  $\rho$  densidad de energía.

**Solución tipo FRW plana con fluido perfecto:** Es aquella solución con fluido perfecto en la que los exponentes son iguales,  $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{3\gamma}$ , y por tanto el elemento de línea (C.3) se puede escribir como  $ds^2 = -dt^2 + t^{\frac{4}{3\gamma}} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , que es la métrica de FRW ( $k=0$ ), en tiempo cosmológico, con factor de escala  $a(t) = t^{\frac{2}{3\gamma}}$ . Este es un espacio-tiempo plano con un fluido perfecto tal que  $\rho = \frac{4}{3\gamma^2} t^{-2}$ , y donde<sup>51</sup>  $0 < \gamma \leq 2$ .

**Solución de Kasner en vacío:** Es aquella solución en la que las constantes satisfacen que  $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ , y por tanto a  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  se les denomina los exponentes de Kasner. Estas soluciones fueron descubiertas por Kasner [50] en 1925 y posteriormente fueron estudiadas como modelos cosmológicos por primera vez por Lemaître [51] en 1933.

**Solución de Jacobs con un fluido perfecto rígido (stiff):** Es aquella solución que se da cuando  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ , pero  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 < 1$ . Esta solución es compatible con un fluido perfecto rígido ( $\gamma = 2$ ) y densidad de energía  $\rho = \frac{1}{2}(1 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)t^{-2}$ . Esta solución fue encontrada por Jacobs [52] en 1968.

### C.3.3. Modelos cosmológicos tipo $G_2$

La clase de modelos cosmológicos  $G_2$  son modelos cosmológicos  $(M, g)$  que admiten un grupo abeliano de isometrías  $G_2$  cuyo grupo de órbitas son 2-superficies tipo espacio. Así, una cosmología tipo  $G_2$  puede modelar inhomogeneidades espaciales (fluctuaciones de densidad, ondas gravitacionales, nucleosíntesis inhomogénea, inflación inhomogénea, etc...) con un grado de libertad. Las cosmologías tipo  $G_2$  se pueden clasificar dependiendo de como actúa el grupo de simetrías sobre el grupo de órbitas [33],

<sup>51</sup>La solución  $\gamma = 1$  corresponde a la solución de polvo, que es el espacio de Einstein-de Sitter.

1. *Actuación ortogonal a la superficie.* El grupo  $G_2$  admite un vector de Killing ortogonal a la hipersuperficie.
2. *Actuación ortogonalmente transitiva.* El grupo actúa ortogonalmente de forma transitiva, i.e. los 2-espacios ortogonales a las órbitas del grupo  $G_2$  forman superficie (surface-forming).
3. *Actuación Diagonal.* El grupo  $G_2$  admite dos vectores de Killing ortogonales al grupo de órbitas, lo que permite que el elemento de línea pueda ser escrito de forma diagonal.
4. *Actuación Plana simétrica (LRS).* En este caso se tiene una actuación diagonal de  $G_2$  que adicionalmente admite un grupo de isotropía de un parámetro.

Es de interés particular para este trabajo la actuación diagonal del grupo de simetrías sobre el grupo de órbitas. La construcción de la forma general de la métrica en este caso, se sigue en la sección 2.1.



# Referencias

- [1] Dodelson, S. “*Modern Cosmology*”, Academic Press, Elsevier (2003).
- [2] Mukhanov, V. “*Physical Foundations of Cosmology*”, Cambridge Univ. Press, UK (2005).
- [3] Tolman, R.C. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 169 (1934).
- [4] Thiemann, T. “*Modern canonical quantum general relativity*”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2007);  
Rovelli, C. “*Loop quantum gravity*”, Living Rev. Rel. **11**, 5 (2008).
- [5] Polchinski, J. “*String Theory. Volume I: An introduction to the bosonic string*”, Cambridge University Press (1998); “*String Theory. Volume II: Superstring theory and beyond*”, Cambridge University Press (1998).
- [6] Gowdy, R.H. *Phys. Rev. Lett.* **27**, 12 (1971).
- [7] Gowdy, R.H. *Ann. Phys.* **83**, 203 (1974).
- [8] Corichi, A.; Cortez, J. and Mena Marugán, G.A. *Phys. Rev. D* **73**, 041502 (2006).
- [9] Corichi, A.; Cortez, J. and Mena Marugán, G.A. *Phys. Rev. D* **73**, 084020 (2006).
- [10] Corichi, A.; Cortez, J.; Mena Marugán, G.A. and Velhinho, J.M. *Class. Quantum Grav.* **23**, 6301 (2006).
- [11] Cortez, J.; Mena Marugán, G.A. and Velhinho, J.M. *Phys. Rev. D* **75**, 084027 (2007).
- [12] Torre, C.G. *Int. J. Theo. Phys.* **34**, 4 (1999).
- [13] Woodhouse, S.C. “*English-Greek Dictionary: A Vocabulary of the Attic Language*”, Routledge & Kegan Paul (1964).
- [14] Weyl, H. “*The Classical Groups: their invariants and representations*”, Princeton University Press (1939).
- [15] Arnold, V.I. “*Mathematical Methods of Classical Mechanics*” (Graduate Texts in Mathematics, 60), Second edition, Springer-Verlag (1989).
- [16] Wald, R.M. “*Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*”, University of Chicago Press, Chicago (1994)

- [17] Newman, E.T. “*An Introduction to Complex Manifolds*”, notas sin publicar.
- [18] Reed, M. and Simon, B. “*Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis*”, Academic Press Inc., London, UK (1980).
- [19] Corichi, A.; Cortez, J. and Quevedo, H. *Ann. Phys.* **313**, 446 (2004).
- [20] Cortez, J. “*Operator valued distributions*”, notas sin publicar.
- [21] Hatfield, B. “*Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*”, Perseus Books, Cambridge, Ma. USA (1992).
- [22] De Witt, B. *Phys. Rev.* **160**, 1113, (1967)
- [23] Misner C. *Phys. Rev.* **186**, 1328, (1969); *Phys Rev. Lett.* **22**, 1071 (1969)
- [24] Kuchař, K. *Phys. Rev. D* **4**, 955 (1971)
- [25] Wald, R.M. “*General Relativity*”, University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [26] Smoot, G.F. *et al. Astrophys. J.* **371**, L1 (1991).
- [27] Spergel, D.N. *et al. Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [28] Penzias, A.A. and Wilson, R.W. *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).
- [29] Einstein, A. *Sitzungsber. Berl. Akad.* 142 (1917).
- [30] de Sitter, W. *Monthly Notices R. A. S.* **78**, 3 (1917).
- [31] Lemaitre, G. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A47**, 49 (1927).
- [32] Lemaitre, G. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **91**, 483 (1931).
- [33] Wainwright, J. and Ellis, G.F.R. “*Dynamical Systems in Cosmology*”, Cambridge Univ. Press, USA (1997).
- [34] Hubble, E. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15**, 168 (1929).
- [35] Weinberg, S. “*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*”, John Wiley & Sons (1972).
- [36] Perlmutter, S. and Schmidt, B.P. *Lect. Notes Phys.* **598**, 195 (2003).
- [37] Guggenheimer, H.W. “*Differential Geometry*”, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1st. ed. McGraw-Hill Book Company, Inc. USA (1963).
- [38] Einstein A. and Rosen N. *J. Franklin Inst.* **223**, 43 (1937)

- [39] Bondi, H. *Nature* **179**, 1072 (1957)
- [40] Moncrief, V. *Phys. Rev. D* **23**, 2 (1981).
- [41] Torre, C.G. *Phys.Rev.D* **66**, 084017 (2002).
- [42] Pierri, M. *Int. J. Theo. Phys. D* **11**, 1, 135 (2002).
- [43] Arfken, G.B. and Weber, H.J. “*Mathematical Methods for Physicists*”, fifth ed., Harcourt Academic Press, USA (2001).
- [44] Cortez, J.; Mena Marugán, G.A.; Olmedo, J and Velhinho, J.M. *Class. Quantum Grav.* **28**, 172001 (2011) Fast Track Communication.
- [45] Corichi, A.; Cortez, J. and Quevedo, H. *International Journal of Modern Physics D*, **11** 9, 1451 (2002).
- [46] Cortez, J.; Mena Marugán, G.A.; Olmedo, J; and Velhinho, J.M. *Phys. Rev. D* **86**, 104003 (2012).
- [47] Castelló Gomar, L; Cortez, J.; Martín-de Blas, D; Mena Marugán, G.A. and Velhinho, J.M. *JCAP* **1211**, 001 (2012).
- [48] Junker, W. *Rev. Math. Phys.* **14**, 511 (2002).
- [49] Stephani, H.; Kramer, D; Maccallum, M.; Hoenselaers, C. and Herlt, E. “*Exact Solutions to Einstein Field Equations*”, second ed., Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, USA (2003).
- [50] Kasner, E. *Trans. Amer. Math Soc.* **27**, 155 (1925).
- [51] Lemaitre, G. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* **53**, 51 (1933).
- [52] Jacobs, K.C. *Astrophys. J.* **153**, 661 (1968).