



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS DE GÉRMENES CONFORMES Y
FOLIACIONES HOLOMORFAS
INTEGRABLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JESÚS ALBERTO PALMA MÁRQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. DATOS DEL ALUMNO

Apellido Paterno:
Apellido Materno:
Nombres:
Universidad:
Facultad:
Carrera:
Número de cuenta:

1. DATOS DEL ALUMNO

Palma
Márquez
Jesús Alberto
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
305203762

2. DATOS DEL TUTOR

Grado:
Nombre:
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

2. DATOS DEL TUTOR

Dra.
Laura
Ortiz
Bobadilla

3. DATOS DEL SINODAL 1

Grado:
Nombre:
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

3. DATOS DEL SINODAL 1

Dr.
Xavier
Gómez Mont
Ávalos

4. DATOS DEL SINODAL 2

Grado:
Nombre:
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

4. DATOS DEL SINODAL 2

Dr.
Adolfo
Guillot
Santiago

5. DATOS DEL SINODAL 3

Grado:
Nombres :
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

5. DATOS DEL SINODAL 3

Dr.
José Antonio
Seade
Kuri

6. DATOS DEL SINODAL 4

Grado:
Nombre:
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

6. DATOS DEL SINODAL 4

Dra.
Adriana
Ortiz
Rodríguez

7. DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

Título:

Número de páginas:
Año:

7. DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

Grupos de gérmenes conformes y foliaciones holomorfas integrables
103 p
2014

Agradecimientos

A mis padres y a mis hermanas. A mi Madre le debo mucho del carácter mío, y sin lugar a duda, el hábito de responsabilidad. A mi Padre le doy gracias por enseñarme desde niño a disfrutar las Matemáticas, y haber sido mi primer profesor en esta ciencia, que ahora es mi vida, pero sobretodo por ser mi Padre y estar a mi lado. A mis hermanas, Janet y Vianey, que amo profundamente.

A mis abuelos maternos, que más que abuelos fueron mis padres durante toda mi infancia. A mi abuelo paterno, por enseñarme tantas cosas. Me siento afortunado de haber compartido tanto tiempo con él. Finalmente, a mi abuela paterna por su apoyo a lo largo de estos últimos doce años.

Por supuesto, agradezco a Joseline, con quien he descubierto lo que es amar profusamente a una mujer, por ser tan comprensiva.

Es necesario mencionar que sin el inconmensurable apoyo que he recibido hasta la fecha de Laura Ortiz, directora de esta tesis, no hubiese sido posible realizar este trabajo. Agradezco que haya aceptado trabajar conmigo. En estos más de tres años que la conozco he aprendido muchas Matemáticas. A ella también dedico esta tesis.

A Ernesto Rosales por enseñarme a crear imágenes de una manera sencilla y eficaz usando el programa *Inkscape*.

A todas las personas que asistieron a los seminarios organizados por Laura, donde expuse los avances de este trabajo. Gracias a sus observaciones y preguntas mejoré la redacción de mi tesis.

A cada uno de los sinodales por aceptar revisar mi trabajo, por sus sugerencias y correcciones hechas las veces que nos vimos.

Agradezco a la UNAM, en especial a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas, lugares ideales para contagiarse del cariño por las Matemáticas.

Esta Tesis fue realizada gracias a los Programas de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM «IN 103010» «Geometría de foliaciones y ecuaciones holomorfas.» e «IN 102413» «Geometría de ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones holomorfas.» Agradezco a la DGAPA - UNAM la beca recibida.

Reconozco además al Programa de Becas para Titulación - Exalumnos de Alto Rendimiento del PVE de la UNAM por la beca brindada.

Índice general

Introducción	v
1. Grupos finitamente generados de gérmenes conformes	1
1.1. Clasificación de gérmenes.	1
1.1.1. Linealización de Schröder-Koenigs.	6
1.2. Subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.	10
1.2.1. Clasificación formal y analítica de subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.	13
1.3. Grupos solubles.	17
1.4. Gérmenes integrables.	18
1.5. Dinámica generada por grupos de gérmenes conformes finitamente generados.	23
1.5.1. Órbitas periódicas y gérmenes periódicos.	25
2. Foliaciones	29
2.1. Ecuaciones diferenciales holomorfas.	29
2.2. Foliaciones holomorfas.	33
2.3. Holonomía.	36
2.4. Explosión de singularidades.	40
2.4.1. Explotando foliaciones.	42
2.4.2. Teorema de Seidenberg.	46
2.5. Foliaciones integrables.	47
2.5.1. Principales propiedades de las foliaciones integrables.	48
2.5.2. Integrabilidad de foliaciones reales en $(\mathbb{R}^2, 0)$.	51
2.6. Caracterización de las foliaciones integrables.	62
2.6.1. Primera caracterización.	62
2.6.2. Foliaciones simples.	63
A. Primeros auxilios	67
A.1. Productos infinitos.	67
A.2. Familias normales.	70
A.3. Un resultado de Teoría de Grupos.	73
A.4. Teorema de Extensión de Riemann.	75
A.5. El lenguaje de Formas en \mathbb{C}^2 .	77

A.5.1. 2-variedades holomorfas y haz tangente.	78
A.5.2. Formas en \mathbb{C}^2	79
A.5.3. Formas holomorfas.	83
Bibliografía	89

Introducción

El estudio cualitativo de los campos vectoriales holomorfos tuvo su origen esencialmente con los trabajos de Henri Poincaré (1854-1912). El punto medular en el razonamiento introducido por Poincaré fue el hacer uso de un análisis de carácter geométrico en el estudio de las ecuaciones diferenciales y los campos vectoriales que las definen. Este giro vino acompañado de un desarrollo sustancial de la Topología y requirió de un fuerte uso de la Teoría del Análisis Complejo.

Una de las muchas ideas introducidas y desarrolladas por Poincaré se basó en encontrar maneras de clasificar los campos vectoriales buscando, por una parte, invariantes de clasificación (formal, analítica y topológica), y por otra, las obstrucciones que pueden surgir para que un campo vectorial tenga el invariante deseado.

Aunado al análisis cualitativo de los campos vectoriales, Poincaré desarrolló, paralelamente, el estudio de las transformaciones de \mathbb{C}^n en \mathbb{C}^n y sus correspondientes invariantes. Este desarrollo paralelo del estudio de las transformaciones analíticas y de los campos vectoriales fue posteriormente continuado y profundizado por diversos matemáticos, entre ellos, Dulac, Siegel, Brjuno, Arnold, Chen, Sternberg, Takens, entre otros.

Por otra parte, el estudio del problema 16 propuesto por David Hilbert (1862-1943) en 1900, que consiste en determinar el número de ciclos límite que puede tener una ecuación diferencial polinomial en el plano real, dio lugar a un planteamiento global (en el plano proyectivo) y a una posterior complejificación del problema (en el plano proyectivo complejo). Este enfoque se inició con los trabajos de Dulac, Petrovsky y Landis y fue posteriormente impulsado por los trabajos de Ilyashenko, Gómez-Mont, Cerveau, Lins-Neto, entre otros.

El presente trabajo se enfoca, por un lado, en el estudio de los grupos de gérmenes de funciones holomorfas en $(\mathbb{C}, 0)$, y por otro, en la clasificación de las foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que son integrables.

En la primera parte analizamos los elementos y los subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$: El grupo formado por gérmenes de biholomorfismos en $(\mathbb{C}, 0)$. Concretamente, estudiamos la clasificación formal y analítica de los elementos y de los subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Por mencionar un ejemplo, demostramos el siguiente hecho:

Teorema. Si G es un subgrupo finitamente generado de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ topológicamente linealizable, es decir, tal que existe un homeomorfismo $\Psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ que conjuga a G con un subgrupo G' de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que consta de gérmenes de funciones lineales, entonces G es analíticamente linealizable.

Continuando con el análisis de los subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, posteriormente centramos nuestra atención en las propiedades dinámicas de éstos; para ello, introducimos la noción de solubilidad e integrabilidad en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y damos una clasificación de sus subgrupos finitamente generados en términos de su integrabilidad. En cuanto a la solubilidad de los subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, ésta se resume en el siguiente resultado:

Teorema. (Alternativa de Tits para grupos de gérmenes conformes). Un subgrupo G de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ o bien es metaabeliano, o bien es no soluble.

Lo que entenderemos por integrabilidad de un subgrupo G de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ será el hecho de que exista una función holomorfa $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ tal que quede invariante bajo los elementos del grupo G :

$$u \circ f = u, \forall f \in G.$$

La caracterización de los grupos integrables en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es bastante simple:

Teorema. Un grupo $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es integrable si y sólo si es cíclico finito.

Luego, vía un estudio adecuado de la dinámica de los subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ obtenemos una clasificación de éstos en términos de ella:

Teorema. Sea $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un grupo finitamente generado. Entonces G cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

- a) Cualquier pseudogrupo Γ asociado a G posee una cantidad no numerable de órbitas infinitas no periódicas.
- b) G es integrable.

Comenzamos el segundo capítulo recordando un par de hechos fundamentales en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; a saber, el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y el Teorema de rectificación. Inspirados en ellos, introducimos la noción de foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$, para después definir el grupo de holonomía asociado a una separatriz de una foliación, y la de explosión de singularidades, éstos resultan ser herramientas útiles para un mejor entendimiento de las foliaciones holomorfas.

La parte principal de nuestro trabajo se centra en analizar una clase particular de las foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$: Las foliaciones holomorfas integrables. Éstas son aquéllas cuyas hojas son las componentes conexas de las curvas

de nivel de una función holomorfa no constante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Como punto de partida, miramos sus principales propiedades analíticas y topológicas; para esto, hacemos uso de los resultados vistos en el primer capítulo acerca de subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$; demostramos que la noción de integrabilidad definida en subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tiene todo que ver con la integrabilidad de foliaciones holomorfas: El grupo de holonomía de cualquier foliación integrable es integrable, acorde con la definición de integrabilidad introducida en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Posteriormente nos restringimos al caso de integrabilidad de foliaciones reales analíticas en $(\mathbb{R}^2, 0)$. En este contexto hablamos de foliaciones hamiltonianas: Foliaciones definidas por las soluciones de ecuaciones de tipo hamiltoniano (o bien, definidas por los ceros de una 1-forma exacta), éstas resultan naturalmente ser integrables. Además, damos una demostración del Teorema de Poincaré-Lyapunov para foliaciones elípticas, es decir, foliaciones definidas por una ecuación diferencial (1-forma) cuya parte lineal es de tipo centro.

Teorema. (De Poincaré-Lyapunov). Una foliación real analítica elíptica en $(\mathbb{R}^2, 0)$ cuya singularidad es un centro, admite una primera integral real analítica con parte cuadrática no degenerada.

Debemos mencionar que la idea empleada en la demostración expuesta de este teorema, dada originalmente por Moussu en [13], es por sí misma interesante. A diferencia de otras demostraciones conocidas, la presentada es puramente geométrica. En ésta usamos el concepto de holonomía evanescente, introducido por Moussu, que no es otra cosa que la holonomía de la hoja excepcional de la explosión de una foliación holomorfa no dicrítica. Una vez más, la herramienta principal para comprender mejor dicha holonomía es el conocimiento de las propiedades dinámicas en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. El problema principal en este punto es el poder extender una integral del grupo de holonomía (o bien, del grupo de holonomía evanescente) a una integral de la foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ (o bien, en una vecindad del divisor excepcional de la explosión de la foliación original).

Finalmente, regresamos al caso de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ para dar una clasificación de las foliaciones integrables en términos de su forma topológica. Esta clasificación fue demostrada por J. F. Mattei y R. Moussu en 1980 en [12]. Ellos contestaron afirmativamente a una pregunta planteada por René Thom (1923-2002) en los años setenta del siglo pasado, que dice:

¿Es la simplicidad topológica de una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ una condición necesaria y suficiente para su integrabilidad?

De manera similar a como se demuestra el Teorema de Poincaré-Lyapunov, se da la respuesta a esta pregunta. Es decir, se analiza con detalle el grupo de holonomía evanescente de la foliación, se demuestra que dicho grupo es integrable, y se extiende la integral a una integral de la foliación; esta vez teniendo en cuenta la cantidad de explosiones necesarias para desingularizar a la foliación (lo cual es posible gracias al Teorema de Seidenberg).

Debido a que el estudio de foliaciones holomorfas es un punto donde concurren varias ramas de las Matemáticas, tales como la Topología, el Álgebra y el Análisis Complejo (en una y varias variables), entre otras, hemos reservado un apéndice, intitulado “Primeros auxilios”, para el repertorio de teoremas pertenecientes a dichas áreas de las Matemáticas usados a lo largo del texto que nos serán de ayuda para dar demostraciones completas a los resultados expuestos en este trabajo.

Capítulo 1

Grupos finitamente generados de gérmenes conformes

1.1. Clasificación de gérmenes.

En esta primera sección estudiaremos la clasificación formal y analítica de gérmenes de funciones holomorfas en $(\mathbb{C}, 0)$. Para esto, necesitamos aclarar qué es lo que entendemos por “germen de una función holomorfa” y qué queremos decir con “clasificación”, es decir, cuándo dos gérmenes son analíticamente (formalmente, topológicamente) equivalentes.

Definición 1.1.1. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Un *germen de función holomorfa* es la clase de equivalencia de funciones holomorfas definidas en vecindades de z_0 , (f, U) , donde (f_1, U_1) es equivalente a (f_2, U_2) si existe una vecindad $V \subset U_1 \cap U_2$ de z_0 donde f_1 y f_2 coinciden como funciones holomorfas.

Denotaremos por $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ al grupo de gérmenes de biholomorfismos que fijan al origen, $0 \in \mathbb{C}$, considerando a la composición como operación. Así mismo, a lo largo de este trabajo denotaremos indistintamente por $f(z) = az + O(z^k)$, o bien $f(z) = az + \dots$, $a \neq 0$, a aquellos elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ cuya parte lineal es distinta de cero y tales que $(f - a \text{id})z$ es una función k -plana en el origen, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Definición 1.1.2. Decimos que $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son *analíticamente (topológicamente, formalmente) equivalentes* si existe un germen de función holomorfa invertible (homeomorfismo, serie formal) h tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

En el caso de equivalencia formal la igualdad anterior se entiende como una igualdad coeficiente a coeficiente entre las expresiones formales de $h \circ f$ y $g \circ h$.

Proposición 1.1.3. Si $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son analíticamente (formalmente) equivalentes, entonces los coeficientes lineales de f y g coinciden.

Demostración. Sean $f(z) = \mu z + \dots$, $g(z) = \nu z + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ analíticamente (formalmente) equivalentes y sea $h(z) = z + \dots$ el germen de función holomorfa (serie formal) que conjuga a f con g , entonces $h \circ f = g \circ h$.

Pero, por un lado,

$$(h \circ f)(z) = h(\mu z + \dots) = \mu z + \dots,$$

y, por otro,

$$(g \circ h)(z) = g(z + \dots) = \nu z + \dots.$$

Entonces, necesariamente, $\mu = \nu$. □

Definición 1.1.4 (Notación). Sea f una función, con inversa f^{-1} , definimos por recursión:

$$\begin{aligned} f^0 &= id. \\ f^{n+1} &= f \circ f^n, \quad n \in \mathbb{N}. \\ f^{-n} &= (f^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La siguiente proposición es simplemente un cómputo que nos será de utilidad al momento de hacer algunas demostraciones posteriores.

Proposición 1.1.5. Si $f(z) = az + bz^k + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, entonces

$$f^n(z) = a^n z + a^{n-1} b \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j(k-1)} \right) z^k + \dots, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor o igual a $k+1$.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n . La base de inducción es clara.

Si $n = 2$, entonces:

$$\begin{aligned} f^2(z) &= f(az + bz^k + \dots) \\ &= a(az + bz^k + \dots) + b(az + bz^k + \dots)^k + \dots \\ &= a^2 z + abz^k + ba^k z^k + \dots \\ &= a^2 z + ab(1 + a^{k-1})z^k + \dots. \end{aligned}$$

Sea $n > 2$ y supongamos que el resultado es cierto para todo número natural $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n-1$. Tenemos que $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$, pero, por hipótesis de inducción, sabemos que

$$f^{n-1}(z) = a^{n-1} z + a^{n-2} b \left(\sum_{j=0}^{n-2} a^{j(k-1)} \right) z^k + \dots.$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned}
f^n(z) &= f\left(a^{n-1}z + a^{n-2}b\left(\sum_{j=0}^{n-2} a^{j(k-1)}\right)z^k + \dots\right) \\
&= a\left(a^{n-1}z + a^{n-2}b\left(\sum_{j=0}^{n-2} a^{j(k-1)}\right)z^k + \dots\right) + b(a^{n-1}z + \dots)^k + \dots \\
&= a^n z + a^{n-1}b\left(\sum_{j=0}^{n-2} a^{j(k-1)}\right)z^k + ba^{(n-1)k}z^k + \dots \\
&= a^n z + a^{n-1}b\left(\sum_{j=0}^{n-2} a^{j(k-1)} + a^{(n-1)(k-1)}\right)z^k + \dots \\
&= a^n z + a^{n-1}b\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j(k-1)}\right)z^k + \dots.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$f^n(z) = a^n z + a^{n-1}b\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j(k-1)}\right)z^k + \dots.$$

Así, en virtud del principio de inducción, la demostración está completa. \square

Debido a que en adelante usaremos con frecuencia la noción de equivalencia entre gérmenes de funciones analíticas introducida en la Definición 1.1.2, es importante saber algo más sobre la función h que realiza la equivalencia entre dos gérmenes $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, es decir, $h \circ f = g \circ h$. En particular, como $g = h \circ f \circ h^{-1}$, será para nosotros relevante conocer los coeficientes significativos (en términos de lo que haremos posteriormente) de h^{-1} .

Proposición 1.1.6. Si $h(z) = az + bz^k + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $a, b \neq 0$, entonces

$$h^{-1}(z) = a^{-1}z - \frac{b}{a^{k+1}}z^k + \dots.$$

Demostración. Supongamos que $h^{-1}(z) = \alpha z + \beta z^m + \dots$, entonces

$$\begin{aligned}
(h \circ h^{-1})(z) &= h(\alpha z + \beta z^m + \dots) \\
&= a(\alpha z + \beta z^m + \dots) + b(\alpha z + \beta z^m + \dots)^k + \dots \\
&= a\alpha z + a\beta z^m + b\alpha^k z^k + \dots.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
(h^{-1} \circ h)(z) &= h^{-1}(az + bz^k + \dots) \\
&= \alpha(az + bz^k + \dots) + \beta(az + bz^k + \dots)^m + \dots \\
&= \alpha az + \alpha bz^k + \beta a^m z^m + \dots.
\end{aligned}$$

Pero, $(h \circ h^{-1})(z) = (h^{-1} \circ h)(z) = z$. Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\alpha = a^{-1}, m = k \text{ y } \beta = -\frac{b}{a^{k+1}}.$$

Concluimos así que, $h^{-1}(z) = a^{-1}z - \frac{b}{a^{k+1}}z^k + \dots$. \square

En algunas ocasiones resulta de mucha utilidad conocer no sólo el primer coeficiente distinto de cero de los términos no lineales de h^{-1} , sino también estimar el orden de tangencia al origen del siguiente monomio.

Lema 1.1.7. *Si $h_k(z) = z + \mu_k z^k$, entonces $h_k^{-1}(z) = z - \mu_k z^k + O(z^{2k-1})$.*

Demostración. Consideremos $g(z) = z + \nu_r z^r + O(z^{r+1})$ tal que

$$(h_k \circ g)(z) = (g \circ h_k)(z) = z.$$

Entonces

$$\begin{aligned} h_k(g(z)) &= z + \nu_r z^r + O(z^{r+1}) + \mu_k (z + \nu_r z^r + O(z^{r+1}))^k \\ &= z + \nu_r z^r + \mu_k z^k + \mu_k k \nu_r z^{r+k-1} + O(z^{r+1}) + O(z^{r+k}) = z. \end{aligned}$$

En consecuencia, para que se satisfaga la última igualdad, necesariamente $r = k$ y $\nu_r = -\mu_k$. Por tanto,

$$-k\mu_k^2 z^{2k-1} + O(z^{k+1}) + O(z^{2k}) = 0.$$

Observamos que los términos desde r hasta $2k - 2$ tienen que ser cero para que se cumpla la igualdad. Por lo tanto, la expresión de g finalmente es

$$g(z) = z - \mu_k z^k + O(z^{2k-1}).$$

Es decir, $h_k^{-1}(z) = z - \mu_k z^k + O(z^{2k-1})$. \square

Uno de los hechos sorprendentes de la clasificación formal lo constituye el siguiente resultado que nos da condiciones para la equivalencia formal de un germen de función holomorfa y su parte lineal.

Teorema 1.1.8. *Si $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y $a_1 \notin \exp 2\pi i \mathbb{Q} \cup \{0\}$, entonces f es formalmente linealizable. Es decir, existe h una serie formal tal que $(h \circ f \circ h^{-1})(z) = a_1 z$.*

Demostración. Probaremos esta afirmación eliminando cada uno de los términos no lineales de f mediante una sucesión de cambios polinomiales de la forma $h_n(z) = z + \mu_n z^n$, $n \geq 2$.

Sea $h_2(z) = z + \mu_2 z^2$, por el Lema 1.1.7, sabemos que $h_2^{-1}(z) = z - \mu_2 z^2 + O(z^3)$. Si llamamos $g = f \circ h_2^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z - \mu_2 z^2 + O(z^3)) \\ &= a_1(z - \mu_2 z^2 + O(z^3)) + a_2(z - \mu_2 z^2 + O(z^3))^2 + O(z^3) \\ &= a_1 z + (a_2 - a_1 \mu_2) z^2 + O(z^3). \end{aligned}$$

De esta manera, $(h_2 \circ f \circ h_2^{-1})(z) = (h_2 \circ g)(z)$, es decir,

$$\begin{aligned} (h_2 \circ g)(z) &= h_2(a_1z + (a_2 - a_1\mu_2)z^2 + O(z^3)) \\ &= a_1z + (a_2 - a_1\mu_2)z^2 + O(z^3) + \mu_2(a_1z + (a_2 - a_1\mu_2)z^2 + O(z^3))^2 \\ &= a_1z + (a_2 + \mu_2a_1(a_1 - 1))z^2 + O(z^3). \end{aligned}$$

Entonces, para eliminar el término cuadrático de f basta definir

$$\mu_2 = \frac{-a_2}{a_1(a_1 - 1)}.$$

Observamos que en nuestro caso es posible definir μ_2 , ya que por hipótesis $a_1 \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q} \cup \{0\}$.

Supongamos ahora que hemos logrado eliminar cada uno de los términos no lineales de f hasta el grado $n - 1$, $n > 2$. Encontramos qué expresión debe de tener $h_n(z) = z + \mu_n z^n$ para que podamos eliminar el término de grado n . Para llevar a cabo esto, supongamos que después de haber aplicado la composición $h_{n-1} \circ \dots \circ h_3 \circ h_2$ hemos llegado a la expresión:

$$g(z) = a_1z + b_n z^n + O(z^{n+1}).$$

Por otro lado, nuevamente por el Lema 1.1.7, tenemos que $h_n^{-1}(z) = z - \mu_n z^n + O(z^{2n-1})$. De modo que, haciendo un cómputo totalmente análogo al hecho en el caso de h_2 , podemos observar que

$$(h_n \circ g \circ h_n^{-1})(z) = a_1z + (b_n + \mu_n a_1(a_1^{n-1} - 1))z^n + O(z^{n+1}).$$

Por lo cual, si deseamos eliminar el término de grado n basta con que definamos

$$\mu_n = \frac{-b_n}{a_1(a_1^{n-1} - 1)}.$$

Nuevamente el coeficiente μ_n está bien definido ya que estamos suponiendo que $a_1 \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q} \cup \{0\}$. Por lo tanto, para establecer la equivalencia formal entre f y su parte lineal $g(z) = a_1z$, definimos¹ h como sigue:

$$h := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \circ \dots \circ h_3 \circ h_2.$$

□

Observación 1.1.9. El método de aproximaciones sucesivas que hemos empleado para demostrar el Teorema 1.1.8 está dado por la construcción de polinomios h_k con parte lineal distinta de cero, así que, por el Teorema de la función inversa, está bien definida localmente h_k^{-1} . Por esta razón, toda composición finita de polinomios h_k es analítica.

Esta observación implica que si $f(z) = az + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es tal que $a \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q} \cup \{0\}$, entonces f es analíticamente equivalente (localmente) a $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, con $g(z) = az + O(z^r)$, con r tan grande como se desee.

¹Llamemos $H_n := h_n \circ \dots \circ h_3 \circ h_2$. La transformación $H_n \circ f \circ H_n^{-1}$, como se ilustra en la demostración, es tal que todos sus coeficientes no lineales de orden menor a n son nulos. Así, el germen obtenido, h , realiza la linealización y está bien definido como serie formal.

Veamos ahora qué sucede cuando consideramos el germen de una función cuya parte lineal es idénticamente cero.

Teorema 1.1.10. *Si $f(z) = z^k + \alpha z^m + O(z^{m+1})$, $m > k$, entonces f es formalmente equivalente a $g(z) = z^k$.*

Demostración. La demostración que daremos sigue la misma idea que desarrollamos para demostrar el Teorema 1.1.8.

Consideremos una función de la forma $h_s(z) = z + \mu_s z^s$, donde $s \in \mathbb{N}$ y $s > k$. Ya sabemos que $h_s^{-1}(z) = z - \mu_s z^s + O(z^{2s-1})$, resta hacer el cómputo de $h_s \circ f \circ h_s^{-1}$ y verificar qué condiciones deben cumplir s y μ_s para lograr nuestro propósito. Hagámoslo por partes; primero consideremos $h = f \circ h_s^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} h(z) &= f(z - \mu_s z^s + O(z^{2s-1})) \\ &= (z - \mu_s z^s + O(z^{2s-1}))^k + \alpha(z - \mu_s z^s + O(z^{2s-1}))^m + O(z^{m+1}) \\ &= z^k - k\mu_s z^{k+s-1} + \alpha z^m + O(z^{m+1}). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (h_s \circ h)(z) &= h_s(z^k - k\mu_s z^{k+s-1} + \alpha z^m + O(z^{m+1})) \\ &= z^k - k\mu_s z^{k+s-1} + \alpha z^m + O(z^{m+1}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, si $s = m - k + 1$ tenemos que

$$(h_s \circ f \circ h_s^{-1})(z) = z^k + (\alpha - k\mu_s)z^m + O(z^{m+1}).$$

Y por lo tanto, basta considerar $\mu_s = \frac{\alpha}{k}$ para eliminar el término de grado m .

En resumen, si definimos $h_s(z) = z + \frac{\alpha}{k} z^{m-k+1}$, entonces

$$(h_s \circ f \circ h_s^{-1})(z) = z^k + O(z^{m+1}).$$

De esta forma, hemos mostrado que siempre es posible eliminar cualquier término de grado $m > k$ en $f(z) = z^k + \dots$ con polinomios h_s . Por lo tanto, por un argumento totalmente análogo al empleado en la demostración del Teorema 1.1.8, concluimos que f es formalmente equivalente a $g(z) = z^k$. \square

1.1.1. Linealización de Schröder-Koenigs.

Previo a nuestro estudio de grupos finitamente generados de gérmenes conformes recordemos un teorema conocido, a saber, el Teorema de linealización de Schröder (Ernst Schröder (1841-1902)) - Koenigs (Gabriel Koenigs (1858-1931)). Éste nos dice que, si la parte lineal de un germen conforme tiene módulo distinto de uno, es posible linealizarlo analíticamente.

Para la demostración que daremos a continuación de este teorema necesitamos el siguiente resultado del Análisis Complejo.

Teorema 1.1.11. ² El producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, y $1 + a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.12 (Linealización de Schröder (1870) - Kœnigs (1884)). *El germen $f(z) = \mu z + O(z^2) \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es analíticamente linealizable si $|\mu| \neq 1$. Es decir, existe $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, una función analítica en una vecindad del origen, tal que $(h \circ f)(z) = \mu h(z)$.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|\mu| < 1$ (si $|\mu| > 1$ bastaría considerar $f^{-1}(z) = \mu^{-1}z + O(z^2)$ y seguir la misma demostración que daremos a continuación).

Como $f'(0) = \mu$ y $|\mu| < 1$, existen constantes $r > 0$ y $\nu > 0$ tales que:

$$|f'(z)| \leq \nu < 1 \text{ si } |z| \leq r. \quad (1.1)$$

Para cada $z \in \overline{B(0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ consideremos la trayectoria $\alpha_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\alpha_z(t) = tz$. Así, $\alpha_z(0) = 0$, $\alpha_z(1) = z$ y $\alpha'_z(t) = z$ para todo $t \in [0, 1]$.

De esta manera, dado $z \in \overline{B(0, r)}$, se sigue que:

$$f(z) - f(0) = \int_0^1 f'(\alpha_z(t)) \cdot \alpha'_z(t) dt = \int_0^1 f'(tz) \cdot z dt.$$

Pero $f(0) = 0$, entonces,

$$|f(z)| = \left| \int_0^1 f'(tz) \cdot z dt \right| \leq \int_0^1 |f'(tz)| |z| dt.$$

Además $tz \in \overline{B(0, r)}$ para todo $t \in [0, 1]$, por lo cual, usando la desigualdad (1.1), tenemos que

$$|f(z)| \leq \int_0^1 |f'(tz)| |z| dt \leq \int_0^1 \nu |z| dt = \nu |z|.$$

Es decir,

$$|f(z)| \leq \nu |z| \quad \forall z \in \overline{B(0, r)}.$$

E inductivamente,

$$|f^n(z)| \leq \nu^n |z| \quad \forall z \in \overline{B(0, r)}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones $h_n : \overline{B(0, r)} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$h_n(z) = \frac{f^n(z)}{\mu^n}.$$

Afirmamos que la sucesión (h_n) converge uniformemente en $\overline{B(0, r)}$ a una función holomorfa h . En efecto, observemos que

$$h_{n+1}(z) = h_1(z) \prod_{k=1}^n \frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)}, \quad (1.3)$$

²La demostración se encuentra en el Apéndice. Ver Teorema A.1.5.

y

$$\frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)} = \frac{f^{k+1}(z)}{\mu^{k+1}} \cdot \frac{\mu^k}{f^k(z)} = \frac{f(f^k(z))}{\mu f^k(z)}.$$

Por lo que, si llamamos $z_k := f^k(z)$, la ecuación anterior queda expresada como

$$\frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)} = \frac{f(z_k)}{\mu z_k}. \quad (1.4)$$

Por otro lado, recordemos que por hipótesis $f(z) = \mu z + O(z^2)$; es decir, $f(z) = \mu z(1 + O(z))$. Equivalentemente,

$$\frac{f(z)}{\mu z} = 1 + \xi(z), \text{ donde } |\xi(z)| \leq \beta|z|, \beta \in \mathbb{R}, z \in \overline{B(0, r)}. \quad (1.5)$$

Luego, por (1.4) y (1.5) llegamos a la expresión

$$\frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)} = 1 + \xi(z_k).$$

Por lo tanto, de esta última igualdad y recordando la expresión de h_{n+1} dada en (1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} h_{n+1}(z) &= h_1(z) \prod_{k=1}^n (1 + \xi(z_k)) = \frac{f(z)}{\mu} \prod_{k=1}^n (1 + \xi(z_k)) \\ &= \frac{\mu z(1 + \xi(z))}{\mu} \prod_{k=1}^n (1 + \xi(z_k)) \\ &= z \prod_{k=0}^n (1 + \xi(z_k)). \end{aligned}$$

Así,

$$h_{n+1}(z) = z \prod_{k=0}^n (1 + \xi(z_k)), \quad \forall z \in \overline{B(0, r)}.$$

Para finalizar la demostración de esta afirmación, observemos que, por la desigualdad (1.2) y como $|\xi(z)| \leq \beta|z|$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\xi(z_k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta|z_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \beta|f^k(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta \nu^k |z| = \beta|z| \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k.$$

Pero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k < \infty \text{ ya que } \nu < 1.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.1.11, concluimos que (h_n) converge uniformemente a una función holomorfa h definida en $\overline{B(0, r)}$. Finalmente, verifiquemos

que, en efecto, $(h \circ f)(z) = \mu h(z)$.

$$\begin{aligned} (h \circ f)(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(f(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(f(z))}{\mu^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \frac{f^{n+1}(z)}{\mu^{n+1}} = \mu \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n+1}(z) \\ &= \mu h(z). \end{aligned}$$

Es decir, $(h \circ f)(z) = \mu h(z)$, como queríamos demostrar. \square

Si consideramos ahora $f(z) = \mu z + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y suponemos que existe una vecindad del origen (contenida propiamente en \mathbb{C}) que sea invariante bajo f , entonces también podemos linealizar analíticamente a f . Dicho resultado es conocido como el Teorema del dominio invariante y lo demostraremos enseguida. La demostración que daremos aquí tiene la misma esencia que la prueba del Teorema de Schröder-Koenigs; encontraremos la función que realiza la linealización de f como el límite de una sucesión de funciones analíticas. Para demostrar la convergencia de dicha sucesión usaremos un teorema, debido a Paul Montel (1876-1975), que nos dice cuándo una familia de funciones analíticas es normal; es decir, cuándo sucede que cualquier sucesión contenida en una familia de funciones analíticas dada contiene una subsucesión convergente³.

Teorema 1.1.13 (De Montel). *Una familia \mathfrak{F} de funciones analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ es normal si las funciones $f \in \mathfrak{F}$ están uniformemente acotadas en cualquier subconjunto compacto de U .*

Teorema 1.1.14 (Del dominio invariante). *Si $f(z) = \mu z + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y si $U \subset \mathbb{C}$ es una vecindad del origen, $U \neq \mathbb{C}$, en la cual f está bien definida y $f(U) \subset U$, entonces f es analíticamente linealizable.*

Demostración. Tenemos dos casos.

Si $|\mu| < 1$, el resultado es inmediato por el Teorema 1.1.12.

Si $|\mu| = 1$, consideremos la familia de funciones $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida en U y dada por

$$h_n(z) = \frac{f^n(z)}{\mu^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal. En efecto, sea $K \subset U$ compacto, entonces $f(K) \subset f(U)$, y puesto que $f(U) \subset U$ por hipótesis, tenemos que $f(K) \subset U$. Inductivamente, $f^m(K) \subset U$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ahora, como f es analítica, f^m es continua para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, $f^m(K)$ es compacto y por tanto está acotado. Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $\nu_m > 0$ tal que

$$|z| \leq \nu_m \text{ si } z \in f^m(K).$$

Pero la sucesión (ν_n) está acotada, ya que $f(U) \subset U$ y $U \neq \mathbb{C}$. En consecuencia, existe $\nu > 0$ tal que $\nu_k \leq \nu$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

³Una discusión sobre familias normales, que incluye la demostración del Teorema de Montel, se encuentra en el Apéndice. Ver sección A.2.

Para concluir la demostración de esta afirmación observemos que $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones uniformemente acotadas en K . En efecto, sean $z \in K$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$|h_n(z)| = \left| \frac{f^n(z)}{\mu^n} \right| = |f^n(z)|.$$

Pero, como vimos anteriormente, $|f^k(z)| \leq \nu$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$|h_n(z)| \leq \nu.$$

Lo cual nos dice que $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones uniformemente acotadas en K . Finalmente, en virtud del Teorema 1.1.13, $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia normal.

Consecuentemente, como $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal, existe (h_{n_r}) una subsucesión convergente de (h_n) . Digamos que $h_{n_r} \rightarrow h$. Resta observar que h es la función buscada.

$$\begin{aligned} (h \circ f)(z) &= \lim_{r \rightarrow \infty} h_{n_r}(f(z)) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f^{n_r}(f(z))}{\mu^{n_r}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mu \frac{f^{n_r+1}(z)}{\mu^{n_r+1}} \\ &= \mu \lim_{r \rightarrow \infty} h_{n_r+1}(z) \\ &= \mu h(z). \end{aligned}$$

Es decir, $(h \circ f)(z) = \mu h(z)$, como queríamos demostrar. \square

Observación 1.1.15. Otra demostración de este teorema puede ser realizada utilizando la normalidad de la familia de funciones analíticas $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu^k} f^k(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

El argumento para demostrar su normalidad es análogo al que hemos hecho para el caso de la familia de funciones analíticas $\{h_n\}$ usada en la demostración anterior.

1.2. Subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Hasta ahora hemos visto algunas propiedades acerca de los elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, es decir, de los gérmenes de biholomorfismos en el origen. Enseguida estudiaremos a los subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$; precisamente, a los subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Para evitar confusión alguna, recordemos qué entendemos por un grupo finitamente generado.

Definición 1.2.1. Decimos que un grupo G es *finitamente generado* si existen elementos $g_1, \dots, g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, tales que cualquier elemento $g \in G$ puede ser representado como el producto finito de los elementos g_j , $j \in \{1, \dots, n\}$.

Al conjunto $\{g_j\}_{j=1}^n$ comúnmente se le llama *sistema de generadores* de G . Además, se suele denotar $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ para indicar que G está finitamente generado por $\{g_j\}_{j=1}^n$.

La Definición 1.1.2 puede ser extendida al caso de subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de manera natural.

Definición 1.2.2. Decimos que dos subgrupos finitamente generados G, G' de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son *analíticamente (topológicamente, formalmente) equivalentes* si podemos elegir dos sistemas de generadores $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ y $G' = \langle f'_1, \dots, f'_n \rangle$ que son conjugados simultáneamente por el germen de una función holomorfa invertible (homeomorfismo, serie formal) h tal que $h \circ f_j = f'_j \circ h$, $j = 1, \dots, n$.

Observación 1.2.3. De las Definiciones 1.1.2 y 1.2.2 claramente tenemos el siguiente hecho: Si dos gérmenes conformes $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son analíticamente, topológicamente o formalmente equivalentes, entonces los subgrupos cíclicos $\langle f \rangle, \langle g \rangle \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ generados por estos gérmenes son equivalentes en el sentido correspondiente. En particular, ambos deben ser finitos o infinitos.

Observación 1.2.4. Si dos grupos finitamente generados $G, G' \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son conjugados, entonces son isomorfos en el sentido de Teoría de Grupos. Para ver esto, suponiendo que h es el germen de función holomorfa (homeomorfismo, serie formal) que conjugua a ambos grupos, podemos considerar el morfismo dado por $h \circ _ \circ h^{-1}$. Así, cualquier relación entre los generadores de un grupo será cierta automáticamente en el segundo, y viceversa.

Empero, la afirmación inversa no siempre es cierta. Para dejar claro esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.5. Sean $G = \langle f \rangle$ y $H = \langle g \rangle$ dos subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tales que $f(z) = \mu z$ y $g(z) = \nu z$, con $\nu, \mu \notin \exp 2\pi i \mathbb{Q}$ y $\mu \neq \nu$. Considerando el morfismo

$$h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ f^n(z) = \mu^n z & \longmapsto & g^n(z) = \nu^n z; \quad n \in \mathbb{Z}, \end{array}$$

no es difícil convencerse de que h es un isomorfismo (de hecho, ambos son grupos cíclicos infinitos, $G \cong H \cong \mathbb{Z}$). Pero como $\mu \neq \nu$, por la Proposición 1.1.3, sabemos que f y g no son analíticamente (formalmente) equivalentes. Luego, G y H tampoco lo son.

Ejemplo 1.2.6. Si $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ está generado por un número finito de gérmenes lineales $f_j : z \mapsto \mu_j z$, entonces G es conmutativo.

Consideremos el morfismo $T : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^*$, dado por

$$Tg = \frac{dg}{dz}(0) \in \mathbb{C}^*,$$

donde \mathbb{C}^* denota al grupo multiplicativo conformado por los elementos distintos de cero de \mathbb{C} .

Que T resulte ser un morfismo de grupos se sigue de la regla de la cadena para la operación de derivación,

$$T(g \circ f) = Tg \cdot Tf = Tf \cdot Tg.$$

En consecuencia, tomando en cuenta la restricción de este morfismo a G , $T|_G$, G resulta ser isomorfo a un subgrupo del grupo multiplicativo \mathbb{C}^* . Por lo tanto, G es conmutativo.

Por otra parte, analicemos cuál es el núcleo de T :

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) : Tg = 1\} \\ &= \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) : \frac{dg}{dz}(0) = 1\} \\ &= \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) : g(z) = z + O(z^2)\}. \end{aligned}$$

Así, $\text{Ker } T = \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) : g(z) = z + O(z^2)\}$.

Definición 1.2.7. $\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) =: \text{Ker } T$ es llamado el *subgrupo parabólico* de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y sus elementos son llamados *gérmenes parabólicos*.

Además, consideraremos los conjuntos

$$\mathcal{A}_p = \{g \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) : g(z) = z \cdot (1 + az^p + \dots), a \neq 0\},$$

y diremos que p es el *nivel* de un germen conforme $g \in \mathcal{A}_p$. Así,

$$\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) \setminus \{id\} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_3 \sqcup \dots$$

Observación 1.2.8. El nivel de un germen conforme es invariante bajo conjugación. En efecto, sea $g \in \mathcal{A}_p$ y sea $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, tal que $h(z) = z + bz^k + \dots$, entonces, por la Proposición 1.1.6, tenemos que h^{-1} es de la forma $h^{-1}(z) = z - bz^k + \dots$. Veamos que $h \circ g \circ h^{-1} \in \mathcal{A}_p$.

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ h^{-1})(z) &= (h \circ g)(z - bz^k + \dots) \\ &= h(z - bz^k + a(z - bz^k + \dots)^{p+1} + \dots) \\ &= h(z - bz^k + az^{p+1} + \dots) \\ &= z - bz^k + az^{p+1} + b(z - bz^k + az^{p+1} + \dots)^k + \dots \\ &= z - bz^k + az^{p+1} + bz^k + \dots \\ &= z \cdot (1 + az^p) + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h \circ g \circ h^{-1} \in \mathcal{A}_p$.

Observación 1.2.9. Si consideramos $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que no contiene elementos parabólicos no triviales, es decir, $G \cap \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) = \{id\}$, entonces $T|_G$ es inyectivo, y por lo tanto G necesariamente es conmutativo, pues resulta ser isomorfo a un subgrupo de \mathbb{C}^* . Esto generaliza lo visto en el Ejemplo 1.2.6.

1.2.1. Clasificación formal y analítica de subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

A continuación enunciamos y demostramos el Teorema de linealización de Bochner (Salomon Bochner (1899-1982)), el cual afirma que todo subgrupo finito de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es linealizable. Después, usando este teorema, veremos que, de hecho, cualquier subgrupo finitamente generado de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que todos sus elementos tienen orden finito, es linealizable. Este último resultado nos será de gran utilidad, ya que, como veremos posteriormente, podremos establecer una clasificación de los subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, la cual a su vez nos permitirá dar una clasificación óptima de las foliaciones holomorfas integrables en $(\mathbb{C}^2, 0)$, introducidas en el siguiente capítulo.

Teorema 1.2.10 (De linealización de Bochner). *Cualquier subgrupo finito $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es linealizable. Es decir, podemos encontrar un biholomorfismo $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $h \circ g \circ h^{-1}$ es lineal para toda $g \in G$.*

Demostración. Para cada $g \in G$ consideremos $\mu_g = Tg$ y definamos h como sigue:

$$h := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mu_g^{-1} \cdot g.$$

Cabe hacer notar que la definición de h tiene sentido ya que se trata de una suma finita de elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Además $Th \in \mathbb{C}^*$, también por la finitud de G , pues

$$Th = T \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mu_g^{-1} \cdot g \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = \frac{1}{|G|} \cdot |G| = 1 \neq 0, |G| \in \mathbb{N} \subset \mathbb{C}^*.$$

Así, h es invertible.

Por último, veamos que, en efecto, h linealiza al grupo G . Sea $f \in G$ tal que $\mu_f = Tf$, entonces

$$\begin{aligned} h \circ f &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mu_g^{-1} \cdot (g \circ f) \\ &= \mu_f \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mu_f^{-1} \mu_g^{-1} \cdot (g \circ f) \\ &= \mu_f \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\mu_g \mu_f)^{-1} \cdot (g \circ f) \\ &= \mu_f \frac{1}{|G|} \sum_{\tilde{g} \in G} \mu_{\tilde{g}}^{-1} \cdot \tilde{g} \\ &= \mu_f \cdot h. \end{aligned}$$

Donde $\tilde{g} = g \circ f$ para cada g elemento de G .

Por lo tanto, tenemos que $h \circ f = \mu_f \cdot h$. Es decir, h conjuga a f con el germen lineal $z \mapsto \mu_f z$, como queríamos demostrar. \square

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente resultado.

Teorema 1.2.11. *Un germen $f : z \mapsto \mu z + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, con $\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$, es formalmente linealizable si y sólo si es analíticamente linealizable.*

Demostración. Una dirección es claramente trivial. Sea f como en el enunciado del teorema y supongamos que h es un germen formal que linealiza a f . Así, por la Observación 1.2.3, tenemos que $\langle f \rangle$ es formalmente equivalente a $\langle f_\mu \rangle$, donde $f_\mu(z) = \mu z$.

Ahora, dado que μ es raíz de la unidad, podemos suponer que $\mu = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, esto nos dice que

$$f_\mu(z)^q = \mu^q z = z.$$

De esta manera, h conjuga al germen holomorfo f^q con la identidad. Sin embargo, la única función holomorfa formalmente equivalente a la identidad es la identidad misma, por lo tanto $f^q = id$; es decir, f es periódico, equivalentemente, $\langle f \rangle$ es finito. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.10, f es analíticamente linealizable. \square

Veamos ahora que podemos reemplazar la hipótesis de la finitud del grupo en el Teorema 1.2.10 por la suposición de que todos los elementos de este grupo tengan orden finito. Para hacer esto, necesitamos recordar qué es el subgrupo conmutador de un grupo dado y traducir esta idea a nuestro lenguaje de gérmenes conformes.

Definición 1.2.12. Sea G un grupo. El *subgrupo conmutador* de G es aquél generado por todos los elementos de la forma

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}, \quad \forall a, b \in G.$$

Al elemento $[a, b]$ lo llamamos el *conmutador* de a con b . Denotamos por $[G, G]$ al subgrupo conmutador de G y comúnmente nos referimos a él simplemente como el conmutador de G .

Observación 1.2.13. Un grupo G es conmutativo si y sólo si $[G, G]$ es trivial; es decir, si $[G, G] = \{e\}$, donde e es el elemento neutro de G . En efecto, si G es conmutativo, entonces

$$aba^{-1}b^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = e, \quad \forall a, b \in G.$$

Así, $[G, G] = \{e\}$.

Inversamente, si $[G, G] = \{e\}$, entonces dados $a, b \in G$ tenemos que $[a, b] = e$, es decir, $aba^{-1}b^{-1} = e$. Por lo tanto, $ab = ba$.

Observación 1.2.14. En nuestro caso particular, al considerar solamente subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, los elementos de $[G, G]$ son de la forma $[f, g] = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$. En consecuencia, $T[f, g] = 1$ para cualquier $[f, g] \in [G, G]$. Es decir, $[G, G] \subset \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0)$.

Teorema 1.2.15. *Si G es un subgrupo finitamente generado de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que todos sus elementos tienen orden finito, entonces G es conmutativo, finito, analíticamente linealizable y cíclico.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que G es no conmutativo. Entonces, por la Observación 1.2.13, existe un germen f en el conmutador de G , $f \in [G, G]$, no trivial, es decir, $f \neq id$. Además, por la Observación 1.2.14, podemos suponer que

$$f(z) = z + bz^k + \dots, \text{ con } b \neq 0.$$

Así, por la Proposición 1.1.5, considerando $a = 1$, observamos que

$$f^n(z) = z + nbz^k + \dots \neq id, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto último contradice la hipótesis de que f tiene orden finito. Luego, G es conmutativo. Del hecho de que G sea un grupo finitamente generado conmutativo tal que todos sus elementos tienen orden finito, podemos concluir que G resulta ser un grupo finito. En efecto, si $G = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ es conmutativo, entonces para cualquier elemento de G existen números enteros $s_1, s_2, \dots, s_m \in \mathbb{Z}$ tales que éste puede ser escrito como $f_1^{s_1} \circ f_2^{s_2} \circ \dots \circ f_m^{s_m}$. De esta manera, como todos los elementos de G tienen orden finito, la cantidad de combinaciones entre los generadores de G son una cantidad finita. En consecuencia, por el Teorema 1.2.10, G es analíticamente linealizable. Tenemos así que G es isomorfo a un subgrupo multiplicativo finito de \mathbb{C}^* , pero sabemos que cualquier subgrupo finito de \mathbb{C}^* es cíclico⁴. Por lo tanto G es cíclico. \square

Proposición 1.2.16. *Sea $f(z) = \mu z + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ linealizable (analíticamente, formalmente o topológicamente). En este caso, f es periódico (tiene orden finito) si y sólo si $\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$.*

Demostración. Si $\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$, como f es linealizable, es decir, es equivalente a $f_\mu(z) = \mu z$, entonces, de la periodicidad del germen f_μ ($\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$), y de la Observación 1.2.3, concluimos que f también es periódico.

Por otro lado, si f es periódico, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = id$, por lo tanto, necesariamente $\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$. \square

Lema 1.2.17. *Sea $f(z) = \mu z \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $\mu \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q}$, una función lineal. Si $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es un biholomorfismo que conmuta con f , es decir, $g \circ f = f \circ g$, entonces g también es una función lineal.*

Demostración. Si $g(z) = az + bz^k + \dots$ satisface que $(f \circ g)(z) = (g \circ f)(z)$, entonces

$$(f \circ g)(z) = f(az + bz^k + \dots) = \mu az + \mu bz^k + \dots,$$

y

$$(g \circ f)(z) = g(\mu z) = a\mu z + b\mu^k z^k + \dots.$$

Por lo tanto, necesariamente $\mu b = \mu^k b$, lo cual sólo ocurre si $b = 0$ ya que $\mu \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q}$. Luego, g es una función lineal, como queríamos demostrar. \square

⁴Ver en el Apéndice el Teorema A.3.1.

Hagamos un primer uso del Teorema 1.2.15 para demostrar los siguientes resultados.

Teorema 1.2.18. *Si G es un subgrupo finitamente generado de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ topológicamente linealizable; es decir, existe $\Psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un homeomorfismo que conjuga a G con un subgrupo G' de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que consta de gérmenes de funciones lineales, entonces G es analíticamente linealizable.*

Demostración. La demostración la haremos por casos.

Si G contiene un germen $f(z) = \mu z + O(z^2)$ de orden infinito, entonces podemos suponer, sin perder generalidad, que $|f'_\mu(0)| \leq 1$ (si no fuese el caso, reemplazamos f_μ por f_μ^{-1}), donde $f_\mu(z) = \mu z$. Así, $f_\mu(U) \subset U$ para todo dominio suficientemente pequeño, $0 \in U$. Además, dado que Ψ conjuga a G con G' , $\Psi(U)$ resulta ser invariante bajo f . En efecto:

$$f(\Psi(U)) = \Psi(f_\mu(U)) \subset \Psi(U).$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.1.14, sabemos que dicho germen es analíticamente linealizable. Además, por la Proposición 1.2.16, como f tiene orden infinito, entonces $\mu \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q}$. Consecuentemente, por el Lema 1.2.17, todos los elementos que conmuten con f_μ son lineales. Por lo cual, G es analíticamente linealizable.

Por otro lado, si todos los elementos de G tienen orden finito, concluimos inmediatamente usando el Teorema 1.2.15. \square

Teorema 1.2.19. *Si G es un subgrupo finitamente generado de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $G \cap \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) = \{id\}$, entonces G es formalmente linealizable.*

Demostración. Si G contiene un germen $f(z) = \mu z + O(z^2)$ con $\mu \notin \exp 2\pi i\mathbb{Q}$ entonces, por el Teorema 1.1.8, sabemos que dicho germen es formalmente linealizable. Además, como $G \cap \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) = \{id\}$ por hipótesis, entonces, por la Observación 1.2.13, sabemos que G es conmutativo. Así, por el Lema 1.2.17, sabemos que cualquier germen que conmute con la función lineal, $f_\mu(z) = \mu z$, es lineal. Consecuentemente, G es formalmente linealizable en este caso.

Por otro lado, si $TG \subset \exp 2\pi i\mathbb{Q}$, entonces todos los elementos de G deben de ser periódicos ya que $G \cap \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0) = \{id\}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.2.15, G es analíticamente linealizable. \square

Además de los resultados de linealización de gérmenes de biholomorfismos y subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que hemos presentado hasta el momento, existen otros aspectos que nos permiten entender parte de la dinámica de los subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Éstos, tales como la solubilidad o no solubilidad y la integrabilidad o no integrabilidad (acumulación de órbitas de un germen en el origen) de un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, como se mencionó en la introducción, permitirán, a su vez, rescatar parte del comportamiento de las foliaciones asociadas a gérmenes de ecuaciones diferenciales holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Enseguida estudiaremos estas nociones. En primer lugar, restringiremos el concepto conocido de solubilidad de grupos al caso de subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, y mostraremos que el comportamiento aquí es bastante diferente al ocurrido para grupos en general.

1.3. Grupos solubles.

Definición 1.3.1. Decimos que un grupo G es *soluble* si la cadena decreciente de los conmutadores iterados de G se estabiliza en el grupo trivial:

$$\begin{aligned} G^0 \supset G^1 \supset G^{m-1} \supset G^m = \{id\}, \\ G^0 = G, \quad G^{k+1} = [G^k, G^k], \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Como vimos en la Observación 1.2.13, si G es conmutativo, entonces $m = 1$. Si $m = 2$ decimos que G es un grupo *metaabeliano*.

Mientras que para grupos solubles arbitrarios el índice m puede tomar cualquier valor finito, para subgrupos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ ocurre lo siguiente.

Teorema 1.3.2 (Alternativa de Tits para grupos de gérmenes conformes). *Un subgrupo G de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ o bien es metaabeliano, o bien es no soluble.*

Para la demostración del Teorema 1.3.2 necesitamos un par de resultados previos.

Proposición 1.3.3. *Si $f(z) = z + az^{p+1} + \dots \in \mathcal{A}_p$ y $g(z) = z + bz^{q+1} + \dots \in \mathcal{A}_q$ con $p \neq q$, $p, q > 0$, entonces $[f, q] \in \mathcal{A}_{p+q}$. Concretamente:*

$$[f, q](z) = z + ab(p - q)z^{p+q+1} + \dots \quad (1.6)$$

Demostración. La identidad (1.6) es una afirmación acerca del término principal del germen de función $(f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1})(z) - z$ en una carta holomorfa z . Este término principal no cambia si en lugar de z consideramos la carta $t = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$. En esta nueva carta $z = (g \circ f)(t)$. Además, el término principal de la diferencia $(f \circ g)(t) - (g \circ f)(t)$ lo podemos obtener de manera sencilla como sigue:

Por un lado,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(t + bt^{q+1} + \dots) \\ &= t + bt^{q+1} + a(t + bt^{q+1} + \dots)^{p+1} + \dots \\ &= t + bt^{q+1} + at^{p+1} + ab(p+1)t^{p+q+1} + \dots \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(t) &= g(t + at^{p+1} + \dots) \\ &= t + at^{p+1} + b(t + at^{p+1} + \dots)^{q+1} + \dots \\ &= t + at^{p+1} + bt^{q+1} + ba(q+1)t^{q+p+1} + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) - (g \circ f)(t) &= ab(p+1)t^{p+q+1} - ba(q+1)t^{q+p+1} + \dots \\ &= ab(p+1 - q - 1)t^{p+q+1} + \dots \\ &= ab(p - q)t^{p+q+1} + \dots \end{aligned}$$

Lo cual nos permite concluir la demostración. \square

Lema 1.3.4. *Si G es un subgrupo de $\text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0)$, entonces, o bien G es conmutativo, o bien G es no soluble.*

Demostración. Si $G = G^0$ contiene dos gérmenes f, g como en la proposición anterior, entonces también contiene a $[f, g]$ y éste es como en (1.6). Además, $p + q \notin \{p, q\}$ y $p + q > 0$. Por tanto, podemos aplicar la proposición anterior a las parejas $([f, g], f)$ y $([f, g], g)$. De esta manera, G^1 también contiene al menos dos gérmenes que satisfacen la hipótesis de la proposición anterior, a saber $[[f, g], f]$ y $[[f, g], g]$. Podemos notar así que, cada vez que realizamos este cómputo a cualesquiera dos gérmenes de distinto nivel, el primer término no lineal de su conmutador va incrementándose. Por tanto, procediendo de manera inductiva, notamos que todos los conmutadores iterados $G^k = [G^{k-1}, G^{k-1}]$ son no triviales. Luego, G es no soluble.

Por otro lado, si todos los elementos de G cumplen con tener el mismo nivel $p \geq 1$, entonces G es conmutativo. En efecto, si consideramos dos elementos f, g de G y fuera el caso de que $[f, g]$ es no trivial, entonces $[f, g] \in \mathcal{A}_m$, con $m > p$, lo cual no es posible. Por lo tanto $[f, g] = id$. Es decir, G es conmutativo. \square

Demostración del Teorema 1.3.2. Sea G un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. De acuerdo con la Observación 1.2.14, $G^1 = [G, G] \subset \text{Diff}_1(\mathbb{C}, 0)$. Tenemos dos casos: Si $G^1 = \{id\}$; es decir, G^1 es trivial, entonces G es conmutativo. Por otra parte, si G^1 no es trivial, entonces, por el Lema 1.3.4, G^1 es conmutativo o no soluble. Si G^1 es conmutativo, G es metaabeliano. Mientras que, si G^1 es no soluble, G también es no soluble. \square

1.4. Gérmenes integrables.

Las nociones que se introducen en esta sección tienen una relación estrecha con las foliaciones holomorfas integrables. Se recomienda a quien esto lea y tenga ya algún conocimiento sobre foliaciones integrables así como sobre sus transformaciones de holonomía, que lea esta parte del trabajo teniendo estos conceptos presentes. La relación mencionada entre estos conceptos se verá con detalle en la sección 2.5 del siguiente capítulo. Más aún, en esa misma sección, incluso mostraremos que los resultados sobre grupos integrables que demostraremos a continuación, así como el último teorema de este capítulo, Teorema 1.5.10, se pueden “extender” al caso de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Definición 1.4.1. Dado $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ un germen de una función analítica, definimos el *grupo simétrico* de u como el grupo de biholomorfismos que preservan u , y lo denotamos por S_u . Es decir,

$$S_u := \{g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) : u \circ g = u\}.$$

Definición 1.4.2. Decimos que un germen de función analítica $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es una *primera integral* de un grupo $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ si $G \subset S_u$. De esta manera, decimos que G es *integrable*.

Si G es cíclico y está generado por un biholomorfismo $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $G = \langle g \rangle$, decimos que u es una *primera integral* de g . El germen g es *integrable* si admite una primera integral analítica no trivial.

Si sólo pedimos que u sea una serie formal, entonces decimos que $G \subset S_u$ es *formalmente integrable*.

Ejemplo 1.4.3. Si $f(z) = \mu z \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, $\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$, entonces f es integrable. En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ el menor número natural tal que $\mu^m = 1$. Consideremos $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$, dada por $u(z) = z^r$, con $r \in m\mathbb{Z}$. Veamos que u es una primera integral para f :

$$(u \circ f)(z) = u(\mu z) = (\mu z)^r = z^r = u(z).$$

Así, $u \circ f = u$. Por lo tanto, u es una primera integral para f .

Proposición 1.4.4. *Cualquier germen de una función analítica $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$, $u(z) = cz^m + \dots$, $c \neq 0$, admite un grupo simétrico cíclico finito (de orden m).*

Demostración. Sea $g(z) = z \cdot (c + \dots)^{\frac{1}{m}}$, entonces $u \circ g^{-1} = v$, con $v(z) = z^m$. Efectivamente, observemos que

$$u = u \circ \text{id} = u \circ (g^{-1} \circ g) = (u \circ g^{-1}) \circ g,$$

pero

$$u(z) = cz^m + \dots = z^m \cdot (c + \dots) = [z \cdot (c + \dots)^{\frac{1}{m}}]^m = g(z)^m.$$

Así,

$$u = (u \circ g^{-1}) \circ g = v \circ g, \quad v(z) = z^m.$$

En consecuencia,

$$u \circ g^{-1} = v. \tag{1.7}$$

Ahora, el grupo simétrico de $v(z) = z^m$, digamos S_v , está generado por $f(z) = \mu z$, donde $\mu \in \exp 2\pi i\mathbb{Q}$ es la raíz primitiva m -ésima de la unidad; ya que, tal como mostramos en el Ejemplo 1.4.3, $v \circ f = v$.

Consideremos el morfismo $\tau_g : S_u \rightarrow S_v$, dado por $\tau_g(h) = g \circ h \circ g^{-1}$. Tenemos que demostrar que τ_g está bien definido. Para hacer esto, solamente necesitamos comprobar que $\tau_g(h) \in S_v$, para todo $h \in S_u$. Sea $h \in S_u$, entonces

$$v \circ \tau_g(h) = v \circ (g \circ h \circ g^{-1}),$$

pero sabemos, por la ecuación (1.7), que $v = u \circ g^{-1}$. Además, como $h \in S_u$, entonces $u \circ h = u$. De esta manera,

$$v \circ (g \circ h \circ g^{-1}) = (u \circ g^{-1}) \circ (g \circ h \circ g^{-1}) = (u \circ h) \circ g^{-1} = u \circ g^{-1} = v.$$

Luego, $v \circ \tau_g(h) = v$; es decir, $\tau_g(h) \in S_v$. Así, τ_g es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto, como S_v es cíclico finito, concluimos que S_u también lo es. \square

Observación 1.4.5. El único germen de función holomorfa que admite una primera integral $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ (o serie formal), tal que su parte lineal es no nula, $u(z) = \alpha z + \dots$, $\alpha \neq 0$, es la identidad, $f(z) = z$. Esto se sigue inmediatamente de la proposición anterior.

De ahora en adelante, en virtud de la observación previa, supondremos siempre que, si u es una primera integral de un grupo $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, entonces $u(z) = z^m + \dots$, $m > 1$.

Teorema 1.4.6. Si $f(z) = az + bz^k + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es formalmente integrable, entonces f es analíticamente integrable.

Demostración. Supongamos que f es formalmente integrable, y, en virtud del Teorema 1.1.10, supongamos además que $\hat{u}(z) = z^m$ es su primera integral formal.

Ahora, por un lado tenemos que

$$(\hat{u} \circ f)(z) = \hat{u}(az + bz^k + \dots) = (az + bz^k + \dots)^m = a^m z^m + ma^{m-1} b z^{m+k-1} + \dots$$

Pero, por hipótesis, $\hat{u} \circ f = \hat{u}$. Por tanto, $a^m = 1$ y $ma^{m-1}b = 0$. Consecuentemente, $b = 0$. De aquí, observamos que si f es formalmente integrable, entonces $f(z) = az$, con $a \in \exp 2\pi i \mathbb{Q}$. Por lo tanto, por el Ejemplo 1.4.3, concluimos que f es analíticamente integrable. \square

Observación 1.4.7. Si analizamos la demostración previa podemos darnos cuenta de que el mismo resultado es válido para subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Es decir, si $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es un grupo finitamente generado y es formalmente integrable, entonces G es analíticamente integrable.

Ejemplo 1.4.8. Sea

$$g(z) = \frac{\mu dz}{c(1-\mu)z + d},$$

una transformación de Möbius, tal que $\mu \in \exp 2\pi i \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Entonces g es integrable. En efecto, puesto que $\mu \in \exp 2\pi i \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, tal que $\mu^m = 1$. Consideremos $u(z) = z^m \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$.

Por otro lado, sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $ad - c \neq 0$ y definamos la transformación de Möbius

$$h(z) = \frac{az}{cz + d},$$

en una región $U \subset \mathbb{C}$ en la cual h es un biholomorfismo. Afirmamos que $v := u \circ h$ es una primera integral para g . Efectivamente, haciendo el cálculo de v tenemos

$$v(z) := (u \circ h)(z) = u\left(\frac{az}{cz + d}\right) = \left(\frac{az}{cz + d}\right)^m. \quad (1.8)$$

Así,

$$(v \circ g)(z) = v(g(z)) = v\left(\frac{\mu dz}{c(1-\mu)z + d}\right).$$

Sustituyendo (1.8):

$$\begin{aligned}
(v \circ g)(z) &= \left(\frac{a \left(\frac{\mu dz}{c(1-\mu)z+d} \right)}{c \left(\frac{\mu dz}{c(1-\mu)z+d} \right) + d} \right)^m \\
&= \left(\frac{\frac{a\mu dz}{c(1-\mu)z+d}}{\frac{c\mu dz + d(c(1-\mu)z+d)}{c(1-\mu)z+d}} \right)^m \\
&= \left(\frac{a\mu dz}{d(c\mu z + c(1-\mu)z + d)} \right)^m \\
&= \left(\frac{a\mu z}{c\mu z + cz - c\mu z + d} \right)^m \\
&= \left(\frac{a\mu z}{cz + d} \right)^m.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(v \circ g)(z) = \left(\frac{a\mu z}{cz + d} \right)^m.$$

De esta manera, haciendo uso nuevamente de la igualdad (1.8), concluimos que

$$(v \circ g)(z) = v(z).$$

Es decir, que v es una primera integral para g .

Si analizamos cuidadosamente este ejemplo⁵, podemos vislumbrar un método que nos permite construir más gérmenes integrables. De hecho, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.4.9. *Sean $G, H \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ dos subgrupos finitamente generados tales que G y H son formalmente equivalentes, y G es integrable, entonces H es integrable.*

Demostración. Como G y H son formalmente equivalentes, podemos elegir dos sistemas de generadores $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ y $H = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, y encontrar h una serie formal que cumpla

$$h \circ g_j = f_j \circ h, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Además, como G es integrable, existe $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ tal que

$$u \circ f_j = u, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Afirmamos que $u \circ h$ es una primera integral formal para H . En efecto, combinando las ecuaciones (1.9) y (1.10) tenemos que:

$$\begin{aligned}
(u \circ h) \circ g_j &= u \circ (h \circ g_j) = u \circ (f_j \circ h) \\
&= (u \circ f_j) \circ h = u \circ h, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

⁵Un cálculo sencillo nos permite darnos cuenta de que $(h \circ g \circ h^{-1})(z) = \mu z$.

Por lo tanto,

$$(u \circ h) \circ g_j = u \circ h, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esto nos dice que $u \circ h$ es una primera integral formal para H . Finalmente, por la Observación 1.4.7, derivada del Teorema 1.4.6, concluimos que H es integrable. \square

A manera de corolario, tenemos el siguiente caso particular de este teorema.

Corolario 1.4.10. *Si $f, g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ son formalmente equivalentes, y f es integrable, entonces g es integrable.*

A continuación damos una caracterización de los gérmenes integrables.

Proposición 1.4.11. *Sea $f(z) = \nu z + bz^r + \dots \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Entonces, f es periódico si y sólo si f es integrable. Es decir, f admite una primera integral $u(z) = cz^m + \dots$, $c \neq 0$, si y sólo si $f^k = id$, y $m \in k\mathbb{Z}$.*

Demostración. Supongamos primero que $f^k = id$, es decir, que f es periódico, entonces, por el Teorema 1.2.10, f es linealizable. Además, necesariamente $\nu^k = 1$, así, por el Ejemplo 1.4.3, sabemos que $f_\nu(z) = \nu z$ es integrable. Luego, por el Corolario 1.4.10, concluimos que f es integrable.

Supongamos ahora que $f(z) = \nu z + bz^r + \dots$ admite una primera integral analítica $u(z) = cz^m + \dots$. Es decir, $u \circ f = u$. Hagamos el cómputo de $u \circ f$:

$$\begin{aligned} (u \circ f)(z) &= u(\nu z + bz^r + \dots) \\ &= c(\nu z + bz^r + \dots)^m + \dots \\ &= c\nu^m z^m + mc\nu^{m-1}bz^{m+r-1} + \dots \end{aligned}$$

Entonces, puesto que $u \circ f = u$, se sigue que

$$c\nu^m z^m + mc\nu^{m-1}bz^{m+r-1} + \dots = cz^m + \dots$$

Consecuentemente, $c\nu^m = c$. Por lo tanto $\nu^m = 1$. Además, si $u \circ f = u$, entonces $u \circ f^n = u$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, por la Proposición 1.1.5, sabemos que $f^m(z) = z + \beta z^r + \dots$. De esta manera:

$$\begin{aligned} (u \circ f^m)(z) &= u(z + \beta z^r + \dots) \\ &= c(z + \beta z^r + \dots)^m + \dots \\ &= cz^m + mc\beta z^{m+r-1} + \dots \end{aligned}$$

Análogamente, para $f^{-m}(z) = z - \beta z^r + \dots$, nos queda la expresión:

$$(u \circ f^{-m})(z) = cz^m - mc\beta z^{m+r-1} + \dots$$

Pero

$$u \circ f^m = u \quad \text{y} \quad u \circ f^{-m} = u.$$

Por lo tanto,

$$cz^m + mc\beta z^{m+r-1} + \dots = cz^m - mc\beta z^{m+r-1} + \dots$$

Se sigue entonces que, $2mc\beta = 0$. Luego, $\beta = 0$. Por lo tanto, $f^m(z) = id$. Así, f es periódico, y su orden, digamos k , divide a m . \square

Observación 1.4.12. Podemos demostrar la segunda parte de la proposición anterior de una manera más breve. En efecto, si $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es integrable, y $u(z) = cz^m + \dots \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es una primera integral de f , entonces, por definición, $\langle f \rangle \subset S_u$, donde $S_u \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es el grupo simétrico de u . Puesto que, en virtud de la Proposición 1.4.4, sabemos que S_u es finito, concluimos que $\langle f \rangle$ es finito, o equivalentemente, que f es periódico.

De la Proposición 1.4.4, el Teorema 1.2.15 y la Proposición 1.4.11 se deduce la siguiente caracterización de grupos integrables.

Corolario 1.4.13. *Un grupo $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es integrable si y sólo si es cíclico finito.*

Demostración. Sea $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Como G es integrable, existe $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ germen de una función analítica, tal que $G \subset S_u$. Pero, por la Proposición 1.4.4, sabemos que S_u es cíclico finito, por lo tanto G también lo es.

La afirmación inversa es inmediata de la Proposición 1.4.11. \square

1.5. Dinámica generada por grupos de gérmenes conformes finitamente generados.

Definición 1.5.1. Sean G un grupo con producto $*$ y elemento neutro e , y X un conjunto no vacío. Decimos que una función

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una *acción* de G sobre X si cumple

1. $\forall x \in X, e \cdot x = x$.
2. $\forall x \in X, \forall g, h \in G, g * h \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Decimos también que G *actúa* sobre X si existe una acción de G sobre X .

Definición 1.5.2. Si un grupo G actúa sobre un conjunto X , $X \neq \emptyset$, entonces definimos la *órbita* de un elemento $x \in X$ como el subconjunto

$$\text{Orb}(x) = \{y \in X : \exists g \in G, g \cdot x = y\}.$$

Introduzcamos ahora la noción de pseudogrupo, la cual difiere de la de un grupo por el hecho de que la composición no siempre está definida. Para nuestro propósito es suficiente definir pseudogrupos de funciones holomorfas cuyos dominios son subconjuntos abiertos de \mathbb{C} que contienen a un punto fijo común (el origen).

Definición 1.5.3. Sea U una vecindad del origen en \mathbb{C} y sea $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un subgrupo arbitrario de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Un *pseudogrupo* Γ asociado a G es una colección de parejas (f_α, U_α) , $\alpha \in A$, tales que $U_\alpha \subset U$ es un conjunto abierto

que contiene al origen, y $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow U$ es una función holomorfa definida (al menos) en U_α que es un representante de un germen f elemento de G .

La composición de dos elementos (f_α, U_α) y (f_β, U_β) está definida como la pareja $(f_\alpha \circ f_\beta, U_{\alpha\beta})$ si y sólo si $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \subset U_\beta$ y $f_\beta(U_{\alpha\beta}) \subset U_\alpha$.

En otras palabras, cada germen $f \in G$ (en particular, el elemento neutro $id \in G$) es representado por distintas funciones f_α que difieren, en general, por sus dominios de definición (las cuales, por supuesto, coinciden en las intersecciones no vacías de éstos).

Dado un grupo finitamente generado $G = \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n \rangle \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, la manera natural de asociarle un pseudogrupo Γ es como sigue (usaremos las tildes en cada germen del grupo G para distinguirlos de las funciones holomorfas). Elijamos una colección arbitraria de representantes $f_j^\pm : U_j \rightarrow \mathbb{C}, j = 1, \dots, n$, de los gérmenes \tilde{f}_j^\pm que generan a G . Entonces, con una palabra arbitraria $w = (w_{j_n}^\pm w_{j_{n-1}}^\pm \cdots w_{j_2}^\pm w_{j_1}^\pm) \in \mathfrak{F}_r$ (un elemento en el grupo libre sobre un conjunto de r elementos, escrito de derecha a izquierda) podemos asociar la función conforme f_w como la composición $f_{j_n}^\pm \circ f_{j_{n-1}}^\pm \circ \cdots \circ f_{j_2}^\pm \circ f_{j_1}^\pm$ definida en el conjunto máximo U_w (que obviamente contiene al origen y es abierto), en el cual todas las composiciones parciales

$$f_{j_1}^\pm = f_{j_1}^\pm, \quad f_{j_2 j_1} = f_{j_2}^\pm \circ f_{j_1}^\pm, \quad \cdots, \quad f_{j_n \dots j_1} = f_{j_n}^\pm \circ \cdots \circ f_{j_2}^\pm \circ f_{j_1}^\pm,$$

están bien definidas. Así, si asociamos U_w con la función $f_{j_n \dots j_1} = f_w$, la cual es un representante del respectivo germen \tilde{f}_w , obtenemos un pseudogrupo. Si elegimos una colección diferente de conjuntos iniciales U_1, \dots, U_n , entonces, formalmente, éstos dan lugar a un pseudogrupo distinto. Aunque no se afectarían la mayoría de las propiedades.

Si existen identidades no triviales en el grupo G , entonces un mismo germen admite varios representantes con dominios eventualmente distintos. Para distinguir entre tales elementos, etiquetaremos a cada elemento $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$ con la palabra correspondiente w_α en el grupo libre \mathfrak{F}_r . La correspondiente colección de tripletas

$$\{(f_w, U_w, w) : w \in \mathfrak{F}_r, f_w \in \mathcal{O}(U_w)\} = \Lambda_G,$$

será llamada el pseudogrupo asociado al grupo finitamente generado de gérmenes conformes G . Un elemento perteneciente al pseudogrupo Λ_G es no trivial si la palabra correspondiente $w \in \mathfrak{F}_r$ es no trivial en \mathfrak{F}_r ; incluso si $f_w = id|_{U_w}$. Empero, omitiremos la tercer componente de cada tripleta para simplificar la notación.

Observación 1.5.4. Para evitar problemas técnicos, supondremos siempre que si $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$, entonces $(f_\alpha|_{U'_\alpha}, U'_\alpha) \in \Gamma$, para todo $U'_\alpha \subset U_\alpha$, tal que $0 \in U'_\alpha$.

Al igual que como lo hacemos con un grupo, para un pseudogrupo Γ podemos pensar en la noción de órbita de un punto. Una órbita “periódica” será llamada ciclo.

Definición 1.5.5. La órbita de un punto $x \in U$, por un pseudogrupo Γ , es el conjunto $\Gamma(x)$ que consta de todos los puntos $f_\alpha(x)$ tales que $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$ y $x \in U_\alpha$.

Definición 1.5.6. Sea Γ un pseudogrupo. Decimos que $x \neq 0$ es un *ciclo* si es un punto fijo de un elemento no trivial de Γ . Es decir, si existe $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$ tal que $x \in U_\alpha$ y $f_\alpha(x) = x$. Decimos además que $x \neq 0$ es un *ciclo límite* (*ciclo límite complejo de un pseudogrupo*) si x es un punto fijo aislado de f_α en U_α .

La noción de equivalencia de grupos de gérmenes conformes se traduce naturalmente en la equivalencia de pseudogrupos de la siguiente forma.

Definición 1.5.7. Decimos que dos pseudogrupos Γ y Γ' son equivalentes si existe un biholomorfismo $h : (U, 0) \rightarrow (U', 0)$ tal que Γ' consiste de todas las parejas $(h \circ f_\alpha \circ h^{-1}, h(U_\alpha))$, con $(f_\alpha, U_\alpha) \in \Gamma$.

1.5.1. Órbitas periódicas y gérmenes periódicos.

Para dar una muestra de la utilidad de la noción de pseudogrupo, establecemos propiedades dinámicas simples de gérmenes periódicos (y no periódicos).

La periodicidad de un germen $\tilde{g} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ implica que todas las g -órbitas son periódicas (ciclos) para cualquier representante g de \tilde{g} . Sin embargo, la afirmación inversa es menos simple.

Sea $\tilde{g} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ y consideremos (g, V) un representante de \tilde{g} . Para cada $U \subset V$ consideremos $g|_U$ y al pseudogrupo “cíclico” Γ_U generado por $(g|_U, U)$. Así, para un elemento arbitrario $x \in U$ denotamos por $\Gamma(x|U)$ a la Γ_U -órbita de x , es decir,

$$\Gamma(x|U) = \{g^n(x) : n \in \mathbb{Z}, \text{ y } g^k(x) \in U, \text{ para todo } k \text{ entre } 0 \text{ y } n\}.$$

La órbita $\Gamma(x|U)$ podría ser finita, en cuyo caso consistiría de las iteraciones consecutivas

$$g^{-n}(x), g^{-n+1}(x), \dots, g^{-1}(x), x, g(x), \dots, g^{m-1}(x), g^m(x), \quad n, m \geq 0,$$

o bien, $\Gamma(x|U)$ podría ser infinita en alguna, o ambas direcciones. Trabajaremos únicamente con órbitas máximas, es decir, supondremos que $g^{-n-1}(x)$ y $g^{m+1}(x)$ ya no pertenecen a U si n (respectivamente m) es finito. Observemos además que, una órbita infinita podría consistir de una cantidad finita de puntos distintos (si y sólo si la órbita es periódica).

Consideremos la función $\nu : U \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definida como la longitud de la órbita máxima de cada punto en U . Es decir,

$$\nu(x) = \nu(x|U) = \text{máx}\{m + n : g^{-n}(x), \dots, x, g(x), \dots, g^m(x) \in U\}.$$

Si la órbita $\Gamma(x|U)$ es infinita, entonces $\nu(x) = \infty$. Además, por construcción, ν resulta ser constante en cada órbita de g . Por otro lado, de la continuidad de g se deriva la semicontinuidad de ν , más precisamente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.5.8. *Si U es abierto y $\nu(x) \in \mathbb{N}$, entonces para cada $y \in U$ suficientemente cercano a x , $\nu(y) \geq \nu(x)$. Análogamente, si U es cerrado y $\nu(x) \in \mathbb{N}$, entonces para cada $y \in U$ suficientemente cercano a x , $\nu(y) \leq \nu(x)$. En este caso, si x es un punto de discontinuidad de ν , entonces $\Gamma(x|U) \cap \partial U \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que U es abierto y sean $x \in U$ y $r \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(x) = r$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\Gamma(x|U) = \{x, g(x), \dots, g^{r-1}(x)\},$$

(si no fuese el caso, basta reetiquetar a cada elemento de $\Gamma(x|U)$).

Tenemos dos casos. Que $g^r(x) \in \partial U$ o $g^r(x) \in \text{Ext } U$, donde $\text{Ext } U$ denota el conjunto exterior de U . Si $g^r(x) \in \text{Ext } U$, entonces basta considerar $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$ y se satisfaga la igualdad $\nu(y) = \nu(x)$, $y \in B(x, \varepsilon)$. Por otro lado, si $g^r(x) \in \partial U$ entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, claramente existen $y \in B(x, \varepsilon)$ tales que $\nu(y) > \nu(x)$.

Para demostrar la segunda afirmación de la proposición consideremos los siguientes casos. Que $g^j(x) \in \text{Int } U$, $j = 0, \dots, r-1$, donde $\text{Int } U$ denota el conjunto interior de U , o $g^j(x) \in \partial U$, para algún $j \in \{0, \dots, r-1\}$. Así, en el primer caso, basta que consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$ y $\nu(y) = \nu(x)$ para toda $y \in B(x, \varepsilon)$. En el segundo, claramente se cumple la desigualdad estricta. Por lo tanto, podemos ver que si $x \in U$ es un punto de discontinuidad de ν , entonces necesariamente $\Gamma(x|U) \cap \partial U \neq \emptyset$. \square

Lema 1.5.9. *Si $g \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es no periódico, es decir, $\langle g \rangle$ es infinito, entonces para cualquier dominio abierto (tan pequeño como queramos) $U \subset \mathbb{C}$, $0 \in U$, hay una cantidad no numerable de órbitas infinitas no periódicas $\Gamma(x|U)$.*

Demostración. Sea $\rho > 0$, consideremos $D_\rho = \{|x| \leq \rho\}$ un disco cerrado y sea $\partial D = K_\rho$ su frontera.

Demostraremos que en D_ρ hay una cantidad no numerable de puntos con órbitas infinitas en D_ρ . Para esto, veremos que en cada círculo K_r , $r \leq \rho$, hay al menos un punto con una órbita infinita en $D_r \subset D_\rho$. Debido a que el número de círculos K_r distintos que intersectan a cualquier órbita dada es a lo más numerable (ya que cada órbita es a lo más numerable), esto probará que el número de órbitas infinitas es no numerable.

Sea $r \leq \rho$ y supongamos, por contradicción, que dado K_r , todos los puntos $x \in K_r$ tienen órbitas finitas en D_r , es decir, $\nu(\cdot)$ toma sólo valores finitos en K_r (para cada $x \in K_r$, $\nu(x) \in \mathbb{N}$). Como K_r es compacto y ν es semicontinua, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(x) \leq N$, para cada $x \in K_r$, y todas las órbitas que intersectan a K_r son finitas y menores o iguales a N .

Por otro lado, como $g(0) = 0$, $\nu(0) = \infty$. Debido a la semicontinuidad de ν en D_r , ν debe de tener un punto de discontinuidad $y \in D_r \setminus K_r$ tal que $\nu(y) > N$, pero, por la Proposición 1.5.8, $\Gamma(y|D_r) \cap \partial D_r \neq \emptyset$, es decir, $\Gamma(y|D_r) \cap K_r \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que ν toma valores constantes en la órbita de cualquier punto. Por lo tanto, en K_r existe al menos un punto $x \in K_r$ tal que su órbita es infinita.

Finalmente, denotemos por A al conjunto de puntos cuyas órbitas son periódicas y por B al conjunto de puntos con órbitas infinitas no periódicas. De esta manera, el conjunto de puntos con órbitas infinitas es $A \cup B$.

Además, si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto

$$A_n = \{x \in D_r : g^n(x) = x\},$$

entonces, ya que g no es periódico, aplicando el Corolario A.4.4 (demostrado en el Apéndice) a la función $h_n(z) = g^n(z) - z$, sabemos que A_n tiene cardinalidad a lo más numerable. Pero

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Consecuentemente, la cardinalidad de A es a lo más numerable. Por lo tanto, la cardinalidad de B es no numerable, ya que $A \cup B$ tiene cardinalidad no numerable. Esto concluye nuestra demostración. \square

Teorema 1.5.10. *Sea $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un grupo finitamente generado. Entonces G cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

- a) *Cualquier pseudogrupo Γ asociado a G posee una cantidad no numerable de órbitas infinitas no periódicas.*
- b) *G es integrable.*

Demostración. Si G contiene un elemento g no periódico, entonces, por el Lema 1.5.9, se satisface a).

Si, por el contrario, todos los elementos de G tienen orden finito (es decir, son periódicos), entonces, por el Teorema 1.2.15, G es finito, cíclico y linealizable. Por lo tanto, por el Corolario 1.4.13, concluimos que G es integrable. \square

Capítulo 2

Foliaciones

Comencemos por recordar los conceptos básicos sobre Ecuaciones Diferenciales Holomorfas y un par de resultados fundamentales en esta teoría, a saber, el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y el Teorema de rectificación, que nos servirán de motivación para introducir la noción de foliación holomorfa en¹ \mathbb{C}^2 .

Una vez hecho esto, daremos la definición formal de lo que es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ e introduciremos las principales propiedades de éstas; así como las herramientas que necesitamos para un mejor entendimiento del comportamiento geométrico de las foliaciones. Estas herramientas serán la holonomía asociada a una separatriz de una foliación dada y el concepto de explosión de singularidades.

Finalizamos nuestro estudio de foliaciones centrando nuestra atención en una clase particular de ellas; aquéllas cuyas hojas son las curvas de nivel de una función holomorfa no constante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$; es decir, las foliaciones integrables. Nuestro objetivo principal es dar una demostración de una caracterización de las foliaciones integrables, demostrada por vez primera en [12] por los matemáticos franceses J. F. Mattei y R. Moussu. Para esto, haremos uso de la teoría desarrollada en el capítulo anterior sobre subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

2.1. Ecuaciones diferenciales holomorfas.

Definición 2.1.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un conjunto abierto. Un *campo vectorial holomorfo* definido en U es una pareja de funciones holomorfas definidas en U :

$$F = (F_1, F_2) = F_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + F_2 \frac{\partial}{\partial z_2} : U \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

¹Si bien nosotros nos restringiremos al estudio en \mathbb{C}^2 , debe ser mencionado que la misma teoría puede ser desarrollada en \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$.

donde z_1 y z_2 representan a las funciones coordenadas en U ; es decir,

$$z_j : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\alpha_1, \alpha_2) & \longmapsto & \alpha_j \end{array}, \quad j = 1, 2.$$

El conjunto de campos vectoriales holomorfos definidos en $U \subset \mathbb{C}^2$ es denotado por $\mathcal{D}(U)$.

De esta definición tenemos una interpretación geométrica. A saber, a cada punto $z \in U$, un campo vectorial F definido en U le asocia un vector $F(z)$ en \mathbb{C}^2 , por lo cual, a cada punto $z \in U$ le asociamos el vector $F(z)$ basado en z .

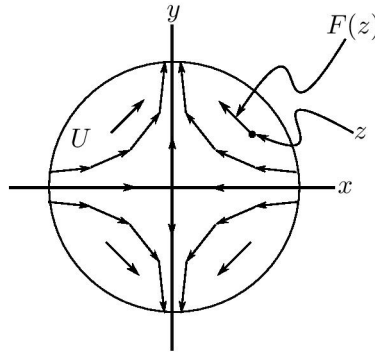


Figura 2.1: Representación geométrica de un campo vectorial.

También podemos asociar a cada punto $z \in U$ la recta (compleja) cuya dirección coincide con la dada por el vector $F(z)$. Ésta es conocida como *campo de direcciones* en U .

Definición 2.1.2. Sean $U \subset \mathbb{C}^2$ un conjunto abierto y $F : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ un campo vectorial holomorfo. Una *ecuación diferencial holomorfa* asociada al campo F se define como

$$\frac{dz_j}{dt} = F_j(z_1, z_2), \quad j = 1, 2, \quad t \in \mathbb{C},$$

o, en notación vectorial,

$$\dot{z} = F(z), \quad z \in \mathbb{C}^2. \quad (2.1)$$

Dado $V \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, diremos que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una *solución de la ecuación diferencial* (2.1) si φ es una función holomorfa tal que, $\varphi(V) \subset U$ y para todo $t \in V$ se cumple

$$\frac{d\varphi_j}{dt}(t) = F_j(\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Es decir, el “vector velocidad”

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}, \frac{d\varphi_2}{dt} \right),$$

coincide en cada punto t con el vector $F(\varphi(t))$. La gráfica de φ en U es llamada *curva fase*.

Si $z_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{C}$ son puntos arbitrarios en U y \mathbb{C} respectivamente, entonces nos podemos preguntar si existe una curva $\varphi : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que

$$\varphi(t_0) = z_0 \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)). \quad (2.3)$$

Es decir, que φ sea solución de la ecuación diferencial (2.1) y cuyo valor inicial sea z_0 (a una solución tal, comúnmente la denotamos por $\varphi(t, z_0)$). Esta pregunta es conocida como el problema de Cauchy y resulta tener una respuesta afirmativa, la cual es un teorema fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 2.1.3 (De existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias). ² *Para cualquier ecuación diferencial (2.1) y cada punto $(t_0, z_0) \in \mathbb{C} \times U$ existe una única solución del problema de Cauchy (2.3) definida en una vecindad de t_0 en \mathbb{C} .*

Definición 2.1.4. Decimos que un punto $z_0 \in \mathbb{C}^2$ es un *punto singular* (una *singularidad*) de un campo vectorial holomorfo F si $F(z_0) = 0$. En otro caso decimos que z_0 es un *punto no singular*.

Usaremos la notación $\mathcal{D}(\mathbb{C}^2, z_0)$ para referirnos al espacio de gérmenes de campos vectoriales holomorfos con singularidad (aislada) en $z_0 \in \mathbb{C}^2$, generalmente z_0 es considerado como el origen, $z_0 = (0, 0) = 0 \in \mathbb{C}^2$.

Definición 2.1.5. Sean $\dot{z} = F(z)$, $\dot{z} = G(z)$ las ecuaciones diferenciales asociadas a $F, G \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ respectivamente. Decimos $\dot{z} = F(z)$ y $\dot{z} = G(z)$ son *analíticamente* (topológicamente, formalmente) *equivalentes* si existe $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un biholomorfismo (homeomorfismo, serie formal) tal que

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{(z)} \cdot F(z) = G(H(z)).$$

Proposición 2.1.6. *Si $\dot{z} = Az$, $\dot{z} = Bz$, $z \in \mathbb{C}$, $A, B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, son dos ecuaciones diferenciales analíticamente equivalentes, entonces existe una matriz invertible $C \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tal que $CA = BC$. Es decir, las matrices A y B son similares.*

Demostración. Dado que $\dot{z} = Az$ y $\dot{z} = Bz$ son analíticamente equivalentes, existe un biholomorfismo $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{(z)} \cdot Az = B(H(z)). \quad (2.4)$$

De esta manera, si

$$H(z) = Cz + \dots, \quad C \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}),$$

²La demostración de este teorema puede ser consultada en [9].

entonces

$$\left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_{(z)} = C + \dots .$$

Luego, sustituyendo ambas expresiones en (2.4), tenemos

$$(C + \dots) \cdot Az = B(Cz + \dots) .$$

Por lo tanto,

$$CAz + \dots = BCz + \dots .$$

Consecuentemente, $CA = BC$, como queríamos demostrar. \square

Observación 2.1.7. Notemos que si $z_0 \in \mathbb{C}^2$ es un punto singular de un campo vectorial F , entonces la ecuación diferencial (2.1) asociada tiene como solución $\varphi(t, z_0) = z_0$, para todo $t \in \mathbb{C}$. Por otro lado, si $F(z_0) \neq 0$ y $\varphi(t, z_0)$ es solución de la ecuación diferencial (2.1) con condición inicial $\varphi(0, z_0) = z_0$, entonces φ es la parametrización de una curva compleja que pasa por z_0 y que es tangente al campo vectorial F .

Definición 2.1.8. Definimos la *matriz asociada a la parte lineal de un campo vectorial holomorfo* $F = (f_1, f_2)$ en un punto $z_0 \in \mathbb{C}^2$ como:

$$D_{z_0} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z_0) \end{bmatrix} .$$

Definición 2.1.9. Dado un campo vectorial holomorfo F , decimos que un punto singular de F es *elemental* si al menos uno de los valores propios $\lambda_{1,2}$ de la matriz asociada a la parte lineal del campo en z_0 es distinto de cero.

Si z_0 es un punto singular no elemental de un campo holomorfo F , tal que la matriz asociada a la parte lineal de F en z_0 es no cero y con ambos valores propios iguales a cero, entonces se dice que z_0 es una singularidad *cúspide* o *nilpotente*.

Supongamos que $0 \in \mathbb{C}^2$ es un punto singular elemental de un campo F , podemos suponer que la ecuación diferencial asociada a F es de la forma (la ecuación está en su forma diagonalizada):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x + \dots \\ \dot{y} &= \lambda_2 y + \dots \end{aligned}, \quad \lambda_1 \neq 0, \tag{2.5}$$

y considerar el cociente

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} .$$

Al cual llamamos *razón característica*; λ nos permite clasificar los distintos tipos de singularidades elementales:

* Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces decimos que el punto singular es de tipo *elíptico*.

- * Si $\lambda > 0$, entonces decimos que es un *nodo*.
- * Si $\lambda < 0$, entonces se trata de una *silla*.
- * Si $\lambda = 0$, entonces es una *silla-nodo*.

Si $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces, decimos además que, el punto singular elemental (foco o silla) es *resonante*.

Concluimos esta primera parte del capítulo enunciando otro resultado fundamental en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Éste nos dice que, las soluciones de cualquier campo vectorial holomorfo, fuera de un punto singular, lucen de una manera sencilla: Como rectas (complejas) paralelas horizontales.

Teorema 2.1.10 (De rectificación). ³ *Un campo vectorial F es analíticamente equivalente al campo vectorial constante $G(z) = (1, 0)$ en una vecindad suficientemente pequeña de cualquier punto no singular.*

2.2. Foliaciones holomorfas.

Por el Teorema de existencia y unicidad (Teorema 2.1.3), cualquier dominio $U \subset \mathbb{C}^2$ en el cual está definido un campo vectorial F , puede ser representado como la unión ajena de curvas fase conexas que pasan por cada uno de los puntos en U . A la representación gráfica de dichas curvas se le conoce como *retrato de las fases* de la ecuación diferencial asociada a F . Además, el Teorema de rectificación (Teorema 2.1.10) provee un modelo local para el objeto geométrico llamado espacio foliado, o simplemente foliación. Es decir, hablando informalmente, una foliación es una partición del espacio fase en un continuo de conjuntos conexos llamados hojas, las cuales localmente lucen como la familia de subespacios afines paralelos.

Definición 2.2.1. La *foliación holomorfa estándar de dimensión 1* de un polidisco $B = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |x| < 1, |y| < 1\}$ es la representación de B como la unión ajena de discos, llamados placas (estándar),

$$B = \bigsqcup_{|y| < 1} L_y, \quad L_y = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\} \times \{y\} \subset B.$$

Definición 2.2.2. Una *foliación holomorfa (no singular) \mathcal{F}* de un dominio $U \subset \mathbb{C}^2$ es la partición $U = \sqcup_{\alpha} L_{\alpha}$ de U en la unión ajena de subconjuntos conexos L_{α} , llamados *hojas*, los cuales son analíticamente equivalentes a la foliación holomorfa estándar por placas.

La última frase de la definición anterior significa que, cada punto $z \in U$ admite una vecindad abierta B' y un biholomorfismo $H : B' \rightarrow B$ que envía las

³La demostración de este teorema puede ser consultada en [9].

hojas locales, es decir, las componentes conexas de las intersecciones $L_\alpha \cap B'$, en las placas de la foliación estándar,

$$\forall \alpha, \exists W = W(\alpha) : \quad H(L_\alpha \cap B') = \bigsqcup_{y \in W(\alpha)} L_y.$$

Comúnmente, llamamos *placas* de la foliación \mathcal{F} cercanas al punto z a las hojas locales de ésta. Notemos que placas diferentes podrían pertenecer a la misma hoja de la foliación global.

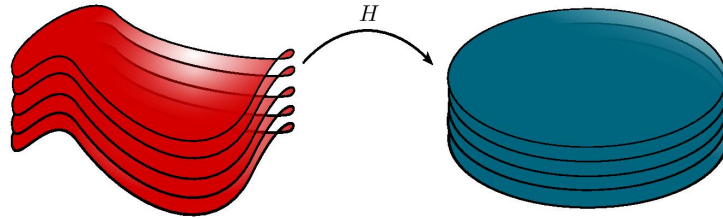


Figura 2.2: Foliación holomorfa.

Definición 2.2.3. Decimos que dos foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' , definidas sobre los dominios U, U' respectivamente, son *analíticamente (formalmente, topológicamente) equivalentes* si existe un biholomorfismo (serie formal, homeomorfismo) $H : U \rightarrow U'$ que envía a las hojas de \mathcal{F} en las hojas de \mathcal{F}' .

El siguiente resultado formaliza lo que hemos mencionado sobre la foliación inducida por un campo vectorial. Más aún, éste nos dice que una foliación \mathcal{F}_F , definida por las soluciones de una ecuación diferencial asociada a un campo vectorial holomorfo F , no depende tanto del campo F en cuestión como del campo de direcciones asociado a F , es decir, hablando de foliaciones (definidas por campos vectoriales) la parametrización de las soluciones es ignorada.

Teorema 2.2.4. ⁴ Si F es un campo vectorial holomorfo sin singularidades, definido en un dominio $U \subset \mathbb{C}^2$, entonces las soluciones de la ecuación diferencial (2.1) asociada a F constituyen una foliación no singular por curvas \mathcal{F}_F de U . Además, si G es otro campo vectorial holomorfo definido en U sin singularidades, entonces las foliaciones \mathcal{F}_F y \mathcal{F}_G coinciden si y sólo si existe una función holomorfa f nunca nula definida en U , tal que $G = f \cdot F$.

Observación 2.2.5. Como se hace mención en el apéndice⁵, siempre que hablamos de un campo vectorial holomorfo, ligado a éste existe una 1-forma holomorfa, la cual nos aporta la misma información para las foliaciones que el campo.

Ilustremos este hecho. Sea $F = (-b(x, y), a(x, y)) = (-b, a) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ el

⁴Una demostración de este resultado puede ser consultada en [8] y [9].

⁵Ver Apéndice, Sección A.5.

germen de un campo vectorial holomorfo en $(\mathbb{C}^2, 0)$; al considerar al germen de la 1-forma holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$, $\omega = adx + bdy$, un punto x tal que $\omega_x \neq 0$, y $(\xi, \eta) \in T_x M \setminus \{0\}$, tenemos

$$\omega_x(\xi, \eta) = adx(\xi, \eta) + bdy(\xi, \eta) = a\xi + b\eta.$$

Así, $\omega_x = 0$ si y sólo si $a\xi + b\eta = 0$. Por lo tanto $\xi = -b$ y $\eta = a$; tenemos entonces que $\omega_x(F) = 0$.

En resumen, observamos que la foliación inducida por $\omega = 0$, conocida comúnmente como *ecuación de Pfaff* (Johann Friedrich Pfaff (1765-1825)), es equivalente a la foliación inducida por el campo F . A una foliación inducida por la ecuación de Pfaff $\omega = 0$ la denotaremos por $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$.

En adelante, dada una foliación inducida por un campo vectorial $F = (-b, a)$ (o bien, por la 1-forma holomorfa $\omega = adx + bdy$), usaremos indistintamente el lenguaje de campos vectoriales o el de 1-formas, según nos convenga para hacer los cálculos o para dar una mejor claridad a la exposición.

Debido al Teorema 2.2.4, tenemos que un campo vectorial $F \in \mathcal{D}(U)$ (o bien, una 1-forma holomorfa ω), define una foliación en el complemento del conjunto singular de F , $\Sigma = \Sigma_F = \{x \in U : F(x) = 0\}$, el cual, en nuestro caso ($n = 2$), resulta ser un conjunto de puntos aislados en U . Esto da lugar al concepto de una foliación en un contexto más general, que será nuestro objeto de estudio de aquí en adelante.

Definición 2.2.6. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un dominio en el plano \mathbb{C}^2 . Una *foliación holomorfa singular (por curvas)* \mathcal{F} en U , es una foliación holomorfa de $U \setminus \Sigma$ por curvas (complejas), donde Σ es un subconjunto analítico de U de codimensión dos (puntos aislados en U), llamado el *conjunto singular* de \mathcal{F} .

El Teorema 2.2.4 nos sirve como motivación para dar la siguiente definición sobre equivalencia entre campos vectoriales holomorfos.

Definición 2.2.7. Decimos que dos campos vectoriales holomorfos $F \in \mathcal{D}(U)$ y $F' \in \mathcal{D}(U')$, cuyos conjuntos singulares (de codimensión dos) son Σ y Σ' respectivamente, son *orbitálmente analíticamente equivalentes* si las foliaciones \mathcal{F}_F y $\mathcal{F}_{F'}$ que éstos generan son analíticamente equivalentes. Es decir, existe un biholomorfismo $H : U \rightarrow U'$ tal que $H(\Sigma) = \Sigma'$, y es un biholomorfismo de las foliaciones fuera de Σ y Σ' .

Definición 2.2.8. Sea \mathcal{F} una foliación singular en un dominio $U \subset \mathbb{C}^2$ con conjunto singular Σ . Una *separatriz compleja* de \mathcal{F} en un punto singular $a \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es una hoja local $L \subset (U, a) \setminus \Sigma$, cuya cerradura $L \cup \{a\}$ es una curva analítica.

Ahora que hemos dado las definiciones formales acerca de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$, toca el turno de introducir el concepto de holonomía, el cual, como dijimos anteriormente, será una herramienta útil para entender mejor el comportamiento de las hojas de una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

2.3. Holonomía.

Definición 2.3.1. Una *transversal (parametrizada)* a una hoja L de una foliación \mathcal{F} en $U \subset \mathbb{C}^2$ en un punto $a \in U$ es una función holomorfa $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (U, a)$ transversal a L . Constantemente identificamos la transversal con la imagen de la función τ .

Si \mathcal{F} es una foliación estándar y τ, τ' son dos transversales a la misma hoja, digamos $L_0 = \{y = 0\}$, en los puntos a y b respectivamente, entonces cualquier hoja, L_α , suficientemente cercana a L_0 , interseca cada transversal una sola vez. Esto define, de forma única, la transformación de correspondencia holomorfa

$$\Delta_{\tau, \tau'} : \begin{array}{ccc} (\tau, a) & \longrightarrow & (\tau', b) \\ (a, y) & \longmapsto & (b, y) \end{array} .$$

Es decir, bajo $\Delta_{\tau, \tau'}$ puntos con la misma componente y son enviados unos en otros. En las cartas de τ y τ' , definidas por las parametrizaciones, la transformación de correspondencia la podemos pensar como el germen de una función holomorfa en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Además, dadas tres transversales τ, τ', τ'' a la misma hoja de la foliación estándar, suficientemente cercanas, la transformación de correspondencia satisface la igualdad

$$\Delta_{\tau, \tau''} = \Delta_{\tau', \tau''} \circ \Delta_{\tau, \tau'} . \quad (2.6)$$

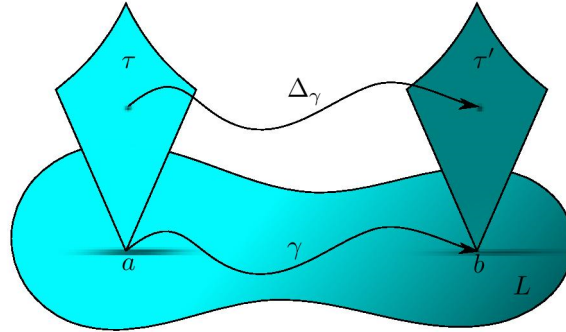


Figura 2.3: Transformación de correspondencia Δ_γ .

Consideremos ahora una hoja $L \in \mathcal{F}$ de una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$, $a, b \in L$ dos puntos fijos en la hoja L , y τ, τ' dos transversales a la hoja L en los puntos a y b respectivamente. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ una trayectoria orientada que une a los puntos a y b , es decir, $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. A continuación definiremos la transformación de correspondencia Δ_γ :

Debido a que el intervalo $[0, 1]$ es un conjunto compacto y γ es continua, resulta que $\gamma([0, 1])$ es un subconjunto compacto de L ; de esta manera, es posible obtener una cubierta finita del conjunto $\gamma([0, 1])$, digamos $\{U_j\}_{j=1}^k$, tal que en

cada U_j la foliación \mathcal{F} sea localmente trivial (analíticamente equivalente a la foliación estándar). Hecho esto, en algunos puntos intermedios de la trayectoria γ podemos insertar transversales intermedias entre las transversales τ y τ' , τ_j , $j = 0, \dots, k$, $\tau_0 = \tau$ y $\tau_k = \tau'$, de tal manera que todas las transversales consecutivas τ_j, τ_{j+1} pertenezcan al mismo dominio U_j (para esto, podemos elegir $\tau_j \subset U_{j-1} \cap U_j$). Sea $\Delta_{\tau_j, \tau_{j+1}}$ la transformación de correspondencia local definida de forma análoga como lo hicimos antes. Entonces, la composición:

$$\Delta_\gamma = \Delta_{\tau_{k-1}, \tau_k} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_0, \tau_1} : (\tau, a) \rightarrow (\tau', b), \quad (2.7)$$

en las cartas coordenadas es (un germen de) una función holomorfa de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, también llamada la *transformación de correspondencia* a lo largo de la trayectoria γ .

Observación 2.3.2. El germen de función holomorfa Δ_γ no depende de la elección de las transversales intermedias τ_j . Esto se sigue de la identidad (2.6).

Observación 2.3.3. La definición de Δ_γ depende de la clase de homotopía de la trayectoria γ (con extremos fijos) y no así de la trayectoria misma.

Efectivamente. Sean γ_0 y γ_1 dos curvas homotópicas y consideremos la homotopía $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow L$,

$$\begin{aligned} H(0, t) &= a, & H(1, t) &= b & \forall t \in [0, 1]. \\ \text{y } H(s, t) &= \gamma_t(s) \end{aligned}$$

Afirmación 2.3.4. Dado que lo anterior define una familia de curvas uniparametrizadas de a a b y Δ_{γ_t} está definida para todo $t \in [0, 1]$, entonces $\Delta_{\gamma_0} = \Delta_{\gamma_1}$.

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$. Observemos que en la construcción de Δ_γ la elección de los puntos intermedios p_j , $\tau_j \cap L = \{p_j\}$ (los puntos base de las transversales τ_j), no necesariamente están en γ_t , tan sólo están en las intersecciones $U_j \cap U_{j+1}$.

Sean $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ tales que $s_j \in \gamma_t^{-1}(\{a = p_0, \dots, p_k = b\})$ y $\gamma_t[s_j, s_{j+1}] \subset U_j$. Por la continuidad de γ_t , $\gamma_t([s_j, s_{j+1}])$ es compacto; además, el complemento de cada U_j , denotémoslo por U_j^c , es cerrado. Por lo tanto, la distancia entre ambos conjuntos es positiva, es decir,

$$d_j = \text{dist}(\gamma_t([s_j, s_{j+1}]), U_j^c) > 0.$$

De esta manera, sea

$$d := \min_{j=0, \dots, k} \{d_j\}.$$

Entonces, como H es continua y el intervalo $[0, 1]$ es compacto, se sigue que H es uniformemente continua. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - u| < \delta$, entonces

$$|H(s, t) - H(s, u)| < d \quad \forall s \in [0, 1],$$

es decir,

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < d \quad \forall s \in [0, 1].$$

Esto muestra que los puntos de cualesquiera trayectorias γ_t están suficientemente cercanos; así, podemos elegir transversales $\tau_{t_1}, \dots, \tau_{t_{k-1}}$ suficientemente cercanas a las respectivas transversales τ_j , para todo $j = 1, \dots, k-1$ (las transversales externas coinciden). Por tanto, haciendo uso de la identidad (2.6), notamos que la composición

$$\Delta_{\gamma_1} = \Delta_{\tau_{1_{k-1}}, \tau_{1_k}} \circ \dots \circ \Delta_{\tau_{1_0}, \tau_{1_1}} : (\tau, a) \rightarrow (\tau', b),$$

coincide con Δ_{γ_0} , ya que $\tau_{1_0} = \tau$ y $\tau_{1_k} = \tau'$, como queríamos demostrar. \square

Este razonamiento cambia completamente cuando existen trayectorias con los mismos extremos homotópicamente distintas, o bien, cuando consideramos trayectorias cerradas (lazos).

Sean $a \in L$ un punto fijo sobre una hoja L de una foliación holomorfa \mathcal{F} , $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (U, a)$ una transversal en a a L , y $\gamma \in \pi_1(L, a)$ un lazo considerado módulo la equivalencia homotópica.

Definición 2.3.5. Definimos a la *transformación de holonomía*

$$\Delta_\gamma : (\tau, a) \rightarrow (\tau, a),$$

como la transformación de correspondencia asociada al lazo $\gamma \in \pi_1(L, a)$.

El *grupo de holonomía* de la foliación \mathcal{F} a lo largo de la hoja $L \in \mathcal{F}$ es la imagen del grupo fundamental $\pi_1(L, a)$ en el grupo de gérmenes de funciones holomorfas $\text{Diff}(\tau, a)$.

El grupo de holonomía está definido como un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, módulo una conjugación simultánea de todas las transformaciones de holonomía; de esta manera, es independientemente de la elección de la transversal τ , o incluso del punto base $a \in L$.

Este grupo es un invariante de la foliación que nos proporciona información acerca del comportamiento de las hojas de la foliación cercanas a una hoja dada L .

Proposición 2.3.6. Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos foliaciones holomorfas analíticamente (topológicamente) equivalentes, es decir, existe un biholomorfismo (homeomorfismo) H que las conjugue. Si $L \in \mathcal{F}$ es una hoja de \mathcal{F} tal que $H(L) = L' \in \mathcal{F}'$, entonces para cualquier elección de puntos $a \in L$, $a' \in L'$ y las correspondientes transversales τ, τ' , los grupos de holonomía correspondientes $G \subset \text{Diff}(\tau, a)$, $G' \subset \text{Diff}(\tau', a')$ son analíticamente (topológicamente) equivalentes (acorde con la Definición 1.2.2).

Demostración. Sea $\tau' = H(\tau)$, la afirmación es inmediata: La restricción de H a τ , $h = H|_\tau$, realiza la conjugación entre los grupos G y G' . Además, para cualquier otra elección de a' y τ' basta reemplazar al grupo G' por un grupo que sea analíticamente (topológicamente) equivalente a él. \square

La afirmación inversa no necesariamente es cierta. Antes de dar un ejemplo donde mostremos esto, calculemos la transformación de holonomía de una foliación definida por las soluciones de una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 2.3.7. Calculemos la transformación de holonomía de la foliación singular generada por las soluciones de la ecuación diferencial lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}, \quad 0 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}. \quad (2.8)$$

La foliación generada por las soluciones de (2.8) tiene una singularidad aislada en el origen y los ejes coordenados son separatrices complejas.

Además, sabemos que las soluciones de la ecuación diferencial (2.8) son de la forma

$$\varphi(t, p) = (e^{\lambda_1 t} p_1, e^{\lambda_2 t} p_2), \quad p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2. \quad (2.9)$$

Consideremos primero al eje coordenado x , $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\}$, y a la separatriz $L_1 = S_1 \setminus \{0\}$. Ahora, sean $\tau = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 1\}$ una transversal a L_1 en el punto $(1, 0)$, y $\gamma = \{(x, y) \in L_1 : |x| = 1\}$ un lazo en L_1 que rodea al punto singular de (2.8). Entonces, según (2.9), una solución φ de la ecuación (2.8) (la hoja parametrizada de la foliación) que pase por un punto $p = (1, p_2) \in \tau$ luce como

$$\varphi(t, p) = (e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} p_2).$$

Nos preguntamos ¿Para qué valores de $t \neq 0$, $\varphi(t, p) \in \tau$? Es decir, ¿Cuándo sucede que la primer coordenada de $\varphi(t, p)$ sea igual a 1? Veamos esto:

$$\text{Si } e^{\lambda_1 t} = 1, \text{ entonces } \log(e^{\lambda_1 t}) = \log(1).$$

Aquí debemos ser cuidadosos y recordar que estamos considerando el logaritmo complejo. En consecuencia, obtenemos que

$$\lambda_1 t = \log(1) = \log(|1|) + i \arg(1) = i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto,

$$t = \frac{2\pi i n}{\lambda_1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Consecuentemente, la transformación de holonomía es

$$\begin{aligned} \Delta & : \quad \tau & \longrightarrow & \tau \\ & (1, p_2) & \longmapsto & \left(1, e^{\frac{2\pi i \lambda_2}{\lambda_1}} p_2\right). \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga, tenemos que, al considerar el eje coordenado y , $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\}$, a la separatriz $L_2 = S_2 \setminus \{0\}$, y la transversal $\tau' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 1\}$ a L_2 en el punto $(0, 1)$, obtenemos que la respectiva transformación de holonomía es

$$\begin{aligned} \Delta' & : \quad \tau' & \longrightarrow & \tau' \\ & (p_1, 1) & \longmapsto & \left(e^{\frac{2\pi i \lambda_1}{\lambda_2}} p_1, 1\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.8. Existen foliaciones singulares $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ tales que sus grupos de holonomía son analíticamente equivalentes (en el sentido de la Definición 1.2.2), pero \mathcal{F} y \mathcal{F}' , no son analíticamente equivalentes. En efecto, consideremos las foliaciones generadas por las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{z} = Az \text{ y } \dot{z} = Bz, \quad z \in \mathbb{C}^2, \quad A, B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \quad (2.10)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Observemos además que A y B no pueden ser matrices similares debido a que sus valores propios son distintos. De esta manera, no existe una matriz invertible $C \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tal que $CA = BC$. En consecuencia, por la Proposición 2.1.6, las ecuaciones diferenciales $\dot{z} = Az$ y $\dot{z} = Bz$ no son analíticamente equivalentes. Más aún, tampoco son orbitalmente analíticamente equivalentes, ya que no existe una constante $c \in \mathbb{C}$, tal que $c(i, -i) = (3, 3)$. Consecuentemente, las foliaciones generadas por las soluciones de estas ecuaciones tampoco lo son.

Sin embargo, siguiendo la construcción de las respectivas transformaciones de holonomía de cada separatriz en cada ecuación (como en el Ejemplo 2.3.7), tenemos que éstas son idénticas (son la función identidad, $id \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$). Así, el grupo de holonomía es el mismo para ambas foliaciones, y por tanto se cumple la equivalencia analítica de los grupos de holonomía.

2.4. Explosión de singularidades.

Al considerar foliaciones holomorfas con singularidades en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definidas por una ecuación de Pfaff, $\omega = 0$, donde ω es una 1-forma holomorfa, (o bien, por las soluciones de una ecuación diferencial holomorfa), es de nuestro interés realizar un análisis lo más preciso posible sobre el comportamiento de las foliaciones en una vecindad de sus singularidades.

Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que ω es lineal, entonces no es difícil realizar dicho análisis. Más aún, si consideramos el caso donde ω tiene coeficientes de orden superior y su parte lineal no es demasiado degenerada, existen teoremas, tales como el Teorema de linealización de Poincaré, que nos permiten linealizar (analíticamente o formalmente) a ω , o bien, en general, llevar a ω a una expresión lo más simple posible (a su forma normal analítica o formal) y de esta manera hacer el análisis geométrico de las singularidades de \mathcal{F} , el cual muchas veces se reduce al primer caso.⁶ Empero, no siempre es posible proceder de dicha manera. Por ejemplo, si pensamos en una foliación $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$, tal que ω no tenga parte lineal, no es evidente cuál es el comportamiento de \mathcal{F} cerca de alguna singularidad.

En esta sección introduciremos un nuevo concepto que nos permitirá hacer un análisis local detallado de foliaciones cerca de su singularidad (aislada)

⁶Un estudio detallado de esto puede ser revisado en [9].

$0 \in \mathbb{C}^2$. Éste es conocido como explosión (*blow-up*), desingularización o resolución de singularidades de una foliación. A grandes rasgos, de lo que se trata es de considerar una transformación holomorfa $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, donde M es una 2-variedad holomorfa⁷, tal que una curva compleja $\mathbb{E} \subset M$ se proyecta en el punto singular de la foliación, y en el complemento de \mathbb{E} , $M \setminus \mathbb{E}$, π es un biholomorfismo. Esta segunda condición nos permite realizar un *pull back* de una foliación \mathcal{F} definida en $(\mathbb{C}^2, 0)$ a la variedad M y extenderla sobre \mathbb{E} . Al *pull back* es al que llamamos explosión (*blow-up*) de (una vecindad de) el punto singular de \mathcal{F} ; como es costumbre, supondremos que $0 \in \mathbb{C}^2$ es tal punto.

Lo más importante de proceder de esta manera para estudiar una foliación $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$, cuando ω no tiene parte lineal, es que, después de un número finito de explosiones obtenemos una foliación cuyas singularidades son todas elementales (de acuerdo con la Definición 2.1.9), con lo cual podemos dar marcha atrás (implotar o proyectar) y obtener así una mejor descripción geométrica de la foliación original \mathcal{F} cerca del punto singular $0 \in \mathbb{C}^2$.

Definición 2.4.1. Sea $0 \in \mathbb{C}^2$. La variedad \mathbb{M} obtenida por la *explosión* está definida por las cartas:

$$(x, t) : V_x \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{y} \quad (T, y) : V_y \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

y por el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \Psi : V_x \setminus \{t = 0\} &\longrightarrow V_y \setminus \{T = 0\} \\ (x, t) &\longmapsto \left(\frac{1}{t}, tx\right). \end{aligned}$$

La *proyección canónica* $\pi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$ está definida sobre las cartas por:

$$\begin{array}{ccc} V_x & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, t) & \longmapsto & (x, tx) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} V_y & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (T, y) & \longmapsto & (Ty, y) \end{array}.$$

De esta manera, la variedad \mathbb{M} que obtenemos con la construcción precedente puede ser pensada como la unión ajena de:

$$\mathbb{E} := \mathbb{E}_x \cup \mathbb{E}_y = \pi^{-1}(0), \quad \text{donde } \mathbb{E}_x = \{x = 0\} \subset V_x \text{ y } \mathbb{E}_y = \{y = 0\} \subset V_y,$$

el cual es biholomorfo a $\mathbb{C}P^1$, y su complemento $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ que es biholomorfo a $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ bajo π . A \mathbb{E} comúnmente se le llama *divisor excepcional* de \mathbb{M} , y a \mathbb{M} la *banda de Möbius compleja*.

Hecho esto, definamos ahora la explosión de foliaciones singulares holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Definición 2.4.2. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Definimos la *explosión* de \mathcal{F} como la foliación singular holomorfa $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$ en \mathbb{M} , donde $\pi^*\mathcal{F} = \{\pi^*\omega = 0\}$.

⁷La definición de 2-variedad holomorfa se encuentra en el Apéndice. Ver Sección A.5, Definición A.5.2.

Se tienen dos posibilidades para la explosión $\tilde{\mathcal{F}}$: La primera de ellas es cuando el divisor excepcional \mathbb{E} es una separatriz de $\tilde{\mathcal{F}}$ y la otra es cuando \mathbb{E} es transversal a la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$; es decir, cuando casi todos los puntos de \mathbb{E} excepto una cantidad finita (llamados *puntos de tangencia*) pertenecen a diferentes hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Definición 2.4.3. Sea \mathcal{F} una foliación singular holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Decimos que \mathcal{F} es *no dicrítica* si el divisor excepcional $\mathbb{E} = \pi^{-1}(0)$ es una separatriz de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$.

En caso contrario decimos que \mathcal{F} es *dicrítica*.

2.4.1. Explotando foliaciones.

Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ una foliación singular holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Por definición sabemos que su explosión está dada por $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F} = \{\pi^*\omega = 0\}$. La siguiente proposición nos permite clarificar cómo luce $\pi^*\mathcal{F}$, en cuanto a cálculos se refiere, en las cartas (x, t) y (T, y) , donde $t = \frac{y}{x}$ y $T = t^{-1} = \frac{x}{y}$.

Proposición 2.4.4. Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$, tal que $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$, $a, b \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, entonces

$$(i) \text{ En la carta } (x, t), \text{ con } t = \frac{y}{x}, \pi^*\omega = (a + tb)dx + xbt dt, y$$

$$(ii) \text{ En la carta } (T, y), \text{ con } T = \frac{y}{x}, \pi^*\omega = ya dT + (Ta + b)dy.$$

Demostración. (i) Haciendo el cómputo respectivo tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= a(x, t)dx + b(x, t)d(xt) \\ &= a(x, t)dx + b(x, t)(tdx + xdt) \\ &= (a(x, t) + tb(x, t))dx + xb(x, t)dt. \end{aligned}$$

(ii) Análogamente, en la carta (T, y) , se satisface que

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= a(T, y)d(Ty) + b(T, y)dy \\ &= a(T, y)(ydT + Tdy) + b(T, y)dy \\ &= ya(T, y)dT + (Ta(T, y) + b(T, y))dy. \end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= (a + tb)dx + xbt dt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= ya dT + (Ta + b)dy, \text{ en la carta } (T, y). \end{aligned}$$

□

Consideremos ejemplos concretos de foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definidas por 1-formas holomorfas y calculemos su explosión.

Ejemplo 2.4.5. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = ydx - xdy$ ($a(x, y) = y$ y $b(x, y) = -x$). La singularidad de \mathcal{F} es de tipo nodo. Veamos qué sucede al explotar \mathcal{F} . Para esto, por la Proposición 2.4.4, podemos asegurar que:

En la carta (x, t) , $\pi^*\omega$ satisface

$$\pi^*\omega = -x^2 dt,$$

pues $y = tx$, $a(x, y)|_{y=tx} = tx$ y $b(x, y)|_{y=tx} = x$.

Análogamente, en la carta (T, y) , $\pi^*\omega$ satisface

$$\pi^*\omega = y^2 dT,$$

ya que $x = Ty$, $a(x, y)|_{x=Ty} = y$ y $b(x, y)|_{x=Ty} = Ty$.

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= -x^2 dt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= y^2 dT, \text{ en la carta } (T, y). \end{aligned}$$

Pero la foliación definida por $\pi^*\omega$ es equivalente a⁸

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= -x dt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= y dT, \text{ en la carta } (T, y). \end{aligned}$$

Luego, notamos que la foliación resultante es no singular. De hecho, en este caso, se trata de una foliación dicrítica.

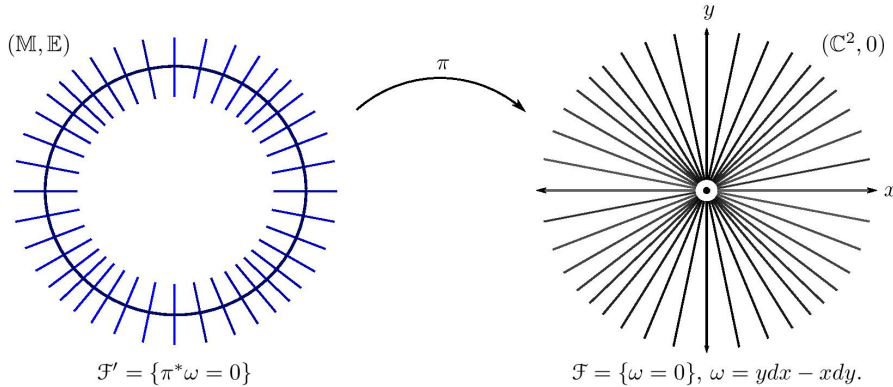


Figura 2.4: Explosión de una singularidad tipo nodo.

⁸Consideramos esta equivalencia, obtenida al dividir entre $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ en las cartas (x, t) y (T, y) respectivamente, fuera del divisor excepcional \mathbb{E} , y extender la foliación obtenida en (\mathbb{M}, \mathbb{E}) a \mathbb{E} , para así dar lugar a una foliación singular (con singularidades aisladas en \mathbb{E}) acorde con la Definición 2.2.6. Este proceso es más ilustrativo en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 2.4.6. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = ydx + xdy$ ($a(x, y) = y$ y $b(x, y) = x$). Se puede observar que la singularidad de \mathcal{F} es de tipo silla. Además, al considerar la explosión de \mathcal{F} , acorde con la Proposición 2.4.4, obtenemos que:

En la carta (x, t) , $\pi^*\omega$ se ve como

$$\pi^*\omega = (2tx)dx + x^2dt,$$

pues $y = tx$, $a(x, y)|_{y=tx} = tx$ y $b(x, y)|_{y=tx} = x$.

Análogamente, en la carta (T, y) , $\pi^*\omega$ toma la forma

$$\pi^*\omega = y^2dT + (2Ty)dy,$$

ya que $x = Ty$, $a(x, y)|_{x=Ty} = y$ y $b(x, y)|_{x=Ty} = Ty$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= (2tx)dx + x^2dt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= y^2dT + (2Ty)dy, \text{ en la carta } (T, y). \end{aligned}$$

En consecuencia, bajo equivalencia orbital, concluimos que

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &= 2txdx + xdt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= ydT + 2Tdy, \text{ en la carta } (T, y). \end{aligned}$$

Entonces, podemos observar que nuevamente se obtiene una foliación cuya singularidad (en ambas cartas) es de tipo silla.

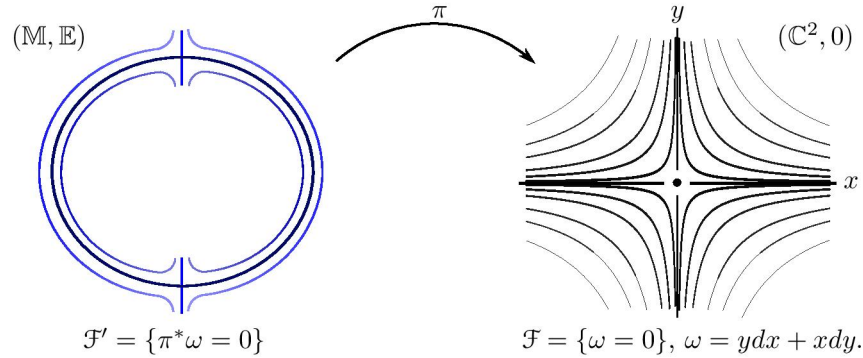


Figura 2.5: Explosión de una singularidad tipo silla.

Ejemplo 2.4.7. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = xdx + ydy$ ($a(x, y) = x$ y $b(x, y) = y$). Notemos que \mathcal{F} es una foliación que tiene una singularidad de tipo centro.

Explotemos \mathcal{F} . Prosiguiendo tal como lo hemos hecho en los ejemplos anteriores, obtenemos que:

En la carta (x, t) , $\pi^*\omega$ luce como

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= (x + t(tx))dx + x(tx)dt \\ &= x(1 + t^2)dx + x^2t dt,\end{aligned}$$

ya que $y = tx$, $a(x, y)|_{y=tx} = x$ y $b(x, y)|_{y=tx} = tx$.

Análogamente, en la carta (T, y) , $\pi^*\omega$ luce como

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= y(Ty)dT + (T(Ty) + y)dy \\ &= Ty^2 dT + y(1 + T^2)dy,\end{aligned}$$

ya que $x = Ty$, $a(x, y)|_{x=Ty} = Ty$ y $b(x, y)|_{x=Ty} = y$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= x(1 + t^2)dx + x^2t dt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= Ty^2 dT + y(1 + T^2)dy, \text{ en la carta } (T, y).\end{aligned}$$

De esta manera, al simplificar la última expresión, bajo equivalencia orbital, obtenemos

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= (1 + t^2)dx + xt dt, \text{ en la carta } (x, t) \text{ y} \\ \pi^*\omega &= Ty dT + (1 + T^2)dy, \text{ en la carta } (T, y).\end{aligned}$$

Analicemos con detalle $\pi^*\omega$ para darnos cuenta si define una foliación singular y, en dado caso, qué tipo de singularidades presenta.

Por un lado, en la carta (x, t) , $\pi^*\omega = \tilde{a}dx + \tilde{b}dt$, con $\tilde{a}(x, t) = 1 + t^2$ y $\tilde{b}(x, t) = xt$. Así, dado $F = -\tilde{b}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{a}\frac{\partial}{\partial t}$, el campo dual de $\pi^*\omega$, notamos que $p_1 = (0, i)$ es un punto singular de F , y

$$D_{p_1}F = \left[\begin{array}{cc} -t & -x \\ 0 & 2t \end{array} \right] \Big|_{(p_1)} = \left[\begin{array}{cc} -i & 0 \\ 0 & 2i \end{array} \right].$$

Por lo tanto, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Luego, $\pi^*\mathcal{F}$ tiene una singularidad en $(0, i)$ de tipo silla.

Si realizamos el análisis correspondiente en la carta (T, y) nos podremos dar cuenta que aparece una singularidad en el punto $p_2 = (-i, 0)$, y que ésta también es de tipo silla, con $\lambda' = \lambda = -\frac{1}{2}$.

Por otro lado, de lo desarrollado en el Ejemplo 2.3.1, notamos que la transformación de holonomía, en ambas cartas, asociada a \mathbb{E} es de la forma:

$$\Delta(z) = -z + \dots$$

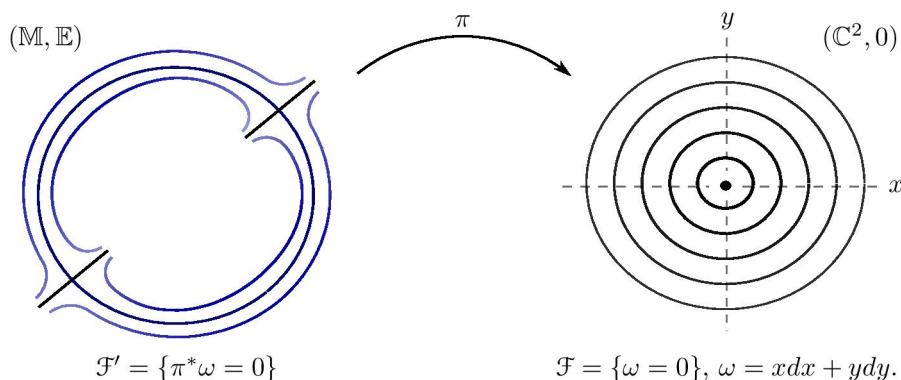


Figura 2.6: Explosión de una singularidad tipo centro.

2.4.2. Teorema de Seidenberg.

Como dijimos anteriormente, dada $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$, una foliación singular holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$, mediante la iteración del proceso de explotar la singularidad $0 \in \mathbb{C}^2$ de \mathcal{F} , se obtiene una foliación tal que cada una de las singularidades que aparecen en ella son elementales. Este resultado es el famoso Teorema de Seidenberg (Abraham Seidenberg (1916-1988)).

Teorema 2.4.8 (De Seidenberg). ⁹Para cualquier singularidad de una foliación holomorfa \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ se puede construir una superficie holomorfa M con una curva analítica $\mathbb{E} \subset M$ y una transformación holomorfa $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, que es un biholomorfismo entre $M \setminus \mathbb{E}$ y $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ y tal que $\pi^*\mathcal{F}$ solamente contiene singularidades elementales en \mathbb{E} .

Concretamente, la transformación π que resuelve a la singularidad de \mathcal{F} puede ser construida como la composición finita de explosiones.

El divisor excepcional $\mathbb{E} = \pi^{-1}(0)$ es la unión de una cantidad finita de líneas proyectivas, \mathbb{E}_j , que se intersectan transversalmente; es decir, $\mathbb{E} = \bigcup \mathbb{E}_j$, $\mathbb{E}_j \simeq \mathbb{C}P^1$, $\mathbb{E}_j \cap \mathbb{E}_i$.

Si bien la demostración de este teorema no está a nuestro alcance, es necesario saber qué afirma y tenerlo presente. Decimos esto puesto que una de las ideas principales para demostrar la caracterización de las foliaciones holomorfas integrables en $(\mathbb{C}^2, 0)$ (introducidas a continuación); a saber, el Teorema de Mattei-Moussu, Teorema 2.6.4, y un hecho que se desprende de éste, (Teorema 2.6.5) radica en el hecho de considerar la cantidad de explosiones necesarias para desingularizar a una foliación holomorfa, y el Teorema de Seidenberg nos garantiza que proceder de manera tal tiene sentido.

⁹Una demostración de este teorema puede ser consultada en [9] y [12].

2.5. Foliaciones integrables.

En el primer capítulo introducimos el concepto de integrabilidad en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ (Definición 1.4.2) y dimos una caracterización de los subgrupos finitamente generados integrables de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ (Corolario 1.4.13). Enseguida estudiaremos una familia muy particular de las foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$: Aquéllas cuyas hojas resultan ser (componentes conexas de) las curvas de nivel de una función holomorfa no constante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. En el desarrollo de esta parte de la teoría de foliaciones haremos uso extenso de las propiedades vistas sobre los gérmenes conformes, puesto que tanto el grupo de holonomía de una foliación holomorfa como el grupo de holonomía evanescente definido para foliaciones no dicríticas (definido en la presente sección) son, por construcción, subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Definición 2.5.1. Decimos que una foliación singular \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es *integrable* si existe (un germen de) una función holomorfa no constante $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, tal que u es constante sobre las hojas de \mathcal{F} .

Pensando en una foliación $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ definida por una 1-forma holomorfa ω , podemos interpretar esta definición de la siguiente manera: \mathcal{F} es integrable si satisface:

$$\omega \wedge du = 0.$$

Equivalentemente, decimos que el germen de un campo vectorial $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^2, 0)$ es integrable si

$$Fu = 0,$$

donde Fu denota, como es usual, la derivada de Lie de la función u en la dirección del campo vectorial F .

En ambos casos la función holomorfa no constante u es llamada *primera integral*, o simplemente *integral* de la foliación.

Si sólo pedimos que u sea una serie formal, entonces decimos que \mathcal{F} es una foliación *formalmente integrable*.

Ejemplo 2.5.2. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = pydx + qxdy$ con $p, q \in \mathbb{N}$ primos relativos. Observemos que \mathcal{F} tiene una singularidad de tipo silla en el origen $0 \in \mathbb{C}^2$. Sea $u(x, y) = x^p y^q \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, su derivada exterior, du , es:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = px^{p-1}y^q dx + qx^p y^{q-1} dy.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \omega \wedge du &= (pydx + qxdy) \wedge (px^{p-1}y^q dx + qx^p y^{q-1} dy) \\ &= pqx^p y^q dx \wedge dy + qp x^p y^q dy \wedge dx \\ &= (pqx^p y^q - qp x^p y^q) dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $\omega \wedge du = 0$. Por lo tanto, \mathcal{F} es integrable.

2.5.1. Principales propiedades de las foliaciones integrales.

Ahora que contamos con la definición formal de lo que es una foliación integrable en $(\mathbb{C}^2, 0)$, como primer paso hacia la caracterización de las foliaciones integrales, estudiemos sus características analíticas y topológicas.

Proposición 2.5.3. *Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por una 1-forma exacta¹⁰, entonces \mathcal{F} es integrable.*

Demostración. Esto es inmediato debido a que $\omega = du$ con $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ por ser ω exacta. Por lo tanto,

$$\omega \wedge du = du \wedge du = 0.$$

Es decir, u es una primera integral para \mathcal{F} . □

Ejemplo 2.5.4. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = xdx + ydy$. Esta foliación es la misma que estudiamos en el Ejemplo 2.4.7. Claramente $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ es una integral de la foliación ($\omega = du$). Por lo tanto las hojas de $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ son las curvas de nivel de u .

Ejemplo 2.5.5. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ la foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = ydx + xdy$. \mathcal{F} es la foliación vista en el Ejemplo 2.4.6. También, podemos considerar a \mathcal{F} como un caso particular del Ejemplo 2.5.2 ($p = q = 1$). Luego, $u(x, y) = xy$ es una primera integral para ω . La derivada exterior de u , du , es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = ydx + xdy.$$

En consecuencia, en este caso,

$$\omega = du.$$

Así, las hojas de \mathcal{F} son las curvas de nivel de $u(x, y) = xy$.

Observación 2.5.6. La foliación $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ considerada en el Ejemplo 2.5.2 no está definida por una 1-forma exacta cuando $p \neq q$. En efecto, si $\omega = pydx + qxdy$ fuese exacta, entonces ω sería cerrada¹¹. Es decir,

$$d\omega = 0.$$

Pero,

$$d\omega = d(pydx + qxdy) = (p - q)dx \wedge dy.$$

Así, $d\omega \neq 0$, ya que $p \neq q$. Por lo tanto, ω no es exacta.

¹⁰La definición de una 1-forma holomorfa exacta se encuentra en el Apéndice. Ver Sección A.5, Definición A.5.32.

¹¹Este hecho está demostrado en el Apéndice. Ver Sección A.5, Observación A.5.33.

Esta observación muestra que existen foliaciones integrables que no necesariamente están definidas por alguna 1-forma holomorfa exacta.

En general, un cálculo sencillo nos permite ver cómo es una 1-forma que define una foliación integrable.

Proposición 2.5.7. *Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ integrable, entonces*

$$\omega = gdu,$$

donde $u, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, $g(0) \neq 0$.

Demostración. Supongamos que $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ es una primera integral de \mathcal{F} , y que $\omega = adx + bdy$. Por definición de integrabilidad, $\omega \wedge du = 0$. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= (adx + bdy) \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \\ &= \left(a \frac{\partial u}{\partial y} - b \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Entonces

$$a \frac{\partial u}{\partial y} - b \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

De esta última igualdad se sigue el resultado, pues los coeficientes de ω deben cumplir

$$a = g \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad b = g \frac{\partial u}{\partial y}.$$

□

Proposición 2.5.8. *Si \mathcal{F} es una foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente integrable, entonces el grupo de holonomía, $G_{\mathcal{F}}$, asociado a cualquier hoja, calculado en una transversal τ fija, es integrable (acorde con la Definición 1.4.2), o equivalentemente, $G_{\mathcal{F}}$ es cíclico finito¹².*

Demostración. Supongamos que \mathcal{F} es formalmente integrable, entonces, por definición, las hojas de \mathcal{F} están contenidas en las curvas de nivel de la serie formal u , donde u es una primera integral formal de \mathcal{F} ; consecuentemente, la restricción de u a la transversal τ usada para el cómputo de la holonomía de una hoja $L \in \mathcal{F}$ de la foliación \mathcal{F} , $u|_{\tau}$, resulta ser una integral formal para el grupo de holonomía $G_{\mathcal{F}} \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. En efecto, si $p \in L' \cap \tau$, donde $L' \in \mathcal{F}$ es una hoja de \mathcal{F} cercana a L , entonces sabemos que

$$\Delta(p) \in L' \cap \tau, \quad \forall \Delta \in G_{\mathcal{F}}.$$

Luego,

$$u|_{\tau} \circ \Delta = u|_{\tau}.$$

Así, $G_{\mathcal{F}}$ es formalmente integrable, pero, por el Teorema 1.4.6, sabemos que cualquier subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ formalmente integrable es integrable. Concluimos entonces que $G_{\mathcal{F}}$ es integrable. □

¹²Ver Corolario 1.4.13.

Notemos que de este hecho concluimos que la holonomía de cualquier separatriz $L \in \mathcal{F}$ de una foliación holomorfa integrable \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ siempre es finita.

Para foliaciones holomorfas se cumple un resultado análogo al Corolario 1.4.10. Primero lo demostramos para foliaciones analíticamente equivalentes, pero más adelante nos daremos cuenta que también es válido si sólo pedimos equivalencia formal entre las foliaciones.

Teorema 2.5.9. *Si \mathcal{F} y \mathcal{F}' son dos foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ analíticamente equivalentes y \mathcal{F} es integrable, entonces \mathcal{F}' es integrable.*

Demostración. Sean $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ el biholomorfismo que conjuga a las foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' , y $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ una primera integral de \mathcal{F} . Afirmamos que $u \circ H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ es una primera integral para \mathcal{F}' . En efecto, basta demostrar que $u \circ H$ es constante a lo largo de cada hoja de \mathcal{F}' . Sea $L' \in \mathcal{F}'$ una hoja de \mathcal{F}' . Entonces $H(L') = L \in \mathcal{F}$ es una hoja de \mathcal{F} . Por otro lado, de la integrabilidad de \mathcal{F} , se sigue que $u(L) = c$, con $c \in \mathbb{C}$ constante. Por lo tanto, combinando ambas igualdades, observamos que:

$$(u \circ H)(L') = u(H(L')) = u(L) = c.$$

Es decir, $(u \circ H)(L') = c$. □

En cuanto a qué sucede al considerar la explosión de una foliación integrable, tenemos que ésta también lo es.

Proposición 2.5.10. *Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$. \mathcal{F} es integrable si y sólo si su explosión, la foliación $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$ en la banda de Möbius compleja \mathbb{M} , es integrable en una vecindad del divisor excepcional \mathbb{E} .*

Demostración. Supongamos primero que \mathcal{F} es integrable y sea $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ una primera integral para \mathcal{F} . Entonces, el *pull back* $\pi^*(u) = u \circ \pi$ de u es una primera integral para \mathcal{F}' en una vecindad del divisor excepcional \mathbb{E} ya que π es un biholomorfismo entre $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ y $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$, y por lo tanto, $\pi^*(u)$ es constante a lo largo de las hojas de \mathcal{F}' en $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$.

Inversamente, si $\pi^*\mathcal{F}$ es integrable en una vecindad del divisor excepcional y $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ es una primera integral para $\pi^*\mathcal{F}$, entonces, usando nuevamente el hecho de que π es un biholomorfismo entre $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ y $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$, se sigue que $\tilde{u} = u \circ \pi^{-1}$ es una primera integral para \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$. Finalmente, por el Teorema de extensión de Riemann¹³, \tilde{u} se extiende de manera holomorfa a $(\mathbb{C}^2, 0)$. □

Observación 2.5.11. Otra demostración de esta proposición puede ser hecha usando las propiedades algebraicas del *pull back* $\pi^*\omega$ y de la derivada exterior para 1-formas holomorfas, las cuales se encuentran en el Apéndice, Sección A.5.

Respecto a la topología de las foliaciones integrables, cualquier foliación integrable satisface las siguientes condiciones.

¹³Ver Apéndice, Sección A.4, Teorema A.4.6.

Teorema 2.5.12. *Si \mathcal{F} es una foliación singular integrable en $(\mathbb{C}^2, 0)$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

- a) *Si $U \subset \mathbb{C}^2$ es una vecindad suficientemente pequeña del origen ($0 \in U$), entonces las hojas de \mathcal{F} son cerradas en $U \setminus \{0\}$.*
- b) *A lo más un número finito de hojas de \mathcal{F} se acumulan en $0 \in \mathbb{C}^2$.*

Demostración. a) Sean $L \in \mathcal{F}$ una hoja de \mathcal{F} y $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ una primera integral de \mathcal{F} , entonces, por definición, existe $c \in \mathbb{C}$ constante tal que

$$u(L) = c.$$

Tenemos los siguientes casos.

Si $c \neq 0$, entonces L es una componente conexa de $u^{-1}(c)$; por lo tanto L es cerrada.

Por otro lado, si $c = 0$, entonces L es una componente conexa de $u^{-1}(0) \setminus \{0\}$. Con lo cual se sigue el resultado.

b) Sea L una componente conexa de $u^{-1}(0) \setminus \{0\}$. Consideremos $p \in L$ y τ una transversal a L en p . Entonces, la restricción de la primera integral $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ a τ , $u|_\tau$, es una función holomorfa en τ . Debido a que u es no constante, se sigue que p es un cero aislado de $u|_\tau$. Consecuentemente, en L no se acumulan otras componentes de $u^{-1}(0) \setminus \{0\}$. De este hecho se sigue que b) es cierto. \square

2.5.2. Integrabilidad de foliaciones reales en $(\mathbb{R}^2, 0)$.

Pensemos ahora un momento en foliaciones reales analíticas. Esto es, en foliaciones en $(\mathbb{R}^2, 0)$ definidas por campos vectoriales (o bien, 1-formas) reales analíticos¹⁴.

Como notaremos más adelante, la propiedad para foliaciones reales analíticas en $(\mathbb{R}^2, 0)$ de ser integrable está estrechamente relacionada con la de tener una singularidad tipo centro. El Teorema de Poincaré (Henri Poincaré (1854-1912))-Lyapunov (Aleksandr Lyapunov (1857-1918)), afirma que las foliaciones reales analíticas con singularidad tipo centro y parte lineal no degenerada, siempre son integrables. De este teorema obtendremos un corolario que afirma que cualquier foliación real analítica con singularidad elíptica, formalmente integrable, resulta ser integrable (en la última parte de nuestro trabajo demostraremos que esta afirmación es válida en general).

Comencemos nuestro estudio considerando un caso particular de foliaciones reales integrables.

¹⁴Todas las definiciones formales para “foliaciones reales analíticas” se obtienen inmediatamente sustituyendo $(\mathbb{C}^2, 0)$ por $(\mathbb{R}^2, 0)$ y el término “holomorfa” por “real analítica” en las definiciones respectivas dadas previamente para el caso holomorfo. Es decir, todos los conceptos antes definidos, tales como campo vectorial, foliación holomorfa, explosión de singularidades, holonomía e integrabilidad, serán pensados en el caso “real”.

Definición 2.5.13. Sea $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^r , $r \geq 2$. La ecuación diferencial en \mathbb{R}^2 definida por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

es llamada *ecuación hamiltoniana* y la función H es conocida como el *Hamiltoniano*. De este modo, diremos además que la foliación \mathcal{F} en $(\mathbb{R}^2, 0)$ definida por las soluciones de la ecuación diferencial (2.12), es *hamiltoniana*.

Observación 2.5.14. Cualquier foliación hamiltoniana en $(\mathbb{R}^2, 0)$ es integrable. Para notarlo, traduzcamos la ecuación diferencial (2.12) al lenguaje de 1-formas; es decir, consideremos la 1-forma ω dual del campo vectorial que define a la ecuación (2.12),

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy.$$

Claramente ω resulta ser una 1-forma exacta ($\omega = dH$). Por lo tanto, por la Proposición 2.5.3, se sigue que \mathcal{F} es una foliación integrable, más aún, el Hamiltoniano es una primera integral para \mathcal{F} .

Definición 2.5.15. Decimos que una foliación $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ en $(\mathbb{R}^2, 0)$ es *elíptica* si $\omega = xdx + ydy + \dots$. Escrito esto en el lenguaje de ecuaciones diferenciales tenemos que, la ecuación asociada al campo dual de ω es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \dots \\ \dot{y} &= x + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es decir, su parte lineal es de tipo centro.

Si \mathcal{F} es una foliación elíptica y además es hamiltoniana, entonces el Hamiltoniano relativo a \mathcal{F} localmente luce de manera muy simple, a saber, como una función cuadrática. Para demostrar esto usaremos un resultado bastante conocido; el Lema de Morse (Marston Morse (1892-1977)). En la demostración de éste usaremos el Lema de Hadamard (Jacques Hadamard (1865-1963)).

Teorema 2.5.16 (Lema de Hadamard). *Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ y $f(0, 0) = 0$, entonces existen funciones $h_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas¹⁵, $j = 1, 2$, tales que*

$$f(x, y) = xh_1(x, y) + yh_2(x, y).$$

Demostración. Sean $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(t) = f(tx, ty), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Entonces,

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \cdot y. \quad (2.14)$$

¹⁵En general, si $f \in C^r$, entonces $h_j \in C^{r-1}$, $j = 1, 2$.

Además, por la regla de Barrow,

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt. \quad (2.15)$$

En consecuencia, dado que $h(1) = f(x, y)$ y $h(0) = f(0, 0) = 0$ por hipótesis, combinando las expresiones (2.14) y (2.15) tenemos que,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \cdot y \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \cdot x dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \cdot y dt \\ &= x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) dt + y \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si llamamos $h_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) dt$ y $h_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) dt$, obtenemos que $f(x, y) = xh_1(x, y) + yh_2(x, y)$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.5.17 (Lema de Morse). *En una vecindad de un punto crítico no degenerado¹⁶, una función es equivalente por la derecha a una suma de formas cuadráticas y una constante.*

Demostración. Por cuestiones de claridad, a lo largo de esta demostración usaremos la notación $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ para referirnos a los puntos del plano real.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2, \quad a_1, a_2 \neq 0.$$

Necesitamos demostrar que si $\varphi \in O(\|x\|^3)$ y $\varphi \in C^1$, entonces el germen $f + \varphi$ es equivalente por la derecha a f . Para lograrlo vamos a unir a f con $f + \varphi$ mediante una trayectoria $f + t\varphi$, con $t \in [0, 1]$. Para ello buscaremos una familia a un parámetro de difeomorfismos g_0^t adecuada, para la cual

$$(f + t\varphi) \circ g_0^t(x) = f(x), \quad g_0^0(x) = x, \quad g_0^t(0) = 0. \quad (2.16)$$

Observemos que lo que debemos de probar es la existencia de un campo vectorial $V = V(t, x)$ tal que las soluciones g_0^t de la ecuación $\dot{x} = V(t, x)$ satisfagan (2.16).

Consideremos $V(t, x)$ y g_0^t tales que $\frac{d}{dt} g_0^t(x) = V(t, g_0^t(x))$ y supongamos que se cumple (2.16). Si derivamos la expresión (2.16) con respecto a t , entonces

$$\frac{d}{dt} \left((f + t\varphi) \circ g_0^t(x) \right) = 0.$$

¹⁶Recordemos que dada una función $g \in C^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 2$, se dice que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico no degenerado de g si $\nabla g(x_0, y_0) = 0$ y además la matriz hessiana de g en (x_0, y_0) es no singular.

Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}f\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right) + \frac{d}{dt}t\varphi\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right) \\ &= \nabla f \cdot V\left(t, \mathbf{g}_v^t(x)\right) + \varphi\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right) + t\nabla\varphi \cdot V\left(t, \mathbf{g}_v^t(x)\right) \\ &= (\nabla f + t\nabla\varphi) \cdot V\left(t, \mathbf{g}_v^t(x)\right) + \varphi\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\nabla f + t\nabla\varphi) \cdot V\left(t, \mathbf{g}_v^t(x)\right) + \varphi\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right) = 0.$$

Equivalentemente,

$$(\nabla f + t\nabla\varphi) \cdot V\left(t, \mathbf{g}_v^t(x)\right) = -\varphi\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right).$$

Así, como $f(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$, con $a_1, a_2 \neq 0$, desarrollando el lado izquierdo de la igualdad anterior,

$$\left[\left((2a_1x_1, 2a_2x_2) + t \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right) \right) \cdot (V_1, V_2) \right] \Big|_{(t, \mathbf{g}_v^t(x))} = -\varphi\left(\mathbf{g}_v^t(x)\right).$$

De esta manera,

$$\left(2a_1x_1 + t \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right) V_1 + \left(2a_2x_2 + t \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right) V_2 = -\varphi. \quad (2.17)$$

Denotemos $y_j = 2a_jx_j + t \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$. Ahora, puesto que $\varphi \in O(\|x\|^3)$, se cumple $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(0) = 0$, $j = 1, 2$. Luego,

$$\det \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] \Big|_{x=0} = \det \begin{bmatrix} 2a_1 & 0 \\ 0 & 2a_2 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Entonces, en una vecindad suficientemente pequeña de $x = 0$, se satisface que $\det \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Consecuentemente, podemos cambiar de coordenadas (x_1, x_2, t) a (y_1, y_2, t) , y por lo tanto, la ecuación (2.17) en términos de (y_1, y_2, t) se escribe como

$$y_1V_1 + y_2V_2 = -\varphi. \quad (2.18)$$

Por otro lado, ya que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi \in C^1$, por el Lema de Hadamard, existen funciones continuas Ψ_1, Ψ_2 tales que podemos escribir a φ como

$$\varphi = y_1\Psi_1 + y_2\Psi_2, \quad \Psi_1(t, 0) = \Psi_2(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Por consiguiente, de (2.18) se sigue que $V_j = \Psi_j$, $j = 1, 2$. Esto nos permite definir $V_j(t, x) = \Psi_j(t, x)$, $\forall t \in [0, 1]$, $j = 1, 2$. Por lo tanto, con $V = (V_1, V_2)$ definida así, $\mathbf{g}_v^t(x)$ satisface (2.16).

Finalmente, la función constante cero es solución y en una vecindad de ella toda solución existe para todo $t \in [0, 1]$. Así, g_v^1 es el difeomorfismo buscado y está definido para todo x en una vecindad suficientemente pequeña del origen. Esto concluye la demostración. \square

Teorema 2.5.18. *Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación elíptica hamiltoniana, entonces, en una vecindad del origen $0 \in \mathbb{R}^2$, el Hamiltoniano $(H, dH = \omega)$, luce como una función cuadrática, es decir, $H(x, y) = x^2 + y^2$.*

Demostración. Observemos que es suficiente mostrar que H satisface las condiciones del Lema de Morse, es decir, que $0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico no degenerado de H . Esto es inmediato: $0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de H ya que es una singularidad de \mathcal{F} .

Por otro lado, el hecho de que el origen sea no degenerado es una consecuencia de que ω tiene parte lineal no degenerada; calculando la matriz hessiana de H en el origen obtenemos

$$D^2H|_{x=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, $D^2H|_{x=0}$ es no singular. Por lo tanto, $0 \in \mathbb{R}^2$ es punto crítico no degenerado de H . \square

No olvidemos que nuestro objetivo principal en este estudio de foliaciones reales integrables en $(\mathbb{R}^2, 0)$ es demostrar el Teorema de Poincaré-Lyapunov. Para lograr esto introduciremos un nuevo concepto: El de grupo de holonomía evanescente.

Definición 2.5.19. Definimos el *grupo de holonomía evanescente* de una foliación singular no dicrítica \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$, como el grupo de holonomía de la hoja excepcional $L = \mathbb{E} \setminus \text{Sing } \mathcal{F}' \in \mathcal{F}' = \pi^* \mathcal{F}$ sobre la banda de Möbius compleja \mathbb{M} que se obtiene al hacer una explosión $\pi : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de la singularidad $0 \in \mathbb{C}^2$.

Observación 2.5.20. Si estamos analizando foliaciones reales y deseamos considerar su grupo de holonomía evanescente, es necesario complejificar primero.

Además, por la definición que se da, el grupo de holonomía evanescente es un subgrupo finitamente generado de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ (en el caso de singularidades dicríticas este grupo no está definido).

Proposición 2.5.21. *El grupo de holonomía evanescente de cualquier foliación holomorfa \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente integrable y no dicrítica, es integrable.*

Demostración. Si \mathcal{F} es una foliación formalmente integrable y u es una primera integral formal para \mathcal{F} , al considerar la explosión $\pi : (\mathbb{M}, \mathbb{E}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de la singularidad de \mathcal{F} , el *pull back* de u en \mathbb{M} , $\pi^*(u)$, resulta ser una serie formal en (\mathbb{M}, \mathbb{E}) constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}' = \pi^* \mathcal{F}$. Así, por la definición de holonomía, la restricción de π^*u a la transversal τ usada para el cómputo

de las funciones de holonomía, $\pi^*u|_\tau$, es invariante por el grupo de holonomía evanescente, digamos H ; es decir, $\pi^*u|_\tau$ es una primera integral formal de H . Por lo tanto, de la integrabilidad formal de H , en virtud de la Observación 1.4.7, concluimos que H es integrable en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, como queríamos demostrar. \square

Recordemos que la integrabilidad de un subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es una condición bastante fuerte; ésta implica que el grupo sea cíclico finito (Corolario 1.4.13). De esta manera, tenemos claramente ya condiciones necesarias para que una foliación sea integrable.

La idea de la demostración del Teorema de Poincaré-Lyapunov es: Complejificar el problema, considerar la primera explosión, digamos \mathcal{F}' , de la singularidad de la foliación complejificada \mathcal{F} , y analizar al grupo de holonomía evanescente de \mathcal{F} vía los resultados de integrabilidad para subgrupos finitamente generados de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Extender la integral de este grupo a una integral de la foliación \mathcal{F}' en una vecindad del divisor excepcional \mathbb{E} en la banda de Möbius compleja \mathbb{M} , para luego proyectarla a una primera integral de la foliación original.

Para realizar esto de manera exitosa necesitamos saber qué es la saturación de un conjunto por las hojas de una foliación.

Definición 2.5.22. Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa en $U \subset \mathbb{C}^2$ y $B \subset U$ un subconjunto arbitrario de U . Definimos la *saturación de B por las hojas de \mathcal{F}* como la unión de todas las hojas que intersectan a B ; es decir,

$$\text{Sat}(B, \mathcal{F}) := \bigcup_{L \in \mathcal{F}, L \cap B \neq \emptyset} L.$$

Observación 2.5.23. Por la manera en que se define este concepto, la saturación de conjuntos abiertos es abierta. Esto puede ser pensado como una generalización (una traducción en foliaciones) del Teorema sobre la dependencia continua de las soluciones de ecuaciones diferenciales con respecto a condiciones iniciales, cuya demostración descansa en el Teorema de rectificación (Teorema 2.1.10)¹⁷. Así, la saturación de una vecindad de cualquier punto sobre una hoja de una foliación, contiene una vecindad abierta de la hoja.

Si ampliamos la definición de integrabilidad de foliaciones holomorfas al caso de foliaciones holomorfas no singulares, una consecuencia de la observación previa es el siguiente hecho.

Teorema 2.5.24 (Lema de Saturación). *Sean \mathcal{F} una foliación holomorfa no singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y $G \subset \text{Diff}(\tau, a)$ el grupo de holonomía respecto a la hoja $L \in \mathcal{F}$ calculado en la transversal τ con base $a \in L$. Si G es integrable y $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ es una primera integral de G , entonces u se extiende de manera holomorfa y única a una integral de \mathcal{F} en alguna vecindad abierta V de L .*

Demostración. Sean $a' \in L$ un punto arbitrario en la hoja L y τ' una transversal a L en a' . Consideremos una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$, que una al punto a' con a , es decir, $\gamma(0) = a'$ y $\gamma(1) = a$. Entonces, vía el mapeo de correspondencia asociado

¹⁷Consultar por ejemplo [4].

a Δ_γ , se sigue que $\tilde{u} = u \circ \Delta_\gamma$ es constante a lo largo de las hojas vecinas a L . En principio, la definición de \tilde{u} solamente depende de la curva γ . Afirmamos que, de hecho, es independiente de la elección de la curva γ , es decir, para cualquier otra curva γ' , $u \circ \Delta_{\gamma'} = \tilde{u} := u \circ \Delta_\gamma$. En efecto, si $\gamma' : [0, 1] \rightarrow L$ es otra curva que va de a' a a , entonces $\tilde{\gamma} = \gamma' \circ \gamma^{-1} \in \pi(L, a)$, y por lo tanto, $\Delta_{\tilde{\gamma}} \in G$. Ahora, puesto que por hipótesis u es una primera integral de G , entonces

$$u \circ \Delta_{\tilde{\gamma}} = u. \quad (2.19)$$

Por otro lado,

$$\Delta_{\gamma'} = \Delta_{\gamma' \circ (\gamma^{-1} \circ \gamma)} = \Delta_{(\gamma' \circ \gamma^{-1}) \circ \gamma} = \Delta_{\tilde{\gamma} \circ \gamma} = \Delta_{\tilde{\gamma}} \circ \Delta_\gamma.$$

Así,

$$\Delta_{\gamma'} = \Delta_{\tilde{\gamma}} \circ \Delta_\gamma. \quad (2.20)$$

Luego, combinando las ecuaciones (2.19) y (2.20), obtenemos

$$u \circ \Delta_{\gamma'} = u \circ (\Delta_{\tilde{\gamma}} \circ \Delta_\gamma) = (u \circ \Delta_{\tilde{\gamma}}) \circ \Delta_\gamma = u \circ \Delta_\gamma = \tilde{u}.$$

Por lo tanto, $u \circ \Delta_{\gamma'} = \tilde{u}$. Lo cual implica que u se extiende de manera holomorfa en una vecindad de L y dicha extensión es constante a lo largo de las hojas en tal vecindad, es decir, es una primera integral de \mathcal{F} en esta vecindad. \square

Necesitamos generalizar en Lema de Saturación al contexto singular. Sean \mathcal{F} una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$, S una separatriz compleja de \mathcal{F} en $0 \in \mathbb{C}^2$, $a \in S \setminus \{0\}$ y $u_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, a)$ el germen de función holomorfa en a tal que es una integral local de \mathcal{F} cerca de a . El problema de extensión es encontrar una primera integral $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ de \mathcal{F} de tal manera que el germen de u en a coincida con u_0 . Supongamos que u_0 está definida en una pequeña transversal $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, a)$ a S en a .

Una obstrucción para la existencia de tal extensión es la holonomía de \mathcal{F} , $\Delta_\gamma \in \text{Diff}(\mathbb{C}, a)$, asociada con el lazo $\gamma \in \pi(S \setminus \{0\}, a)$. Este problema podría ser resuelto satisfactoriamente sólo si u_0 fuese invariante bajo Δ_γ , es decir, Δ_γ fuese integrable. No obstante, la integrabilidad de la holonomía no garantiza la integrabilidad de la foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Observación 2.5.25. La integrabilidad de la holonomía asociada a una separatriz S de una foliación singular \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ no es suficiente para asegurar la integrabilidad de \mathcal{F} . En efecto, consideremos la foliación singular $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ en $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = ydx - xdy$. El origen $0 \in \mathbb{C}^2$ es un punto singular de tipo nodo para \mathcal{F} . Por lo tanto, cada hoja de \mathcal{F} contiene al origen en su cerradura. Luego, por el Teorema 2.5.12, \mathcal{F} no es integrable. Empero, al realizar el cómputo de la transformación de holonomía Δ asociada a la separatriz $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\} \setminus \{0\}$ tal como lo hicimos en el Ejemplo 2.3.1, tenemos que $\Delta = id$. Por lo tanto, Δ es integrable.

Recordemos que los tipos de singularidades elementales están determinados por su razón característica λ (el cociente de los valores propios de la parte

lineal). Los nodos, focos y sillan-nodo corresponden al caso cuando λ es positivo, no real o cero respectivamente. Las sillan (y centros) se deben al caso de los valores negativos de λ . Para todas las singularidades elementales el problema de extensión puede ser resuelto de manera sencilla en el sentido negativo o positivo.

Observación 2.5.26. Apreciamos que en virtud del Teorema 2.5.12, los nodos, focos y sillan-nodo (caso “nodal” complejo), no pueden ser integrables debido a que las hojas no singulares se acumulan en el origen. Es decir, si la razón característica $\lambda \geq 0$, entonces la foliación no es integrable.

Para mirar qué sucede en el caso de “silla” complejo usaremos el Teorema de Hadamard-Perron, enunciado (sin demostración) a continuación.

Teorema 2.5.27 (De Hadamard-Perron).¹⁸ *Sea $F(x) = Ax + V(x)$ un campo vectorial holomorfo tal que el punto singular de la parte lineal de F , $F_0(x) = Ax$, es hiperbólico; sean L^\pm los subespacios invariantes determinados por F_0 . Entonces la ecuación diferencial $\dot{x} = F(x)$ tiene dos variedades holomorfas invariantes¹⁹ W^\pm tangentes a los subespacios L^\pm .*

Lema 2.5.28. *Para cualquier foliación singular hiperbólica $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ cuya razón característica λ es tal que $\operatorname{Re} \lambda < 0$, la saturación $\operatorname{Sat}(\tau, \mathcal{F})$ de cualquier transversal a cada separatriz llena un complemento de la otra separatriz en una vecindad suficientemente pequeña del origen $0 \in \mathbb{C}^2$.*

Demostración. Por el Teorema de Hadamard-Perron, \mathcal{F} tiene dos separatrices complejas. Así, la ecuación diferencial que define a \mathcal{F} en coordenadas apropiadas luce como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (\lambda + \varepsilon(x, y)), \quad \varepsilon(0, 0) = 0. \quad (2.21)$$

Después de reescalar las variables si es necesario, podemos suponer que la ecuación (2.21) está definida en el bidisco $U = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$, la transversal τ es un disco pequeño, $\tau = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = 1, |y| < \delta\}$, y la función $\varepsilon(x, y)$ está acotada en U ,

$$|\varepsilon(x, y)| < \frac{1}{2} |\operatorname{Re} \lambda|, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Ahora, para cualquier $(x_0, y_0) \in U$, $x_0 \neq 0$, tomamos un trayectoria en $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\}$ que una a x_0 con el punto $x_1 = 1$ y consideramos el levantamiento de ésta a la hoja $L_0 \in \mathcal{F}$ que pasa por (x_0, y_0) . Tan sólo resta observar que L_0 se queda contenida en U . Esto lo podemos ver realizando el siguiente cálculo:

$$\frac{d|y|^2}{dx} = \frac{dy\bar{y}}{dx} = \frac{\bar{y}y}{x} (\lambda + \varepsilon(x, y)) + \frac{y\bar{y}}{x} \overline{(\lambda + \varepsilon(x, y))} = 2 \frac{|y|^2}{x} \operatorname{Re}(\lambda + \varepsilon(x, y)) < 0.$$

Mostramos así que la hoja L_0 que cruza τ en algún punto $(1, y_1)$, pertenece a la saturación de τ . Esto concluye la demostración. \square

¹⁸Una demostración de este resultado puede ser consultada en [9].

¹⁹Recordemos que una variedad holomorfa $W \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ es invariante para un campo vectorial holomorfo F si el vector $F(x)$ es tangente a W en cualquier punto $x \in W$.

Corolario 2.5.29. *Si la transformación de holonomía $f \in \text{Diff}(\tau, a)$ de una separatriz S de una foliación singular hiperbólica \mathcal{F} es integrable (lo cual es posible sólo si $\lambda < 0$), entonces cualquier germe $u_0 \in \mathcal{O}(\tau, a)$ invariante por f se extiende a una integral analítica de la foliación \mathcal{F} .*

Demostración. Sea $\mathcal{F}|_{(\mathbb{C}^2, 0) \setminus S'}$ la foliación no singular obtenida al restringir \mathcal{F} al complemento de S' en $(\mathbb{C}^2, 0)$, donde S' es la otra separatriz de \mathcal{F} . Entonces, por el Lema de Saturación, u_0 se extiende de manera holomorfa a una primera integral de $\mathcal{F}|_{(\mathbb{C}^2, 0) \setminus S'}$, es decir, u_0 se extiende de manera holomorfa a una primera integral de \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus S'$, digamos u . Por lo tanto, puesto que S' es el germe de una curva analítica (por definición de separatriz), por el Teorema de extensión de Riemann, u se extiende de manera analítica en $(\mathbb{C}^2, 0)$. \square

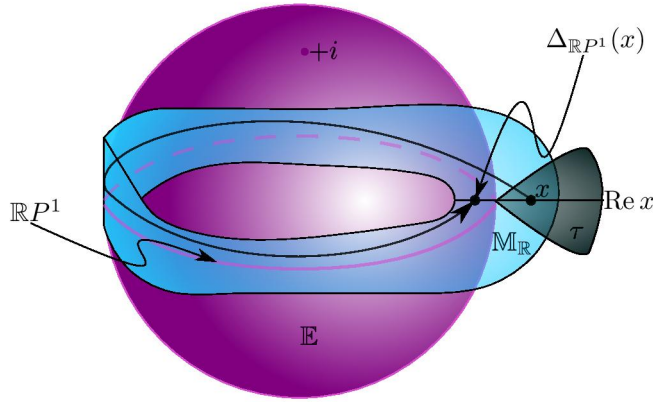


Figura 2.7: Teorema de Poincaré-Lyapunov.

Teorema 2.5.30 (De Poincaré-Lyapunov). *Una foliación real analítica elíptica en $(\mathbb{R}^2, 0)$ cuya singularidad es un centro, admite una primera integral real analítica con parte cuadrática no degenerada.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ una foliación real analítica elíptica tal que $0 \in \mathbb{R}^2$ es un centro, es decir, las hojas de \mathcal{F} en una vecindad del origen son homeomorfas a círculos, y la 1-forma ω que define a \mathcal{F} es tal como en (2.13). Sea $\tilde{\mathcal{F}} = \{\Omega = 0\}$ la complejificación de \mathcal{F} , y consideremos la explosión de $\tilde{\mathcal{F}}$, digamos $\tilde{\mathcal{F}}'$, en la banda de Möbius compleja \mathbb{M} cerca del divisor excepcional \mathbb{E} . Mediante el cálculo explícito de $\tilde{\mathcal{F}}'$ (el cual es análogo al hecho en el Ejemplo 2.4.7), notamos que $\tilde{\mathcal{F}}'$ tiene dos singularidades $\Sigma = \{\pm i\}$, ambas fuera del ecuador del divisor excepcional, $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{E}$.

Afirmamos que el grupo de holonomía evanescente H de $\tilde{\mathcal{F}}$ es cíclico finito. Efectivamente, como ω es real analítica, la explosión real resulta ser una foliación real bien definida en la banda de Möbius real, $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}$. Esta explosión podemos pensarla como la “parte real” de $\tilde{\mathcal{F}}'$. Así, $\mathbb{R}P^1$ (el alma de la banda de Möbius

real $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}$) es un lazo en \mathbb{E} que genera al grupo de homotopía de $\mathbb{E} \setminus \Sigma$; tomando dicho lazo y la transversal $\tau = \{t = 0\}$ en las coordenadas locales (x, t) , la transformación de holonomía $\Delta_{\mathbb{R}P^1}$ luce como $\Delta_{\mathbb{R}P^1}(\xi) = -\xi + \dots$.

Ahora, si $\tilde{\Delta}$ es la restricción de $\Delta_{\mathbb{R}P^1}$ a la explosión real, entonces: La parte real de la transversal τ se proyecta en el eje x del plano (x, y) en \mathbb{R}^2 . Entonces, por su construcción, resulta que $(\tilde{\Delta}(\xi), 0)$ es el primer punto de la intersección con el eje x de la hoja asociada a la solución del campo dual de ω que inicia en $(x, 0)$. Finalmente, puesto que $0 \in \mathbb{R}^2$ es un centro, necesariamente $(\tilde{\Delta}^2(\xi), 0) = (x, 0)$. Por lo tanto, de la analiticidad de la transformación $\Delta_{\mathbb{R}P^1}$, en virtud del Teorema de Unicidad²⁰, concluimos que $\Delta_{\mathbb{R}P^1}^2 = id$. Es decir, $\Delta_{\mathbb{R}P^1}$ es una involución. Por lo tanto $H \cong \mathbb{Z}_2$.

Una vez que hemos notado que H es cíclico finito ($H \cong \mathbb{Z}_2$), por el Corolario 1.4.13, resulta que H es integrable, de modo que existe un germen $u_0 \in \mathcal{O}(\tau, 0)$ holomorfo en la transversal τ invariante bajo $\Delta_{\mathbb{R}P^1}$. Luego, por el Lema de Saturación, u_0 se extiende a una primera integral de $\tilde{\mathcal{F}}'$ cerca de la hoja $L = \mathbb{E} \setminus \Sigma$. Consecuentemente, por el Corolario 2.5.29, u_0 se extiende de manera analítica sobre vecindades de ambos puntos singulares, lo cual da una primera integral de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre \mathbb{M} en una vecindad de \mathbb{E} . Entonces, por la Proposición 2.5.10, \mathcal{F} es integrable en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Además, como la foliación original es real analítica (los coeficientes de la expansión en series de potencias de ω son reales), entonces la primera integral obtenida de la foliación complejificada $\tilde{\mathcal{F}}$, es invariante bajo conjugación compleja ($z \mapsto \bar{z}$), y por lo tanto \mathcal{F} es integrable en $(\mathbb{R}^2, 0)$.

La conclusión del teorema afirma algo más; nos dice cómo es la parte cuadrática de la primera integral de la foliación. Esto es una consecuencia de la demostración de la Proposición 1.4.11. Efectivamente, por la forma en que demostramos la Proposición 1.4.11, ya que la transformación de holonomía evanescente es 2-periódica, podemos elegir el germen u_0 definido en τ (tal como en la demostración de la afirmación previa) tal que $u_0(\xi) = \xi^2 + \dots$. Después de la extensión de la proyección, tenemos que $u(x, 0) = x^2 + \dots$. Por lo tanto, por simetría (esto es, si hacemos toda la demostración en la otra carta en la explosión, (T, y)), tenemos que $u(x, y) = x^2 + y^2 + \dots$. \square

Proposición 2.5.31. *Si \mathcal{F} es una foliación real analítica elíptica en $(\mathbb{R}^2, 0)$ formalmente integrable, entonces $0 \in \mathbb{R}^2$ es un centro.*

Demostración. Siguiendo la misma idea usada para demostrar el Teorema de Poincaré-Lyapunov tenemos que, si $\tilde{\mathcal{F}}'$ es la explosión de la complejificación $\tilde{\mathcal{F}}$ de la foliación \mathcal{F} , nuevamente el grupo de holonomía evanescente H es isomorfo a \mathbb{Z}_2 : Esto se sigue del hecho de que la restricción de H a la explosión real es cíclica, pues por hipótesis \mathcal{F} es formalmente integrable, y que H no sea cíclico es incompatible con la integrabilidad formal de \mathcal{F} . Por lo tanto, $H \cong \mathbb{Z}_2$. Luego, necesariamente $0 \in \mathbb{R}^2$ es un centro, como queríamos demostrar. \square

Corolario 2.5.32. *Si \mathcal{F} es una foliación real analítica elíptica en $(\mathbb{R}^2, 0)$ formalmente integrable, entonces admite una primera integral analítica.*

²⁰Ver en el Apéndice el Teorema A.4.3.

Observación 2.5.33. Este resultado nos dice que, para foliaciones reales analíticas elípticas, se cumple el resultado análogo al Teorema 1.4.6. Al final de este capítulo veremos que esto es cierto en general; es decir, que cualquier foliación (holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$) formalmente integrable es analíticamente integrable.

Antes de pasar a la caracterización de las foliaciones integrables en $(\mathbb{C}^2, 0)$, vamos a exhibir un ejemplo, dado por Moussu en [13], que muestra qué tan importante es la hipótesis de que la foliación $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ en el Teorema de Poincaré-Lyapunov sea elíptica, es decir, que la parte lineal de ω sea no nula. Para esto, necesitamos el siguiente resultado, conocido como Principio de Simetría, que nos permite decir cuándo una singularidad de una foliación dada es un centro.

Teorema 2.5.34 (Principio de Simetría). ²¹ *Consideremos en $(\mathbb{R}^2, 0)$ la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned}.$$

Supongamos que P y Q son funciones reales analíticas que satisfacen

$$P(-x, y) = P(x, y), \quad Q(-x, y) = -Q(x, y),$$

y que $0 \in \mathbb{R}^2$ es el único punto singular en el eje y , $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Si γ es una trayectoria que comienza en el lado positivo de Y y regresa al lado negativo de Y , entonces γ es una órbita periódica. Si todas las trayectorias cercanas al origen tienen esta misma propiedad, entonces el origen es un centro.

Ejemplo 2.5.35. La foliación singular $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ en $(\mathbb{R}^2, 0)$ definida por la 1-forma

$$\omega = x^3 dx + y^3 dy - \frac{1}{2} x^2 y^2 dy,$$

satisface que $0 \in \mathbb{R}^2$ es un centro y \mathcal{F} no admite una primera integral.

El origen $0 \in \mathbb{R}^2$ es un centro de \mathcal{F} ya que la ecuación diferencial asociada al campo dual de ω satisface las hipótesis del Teorema 2.5.34.

Por otro lado, aún cuando la parte principal de ω sí admite una primera integral, pues $j^3 \omega = \frac{1}{4} d(x^4 + y^4)$, esto no es cierto para ω . Para notar esto, supongamos, por contradicción, que ω sí define una foliación integrable. Por la Proposición 2.5.7, deberían existir $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ tales que

$$\omega = gdf.$$

Entonces

$$d\omega = d(gdf) = dg \wedge df + g \wedge d(df) = dg \wedge df.$$

Por lo que, si

$$g = g_0 + g_{1,0} + g_{0,1}y + \cdots, \quad g_0 \neq 0,$$

²¹ Este resultado puede ser consultado en [5].

y

$$f = \frac{1}{4g_0}(x^4 + y^4) + \dots,$$

realizando el cómputo de $d\omega = dg \wedge df$ por separado, tenemos

$$d\omega = x^2y dx \wedge dy,$$

$$dg \wedge df = (g_{1,0}dx + g_{0,1}dy + \dots) \wedge (x^3dx + y^3dy + \dots).$$

Por lo tanto, puesto que el orden del coeficiente de $d\omega$ es tres, necesariamente

$$x^2y dx \wedge dy = (g_{1,0}dx + g_{0,1}dy) \wedge (x^3dx + y^3dy).$$

Pero esta última igualdad no es posible, ya que x^2y no puede ser escrito como una combinación de x^3 y y^3 . En consecuencia, ω no es integrable.

2.6. Caracterización de las foliaciones integrables.

Nuestra meta ahora es caracterizar a las foliaciones integrables en $(\mathbb{C}^2, 0)$. En primer lugar determinaremos la integrabilidad de una foliación vía su grupo de holonomía evanescente junto con una condición adicional, lo que da una versión parcial de la afirmación recíproca de la Proposición 2.5.21.

Ulteriormente, demostraremos el Teorema de Mattei-Moussu (Teorema 2.6.4), que es una generalización del Teorema de Poincaré-Lyapunov y de la primera caracterización de foliaciones integrables mencionada antes. Éste relaciona la propiedad analítica de ser integrable con condiciones topológicas que resultan ser necesarias y suficientes para la integrabilidad de una foliación.

2.6.1. Primera caracterización.

Examinando con detalle la demostración del Teorema de Poincaré-Lyapunov (Teorema 2.5.30), ésta nos da la pauta para pensar en una caracterización de las foliaciones integrables en $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Teorema 2.6.1. *Supongamos que todas las singularidades que aparecen al realizar una explosión de una foliación singular \mathcal{F} son elementales. Entonces \mathcal{F} es integrable si y sólo si las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

- a) *El grupo de holonomía evanescente de \mathcal{F} es integrable, y*
- b) *Todas las singularidades de $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$ son sillas complejas con razones características racionales negativas, $\lambda_j < 0$.*

Demostración. Supongamos primero que \mathcal{F} es integrable. La afirmación a) es inmediata por la Proposición 2.5.21. Además, si una transformación de holonomía asociada con una separatriz de alguna singularidad elemental es periódica, entonces su coeficiente lineal debe ser una raíz de la unidad, por lo que la

correspondiente razón característica λ_j es un número racional, $\lambda_j \in \mathbb{Q}$. Por la Observación 2.5.26, los casos $\lambda_j > 0$ y $\lambda_j = 0$ no son posibles, ya que éstos son incompatibles con la integrabilidad de la foliación \mathcal{F} . Por lo tanto, todas las singularidades son sillas.

Inversamente, si cada singularidad de \mathcal{F}' es una silla compleja y el grupo de holonomía evanescente, digamos H , es integrable, en virtud del Corolario 2.5.29, podemos extender localmente una primera integral de H a una integral local en una vecindad de cada singularidad en el divisor excepcional \mathbb{E} . Seleccionando de manera adecuada a la integral de H , digamos $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$, estas extensiones locales se pueden “pegar bien” unas con otras; para hacer esto, basta elegir u de tal forma que coincida en cada vecindad de cada singularidad con la respectiva integral local u_j , $u_j(\xi) = \xi^{q_j} + \dots$, donde $q_j \in \mathbb{N}$ es el orden de la respectiva transformación de holonomía. De esta manera, se produce una integral “global” de la foliación \mathcal{F}' en una vecindad de \mathbb{E} . Consecuentemente, por la Proposición 2.5.10, concluimos que \mathcal{F} es integrable. \square

2.6.2. Foliaciones simples.

Definición 2.6.2. Decimos que una foliación singular \mathcal{F} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es *simple* si satisface:

- (1) Todas las hojas de \mathcal{F} son relativamente cerradas en $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$, y
- (2) A lo más una cantidad finita de hojas de \mathcal{F} contienen al punto singular $0 \in \mathbb{C}^2$ en su cerradura.

Observación 2.6.3. Cualquier foliación integrable en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es simple. Esto es exactamente lo que afirma el Teorema 2.5.12, demostrado previamente.

La pregunta a pensar es: ¿La propiedad topológica de ser simple es suficiente para garantizar la integrabilidad de una foliación holomorfa? Enseguida mostraremos que la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Es decir, la clase de las foliaciones holomorfas integrables en $(\mathbb{C}^2, 0)$ coincide con la clase de las foliaciones simples. Esto es lo que afirma el Teorema siguiente, demostrado por vez primera por los matemáticos J. F. Mattei y Robert Moussu en el año 1980, en [12].

Teorema 2.6.4 (De Mattei-Moussu). *Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ simple, entonces \mathcal{F} es integrable.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número de explosiones necesarias para desingularizar la foliación. Recordemos que esto es posible gracias al Teorema de Seidenberg (Teorema 2.4.8).

Como base de inducción supongamos que $0 \in \mathbb{C}^2$ es una singularidad elemental de \mathcal{F} y analicemos cada caso.

a) La singularidad es de tipo silla.

Subcaso 1. Supongamos que la transformación de holonomía f , asociada con una separatriz compleja, es periódica; por la Proposición 1.4.11, f es integrable

en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Así, por el Corolario 2.5.29, dada una primera integral de f , ésta se extiende como una integral de la foliación.

Subcaso 2. Si f no es periódica, entonces, por el Lema 1.5.9, existe una cantidad infinita de hojas de la foliación que se acumulan en el origen. Por lo cual, la foliación no es simple. Concluimos que esta instancia no es posible.

b) Si la singularidad elemental de la foliación no es una silla, por la Observación 2.5.26, la foliación no es simple. De modo que este caso no se considera. Esto concluye la base de inducción.

Continuemos con el paso inductivo. Sean \mathcal{F} una foliación simple y $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$ su explosión. Claramente \mathcal{F}' debe ser no dicrítica, de lo contrario \mathcal{F} no sería simple; consecuentemente, \mathcal{F}' tiene una cantidad finita de singularidades aisladas en su divisor excepcional \mathbb{E} , digamos $\{a_1, \dots, a_m\} = \Sigma \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{M}$. Por hipótesis de inducción, la foliación \mathcal{F}' es localmente integrable en cada una de las singularidades $a_i \in \Sigma$, es decir, \mathcal{F} admite una primera integral “local” $u_i \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, a_i)$. Además, el grupo de holonomía evanescente, H , también es integrable (en $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$), es decir, H admite una integral “semiglobal” $u_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, \mathbb{E} \setminus \Sigma)$. Notemos que la demostración sería completada si lográsemos reemplazar estas integrales locales (junto con u_0) por funciones analíticas de la forma $\varphi_i \circ u_i$, $i = 0, \dots, m$, de tal manera que se “pegaran bien” y así poder definir una integral global $u \in \mathcal{O}(\mathbb{M}, \mathbb{E})$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, usando continuación a lo largo de las hojas sobre las trayectorias γ_i que unen al punto singular a_i con un punto base $a \in \mathbb{E} \setminus \Sigma$ fijo, que todas las integrales locales están definidas sobre la misma transversal $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{M}, a)$.

De acuerdo a la Proposición 1.4.4, para cada germen u_i , $i = 0, 1, \dots, m$, podemos considerar al germen $f_i \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ que genera al grupo simétrico S_{u_i} . Por su elección, f_i envía a cualquier conjunto de nivel de u_i en sí mismo, es decir, si $x \in \{u_i = c\}$, con $c \in \mathbb{C}$ constante, entonces $f(x) \in \{u_i = c\}$, pues $u_i \circ f_i(c) = u_i(x) = c$, ya que $S_{u_i} = \langle f_i \rangle$. En consecuencia, su órbita pertenece a la misma hoja. Luego, si $G = \langle f_0, f_1, \dots, f_m \rangle \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ es el subgrupo generado por f_0, f_1, \dots, f_m , entonces G tiene la misma propiedad, es decir, sus órbitas pertenecen a las mismas hojas de la foliación \mathcal{F}' .

Afirmamos que G es integrable. En efecto, si suponemos, por contradicción, que no lo es, entonces, en virtud del Teorema 1.5.10 y de lo dicho previamente, existiría una cantidad infinita de hojas de \mathcal{F}' que cruzarían a τ en una infinidad de puntos. Esto contradiría la simplicidad de \mathcal{F}' . Por lo tanto, G es integrable. Consecuentemente, según el Corolario 1.4.13, G es cíclico finito. Así, G está generado por un germen $f_* \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, y podemos elegir $u_* \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, 0)$ una primera integral del grupo G . Además de esto, tenemos que cada germen f_i , $i = 0, \dots, m$, se puede ver como una iteración del generador f_* de G , es decir, para cada $i = 0, 1, \dots, m$, se cumple que $f_i = f_*^{n_i}$, para algún $n_i \in \mathbb{N}$.

Afirmamos ahora que existen funciones holomorfas φ_i de orden n_i tales que $u_* = \varphi_i \circ u_i$. Efectivamente, dado que G es cíclico finito y f_* es el generador de G , tenemos que f_* es linealizable (por el Teorema de Bochner). Por lo tanto, podemos suponer que f_* está en la carta donde es lineal y u_* es un monomio del mismo grado que el orden de f_* . Luego, cada $f_i = f_*^{n_i}$ también es lineal. Así, cada $u_i(z) = z^{n_i}$. De lo cual se sigue la demostración de nuestra afirmación.

De esta manera, la construcción de la saturación (ver Definición 2.5.22), nos permite extender u_* como una función holomorfa en \mathbb{M} cerca del divisor excepcional \mathbb{E} considerado menos las singularidades.

Como las funciones $\varphi_i \circ u_i$ están bien definidas y son holomorfas en vecindades de cada punto singular $a_i \in \Sigma$, estas identidades junto con el Teorema de extensión de Riemann, nos permiten extender la integral u_* a las vecindades de cada punto singular. Por lo tanto, \mathcal{F}' es integrable en una vecindad de \mathbb{E} , y a su vez, por la Proposición 2.5.10, \mathcal{F} lo es. \square

El siguiente resultado es una generalización del Corolario 2.5.32, así como del Teorema 1.4.6.

Teorema 2.6.5. *Si $\mathcal{F} = \{\omega = 0\}$ es una foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente integrable, entonces \mathcal{F} es integrable.*

Demostración. En virtud del Teorema de Mattei-Moussu, es suficiente demostrar que cualquier foliación holomorfa en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente integrable es simple. Análogamente a como razonamos para demostrar el Teorema de Mattei-Moussu, procederemos por inducción sobre la cantidad de explosiones requeridas para completar la desingularización de la singularidad de \mathcal{F} .

Sabemos que una singularidad elemental es simple si y sólo si su razón característica es negativa y las transformaciones de holonomía asociadas a las separatrices complejas son periódicas. Pero, si \mathcal{F} es una foliación formalmente integrable cuya singularidad es elemental, por la Proposición 2.5.8, sabemos que el grupo de holonomía es integrable. Luego, la razón característica debe ser un número racional negativo. Por lo tanto, \mathcal{F} es simple.

Implementemos el paso inductivo. Consideremos una foliación arbitraria formalmente integrable después de su explosión, en la cual todas las singularidades que aparecen son elementales. Como \mathcal{F} es formalmente integrable, necesariamente \mathcal{F} es no dicrítica; las singularidades que aparecen en la explosión son aisladas (tiene sentido pensar en el grupo de holonomía evanescente). Además, por hipótesis de inducción, para cada una de las singularidades en la explosión, a lo más una cantidad finita de hojas se acumulan en ellas (en cada una de las singularidades, la foliación es localmente simple).

Si suponemos, por contradicción, que $\mathcal{F}' = \pi^*\mathcal{F}$ no fuese simple, eventualmente, o bien cada hoja de la foliación se acumularía en el divisor excepcional \mathbb{E} , o bien, no sería relativamente cerrada, por lo que, cada hoja debería de intersectar una infinidad de veces a cualquier transversal a \mathbb{E} en un punto no singular $a \notin \Sigma$. Esto implicaría que el grupo de holonomía evanescente contendría una infinidad de órbitas no periódicas. En otras palabras, dicho grupo no sería integrable. Lo cual, según la Proposición 2.5.21, no es posible en nuestro caso ya que \mathcal{F} es formalmente integrable por hipótesis. Por lo tanto, \mathcal{F}' es simple.

Consecuentemente, visto que la integrabilidad formal de una foliación implica su simplicidad topológica, por el Teorema de Mattei-Moussu, concluimos su integrabilidad analítica, como queríamos demostrar. \square

Corolario 2.6.6. *Si \mathcal{F} y \mathcal{F}' son dos foliaciones holomorfas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ formalmente equivalentes y \mathcal{F} es integrable, entonces \mathcal{F}' es integrable.*

Apéndice A

Primeros auxilios

En esta última parte enunciaremos y demostraremos algunos teoremas que hemos usado a lo largo de nuestro trabajo. Éstos, por comodidad, los veremos de acuerdo a su aparición en el texto.

A.1. Productos infinitos.

Definición A.1.1. Sea $\{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ un subconjunto numerable de \mathbb{C} , un *producto infinito de números complejos*

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n \cdot \cdots, \quad (\text{A.1})$$

es pensado como el límite de los productos parciales

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n.$$

Decimos que converge al valor $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ si este límite existe y es distinto de cero.

Observación A.1.2. Si fuese el caso de que $p_i = 0$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $P_n = 0$ si $n > i$, por lo que la convergencia del producto no dependería de P_n .

Por otro lado, no permitir que algún factor de un producto infinito tome el valor cero puede ser demasiado radical. Muchas ocasiones, como lo hicimos en la demostración del Teorema de linealización de Schröder-Koenigs, uno desea expresar una función como un producto infinito, y esto debe ser posible incluso si dicha función tiene ceros. Por esta razón hacemos el siguiente acuerdo: El producto infinito (A.1) converge si y sólo si a lo más un número finito de factores son cero, y si los productos parciales, formados por los factores distintos de cero, tienden a un límite finito distinto de cero.

Observación A.1.3. En cualquier producto convergente, el factor p_n tiende al valor $1 \in \mathbb{C}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$.

Efectivamente. Este hecho es claro ya que podemos ver a p_n como el cociente de los productos parciales P_n y P_{n-1} , es decir,

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}},$$

omitiendo aquellos factores iguales a cero. De esta manera,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1, \quad P \neq 0.$$

Por lo tanto, escribiremos a todos los productos infinitos como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n). \quad (\text{A.2})$$

Así, una condición necesaria para la convergencia del producto (A.2) es que $a_n \rightarrow 0$, si $n \rightarrow \infty$.

Si en un producto de la forma (A.2) ningún factor es cero, entonces podemos considerar lo siguiente: Si $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, entonces

$$\log P_n = \log \left(\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \right) = \sum_{k=1}^n \log(1 + a_k).$$

Por lo tanto, podemos comparar (A.2) con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n). \quad (\text{A.3})$$

Ya que $a_n \in \mathbb{C}$, en principio deberíamos ser más específicos al considerar la serie (A.3). Para esto, basta con que consideremos la rama principal de \log en cada término.

Lema A.1.4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ converge, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ también converge.

Demostración. Sean

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \quad \text{y} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \log(1 + a_k).$$

Entonces,

$$P_n = e^{S_n}.$$

Por lo tanto, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ converge, $S_n \rightarrow S < \infty$. Así, $P_n \rightarrow P = e^S$ y $P \neq 0$. \square

Para finalizar esta sección demostremos el siguiente teorema, el cual nos permite asegurar la convergencia de un producto infinito si sabemos que una serie, aún más sencilla que la del lema anterior, converge.

Teorema A.1.5. *El producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ converge si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, y $1 + a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Veamos que la serie (A.3) converge absolutamente al mismo tiempo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Esto es inmediato del hecho de que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1, \quad (\text{A.4})$$

pues si alguna de las series, $\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)|$ o bien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, converge, tenemos que $a_n \rightarrow 0$ y por tanto, por (A.4), dado $\varepsilon > 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$(1 - \varepsilon)|a_n| < |\log(1 + a_n)| < (1 + \varepsilon)|a_n|, \quad \forall n \geq N \gg 1.$$

Por lo tanto, concluimos que ambas series son simultáneamente absolutamente convergentes. Concluimos, por el Lema A.1.4, que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ converge. \square

Observación A.1.6. Visto lo anterior, resulta claro lo que se entiende por convergencia uniforme de un producto infinito cuyos factores son funciones analíticas. En este caso, la presencia de ceros de los factores podría causar algunas complicaciones, sin embargo, éstas pueden ser evitadas si consideramos solamente conjuntos en los cuales a lo más una cantidad finita de factores se anulen. Si estos factores son omitidos, es suficiente estudiar la convergencia del producto restante. Finalmente, tanto el Lema A.1.4 como el Teorema A.1.5 tienen sus contrapartes para convergencia uniforme. Si examinamos las demostraciones, podemos darnos cuenta que los cálculos hechos pueden pensarse en el caso de convergencia uniforme, y las conclusiones se referirán a convergencia uniforme, al menos sobre conjuntos compactos.

Observación A.1.7. Si recordamos, en la demostración del Teorema de linealización de Schröder-Koenigs (Teorema 1.1.12), una vez que demostramos que un producto de funciones analíticas tenía un límite finito, concluimos que dicho límite servía para nuestro propósito. Sin embargo, lo que nos permite asegurar esto, formalmente, es la observación previa junto con el siguiente teorema debido a Karl Weierstrass (1815-1897).

Teorema A.1.8 (De Weierstrass). ¹ *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, tal que cada función f_n es analítica en la región $\Omega_n \subset \mathbb{C}$. Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f sobre cada subconjunto compacto de una región Ω , entonces f es una función analítica en Ω .*

¹La demostración de este teorema puede ser consultada en [1].

A.2. Familias normales.

Enseguida introduciremos la noción de familias normales de funciones analíticas con el fin de demostrar el Teorema de Montel (Teorema 1.1.13), el cual fue usado en la demostración del Teorema del dominio invariante (Teorema 1.1.14).

Definición A.2.1. Decimos que \mathfrak{F} es una *familia de funciones* si \mathfrak{F} es un conjunto cuyos elementos son funciones y todas ellas están definidas en el mismo dominio.

Definición A.2.2. Decimos que una familia \mathfrak{F} de funciones definidas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ es *localmente uniformemente acotada* si para cualquier dominio K contenido propiamente en U existe una constante $M = M(K)$ tal que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in K, \forall f \in \mathfrak{F}.$$

Definición A.2.3. Decimos que una familia \mathfrak{F} de funciones definidas en un dominio U es *localmente equicontinua* si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier dominio K contenido propiamente en U , existe $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ tal que, para todo par de puntos $z, z' \in K$ tales que $|z - z'| < \delta$ y para cada función $f \in \mathfrak{F}$, se satisface

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Definición A.2.4. Decimos que una familia \mathfrak{F} de funciones definidas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ es *normal* si toda sucesión $(f_n) \subset \mathfrak{F}$ contenida en \mathfrak{F} contiene una subsucesión (f_{n_k}) que converge uniformemente, o tiende uniformemente al valor ∞ en todo subconjunto compacto de U .

Aún cuando en la definición anterior no hemos supuesto que los elementos de \mathfrak{F} sean funciones analíticas, éste es el único caso de interés para nosotros. Si trabajamos con esta idea, entonces, en virtud del Teorema A.1.8, el límite de una sucesión $(f_{n_k}) \subset \mathfrak{F}$ resulta ser analítica (siempre que no se reduzca al valor constante ∞).

Para demostrar el primer teorema de esta sección haremos uso de un resultado bien conocido en el Análisis Complejo, conocido como Lema de Schwarz (Hermann Schwarz (1843-1921)), el cual enunciamos enseguida.

Teorema A.2.5 (Lema de Schwarz). ² Si f es una función analítica en el disco unitario y satisface las condiciones

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{y} \quad f(0) = 0,$$

entonces

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Además, si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, o bien $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = cz$, con $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$, es decir, en este caso f es una rotación.

²Una demostración de este teorema puede ser consultada en [1].

Teorema A.2.6. *Cualquier familia de funciones holomorfas \mathfrak{F} en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ localmente uniformemente acotada, es localmente equicontinua.*

Demostración. Sea $K \subset U$ un subconjunto propio de U y denotemos por ρ a la distancia entre la cerradura de K , \overline{K} , y la frontera de U , ∂U . Claramente $\rho > 0$ ya que K es compacto y ∂D es cerrado (aquí suponemos que U está propiamente contenido en \mathbb{C} , si $U = \mathbb{C}$ el resultado es inmediato). Considerando al subconjunto $K^{(\rho)}$ de U dado por

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z_0 \in K} \{z \in U : |z - z_0| < \rho\},$$

se sigue, por su construcción, que está propiamente contenido en U , de esta manera, puesto que por hipótesis \mathfrak{F} es localmente uniformemente acotada en U , tenemos que existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in K^{(\rho)}$ y para toda $f \in \mathfrak{F}$.

Sean $z, z' \in K$ tales que $|z - z'| < \rho$. Por la elección de $K^{(\rho)}$ observamos que $U(z', \rho) = \{z \in U : |z - z'| < \rho\}$ está contenido en $K^{(\rho)}$. Por consiguiente

$$|f(z) - f(z')| \leq 2M, \quad \forall z \in U(z', \rho). \quad (\text{A.5})$$

Por otro lado, al considerar la función $\zeta : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\zeta(z) = \frac{1}{\rho}(z - z'), \quad \forall z \in U(z', \rho),$$

no es difícil notar que $\zeta(U(z', \rho)) \subset D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Es decir, ζ mapea a $U(z', \rho)$ en el disco unitario.

Ahora, la función $g : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{2M}(f(z' + \rho z) - f(z')) \quad \forall z \in U(0, 1),$$

cumple con que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0, 1)$ y $g(0) = 0$. En efecto, en primer lugar, si $z \in D(0, 1)$, entonces $z' + \rho z \in U(z', \rho)$, por la definición de ζ ; por lo tanto, por (A.5),

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{2M}(f(z' + \rho z) - f(z')) \right| = \frac{1}{2M} |f(z' + \rho z) - f(z')| \leq \frac{1}{2M} \cdot 2M = 1.$$

Luego, $|g(z)| \leq 1$, para todo $z \in U(0, 1)$. Claramente $g(0) = 0$. Así, por el Lema de Schwarz, $|g(z)| \leq |z|$, para cada $z \in U(0, 1)$. En consecuencia,

$$|f(z) - f(z')| \leq \frac{2M}{\rho} |z - z'|, \quad \forall z \in U(z', \rho). \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, basta elegir $\delta = \min\{\rho, \frac{\rho\varepsilon}{2M}\}$ para concluir, usando (A.5) y (A.6), que

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon, \quad \forall z, z' \in K, |z - z'| < \delta, \text{ y } \forall f \in \mathfrak{F}.$$

□

Lema A.2.7. Sean \mathfrak{F} una familia de funciones analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ localmente uniformemente acotada y E un subconjunto denso de U . Si (f_n) es una sucesión contenida en \mathfrak{F} que converge puntualmente en E , entonces (f_n) converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto K de U .

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ arbitrario y $K \subset U$ un subconjunto compacto de U . Dado que \mathfrak{F} es uniformemente localmente acotada, por el Teorema A.2.6, sabemos que \mathfrak{F} es localmente equicontinua, por lo cual, considerando una partición de U en pequeños cuadrados cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, digamos $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, tenemos que para cada par de puntos $z, z' \in K$ que pertenecen al mismo cuadrado y para cada $f \in \mathfrak{F}$ se satisface

$$|f(z) - f(z')| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (\text{A.7})$$

Ahora, como K es compacto, existe una subcubierta, $\{Q_j\}_{j=1}^p$, finita de $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^p Q_j$. Además, puesto que E es denso en U , entonces $E \cap Q_j \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, p$. Por lo tanto, existe $z_j \in E \cap Q_j$, $j = 1, \dots, p$. Pero por hipótesis (f_n) converge puntualmente en E y por lo tanto existe $N_j = N(p_j) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_m(z_j) - f_n(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m, n \geq N, j = 1, \dots, p. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, sea $z \in K$ un punto arbitrario. Como $K \subset \bigcup_{j=1}^p Q_j$, entonces $z \in Q_r$ para alguna $r \in \{1, \dots, p\}$. Así, si definimos $N = \max_{j \in \{1, \dots, p\}} \{N_j\}$ y elegimos $z_r \in E \cap Q_r$ entonces, por la desigualdad del triángulo y por las desigualdades (A.7) y (A.8), concluimos que, para todo $m, n \geq N$ se satisface

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(z_r)| + |f_m(z_r) - f_n(z_r)| + |f_n(z_r) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

□

Lema A.2.8. Si \mathfrak{F} es una familia de funciones analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ localmente uniformemente acotada, entonces cualquier sucesión $(f_n) \subset \mathfrak{F}$ contenida en \mathfrak{F} contiene una subsucesión (f_{n_r}) que converge puntualmente en algún subconjunto denso de U .

Demostración. Sea $E \subset U$ el conjunto que consta de aquellos puntos con parte real e imaginaria racionales, es decir,

$$E = \{z = x + iy \in U : x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Por su construcción, E resulta ser denso en U . Además, de la numerabilidad de \mathbb{Q} , se sigue la numerabilidad de E , así, $E = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Ahora, puesto que por hipótesis \mathfrak{F} es localmente uniformemente acotada, la sucesión $(f_n(z_1))$ resulta estar acotada. Así, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $f_{k_1} = (f_{n_{k_1}}(z_1))$ una subsucesión de $(f_n(z_1))$ convergente. Luego, por un argumento análogo, al evaluar la sucesión f_{k_1} en z_2 obtenemos una sucesión $(f_{k_1}(z_2))$ acotada y por tanto, podemos extraer una subsucesión

$f_{k2} = f_{n_{k1}}$ convergente en al menos los puntos z_1 y z_2 . Procediendo de manera recursiva, podemos considerar la sucesión diagonal $f_{11}, f_{22}, f_{33}, \dots, f_{nn}, \dots$, la cual, por su construcción, resulta ser convergente puntualmente en E , como queríamos demostrar. \square

Teorema A.2.9 (De Montel). *Una familia \mathfrak{F} de funciones analíticas en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ es normal si las funciones $f \in \mathfrak{F}$ están uniformemente acotadas en cualquier subconjunto compacto de U .*

Demostración. Sea $(f_n) \subset \mathfrak{F}$ una sucesión contenida en \mathfrak{F} . Por el Lema A.2.8, sabemos que (f_n) contiene una subsucesión que converge puntualmente en algún subconjunto denso de U . Luego, por el Lema A.2.7, dicha subsucesión converge uniformemente en cada subconjunto compacto de U , es decir, \mathfrak{F} es normal, como queríamos demostrar. \square

A.3. Un resultado de Teoría de Grupos.

En esta sección demostraremos el teorema de Teoría de Grupos que fue usado en la demostración del Teorema 1.2.15. A saber, el siguiente resultado.

Teorema A.3.1. *Sean F es un campo y G un subgrupo finito del grupo multiplicativo de los elementos distintos de cero de F , digamos F^* , entonces G es cíclico.*

Para dar una demostración completa de este teorema necesitamos algunos resultados previos. Las definiciones básicas pueden ser leídas en [14] y [15].

Lema A.3.2. *Si $G = \langle a \rangle$ es un grupo cíclico de orden n y generador a , entonces G tiene un único subgrupo de orden d para cada d divisor de n , y dicho subgrupo es cíclico.*

Demostración. Si $n = cd$, entonces a^c tiene orden d ya que $(a^c)^d = a^{cd} = a^n = e$, donde e es el elemento neutro de G , por lo cual $\langle a^c \rangle$ es un subgrupo de G de orden d . Afirmamos que d es el número más pequeño que satisface $(a^c)^d = e$. En efecto, si $(a^c)^r = e$ entonces $n|cr$, es decir, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $cr = ns$ pero $ns = dcs$, por lo tanto $cr = dcs$, así $r = ds \geq d$.

Demostremos la unicidad. Sea $\langle x \rangle$ un subgrupo de G de orden d , sabemos que $x = a^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y $x^d = e$, por lo tanto, $a^{md} = e$. Luego, $md = nk$ para algún $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $x = a^m = (a^{\frac{n}{d}})^k = (a^c)^k$, entonces $\langle x \rangle \subset \langle a^c \rangle$. Pero ambos subgrupos tienen el mismo orden; por lo tanto $\langle x \rangle = \langle a^c \rangle$. \square

Observación A.3.3. Recordemos que si G es un grupo cíclico con generador h y orden n , entonces h^k también es generador de G si y sólo si k y n son primos relativos. De aquí se sigue que, si $g(G)$ denota al conjunto de elementos generadores de G , entonces $|g(G)| = \varphi(n)$, donde φ es la función Phi de Euler (Leonhard Euler (1707-1783)), a saber,

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, \text{mcd}(m, n) = 1\}|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, φ cuenta la cantidad de números naturales menores o iguales a n que son primos relativos con él.

Teorema A.3.4. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \quad 1 \leq d \leq n.$$

Demostración. Sea G un grupo cíclico de orden n . Entonces, como cada elemento de G genera un subgrupo cíclico, tenemos que G es la unión ajena de los conjuntos $g(C)$, con C subgrupo cíclico de G , es decir,

$$G = \bigcup g(C).$$

De esta manera, por la Observación A.3.3 y por el Lema A.3.2, podemos decir que

$$n = \sum |g(C)| = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

□

Teorema A.3.5. *Un grupo G de orden n es cíclico si y sólo si para cada divisor d de n , existe a lo más un subgrupo cíclico de G de orden d .*

Demostración. Si G es cíclico, el resultado es inmediato del Lema A.3.2.

Inversamente, tal como en la demostración del Teorema anterior, escribimos a G como la unión ajena $G = \bigcup g(C)$, donde C es un subgrupo cíclico de G . Por lo tanto

$$n = |G| = \sum |g(C)|.$$

Además, ya que G tiene a lo más un subgrupo cíclico de orden d , $d|n$, entonces, por el Teorema A.3.4, sabemos que

$$n = \sum |g(C)| \leq \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Por lo tanto G tiene exactamente un subgrupo cíclico de orden d para cada d divisor de n ; en particular, para $d = n$. Por lo tanto G es cíclico. □

Demostración del Teorema A.3.1. Supongamos que G es un subgrupo de F^* de orden n , y sea $d \in [1, n]$ tal que $d|n$. Si C es un subgrupo cíclico de G de orden d , entonces $x^d = 1$ para cada $x \in C$. Si existiera otro subgrupo C' cíclico de G de orden d distinto de C , entonces G contendría al menos $d + 1$ elementos que serían raíces del polinomio $x^d - 1$. Pero, es conocido que, $x^d - 1$ tiene a lo más d raíces sobre un campo. De esta manera, G contiene a lo más un subgrupo de orden d . Por lo tanto, por el Teorema A.3.5, concluimos que G es cíclico.

□

A.4. Teorema de Extensión de Riemann.

Comencemos por recordar algunos resultados del Análisis Complejo, a saber, el Teorema de Riemann (Bernhard Riemann (1826-1866)) sobre singularidades removibles en \mathbb{C} y el teorema que nos dice cuándo dos funciones holomorfas definidas sobre el mismo dominio resultan ser idénticas (Teorema de Unicidad). Después veremos el Teorema de extensión de Riemann (en \mathbb{C}^n).

Teorema A.4.1 (De Riemann sobre singularidades removibles). *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un dominio en \mathbb{C} , $a \in U$ y f una función holomorfa en $U \setminus \{a\}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) f se extiende de manera holomorfa en U .
- b) f se extiende de manera continua en U .
- c) f está acotada en alguna vecindad de a .
- d) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$.

Demostración. Las implicaciones a) \Rightarrow b), b) \Rightarrow c) y c) \Rightarrow d) son inmediatas.

Veamos que d) \Rightarrow a). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$, y consideremos a la función $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} zf(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

Observemos que g definida así resulta ser continua, ya que estamos suponiendo como cierto d). Ahora, consideremos otra función, digamos $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$h(z) = zg(z), \quad \forall z \in U.$$

Puesto que g es holomorfa en $U \setminus \{0\}$, ya que f lo es, se sigue que h también lo es. Además, $h(z) = h(0) + zg(z) = h(0) + O(z)$, por lo cual h es diferenciable en 0 y $h'(0) = 0$. Luego, h es holomorfa en U . De esta manera, podemos escribir a h como una serie de potencias en algún radio de convergencia $r > 0$ alrededor del origen,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Además, dado que $h(0) = h'(0) = 0$, tenemos que, de hecho $c_0 = c_1 = 0$, consecuentemente

$$h(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} z^n.$$

Pero, por la definición de h , sabemos que

$$h(z) = z^2 f(z), \quad \forall z \in U \setminus \{0\}.$$

Por lo tanto, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} z^n$ representa una extensión analítica de f en U , como queríamos demostrar. \square

Observación A.4.2. La misma demostración es aplicable a un caso más general. Si en lugar de considerar un punto, digamos $a \in U$, en la cual la función f no es holomorfa, consideramos $A \subset U$, un subconjunto discreto, entonces el resultado análogo al Teorema A.4.1 es cierto y su demostración puede ser hecha siguiendo las mismas líneas que en la demostración del Teorema A.4.1.

Teorema A.4.3 (De Unicidad). *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un dominio en \mathbb{C} , f, g funciones holomorfas en U y $A = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$. Entonces, $f \equiv g$ en U si y sólo si $A' \cap U \neq \emptyset$, donde A' denota al conjunto de puntos de acumulación de A (el conjunto derivado de A).*

Demostración. Claramente sólo una dirección de la equivalencia es no trivial. Sea $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa definida como $h = f - g$. Debemos demostrar que $h \equiv 0$ en U , es decir, que el conjunto $B = \{z \in U : h(z) = 0\}$ coincide con U .

Por hipótesis $A' \cap U \neq \emptyset$; además, si $a \in A' \cap U$, entonces $a \in B$, ya que $A' \cap U \subset B$ por la continuidad de h . Así, $h \equiv 0$ en una vecindad de a . Por lo tanto, el conjunto interior de B , $\text{Int } B$, es no vacío y contiene a a . Además, $\text{Int } B$ siempre es un conjunto abierto (por su definición). Afirmamos que $\text{Int } B$ es cerrado en U . En efecto, si $b \in U$ es un punto de acumulación de $\text{Int } B$, entonces, nuevamente tenemos que $h \equiv 0$ en una vecindad de b , por lo cual $b \in \text{Int } B$. Por lo tanto $\text{Int } B$ es cerrado en U . Concluimos, usando el hecho de que U es un conjunto conexo (ya que U es un dominio en \mathbb{C}), que $B = U$. \square

Corolario A.4.4. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un dominio en \mathbb{C} y f una función holomorfa en U tal que $f \not\equiv 0$ en U . Entonces el conjunto $A = \{z \in U : f(z) = 0\}$ tiene cardinalidad a lo más numerable.*

Demostración. Consideremos una colección de subconjuntos compactos de \mathbb{C} , $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $K_j \subset K_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$ y $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.³ Entonces, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, para cada $j \in \mathbb{N}$, $A \cap K_j$ tiene cardinalidad finita, ya que si no fuese así, existiría un punto de acumulación de A en U y, por el Teorema de Unicidad, tendríamos que $f \equiv 0$, lo cual no es posible.

Por lo tanto, debido a que

$$A = A \cap U = A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap K_n),$$

concluimos que A tiene cardinalidad a lo más numerable. \square

Para demostrar el Teorema de extensión de Riemann en \mathbb{C}^n usaremos el Lema de Hartogs (Friedrich Hartogs (1874-1943)), enunciado a continuación (sin demostración).

³Siempre es posible dar una colección de este tipo. La manera más común de hacer esto es considerar la colección $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $K_n = \{z \in U : |z| \leq n, \text{dist}(z, \partial U) \geq \frac{1}{n}\} \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.4.5 (Lema de Hartogs).⁴ Si f es una función holomorfa en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ con respecto a cada una de las variables z_ν , entonces f es holomorfa en D .

Teorema A.4.6 (De extensión de Riemann). Sea f una función holomorfa en $D \setminus A$, donde D es un dominio en \mathbb{C}^n y A es un conjunto analítico de codimensión 1. Si f es localmente acotada en los puntos de A , entonces f se extiende de manera única a una función holomorfa en A .

Demostración. Observemos que f es localmente acotada en los puntos de A si para todo $z \in A$ existe una vecindad U_z tal que f es acotada en $D \setminus A \cap U_z$.

Sea $a \in A$, probaremos que $f = f(z, w)$ se extiende al punto a como una función analítica. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$. Puesto que A es un conjunto analítico, existe $g = (z, w)$ una función analítica tal que $A = f\{(z, w) : g(z, w) = 0\}$.

Observemos que $g(0, 0) = 0$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $g(0, w) \neq 0$ (pues A es de codimensión 1). Entonces existe un cilindro de radio suficientemente pequeño r , $C_r = \{|w| = r\}$, tal que en él $g(0, w) \neq 0$.

Sea

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z, \xi)}{\xi - w} d\xi.$$

Para z fija $f(z, w)$ es analítica en C_r , pues como $g(0, w)|_{C_r} \neq 0$ entonces $f(z, \xi)$ no está evaluada en A para $\xi \in C_r$. Así, $\Phi(z, w)$ es analítica en $D_r = \{|w| < r\}$.

Observemos ahora que, para $z \in U$, donde U es una vecindad suficientemente pequeña de $z = 0$, se tiene que $g(z, w) \neq 0$, $z \in U$, $w \in C_r$. Por el argumento anterior, $\Phi(z, w)$ es analítica en $z \in U$ y en $w \in D_r$. Por lo tanto, por el Lema de Hartogs, Φ es analítica en $U \times D_r$.

Ahora, para $z \in \overline{D_r}$ fija, hay un número finito de puntos donde $g(z, w)$ se anula. En estos puntos f es localmente acotada por hipótesis; por lo tanto, f (vista como función de w) se extiende a esos puntos y por lo tanto

$$f(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z, \xi)}{\xi - w} d\xi.$$

□

A.5. El lenguaje de Formas en \mathbb{C}^2 .

La presente sección está dedicada al estudio conciso de las formas holomorfas en \mathbb{C}^2 .⁵ Nuestra meta es demostrar las propiedades de éstas, usadas en el Capítulo 2 (tales como la derivación y el “pull-back”).

En primer lugar daremos a conocer las nociones de 2-variedad holomorfa y

⁴Una demostración de este resultado puede ser consultada en [16].

⁵Al igual que en el caso de foliaciones, hacemos la observación de que esta teoría puede ser desarrollada en \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$.

de haz tangente de una 2-variedad holomorfa. Una vez hecho lo anterior, diremos qué entendemos por una 1-forma en \mathbb{C}^2 y demostraremos sus principales propiedades. Finalmente, introduciremos el concepto de 1-forma holomorfa en una 2-variedad.⁶

A.5.1. 2-variedades holomorfas y haz tangente.

Definición A.5.1. Un espacio topológico M de Hausdorff, 2-numerable, es una *variedad de dimensión dos* (una *2-variedad*) si cada punto $x \in M$ tiene una vecindad V homeomorfa a un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^2$.

Sea M una 2-variedad. De la definición de 2-variedad, es claro que M se puede cubrir con una colección de abiertos $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, tal que existe un homeomorfismo $\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow U_\lambda$, donde $U_\lambda \subset \mathbb{C}^2$ es un subconjunto abierto en \mathbb{C}^2 . A cada pareja $(V_\lambda, \varphi_\lambda)$ se le llama *carta de la variedad* M . A una colección $\{(V_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, tal que $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta de M , se le llama *atlas de la variedad* M .

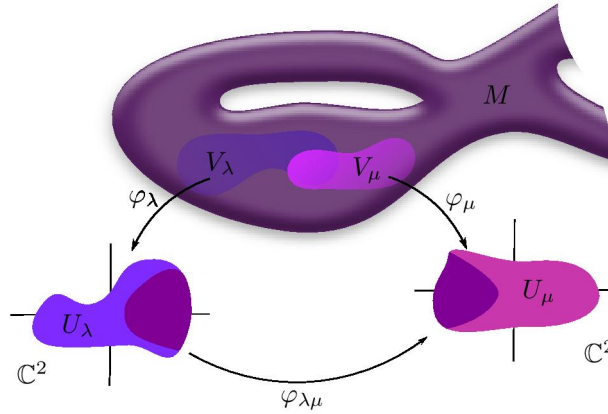


Figura A.1: Cambio de coordenadas.

Sea A un atlas de la variedad M y sean $(V_\lambda, \varphi_\lambda), (V_\mu, \varphi_\mu) \in A$, tales que $V_\lambda \cap V_\mu \neq \emptyset$; al homeomorfismo

$$\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(V_\lambda \cap V_\mu) \longrightarrow \varphi_\mu(V_\lambda \cap V_\mu),$$

se le conoce como *cambio de coordenadas*.

Definición A.5.2. Sea M una 2-variedad y A un atlas de M . Decimos que M es una *2-variedad holomorfa* si los cambios de coordenadas son biholomorfismos.

⁶Debido a que solamente nos interesa justificar formalmente las propiedades de las 1-formas holomorfas usadas en el Capítulo 2, se recomienda consultar [3] y [7] para revisar los detalles de esta parte.

Ejemplo A.5.3. \mathbb{C}^2 es una 2-variedad holomorfa. Un atlas para \mathbb{C}^2 puede ser aquél conformado por la colección de todos los subconjuntos abiertos de \mathbb{C}^2 junto con la función identidad de cada uno de ellos.

Más generalmente, cualquier subconjunto abierto de \mathbb{C}^2 es una 2-variedad holomorfa.

A cada 2-variedad holomorfa M le podemos asociar otra variedad llamada el haz tangente de M . Lo cual puede ser hecho de la siguiente manera.

Definición A.5.4. Sean M una 2-variedad holomorfa, $A = \{(V_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ un atlas de M y $x \in V_\lambda$ un punto en M , tal que $\varphi_\lambda(x) = y \in \mathbb{C}^2$. Entonces, dada una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \varphi_\lambda(V_\lambda)$, tal que $\alpha(0) = y$, definimos una curva $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow M$ en M como sigue:

$$\tilde{\alpha}(t) = (\varphi_\lambda^{-1} \circ \alpha)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definición A.5.5. Sean M una 2-variedad holomorfa y $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : \mathbb{R} \rightarrow M$ dos curvas en M . Decimos que $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son equivalentes si $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = x \in M$ y además, en alguna carta, se satisface

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t) - \beta(t)}{t} = 0.$$

Definición A.5.6. Un *vector tangente* a una 2-variedad M en el punto $x \in M$ es la clase de equivalencia de curvas $\tilde{\alpha}$ en M tales que $\tilde{\alpha}(0) = x$.

El conjunto de vectores tangentes a M en x forma un espacio vectorial llamado espacio tangente a M en x , y es denotado por $T_x M$.

Definición A.5.7. Sea M una 2-variedad holomorfa. Definimos el *haz tangente* de M como la unión ajena de los espacios tangentes en cada punto de M y lo denotamos por TM .

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

A.5.2. Formas en \mathbb{C}^2 .

Definición A.5.8. Consideremos $\mathbb{C}_\mathbb{C}^2$, al plano complejo (de dimensión compleja dos) dotado de la estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Una *forma de grado uno* (o bien, una *1-forma*) es una función lineal $\omega : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (ω es un elemento del espacio dual de $\mathbb{C}_\mathbb{C}^2$, $\omega \in \mathbb{C}^{2*}$):

$$\omega(\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta) = \lambda_1 \omega(\xi) + \lambda_2 \omega(\eta), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \xi, \eta \in \mathbb{C}^2.$$

Del álgebra lineal sabemos que el espacio de 1-formas, \mathbb{C}^{2*} , es un espacio vectorial de dimensión dos.

Dado un sistema de coordenadas x, y en \mathbb{C}^2 , podemos pensar a cada una de estas coordenadas como una 1-forma (como funciones coordenada), es decir, si $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, tenemos que

$$x(\xi) = \xi_1, \quad y(\xi) = \xi_2.$$

Además, éstas resultan ser linealmente independientes claramente; por tanto, podemos escribir a cualquier 1-forma como combinación lineal de x y de y :

$$\text{Si } \omega \in \mathbb{C}^{2*}, \text{ entonces } \omega = ax + by, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

De esta manera, el valor de ω en un vector $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$ está dado por

$$\omega(\xi) = (ax + by)(\xi) = ax(\xi) + by(\xi) = a\xi_1 + b\xi_2.$$

Una vez definidas las 1-formas, nos interesa saber qué propiedades cumplen, por ejemplo, sus propiedades algebraicas. Debido a que el conjunto de 1-formas resulta ser un espacio vectorial conocido, sabemos cómo se comportan respecto a la suma y al producto por escalares. Resta preguntarnos si es posible definir un producto entre 1-formas de tal manera que éste se comporte suficientemente bien, a saber, que sea lineal (bilineal). Antes de hacer esto, definamos lo que es una 2-forma.

Definición A.5.9. Una *forma exterior de grado dos (una 2-forma)* es una función $\omega^2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, que es bilineal y antisimétrica. Es decir, para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, y $\xi, \mu, \eta \in \mathbb{C}^2$, se satisface

$$\omega^2(\lambda_1\xi + \lambda_2\mu, \eta) = \lambda_1\omega^2(\xi, \eta) + \lambda_2\omega^2(\mu, \eta),$$

y

$$\omega^2(\xi, \eta) = -\omega^2(\eta, \xi).$$

Observación A.5.10. Para cualquier 2-forma en \mathbb{C}^2 , $\omega^2, \omega^2(\xi, \xi) = 0, \xi \in \mathbb{C}^2$. En efecto, sea ω^2 una 2-forma en \mathbb{C}^2 , por la antisimetría de ω^2 , tenemos que,

$$\omega^2(\xi, \xi) = -\omega^2(\xi, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^2.$$

Por lo tanto,

$$\omega^2(\xi, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^2.$$

Análogo al caso de 1-formas, resulta ser que el conjunto de las 2-formas es un espacio vectorial. Esto es inmediato si definimos la suma de 2-formas y el producto por escalares como usualmente se hace para dotar de la estructura de espacio vectorial al conjunto de funciones de un conjunto no vacío sobre el campo en cuestión. En nuestro caso:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 + \omega_2^2)(\xi) &:= \omega_1^2(\xi) + \omega_2^2(\xi) \\ (\lambda\omega^2)(\xi, \eta) &:= \lambda\omega^2(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Introduzcamos ahora el producto entre dos 1-formas, conocido como producto exterior de 1-formas.

Definición A.5.11. Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^{2*}$ dos 1-formas, definimos el *producto exterior* de ω_1 y ω_2 , $\omega_1 \wedge \omega_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, como

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi, \eta) = \det \begin{bmatrix} \omega_1(\xi) & \omega_2(\xi) \\ \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}^2.$$

Observación A.5.12. De las propiedades del determinante de matrices, obtenemos que el producto exterior definido entre 1-formas es bilineal y antisimétrico, por consiguiente, $\omega_1 \wedge \omega_2$ es una 2-forma en \mathbb{C}^2 .

Más aún, no es difícil convencerse de que el producto exterior definido es asociativo y distributivo, es decir, para cualesquiera $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}^{2*}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) &= (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3, \\ (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \wedge \omega_3 &= \lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_3 + \lambda_2 \omega_2 \wedge \omega_3.\end{aligned}$$

De hecho, en nuestro caso (\mathbb{C}^2), la propiedad de asociatividad es inmediata puesto que $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = 0 = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$.

Observación A.5.13. Si x, y es un sistema de coordenadas en \mathbb{C}^2 , entonces $x \wedge x = y \wedge y = 0$. Esto es una consecuencia de la antisimetría del producto exterior.

Otra forma de verlo es la siguiente. Sean $\xi = (\xi_1, \xi_2), \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2$, calculemos $(x \wedge x)(\xi, \eta)$:

$$(x \wedge x)(\xi, \eta) = \det \begin{bmatrix} x(\xi) & x(\xi) \\ x(\eta) & x(\eta) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 \\ \eta_1 & \eta_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Análogamente, $(y \wedge y)(\xi, \eta) = 0$.

Observación A.5.14. Para cualquier 1-forma $\omega \in \mathbb{C}^{2*}$ se satisface $\omega \wedge \omega = 0$. En efecto, sea $\omega \in \mathbb{C}^{2*}$; sabemos que podemos ver a ω como $\omega = ax + by$, con $a, b \in \mathbb{C}$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega &= (ax + by) \wedge (ax + by) \\ &= ax \wedge ax + ax \wedge by + by \wedge ax + by \wedge by \\ &= a^2 x \wedge x + abx \wedge y + bay \wedge x + b^2 y \wedge y.\end{aligned}$$

Pero, por la observación anterior, tenemos que $a^2 x \wedge x = b^2 y \wedge y = 0$, y por la antisimetría del producto exterior de 1-formas, $bay \wedge x = -bax \wedge y$. En consecuencia,

$$\omega \wedge \omega = abx \wedge y - bax \wedge y = (ab - ba)x \wedge y = 0.$$

Proposición A.5.15. El conjunto $\{x \wedge y\}$ es una base del espacio vectorial de 2-formas en \mathbb{C}^2 .

Demostración. Sean ω^2 una 2-forma, $\xi = (\xi_1, \xi_2), \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2$ y $\beta = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{C}^2$ la base canónica de \mathbb{C}^2 . Así, podemos escribir a ξ y η como $\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ y $\eta = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$ respectivamente. Calculemos $\omega^2(\xi, \eta)$ usando las expresiones anteriores, las propiedades de bilinealidad y antisimetría de ω^2

y el hecho visto en la Observación A.5.10:

$$\begin{aligned}
\omega^2(\xi, \eta) &= \omega^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2) \\
&= \omega^2(\xi_1 e_1, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2) + \omega^2(\xi_2 e_2, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2) \\
&= \xi_1 \omega^2(e_1, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2) + \xi_2 \omega^2(e_2, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2) \\
&= \xi_1 \eta_1 \omega^2(e_1, e_1) + \xi_1 \eta_2 \omega^2(e_1, e_2) + \xi_2 \eta_1 \omega^2(e_2, e_1) + \xi_2 \eta_2 \omega^2(e_2, e_2) \\
&= \xi_1 \eta_2 \omega^2(e_1, e_2) - \xi_2 \eta_1 \omega^2(e_1, e_2) \\
&= \omega^2(e_1, e_2)(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) = x \wedge y(\xi, \eta).$$

Por lo tanto, si llamamos $\alpha = \omega^2(e_1, e_2)$, tenemos finalmente que

$$\omega^2(\xi, \eta) = \alpha x \wedge y(\xi, \eta),$$

En consecuencia,

$$\omega^2 = \alpha x \wedge y.$$

□

Podemos considerar ahora operadores lineales en \mathbb{C}^2 y definir nuevas 1-formas (o 2-formas). La manera natural de hacer esto es como sigue.

Definición A.5.16. Sean $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ un operador lineal y ω^k una k -forma, $k = 1, 2$. Definimos la k -forma $f^* \omega^k$ en \mathbb{C}^2 como

$$(f^* \omega)(\xi) = \omega(f(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^2,$$

o bien,

$$(f^* \omega^2)(\xi, \eta) = \omega^2(f(\xi), f(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^2.$$

Proposición A.5.17. Sean f, g operadores lineales en \mathbb{C}^2 y $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^{2*}$ dos 1-formas. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- b) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^* \omega_1) \wedge (f^* \omega_2)$.

Demostración. a) Sea $\omega \in \mathbb{C}^{2*}$ una 1-forma. Veamos que $(f \circ g)^* \omega = f^* \circ g^* \omega$. Para esto, consideremos $\xi \in \mathbb{C}^2$ un vector arbitrario, evaluando $(f \circ g)^* \omega$ en ξ , tenemos que

$$(g \circ f)^* \omega(\xi) = \omega(g \circ f(\xi)) = \omega(g(f(\xi))) = g^* \omega(f(\xi)) = f^* \circ g^* \omega(\xi).$$

Es decir,

$$(g \circ f)^* \omega(\xi) = f^* \circ g^* \omega(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^2$$

Luego,

$$(g \circ f)^* \omega = f^* \circ g^* \omega \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^{2*}.$$

Por lo tanto, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

b) Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2$. Procedamos de manera similar a lo hecho en a).

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi, \eta) &= (\omega_1 \wedge \omega_2)(f(\xi), f(\eta)) \\ &= \det \begin{bmatrix} \omega_1(f(\xi)) & \omega_2(f(\xi)) \\ \omega_1(f(\eta)) & \omega_2(f(\eta)) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} f^*\omega_1(\xi) & f^*\omega_2(\xi) \\ f^*\omega_1(\eta) & f^*\omega_2(\eta) \end{bmatrix} \\ &= (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi, \eta) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^2.$$

De esta manera,

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2).$$

□

A.5.3. Formas holomorfas.

El lenguaje de formas holomorfas, como veremos enseguida, resulta ser útil al momento de hacer cálculos en el Análisis Complejo. Por ejemplo, como vimos en el Capítulo 2, en la sección de explosión de singularidades, Sección 2.4, al considerar la explosión de una foliación singular en $(\mathbb{C}^2, 0)$ generada por un campo vectorial holomorfo (o bien, una 1-forma holomorfa), los cálculos son más simples si usamos el lenguaje de 1-formas holomorfas, en lugar de, como comúnmente se hace, el lenguaje de campos vectoriales. Este hecho está teóricamente justificado; siempre que consideramos un campo vectorial holomorfo en $(\mathbb{C}^2, 0)$, paralelamente existe una 1-forma holomorfa (dual del campo) que nos aporta la misma información, salvo parametrizaciones, y viceversa.

Definición A.5.18. Decimos que f es una 0-forma holomorfa si f es una función holomorfa en M .

Definición A.5.19. Sea M una 2-variedad holomorfa. Una forma holomorfa de grado uno (o bien, una 1-forma holomorfa) sobre una 2-variedad M es una función holomorfa, $\omega : TM \rightarrow \mathbb{C}$, tal que es lineal en cada espacio tangente de M , $T_x M$.

Ejemplo A.5.20. Sea M una 2-variedad holomorfa. Consideremos una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa sobre M . La diferencial $df|_x$ de f en el punto x es la función lineal

$$df|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{C},$$

tal que, si $\xi \in T_x M$ es el vector velocidad de la curva $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow M$, $\tilde{\alpha}(0) = x$ y $\tilde{\alpha}'(0) = \xi$, entonces

$$df|_x(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\tilde{\alpha}(t)).$$

Así, la diferencial df de f es una función holomorfa con dominio TM y codominio \mathbb{C} :

$$df : TM \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Esta función es holomorfa y lineal en cada espacio tangente $T_xM \subset TM$. Por lo tanto, es una 1-forma holomorfa en M .

Observación A.5.21. Claramente la diferencial de una función f en un punto $x \in M$ es una 1-forma en el espacio tangente T_xM , denotada por df_x .

Observación A.5.22. Consideremos el caso en que $M = \mathbb{C}^2$ y supongamos que está dado el sistema de coordenadas x, y en \mathbb{C}^2 . En este caso, las componentes ξ_1, ξ_2 de un vector tangente $\xi \in T_x\mathbb{C}^2$ son los valores de las diferenciales dx, dy en el vector ξ . Estas 1-formas sobre $T_x\mathbb{C}^2$ son linealmente independientes; en consecuencia, forman una base para el espacio 2-dimensional de 1-formas en $T_x\mathbb{C}^2$ (esto es totalmente análogo a lo que hicimos cuando hablamos de 1-formas en \mathbb{C}^2). Por lo tanto, cualquier 1-forma en $T_x\mathbb{C}^2$ puede ser escrita como $adx + bdy$, donde $a, b \in \mathbb{C}$, de manera única. Ahora, si ω es una 1-forma holomorfa arbitraria en \mathbb{C}^2 , entonces, en cada punto x , ω puede ser escrita de manera única en la base dx, dy .

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de esta observación.

Teorema A.5.23. *Cualquier 1-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 , con un sistema de coordenadas dado x, y , puede ser escrita de manera única como*

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

donde los coeficientes $a(x, y)$ y $b(x, y)$ son funciones holomorfas.

Definición A.5.24. Sea M una 2-variedad holomorfa. Una 2-forma holomorfa ω_x^2 en un punto $x \in M$ es una 2-forma en el espacio tangente T_xM a M en el punto x , es decir, es una función bilineal y antisimétrica evaluada en parejas de vectores tangentes a M en x .

Si ω_x^2 está definida para cualquier punto x de la variedad M y es holomorfa, entonces decimos que ω^2 es una 2-forma sobre la variedad M .

Mediante un razonamiento similar al hecho en el caso de 1-formas, tenemos que se satisface el siguiente resultado.

Teorema A.5.25. *Cualquier 2-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 , con un sistema de coordenadas dado x, y puede ser escrita de manera única como*

$$\omega^2 = a(x, y)dx \wedge dy,$$

donde $a(x, y)$ es una función holomorfa.

Una de las características más importantes de las formas holomorfas es su comportamiento bajo funciones holomorfas.

Definición A.5.26. Sean $f : M \rightarrow N$ una función holomorfa entre dos 2-variedades holomorfas M y N , y ω una k -forma en N , $k = 1, 2$. Definimos el *pull-back* de ω bajo f , como la k -forma en M , $k = 1, 2$, dada por:

$$(f^*\omega)_x(\xi) = \omega_{f(x)}(f_*\xi), \quad \forall \xi \in T_xM, \quad \text{si } \omega \text{ es una 1-forma,}$$

o bien,

$$(f^*\omega^2)_x(\xi, \eta) = \omega_{f(x)}^2(f_*(\xi), f_*(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in T_xM, \quad \text{si } \omega^2 \text{ es una 2-forma,}$$

donde f_* denota a la diferencial de f .

Si g es una 0-forma en N , entonces f^*g queda definida como

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Dado que f_* es lineal en cada punto de M , en virtud de la Proposición A.5.17, concluimos que los siguientes hechos acerca del *pull-back* de 1-formas son ciertos.

Proposición A.5.27. Sean $g : L \rightarrow M$, $f : M \rightarrow N$, funciones holomorfas, $h : N \rightarrow \mathbb{C}$ una función escalar y $\omega, \varphi \in \mathbb{C}^{2*}$ dos 1-formas en N . Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
- b) $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$.
- c) $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$.
- d) $f^*(h\omega) = f^*(h)f^*(\omega)$.

Demostración. Las incisos a) y b) son inmediatos por la Proposición A.5.17.

c) Sean $x \in N$ y $\xi \in T_xN$ arbitrarios, entonces

$$f^*(\omega + \varphi)_x(\xi) = \omega_{f(x)}(f_*(\xi)) + \varphi_{f(x)}(f_*(\xi)) = (f^*\omega + f^*\varphi)_x(\xi).$$

En consecuencia, $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$.

d) Procedamos de manera similar a lo hecho en c).

$$\begin{aligned} f^*(h\omega)_x(\xi) &= (h\omega)_{f(x)}(f_*(\xi)) \\ &= (h \circ f)(x) \cdot \omega_{f(x)}(f_*(\xi)) \\ &= f^*(h)f^*(\omega)_x(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^*(h\omega) = f^*(h)f^*(\omega)$. □

Observación A.5.28. Las afirmaciones de la proposición anterior establecidas en los incisos c) y d) también son válidas si consideramos 2-formas. Las demostraciones respectivas pueden ser realizadas siguiendo las mismas líneas que en la demostración anterior.

Una demostración de b) para 2-formas carecería de sentido puesto que nosotros nos restringimos al estudio de formas en 2-variedades (o bien, en el plano complejo \mathbb{C}^2).

Para concluir con nuestro estudio sobre formas holomorfas definiremos la derivación exterior de k -formas holomorfas, $k = 0, 1$, en \mathbb{C}^2 .

Definición A.5.29. Sea f una 0-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 . Definimos la *derivada exterior* de f como la 1-forma df dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Teniendo en cuenta esta definición, vamos a generalizar este proceso de derivar 0-formas (funciones holomorfas), al caso de 1-formas.

Definición A.5.30. Sea $\omega = adx + bdy$ una 1-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 . Definimos a la *derivada exterior*, $d\omega$, de ω como la 2-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 dada por:

$$d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy.$$

Haciendo los cálculos obtenemos,

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Es decir,

$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \quad \text{si } \omega = adx + bdy.$$

A continuación presentamos algunas propiedades de la derivación exterior.

Teorema A.5.31. Sean g, h dos 0-formas holomorfas en \mathbb{C}^2 , $\omega = adx + bdy$ una 1-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 y $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ una función holomorfa. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- a) $d(g + h) = dg + dh$.
- b) $d(gh) = g dh + h dg$.
- c) $d(dg) = 0$.
- d) $d(f^*g) = f^*dg$.
- e) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Demostración. Los incisos a) y b) son inmediatos de la Definición A.5.29.

c) Por la Definición A.5.29, se satisface

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy.$$

Luego, por la Definición A.5.30, podemos concluir,

$$d(dg) = d \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy = 0.$$

Por lo tanto $d(dg) = 0$.

d) Para la demostración de esta afirmación usaremos las propiedades del operador f^* demostradas en la Proposición A.5.27 y las propiedades de la derivada exterior demostradas en los incisos anteriores de este teorema. Hagamos los cálculos:

$$\begin{aligned}
 f^*(dg) &= f^* \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \\
 &= f^* \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) f^*(dx) + f^* \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) f^*(dy) \\
 &= \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} dx + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} dy \\
 &= d(g \circ f) \\
 &= d(f^*g).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^*(dg) = d(f^*g)$.

e) Haciendo uso del inciso anterior, así como de las propiedades de f^* y la derivada exterior, un cálculo similar nos muestra que $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$. \square

Definición A.5.32. Sea ω una 1-forma holomorfa en \mathbb{C}^2 . Decimos que ω es una 1-forma exacta si existe una 0-forma f en \mathbb{C}^2 tal que $\omega = df$.

Por otra parte, decimos que ω es una 1-forma cerrada si $d\omega = 0$.

Observación A.5.33. Cualquier 1-forma exacta es cerrada. Esto es una consecuencia inmediata del teorema anterior. En efecto, si ω es una 1-forma exacta, entonces, por definición, existe f una 0-forma holomorfa tal que $\omega = df$. Por lo tanto, de la Proposición A.5.31, concluimos que

$$d\omega = d(df) = 0.$$

Es decir, ω es cerrada.

Bibliografía

- [1] L. Ahlfors, *Complex Analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Third edition, McGraw-Hill Book Co., American Mathematical Society, New York, 1979.
- [2] V. I. Arnold; S. M. Gusein-Zade; A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, vol I. The classification of critical points, caustics and wave fronts, Birkhäuser, Boston Inc., Boston, Mass, 1985.
- [3] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Translated from the third (1984) Russian edition by Roger Cooke, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] J. C. Artés; F. Dumortier; J. Llibre, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [6] C. Camacho; P. Sad, *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.
- [7] M. P. Do Carmo, *Differential forms and applications*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [8] X. Gómez-Mont; L. Ortiz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Segunda edición, Aportaciones Matemáticas, Serie Investigación, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [9] Yu. S. Ilyashenko; S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [10] F. Loray, *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble*, Thèse de l'Université de Rennes 1, 1994.
- [11] F. Loray, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux.*, Prépublication IRMAR 2005.

- [12] J.-F. Mattei; R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13**, no. 4, 1980 469-523.
- [13] R. Moussu, *Une démonstration géométrique d'un théorème de Lyapunov-Poincaré*, Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981), Astérisque, vol. 98, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 216-223.
- [14] J. Rotman, *A first course in abstract algebra*, Third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2005.
- [15] J. Rotman, *Galois theory*, Second edition, Universitext, Springer, New York, 1998.
- [16] B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II, Functions of several variables*, Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel, Translations of Mathematical Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

Índice alfabético

- acción, 23
- atlas, 78

- banda de Möbius
 - compleja, 41
 - real, 59
- blow-up, 41

- cambio de coordenadas, 78
- campo vectorial, 29
- carta, 78
- 0-forma
 - holomorfa, 83
- ciclo, 25
 - límite, 25
- curva fase, 31

- derivada
 - de Lie, 47
 - exterior, 86
- desingularización, 41
- diferencial de una función, 83
- divisor excepcional, 41
- 2-forma
 - holomorfa, 84
- 2-forma, 80
- 2-variedad, 41, 78

- ecuación de Pfaff, 35
- ecuación diferencial, 30
 - hamiltoniana, 52
- equivalencia analítica
 - de ecuaciones diferenciales, 31
 - de foliaciones, 34
 - de gérmenes conformes, 1
 - de grupos de gérmenes, 11
- equivalencia formal
 - de ecuaciones diferenciales, 31
 - de foliaciones, 34
 - de gérmenes conformes, 1
 - de grupos de gérmenes, 11
- equivalencia orbital analítica de campos vectoriales, 35
- equivalencia topológica
 - de ecuaciones diferenciales, 31
 - de foliaciones, 34
 - de gérmenes conformes, 1
 - de grupos de gérmenes, 11
- espacio tangente, 79
- explosión, 41
- explosión de un foliación, 41

- familia de funciones, 70
 - localmente equicontinua, 70
 - localmente uniformemente acotada, 70
 - normal, 70
- foliación
 - dicrítica, 42
 - elíptica, 52
 - estándar, 33
 - hamiltoniana, 52
 - integrable, 47
 - no dicrítica, 42
 - no singular, 33
 - real analítica, 51
 - simple, 63
 - singular, 35
- función Phi de Euler, 73

- germen
 - de función holomorfa, 1
 - integrable, 19
 - parabólico, 12

- grupo
 - conmutador, 14
 - de gérmenes conformes, 1
 - de holonomía, 38
 - evanescente, 55
 - finitamente generado, 11
 - integrable, 18
 - metaabeliano, 17
 - parabólico, 12
 - simétrico, 18
 - soluble, 17
- Hamiltoniano, 52
- haz tangente, 79
- hoja
 - de una foliación, 33
- holonomía, 38
 - evanescente, 55
- implotar, 41
- Lema
 - de Hadamard, 52
 - de Hartogs, 77
 - de Morse, 53
 - de saturación, 56
 - de Schwarz, 70
- matriz
 - asociada a la parte lineal de un campo vectorial, 32
 - hessiana, 53
- nivel
 - de un germen conforme, 12
- órbita, 23
 - por un pseudogrupo, 25
- primera integral
 - de un grupo, 18
 - de una foliación, 47
 - de una función holomorfa, 19
- Principio de Simetría, 61
- problema de Cauchy, 31
- producto exterior, 80
- producto infinito, 67
- pseudogrupo, 23
- pull-back, 41, 85
- punto crítico
 - no degenerado, 53
- punto singular, 31
 - elemental, 32
 - resonante, 33
 - tipo cúspide, 32
 - tipo elíptico, 32
 - tipo nodo, 33
 - tipo silla, 33
 - tipo silla-nodo, 33
- puntos de tangencia, 42
- razón característica, 32, 57
- resolución de singularidades, 41
- retrato de las fases, 33
- saturación, 56
- separatriz compleja, 35
- solución
 - de una ecuación diferencial, 30
 - del problema de Cauchy, 31
- Teorema
 - de existencia y unicidad, 31
 - de extensión de Riemann, 77
 - de Hadamard-Perron, 58
 - de linealización de Bochner, 13
 - de linealización de Schröder-Koenigs, 7
 - de Mattei-Moussu, 63
 - de Montel, 9, 73
 - de Poincaré-Lyapunov, 59
 - de rectificación, 33
 - de Riemann sobre singularidades removibles, 75
 - de Seidenberg, 46
 - de unicidad, 76
 - de Weierstrass, 69
 - del dominio invariante, 9
- transformación
 - de correspondencia, 36
 - a lo largo de la trayectoria γ , 37
 - de holonomía, 38
 - transversal a una hoja, 36

1-forma, 79

1-forma

 cerrada, 87

 exacta, 87

 holomorfa, 34, 83