



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## FACULTAD DE INGENIERÍA

PROPUESTA DE INSTALACIÓN EXPERIMENTAL  
EN EL LABORATORIO DE HIDRÁULICA PARA LA  
ENSEÑANZA TEÓRICO-PRÁCTICA DEL  
FENÓMENO DE GOLPE DE ARIETE

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL

PRESENTA  
MARIO DAVID BONILLA SÁNCHEZ

DIRECTOR  
M.I. NIKTE NORMA OCAMPO GUERRERO



MÉXICO, D.F., 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Señor  
MARIO DAVID BONILLA SÁNCHEZ  
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso la profesora M.I. NIKTE NORMA OCAMPO GUERRERO, que aprobó este Comité, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

**"PROPUESTA DE INSTALACIÓN EXPERIMENTAL EN EL LABORATORIO DE HIDRÁULICA PARA LA ENSEÑANZA TEÓRICO-PRÁCTICA DEL FENÓMENO DE GOLPE DE ARIETE"**

- INTRODUCCIÓN
- I. ANTECEDENTES
- II. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DEL GOLPE DE ARIETE
- III. CASO DE ESTUDIO
- IV. PROPUESTAS DE DISPOSITIVOS EXPERIMENTALES
- V. PROPUESTA DE PRÁCTICAS DE LABORATORIO
- VI. CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria a 18 de Octubre del 2010.  
EL PRESIDENTE

ING. RODOLFO SOLÍS UBALDO

RSU/MTH\*gar.

## **DEDICATORIA**

El esfuerzo plasmado en esta tesis es un esfuerzo compartido. Si bien, he aprendido que en la vida es imposible avanzar solo para poder cumplir los objetivos, y que siempre será necesario tener a las personas adecuadas a mi lado. Es por ello que dedico todo este trabajo principalmente a mi familia...Mamá, Papá, esta dedicatoria la llevaba guardada conmigo desde hace mucho tiempo y hoy que la escribo me causa nostalgia, pero sobre todo una enorme satisfacción. Creo fielmente que todo el camino recorrido hasta este momento ha sido de gran aprendizaje para todos. Con el corazón en la mano les doy las gracias por enseñarme a luchar por mis ideales, a enseñarme a enfrentar los retos, a enseñarme a enfrentar la vida y a disfrutarla con todos mis sentidos. Gracias por respetar mis decisiones, gracias por darme la libertad y la confianza para explorar todos los caminos posibles, gracias por educarme para ser una mejor persona cada día, sé que nunca terminaré de aprender de ustedes, pero pueden tener la certeza de que han hecho de mí la persona que yo siempre anhelé ser y que a pesar de todos los cambios que pueda tener hasta el último de mis días, mi esencia siempre trataré de conservarla y siempre los amaré y procuraré hasta que la vida lo permita.

De igual forma dedico esta tesis a mis hermanos, Adriana, Felipe y Alejandro. Mania, dedico mi esfuerzo a tu apoyo en el inicio de mi carrera, por siempre brindarme tú cálida compañía, por procurarme siempre y por mostrarme caminos y opciones de vida. Felipe, dedico mi esfuerzo a tu apoyo y a tus palabras siempre bien intencionadas, y aunque nuestras vidas sean paralelas, agradezco siempre tu respeto a mis decisiones tomadas. Alex, dedico este trabajo a tu esfuerzo por hacerme un lugar en tu vida en el inicio de este proyecto y por compartir muchos momentos juntos, has sido siempre una persona muy importante en mi vida.

En fin...es imposible escribir toda la gama de sentimientos y pensamientos en una hoja de papel, es por ello que les digo, ¡Gracias por disfrutar junto conmigo este éxito profesional logrado!.

**MARIO DAVID BONILLA SÁNCHEZ**

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a la Facultad de Ingeniería, UNAM, por darme la oportunidad de formarme profesionalmente y obtener el conocimiento técnico y ético brindado por todos y cada uno de sus profesores.

Agradezco a la Mtra. Nikte Norma Ocampo Guerrero por darle la dirección adecuada a la elaboración de esta tesis y por toda su paciencia.

Agradezco a mis compañeros de clases, por todos los momentos vividos en esta Facultad de Ingeniería, UNAM.

Agradezco a mis amigos y amigas, que aunque sé que son pocos, pero al final sé que siempre voy a poder contar con ellos.

Agradezco a las personas que en algún momento me brindaron apoyo y palabras de aliento para continuar adelante.

Agradezco a todas y todos los profesionistas que al inicio y a lo largo de mi vida profesional han contribuido con compartir conmigo toda su experiencia y conocimiento y por sus ganas de enseñarme a ser un profesionista el cual tenga respeto por su trabajo y nunca olvidar que todo el conocimiento y la experiencia adquirida debe ser siempre utilizada en beneficio de los demás.

Por último quiero hacer un agradecimiento especial a mi persona. Por permitirme vivir toda experiencia que me haga crecer, que me permita hacer algo por los demás, que me permita seguir aprendiendo y que me permita siempre ser un mejor ingeniero.

**MARIO DAVID BONILLA SÁNCHEZ**

## CONTENIDO

|  |    |
|--|----|
| INTRODUCCIÓN   | 1  |
| 1. ANTECEDENTES  | 4  |
| 1.1. Marco histórico   | 4  |
| 1.2. Práctica “Golpe de ariete” en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería, UNAM | 8  |
| 2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DEL GOLPE DE ARIETE  | 10 |
| 2.1. Flujo permanente  | 10 |
| 2.2. Flujo transitorio   | 10 |
| 2.3. Ecuación de continuidad para un conducto  | 10 |
| 2.3.1. Principio de conservación de la masa  | 10 |
| 2.3.2. Ecuación de continuidad   | 11 |
| 2.4. Ecuación dinámica para un conducto  | 13 |
| 2.5. Descripción del fenómeno en un conducto por gravedad  | 15 |
| 2.5.1. Celeridad de onda   | 18 |
| 2.5.2. Leyes para maniobras de cierre  | 21 |
| 2.6. Teoría de la columna elástica   | 22 |
| 2.6.1. Ecuación de continuidad   | 23 |
| 2.6.2. Ecuación dinámica   | 25 |
| 2.7. Ecuaciones diferenciales del golpe de ariete  | 25 |
| 2.8. Interpretación física de las ecuaciones integrales del golpe de ariete                        | 27 |
| 2.9. Métodos de solución   | 30 |
| 2.9.1. Método de las características   | 30 |
| 2.9.1.1. Ecuaciones características  | 30 |
| 2.9.1.2. Solución de ecuaciones características y de compatibilidad                                | 34 |
| 2.9.1.3. Condiciones de frontera   | 37 |
| 2.9.1.4. Condiciones de estabilidad y convergencia   | 40 |
| 2.9.1.5. Ejemplo   | 41 |
| 2.9.2. Método de Allievi   | 50 |
| 2.9.2.1. Ecuaciones generales de Allievi   | 50 |
| 2.9.2.2. Desarrollo en cadenas de Allievi  | 51 |
| 3. CASO DE ESTUDIO   | 53 |
| 3.1. Dispositivo experimental tanque-tubería-válvula esférica                                      | 53 |
| 3.2. Mediciones y registro de lecturas   | 55 |
| 3.3. Determinación de condiciones iniciales  | 56 |
| 3.4. Cálculo de celeridad de onda de presión en tubería  | 57 |
| 3.5. Periodo T de la onda de presión   | 58 |
| 3.6. Pérdidas por fricción en la tubería   | 58 |
| 3.7. Pérdidas locales  | 70 |
| 3.8. Ley para maniobra de cierre no uniforme   | 76 |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 3.9.    | Solución aplicando el método de Allievi  | 85  |
| 3.9.1.  | Resultados   | 87  |
| 3.10.   | Solución aplicando el método de las características  | 112 |
| 3.10.1. | Resultados   | 122 |
| 4.      | PROPUESTAS DE DISPOSITIVOS EXPERIMENTALES  | 131 |
| 4.1.    | Mejoras al dispositivo experimental tanque-tubería-válvula esférica  | 131 |
| 4.1.1.  | Implementación de los instrumentos de medición y control adecuados   | 131 |
| 4.2.    | Propuesta de nuevo dispositivo   | 134 |
| 4.2.1.  | Instalación hidráulica red-tubería en espiral-válvula  | 134 |
| 4.2.2.  | Instrumentos de medición y control   | 134 |
| 4.2.3.  | Implementación de los instrumentos de medición y control en la instalación hidráulica propuesta              | 145 |
| 5.      | PROPUESTA DE PRÁCTICAS DE LABORATORIO  | 149 |
| 5.1.    | Práctica “Golpe de ariete aplicando el método de las características” en dispositivo experimental existente  | 149 |
| 5.2.    | Práctica “Golpe de ariete aplicando el método de las características” en dispositivo experimental propuesto. | 156 |
| 6.      | CONCLUSIONES   | 183 |
|         | BIBLIOGRAFÍA   | 186 |

## INTRODUCCIÓN

En nuestro país existen necesidades primordiales como el abastecimiento de agua potable a las pequeñas poblaciones o a las grandes ciudades. Actualmente la infraestructura existente para estos fines carece de planeación en algunos sectores, la cual es muy importante para evitar futuros problemas o solucionar situaciones en el presente. Hoy en día existen proyectos en marcha ejercidos por instituciones privadas y públicas para rehabilitar y reordenar las redes principales de abastecimiento, pero para ello, se deben considerar muchas variables, ya sean de tipo técnico o incluso social.

Por estas razones, es muy importante tener en cuenta la parte teórica de las posibles soluciones, ya que se pueden obtener simulaciones de los fenómenos físicos que ocurren, lo que lleva a tomar mejores decisiones.

El objetivo de esta tesis es, principalmente aplicar un método numérico de solución para el fenómeno transitorio conocido como golpe de ariete en el dispositivo experimental instalado en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM y realizar una propuesta de práctica de laboratorio para que los alumnos de la asignatura *Hidráulica de Máquinas*, conozcan y empleen el método de solución de uso generalizado para tal efecto. También se analiza la conveniencia del dispositivo existente y se propone una nueva instalación experimental.

Sobre el fenómeno del golpe de ariete se sabe que una de las aportaciones más importantes sobre la teoría, fue dada a conocer por el italiano Lorenzo Allievi. Sin embargo, con la evolución de las computadoras en los años 50, el investigador Gray, introdujo un procedimiento de análisis del fenómeno conocido como Método de las Características.

Este método es de uso generalizado para el análisis y es el que se propone para la solución de la práctica de laboratorio, pues permite introducir algunas variables que son necesarias para simular el fenómeno de golpe de ariete de una forma más apegada a las circunstancias reales, ya que se pueden incluir condiciones como el efecto de las pérdidas por fricción en la tubería y la ley de cierre del órgano de control. También es posible considerar los cambios geométricos que pudiera tener una tubería, como sucede en la operación real de las redes de distribución.

En el capítulo *uno*, se presenta un marco histórico sobre el estudio del golpe de ariete, debido que es importante conocer el tiempo que los investigadores del tema tardaron en observar el fenómeno y desarrollar algún método para representarlo numéricamente o poder dar solución a situaciones que se generan en las tuberías producto de este fenómeno. En este mismo capítulo se presenta la situación actual de la práctica *Golpe de Ariete* que se desarrolla en el Laboratorio de Hidráulica. En



esta práctica se incluyen los antecedentes necesarios que el alumno debe poseer para comprender el fenómeno físico. Así mismo se muestra el desarrollo que debe tener la práctica para dar solución al fenómeno transitorio con las ecuaciones de Allievi.

En el capítulo *dos* se muestran los conceptos fundamentales que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Estos conceptos se refieren a la parte teórica del fenómeno, así como definiciones sobre la clasificación de flujos. También se muestra la deducción de las ecuaciones de continuidad y la ecuación dinámica para un conducto mediante el principio de conservación de la masa. Se describe el fenómeno del golpe de ariete en un conducto por gravedad, así como las definiciones de celeridad de onda y las leyes para maniobras de cierre. Se presenta la deducción de la ecuación de continuidad y la ecuación dinámica mediante la teoría de la columna elástica. A su vez se presentan las ecuaciones diferenciales del golpe de ariete, así como la interpretación física de las ecuaciones integrales del mismo fenómeno.

En este mismo capítulo se presenta la teoría del Método de las Características y el Método de Allievi. Para el Método de las Características se describen las ecuaciones características, y su solución; las ecuaciones de las condiciones de frontera aguas abajo y aguas arriba de la tubería. Parte importante de este método, son las condiciones de estabilidad y convergencia, mismas que determinan la obtención de resultados favorables. Al final de este capítulo se presenta un ejemplo de aplicación, mismo que sirvió para realizar la calibración de la hoja de cálculo que posteriormente se utilizara para la resolución del caso experimental en el laboratorio.

Por otra parte se muestra la deducción de las ecuaciones generales de Allievi, así como el desarrollo en cadenas que se debe llevar a cabo para obtener una solución.

En el capítulo *tres*, se describe el caso de estudio, para lo cual se describe detalladamente el dispositivo experimental utilizado. Posteriormente se muestra el procedimiento experimental para determinar las condiciones iniciales de flujo, así como para determinar los valores de algunas constantes necesarias en el cálculo. Se presenta también la forma en que fueron calculadas las pérdidas totales de energía en la tubería. En seguida, se detalla la solución del caso de estudio mediante los dos métodos desarrollados teóricamente en el capítulo *dos*, haciendo una comparación entre los resultados obtenidos con ambos métodos.

En el capítulo *cuatro* se hacen algunas propuestas para mejorar el dispositivo experimental actual, así como la implementación de instrumentos de medición y control adecuados. También se hace la propuesta de un nuevo dispositivo y de igual forma la implementación de instrumentos de medición y control.

Finalmente, en el capítulo *cinco* se presenta una propuesta de prontuario de práctica de laboratorio, utilizando como método de solución el Método de las Características y empleando el dispositivo experimental actual. También se presenta una propuesta de práctica de laboratorio usando el nuevo dispositivo experimental y como método de solución el método de las características a través de la hoja de cálculo desarrollada en el capítulo *dos*.

Así es como se desarrolla el contenido de este trabajo, el cual puede formar parte del material didáctico utilizado en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

## 1 ANTECEDENTES

### 1.1 Marco histórico

De entre los investigadores y científicos que contribuyeron con sus estudios y experimentos relacionados con el golpe de ariete, cabe mencionar a Michaud, quien probablemente fue el primero en hacer investigaciones de este fenómeno en tuberías, mismas que dio a conocer en una publicación que apareció en Lausana, Suiza, en 1878 y cuyo título fue *Coups de Bélier dans les Conduites. Etude des moyens employés pour atténuer les effets* (Golpe de ariete en tuberías. Estudio de las maneras de mitigar los efectos), donde establece un análisis matemático del golpe de ariete que tiene lugar en una columna de agua elástica contenida en una tubería rígida.

Posteriormente, el ruso Nicolai Egorovich Joukowsky (1847-1921) llevó a cabo importantes estudios vinculados con este fenómeno. Perfeccionó sus estudios en París y más tarde retornó a su patria para pasar el resto de su vida profesional en Moscú, donde fue profesor de mecánica en el Instituto Politécnico (1872) y posteriormente en la Universidad (1886).

Con antelación a los estudios y resultados a que llegó el profesor Joukowsky, Helmholtz, dentro de sus investigaciones en el campo de la Acústica había demostrado en 1848, que la celeridad o velocidad de propagación del sonido en el seno de un fluido compresible contenido en una tubería, era una función de la elasticidad del material de las paredes de esta última, y en ese mismo año D. J. Korteweg determinó la ecuación correspondiente.

En tales circunstancias, fue Joukowsky quien en 1897 demostró que cuando en una tubería se presenta un incremento de presión a causa de un cierre brusco de una válvula situada en el extremo aguas abajo, la celeridad de la onda de presión generada por tal maniobra, al igual que el sonido, también es una función de la elasticidad de las paredes.

En ese tiempo Joukowsky investigó y experimentó los efectos producidos por cierres de válvulas, cámaras de oscilación, válvulas de seguridad, etc., y en cada caso presentó un análisis matemático riguroso, incluyendo todos los elementos necesarios, de acuerdo con las diferentes condiciones.

Los estudios y experimentos realizados por este científico con relación al golpe de ariete, dieron como resultado las primeras ecuaciones básicas en su forma más correcta. Tales resultados fueron publicados en 1898 en las Memorias de la Academia Imperial de San Petersburgo y, posteriormente, la traducción del ruso al inglés fue hecha por la profesora O. Simin y fue editada

por la American Water Works Association (AWWA) en 1904. Las ecuaciones de Joukowsky son consideradas como la primera gran aportación a la teoría del golpe de ariete.

El sabio italiano Lorenzo Allievi (1856-1942) es quizá la figura más importante por sus estudios y aportaciones a la teoría del golpe de ariete. Profundizó en las investigaciones efectuadas por Joukowsky y en 1902, partiendo de los resultados obtenidos por el científico ruso, los cuales complementó con ideas propias, elaboró su primer trabajo importante sobre el golpe de ariete (1903) al cual tituló como *Teoría generale del moto perturbato del l'acqua nei tubi in pressione* (Teoría general del movimiento perturbado del agua en las tuberías bajo presión), que fue editado por la sociedad italiana de ingenieros y arquitectos, y que posteriormente fue traducido al alemán por Dubs y Bataillard y en 1909 fue publicado por la editorial Springer de Berlín. El mismo Allievi tradujo al francés su teoría, que fue difundida por la *Revue de Mécanique* (Diario de mecánica).

Su gran interés por mejorar cada vez más sus teorías acerca del fenómeno en cuestión, tuvo un gran resultado con la aparición en 1913 de su obra *Teoría del colpo d'ariete* (Teoría del golpe de ariete), editada en las actas del Colegio de Ingenieros y Arquitectos de Italia. Asimismo, es necesario destacar que su tratado de 1913 es considerado como la base para el desarrollo de los descubrimientos realizados posteriormente en este campo de relevante importancia en la hidráulica moderna, y que además existen otras publicaciones del mismo Allievi, todas ellas de gran utilidad. Lorenzo Allievi falleció en 1942.

En 1909, E. Braun aportó una de las mejores contribuciones al desarrollo de la teoría del golpe de ariete, al introducir el valor de la característica de la tubería ( $\epsilon$ ) en el trabajo que presentó en Stuttgart, bajo el título *Druckschwankungen in Rohrleitungen* (Las fluctuaciones de presión en las tuberías). En Berlín, en 1910, en la revista alemana *Die Turbine* (La Turbina), publicó trabajos similares a los expuestos por Allievi en su segundo tratado en 1912. Es por ello que en otro artículo publicado el 16 de agosto de 1934 titulado *Bermerkungen zur Theorie des Druckschwankungen in Rohrleitungen*, (Observaciones sobre la teoría de las fluctuaciones de presión en las tuberías) Braun manifiesta una prioridad sobre Allievi en la elaboración de la teoría del golpe de ariete. Sin embargo, el nombre de Allievi destaca preponderantemente en esta teoría, conocida como teoría de Allievi, porque la presentación de los análisis y desarrollos, en especial en su trabajo de 1913, es una obra ejemplar en elegancia y claridad matemática.

Por otra parte, A.H. Gibson, profesor de Ingeniería de la Universidad de Manchester, alumno y sucesor de Osborne Reynolds, considerado como uno de los pioneros en Gran Bretaña de la aplicación de la mecánica de fluidos a la Ingeniería, escribió numerosas publicaciones acerca de varias ramas de la Hidráulica y en 1925, en su libro *The Mechanical Properties of Fluids* (Las

propiedades mecánicas de los fluidos), proporciona una introducción excelente a la teoría del golpe de ariete.

Posteriormente surgieron los métodos gráficos, cuyo precursor fue el suizo Othmar Schnyder, que en 1929 desarrolló un método gráfico de solución del golpe de ariete en bombas, y en 1932 publicó un trabajo donde expone su método para resolver cualquier sistema de tuberías, especialmente para las que alimentan turbinas.

Es necesario citar también al célebre científico francés Louis Bergeron (1876-1948), quien fue profesor en la Escuela Central de París y que en 1933 trabajando independientemente de Schnyder, desarrolló el mismo método gráfico ideado por este último y que en publicaciones en francés de los años 1935 y 1936 llevan su nombre. En 1937, Bergeron demostró que el método gráfico de análisis que había desarrollado para resolver problemas de golpe de ariete podía ser aplicado a otros campos de la teoría de la elasticidad y también en problemas eléctricos. Después de su fallecimiento, en 1950 la editorial Dunod de París publicó su libro *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité* (El martillo hidráulico para aplastar a la electricidad).

Otro colaborador en el desarrollo de la teoría en cuestión fue el profesor R. W. Angus de la Universidad de Toronto, en Canadá, que mejoró notablemente los métodos gráfico y analítico de solución, mediante valiosas aportaciones. Prueba de su interés por este fenómeno son varios de sus escritos, dentro de los cuales destacan *Water Hammer in Pipes, including those supplied by Centrifugal Pumps; Graphical Treatment* y *Graphical Analysis of Water Hammer Pressures in Compound and Branched Pipes* (Golpe de ariete en tuberías, incluidos los suministrados por bombas centrífugas, tratamiento gráfico y análisis gráfico de las presiones del golpe de ariete en tuberías compuestas y ramificadas), publicados en 1937 y 1939 respectivamente.

Cabe citar también al francés H. Favre, quien llevó a cabo investigaciones en tuberías con disminución gradual de diámetro y en 1938 publicó sus investigaciones bajo el nombre de *Theorie des coups de bélier dans les conduites á caractéristiques linéairement variables le long de l'axe* (Teoría del golpe de ariete en tuberías con características linealmente variables a lo largo de su eje). En *Cours de mécanique* (Cursos de mecánica), explica y desarrolla con detalle la integración de las ecuaciones del golpe de ariete elaborada por Riemann.

Entre 1940 y 1960 se publicaron un gran número de trabajos acerca del fenómeno en estudio, dentro de los que destacan los libros publicados por Parmakian, Rich y Jaeger.

En 1953, con la aparición de las computadoras, Gray introdujo el método de las características para poder llevar a cabo el análisis computarizado del golpe de ariete. En 1967 se publica el libro de

Streeter, V. L. y Wylie, E. B. bajo el título *Hydraulic Transients* (Transitorios hidráulicos), que presenta el análisis de los fenómenos transitorios en hidráulica mediante la aplicación del método anteriormente citado y el de la impedancia.

En 1979 M. Hanif Chaudrhy publica su libro *Applied Hydraulic Transients* (Transitorios hidráulicos aplicados), que contiene una exposición completa de los fenómenos transitorios en hidráulica.

En 1985 el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, publica la obra *Diseño y Operación Hidráulicos de Conducciones de Agua a Presión*, que contiene una extensa y detallada exposición tanto de los fenómenos transitorios en los conductos a presión, como de los dispositivos que existen para su control.

Sin dejar de mencionar el trabajo desarrollado por el ingeniero Francisco de Asís Tavera Escobar, quien en su tesis profesional titulada *Teoría General del Golpe de Ariete y sus aplicaciones*, hace una brillante descripción del fenómeno y presenta una exposición detallada de los métodos gráficos propuestos por Schnyder y Bergeron.

Finalmente, existe un software llamado “Trans” desarrollado por el Instituto de Ingeniería el cual analiza el transitorio y permite establecer la adecuada ubicación de dispositivos de alivio de acuerdo a la magnitud del fenómeno transitorio.

## 1.2 Práctica “Golpe de Ariete” en el laboratorio de hidráulica de la Facultad de Ingeniería, UNAM

Actualmente, la carrera de Ingeniería Civil, a través del Departamento de Ingeniería Hidráulica, imparte en el sexto semestre del plan de estudios, la asignatura *Hidráulica de Máquinas y Transitorios*. Los objetivos de este curso, se basan principalmente en que los alumnos puedan analizar el funcionamiento y condiciones de operación de las turbomáquinas para su selección en estaciones de bombeo y en centrales hidroeléctricas y dimensionar dichas instalaciones; así como calcular las variaciones de presión debidas al golpe de ariete y comprender el funcionamiento de los dispositivos que lo reducen.

Los temas de esta asignatura se resumen en los siguientes:

1. Conceptos generales
2. Teoría general de las turbomáquinas
3. Bombas
4. Turbinas
5. Flujo transitorio en conductos a presión

Específicamente el tema cinco se enfoca a describir y mencionar la importancia de los fenómenos transitorios, en particular el golpe de ariete, sus ecuaciones básicas y su solución, por medio de las ecuaciones de Allievi y el método de las características. También se estudian los dispositivos de alivio que reducen el efecto del golpe de ariete.

Para una mejor comprensión de los temas y sobre todo, para que los alumnos observen la aplicación práctica de los conceptos teóricos, el Departamento de Ingeniería Hidráulica a través del Laboratorio de Hidráulica imparte cuatro prácticas relacionadas con dicha asignatura.

En particular, la práctica número 3, titulada *Golpe de Ariete*, está diseñada para observar la variación de la carga de presión a lo largo de una tubería, provocada por el cierre y apertura de una válvula colocada en su extremo final. Asimismo, se analiza la sobrepresión generada en una tubería debida al cierre de la válvula, aplicando el método de las cadenas de Allievi.

Para llevar a cabo la práctica y comprender lo que sucede experimentalmente en el desarrollo de ésta, los alumnos deben poseer antecedentes teóricos, tales como el concepto de flujo transitorio en conductos a presión, así como la teoría del golpe de ariete, la celeridad de una onda de presión,

conocer la clasificación de maniobras para una válvula y conocer las ecuaciones de Allievi. Aunque estos conceptos fundamentales son adquiridos por los alumnos en el curso teórico, se les recomienda que, antes de comenzar la realización de la práctica, acudan a la bibliografía sugerida en el temario de la asignatura o bien la que se sugiere en el prontuario de la práctica.

Cada una de las prácticas del laboratorio tiene un prontuario de práctica, donde se especifica el objetivo de la práctica, los antecedentes teóricos que debe tener el alumno, el desarrollo de la práctica, un procedimiento para presentar la memoria de cálculo, bibliografía en la cual se pueden encontrar los conceptos necesarios, así como un cuestionario de cinco preguntas relacionadas, tanto con la comprensión de los conceptos teóricos, como con el desarrollo de la práctica.

La práctica *Golpe de Ariete*, utiliza como método de solución las ecuaciones de Allievi. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, en el presente trabajo se aplicará el método de las características como método de solución y se realizará la propuesta de un prontuario para realizar la práctica *Golpe de Ariete* con dicho método.



## 2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DEL GOLPE DE ARIETE

En este capítulo se definen algunos conceptos fundamentales que posteriormente serán utilizados para el análisis del golpe de ariete en el caso experimental de estudio, tales como flujo permanente, flujo transitorio, se establecen las ecuaciones de continuidad y dinámica para un conducto, se describe el fenómeno de golpe de ariete en un conducto, se explica la teoría de la columna elástica, se muestran las ecuaciones diferenciales del golpe de ariete, así como la interpretación física de las ecuaciones integrales del golpe de ariete.

### 2.1 Flujo permanente

El flujo permanente es aquel en el que las características hidráulicas en una determinada sección del conducto permanecen constantes para cualquier instante y no varían con el tiempo, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x}(p, V, Q) = 0 \quad (2.1)$$

donde

$p$  es la presión manométrica en el conducto

$V$  es la velocidad

$Q$  es el gasto

### 2.2 Flujo transitorio

Se define como el flujo no permanente intermedio que tiene lugar entre el permanente inicial y el final en un conducto. Un ejemplo particularmente importante de este tipo de flujo es el fenómeno del golpe de ariete.

### 2.3 Ecuación de continuidad para un conducto

#### 2.3.1 Principio de conservación de la masa

Este principio establece que de la totalidad de la masa que en la unidad de tiempo entra a un volumen finito dentro del flujo, una parte queda almacenada dentro del mismo y el resto sale del volumen. Lo anterior, también puede expresarse como

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Cantidad neta de masa que} \\ \text{atraviesa la superficie de} \\ \text{frontera del volumen en la} \\ \text{unidad de tiempo.} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Rapidez de variación de la} \\ \text{masa contenida en el} \\ \text{volumen.} \end{array} \right] = 0$$

### 2.3.2 Ecuación de continuidad

En la figura 2.1 se muestra un volumen elemental limitado por la superficie interna del conducto 3, y por las secciones transversales 1 y 2 normales a la coordenada curvilínea  $x$ , que a su vez coincide con el eje del mismo.

La cantidad neta de masa que atraviesa la superficie  $A$  de frontera del volumen en estudio es

$$\left[ \rho VA + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho VA) dx \right] - \left[ \rho VA - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho VA) dx \right] = \frac{\partial}{\partial x} (\rho VA) dx$$

donde

$A$  es la superficie de frontera del volumen,

$V$  es la velocidad,

$\rho$  es la densidad del agua.

y la rapidez de variación de la masa dentro del mismo

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho A dx)$$

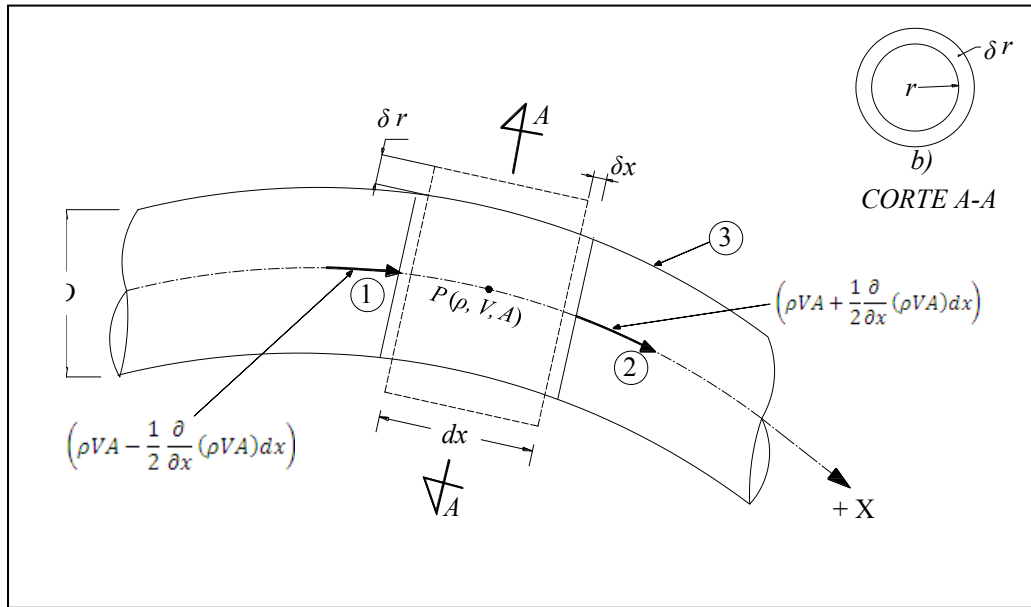


Figura 2.1. Volumen elemental limitado.

En consecuencia, de acuerdo con el principio de conservación de la masa, se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho VA)dx + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx) = 0 \quad (2.2)$$

Sin embargo, si se acepta que la variación longitudinal del volumen elemental es despreciable ( $\delta x \approx 0$ ), la ecuación (2.2) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho VA) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = 0 \quad (2.2 a)$$

Al desarrollar las derivadas parciales de la ecuación anterior y ordenar términos, se obtiene

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \left( V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) + A \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.2 b)$$

Así, también las derivadas totales de  $A$  y  $\rho$  se pueden escribir como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} = V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.2b) y dividiendo entre  $\rho A$  resulta

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

que es la ecuación de continuidad para un conducto con flujo no uniforme, no permanente y compresible.

#### 2.4 Ecuación dinámica para un conducto

Para obtener la ecuación dinámica de un conducto sólo es necesario establecer el equilibrio de las fuerzas que actúan en la dirección tangencial a la coordenada curvilínea  $x$ , sobre la superficie de frontera que limita el volumen elemental que se muestra en la figura 2.2.

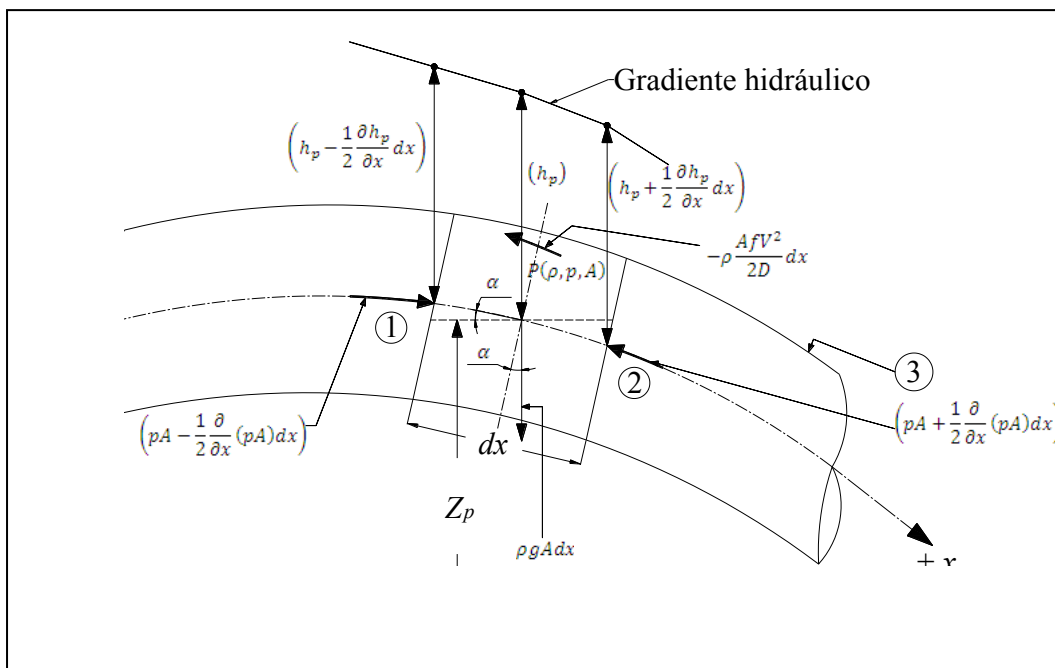


Figura 2.2.

Estas fuerzas aplicadas en la dirección  $+x$ , son las siguientes:

- a) La fuerza de superficie resultante de las que actúan en las secciones 1 y 2 debida a un gradiente de presión

$$\left[ pA - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (pA) dx \right] - \left[ pA + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (pA) dx \right] = - \frac{\partial}{\partial x} (pA) dx \approx -A \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (2.4)$$

- b) La fuerza de superficie resultante debida a la resistencia al movimiento, aplicada al volumen elemental y calculada a partir de la fórmula de Darcy-Weisbach

$$-\rho A \frac{fV^2}{2D} dx \quad (2.5)$$

donde

$f$  es el factor de fricción

- c) La componente tangencial del peso propio del volumen, aplicada en el centro de gravedad del mismo

$$\rho g A dx \sin \alpha = -\rho g A \frac{\partial Z_p}{\partial x} dx \quad (2.6)$$

$$\sin \alpha = -\frac{\partial Z_p}{\partial x}$$

donde

$Z_p$  es la carga de posición del conducto

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de estas fuerzas debe ser igual a la masa del elemento  $\rho A dx$  multiplicada por la componente tangencial de la aceleración, lo cual permite escribir

$$A \frac{\partial p}{\partial x} dx + \rho A \frac{fV^2}{2D} dx + \rho g A \frac{\partial Z_p}{\partial x} dx = -\rho A \left[ \frac{\partial (V^2)}{\partial x} \frac{1}{2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right] dx \quad (2.7)$$

Si se recuerda que  $p = \rho g h_p$  y se divide la ecuación anterior entre  $\rho g A dx$ , después de ordenar términos resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h_p + \frac{V^2}{2g} + Z_p \right) + \frac{h_p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV^2}{2gD} = 0 \quad (2.8)$$

Para una determinada sección del conducto el valor  $H = h_p + \frac{V^2}{2g} + Z_p$  representa la energía total por unidad de peso o carga total que tiene el líquido, medida con relación a un plano horizontal de referencia, y el término  $V^2$  puede ser definido como  $V|V|$  para tomar en cuenta la inversión en la dirección del flujo cuando éste es transitorio. De acuerdo con esto, la ecuación (2.8) adquiere la forma

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{h_p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0 \quad (2.9)$$

que es la ecuación dinámica para un conducto con flujo no uniforme, no permanente y compresible.

## 2.5 Descripción del fenómeno en un conducto por gravedad

Con el fin de poder describir el fenómeno del golpe de ariete en un conducto por gravedad, por facilidad, se puede considerar un conducto con sección transversal y espesor constantes, con eje horizontal y longitud  $L$  tal como el mostrado en la figura 2.3, donde se tiene un flujo permanente cuando  $t=0$ , con una válvula o compuerta (órgano de control) situada en el extremo aguas abajo que permite regular la magnitud del gasto y que es alimentado por un depósito que contiene una gran masa de agua cuya superficie libre tiene un nivel constante.

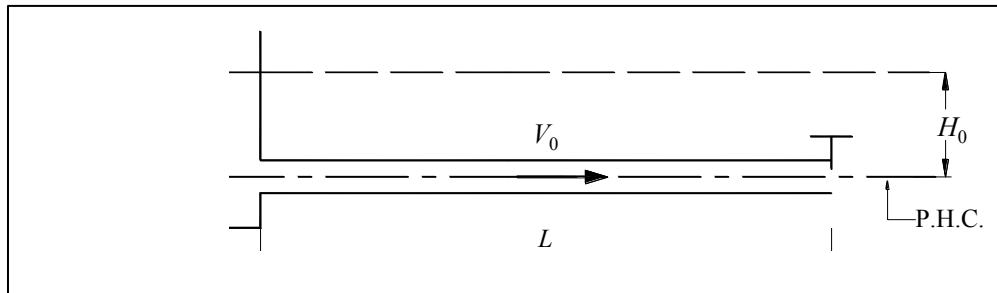


Figura 2.3. Conducto con sección transversal y espesor constantes

Suponiendo que se lleva a cabo una maniobra de cierre instantáneo total en el órgano de control, la energía cinética del agua en esta sección del conducto se transformará en energía potencial, que a su vez, dará origen a un incremento en la carga piezométrica original, llevándose a cabo un trabajo elástico de deformación en las paredes del conducto y en el agua. Esta conversión de energía constituye lo que se conoce como onda de presión positiva o directa que se propaga hacia aguas arriba con velocidad o celeridad  $a$ .

Esta onda modifica considerablemente las condiciones originales del conducto aguas arriba del frente de la misma, ocasionando una deformación en las paredes del mismo, el agua al comprimirse aumenta su densidad y la velocidad en esta zona se reduce a cero. Aguas abajo del frente de onda, el conducto, el agua, la carga piezométrica y la velocidad del escurrimiento, permanecen en su estado original (figura 2.4a).

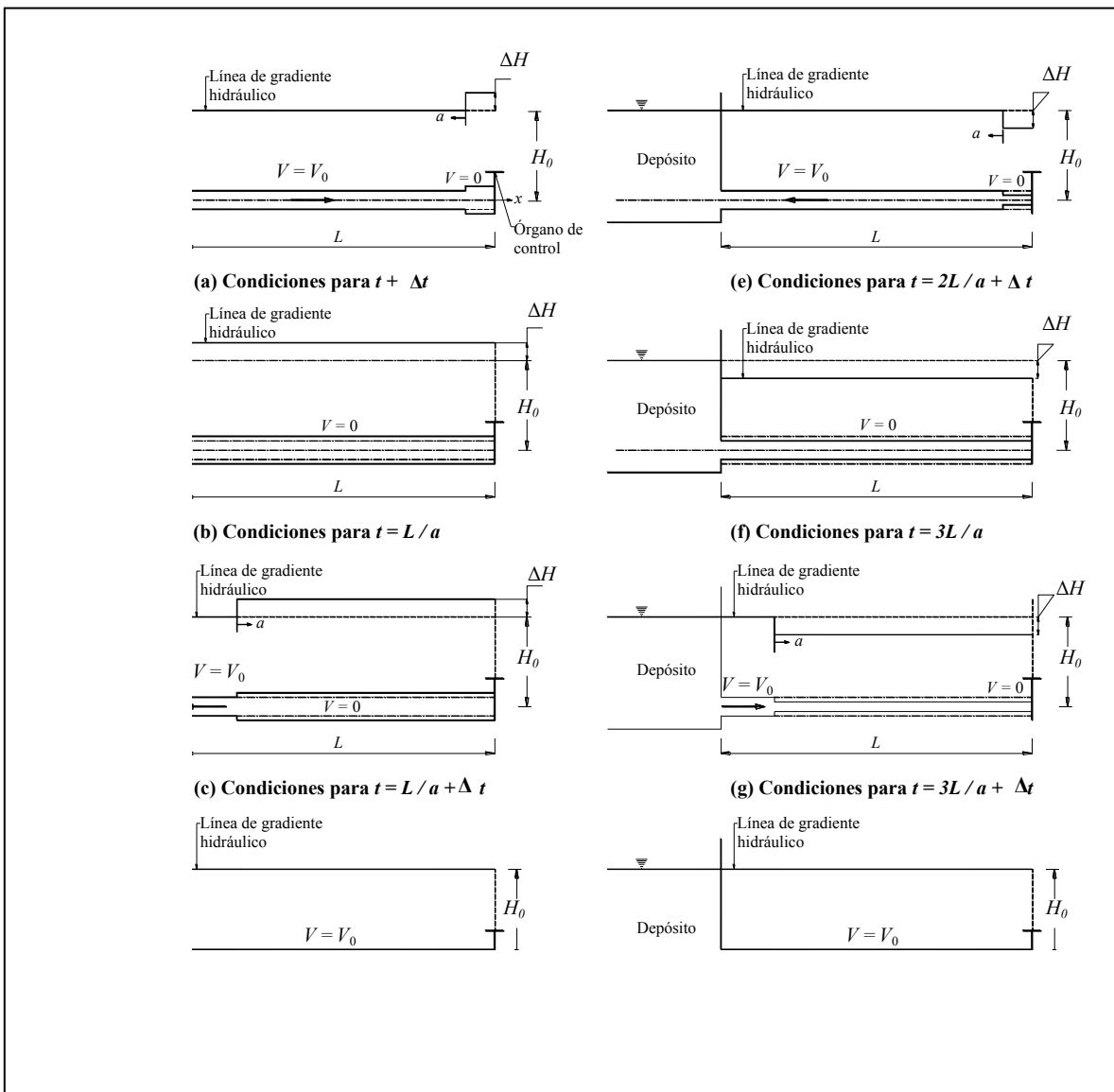


Figura 2.4. Propagación de la onda de presión en un conducto causada por un cierre instantáneo del órgano de control.

Cuando el frente de onda llega al depósito en un tiempo  $t = \frac{L}{a}$ , la totalidad del conducto se encuentra deformado (figura 2.4b), la velocidad de flujo es igual a cero, la carga piezométrica es mayor que la original y el agua se encuentra comprimida.

Como el nivel del agua en el depósito permanece constante, en esta zona no pueden presentarse modificaciones de ninguna especie, permaneciendo la misma carga; entonces el depósito actúa como una pantalla que refleja totalmente la onda de presión y en este instante se produce la traslación de una onda negativa hacia el órgano de control (figura 2.4c), ocasionando que aguas abajo del frente, el agua fluya hacia el depósito con una velocidad  $V_0$  idéntica en magnitud a la inicial, dando lugar a que el conducto y el agua adquieran sus propiedades iniciales en esta región, y

cuando la onda llega al órgano en el instante  $t = \frac{2L}{a}$ , todo el conducto y el agua contenida por éste se encuentran en su estado original, pero con escurrimiento del órgano hacia el depósito (figura 2.4d).

A esta primera serie de eventos que consisten en la formación de un frente de onda positivo que viaja del órgano de control hacia el depósito y un frente de onda negativo que viaja de este último hacia el primero, se le conoce como fase directa del golpe de ariete.

Ahora bien, como consecuencia del flujo de agua hacia el depósito, se origina una caída de carga y una contracción de las paredes del conducto, que adopta dimensiones inferiores a las del estado original, y una reducción a cero de la velocidad en la zona aguas abajo del frente de onda negativa que viaja hacia el depósito (figura 2.4e), al que llega en el instante  $t = \frac{3L}{a}$  cuando el conducto se encuentra contraído en su totalidad, la velocidad del agua es nula y la densidad de la misma es mayor que la original (figura 2.4f).

A partir del instante  $t = \frac{3L}{a}$ , el depósito funciona nuevamente como una pantalla y refleja una onda positiva, volviendo el conducto a su estado original aguas arriba del frente de ésta, con un escurrimiento hacia el órgano y con velocidad  $V_0$ , de tal manera que en el instante  $t = \frac{4L}{a}$  el conducto vuelve a tener las características iniciales en toda su longitud (figura 2.4h).

A esta segunda serie de eventos se le conoce como fase inversa del golpe de ariete que, al igual que la fase directa, tiene una duración  $t = \frac{2L}{a}$ , a la que se conoce como periodo del conducto  $T$ .

Finalmente, es necesario señalar que si no existiese el efecto de la fricción en el conducto que transforma la energía en forma de calor, el ciclo de eventos antes descrito se repetiría indefinidamente dando lugar a una variación de la carga piezométrica con respecto al tiempo en el órgano de control, tal como se indica en la figura 2.5. Sin embargo, dado que prácticamente todos los conductos son hidráulicamente rugosos, la variación de la carga corresponde a la mostrada en la figura 2.6.



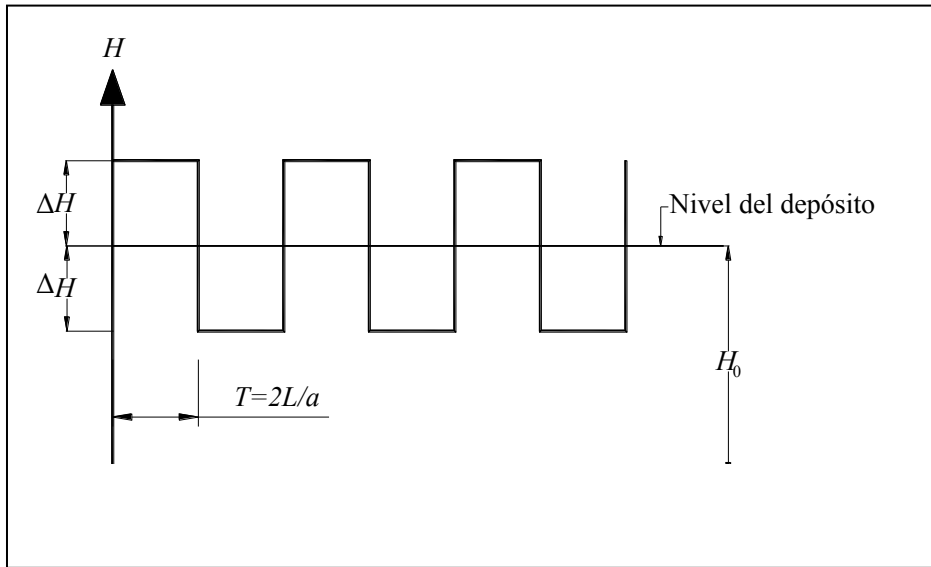


Figura 2.5. Variación de la carga piezométrica en el órgano de control sin considerar pérdidas por fricción.

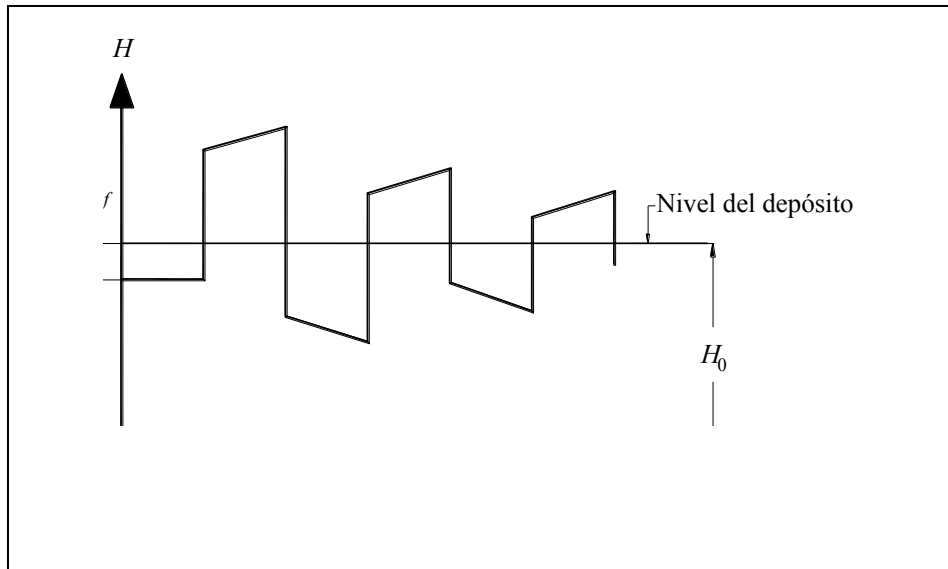


Figura 2.6. Variación de la carga piezométrica en el órgano de control considerando pérdidas por fricción.

### 2.5.1 Celeridad de onda

La celeridad de las ondas de presión en un conducto está definida por la ecuación (2.10), en la cual puede observarse que su valor depende tanto de las propiedades elásticas del conducto y el fluido, como de la geometría del primero.

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_v} + \frac{D}{eE_t} \right)}} \quad (2.10)$$

donde

$a$  es la celeridad de la onda de presión

$D$  es el diámetro del conducto

$\rho$  es la densidad del fluido

$e$  es el espesor de las paredes del conducto

$E_v$  es el módulo de elasticidad volumétrico del fluido

$E_t$  es el módulo de elasticidad del material del conducto

Cuando el fluido es agua dulce y en la mencionada ecuación se aceptan valores prácticos de

$E_v = 2.18 \times 10^9 \text{ Pa}$  y  $\rho = 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  se obtiene:

$$a = \frac{1,482}{\sqrt{1 + \frac{E_v D}{E_t e}}} \quad (2.11)$$

La ecuación anterior permite calcular la magnitud de la celeridad de la onda de presión en un conducto de pared delgada, cuyo espesor es menor o igual a la décima parte del diámetro, es decir, si  $\frac{e}{D} \leq 0.10$ . En la tabla 2.1 se indican los valores del módulo de elasticidad  $E_t$  para algunos materiales usados en conductos, y en la tabla 2.2 se proporcionan valores del módulo de elasticidad volumétrico  $E_v$  y la densidad  $\rho$  para algunos líquidos.

**Tabla 2.1. Valores del módulo de elasticidad  $E_t$  para algunos materiales**

| <i>Material</i> | <i><math>E_t</math> (Pa)</i> |
|-----------------|------------------------------|
| Acero           | $2.06 \times 10^{11}$        |
| Asbesto cemento | $2.40 \times 10^{10}$        |
| P.V.C.          | $1.10 \times 10^9$           |
| Fierro fundido  | $9.11 \times 10^{10}$        |
| Cobre           | $1.19 \times 10^{11}$        |
| Bronce          | $1.03 \times 10^{11}$        |
| Latón           | $1.03 \times 10^{11}$        |
| Zinc            | $3.63 \times 10^{10}$        |
| Plomo           | $1.37 \times 10^{10}$        |
| Estaño          | $1.27 \times 10^{11}$        |
| Aluminio        | $7.05 \times 10^{10}$        |
| Concreto simple | $1.23 \times 10^{10}$        |
| Madera          | $6.86 \times 10^9$           |
| Hule            | $3.43 \times 10^9$           |
| Vidrio          | $6.86 \times 10^{10}$        |

**Tabla 2.2. Valores comúnmente usados del módulo de elasticidad volumétrico  $E_v$  y de la densidad  $\rho$  para algunos líquidos**

| <i>Líquido</i> | $E_v$ (Pa)             | $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> ) | <i>Temperatura</i> (°C) |
|----------------|------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Agua dulce     | 2.18 X 10 <sup>9</sup> | 1000                        | 20                      |
| Agua salada    | 2.33 X 10 <sup>9</sup> | 1025                        | 15                      |
| Petróleo       | 2.06 X 10 <sup>9</sup> | 850                         | 15                      |
| Gasolina       | 1.39 X 10 <sup>9</sup> | 680                         | 15                      |

Por otro lado, es necesario señalar que algunos autores sugieren la aplicación de la siguiente ecuación para el cálculo de la celeridad de la onda

$$a = \sqrt{\frac{E_v/\rho}{1 + \frac{E_v D}{E_t e} C_1}} \quad (2.11 a)$$

donde  $C_1$  es un parámetro que depende de la relación de Poisson  $\mu$  del material con que está hecho el conducto y de sus condiciones de apoyo.

Sin embargo, puede aceptarse un valor práctico de  $C_1$  igual a la unidad para la gran mayoría de los conductos, con lo que la ecuación (2.11a) se reduce a la (2.11).

Para algunos de los materiales más comunes en conductos de pared delgada, a partir de esta última ecuación, se puede obtener la siguiente expresión

$$a = \frac{1,482}{\sqrt{1 + K_a \frac{D}{e}}} \quad (2.12)$$

donde  $K_a$  vale 0.0106 para conductos de acero, 0.091 para conductos de asbesto-cemento y 1.993 para conductos de P.V.C. Obsérvese que si el valor de  $K_a$  fuese igual a cero, para un material con módulo de elasticidad infinito, el valor máximo de la celeridad sería de 1,482 m/s, que es la velocidad con la cual se propaga el sonido en el agua a una temperatura de 20°C.

Tratándose de conductos de pared gruesa (figura 2.7), si se desprecia el efecto de la relación de Poisson  $\mu$ , la celeridad de onda se define como

$$a = \sqrt{\frac{E_v/\rho}{1 + \frac{2E_v}{E_t} \left[ \frac{(R+e)^2 + R^2}{(R+e)^2 - R^2} \right]}} \quad (2.13)$$

donde  $R$  es el radio interior del conducto.

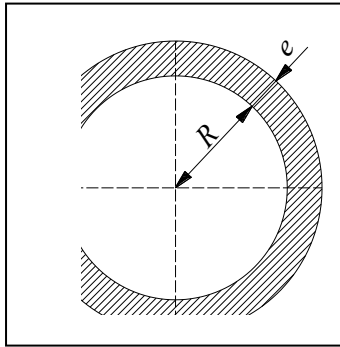


Figura 2.7. Tubo de pared gruesa.

Para conductos de concreto reforzado existe alguna incertidumbre debido a la heterogeneidad del material; sin embargo, para valuar la celeridad de onda se recurre a un conducto de acero equivalente con un espesor virtual  $e_v$  dado por la siguiente ecuación

$$e_v = e_a \left( 1 + \frac{E_c e_c}{E_a e_a} \right) \quad (2.14)$$

Siendo  $e_c$  el espesor del tubo de concreto,  $e_a$  el de una placa continua de acero equivalente al refuerzo,  $E_c$  y  $E_a$  los módulos de elasticidad del concreto y acero de refuerzo respectivamente.

### 2.5.2. Leyes para maniobras de cierre

Para obtener los valores de la carga piezométrica y la velocidad en el órgano de control cuando éste se somete a una maniobra de cierre o apertura, es necesario conocer la ley con la cual se efectúa dicha maniobra; para tal fin, a continuación se presentan las ecuaciones que pueden utilizarse para los casos más comunes que corresponden a condiciones iniciales de apertura o cierre total.

#### Cierre uniforme o lineal

Para una maniobra de cierre uniforme o lineal se tiene la siguiente ecuación

$$\eta_i = 1 - (1 - \eta_f) \frac{i}{\theta}, \quad 0 \leq i \leq \theta \quad (2.15)$$

$$\eta_i = \eta_f, \quad i \geq \theta \quad (2.15 a)$$

donde  $\eta_f > 0$  para un cierre parcial, e igual a cero si éste es total.

donde

$\theta$  es la relación entre el tiempo de maniobra  $t_c$  y el periodo de la onda de presión  $T$ .

$\eta_i$  es la ley lineal de cierre lento al inicio de la maniobra.

$\eta_f$  es la ley de cierre lento al final de la maniobra.

### Cierre no uniforme

Cuando la ley de cierre no es uniforme, se tendrá una variación de  $\eta$  con respecto al tiempo tal como la mostrada en la figura 2.8; en este caso resulta conveniente hacer una gráfica semejante a la que se muestra de acuerdo con las características de la maniobra e interpolar de ésta el valor deseado de  $\eta$ , o bien, si se dispone de una computadora se puede simular la maniobra mediante líneas rectas como las que se muestran en la misma figura.

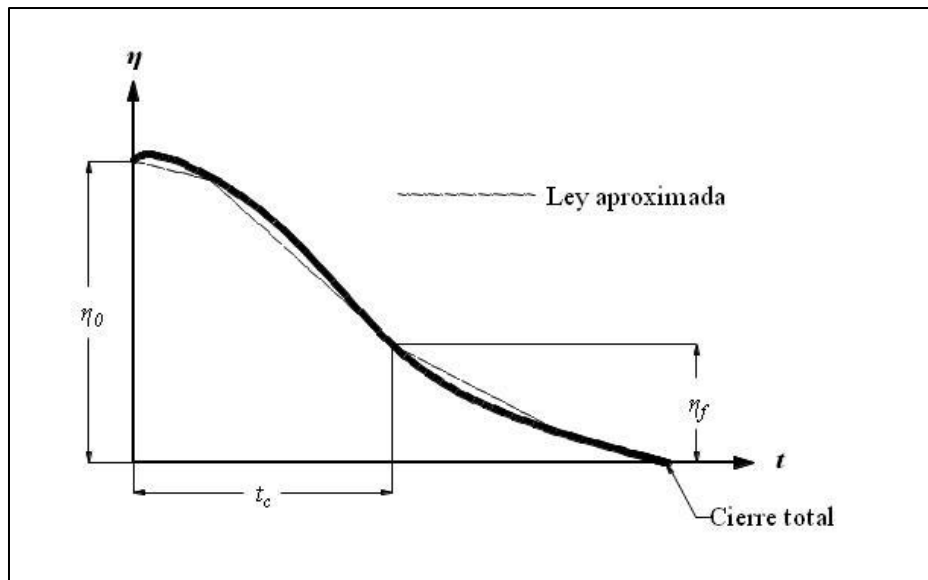


Figura 2.8. Ley para maniobra de cierre no uniforme.

## 2.6 Teoría de la columna elástica

Esta teoría se acerca más al comportamiento real del fenómeno y ha sido comprobada en laboratorio. Las ecuaciones de continuidad y dinámica en este caso están sujetas a las siguientes hipótesis simplificatorias:

1. El conducto permanece lleno de agua todo el tiempo y la presión mínima en cualquier sección siempre es mayor que la de vaporización del fluido.
2. Las distribuciones de velocidad y presión en cualquier sección del conducto son uniformes.
3. Las ecuaciones para el cálculo de pérdidas de carga cuando el flujo es permanente, también son válidas cuando éste es transitorio.

4. La pared del conducto y el fluido se comportan de una manera elástica lineal y tienen pequeñas deformaciones.
5. El incremento de la presión con respecto a la coordenada curvilínea  $x$  resulta pequeño comparado con el incremento de la misma con respecto al tiempo.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

6. El incremento de la carga de velocidad y la densidad del fluido resulta pequeño comparado con el de la carga piezométrica.

$$\frac{\partial H_T}{\partial x} + \frac{h_p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} \approx \rho g \frac{\partial H}{\partial t}$$

### 2.6.1 Ecuación de continuidad

De acuerdo con la hipótesis 5

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{E_v} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.16)$$

Por otra parte, de acuerdo con la fig. 2.1 el incremento de la sección transversal del conducto se puede expresar como

$$dA = 2\pi r \delta r = 2A \frac{\delta r}{r} \quad (2.17)$$

Según la ley de Hooke para sólidos que tienen un comportamiento elástico lineal se tiene que

$$d\sigma = \left(\frac{\delta r}{r}\right) E_t \quad (2.18)$$

Sustituyendo la ecuación (2.12) en la (2.11), resulta

$$dA = \frac{2A}{E_t} d\sigma \quad (2.19)$$

Observando el diagrama de cuerpo libre de las presiones sobre la pared de la tubería mostrado en la figura 2.9 se deduce que

$$\sigma = \frac{pr}{e}, \quad \Delta\sigma = \frac{1}{e} (p\Delta r + r\Delta p)$$

Como

$$p\Delta r \ll r\Delta p, \quad \Delta\sigma = \frac{r\Delta p}{e}$$

O bien

$$d\sigma = \frac{r}{e} dp \quad (2.20)$$

Esta última ecuación, al ser sustituida en la ecuación (2.13) da como resultado

$$dA = \frac{AD}{eE_t} dp$$

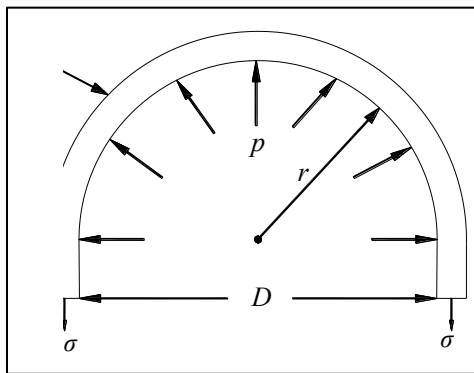


Figura 2.9. Diagrama de cuerpo libre de las presiones sobre la pared de la tubería

O bien, según la hipótesis 5

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eE_t} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.16) y (2.21) en la (2.3), y tomando en cuenta la hipótesis 6, esta última ecuación queda como

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \rho g \left( \frac{1}{E_v} + \frac{D}{eE_t} \right) \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

Recordando que \$Q=VA\$ y ordenando términos, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

donde el parámetro \$a\$ se define como la celeridad de la onda de presión en el conducto y su valor es

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_v} + \frac{D}{eE_t} \right)}} \quad (2.24)$$

### 2.6.2 Ecuación dinámica

La ecuación dinámica para esta teoría puede deducirse fácilmente de la ecuación (2.9) si se considera la hipótesis 6, la definición de carga piezométrica  $H$  y la relación  $Q=VA$ , las cuales después de ordenar términos permiten escribir

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (2.25)$$

Finalmente, es necesario destacar que para el cálculo de las pérdidas por fricción en el conducto, se ha utilizado la ecuación de Darcy-Weisbach; no obstante, es posible utilizar cualquier expresión de la forma  $K_1 Q |Q|^m D^b$  con valores de  $K_1$ ,  $m$  y  $b$  que dependen de la ecuación utilizada; así, para la fórmula de Manning, que en la práctica también se aplica a los conductos a presión,  $K_1 = 8.08 \text{ gn}^2$ ,  $m = 1$  y  $b = -10/3$ , siendo  $n$  el coeficiente de rugosidad.

### 2.7 Ecuaciones diferenciales del golpe de ariete

Con base en las ecuaciones de continuidad y dinámica establecidas para la teoría de la columna elástica, despreciando el efecto de la fricción y haciendo  $Q=VA$ , las ecuaciones (2.23) y (2.25) se pueden escribir como

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.26)$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (2.27)$$

que se conocen como las ecuaciones de continuidad y dinámica del golpe de ariete. Si se recuerda que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \quad y \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}$$

entonces las ecuaciones 2.26 y 2.27 pueden escribirse como



$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (2.26 \text{ a})$$

y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (2.27 \text{ a})$$

Para el caso particular de un conducto con eje horizontal y la carga piezométrica  $H$  valuada con respecto a un plano horizontal de comparación que contiene a dicho eje, ésta resultará igual a la carga de presión  $h_p$ , con lo cual la ecuación (2.26a) se simplifica como

$$\frac{\partial^2 h_p}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 h_p}{\partial x^2} = 0 \quad (2.28)$$

que es la ecuación diferencial utilizada por Allievi para conductos con eje horizontal y sección transversal constante.

Sin embargo, con el fin de obtener el valor de la carga piezométrica  $H$  en cualquier sección del conducto, independientemente del perfil de su eje, a continuación se analiza la solución e interpretación física de las ecuaciones (2.26a y 2.27a), donde la carga de presión  $h_p$  se obtiene con sólo restar la carga de posición  $Z_p$  de la piezométrica correspondiente.

Estas ecuaciones tienen la forma de la ecuación denominada de D’Alambert, cuya solución simultánea general fue obtenida por Riemann y para un sistema tal como el mostrado en la figura 2.10 resulta

$$H = H_0 + F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (2.29)$$

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] \quad (2.29 \text{ a})$$

para  $t \geq \frac{x}{a}$

Las expresiones anteriores permiten determinar la carga piezométrica y la velocidad en cualquier sección de un conducto durante el flujo transitorio en función de la coordenada curvilínea  $x$  con origen en el depósito y el tiempo  $t$ .

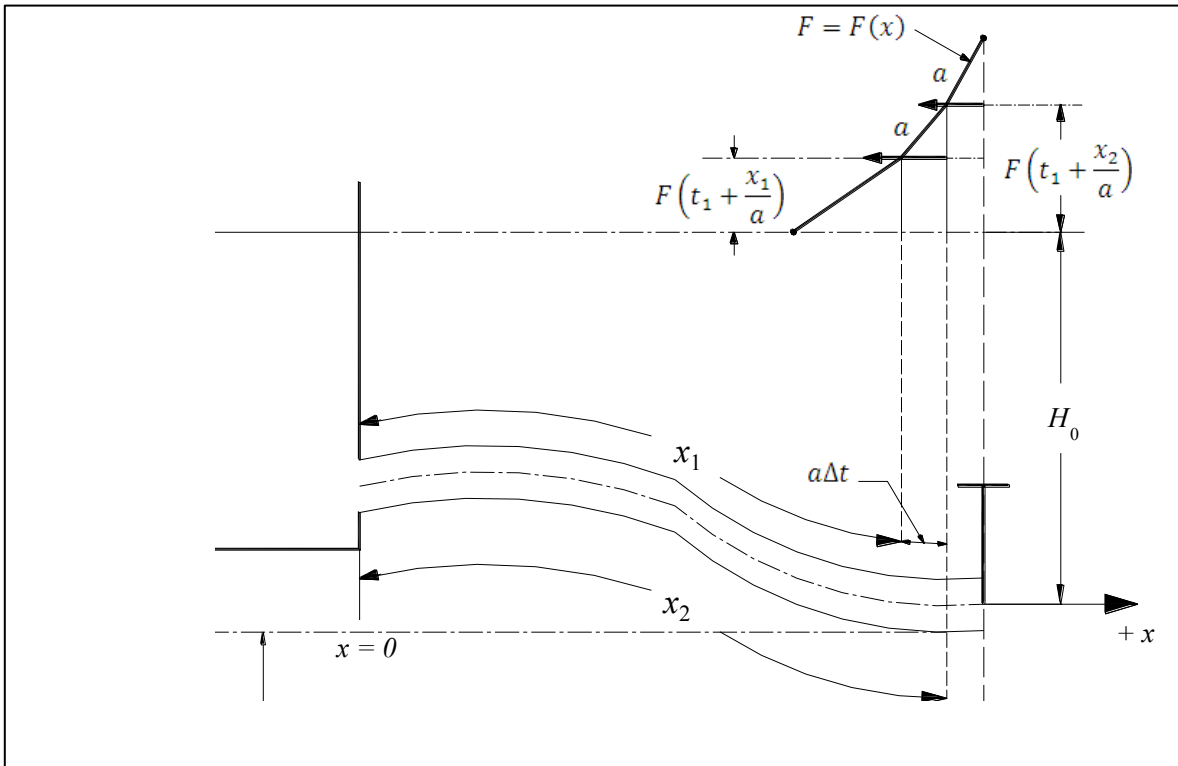


Figura 2.10.

## 2.8 Interpretación física de las ecuaciones integrales del golpe de ariete

Con el fin de ayudar a la mejor comprensión del fenómeno en estudio y deducir ecuaciones de tipo práctico que permitan la cuantificación de sus efectos, resulta conveniente interpretar el significado de las funciones  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  y  $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ .

Considerando que por alguna razón pudiera justificarse que la función  $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$  fuese nula, es posible encontrar el efecto que la existencia de  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  traería consigo. De esta manera las ecuaciones (2.29) y (2.29a) tomarían la forma

$$H = H_0 + F\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (2.30)$$

$$V = V_0 - \frac{g}{a} F\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (2.30 a)$$

Si se despeja  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  en la ecuación (2.30a) y se sustituye su valor en la (2.30) resulta

$$H = H_0 + \frac{a}{g}(V_0 - V) \quad (2.30 b)$$

Al realizar una maniobra de cierre en el órgano de control de la figura 2.10 cuando  $t = 0$ , se tendrá que la velocidad para el flujo permanente inicial  $V_0$  será siempre mayor que la velocidad para el flujo transitorio  $V$ , es decir,  $V_0 - V > 0$  y por lo tanto  $H > H_0$ .

Ahora bien, para un observador que partiera del órgano de control cuando  $t = t_0$  y viajara a lo largo del conducto en la dirección  $-x$  con una velocidad  $-a$ , en un instante  $t_1$  se encontraría en la sección  $x_1 = L - a(t_1 - t_0)$ , donde el valor de la función  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  sería (figura 2.10)

$$F\left(t_1 + \frac{x_1}{a}\right) = F\left(\frac{L}{a} + t_0\right) = cte.$$

y para otro observador que partiera cuando  $t = t_0 + \Delta t$  y viajara en las mismas condiciones, en el mismo instante  $t_1$  se encontraría en la sección  $x_2 = L - a(t_1 - t_0 - \Delta t)$  resultando entonces que

$$F\left(t_1 + \frac{x_2}{a}\right) = F\left(\frac{L}{a} + t_0 + \Delta t\right) = cte.$$

De acuerdo con lo anterior se deduce que  $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$  representa una onda de carga positiva que se propaga con dirección al depósito, de tal manera que para un observador que viaja en la misma dirección con velocidad  $-a$ , su magnitud permanecerá constante.

Una consideración similar con  $F\left(t + \frac{x}{a}\right) = 0$ , aceptando que solo existiera  $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ , conduce a la conclusión de que esta última función representa una onda de carga negativa que se propaga del depósito hacia el órgano de control, con un valor constante para un observador que viaja en la dirección  $+x$  con velocidad  $a$ .

Por otra parte, como la magnitud de la carga piezométrica  $H_0$  permanece constante en el depósito, de la ecuación (2.29) se obtiene para  $x = 0$  y el instante  $t$

$$f(t) = -F(t) \tag{2.31}$$

Además, si se considera una onda directa  $F$  que parte del órgano de control en el instante  $t$ , llega al depósito cuando  $t = t + \frac{L}{a}$ , y se refleja dando origen a una onda  $f$  con la misma magnitud pero con signo opuesto que viaja hacia el órgano al que llega en el instante  $t = t + \frac{2L}{a}$ , puede afirmarse que en la sección del conducto correspondiente a este último resulta válida la siguiente relación:

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \tag{2.32}$$

Es decir, la magnitud de la onda  $f$  en el órgano de control para el instante  $t$  es igual a la de la onda  $F$  con signo opuesto que partió del mismo con dirección al depósito  $\frac{2L}{a}$  segundos antes.

## 2.9. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

### 2.9.1 Método de las características

#### 2.9.1.1. Ecuaciones características

La base del método de las características consiste en transformar las ecuaciones diferenciales parciales de continuidad (ecuación 2.23), y dinámica (ecuación 2.25), en ecuaciones diferenciales ordinarias y posteriormente resolverlas mediante un esquema explícito de diferencias finitas. Las dos ecuaciones mencionadas se pueden escribir como

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (2.33)$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.34)$$

Si se lleva a cabo una combinación lineal de las ecuaciones (2.33) y (2.34), después de multiplicar por  $gA$  ambos miembros de la ecuación (2.34) se tendrá que  $L = L_1 + \lambda L_2$

Lo que da como resultado

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \lambda gA \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (2.35)$$

Si las funciones  $H=H(x, t)$  y  $Q=Q(x, t)$  son soluciones de las ecuaciones (2.33) y (2.34), las derivadas totales de estas funciones son

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.36)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.37)$$

Igualando el primer término de la ecuación (2.35) con la (2.37) y el segundo con la (2.36), se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dt} \quad (2.39)$$

de estas dos últimas ecuaciones se deduce que

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{dx}{dt} = \lambda a^2 \quad (2.40)$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{a} \quad (2.41)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (2.42)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (2.38), (2.39), (2.41) y (2.42) en la ecuación (2.35), resulta

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (2.43)$$

para

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (2.44)$$

y

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (2.45)$$

para

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (2.46)$$

Como puede verse, las ecuaciones diferenciales parciales (2.33) y (2.34) se han transformado en dos ecuaciones diferenciales ordinarias (2.43) y (2.45), que tienen como variable dependiente al tiempo  $t$ , y que resultan válidas siempre que sean satisfechas las ecuaciones (2.44) y (2.46)

respectivamente. Matemáticamente, las dos últimas ecuaciones representan en el plano  $x-t$  dos líneas rectas con pendiente igual a  $\frac{1}{a}$  y  $-\frac{1}{a}$  (figura 2.11), y se conocen como líneas características positiva  $m = \frac{1}{a}$  y negativa  $m = -\frac{1}{a}$ , a lo largo de las cuales se cumplen las ecuaciones (2.43) y (2.45), denominadas como ecuaciones de compatibilidad.

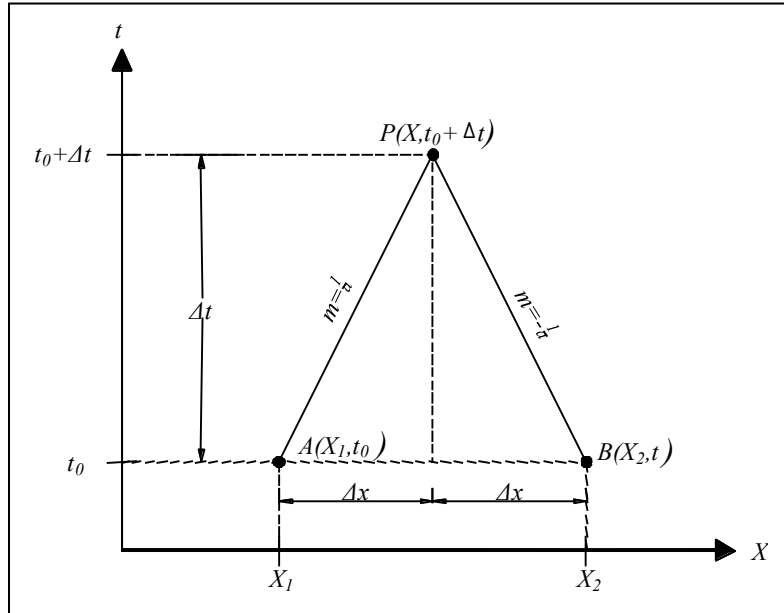


Figura 2.11. Líneas características en el plano  $x-t$ .

Físicamente representan la trayectoria recorrida por una perturbación iniciada en cualquier sección de una tubería; así, por ejemplo, si se considera un conducto por gravedad, como el que se muestra en la figura 2.12, cuyo órgano de control se somete a una determinada maniobra de cierre o apertura cuando  $t = t_0$ , en dicho instante se originará una onda de presión que partiendo del órgano de control, viaja hacia el depósito situado en el extremo aguas arriba, al que llegará en el instante  $t = t_0 + T/2$ .

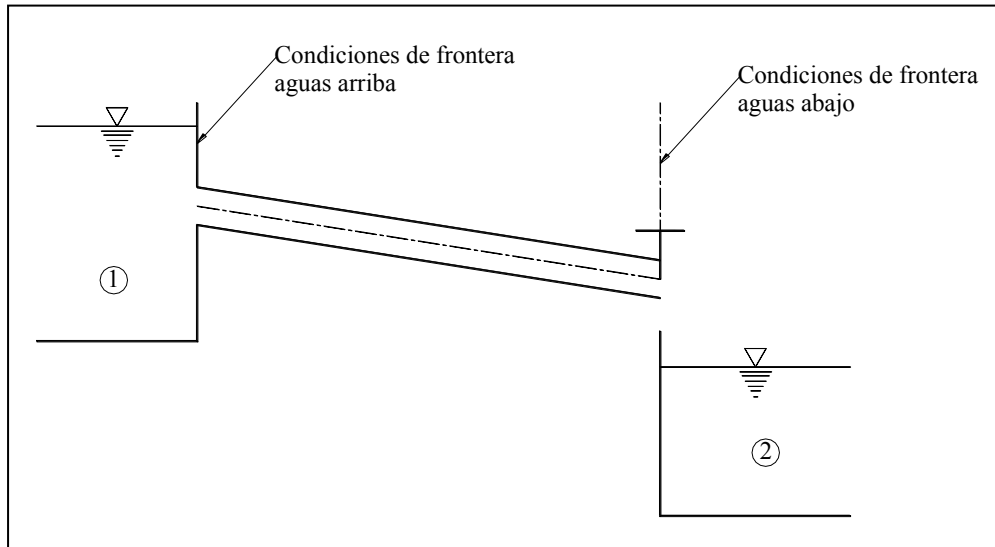


Figura 2.12. Conducto por gravedad.

Si la trayectoria de la onda mencionada se grafica en el plano  $x-t$ , se obtiene la representación que aparece en la figura 2.13, en esta figura se puede observar que las condiciones en la región I dependen solo de las del flujo permanente inicial, puesto que las correspondientes a las fronteras situadas en los extremos aguas arriba y aguas abajo no se modifican al permanecer constante el nivel de la superficie libre del agua en los depósitos 1 y 2 mientras que en la región II las condiciones dependen de las impuestas por el órgano de control. De acuerdo con esto puede afirmarse que las líneas características  $CE$  y  $DE$  dividen al plano  $x-t$  en dos regiones, para cada una de las cuales existe una solución.

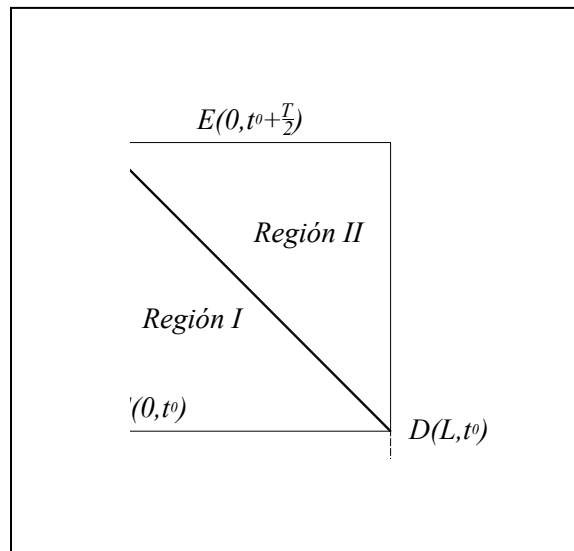


Figura 2.13. Conducto por gravedad con excitación en la frontera aguas abajo.



**2.9.1.2. Solución de ecuaciones características y de compatibilidad**

Con relación a la figura 2.11, si las condiciones del sistema hidráulico cuando  $t=t_0$  son las del flujo permanente inicial, y se conocen para cualquier sección  $x$  del conducto, tal que  $0 \leq x \leq L$ , el cálculo de las condiciones para el instante  $t_0 + \Delta T$  puede efectuarse mediante un esquema de diferencias finitas de primer orden, mismo que siguiendo la línea característica positiva  $AP$  permite escribir

$$dQ = Q_P - Q_A \quad (2.47)$$

y

$$dH = H_P - H_A \quad (2.48)$$

y al seguir la línea característica negativa  $BP$  resulta:

$$dQ = Q_P - Q_B \quad (2.49)$$

$$dH = H_P - H_B \quad (2.50)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.47) y (2.48) en la ecuación (2.43) y las ecuaciones (2.49) y (2.50) en la ecuación (2.45), realizando el cálculo del término de fricción en los puntos  $A$  y  $B$ , y después de hacer operaciones resulta

$$Q_P - Q_A + \frac{gA}{a}(H_P - H_A) + \frac{f\Delta t}{2DA} Q_A |Q_A| = 0 \quad (2.51)$$

y

$$Q_P - Q_B - \frac{gA}{a}(H_P - H_B) + \frac{f\Delta t}{2DA} Q_B |Q_B| = 0 \quad (2.52)$$

La ecuación (2.51) puede ser escrita como

$$Q_P = C_p - C_a H_P \quad (2.53)$$

y la ecuación (2.52) como

$$Q_P = C_n + C_a H_P \quad (2.54)$$

en las cuales

$$C_p = Q_A + \frac{gA}{a} H_A - \frac{f \Delta t}{2DA} Q_A |Q_A| \quad (2.55)$$

$$C_n = Q_B - \frac{gA}{a} H_B - \frac{f \Delta t}{2DA} Q_B |Q_B| \quad (2.56)$$

y

$$C_a = \frac{gA}{a} \quad (2.57)$$

Se observa que la ecuación (2.53) es válida a lo largo de la línea característica  $AP$  y la ecuación (2.54) a lo largo de la línea característica negativa  $BP$ . Los valores de las *constantes*  $C_p$  y  $C_n$  se pueden conocer para cada instante de tiempo, y la constante  $C_a$  depende de las propiedades del conducto. La ecuación (2.53) será referida como la *ecuación característica positiva* y la ecuación (2.54) como la *ecuación característica negativa*. En las ecuaciones (2.53) y (2.54), se tienen dos variables, llamadas,  $H_p$  y  $Q_p$ . Los valores de estas variables pueden ser determinados resolviendo simultáneamente estas ecuaciones.

$$Q_p = 0.5(C_p + C_n) \quad (2.58)$$

Ahora, el valor de  $H_p$  puede ser determinado con cualquiera de las ecuaciones (2.53) o (2.54).

Con el fin de explicar el uso de las ecuaciones (2.53) a (2.58), se considera el sistema mostrado en la figura 2.12, dividiendo la tubería de descarga en un número de tramos iguales con longitud  $\Delta x$ , tal como se muestra en la figura 2.14.

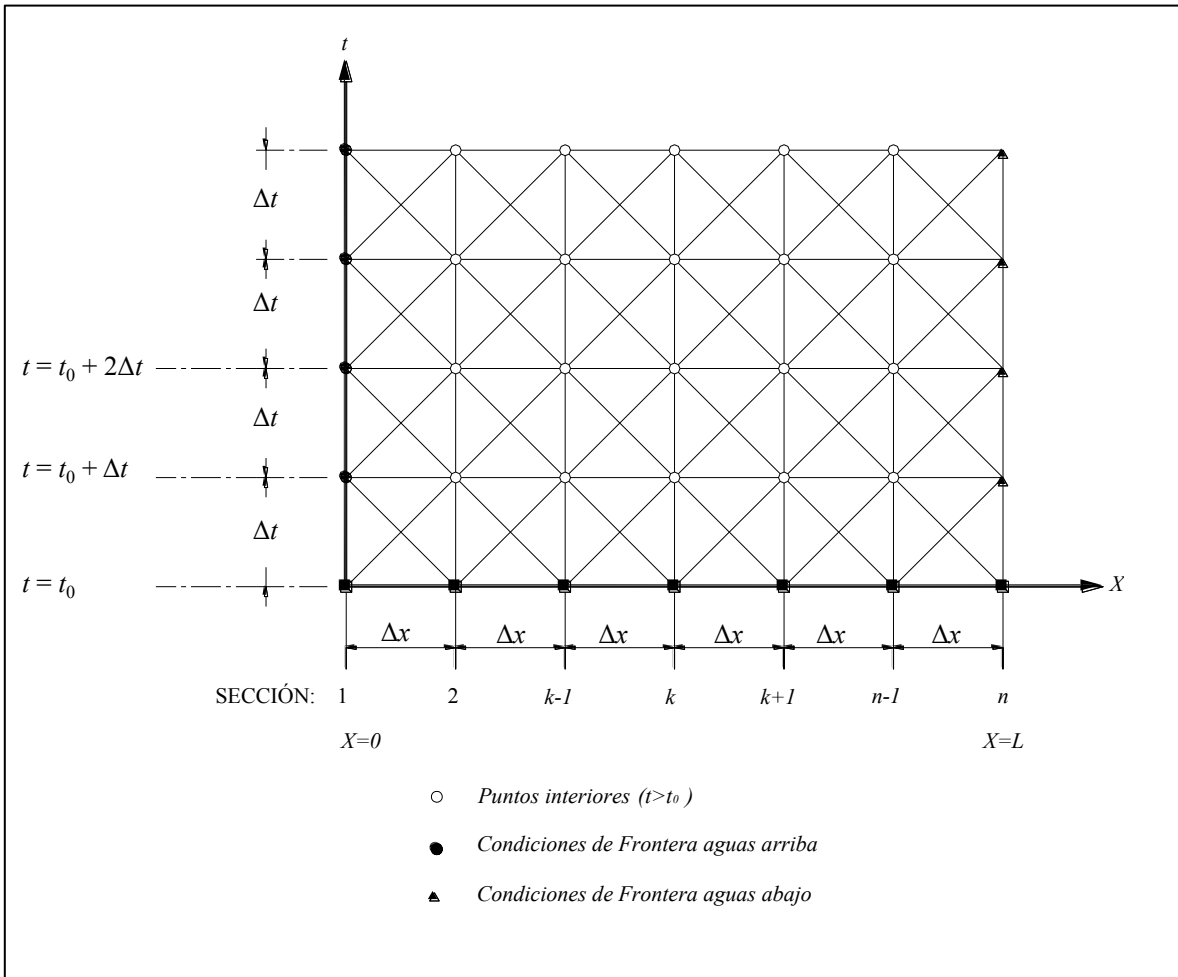


Figura 2.14. Malla empleada para la aplicación del método de las características.

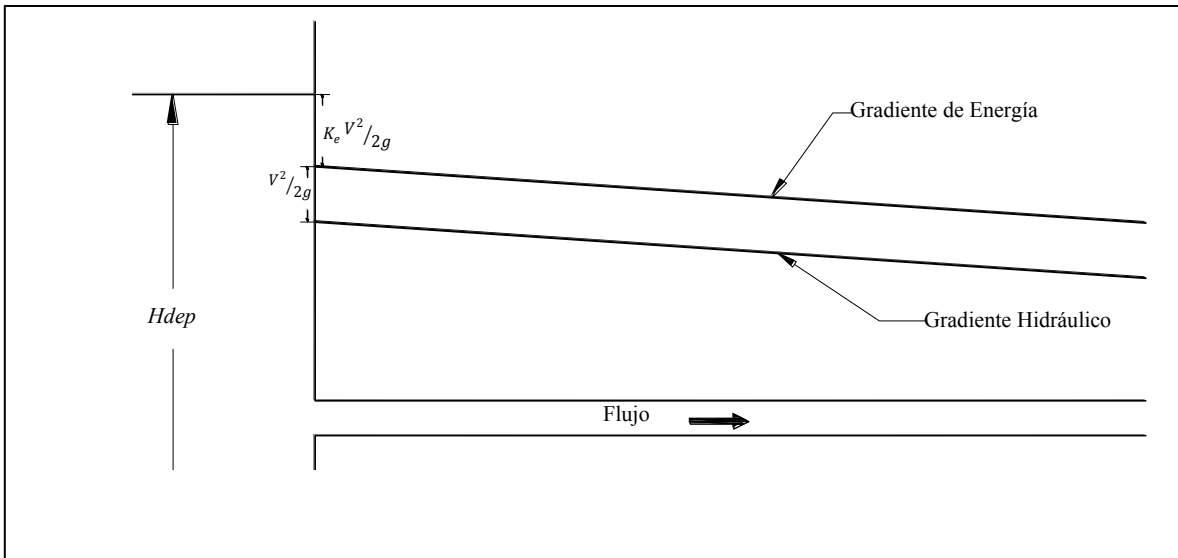
Una vez hecho lo anterior, se determinan en cada sección  $x$  los parámetros  $h_0$  y  $Q_0$  para las condiciones del flujo permanente inicial que tiene lugar en el sistema cuando  $t = t_0$ , y a partir de estos últimos se lleva a cabo el cálculo de  $h_p$  y  $Q_p$  en los puntos interiores para el instante  $t=t_0+\Delta T$ , tomando en cuenta las ecuaciones (2.53) a (2.58). Por lo que se refiere a las condiciones de frontera del sistema, éstas quedarán definidas por la ecuación (2.53) para la ubicada aguas abajo, y por la ecuación (2.54) para la que se encuentra aguas arriba, además de una ecuación adicional para cada frontera que permita establecer una relación entre  $h_p$  y  $Q_p$  en las mismas. Estas ecuaciones adicionales dependerán del tipo particular de frontera y serán establecidas en la siguiente sección para el caso en el que se encuentra nuestro dispositivo experimental.

**2.9.1.3. Condiciones de frontera**

- Depósito con nivel constante

Independientemente de la ubicación del depósito de almacenamiento, ya sea, aguas arriba o aguas abajo (figura 2.15), si las pérdidas locales por entrada, así como la carga de velocidad resultan despreciables comparadas con las de fricción, entonces

$$H_P = H_{dep} \tag{2.59}$$



**Figura 2.15. Depósito con nivel constante.**

En la cual  $H_{dep}$  es la carga medida a partir de la superficie libre del agua hasta el plano horizontal de comparación. La ecuación (2.54) para el depósito situado aguas arriba, puede ser escrita como

$$Q_P = C_n + C_a H_{dep} \tag{2.60}$$

Sin embargo, si la carga de velocidad o las pérdidas locales a la entrada no son despreciables, entonces, estas pudieran ser consideradas en el análisis como sigue.

Las pérdidas a la entrada están dadas por la ecuación

$$h_e = \frac{K Q_P^2}{2g A^2} \tag{2.61}$$

Donde  $K$  es el coeficiente de pérdidas por entrada. A partir de la figura 2.15 se tiene,

$$H_P = H_{dep} - (1 + K) \frac{Q_P^2}{2gA^2} \quad (2.62)$$

La solución simultánea de las ec. 2.62 y 2.54 resulta

$$Q_P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k_1(C_n + C_a H_{dep})}}{2K_1} \quad (2.63)$$

donde

$$k_1 = \frac{C_a(1 + K)}{2gA^2} \quad (2.64)$$

Ahora,  $H_P$  puede ser determinada con la ecuación (2.62).

- Válvula situada en el extremo final aguas abajo

El gasto que pasa por la válvula (figura 2.16) para condiciones de flujo permanente inicial está definido por la ecuación

$$Q_0 = (C_d A_v)_0 \sqrt{2gH_{0v}} \quad (2.65)$$

En la cual el subíndice 0 indica la condición en flujo permanente inicial,

$C_d$  = coeficiente de descarga,

$H_{0v}$  = carga aguas abajo de la válvula

$A_v$  = área de la válvula abierta

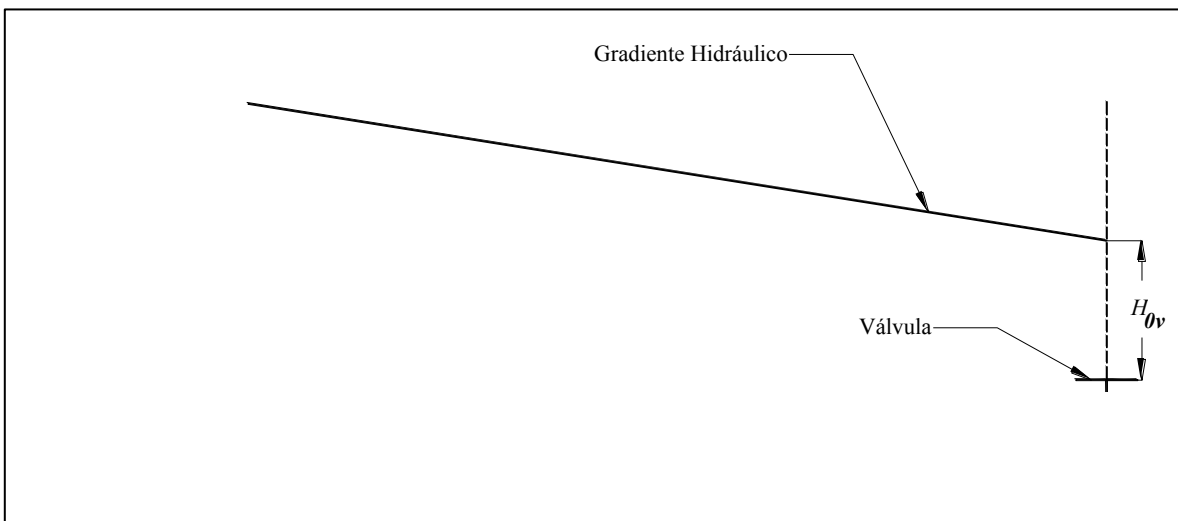


Figura 2.16. Válvula en el extremo final aguas abajo.

Una ecuación similar a la ecuación (2.65), puede ser escrita para el estado transitorio como

$$Q_P = (C_d A_v) \sqrt{2gH_P} \quad (2.66)$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (2.66) entre la ecuación (2.65), sacando raíz cuadrada a ambos lados y definiendo la relación  $\tau = (C_d A_v)/(C_d A_v)_0$ , obtenemos

$$Q_P^2 = \frac{(Q_0 \tau)^2}{H_{0v}} H_P \quad (2.67)$$

Sustituyendo de la ecuación característica positiva, ecuación (2.53), por  $H_P$  en la ecuación (2.67), resulta

$$Q_P^2 + C_v Q_P - C_p C_v = 0 \quad (2.68)$$

en la cual  $C_v = (\tau Q_0)^2 / (C_a H_{0v})$ . Resolviendo para  $Q_P$  y despreciando la raíz negativa, tenemos

$$Q_P = 0.5 \left( -C_v + \sqrt{C_v^2 + 4C_p C_v} \right) \quad (2.69)$$

Por su parte,  $H_P$  puede ser determinado con la ecuación (2.53).

Para calcular las condiciones en estado transitorio para un cierre de válvula, la curva  $\tau-t$  (figura 2.17), puede ser planteada con cualquiera de las formas, ya sea tabular o con una expresión algebraica. Notemos que  $\tau = 1$  corresponde a la válvula totalmente abierta, en la cual el gasto que pasa a través de ella es  $Q_0$  bajo una carga de  $H_0$ .

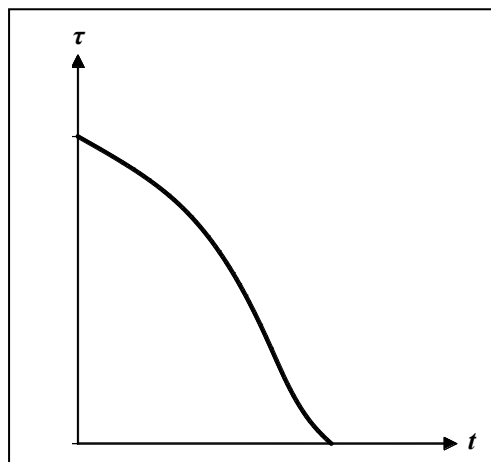


Figura 2.17. Cierre de válvula.

#### 2.9.1.4. Condiciones de estabilidad y convergencia

Con relación al esquema de cálculo que se vio en la sección anterior, se dice que es convergente si la solución de las ecuaciones expresadas en términos de diferencias finitas se aproxima a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales originales conforme los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero. Si el error de redondeo debido a la representación de números irracionales por un número finito de dígitos significantes, aumenta en la solución del esquema de cálculo, se dice entonces que es inestable y, en caso contrario se denomina estable; así mismo, se ha podido comprobar que la convergencia de un esquema implica su estabilidad y viceversa.

Un criterio recomendable para la convergencia y estabilidad de las ecuaciones en diferencias finitas para el caso de sistemas simples, tales como los que tienen conductos con características geométricas y elásticas constantes, es el siguiente (ver figuras 2.11 y 2.14)

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{a} \quad (2.70)$$

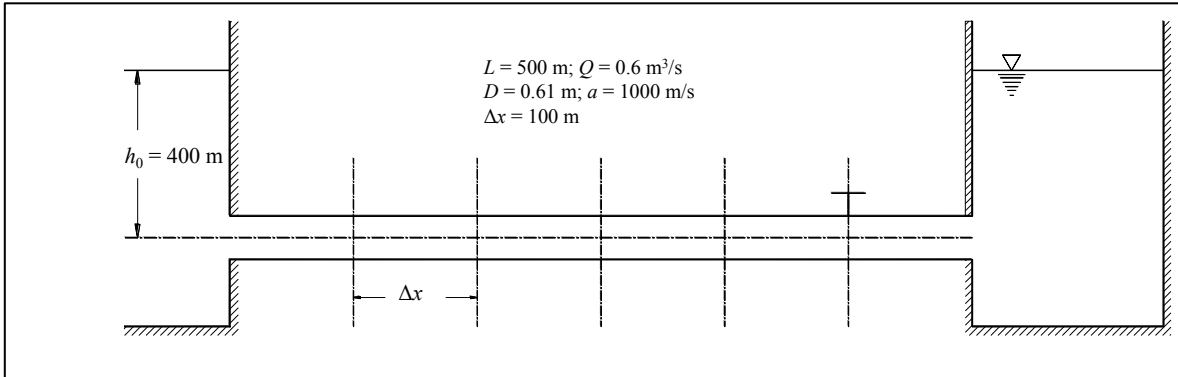
Las soluciones al esquema de diferencias finitas con mayor precisión que se pueden obtener, se dan si se satisface el criterio de convergencia de la ecuación (2.70). De este modo, el criterio de convergencia y/o estabilidad para las ecuaciones de diferencias finitas (ecuaciones 2.51 y 2.52) está dado por la expresión

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a} \quad (2.71)$$

La expresión anterior es conocida como *Condición de estabilidad de Courant*.

**2.9.1.5. Ejemplo**

El ejemplo que a continuación se presenta consiste en determinar las cargas y los gastos a lo largo de los 5 primeros segundos, para la tubería mostrada en la figura 2.18, considerando  $\Delta x = 100$  m y  $f = 0.016$ .



**Figura 2.18.**

**Solución:**

*Condiciones iniciales para flujo establecido*

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0.61)^2}{4} = 0.292 \text{ m}^2 \quad \therefore \quad V = \frac{0.6}{0.292} \text{ m/s}$$

$$h_{f_{500\text{m}}} = 0.016 \left( \frac{500}{0.61} \right) \left( \frac{2.054^2}{19.62} \right) = 2.82 \text{ m} \quad \therefore \quad h_{f_{100\text{m}}} = 0.564 \text{ m (por } \frac{c}{100 \text{ m}})$$

$$h_0 = 400 \text{ m}$$

$$h_1 = 400 - 0.56 = 399.44 \text{ m}$$

$$h_2 = h_1 - 0.56 = 398.88 \text{ m}$$

$$h_3 = h_2 - 0.56 = 398.32 \text{ m}$$

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_4 = h_3 - 0.56 = 397.76 \text{ m}$$

$$h_5 = h_4 - 0.56 = 397.20 \text{ m}$$

$$C_a = \frac{gA}{a} = \frac{9.81(0.292)}{1000} = 0.00286$$



$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a} = \frac{100}{1000} = 0.1 \text{ s}$$

$$F = \frac{f\Delta t}{2DA} = \frac{0.016(0.1)}{2(0.61)(0.292)} = 0.00449$$

$$C_{P_i} = Q_{i-1} + 0.00286h_{i-1} - 0.00449Q_{i-1}|Q_{i-1}| \quad (\text{I})$$

$$C_{n_i} = Q_{i+1} - 0.00286h_{i+1} - 0.00449Q_{i+1}|Q_{i+1}| \quad (\text{II})$$

### Puntos interiores

$$Q_i = \frac{C_{P_i} + C_{n_i}}{2} \quad (\text{III})$$

$$h_i = \frac{C_{P_i} - C_{n_i}}{2C_a} = 174.825(C_{P_i} - C_{n_i}) \quad (\text{IV})$$

### Condiciones de Frontera

Extremo inicial (0),  $h_0 = 400 \text{ m} = \text{cte.}$

$$C_P = C_n + 2C_a h_0 = C_n + 2(0.00286)(400) = C_n + 2.288$$

$$\therefore Q_P = Q_0 = C_n + C_a h_0 = C_n + 0.00286(400) = C_n + 1.144 \quad (\text{V})$$

### Extremo final (5)

$$h_{P_5} = \frac{C_P - Q_P}{C_a} = \frac{C_P - Q_P}{0.00286} = 349.65(C_{P_5} - Q_5) \quad (\text{VI})$$

$$Q_5 = 0.6 - 0.375(t) ; 0 \leq t < 1.6$$

$$Q_5 = 0 ; t \geq 1.6$$

Las ecuaciones para determinar el gasto  $Q$  y la carga  $h$ , para el instante de tiempo de 0.1 segundos son para  $t = 0.1 \text{ s}$  e  $i = 0$

Para  $t = 0.1 \text{ s}$  e  $i = 0$

$$h_0 = 400 \text{ m}, Q_0 = 0.6 = C_n + 1.144 \therefore C_{n_0} = 0.6 - 1.144, \quad C_{n_0} = -0.544$$

$$\text{Entonces: } h_0 = 400 \text{ m, } Q_0 = 0.6 \text{ m}^3/\text{s, } C_{n_0} = -0.544$$

Para  $i = 1$

$$C_{P_1} = 0.6 + 0.00286(400) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{P_1} = 1.745$$

$$C_{n_1} = Q_{2,0} - 0.00286h_{2,0} - 0.00449Q_{2,0}|Q_{2,0}|$$

$$C_{n_1} = 0.6 - 0.00286(398.88) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{n_1} = -0.545$$

$$Q_{P_1} = \frac{C_{P_1} + C_{n_1}}{2} = \frac{1.745 + (-0.545)}{2}; \quad Q_{P_1} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{P_1} = 174.83(C_{P_1} - C_{n_1}); \quad h_{P_1} = 174.83(1.745 - (-0.545)); \quad h_{P_1} = 399.44 \text{ m}$$

Para  $i = 2$

$$C_{P_2} = 0.6 + 0.00286(399.44) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{P_2} = 1.744$$

$$C_{n_2} = 0.6 - 0.00286(398.31) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{n_2} = -0.544$$

$$Q_{P_2} = \frac{C_{P_2} + C_{n_2}}{2} = \frac{1.744 + (-0.544)}{2}; \quad Q_{P_2} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{P_2} = 174.83(C_{P_2} - C_{n_2}); \quad h_{P_2} = 174.83(1.744 - (-0.544)); \quad h_{P_2} = 398.87 \text{ m}$$

Para  $i = 3$

$$C_{P_3} = 0.6 + 0.00286(398.88) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{P_3} = 1.739$$

$$C_{n_3} = 0.6 - 0.00286(397.76) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{n_3} = -0.539$$

$$Q_{P_3} = \frac{C_{P_3} + C_{n_3}}{2} = \frac{1.739 + (-0.539)}{2}; \quad Q_{P_3} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{P_3} = 174.83(C_{P_3} - C_{n_3}); \quad h_{P_3} = 174.83(1.739 - (-0.539)); \quad h_{P_3} = 398.31 \text{ m}$$

Para  $i = 4$

$$C_{P_4} = 0.6 + 0.00286(398.32) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{P_4} = 1.738$$

$$C_{n_4} = 0.6 - 0.00286(397.20) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{n_4} = -0.538$$

$$Q_{P_4} = \frac{C_{P_4} + C_{n_4}}{2} = \frac{1.738 + (-0.538)}{2}; \quad Q_{P_4} = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{P_4} = 174.83(C_{P_4} - C_{n_4}); \quad h_{P_4} = 174.83(1.738 - (-0.538)); \quad h_{P_4} = 397.75 \text{ m}$$

Para  $i = 5$

$$C_{P_5} = 0.6 + 0.00286(397.75) - 0.00449(0.6)|0.6|; \quad C_{P_5} = 1.739$$

$$Q_{P_5} = 0.6 - 0.375(0.1) = 0.563 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{P_5} = 348.80(1.739 - 0.563); \quad h_{P_5} = 410.26 \text{ m}$$

En la tabla 2.3 se muestran los resultados y las figuras 2.19 a 2.24. se presentan las gráficas de la variación en la carga piezométrica.

Tabla 2.3. Tabla de resultados del ejemplo de aplicación del método de las características

| <i>i</i>    | 0                     | 1                     |                       | 2                     |                       | 3                     |                       | 4                     |                       | 5                     | 0                    | 1                    |                      | 2                    |                      | 3                    |                      | 4                    |                      | 5                    |                      |                      |
|-------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <i>t(s)</i> | <i>Cn<sub>0</sub></i> | <i>Cp<sub>1</sub></i> | <i>Cn<sub>1</sub></i> | <i>Cp<sub>2</sub></i> | <i>Cn<sub>2</sub></i> | <i>Cp<sub>3</sub></i> | <i>Cn<sub>3</sub></i> | <i>Cp<sub>4</sub></i> | <i>Cn<sub>4</sub></i> | <i>Cp<sub>5</sub></i> | <i>h<sub>0</sub></i> | <i>Q<sub>0</sub></i> | <i>h<sub>1</sub></i> | <i>Q<sub>1</sub></i> | <i>h<sub>2</sub></i> | <i>Q<sub>2</sub></i> | <i>h<sub>3</sub></i> | <i>Q<sub>3</sub></i> | <i>h<sub>4</sub></i> | <i>Q<sub>4</sub></i> | <i>h<sub>5</sub></i> | <i>Q<sub>5</sub></i> |
| 0           | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 0                     | 400                  | 0.6                  | 399.44               | 0.6                  | 398.87               | 0.6                  | 398.31               | 0.6                  | 397.75               | 0.6                  | 397.18               | 0.6                  |
| 0.1         | -0.547                | 1.745                 | -0.545                | 1.744                 | -0.544                | 1.742                 | -0.542                | 1.740                 | -0.540                | 1.739                 | 400.00               | 0.600                | 399.44               | 0.600                | 398.87               | 0.600                | 398.31               | 0.600                | 397.75               | 0.600                | 410.26               | 0.563                |
| 0.2         | -0.547                | 1.745                 | -0.545                | 1.744                 | -0.544                | 1.742                 | -0.542                | 1.740                 | -0.615                | 1.739                 | 400.00               | 0.600                | 399.44               | 0.600                | 398.87               | 0.600                | 398.31               | 0.600                | 410.79               | 0.563                | 423.34               | 0.525                |
| 0.3         | -0.547                | 1.745                 | -0.545                | 1.744                 | -0.544                | 1.742                 | -0.617                | 1.740                 | -0.690                | 1.739                 | 400.00               | 0.600                | 399.44               | 0.600                | 398.87               | 0.600                | 411.32               | 0.563                | 423.84               | 0.525                | 436.49               | 0.488                |
| 0.4         | -0.547                | 1.745                 | -0.545                | 1.744                 | -0.618                | 1.742                 | -0.691                | 1.741                 | -0.765                | 1.739                 | 400.00               | 0.600                | 399.44               | 0.600                | 411.85               | 0.563                | 424.34               | 0.525                | 436.96               | 0.488                | 449.63               | 0.450                |
| 0.5         | -0.547                | 1.745                 | -0.619                | 1.744                 | -0.692                | 1.742                 | -0.766                | 1.741                 | -0.840                | 1.739                 | 400.00               | 0.600                | 412.38               | 0.563                | 424.84               | 0.526                | 437.43               | 0.488                | 450.07               | 0.450                | 462.84               | 0.413                |
| 0.6         | -0.621                | 1.745                 | -0.694                | 1.744                 | -0.767                | 1.742                 | -0.841                | 1.741                 | -0.915                | 1.740                 | 400.00               | 0.526                | 425.33               | 0.526                | 437.89               | 0.488                | 450.52               | 0.451                | 463.26               | 0.413                | 476.04               | 0.375                |
| 0.7         | -0.695                | 1.672                 | -0.768                | 1.744                 | -0.842                | 1.743                 | -0.916                | 1.741                 | -0.990                | 1.740                 | 400.00               | 0.452                | 425.48               | 0.452                | 450.96               | 0.451                | 463.67               | 0.413                | 476.43               | 0.375                | 489.30               | 0.338                |
| 0.8         | -0.769                | 1.598                 | -0.843                | 1.671                 | -0.917                | 1.743                 | -0.991                | 1.742                 | -1.066                | 1.741                 | 400.00               | 0.378                | 425.62               | 0.378                | 451.24               | 0.377                | 476.82               | 0.376                | 489.67               | 0.338                | 502.54               | 0.300                |
| 0.9         | -0.843                | 1.524                 | -0.917                | 1.597                 | -0.992                | 1.670                 | -1.066                | 1.742                 | -1.141                | 1.741                 | 400.00               | 0.303                | 425.75               | 0.303                | 451.49               | 0.303                | 477.21               | 0.302                | 502.89               | 0.301                | 515.84               | 0.263                |
| 1           | -0.918                | 1.450                 | -0.992                | 1.523                 | -1.067                | 1.597                 | -1.142                | 1.670                 | -1.217                | 1.742                 | 400.00               | 0.229                | 425.87               | 0.229                | 451.73               | 0.228                | 477.56               | 0.228                | 503.37               | 0.226                | 529.12               | 0.225                |
| 1.1         | -0.992                | 1.376                 | -1.067                | 1.450                 | -1.142                | 1.523                 | -1.217                | 1.596                 | -1.292                | 1.669                 | 400.00               | 0.154                | 425.97               | 0.154                | 451.94               | 0.154                | 477.88               | 0.153                | 503.79               | 0.152                | 516.86               | 0.188                |
| 1.2         | -1.067                | 1.301                 | -1.142                | 1.375                 | -1.217                | 1.449                 | -1.292                | 1.523                 | -1.294                | 1.596                 | 400.00               | 0.080                | 426.07               | 0.080                | 452.13               | 0.079                | 478.16               | 0.079                | 491.39               | 0.114                | 504.50               | 0.150                |
| 1.3         | -1.142                | 1.226                 | -1.217                | 1.301                 | -1.292                | 1.375                 | -1.295                | 1.449                 | -1.296                | 1.523                 | 400.00               | 0.005                | 426.16               | 0.005                | 452.30               | 0.004                | 465.64               | 0.040                | 478.88               | 0.076                | 491.99               | 0.113                |
| 1.4         | -1.217                | 1.152                 | -1.292                | 1.226                 | -1.295                | 1.301                 | -1.296                | 1.375                 | -1.298                | 1.449                 | 400.00               | -0.070               | 426.23               | -0.070               | 439.67               | -0.034               | 453.02               | 0.002                | 466.26               | 0.039                | 479.39               | 0.075                |
| 1.5         | -1.292                | 1.077                 | -1.295                | 1.152                 | -1.296                | 1.226                 | -1.298                | 1.301                 | -1.299                | 1.375                 | 400.00               | -0.146               | 413.52               | -0.109               | 426.96               | -0.072               | 440.29               | -0.036               | 453.53               | 0.001                | 466.66               | 0.037                |
| 1.6         | -1.294                | 1.001                 | -1.296                | 1.077                 | -1.298                | 1.152                 | -1.299                | 1.226                 | -1.300                | 1.301                 | 400.00               | -0.148               | 400.74               | -0.148               | 414.14               | -0.111               | 427.47               | -0.074               | 440.69               | -0.037               | 453.83               | 0.000                |
| 1.7         | -1.296                | 0.999                 | -1.298                | 1.001                 | -1.299                | 1.077                 | -1.300                | 1.152                 | -1.301                | 1.226                 | 400.00               | -0.150               | 400.63               | -0.149               | 401.27               | -0.149               | 414.55               | -0.112               | 427.77               | -0.075               | 427.80               | 0.000                |
| 1.8         | -1.298                | 0.997                 | -1.299                | 0.999                 | -1.300                | 1.002                 | -1.301                | 1.077                 | -1.226                | 1.152                 | 400.00               | -0.151               | 400.53               | -0.151               | 401.05               | -0.151               | 401.58               | -0.150               | 401.67               | -0.075               | 401.72               | 0.000                |
| 1.9         | -1.299                | 0.996                 | -1.300                | 0.997                 | -1.301                | 0.999                 | -1.226                | 1.002                 | -1.152                | 1.077                 | 400.00               | -0.152               | 400.42               | -0.152               | 400.84               | -0.152               | 388.19               | -0.114               | 375.55               | -0.075               | 375.56               | 0.000                |
| 2           | -1.300                | 0.994                 | -1.301                | 0.996                 | -1.226                | 0.997                 | -1.152                | 0.999                 | -1.077                | 1.002                 | 400.00               | -0.153               | 400.31               | -0.153               | 387.56               | -0.115               | 374.82               | -0.077               | 362.08               | -0.039               | 349.39               | 0.000                |
| 2.1         | -1.301                | 0.994                 | -1.226                | 0.995                 | -1.152                | 0.996                 | -1.077                | 0.998                 | -1.002                | 0.999                 | 400.00               | -0.154               | 387.15               | -0.116               | 374.31               | -0.079               | 361.46               | -0.040               | 348.66               | -0.002               | 348.61               | 0.000                |
| 2.2         | -1.226                | 0.993                 | -1.152                | 0.994                 | -1.077                | 0.995                 | -1.002                | 0.996                 | -0.999                | 0.998                 | 400.00               | -0.079               | 374.01               | -0.079               | 361.06               | -0.042               | 348.15               | -0.004               | 347.99               | -0.002               | 347.94               | 0.000                |
| 2.3         | -1.152                | 1.067                 | -1.077                | 0.993                 | -1.002                | 0.994                 | -0.999                | 0.995                 | -0.998                | 0.996                 | 400.00               | -0.005               | 373.92               | -0.005               | 347.86               | -0.004               | 347.59               | -0.003               | 347.43               | -0.001               | 347.38               | 0.000                |
| 2.4         | -1.077                | 1.142                 | -1.002                | 1.067                 | -0.999                | 0.993                 | -0.998                | 0.994                 | -0.996                | 0.995                 | 400.00               | 0.070                | 373.85               | 0.070                | 360.44               | 0.034                | 347.14               | -0.002               | 346.97               | -0.001               | 346.92               | 0.000                |

Tabla 2.3. Tabla de resultados del ejemplo de aplicación del método de las características (Continuación)

| <i>i</i>     | 0                     | 1                     |                       | 2                     |                       | 3                     |                       | 4                     |                       | 5                     | 0                    | 1                    |                      | 2                    |                      | 3                    |                      | 4                    |                      | 5                    |                      |                      |
|--------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <i>t</i> (s) | <i>C<sub>n0</sub></i> | <i>C<sub>p1</sub></i> | <i>C<sub>n1</sub></i> | <i>C<sub>p2</sub></i> | <i>C<sub>n2</sub></i> | <i>C<sub>p3</sub></i> | <i>C<sub>n3</sub></i> | <i>C<sub>p4</sub></i> | <i>C<sub>n4</sub></i> | <i>C<sub>p5</sub></i> | <i>h<sub>0</sub></i> | <i>Q<sub>0</sub></i> | <i>h<sub>1</sub></i> | <i>Q<sub>1</sub></i> | <i>h<sub>2</sub></i> | <i>Q<sub>2</sub></i> | <i>h<sub>3</sub></i> | <i>Q<sub>3</sub></i> | <i>h<sub>4</sub></i> | <i>Q<sub>4</sub></i> | <i>h<sub>5</sub></i> | <i>Q<sub>5</sub></i> |
| 2.5          | -1.002                | 1.217                 | -0.999                | 1.142                 | -0.998                | 1.067                 | -0.996                | 0.993                 | -0.995                | 0.994                 | 400.00               | 0.145                | 386.53               | 0.109                | 373.12               | 0.072                | 359.83               | 0.036                | 346.63               | -0.001               | 346.57               | 0.000                |
| 2.6          | -0.999                | 1.292                 | -0.998                | 1.217                 | -0.996                | 1.142                 | -0.995                | 1.067                 | -0.994                | 0.993                 | 400.00               | 0.147                | 399.26               | 0.147                | 385.90               | 0.110                | 372.61               | 0.074                | 359.43               | 0.037                | 346.34               | 0.000                |
| 2.7          | -0.998                | 1.294                 | -0.996                | 1.292                 | -0.995                | 1.217                 | -0.994                | 1.142                 | -0.993                | 1.067                 | 400.00               | 0.149                | 399.37               | 0.149                | 398.74               | 0.149                | 385.49               | 0.112                | 372.32               | 0.074                | 372.27               | 0.000                |
| 2.8          | -0.996                | 1.296                 | -0.995                | 1.294                 | -0.994                | 1.292                 | -0.993                | 1.217                 | -1.067                | 1.142                 | 400.00               | 0.151                | 399.47               | 0.151                | 398.95               | 0.150                | 398.43               | 0.149                | 398.33               | 0.075                | 398.28               | 0.000                |
| 2.9          | -0.995                | 1.297                 | -0.994                | 1.296                 | -0.993                | 1.294                 | -1.067                | 1.291                 | -1.142                | 1.217                 | 400.00               | 0.152                | 399.58               | 0.152                | 399.16               | 0.151                | 411.78               | 0.113                | 424.38               | 0.075                | 424.38               | 0.000                |
| 3            | -0.994                | 1.299                 | -0.993                | 1.297                 | -1.067                | 1.296                 | -1.142                | 1.294                 | -1.217                | 1.291                 | 400.00               | 0.153                | 399.69               | 0.153                | 412.40               | 0.115                | 425.10               | 0.077                | 437.81               | 0.039                | 450.46               | 0.000                |
| 3.1          | -0.993                | 1.300                 | -1.067                | 1.299                 | -1.142                | 1.297                 | -1.217                | 1.296                 | -1.291                | 1.294                 | 400.00               | 0.154                | 412.81               | 0.116                | 425.61               | 0.078                | 438.43               | 0.040                | 451.18               | 0.002                | 451.25               | 0.000                |
| 3.2          | -1.067                | 1.300                 | -1.142                | 1.300                 | -1.217                | 1.298                 | -1.291                | 1.297                 | -1.294                | 1.296                 | 400.00               | 0.079                | 425.91               | 0.079                | 438.83               | 0.041                | 451.69               | 0.004                | 451.86               | 0.002                | 451.90               | 0.000                |
| 3.3          | -1.142                | 1.226                 | -1.217                | 1.300                 | -1.291                | 1.300                 | -1.294                | 1.298                 | -1.296                | 1.297                 | 400.00               | 0.005                | 426.01               | 0.005                | 451.98               | 0.004                | 452.26               | 0.003                | 452.41               | 0.001                | 452.47               | 0.000                |
| 3.4          | -1.217                | 1.152                 | -1.291                | 1.226                 | -1.294                | 1.300                 | -1.296                | 1.300                 | -1.297                | 1.298                 | 400.00               | -0.070               | 426.07               | -0.070               | 439.45               | -0.034               | 452.70               | 0.002                | 452.87               | 0.001                | 452.92               | 0.000                |
| 3.5          | -1.291                | 1.077                 | -1.294                | 1.152                 | -1.296                | 1.226                 | -1.297                | 1.300                 | -1.298                | 1.300                 | 400.00               | -0.145               | 413.43               | -0.108               | 426.79               | -0.072               | 440.06               | -0.036               | 453.21               | 0.001                | 453.27               | 0.000                |
| 3.6          | -1.294                | 1.002                 | -1.296                | 1.077                 | -1.297                | 1.152                 | -1.298                | 1.226                 | -1.300                | 1.300                 | 400.00               | -0.147               | 400.74               | -0.147               | 414.06               | -0.110               | 427.31               | -0.073               | 440.46               | -0.037               | 453.50               | 0.000                |
| 3.7          | -1.295                | 1.000                 | -1.297                | 1.002                 | -1.298                | 1.077                 | -1.299                | 1.152                 | -1.300                | 1.226                 | 400.00               | -0.149               | 400.63               | -0.149               | 401.26               | -0.148               | 414.47               | -0.111               | 427.60               | -0.074               | 427.65               | 0.000                |
| 3.8          | -1.297                | 0.998                 | -1.298                | 1.000                 | -1.299                | 1.002                 | -1.300                | 1.077                 | -1.226                | 1.152                 | 400.00               | -0.150               | 400.52               | -0.150               | 401.05               | -0.150               | 401.57               | -0.149               | 401.67               | -0.074               | 401.71               | 0.000                |
| 3.9          | -1.298                | 0.997                 | -1.299                | 0.998                 | -1.300                | 1.000                 | -1.226                | 1.003                 | -1.152                | 1.077                 | 400.00               | -0.151               | 400.42               | -0.151               | 400.83               | -0.151               | 388.26               | -0.113               | 375.70               | -0.075               | 375.69               | 0.000                |
| 4            | -1.299                | 0.995                 | -1.300                | 0.997                 | -1.226                | 0.998                 | -1.152                | 1.000                 | -1.077                | 1.003                 | 400.00               | -0.152               | 400.31               | -0.152               | 387.64               | -0.115               | 374.97               | -0.077               | 362.29               | -0.038               | 349.69               | 0.000                |
| 4.1          | -1.300                | 0.994                 | -1.226                | 0.995                 | -1.152                | 0.997                 | -1.077                | 0.998                 | -1.003                | 1.000                 | 400.00               | -0.153               | 387.23               | -0.116               | 374.46               | -0.078               | 361.68               | -0.040               | 348.97               | -0.002               | 348.90               | 0.000                |
| 4.2          | -1.226                | 0.994                 | -1.152                | 0.994                 | -1.077                | 0.996                 | -1.003                | 0.997                 | -1.000                | 0.998                 | 400.00               | -0.079               | 374.17               | -0.079               | 361.28               | -0.041               | 348.47               | -0.004               | 348.29               | -0.002               | 348.25               | 0.000                |
| 4.3          | -1.152                | 1.068                 | -1.077                | 0.994                 | -1.003                | 0.994                 | -1.000                | 0.996                 | -0.998                | 0.997                 | 400.00               | -0.005               | 374.06               | -0.005               | 348.18               | -0.004               | 347.89               | -0.003               | 347.75               | -0.001               | 347.68               | 0.000                |
| 4.4          | -1.077                | 1.142                 | -1.003                | 1.068                 | -1.000                | 0.994                 | -0.998                | 0.994                 | -0.997                | 0.996                 | 400.00               | 0.070                | 374.01               | 0.070                | 360.66               | 0.034                | 347.46               | -0.002               | 347.28               | -0.001               | 347.24               | 0.000                |
| 4.5          | -1.003                | 1.216                 | -1.000                | 1.142                 | -0.998                | 1.068                 | -0.997                | 0.994                 | -0.996                | 0.994                 | 400.00               | 0.144                | 386.61               | 0.108                | 373.29               | 0.072                | 360.05               | 0.035                | 346.95               | -0.001               | 346.88               | 0.000                |
| 4.6          | -1.000                | 1.291                 | -0.998                | 1.216                 | -0.997                | 1.142                 | -0.996                | 1.068                 | -0.994                | 0.994                 | 400.00               | 0.146                | 399.27               | 0.146                | 385.98               | 0.110                | 372.78               | 0.073                | 359.65               | 0.037                | 346.66               | 0.000                |
| 4.7          | -0.999                | 1.293                 | -0.997                | 1.291                 | -0.996                | 1.216                 | -0.994                | 1.142                 | -0.994                | 1.068                 | 400.00               | 0.148                | 399.37               | 0.148                | 398.74               | 0.148                | 385.58               | 0.111                | 372.48               | 0.074                | 372.42               | 0.000                |
| 4.8          | -0.997                | 1.295                 | -0.996                | 1.293                 | -0.995                | 1.291                 | -0.994                | 1.216                 | -1.068                | 1.142                 | 400.00               | 0.150                | 399.48               | 0.150                | 398.96               | 0.149                | 398.44               | 0.148                | 398.34               | 0.074                | 398.29               | 0.000                |
| 4.9          | -0.996                | 1.297                 | -0.995                | 1.295                 | -0.994                | 1.293                 | -1.068                | 1.291                 | -1.142                | 1.216                 | 400.00               | 0.151                | 399.58               | 0.151                | 399.17               | 0.150                | 411.70               | 0.113                | 424.23               | 0.074                | 424.25               | 0.000                |
| 5            | -0.995                | 1.298                 | -0.994                | 1.296                 | -1.068                | 1.295                 | -1.142                | 1.293                 | -1.216                | 1.291                 | 400.00               | 0.152                | 399.69               | 0.152                | 412.33               | 0.114                | 424.95               | 0.076                | 437.60               | 0.038                | 450.16               | 0.000                |

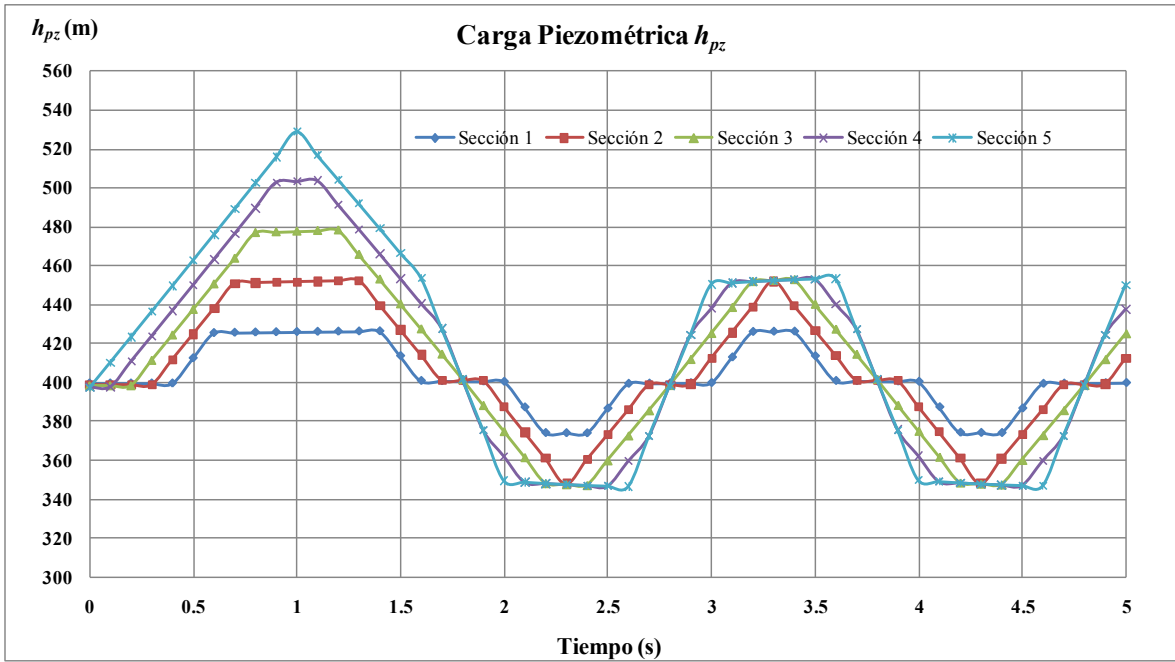


Figura 2.19.

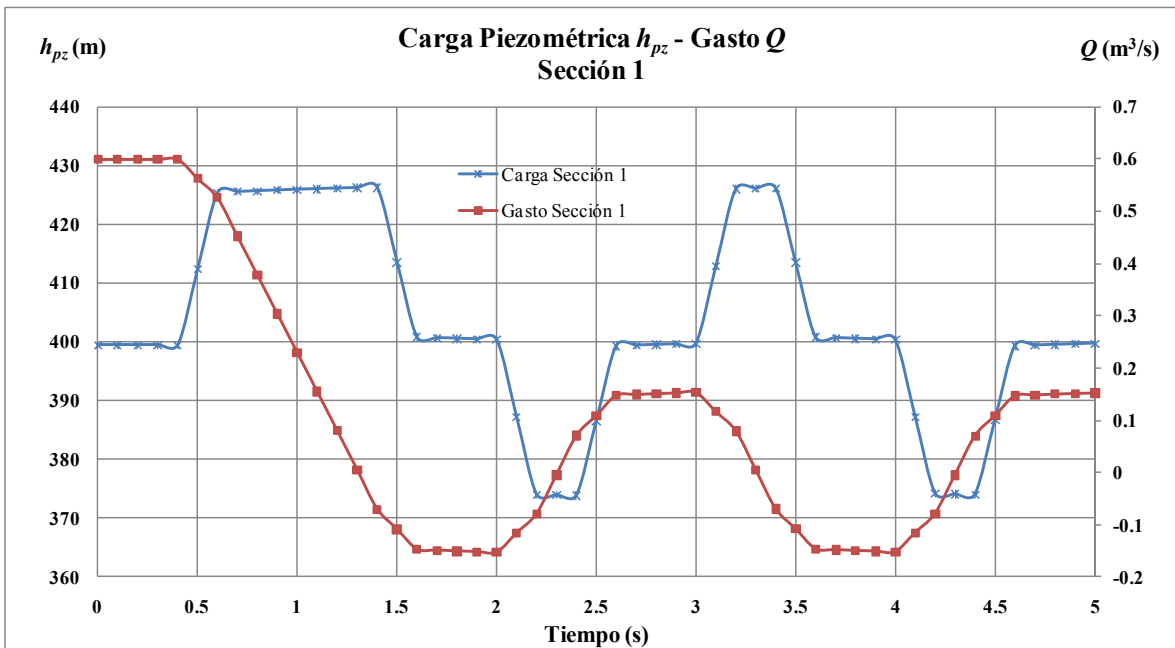


Figura 2.20.

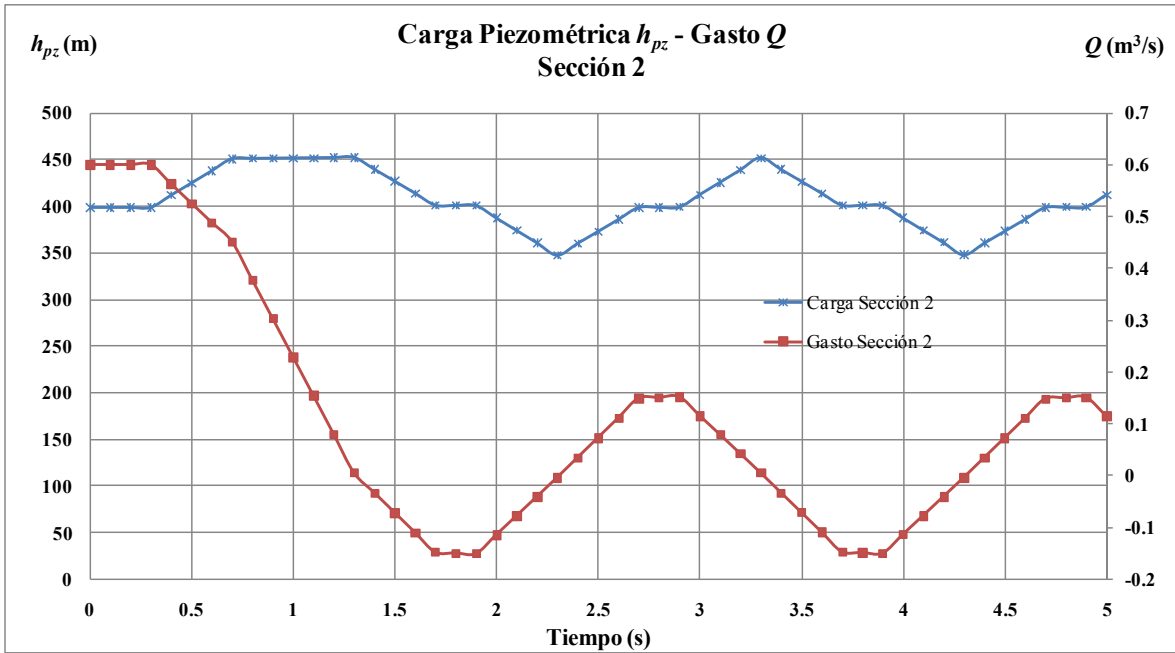


Figura 2.21.

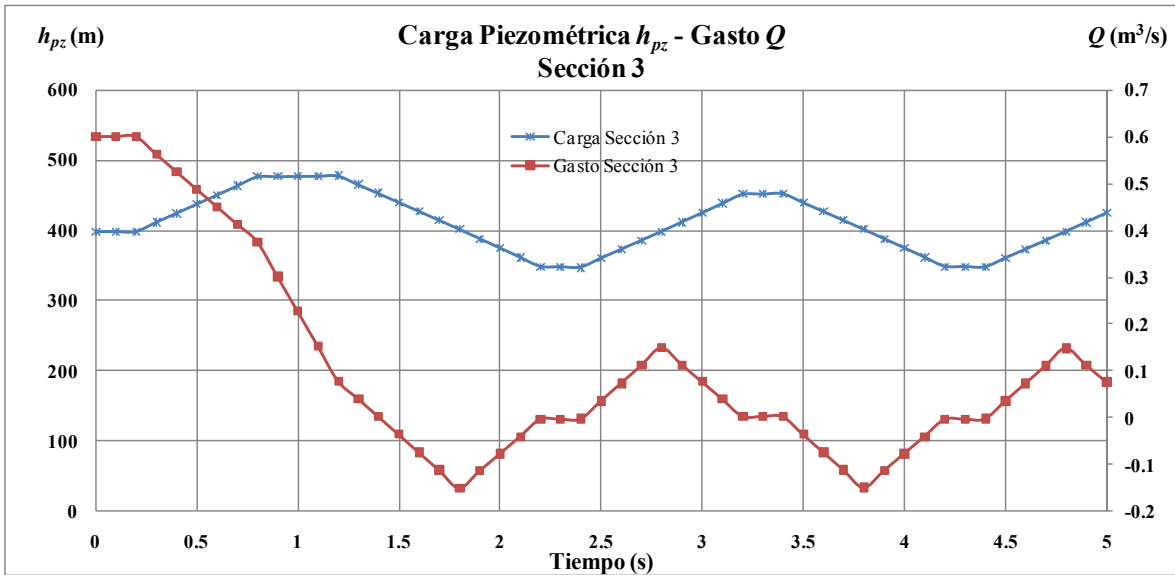


Figura 2.22.

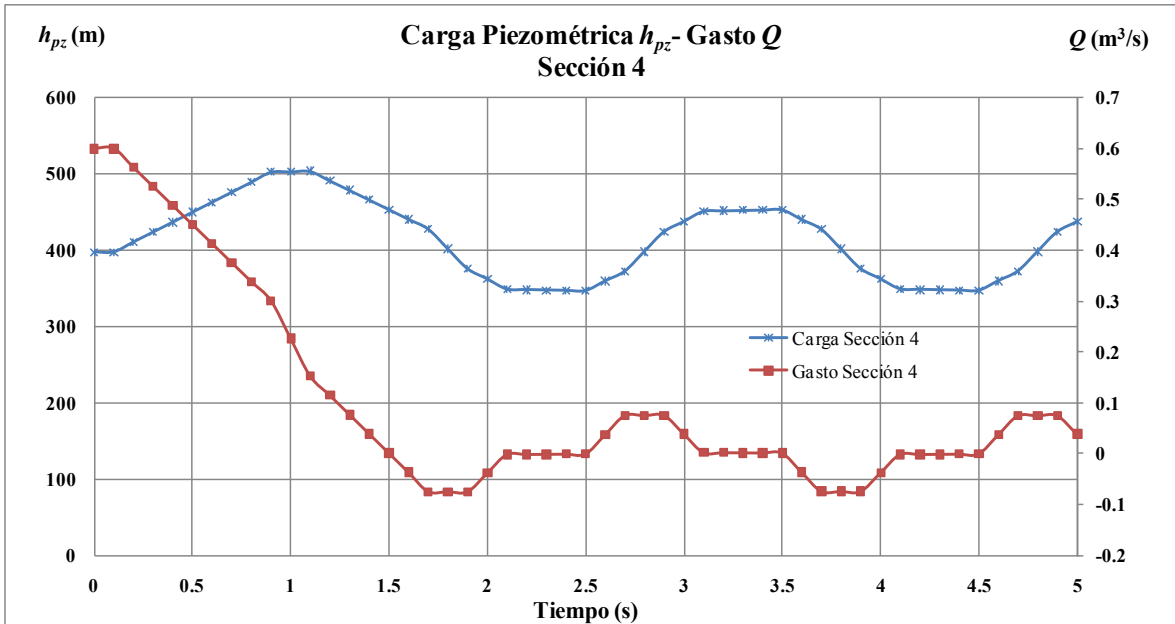


Figura 2.23.

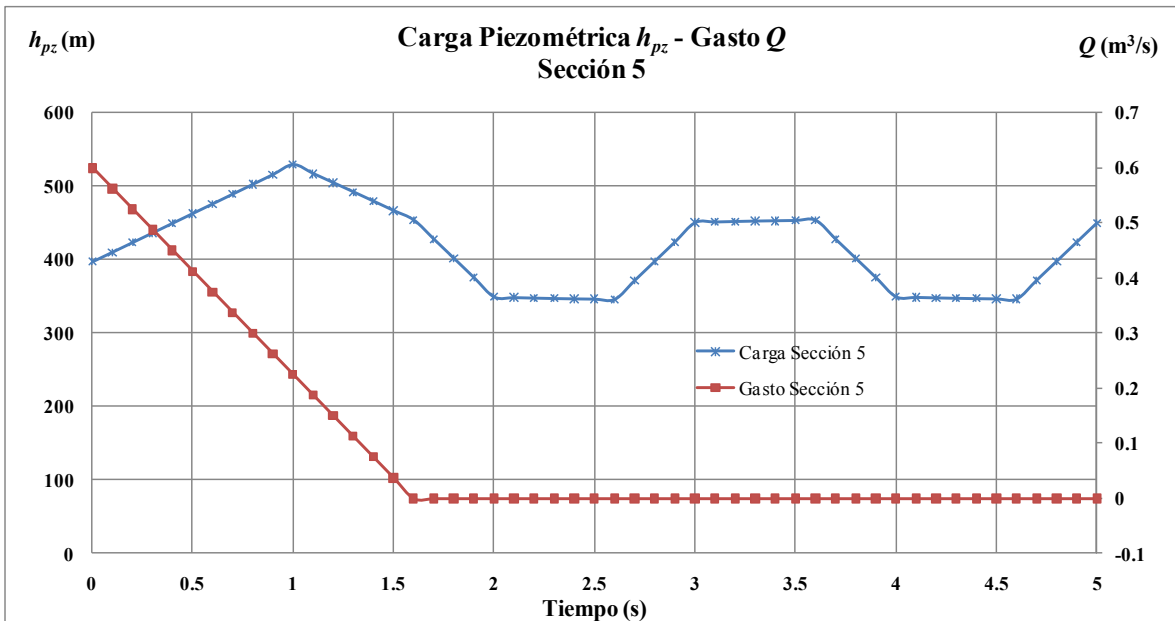


Figura 2.24.



## 2.9.1 Método de Allievi

### 2.9.1.2. Ecuaciones generales de Allievi

El conocimiento de las funciones  $F$  y  $f$  es difícil tenerlo a la mano para resolver un determinado problema, sin embargo, Allievi propuso un sistema de ecuaciones muy simple cuya solución permite calcular la variación de la carga piezométrica y la velocidad en la sección adyacente inmediatamente aguas arriba del órgano de control que se muestra en la figura 2.10. Si en las ecuaciones (2.29) y (2.29a) se hace  $x=L$ , resulta

$$H = H_0 + F\left(t + \frac{L}{a}\right) + f\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (2.72)$$

y

$$V = V_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t + \frac{L}{a}\right) - f\left(t - \frac{L}{a}\right)\right] \quad (2.73)$$

expresiones que se conocen con el nombre de *Ecuaciones de Allievi*.

Por otra parte, si se hace  $i = \frac{t}{T}$  la ecuación (2.32) puede escribirse como

$$f(iT) = -F[(i-1)T]$$

donde  $i$  es un número adimensional entero o fraccionario, además, si se define  $f(iT) = f_i$  y  $F[(i-1)T] = F_{i-1}$ , la ecuación anterior queda

$$f_i = -F_{i-1} \quad (2.74)$$

Al sustituir esta ecuación en la (2.72) para instantes  $i$  e  $i-1$  se obtiene

$$H_i = H_0 - F_{i-1} + F_i \quad (2.75)$$

y

$$H_{i-1} = H_0 - F_{i-2} + F_{i-1} \quad (2.76)$$

sumando miembro a miembro estas últimas ecuaciones y haciendo operaciones resulta

$$H_i + H_{i+1} - 2H_0 = F_i - F_{i-2} \quad (2.77)$$

Si se hace un razonamiento semejante con la ecuación (2.73) se llega a

$$\frac{a}{g}(V_{i-1} - V_i) = F_i - F_{i-2} \quad (2.78)$$

y al igualar las ecuaciones (2.77) y (2.78) resulta finalmente

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = \frac{a}{g}(V_{i-1} - V_i) \quad (2.79)$$

La ecuación anterior es la fórmula clásica de Allievi y permite llevar a cabo un desarrollo en cadena mediante el cual se puede obtener la carga piezométrica en la sección adyacente al órgano de control para el instante  $i$ , si se conoce su valor para el instante  $i-1$ , y el incremento de velocidad entre dichos instantes, mismo que estará determinado por la ley de cierre o apertura en el órgano de control que se analiza más adelante.

Es necesario subrayar que en la ecuación original de Allievi el valor de la carga piezométrica  $H$  que aparece en la ecuación (2.79), corresponde al de la carga de presión  $h_p$  en un conducto de eje horizontal; no obstante, esta última ecuación es válida para cualquier perfil del eje y se reduce a la de Allievi, si el plano horizontal de comparación se elige de tal manera que contenga al menos un punto del primero en la sección en estudio (figura 2.10), lo que da como resultado que en el órgano de control se tenga entonces  $H=h_p$ .

### 2.9.2.2. Desarrollo en cadenas de Allievi

Si se dividen ambos miembros de la ecuación (2.79) entre  $H_0$  se obtiene

$$\frac{H_i}{H_0} + \frac{H_{i-1}}{H_0} - \frac{2H_0}{H_0} = \frac{a}{gH_0}(V_{i-1} - V_i)$$

Al introducir el valor de  $V_0$  en el segundo miembro de la ecuación anterior resulta

$$\frac{H_i}{H_0} + \frac{H_{i-1}}{H_0} - 2 = \frac{aV_0}{gH_0} \left( \frac{V_{i-1}}{V_0} - \frac{V_i}{V_0} \right)$$

haciendo  $\xi_i^2 = \frac{H_i}{H_0}$  y  $\epsilon = \frac{aV_0}{2gH_0}$ , esta última ecuación toma la forma

$$\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2 - 2 = 2\epsilon \left( \frac{V_{i-1}}{V_0} - \frac{V_i}{V_0} \right) \quad (2.80)$$

Ahora bien, si se aplica la ecuación de continuidad para una sección transversal ubicada inmediatamente aguas arriba del órgano de control, y se toma en cuenta lo mencionado acerca del plano horizontal de comparación, se puede escribir

$$\frac{V_i}{V_0} = \frac{(C_d A_v)_i}{(C_d A_v)_0} \sqrt{\frac{H_i}{H_0}}$$

o bien

$$\frac{V_i}{V_0} = \tau_i \xi_i \quad \text{ec. (2.81)} \quad (2.81)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (2.80), se tendrá:

$$\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2 - 2 = 2\epsilon(\tau_{i-1}\xi_{i-1} - \tau_i\xi_i) \quad (2.82)$$

ecuación que se conoce con el nombre de *Ecuación Adimensional de Allievi*.

### 3 CASO DE ESTUDIO

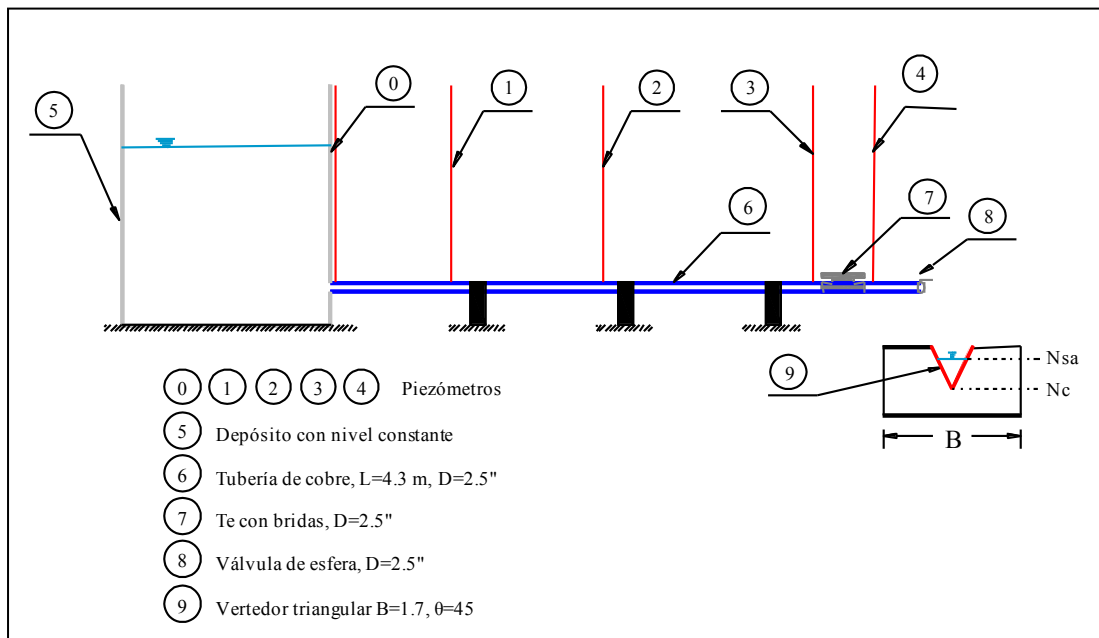
Como se mencionó en el primer capítulo, se analizará el fenómeno del golpe de ariete con el método de las características, para lo cual, se cuenta con el antecedente del análisis del fenómeno transitorio con las ecuaciones de Allievi. En este capítulo se realizará la solución del caso experimental con los dos métodos citados y se hará una comparación entre los resultados obtenidos. El objetivo principal es observar la variación de la carga de presión a lo largo de la tubería, provocada por el cierre de la válvula. Con el método de las cadenas de Allievi, se calculará y analizará la sobrepresión generada en la tubería por el cierre de la válvula y por otra parte, con el método de las características se determinará la variación de la carga de presión a lo largo de la tubería, utilizando las pérdidas por fricción y condiciones de frontera variables.

A continuación se presenta una descripción del dispositivo experimental, el cual se ha utilizado para observar el fenómeno transitorio del golpe de ariete, en la práctica número 3 del laboratorio de la asignatura *Hidráulica de máquinas*.

#### 3.1 Dispositivo experimental tanque – tubería – válvula esférica

En la figura 3.1 se observa un esquema del dispositivo experimental, el cual se encuentra instalado en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Este dispositivo está formado por un tanque o depósito con carga constante, una tubería de cobre de 4.3 metros de longitud y 2.5 pulgadas de diámetro, 5 piezómetros distribuidos a lo largo de la tubería, en los cuales se mide la columna de agua que se genera por la presión de la onda, un accesorio conocido como Te bridada, y una válvula de esfera, colocada en el extremo final de la tubería. Como dispositivo de aforo, se cuenta con un vertedor de pared delgada de sección triangular.



**Figura 3.1. Dispositivo experimental**



**Fotografía 3.1. Perspectiva del dispositivo experimental**

En la fotografía 3.1, se puede observar una perspectiva del dispositivo experimental, así como los componentes de este.

A continuación se presentan las mediciones que se realizaron en el dispositivo al simular el fenómeno transitorio.

### 3.2 Mediciones y registro de lecturas

El procedimiento que se realizó para determinar las condiciones iniciales, es el que se utiliza actualmente en el prontuario de la práctica golpe de ariete.

1. Abrir la válvula de alimentación del tanque y establecer una carga constante  $H_0$  y registrar su valor, en m.
2. Medir el nivel de cresta  $N_c$ , en m, en el vertedor triangular.
3. Abrir totalmente la válvula de esfera ubicada en el extremo final aguas abajo y purgar los piezómetros para establecer el flujo permanente. Medir la carga de presión  $H$ , en m, en cada uno de ellos.
4. Medir el nivel de la superficie libre del agua  $N_{sa}$ , en m, en el canal de aproximación del vertedor de sección triangular.

Se registraron los siguientes datos

**Tabla 3.1. Registro de datos (Flujo permanente)**

|   |           |        |   |
|---|-----------|--------|---|
| <b>Depósito o tanque con carga constante.</b> | $H_0=$    | 1.00   | m |
| <b>Vertedor triangular</b>                    | $N_c=$    | 0.2479 | m |
|   | $N_{sa}=$ | 0.3791 | m |
| <b>Piezómetros</b>                            | $H_1=$    | 0.86   | m |
|   | $H_2=$    | 0.81   | m |
|   | $H_3=$    | 0.755  | m |
|   | $H_4=$    | 0.61   | m |

Para el caso de flujo no permanente se realizó un cierre brusco en la válvula de esfera con el fin de medir la carga máxima de presión que se presentó. Esta lectura únicamente se tomó en el piezómetro 4 (ver figura 3.1) y el dato obtenido fue  $H_{m\acute{a}x} = 1.5$  m

### 3.3 Determinación de condiciones iniciales

La ecuación que se utiliza para el cálculo del gasto en un vertedor de pared delgada de sección triangular es:

$$Q = Ch^{5/2} \tag{3.1}$$

donde:

$C$  coeficiente de descarga del vertedor, en  $m^{1/2}/s$

$$C = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan \frac{\theta}{2} \mu K \tag{3.2}$$

$h$  carga en el vertedor,  $h = |N_{sa} - N_c|$ , en m;

$g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ ;

$\theta$  ángulo del vértice del vertedor,  $\theta = 45^\circ$ ;

$B$  ancho del canal de aproximación,  $B = 1.70$  m;

$\mu$  coeficiente experimental que depende de  $\theta$  y  $h$  según figura 3.2

$K$  coeficiente experimental que depende de  $B$  y  $h$  según figura 3.3

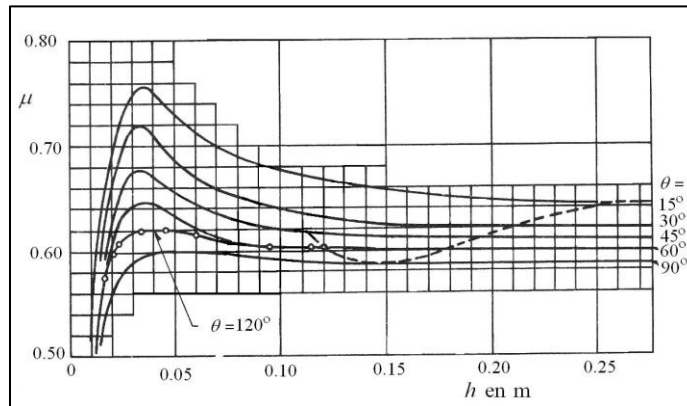


Figura 3.2. Coeficiente de gasto μ de vertedores triangulares en la fórmula de la Universidad Católica de Chile

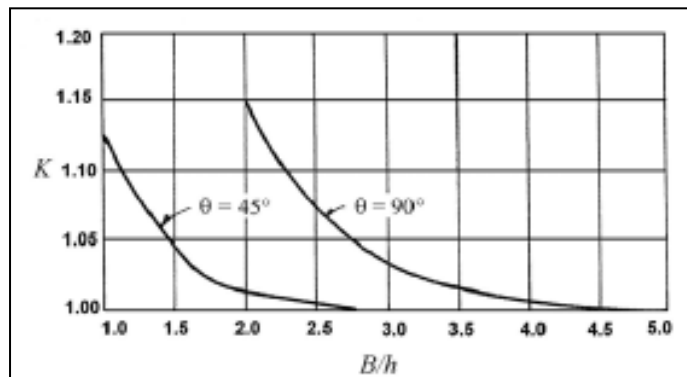


Figura 3.3. Valores de K en la fórmula de la Universidad Católica de Chile para vertedores triangulares

Carga en el vertedor  $h = |0.3791 - 0.2479| = 0.1312$  m

Coefficiente experimental  $\mu$ , con  $h = 0.1312$  m y  $\theta = \pi/4$  rad., de la figura 3.2

$$\mu = 0.616$$

Coefficiente experimental  $K$ , con  $B/h = 1.7/0.1312 = 12.96$

$$K = 1.0$$

Coefficiente de descarga del vertedor  $C$

$$C = \frac{8}{15} \sqrt{2 \times 9.81} \tan \left[ \frac{(\pi/4)}{2} \right] (0.616)(1.0)$$

$$C = 0.603 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

Gasto  $Q_0$

$$Q_0 = (0.603)(0.1312)^{5/2}$$

$$Q_0 = 0.00376 \text{ m}^3/\text{s}$$

De esta forma, se determinaron las condiciones iniciales correspondientes al flujo permanente en el dispositivo experimental, que se muestra en la tabla 3.2.

Tabla 3.2. Condiciones iniciales a flujo permanente

| $Q_0$               | $H_0$    | $H_1$    | $H_2$    | $H_3$    | $H_4$    |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (m <sup>3</sup> /s) | (m.c.a.) | (m.c.a.) | (m.c.a.) | (m.c.a.) | (m.c.a.) |
| 0.00376             | 1.00     | 0.86     | 0.81     | 0.755    | 0.61     |

### 3.4 Cálculo de celeridad de onda de presión en tubería

Se sabe que el valor de la celeridad de la onda de presión depende de las propiedades elásticas del conducto y el fluido, así como de la geometría de la tubería. En el dispositivo experimental, todas estas propiedades son constantes a lo largo de la tubería, por lo tanto se obtuvo un solo valor de la celeridad  $a$  de la onda de presión, en m/s.

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_v} + \frac{D}{E_t e} \right)}} \quad (3.3)$$



donde:

- $\rho$  densidad del agua,  $\rho = 1,000 \text{ Kg/m}^3$ ;  
 $E_v$  módulo de elasticidad del agua,  $E_v = 2.18 \times 10^9 \text{ Pa}$ ;  
 $E_t$  módulo de elasticidad de la tubería de cobre,  $E_t = 118.7 \times 10^9 \text{ Pa}$ ;  
 $D$  diámetro de la tubería,  $D = 0.0635 \text{ m}$ ;  
 $e$  espesor de la tubería,  $e = 0.0018 \text{ m}$ .

Por lo tanto

$$a = \frac{1}{\sqrt{(1000) \left( \frac{1}{2.18 \times 10^9} + \frac{0.0635}{(118.7 \times 10^9)(0.0018)} \right)}}$$

$$a = 1,150.17 \text{ m/s}$$

### 3.5 Período $T$ de la onda de presión

Se sabe que el periodo  $T$  de la onda de presión, es el tiempo que tarda la onda de perturbación en recorrer la distancia desde la sección de la válvula hasta el tanque y reflejarse hasta llegar nuevamente a la válvula. De este modo

$$V = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{V}$$

Según esta definición con la distancia  $d = 2L$  y si la velocidad  $V$  es representada por la celeridad  $a$  de la onda de presión, entonces, el periodo  $T$ , queda definido con la siguiente ecuación

$$T = \frac{2L}{a} \tag{3.4}$$

Donde, de acuerdo al caso de estudio

$$L = 4.3 \text{ m}$$

$$a = 1,150.17 \text{ m/s}$$

$$\text{Por lo tanto} \quad T = \frac{(2 \times 4.3)}{1,150.17} = 0.00748 \text{ s}$$

### 3.6 Pérdidas por fricción en la tubería

Para obtener una estimación numérica del fenómeno en estudio lo más cercano a la realidad, fue necesario obtener una relación entre las mediciones realizadas a flujo permanente y los resultados

obtenidos en forma teórica, por ello es que en este apartado, se realiza el cálculo de las pérdidas por efecto de la fricción entre el fluido y la tubería, con las ecuaciones de fricción de Darcy-Weisbach, Manning-Strickler y Hazen-Williams. Al obtener los resultados de las pérdidas por fricción, además de calcular también las pérdidas locales, se realizó una comparación y se definió la ecuación con mayor aproximación a las mediciones realizadas.

Tres características geométricas de la sección en una conducción hidráulica muy importantes en el cálculo de las pérdidas de fricción, son las siguientes.

*Área hidráulica A*, es decir, el área de la sección transversal ocupada por el líquido dentro del conducto.

*Perímetro mojado P*, que es el perímetro de la sección transversal del conducto en el que hay contacto del líquido con la pared (no incluye la superficie libre si ésta existe).

*Radio hidráulico  $R_h$* , o sea la relación entre el área hidráulica y el perímetro mojado de la sección ( $R_h=A/P$ )

Los valores de estas características geométricas para la tubería en estudio son:

#### ***Área hidráulica A***

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$A = \frac{\pi(0.0635)^2}{4} = 0.003167 \text{ m}^2$$

#### ***Perímetro mojado P***

$$P = \pi D$$

$$P = 0.0635\pi = 0.19949 \text{ m}$$

#### ***Radio hidráulico $R_h$***

$$R_h = \frac{A}{P}$$

$$R_h = \frac{0.003167}{0.19949} = 0.01587 \text{ m}$$

Ahora bien, para obtener las pérdidas por fricción, se debe conocer el factor de fricción de la tubería.

El factor de fricción  $f$  es función de la rugosidad  $\varepsilon$  y del número de Reynolds  $Re$  en el tubo.

Por otra parte, se sabe que existen distintos intentos de evaluar el efecto corrosivo del agua en conductos, basándose en la reducción del gasto calculado teóricamente, de acuerdo con el PH del agua y el número de años de servicio de la tubería. Sin embargo, el criterio que parece más efectivo es el de Genijew al modificar la rugosidad absoluta del tubo nuevo, de acuerdo con el tipo de agua que va a escurrir y el número de años de servicio; esto es

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + at \quad (3.5)$$

donde

- $\varepsilon_0$  rugosidad del tubo (nuevo), en mm;
- $a$  coeficiente que depende del grupo en el que se clasifique el agua que va a escurrir, según la tabla 3.3;
- $t$  número de años de servicio de la tubería;
- $\varepsilon_t$  rugosidad del conducto, después de  $t$  años de servicio, en mm.

Según la tabla 3.3, para la tubería lisa de cobre, la rugosidad absoluta (tubería nueva de cobre) es  $\varepsilon_0 = 0.0015$  mm

Tabla 3.3. Rugosidad absoluta  $\varepsilon$  en tubos comerciales

| <i>Material</i>   | <i><math>\varepsilon</math>, en mm</i> |
|---|--|
| <b><i>Tubos lisos</i></b>   |  |
| De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura; tubos de acero de precisión sin costura, serpentines industriales, plástico, hule | 0.0015                                 |
| Tubos industriales de latón   | 0.025                                  |
| Tubos de madera   | 0.2 a 1                                |
| Hierro forjado  | 0.05                                   |
| Fierro fundido nuevo  | 0.25                                   |
| Fierro fundido, con protección interior de asfalto  | 0.12                                   |
| Fierro fundido oxidado  | 1 a 1.5                                |
| Fierro fundido, con incrustaciones  | 1.5 a 3                                |
| Fierro fundido, centrifugado  | 0.05                                   |
| Fierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y campana  | 0.15 a 0.3                             |
| Fierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y campana  | 2 a 3.5                                |
| Fierro fundido para agua potable, con bastantes incrustaciones y diámetro de 50 a 125 mm  | 1 a 4                                  |
| Fierro galvanizado  | 0.15                                   |
| Acero rolado, nuevo   | 0.05                                   |
| Acero laminado, nuevo   | 0.04 a 0.1                             |
| Acero laminado con protección interior de asfalto   | 0.05                                   |
| <b><i>Tubos de acero soldado de calidad normal</i></b>  |  |
| Nuevo   | 0.05 a 0.10                            |
| Limpiado después de mucho uso   | 0.15 a 0.20                            |
| Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones   | 0.4                                    |
| Con muchas incrustaciones   | 3                                      |
| Con remaches transversales, en buen estado  | 0.1                                    |
| Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente   | 0.3 a 0.4                              |
| Con líneas transversales de remaches, sencilla o doble; o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla, sin incrustaciones                      | 0.6 a 0.7                              |
| Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior, sin oxidaciones, con circulación de agua turbia  | 1                                      |

Tabla 3.3. (Continuación)

| <i>Material</i>  | <i><math>\varepsilon</math>, en mm</i> |
|--|--|
| Acero soldado, con costura doble de remaches transversales, muy oxidado. Acero remachado, de cuatro a seis filas longitudinales de remaches, con mucho tiempo de servicio. | 2                                      |
| <b><i>Tubos remachados, con filas longitudinales y transversales</i></b>   |  |
| a) Espesor de lámina < 5 mm  | 0.65                                   |
| b) Espesor de lámina de 5 a 12 mm  | 1.95                                   |
| c) Espesor de lámina > 12 mm, o entre 6 y 12 mm, si las hileras de pernos tienen cubrejuntas   | 3                                      |
| d) Espesor de lámina > 12 mm con cubrejuntas   | 5.5                                    |
| Tubos remachados, con cuatro filas transversales y seis longitudinales con cubrejuntas interiores  | 4                                      |
| Asbesto - cemento nuevo  | 0.025                                  |
| Asbesto - cemento, con protección interior de asfalto  | 0.0015                                 |
| Concreto centrifugado, nuevo   | 0.16                                   |
| Concreto centrifugado, con protección bituminosa   | 0.0015 a 0.125                         |
| Concreto en galerías, colado con cimbra normal de madera   | 1 a 2                                  |
| Concreto en galerías, colado con cimbra rugosa de madera   | 10                                     |
| Concreto armado en tubos y galerías, con acabado interior cuidadosamente terminado a mano  | 0.01                                   |
| Concreto de acabado liso   | 0.025                                  |
| Conductos de concreto armado, con acabado liso y varios años de servicio   | 0.2 a 0.3                              |
| Concreto alisado interiormente con cemento   | 0.25                                   |
| Galerías con acabado interior de cemento   | 1.5 a 1.6                              |
| Concreto con acabado normal  | 1 a 3                                  |
| Concreto con acabado rugoso  | 10                                     |
| Cemento liso   | 0.3 a 0.8                              |
| Cemento no pulido  | 1 a 2                                  |
| Concreto presforzado Freyssinet  | 0.04                                   |
| Concreto presforzado Bona Socoman  | 0.25                                   |
| Mampostería de piedra, bien juntada  | 1.2 a 2.5                              |
| Mampostería de piedra rugosa, sin juntar   | 8 a 15                                 |
| Mampostería de piedra, mal acabada   | 1.5 a 3                                |

También se sabe, que la tubería bajo análisis tiene aproximadamente 15 años en servicio.

En la tabla 3.4, se observan distintos coeficientes  $a$  de la fórmula de Genijew. Se sabe que el agua utilizada en el Laboratorio de Hidráulica es agua poco corrosiva y con un pequeño contenido de materia orgánica, por lo tanto, se usará el valor medio del grupo I, es decir  $a = 0.025$ .

**Tabla 3.4. Coeficientes  $a$  de la fórmula de Genijew**

|  |
|--|
| <p><b>Grupo I</b></p> <p>Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua con un pequeño contenido de materia orgánica y de solución de hierro:</p> <p style="text-align: center;"><math>a</math> varía de 0.005 a 0.055; valor medio, 0.025.</p>                            |
| <p><b>Grupo II</b></p> <p>Agua con poco contenido mineral que origina corrosión. Agua que contiene menos de 3 mg/lit de materia orgánica y hierro en solución:</p> <p style="text-align: center;"><math>a</math> varía de 0.055 a 0.18; valor medio, 0.07.</p>                             |
| <p><b>Grupo III</b></p> <p>Agua que origina fuerte corrosión y con escaso contenido de cloruros y sulfatos (menos de 100 a 150 mg/lit). Agua con un contenido de hierro de más de 3 mg/lit:</p> <p style="text-align: center;"><math>a</math> varía de 0.18 a 0.40; valor medio, 0.20.</p> |
| <p><b>Grupo IV</b></p> <p>Agua que origina corrosión, con un gran contenido de sulfatos y cloruros (más de 500 a 700 mg/lit). Agua impura con una gran cantidad de materia orgánica:</p> <p style="text-align: center;"><math>a</math> varía de 0.40 a 0.60; valor medio, 0.51.</p>        |
| <p><b>Grupo V</b></p> <p>Agua con cantidades importantes de carbonatos, pero de dureza pequeña permanente, con residuo denso de 2000 mg/lit:</p> <p style="text-align: center;"><math>a</math> varía de 0.6 a más que 1.</p>   |

De esta forma, se puede calcular la rugosidad del conducto, de acuerdo con los años de servicio y el tipo de agua utilizada.

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación 3.5

$$\varepsilon_t = 0.0015 + (0.025 \times 15) = 0.3765 \text{ mm}$$

El factor de fricción  $f$  es función del número de Reynolds y en el caso de un conducto cilíndrico a presión, este número se define como

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (3.6)$$

Donde  $V$  es la velocidad media,  $D$  es el diámetro del conducto y  $\nu$  la viscosidad cinemática del fluido.

De la ecuación de continuidad  $Q = VA$ , la velocidad  $V = Q/A$ , por lo cual

$$V = \frac{0.00376}{0.003167} = 1.1872 \text{ m/s}$$

La viscosidad cinemática del fluido  $\nu$ , se obtiene de la figura 3.4, para una temperatura promedio de 20°C.

$$\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

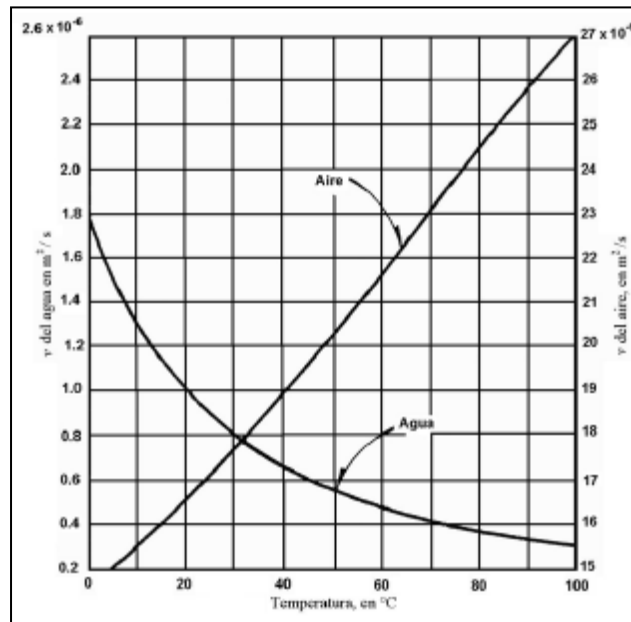


Figura 3.4. Viscosidad cinemática del agua y del aire a la presión atmosférica del nivel del mar

Una vez determinada la velocidad y la viscosidad cinemática del fluido, y sustituyendo estos valores en la ecuación 3.6, el número de Reynolds tomó el siguiente valor

$$Re = \frac{(1.1872 \times 0.0635)}{1 \times 10^{-6}} = 75,387.2$$

A partir del diagrama de Moody (figura 3.5), y con la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$ , se determinó el factor de fricción correspondiente a la tubería del dispositivo experimental

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.3765}{63.5} = 0.00593$$

Del diagrama de Moody con el valor de la relación anterior y el número de Reynolds obtenido anteriormente, el valor del factor de fricción  $f = 0.035$ .

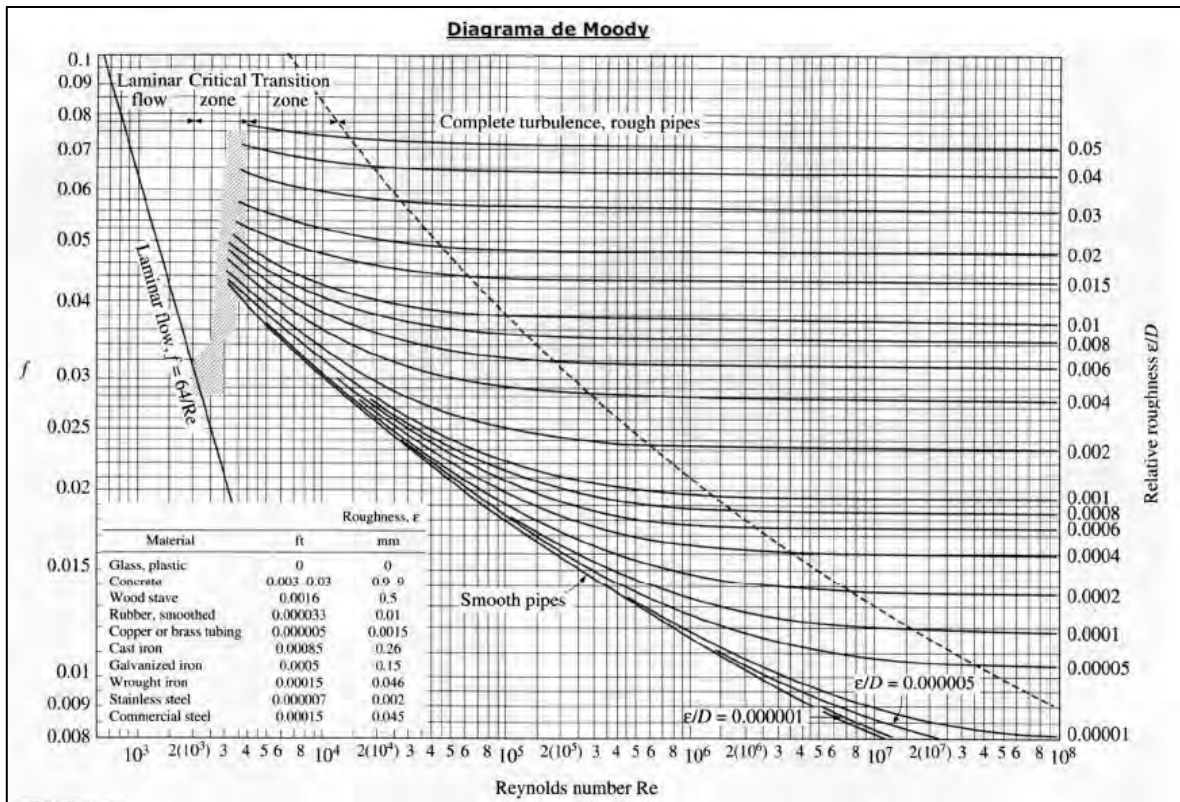


Figura 3.5. Coeficiente de fricción para cualquier tipo y tamaño de tubo; diagrama universal de Moody

Una vez determinado el factor de fricción, se realizó el cálculo de las pérdidas por fricción. Para ello se dividió la tubería en cinco tramos. Como se puede observar en la figura 3.6, se encuentran colocados cinco piezómetros a lo largo de la tubería, y ello permitió establecer los tramos de estudio.



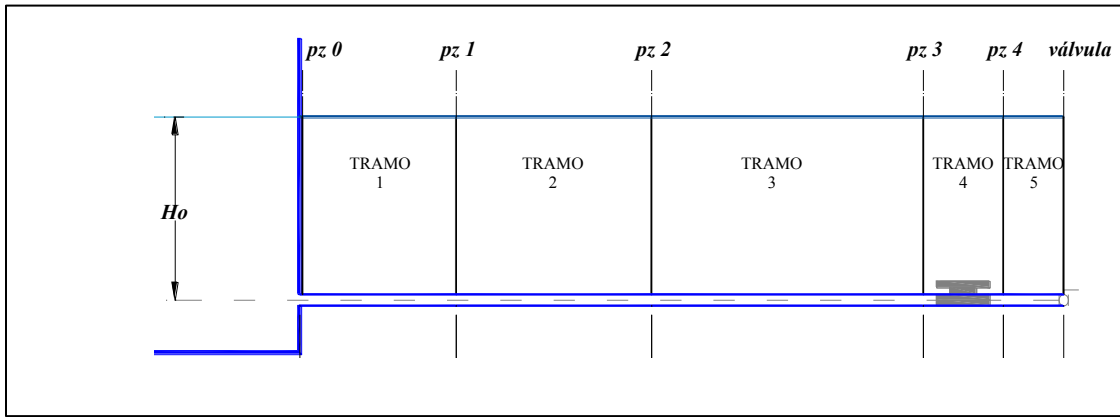


Figura 3.6. Distribución de piezómetros

Como se mencionó anteriormente, se utilizaron tres fórmulas empíricas para calcular las pérdidas por fricción. A continuación se muestra el cálculo realizado con la fórmula de Darcy-Weisbach.

### ***Fórmula de Darcy-Weisbach***

Para un flujo permanente, en un tubo de diámetro constante, la línea de cargas piezométricas es paralela a la línea de energía e inclinada en la dirección del movimiento. En 1850, Darcy, Weisbach y otros, dedujeron experimentalmente una fórmula para calcular en un tubo la pérdida por fricción

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad (3.7)$$

donde

- $f$  factor de fricción, sin dimensiones;
- $g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ ;
- $D$  diámetro, en m;
- $L$  longitud del tubo, en m;
- $h_f$  pérdida por fricción, en m;
- $V$  velocidad media, en m/s.

En la siguiente tabla, se muestran las pérdidas por fricción calculadas con la fórmula de Darcy-Weisbach

Tabla 3.5. Pérdidas por fricción con la fórmula de Darcy-Weisbach

|              | Longitud $L$ | Factor de fricción $f$ | $fL/D$ | $h_f$        |
|--------------|--------------|------------------------|--------|--------------|
|              | (m)          |                        |        | (m)          |
| Tramo 1      | 0.88         | 0.035                  | 0.485  | 0.035        |
| Tramo 2      | 1.1          | 0.035                  | 0.606  | 0.044        |
| Tramo 3      | 1.53         | 0.035                  | 0.843  | 0.061        |
| Tramo 4      | 0.45         | 0.035                  | 0.248  | 0.018        |
| Tramo 5      | 0.34         | 0.035                  | 0.187  | 0.013        |
| <b>Total</b> | <b>4.3</b>   |                        |        | <b>0.170</b> |

### Fórmula de Manning-Strickler

La fórmula de Manning es

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (3.8)$$

donde

$V$  velocidad media, en m/s;

$R_h$  radio hidráulico, en m;

$S_f$  pendiente de fricción;

$n$  factor de rugosidad, depende del material de la tubería.

Si se despeja la pendiente de fricción de la ecuación 3.8, resulta

$$S_f = \left( \frac{Vn}{R_h^{2/3}} \right)^2 \quad (3.9)$$

Si  $S_f$  representa la relación entre la pérdida de energía y la longitud del tubo en que esta ocurre

$$S_f = \frac{h_f}{L} \quad (3.10)$$

De donde

$$h_f = S_f L \quad (3.11)$$

A partir de estas definiciones, en la tabla 3.6 se presentan los resultados obtenidos con la fórmula de Manning-Strickler.

Tabla 3.6. Pérdidas por fricción con la fórmula de Manning-Strickler

|                | <i>L</i>   | <i>N</i> | <i>S<sub>f</sub></i> | <i>h<sub>f</sub></i> |
|----------------|------------|----------|----------------------|----------------------|
|                | (m)        |          |                      | (m)                  |
| <b>Tramo 1</b> | 0.88       | 0.01     | 0.035                | 0.031                |
| <b>Tramo 2</b> | 1.1        | 0.01     | 0.035                | 0.039                |
| <b>Tramo 3</b> | 1.53       | 0.01     | 0.035                | 0.054                |
| <b>Tramo 4</b> | 0.45       | 0.01     | 0.035                | 0.016                |
| <b>Tramo 5</b> | 0.34       | 0.01     | 0.035                | 0.012                |
| <b>Total</b>   | <b>4.3</b> |          |                      | <b>0.152</b>         |

*Fórmula de Hazen-Williams*

$$h_f = 10.674 \left[ \frac{Q^{1.852}}{C^{1.852} D^{4.871}} \right] L \quad (3.12)$$

donde

- h<sub>f</sub>* pérdida por fricción;
- C* depende del material del tubo, (tabla 3.7);
- D* diámetro de la tubería, en m;
- L* longitud de la tubería, en m.

Tabla 3.7. Valores de  $C_H$ ,  $\Delta$ ,  $m$ ,  $n$ , y  $N$  de acuerdo con el material de que está construido el tubo

| <i>Material</i>   | $C_H$ | $\Delta$ | $m$   | $N$            | $N$     |
|---|-------|----------|-------|----------------|---------|
| Acero corrugado   | 60    | -        | -     | -              | -       |
| Acero con juntas lock-bar (nuevo)                                   | 135   | -        | -     | -              | -       |
| Acero galvanizado (nuevo y usado)                                   | 125   | -        | -     | 0.014          | -       |
| Acero remachado (nuevo)   | 110   | -        | -     | 0.015 a 0.016  | 31      |
| Acero remachado (usado)   | 85    | -        | -     | -              | 28 a 26 |
| Acero soldado o con remache avellanado y embutido (nuevo)           | 120   | -        | -     | 0.012 a 0.013  | 34      |
| Acero soldado o con remache avellanado y embutido (usado)           | 90    | -        | -     | -              | 31 a 27 |
| Acero sin costura (nuevo)   | -     | 0.10     | 0.25  | -              | 38      |
| Acero sin costura (usado)   | -     | -        | 0.35  | -              | 36      |
| Acero soldado, con revestimiento especial (nuevo y usado)           | 130   | -        | -     | -              | -       |
| Fierro fundido limpio (nuevo)                                       | 130   | 0.16     | 0.25  | 0.013          | 35      |
| Fierro fundido, sin incrustaciones (usado)                          | 110   | 0.23     | 0.275 | -              | -       |
| Fierro fundido, con incrustaciones (viejo)                          | 90    | 0.36     | 0.35  | -              | 30      |
| Plástico  | 150   | -        | -     | -              | -       |
| Asbesto – cemento (nuevo)   | 135   | 0.06     | -     | -              | -       |
| Cobre y latón   | 130   | -        | -     | -              | -       |
| Conductos con acabado interior de cemento pulido                    | 100   | -        | 0.10  | -              | -       |
| Concreto, acabado liso  | 130   | -        | 0.20  | -              | 38      |
| Concreto, acabado común   | 120   | 0.18     | -     | -              | -       |
| Concreto monolítico, colado con cimbras deslizantes ( $D > 1.25$ m) | -     | -        | -     | 0.010 a 0.011  | -       |
| Concreto monolítico bien cimbrado y pulido ( $D > 1.25$ m)          | -     | -        | -     | 0.011 a 0.0123 | -       |
| Concreto monolítico bien cimbrado y sin pulir ( $D > 1.25$ m)       | -     | -        | -     | 0.014 a 0.015  | -       |
| Concreto con acabado tosco ( $D > 1.25$ m)                          | -     | -        | -     | 0.015 a 0.017  | 27 a 26 |
| Concreto con juntas de macho y campana ( $D > 0.8$ m)               | -     | -        | -     | 0.0105 a 0.012 | -       |
| Concreto con juntas toscas ( $D > 0.5$ m)                           | -     | -        | -     | 0.0125 a 0.014 | 30      |
| Concreto con juntas toscas ( $D < 0.5$ m)                           | -     | -        | -     | 0.014 a 0.017  | -       |
| Conductos para alcantarillado                                       | -     | -        | -     | -              | 28      |
| Tubos de barro vitrificado (drenes)                                 | 110   | -        | -     | 0.011          | 34      |
| Túneles perforados en roca sin revestimiento                        | -     | -        | -     | 0.025 a 0.040  | -       |
| Madera cepillada o en duelas  | 120   | -        | 0.10  | 0.0105 a 0.012 | -       |

En la tabla 3.8 se muestran los resultados obtenidos con la fórmula de Hazen-Williams.

**Tabla 3.8. Pérdidas por fricción con la fórmula de Hazen-Williams**

|                | <b><i>L</i></b> | <b><i>C</i></b> | <b><i>h<sub>f</sub></i></b> |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------|
|                | <b>(m)</b>      |                 | <b>(m)</b>                  |
| <b>Tramo 1</b> | 0.88            | 130             | 0.0250                      |
| <b>Tramo 2</b> | 1.1             | 130             | 0.0313                      |
| <b>Tramo 3</b> | 1.53            | 130             | 0.0435                      |
| <b>Tramo 4</b> | 0.45            | 130             | 0.0128                      |
| <b>Tramo 5</b> | 0.34            | 130             | 0.0097                      |
| <b>Total</b>   | <b>4.3</b>      |                 | <b>0.1223</b>               |

A continuación se muestra una tabla resumen con los resultados obtenidos para las pérdidas por fricción calculadas con los diferentes criterios.

**Tabla 3.9. Tabla resumen. Pérdidas por fricción**

|                | <b>Pérdidas por fricción <i>h<sub>f</sub></i> en m</b> |                |                       |
|----------------|--|----------------|-----------------------|
|                | <b>Darcy-Weisbach</b>                                  | <b>Manning</b> | <b>Hazen-Williams</b> |
| <b>Tramo 1</b> | 0.0348   | 0.0311         | 0.0250                |
| <b>Tramo 2</b> | 0.0435   | 0.0388         | 0.0313                |
| <b>Tramo 3</b> | 0.0606   | 0.0540         | 0.0435                |
| <b>Tramo 4</b> | 0.0178   | 0.0159         | 0.0128                |
| <b>Tramo 5</b> | 0.0135   | 0.0120         | 0.0097                |
| <b>Total</b>   | <b>0.1702</b>  | <b>0.1518</b>  | <b>0.1223</b>         |

### 3.7 Pérdidas locales

Las tuberías que se utilizan están compuestas, generalmente por tramos rectos y curvos para ajustarse a los accidentes topográficos del terreno, así como a los cambios que se presentan en la geometría de la sección y de los distintos dispositivos para el control de las descargas (accesorios). Estos cambios originan pérdidas de energía, distintas a las de fricción, localizadas en el sitio mismo del cambio de geometría o de la alteración del flujo. Tal tipo de pérdida se conoce como *pérdida local* o por accesorio. Su magnitud se expresa como una fracción de la carga de velocidad,

inmediatamente aguas abajo del sitio donde se produjo la pérdida; la expresión general de pérdida local es

$$h = K \frac{V^2}{2g} \quad (3.13)$$

donde

$h$  pérdida de energía, en m,

$K$  coeficiente sin dimensiones que depende del tipo de accesorio que se trate, del número de Reynolds y de la rugosidad del tubo,

$V^2/2g$  la carga de velocidad, aguas abajo, de la zona de alteración del flujo (salvo aclaración en contrario) en m.

En los siguientes apartados, se presentan los valores del coeficiente  $K$ , de acuerdo con el tipo de perturbación que se presenta en el dispositivo del Laboratorio.

#### a) Pérdida por entrada

A la entrada de las tuberías se produce una pérdida por el efecto de contracción que sufre la vena líquida y la formación de zonas de separación; el coeficiente  $K$  depende, principalmente, de la brusquedad con que se efectúa la contracción del chorro.

En la figura 3.7 se observan diferentes formas de entrada a tuberías, sin embargo, observando la entrada a la tubería del dispositivo experimental (fotografía 3.2), se asemeja a la que se muestra en la figura 3.7a.

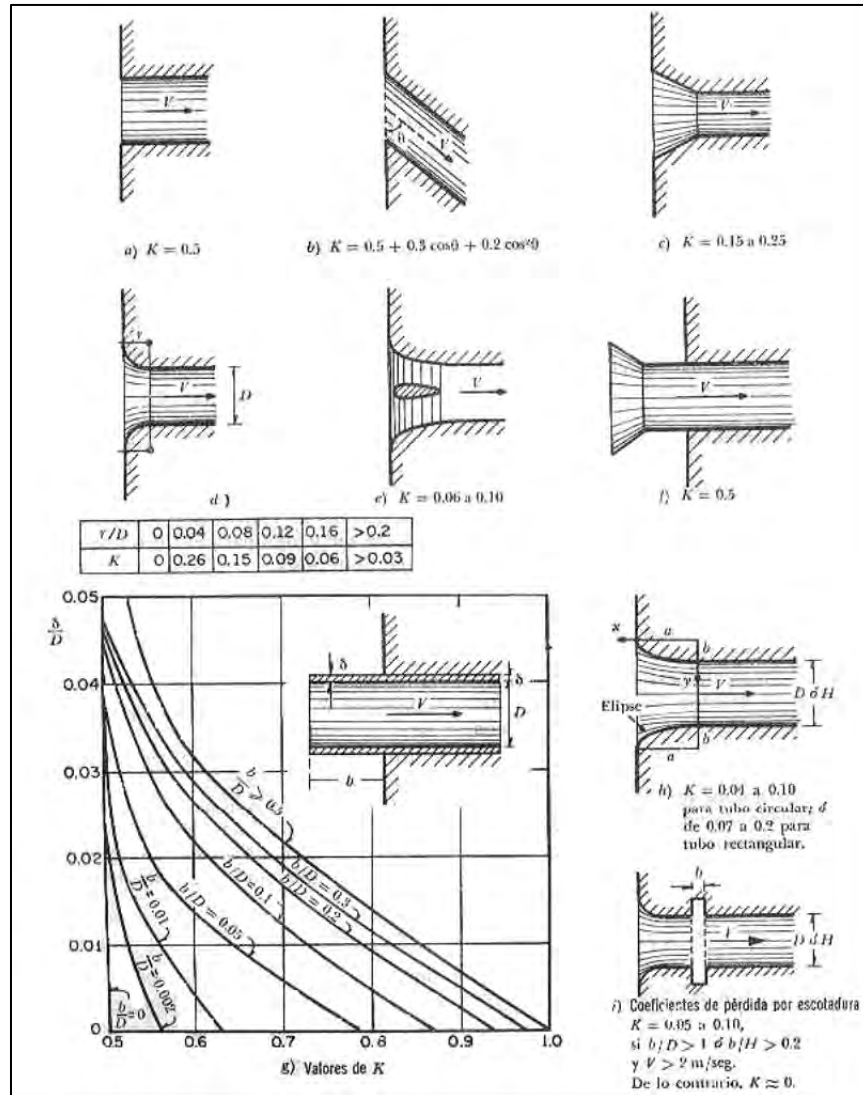


Figura 3.7. Coeficientes de pérdida -por entrada- para diferentes formas



Fotografía 3.2. Entrada a la tubería del dispositivo experimental

De esta forma, el valor de  $K$  por entrada, es

$$K = 0.5$$

### b) Pérdidas por bifurcación

La pérdida de energía en una bifurcación de conductos depende –además del ángulo que forma la tubería secundaria con la principal- de la relación entre los diámetros de ambas tuberías y de la dirección de la corriente. Dicha pérdida es mayor en la unión que en la bifurcación y se expresa como un porcentaje de la carga de velocidad, lo que demuestra que el coeficiente  $K$  es independiente del número de Reynolds.

En el dispositivo experimental, se encuentra instalada una T bridada de 2.5 pulgadas de diámetro (elemento 7, figura 3.1), la cual origina una pérdida local en el último tramo de la tubería.

Para determinar el valor del coeficiente se calculó la carga total antes y después del accesorio en las condiciones de flujo permanente y se obtuvo experimentalmente un valor  $K = 1.7$ .

Con los coeficientes por entrada y por bifurcación, se determinaron las pérdidas locales correspondientes, en la siguiente tabla 3.10 se muestran los resultados.

**Tabla 3.10. Pérdidas locales**

|        |          | <i>Coefic. entrada</i> | <i>Coefic. bifurcación</i> | <i>Pérdida a la entrada</i> | <i>Pérdida por bifurcación</i> |
|--------|----------|------------------------|----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| $V$    | $V^2/2g$ | $K$                    | $K$                        | $h_e$                       | $h_b$                          |
| (m/s)  | (m)      |                        |                            | (m)                         | (m)                            |
| 1.1872 | 0.0718   | 0.5                    | 1.7                        | 0.0359                      | 0.1221                         |

Al sumar las pérdidas por fricción y las pérdidas locales se obtuvo la pérdida total en la tubería. En seguida se muestran los resultados correspondientes a cada una de las fórmulas utilizadas.

Utilizando las pérdidas por fricción calculadas con la fórmula de Darcy-Weisbach y tomando en cuenta la carga de velocidad, se obtuvieron las pérdidas totales y las cargas piezométricas correspondientes, cuyos valores se muestran en las tablas 3.11 y 3.12.



Tabla 3.11. Pérdida total con la fórmula de Darcy-Weisbach

| Pérdida total $h_f$ , en m |        |
|----------------------------|--------|
| <b>Tramo 1</b>             | 0.0707 |
| <b>Tramo 2</b>             | 0.1143 |
| <b>Tramo 3</b>             | 0.1748 |
| <b>Tramo 4</b>             | 0.3147 |
| <b>Tramo 5</b>             | 0.3282 |

Tabla 3.12. Carga piezométrica (Fórmula de Darcy-Weisbach)

|                  | Carga Piezométrica |           |           |           |          |
|------------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|----------|
|                  | $h_{pz1}$          | $h_{pz2}$ | $h_{pz3}$ | $h_{pz4}$ | $H_{ov}$ |
|                  | (m)                | (m)       | (m)       | (m)       | (m)      |
| <b>Calculado</b> | 0.857              | 0.814     | 0.753     | 0.613     | 0.600    |
| <b>Medido</b>    | 0.86               | 0.81      | 0.755     | 0.61      | -        |

Utilizando las pérdidas por fricción calculadas con la fórmula de Manning y de igual manera tomando en cuenta la carga de velocidad, se obtuvieron los siguientes resultados

Tabla 3.13. Pérdida total con la fórmula de Manning

| Pérdida total $h_f$ , en m |        |
|----------------------------|--------|
| <b>Tramo 1</b>             | 0.0670 |
| <b>Tramo 2</b>             | 0.1058 |
| <b>Tramo 3</b>             | 0.1599 |
| <b>Tramo 4</b>             | 0.2978 |
| <b>Tramo 5</b>             | 0.3098 |

Tabla 3.14. Carga piezométrica (Fórmula de Manning)

|                  | Carga Piezométrica |           |           |           |          |
|------------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|----------|
|                  | $h_{pz1}$          | $h_{pz2}$ | $h_{pz3}$ | $h_{pz4}$ | $H_{ov}$ |
|                  | (m)                | (m)       | (m)       | (m)       | (m)      |
| <b>Calculado</b> | 0.861              | 0.822     | 0.768     | 0.630     | 0.618    |
| <b>Medido</b>    | 0.86               | 0.81      | 0.755     | 0.61      | -        |

Por último, los resultados obtenidos con la fórmula de Hazen-Williams, se presentan a continuación

**Tabla 3.15. Pérdida total con la fórmula de Hazen-Williams**

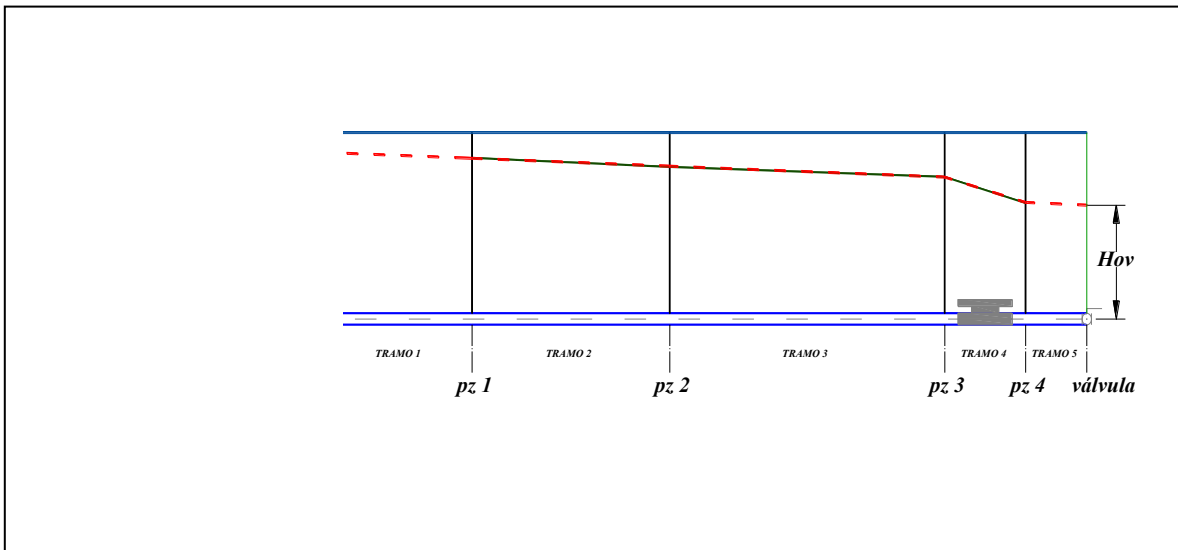
| Pérdida total $h_r$ , en m |        |
|----------------------------|--------|
| <b>Tramo 1</b>             | 0.0609 |
| <b>Tramo 2</b>             | 0.0922 |
| <b>Tramo 3</b>             | 0.1358 |
| <b>Tramo 4</b>             | 0.2706 |
| <b>Tramo 5</b>             | 0.2803 |

**Tabla 3.16. Carga piezométrica (Fórmula de Hazen-Williams)**

|                  | Carga Piezométrica |           |           |           |          |
|------------------|--------------------|-----------|-----------|-----------|----------|
|                  | $h_{pz1}$          | $h_{pz2}$ | $h_{pz3}$ | $h_{pz4}$ | $H_{ov}$ |
|                  | (m)                | (m)       | (m)       | (m)       | (m)      |
| <b>Calculado</b> | 0.867              | 0.836     | 0.792     | 0.658     | 0.648    |
| <b>Medido</b>    | 0.86               | 0.81      | 0.755     | 0.61      | -        |

De los resultados mostrados en las tablas 3.9 a 3.14, se puede observar que con la fórmula de Darcy-Weisbach y con el ajuste de los coeficientes de pérdidas locales, se obtuvieron cargas piezométricas muy cercanas a las medidas en el dispositivo experimental.

En las figuras 3.8a, 3.8b y 3.8c se muestra la línea piezométrica medida y calculada con las diferentes fórmulas.



**Figura 3.8a. Línea de cargas piezométricas (Fórmula de Darcy-Weisbach)**  
 PROPUESTA DE INSTALACIÓN EXPERIMENTAL EN EL LABORATORIO DE HIDRÁULICA PARA LA ENSEÑANZA TEÓRICO – PRÁCTICA DEL FENÓMENO DE GOLPE DE ARIETE

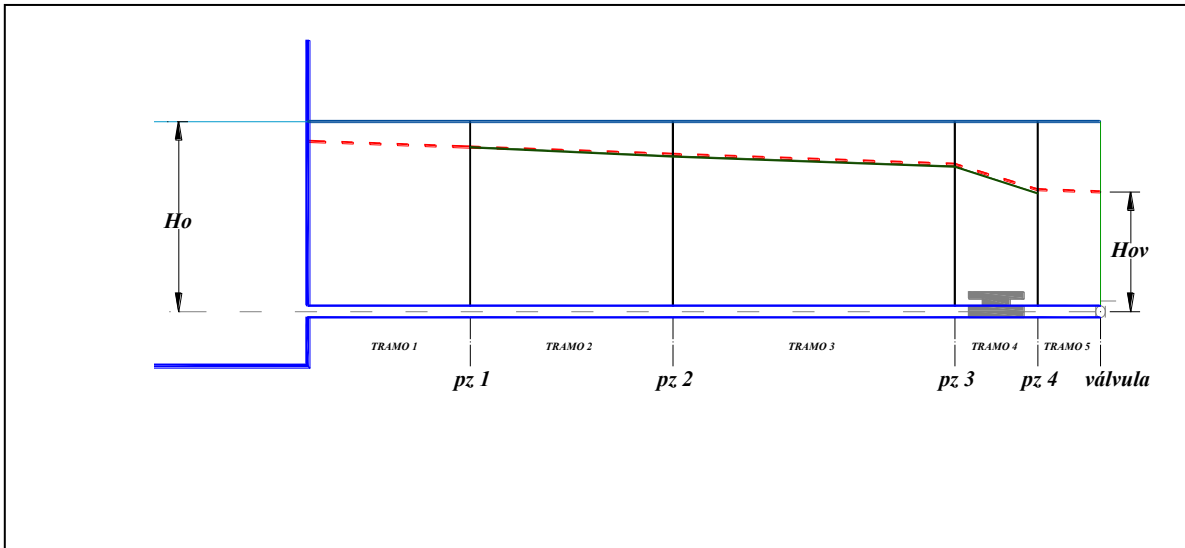


Figura 3.8b. Línea de cargas piezométricas (Fórmula de Manning)

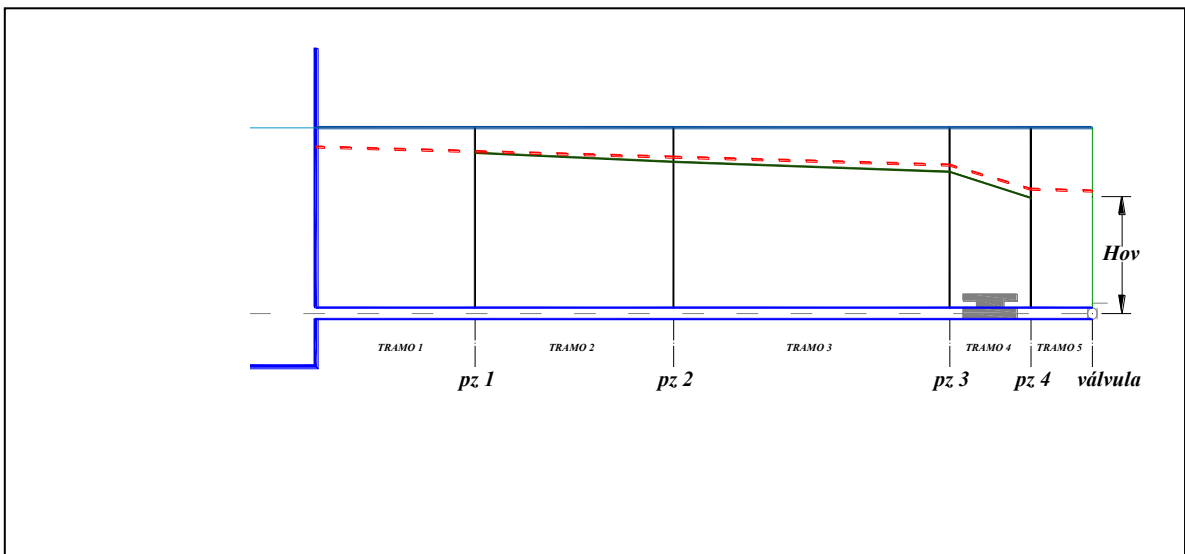


Figura 3.8c. Línea de cargas piezométricas (Fórmula de Hazen-Williams)

### 3.8 Ley para maniobra de cierre no uniforme

La ley de cierre se determinó de forma experimental. Esta ley de cierre no uniforme consiste en una relación entre el gasto medido con la válvula totalmente abierta y el gasto medido para un cierre parcial de la válvula y luego asociarla a un tiempo de cierre.

Para determinar la relación entre gastos se implementó un dispositivo de apoyo para medir el ángulo de cierre de la válvula. Este dispositivo de apoyo consistió en colocar sobre la válvula una

base de acrílico con una graduación de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , ya que éste es el intervalo en el que el maneral de la válvula alcanza el cierre o la apertura total.

En el vertedor triangular de aforos se registraron los siguientes datos, de acuerdo al ángulo de cierre.

**Tabla 3.17. Mediciones en vertedor triangular**

| <i>Cierre</i> | $N_c$  | $N_{sa}$ |
|---------------|--------|----------|
| ( $^\circ$ )  | ( m )  | ( m )    |
| 0             | 0.2479 | 0.3809   |
| 10            | 0.2479 | 0.3709   |
| 20            | 0.2479 | 0.3568   |
| 30            | 0.2479 | 0.3403   |
| 40            | 0.2479 | 0.3244   |
| 50            | 0.2479 | 0.3089   |
| 60            | 0.2479 | 0.2939   |
| 70            | 0.2479 | 0.2768   |
| 80            | 0.2479 | 0.2479   |

Con los datos de la tabla 3.17, se determinó el gasto correspondiente a cada ángulo de cierre. El procedimiento de cálculo para determinar el gasto fue el mismo que se utilizó al calcular el gasto en flujo permanente. Los resultados se muestran a continuación, en la tabla 3.18.

**Tabla 3.18. Gasto – Ángulo de cierre**

| <i>Cierre</i> | $h$   | $g$         | $\theta$     | $B$   | $\mu$ | $B/h$  | $\kappa$ | $C$             | $Q$         |
|---------------|-------|-------------|--------------|-------|-------|--------|----------|-----------------|-------------|
| ( $^\circ$ )  | ( m ) | ( $m^2/s$ ) | ( $^\circ$ ) | ( m ) |       |        |          | ( $m^{1/2}/s$ ) | ( $m^3/s$ ) |
| 0             | 0.13  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.613 | 12.782 | 1        | 0.5998          | 0.0039      |
| 10            | 0.12  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.618 | 13.821 | 1        | 0.6047          | 0.0032      |
| 20            | 0.11  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.619 | 15.611 | 1        | 0.6057          | 0.0024      |
| 30            | 0.09  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.624 | 18.398 | 1        | 0.6106          | 0.0016      |
| 40            | 0.08  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.628 | 22.222 | 1        | 0.6145          | 0.0010      |
| 50            | 0.06  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.644 | 27.869 | 1        | 0.6302          | 0.0006      |
| 60            | 0.05  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.654 | 36.957 | 1        | 0.6400          | 0.0003      |
| 70            | 0.03  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0.676 | 58.824 | 1        | 0.6615          | 0.0001      |
| 80            | 0.00  | 9.81        | 45           | 1.7   | 0     | -      | 1        | 0               | 0           |

Con la medición de estos gastos, se realizó una curva de gastos en función del ángulo de cierre de la válvula (figura 3.9). En seguida, esta curva se ajustó a una ecuación general.

$$Q = 0.0000005790\alpha^2 - 0.0000963008\alpha + 0.0039831151 \quad (3.14)$$

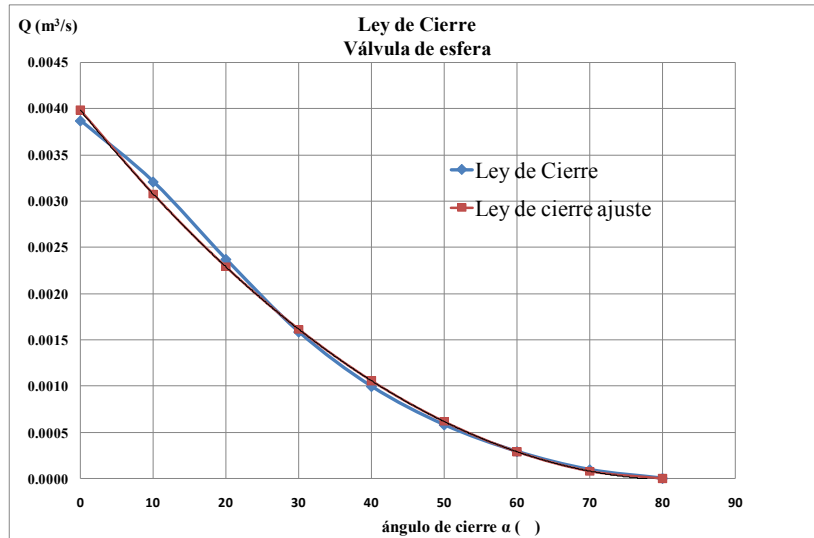


Figura 3.9. Curva de gastos en función del ángulo de cierre de la válvula

La finalidad de la ecuación 3.14, es conocer el gasto para cualquier ángulo de cierre, aunque cabe destacar que el cierre total de la válvula se produjo entre  $80^\circ$  y  $82^\circ$ . Utilizando esta ecuación de ajuste, se recalculó el gasto en función del ángulo de cierre y los resultados se muestran en la tabla 3.19.

Tabla 3.19. Gastos de acuerdo a ecuación de ajuste

| $\alpha$<br>(°) | $Q$<br>( $m^3/s$ ) |
|-----------------|--------------------|
| 0               | 0.00398            |
| 10              | 0.00308            |
| 20              | 0.00229            |
| 30              | 0.00162            |
| 40              | 0.00106            |
| 50              | 0.00062            |
| 60              | 0.00029            |
| 70              | 0.00008            |
| 80              | 0                  |

Con los gastos de la tabla 3.19, se obtuvo la relación  $\tau = Q/Q_0$ , donde  $Q_0$  es el gasto que pasa a través de la válvula totalmente abierta. Esta relación se observa en la tabla 3.20.

**Tabla 3.20. Relación  $\tau$**

| $\alpha$<br>(°) | $\tau$ |
|-----------------|--------|
| 0               | 1.0000 |
| 10              | 0.7728 |
| 20              | 0.5746 |
| 30              | 0.4055 |
| 40              | 0.2655 |
| 50              | 0.1545 |
| 60              | 0.0727 |
| 70              | 0.0199 |
| 80              | 0.0000 |

Cuando la ley de cierre no es uniforme, se tiene una variación de  $\tau$  con respecto al tiempo de cierre ( $t_c$ ). Por otra parte, se tiene la experiencia de utilizar un tiempo de cierre de un segundo cuando se realiza la práctica *Golpe de Ariete* utilizando como método de solución a las cadenas de Allievi. Sin embargo, es importante mencionar que la ley de cierre utilizada en dicha práctica es una ley de cierre lineal. En este caso se utilizaron tiempos de cierre diferentes, con el fin de observar la relación entre las cargas piezométricas cuando se presenta el flujo transitorio y el tiempo de cierre correspondiente.

Los tiempos de cierre utilizados fueron  $t_c = 1.0$  segundos,  $t_c = 1.2$  segundos y  $t_c = 1.5$  segundos. La ley de cierre para cada uno de estos tiempos, con respecto al ángulo de cierre, se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 3.21. Ley de cierre

| $\alpha$<br>( $^{\circ}$ ) | $\tau$ | $t_c = 1.0$<br>(s) | $t_c = 1.2$<br>(s) | $t_c = 1.5$<br>(s) |
|----------------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 0                          | 1.0000 | 0                  | 0                  | 0                  |
| 10                         | 0.7728 | 0.1250             | 0.1500             | 0.1875             |
| 20                         | 0.5746 | 0.2500             | 0.3000             | 0.3750             |
| 30                         | 0.4055 | 0.3750             | 0.4500             | 0.5625             |
| 40                         | 0.2655 | 0.5000             | 0.6000             | 0.7500             |
| 50                         | 0.1545 | 0.6250             | 0.7500             | 0.9375             |
| 60                         | 0.0727 | 0.7500             | 0.9000             | 1.1250             |
| 70                         | 0.0199 | 0.8750             | 1.0500             | 1.3125             |
| 80                         | 0.0000 | 1                  | 1.2                | 1.5                |

Por último se realizó la gráfica  $\tau-t_c$  y se hizo un ajuste a la curva, obteniendo la ecuación de la ley de cierre no uniforme. Estos gráficos y su correspondiente ecuación de ajuste se muestran a continuación.

Tabla 3.22. Ley de cierre no uniforme

| <i>Ley de cierre no uniforme</i>                              | <i>Ecuación</i>                                   |
|---|---|
| <p style="text-align: center;">Ley de cierre<br/>tc=1 s</p>   | $\tau = 0.9378 t^2 - 1.9396 t + 1.0 \quad (3.15)$ |
| <p style="text-align: center;">Ley de cierre<br/>tc=1.2 s</p> | $\tau = 0.6513 t^2 - 1.6163 t + 1.0 \quad (3.16)$ |
| <p style="text-align: center;">Ley de cierre<br/>tc=1.5 s</p> | $\tau = 0.4168 t^2 - 1.2931 t + 1.0 \quad (3.17)$ |

Para determinar la relación entre el área de la válvula totalmente abierta y el área para cada ángulo de cierre, se hizo una medición en un dispositivo como el mostrado en la fotografía 3.3.





**Fotografía 3.3. Dispositivo de medición de apertura de válvula**

El procedimiento consistió en tomar fotografías del área de la válvula que se iba obturando para cada ángulo de cierre. Se realizó en intervalos de  $10^\circ$ . En las siguientes fotografías se puede observar más claramente.

Aunque la relación entre áreas que finalmente se obtuvo no se utilizó directamente para determinar la ley de cierre, puede funcionar para determinar coeficientes de pérdida para válvulas de esfera. La tabla que a continuación se muestra es parte de una recopilación de información bibliográfica y contiene coeficientes de pérdida para válvulas esféricas en función de la relación de áreas.

**Tabla 3.23. Coeficientes de pérdida para válvulas esféricas**

| $\theta^\circ$ | $K$  | $A/A_0$ |
|----------------|------|---------|
| 5              | 0.05 | 0.926   |
| 10             | 0.29 | 0.85    |
| 15             | 0.75 | 0.772   |
| 20             | 1.56 | 0.692   |
| 25             | 3.1  | 0.613   |
| 30             | 5.17 | 0.535   |
| 35             | 9.68 | 0.458   |
| 40             | 17.3 | 0.358   |
| 45             | 31.2 | 0.315   |
| 50             | 52.6 | 0.25    |
| 55             | 106  | 0.19    |
| 60             | 206  | 0.137   |
| 65             | 486  | 0.091   |
| 82             |      | 0       |



**Fotografía 3.4. Totalmente abierta**



**Fotografía 3.5. Cierre 10°**



**Fotografía 3.6. Cierre 20°**



**Fotografía 3.7. Cierre 30°**



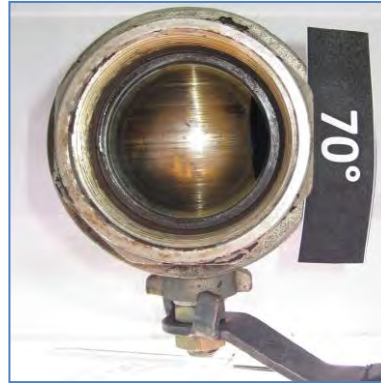
**Fotografía 3.8. Cierre 40°**



**Fotografía 3.9. Cierre 50°**



Fotografía 3.10. Cierre 60°



Fotografía 3.11. Cierre 70°



Fotografía 3.12. Cierre 80°

Se trasladaron las fotografías al programa Autocad y se determinaron las áreas correspondientes (figura 3.10), mismas que se muestran en la tabla 3.24.

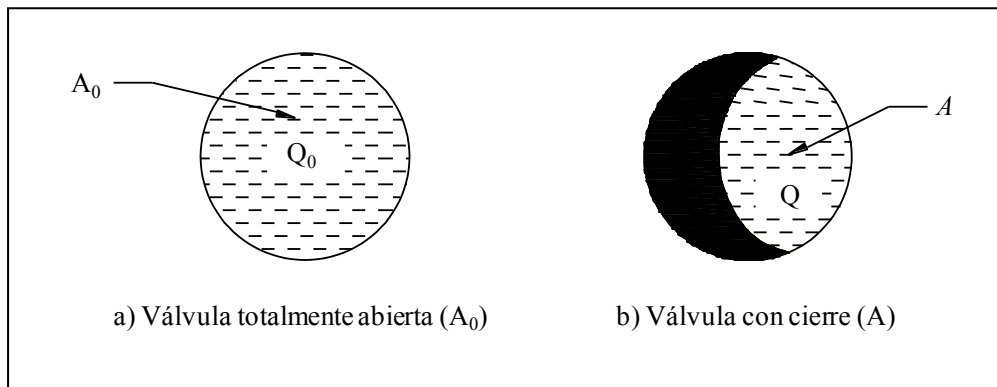


Figura 3.10. Válvula totalmente abierta y cierre parcial

Tabla 3.24. Relación de áreas

| $\alpha$       | $A$       | $A/A_0$ |
|----------------|-----------|---------|
| ( $^{\circ}$ ) | ( $m^2$ ) |         |
| 0              | 0.0032    | 1.0000  |
| 10             | 0.0027    | 0.8551  |
| 20             | 0.0021    | 0.6684  |
| 30             | 0.0018    | 0.5693  |
| 40             | 0.0014    | 0.4466  |
| 50             | 0.0009    | 0.2722  |
| 60             | 0.0005    | 0.1595  |
| 70             | 0.0002    | 0.0529  |
| 80             | 0.0000    | 0.0000  |

Al comparar las tablas 3.21 y 3.22, se observó que varían en un pequeño porcentaje las relaciones  $A/A_0$ , lo que permite establecer que los datos experimentales que se obtuvieron para la válvula del caso de estudio son adecuados.

Una vez determinada la ley de cierre no uniforme, se dio solución al caso de estudio aplicando dos procedimientos: utilizando las ecuaciones de Allievi y el método de las características. Cabe mencionar que al utilizar las ecuaciones de Allievi, se utilizó una ley de cierre lineal y al utilizar el método de las características se usó la ley de cierre no uniforme obtenida. Es por ello la importancia de utilizar el método de las características, ya que da la oportunidad de analizar el fenómeno del golpe de ariete de manera más cercana a la realidad.

### 3.9 Solución aplicando el método de Allievi

A continuación se presenta la solución para el caso de estudio mediante el método de las cadenas de Allievi. Anteriormente se determinaron las condiciones iniciales, el valor de la celeridad de la onda, así como el periodo de la onda de presión. En seguida se presentan algunos cálculos previos también necesarios para aplicar este método.

Se calculó la relación entre el tiempo de maniobra  $t_c$  y el periodo de la onda de presión  $T$ , considerando que el tiempo de la maniobra fue de un segundo.

$$\theta = \frac{t_c}{T} \quad (3.18)$$

Lo que resulta

$$\theta = \frac{1.0}{0.00747} = 133.86$$

Se debe cerrar al número entero siguiente. Por lo tanto  $\theta = 134$

Posteriormente, el objetivo fue calcular la carga de presión  $H_i$  y la sobrepresión  $\Delta H_i$  en m, en la sección cercana a la válvula, aplicando las ecuaciones de Allievi y considerando una ley de cierre lineal, con la ecuación

$$H_i = H_0 \xi_i^2$$

donde:

$H_i$  carga de presión correspondiente a cada instante relativo  $i = t/T$  del cierre en la válvula, en m;

$H_0$  carga de presión medida en la sección 0 con la válvula cerrada, en m;

$\Delta H_i$  sobrepresión en cada instante relativo del cierre, en m;

$$\Delta H_i = H_i - H_0$$

$\xi_i$  relación de cargas en cada instante relativo del cierre; se obtiene con la expresión de Allievi.

$$\xi_i = \sqrt{\frac{H_i}{H_0}}$$

Con estos antecedentes, se planteó la solución mediante la siguiente forma.

Como se explicó en el capítulo 2, la ecuación 2.82 es la ecuación propuesta por Allievi, misma que reescribiremos como

$$\xi_i^2 + \xi_{i-1}^2 - 2 = 2\epsilon(\tau_{i-1}\xi_{i-1} - \tau_i\xi_i) \quad (3.19)$$

Para su solución en cadena, es más conveniente despejar a la relación de cargas  $\xi_i$ .

$$\xi_i = -\epsilon\tau_i + \sqrt{(\epsilon\tau_i)^2 + 2(1 + \epsilon\tau_{i-1}\xi_{i-1}) - \xi_{i-1}^2} \quad (3.20)$$

donde:

$\xi_{i-1}$  relación de cargas en el instante inicial del intervalo de análisis, según la ley de cierre;

$\xi_i$  relación de cargas en el instante final del periodo  $T$ , según la ley de cierre. Para el primer

$$\text{instante } \xi_0 = \sqrt{\frac{H_0}{H_0}} = 1$$

$\epsilon$  Constante de Allievi  $\epsilon = \frac{aV_0}{2gH_0}$

$g$  aceleración de la gravedad, en  $\text{m/s}^2$ ;

$V_0$  velocidad a la salida de la tubería antes del cierre, en  $\text{m/s}$ ;

$\tau_i$  ley lineal de cierre lento que se muestra en la figura 3.11 y que tiene por ecuación

$$\tau_i = 1 - \frac{i}{\theta}$$

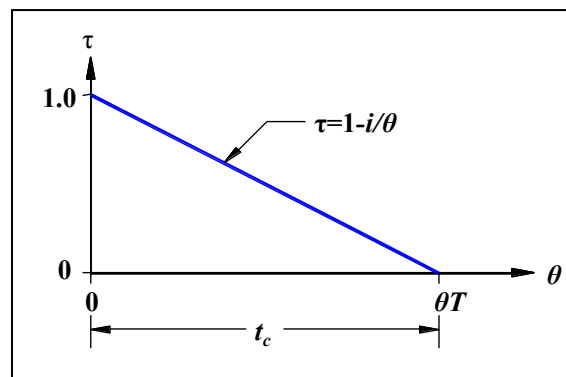


Figura 3.11. Ley de cierre lineal

### 3.9.1 Resultados

Siguiendo el procedimiento anterior, se obtuvo la variación de la carga de presión con respecto al tiempo para los instantes  $i=0$ ,  $i=1$ ,  $i=2$  e  $i=3$ , correspondientes a un tiempo de cierre de un segundo.

Para  $i = 0$

$$t_i = iT; \quad t_0 = 0 \times 0.00748 \text{ s}$$

$$\tau_i = 1 - \frac{i}{\theta}; \quad \tau_0 = 1 - \frac{0}{134} = 1$$

$$\xi_i = \sqrt{\frac{H_0}{H_0}} = 1$$

$$H_i = H_0 \xi_i^2; \quad H_0 = 1 \times 1^2 = 1 \text{ m}$$

$$\Delta H_i = H_i - H_0; \quad \Delta H_0 = H_0 - H_0; \quad \Delta H_0 = 1 - 1 = 0 \text{ m}$$

Para  $i=1$

$$\xi_1 = -\epsilon\tau_1 + \sqrt{(\epsilon\tau_1)^2 + 2(1 + \epsilon\tau_0\xi_0) - \xi_0^2}$$

$$\epsilon = \frac{aV_0}{2gH_0}; \quad \epsilon = \frac{1150.17 \times 1.19}{2 \times 9.81 \times 1} = 69.569$$

$$\tau_1 = 1 - \frac{1}{134} = 0.9925373$$

$$\tau_0 = 1$$

$$\xi_0 = 1$$

Sustituyendo valores,

$$\xi_1 = -(69.569 \times 0.9925373) + \sqrt{(69.569 \times 0.9925373)^2 + 2(1 + (69.569 \times 1)(1)) - 1^2}$$

$$\xi_1 = 1.007411$$

$$H_1 = H_0 \xi_1^2; \quad H_1 = 1 \times 1.007411^2 = 1.0148 \text{ m}$$

$$\Delta H_1 = H_1 - H_0; \quad \Delta H_1 = 1.0148 - 1 = 0.0148 \text{ m}$$

Para  $i=2$

$$\xi_2 = -\epsilon\tau_2 + \sqrt{(\epsilon\tau_2)^2 + 2(1 + \epsilon\tau_1\xi_1) - \xi_1^2}$$

$$\epsilon = \frac{aV_0}{2gH_0}; \quad \epsilon = \frac{1150.17 \times 1.19}{2 \times 9.81 \times 1} = 69.569$$

$$\tau_2 = 1 - \frac{2}{134} = 0.9850746$$

$$\tau_1 = 0.9925373$$

$$\xi_1 = 1.007411$$

Sustituyendo valores,

$$\xi_2 = -(69.569 \times 0.9850746) + \sqrt{(69.569 \times 0.9850746)^2 + 2(1 + (69.569 \times 0.9925373)(1.007411)) - 1.007411^2}$$

$$\xi_2 = 1.0147$$

$$H_2 = H_0 \xi_2^2; \quad H_2 = 1 \times 1.0147^2 = 1.0296 \text{ m}$$

$$\Delta H_2 = H_2 - H_0; \quad \Delta H_2 = 1.0296 - 1 = 0.0296 \text{ m}$$

**Para i=3**

$$\xi_3 = -\epsilon \tau_3 + \sqrt{(\epsilon \tau_2)^2 + 2(1 + \epsilon \tau_2 \xi_2) - \xi_2^2}$$

$$\epsilon = \frac{aV_0}{2gH_0}; \quad \epsilon = \frac{1150.17 \times 1.19}{2 \times 9.81 \times 1} = 69.569$$

$$\tau_3 = 1 - \frac{3}{134} = 0.97761194$$

$$\tau_2 = 0.9850746$$

$$\xi_2 = 1.0147$$

Sustituyendo valores,

$$\xi_3 = -(69.569 \times 0.97761194) + \sqrt{(69.569 \times 0.97761194)^2 + 2(1 + (69.569 \times 0.9850746)(1.0147)) - (1.0147)^2}$$

$$\xi_3 = 1.0219$$

$$H_3 = H_0 \xi_3^2; \quad H_3 = 1 \times 1.0219^2 = 1.044 \text{ m}$$

$$\Delta H_3 = H_3 - H_0; \quad \Delta H_3 = 1.044 - 1 = 0.044 \text{ m}$$

En seguida se muestra la totalidad de los resultados de la variación de la carga de presión para los tiempos de cierre de 1 s, 1.2 s y 1.5 s en las tablas 3.25a, 3.25c y 3.25e y su representación gráfica en las figuras 3.12a, 3.12b y 3.12c, respectivamente.



Tabla 3.25a. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.0$  s)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 0   | 0       | 1        | 1       | 1       | 0          |
| 1   | 0.00748 | 0.99254  | 1.00741 | 1.01488 | 0.01488    |
| 2   | 0.01495 | 0.98507  | 1.01472 | 1.02965 | 0.02965    |
| 3   | 0.02243 | 0.97761  | 1.02192 | 1.04432 | 0.04432    |
| 4   | 0.02991 | 0.97015  | 1.02902 | 1.05888 | 0.05888    |
| 5   | 0.03739 | 0.96269  | 1.03601 | 1.07331 | 0.07331    |
| 6   | 0.04486 | 0.95522  | 1.04289 | 1.08762 | 0.08762    |
| 7   | 0.05234 | 0.94776  | 1.04966 | 1.10180 | 0.10180    |
| 8   | 0.05982 | 0.94030  | 1.05633 | 1.11584 | 0.11584    |
| 9   | 0.06729 | 0.93284  | 1.06289 | 1.12974 | 0.12974    |
| 10  | 0.07477 | 0.92537  | 1.06934 | 1.14349 | 0.14349    |
| 11  | 0.08225 | 0.91791  | 1.07568 | 1.15709 | 0.15709    |
| 12  | 0.08973 | 0.91045  | 1.08191 | 1.17053 | 0.17053    |
| 13  | 0.09720 | 0.90299  | 1.08803 | 1.18381 | 0.18381    |
| 14  | 0.10468 | 0.89552  | 1.09404 | 1.19693 | 0.19693    |
| 15  | 0.11216 | 0.88806  | 1.09995 | 1.20988 | 0.20988    |
| 16  | 0.11963 | 0.88060  | 1.10574 | 1.22265 | 0.22265    |
| 17  | 0.12711 | 0.87313  | 1.11142 | 1.23525 | 0.23525    |
| 18  | 0.13459 | 0.86567  | 1.11699 | 1.24767 | 0.24767    |
| 19  | 0.14207 | 0.85821  | 1.12245 | 1.25990 | 0.25990    |
| 20  | 0.14954 | 0.85075  | 1.12781 | 1.27194 | 0.27194    |
| 21  | 0.15702 | 0.84328  | 1.13305 | 1.28380 | 0.28380    |
| 22  | 0.16450 | 0.83582  | 1.13818 | 1.29546 | 0.29546    |
| 23  | 0.17197 | 0.82836  | 1.14321 | 1.30693 | 0.30693    |
| 24  | 0.17945 | 0.82090  | 1.14813 | 1.31821 | 0.31821    |
| 25  | 0.18693 | 0.81343  | 1.15294 | 1.32928 | 0.32928    |
| 26  | 0.19441 | 0.80597  | 1.15765 | 1.34015 | 0.34015    |
| 27  | 0.20188 | 0.79851  | 1.16225 | 1.35082 | 0.35082    |

Tabla 3.25a. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.0$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 28  | 0.20936 | 0.79104  | 1.16674 | 1.36129 | 0.36129    |
| 29  | 0.21684 | 0.78358  | 1.17113 | 1.37156 | 0.37156    |
| 30  | 0.22431 | 0.77612  | 1.17542 | 1.38161 | 0.38161    |
| 31  | 0.23179 | 0.76866  | 1.17960 | 1.39147 | 0.39147    |
| 32  | 0.23927 | 0.76119  | 1.18369 | 1.40111 | 0.40111    |
| 33  | 0.24675 | 0.75373  | 1.18767 | 1.41055 | 0.41055    |
| 34  | 0.25422 | 0.74627  | 1.19155 | 1.41978 | 0.41978    |
| 35  | 0.26170 | 0.73881  | 1.19533 | 1.42880 | 0.42880    |
| 36  | 0.26918 | 0.73134  | 1.19901 | 1.43762 | 0.43762    |
| 37  | 0.27665 | 0.72388  | 1.20259 | 1.44623 | 0.44623    |
| 38  | 0.28413 | 0.71642  | 1.20608 | 1.45464 | 0.45464    |
| 39  | 0.29161 | 0.70896  | 1.20948 | 1.46284 | 0.46284    |
| 40  | 0.29909 | 0.70149  | 1.21278 | 1.47083 | 0.47083    |
| 41  | 0.30656 | 0.69403  | 1.21599 | 1.47863 | 0.47863    |
| 42  | 0.31404 | 0.68657  | 1.21910 | 1.48622 | 0.48622    |
| 43  | 0.32152 | 0.67910  | 1.22213 | 1.49361 | 0.49361    |
| 44  | 0.32899 | 0.67164  | 1.22507 | 1.50080 | 0.50080    |
| 45  | 0.33647 | 0.66418  | 1.22792 | 1.50779 | 0.50779    |
| 46  | 0.34395 | 0.65672  | 1.23069 | 1.51459 | 0.51459    |
| 47  | 0.35143 | 0.64925  | 1.23337 | 1.52119 | 0.52119    |
| 48  | 0.35890 | 0.64179  | 1.23596 | 1.52760 | 0.52760    |
| 49  | 0.36638 | 0.63433  | 1.23848 | 1.53382 | 0.53382    |
| 50  | 0.37386 | 0.62687  | 1.24091 | 1.53986 | 0.53986    |
| 51  | 0.38133 | 0.61940  | 1.24326 | 1.54571 | 0.54571    |
| 52  | 0.38881 | 0.61194  | 1.24554 | 1.55137 | 0.55137    |
| 53  | 0.39629 | 0.60448  | 1.24774 | 1.55686 | 0.55686    |
| 54  | 0.40377 | 0.59701  | 1.24987 | 1.56217 | 0.56217    |

Tabla 3.25a. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.0$  s) (Continuación)

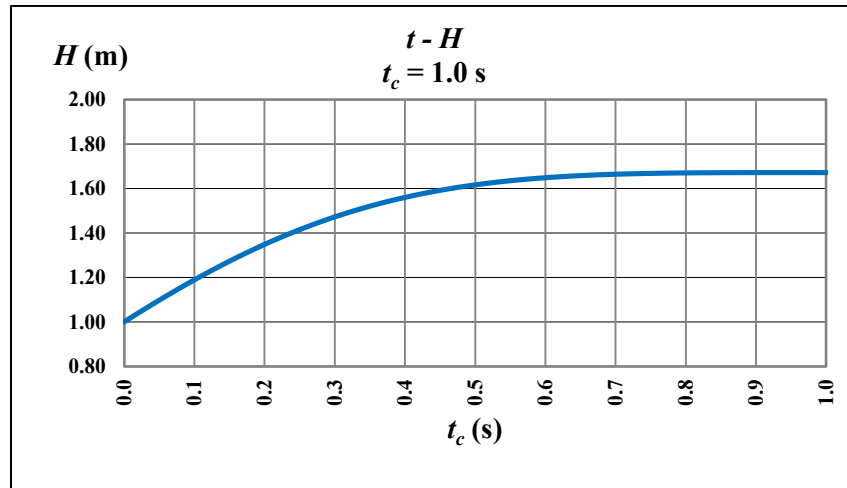
| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 55  | 0.41124 | 0.58955  | 1.25192 | 1.56730 | 0.56730    |
| 56  | 0.41872 | 0.58209  | 1.25390 | 1.57226 | 0.57226    |
| 57  | 0.42620 | 0.57463  | 1.25581 | 1.57706 | 0.57706    |
| 58  | 0.43367 | 0.56716  | 1.25765 | 1.58168 | 0.58168    |
| 59  | 0.44115 | 0.55970  | 1.25942 | 1.58614 | 0.58614    |
| 60  | 0.44863 | 0.55224  | 1.26113 | 1.59044 | 0.59044    |
| 61  | 0.45611 | 0.54478  | 1.26277 | 1.59459 | 0.59459    |
| 62  | 0.46358 | 0.53731  | 1.26435 | 1.59858 | 0.59858    |
| 63  | 0.47106 | 0.52985  | 1.26587 | 1.60241 | 0.60241    |
| 64  | 0.47854 | 0.52239  | 1.26732 | 1.60611 | 0.60611    |
| 65  | 0.48601 | 0.51493  | 1.26872 | 1.60965 | 0.60965    |
| 66  | 0.49349 | 0.50746  | 1.27006 | 1.61305 | 0.61305    |
| 67  | 0.50097 | 0.50000  | 1.27135 | 1.61632 | 0.61632    |
| 68  | 0.50845 | 0.49254  | 1.27258 | 1.61945 | 0.61945    |
| 69  | 0.51592 | 0.48507  | 1.27375 | 1.62245 | 0.62245    |
| 70  | 0.52340 | 0.47761  | 1.27488 | 1.62532 | 0.62532    |
| 71  | 0.53088 | 0.47015  | 1.27596 | 1.62806 | 0.62806    |
| 72  | 0.53835 | 0.46269  | 1.27698 | 1.63068 | 0.63068    |
| 73  | 0.54583 | 0.45522  | 1.27796 | 1.63319 | 0.63319    |
| 74  | 0.55331 | 0.44776  | 1.27890 | 1.63558 | 0.63558    |
| 75  | 0.56079 | 0.44030  | 1.27979 | 1.63785 | 0.63785    |
| 76  | 0.56826 | 0.43284  | 1.28063 | 1.64002 | 0.64002    |
| 77  | 0.57574 | 0.42537  | 1.28144 | 1.64208 | 0.64208    |
| 78  | 0.58322 | 0.41791  | 1.28220 | 1.64404 | 0.64404    |
| 79  | 0.59069 | 0.41045  | 1.28293 | 1.64590 | 0.64590    |
| 80  | 0.59817 | 0.40299  | 1.28361 | 1.64767 | 0.64767    |
| 81  | 0.60565 | 0.39552  | 1.28427 | 1.64934 | 0.64934    |

Tabla 3.25a. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.0$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 82  | 0.61313 | 0.38806  | 1.28488 | 1.65092 | 0.65092    |
| 83  | 0.62060 | 0.38060  | 1.28546 | 1.65242 | 0.65242    |
| 84  | 0.62808 | 0.37313  | 1.28601 | 1.65383 | 0.65383    |
| 85  | 0.63556 | 0.36567  | 1.28653 | 1.65516 | 0.65516    |
| 86  | 0.64303 | 0.35821  | 1.28702 | 1.65641 | 0.65641    |
| 87  | 0.65051 | 0.35075  | 1.28748 | 1.65759 | 0.65759    |
| 88  | 0.65799 | 0.34328  | 1.28791 | 1.65870 | 0.65870    |
| 91  | 0.68042 | 0.32090  | 1.28904 | 1.66162 | 0.66162    |
| 92  | 0.68790 | 0.31343  | 1.28937 | 1.66247 | 0.66247    |
| 93  | 0.69537 | 0.30597  | 1.28968 | 1.66326 | 0.66326    |
| 94  | 0.70285 | 0.29851  | 1.28996 | 1.66400 | 0.66400    |
| 95  | 0.71033 | 0.29104  | 1.29023 | 1.66468 | 0.66468    |
| 96  | 0.71781 | 0.28358  | 1.29047 | 1.66532 | 0.66532    |
| 97  | 0.72528 | 0.27612  | 1.29070 | 1.66590 | 0.66590    |
| 98  | 0.73276 | 0.26866  | 1.29091 | 1.66645 | 0.66645    |
| 99  | 0.74024 | 0.26119  | 1.29110 | 1.66694 | 0.66694    |
| 100 | 0.74771 | 0.25373  | 1.29128 | 1.66740 | 0.66740    |
| 101 | 0.75519 | 0.24627  | 1.29144 | 1.66782 | 0.66782    |
| 102 | 0.76267 | 0.23881  | 1.29159 | 1.66820 | 0.66820    |
| 103 | 0.77015 | 0.23134  | 1.29172 | 1.66855 | 0.66855    |
| 104 | 0.77762 | 0.22388  | 1.29185 | 1.66887 | 0.66887    |
| 105 | 0.78510 | 0.21642  | 1.29196 | 1.66916 | 0.66916    |
| 106 | 0.79258 | 0.20896  | 1.29206 | 1.66942 | 0.66942    |
| 107 | 0.80005 | 0.20149  | 1.29215 | 1.66965 | 0.66965    |
| 108 | 0.80753 | 0.19403  | 1.29223 | 1.66986 | 0.66986    |

Tabla 3.25a. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.0$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 109 | 0.81501 | 0.18657  | 1.29230 | 1.67005 | 0.67005    |
| 110 | 0.82249 | 0.17910  | 1.29237 | 1.67021 | 0.67021    |
| 111 | 0.82996 | 0.17164  | 1.29242 | 1.67036 | 0.67036    |
| 112 | 0.83744 | 0.16418  | 1.29247 | 1.67048 | 0.67048    |
| 113 | 0.84492 | 0.15672  | 1.29252 | 1.67060 | 0.67060    |
| 114 | 0.85239 | 0.14925  | 1.29255 | 1.67069 | 0.67069    |
| 115 | 0.85987 | 0.14179  | 1.29259 | 1.67078 | 0.67078    |
| 116 | 0.86735 | 0.13433  | 1.29261 | 1.67085 | 0.67085    |
| 117 | 0.87483 | 0.12687  | 1.29264 | 1.67091 | 0.67091    |
| 118 | 0.88230 | 0.11940  | 1.29266 | 1.67096 | 0.67096    |
| 119 | 0.88978 | 0.11194  | 1.29267 | 1.67100 | 0.67100    |
| 120 | 0.89726 | 0.10448  | 1.29269 | 1.67104 | 0.67104    |
| 121 | 0.90473 | 0.09701  | 1.29270 | 1.67107 | 0.67107    |
| 122 | 0.91221 | 0.08955  | 1.29271 | 1.67109 | 0.67109    |
| 123 | 0.91969 | 0.08209  | 1.29271 | 1.67110 | 0.67110    |
| 124 | 0.92717 | 0.07463  | 1.29272 | 1.67112 | 0.67112    |
| 125 | 0.93464 | 0.06716  | 1.29272 | 1.67113 | 0.67113    |
| 126 | 0.94212 | 0.05970  | 1.29272 | 1.67113 | 0.67113    |
| 127 | 0.94960 | 0.05224  | 1.29273 | 1.67114 | 0.67114    |
| 128 | 0.95707 | 0.04478  | 1.29273 | 1.67114 | 0.67114    |
| 129 | 0.96455 | 0.03731  | 1.29273 | 1.67114 | 0.67114    |
| 130 | 0.97203 | 0.02985  | 1.29273 | 1.67115 | 0.67115    |
| 131 | 0.97951 | 0.02239  | 1.29273 | 1.67115 | 0.67115    |
| 132 | 0.98698 | 0.01493  | 1.29273 | 1.67115 | 0.67115    |
| 133 | 0.99446 | 0.00746  | 1.29273 | 1.67115 | 0.67115    |
| 134 | 1.00194 | 0.00000  | 1.29273 | 1.67115 | 0.67115    |

Figura 3.12a. Variación de  $H$  ( $t_c=1.0$  s)

Finalmente, de la solución obtenida con las ecuaciones de Allievi, observamos que la carga máxima que se presentó fue

$$H_{m\acute{a}x} = 1.671 \text{ m}$$

y la sobrepresión máxima

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = H_{m\acute{a}x} - H$$

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = 1.671 - 1.0 = 0.671 \text{ m}$$

Con la medición realizada se tiene

$$H_{m\acute{a}x} = 1.5 \text{ m}$$

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = 1.5 - 0.61 = 0.89 \text{ m}$$

Comparando la carga máxima y la sobrepresión máxima calculada con la medida, obtuvimos los siguientes porcentajes de error.

Tabla 3.25b. Porcentaje de error ( $t_c=1.0$  s)

|                   | Allievi | Medido | % error |
|-------------------|---------|--------|---------|
| $H_{m\acute{a}x}$ | 1.671   | 1.5    | 11%     |
| $\Delta H$        | 0.671   | 0.89   | 25%     |

**Resultados con  $t_c = 1.2$  segundos y  $t_c = 1.5$  segundos****Para  $t_c = 1.2$  s****Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s)**

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 0   | 0       | 1        | 1       | 1       | 0          |
| 1   | 0.00748 | 0.99379  | 1.00616 | 1.01236 | 0.01236    |
| 2   | 0.01495 | 0.98758  | 1.01222 | 1.02459 | 0.02459    |
| 3   | 0.02243 | 0.98137  | 1.01818 | 1.03669 | 0.03669    |
| 4   | 0.02991 | 0.97516  | 1.02403 | 1.04865 | 0.04865    |
| 5   | 0.03739 | 0.96894  | 1.02979 | 1.06047 | 0.06047    |
| 6   | 0.04486 | 0.96273  | 1.03544 | 1.07214 | 0.07214    |
| 7   | 0.05234 | 0.95652  | 1.04100 | 1.08367 | 0.08367    |
| 8   | 0.05982 | 0.95031  | 1.04645 | 1.09506 | 0.09506    |
| 9   | 0.06729 | 0.94410  | 1.05180 | 1.10629 | 0.10629    |
| 10  | 0.07477 | 0.93789  | 1.05705 | 1.11736 | 0.11736    |
| 11  | 0.08225 | 0.93168  | 1.06221 | 1.12828 | 0.12828    |
| 12  | 0.08973 | 0.92547  | 1.06726 | 1.13904 | 0.13904    |
| 13  | 0.09720 | 0.91925  | 1.07221 | 1.14964 | 0.14964    |
| 14  | 0.10468 | 0.91304  | 1.07707 | 1.16008 | 0.16008    |
| 15  | 0.11216 | 0.90683  | 1.08183 | 1.17035 | 0.17035    |
| 16  | 0.11963 | 0.90062  | 1.08649 | 1.18046 | 0.18046    |
| 17  | 0.12711 | 0.89441  | 1.09106 | 1.19040 | 0.19040    |
| 18  | 0.13459 | 0.88820  | 1.09553 | 1.20018 | 0.20018    |
| 19  | 0.14207 | 0.88199  | 1.09990 | 1.20978 | 0.20978    |
| 20  | 0.14954 | 0.87578  | 1.10418 | 1.21922 | 0.21922    |
| 21  | 0.15702 | 0.86957  | 1.10837 | 1.22848 | 0.22848    |
| 22  | 0.16450 | 0.86335  | 1.11246 | 1.23758 | 0.23758    |
| 23  | 0.17197 | 0.85714  | 1.11647 | 1.24650 | 0.24650    |
| 24  | 0.17945 | 0.85093  | 1.12038 | 1.25525 | 0.25525    |
| 25  | 0.18693 | 0.84472  | 1.12420 | 1.26383 | 0.26383    |
| 26  | 0.19441 | 0.83851  | 1.12794 | 1.27224 | 0.27224    |
| 27  | 0.20188 | 0.83230  | 1.13158 | 1.28048 | 0.28048    |

Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 28  | 0.20936 | 0.82609  | 1.13514 | 1.28854 | 0.28854    |
| 29  | 0.21684 | 0.81988  | 1.13861 | 1.29644 | 0.29644    |
| 30  | 0.22431 | 0.81366  | 1.14200 | 1.30417 | 0.30417    |
| 31  | 0.23179 | 0.80745  | 1.14530 | 1.31172 | 0.31172    |
| 32  | 0.23927 | 0.80124  | 1.14853 | 1.31911 | 0.31911    |
| 33  | 0.24675 | 0.79503  | 1.15166 | 1.32633 | 0.32633    |
| 34  | 0.25422 | 0.78882  | 1.15472 | 1.33339 | 0.33339    |
| 35  | 0.26170 | 0.78261  | 1.15770 | 1.34027 | 0.34027    |
| 36  | 0.26918 | 0.77640  | 1.16060 | 1.34700 | 0.34700    |
| 37  | 0.27665 | 0.77019  | 1.16343 | 1.35356 | 0.35356    |
| 38  | 0.28413 | 0.76398  | 1.16617 | 1.35996 | 0.35996    |
| 39  | 0.29161 | 0.75776  | 1.16885 | 1.36620 | 0.36620    |
| 40  | 0.29909 | 0.75155  | 1.17145 | 1.37229 | 0.37229    |
| 41  | 0.30656 | 0.74534  | 1.17397 | 1.37821 | 0.37821    |
| 42  | 0.31404 | 0.73913  | 1.17643 | 1.38398 | 0.38398    |
| 43  | 0.32152 | 0.73292  | 1.17881 | 1.38960 | 0.38960    |
| 44  | 0.32899 | 0.72671  | 1.18113 | 1.39507 | 0.39507    |
| 45  | 0.33647 | 0.72050  | 1.18338 | 1.40039 | 0.40039    |
| 46  | 0.34395 | 0.71429  | 1.18556 | 1.40556 | 0.40556    |
| 47  | 0.35143 | 0.70807  | 1.18768 | 1.41058 | 0.41058    |
| 48  | 0.35890 | 0.70186  | 1.18973 | 1.41546 | 0.41546    |
| 49  | 0.36638 | 0.69565  | 1.19172 | 1.42021 | 0.42021    |
| 50  | 0.37386 | 0.68944  | 1.19365 | 1.42481 | 0.42481    |
| 51  | 0.38133 | 0.68323  | 1.19552 | 1.42927 | 0.42927    |
| 52  | 0.38881 | 0.67702  | 1.19733 | 1.43360 | 0.43360    |
| 53  | 0.39629 | 0.67081  | 1.19908 | 1.43780 | 0.43780    |
| 54  | 0.40377 | 0.66460  | 1.20078 | 1.44187 | 0.44187    |



Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$<br>(m) | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$<br>(m) | $\Delta H$<br>(m) |
|-----|------------|----------|-----------|------------|-------------------|
| 55  | 0.41124    | 0.65839  | 1.20242   | 1.44581    | 0.44581           |
| 56  | 0.41872    | 0.65217  | 1.20400   | 1.44963    | 0.44963           |
| 57  | 0.42620    | 0.64596  | 1.20554   | 1.45332    | 0.45332           |
| 58  | 0.43367    | 0.63975  | 1.20702   | 1.45689    | 0.45689           |
| 59  | 0.44115    | 0.63354  | 1.20845   | 1.46035    | 0.46035           |
| 60  | 0.44863    | 0.62733  | 1.20983   | 1.46369    | 0.46369           |
| 61  | 0.45611    | 0.62112  | 1.21116   | 1.46691    | 0.46691           |
| 62  | 0.46358    | 0.61491  | 1.21245   | 1.47003    | 0.47003           |
| 63  | 0.47106    | 0.60870  | 1.21369   | 1.47303    | 0.47303           |
| 64  | 0.47854    | 0.60248  | 1.21488   | 1.47593    | 0.47593           |
| 65  | 0.48601    | 0.59627  | 1.21603   | 1.47873    | 0.47873           |
| 66  | 0.49349    | 0.59006  | 1.21714   | 1.48143    | 0.48143           |
| 67  | 0.50097    | 0.58385  | 1.21820   | 1.48402    | 0.48402           |
| 68  | 0.50845    | 0.57764  | 1.21923   | 1.48652    | 0.48652           |
| 69  | 0.51592    | 0.57143  | 1.22022   | 1.48893    | 0.48893           |
| 70  | 0.52340    | 0.56522  | 1.22116   | 1.49124    | 0.49124           |
| 71  | 0.53088    | 0.55901  | 1.22208   | 1.49347    | 0.49347           |
| 72  | 0.53835    | 0.55280  | 1.22295   | 1.49561    | 0.49561           |
| 73  | 0.54583    | 0.54658  | 1.22379   | 1.49766    | 0.49766           |
| 74  | 0.55331    | 0.54037  | 1.22459   | 1.49963    | 0.49963           |
| 75  | 0.56079    | 0.53416  | 1.22537   | 1.50152    | 0.50152           |
| 76  | 0.56826    | 0.52795  | 1.22611   | 1.50334    | 0.50334           |
| 77  | 0.57574    | 0.52174  | 1.22681   | 1.50507    | 0.50507           |
| 78  | 0.58322    | 0.51553  | 1.22749   | 1.50674    | 0.50674           |
| 79  | 0.59069    | 0.50932  | 1.22814   | 1.50833    | 0.50833           |
| 80  | 0.59817    | 0.50311  | 1.22876   | 1.50985    | 0.50985           |
| 81  | 0.60565    | 0.49689  | 1.22935   | 1.51131    | 0.51131           |

Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$<br>(m) | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$<br>(m) | $\Delta H$<br>(m) |
|-----|------------|----------|-----------|------------|-------------------|
| 82  | 0.61313    | 0.49068  | 1.22992   | 1.51270    | 0.51270           |
| 83  | 0.62060    | 0.48447  | 1.23046   | 1.51403    | 0.51403           |
| 84  | 0.62808    | 0.47826  | 1.23097   | 1.51530    | 0.51530           |
| 85  | 0.63556    | 0.47205  | 1.23146   | 1.51650    | 0.51650           |
| 86  | 0.64303    | 0.46584  | 1.23193   | 1.51766    | 0.51766           |
| 87  | 0.65051    | 0.45963  | 1.23238   | 1.51875    | 0.51875           |
| 88  | 0.65799    | 0.45342  | 1.23280   | 1.51980    | 0.51980           |
| 89  | 0.66547    | 0.44720  | 1.23320   | 1.52079    | 0.52079           |
| 90  | 0.67294    | 0.44099  | 1.23358   | 1.52173    | 0.52173           |
| 91  | 0.68042    | 0.43478  | 1.23395   | 1.52263    | 0.52263           |
| 92  | 0.68790    | 0.42857  | 1.23429   | 1.52347    | 0.52347           |
| 93  | 0.69537    | 0.42236  | 1.23462   | 1.52428    | 0.52428           |
| 94  | 0.70285    | 0.41615  | 1.23493   | 1.52504    | 0.52504           |
| 95  | 0.71033    | 0.40994  | 1.23522   | 1.52576    | 0.52576           |
| 96  | 0.71781    | 0.40373  | 1.23549   | 1.52644    | 0.52644           |
| 97  | 0.72528    | 0.39752  | 1.23575   | 1.52709    | 0.52709           |
| 98  | 0.73276    | 0.39130  | 1.23600   | 1.52770    | 0.52770           |
| 99  | 0.74024    | 0.38509  | 1.23623   | 1.52827    | 0.52827           |
| 100 | 0.74771    | 0.37888  | 1.23645   | 1.52881    | 0.52881           |
| 101 | 0.75519    | 0.37267  | 1.23666   | 1.52932    | 0.52932           |
| 102 | 0.76267    | 0.36646  | 1.23685   | 1.52979    | 0.52979           |
| 103 | 0.77015    | 0.36025  | 1.23703   | 1.53024    | 0.53024           |
| 104 | 0.77762    | 0.35404  | 1.23720   | 1.53066    | 0.53066           |
| 105 | 0.78510    | 0.34783  | 1.23736   | 1.53106    | 0.53106           |
| 106 | 0.79258    | 0.34161  | 1.23751   | 1.53143    | 0.53143           |

Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$<br>(m) | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$<br>(m) | $\Delta H$<br>(m) |
|-----|------------|----------|-----------|------------|-------------------|
| 107 | 0.80005    | 0.33540  | 1.23765   | 1.53177    | 0.53177           |
| 108 | 0.80753    | 0.32919  | 1.23778   | 1.53209    | 0.53209           |
| 109 | 0.81501    | 0.32298  | 1.23790   | 1.53239    | 0.53239           |
| 110 | 0.82249    | 0.31677  | 1.23801   | 1.53267    | 0.53267           |
| 111 | 0.82996    | 0.31056  | 1.23812   | 1.53293    | 0.53293           |
| 112 | 0.83744    | 0.30435  | 1.23821   | 1.53317    | 0.53317           |
| 113 | 0.84492    | 0.29814  | 1.23830   | 1.53339    | 0.53339           |
| 114 | 0.85239    | 0.29193  | 1.23839   | 1.53360    | 0.53360           |
| 115 | 0.85987    | 0.28571  | 1.23846   | 1.53379    | 0.53379           |
| 116 | 0.86735    | 0.27950  | 1.23853   | 1.53397    | 0.53397           |
| 117 | 0.87483    | 0.27329  | 1.23860   | 1.53413    | 0.53413           |
| 118 | 0.88230    | 0.26708  | 1.23866   | 1.53428    | 0.53428           |
| 119 | 0.88978    | 0.26087  | 1.23871   | 1.53441    | 0.53441           |
| 120 | 0.89726    | 0.25466  | 1.23876   | 1.53454    | 0.53454           |
| 121 | 0.90473    | 0.24845  | 1.23881   | 1.53465    | 0.53465           |
| 122 | 0.91221    | 0.24224  | 1.23885   | 1.53475    | 0.53475           |
| 123 | 0.91969    | 0.23602  | 1.23889   | 1.53485    | 0.53485           |
| 124 | 0.92717    | 0.22981  | 1.23892   | 1.53493    | 0.53493           |
| 125 | 0.93464    | 0.22360  | 1.23896   | 1.53501    | 0.53501           |
| 126 | 0.94212    | 0.21739  | 1.23898   | 1.53508    | 0.53508           |
| 127 | 0.94960    | 0.21118  | 1.23901   | 1.53514    | 0.53514           |
| 128 | 0.95707    | 0.20497  | 1.23903   | 1.53520    | 0.53520           |
| 129 | 0.96455    | 0.19876  | 1.23905   | 1.53525    | 0.53525           |
| 130 | 0.97203    | 0.19255  | 1.23907   | 1.53529    | 0.53529           |
| 131 | 0.97951    | 0.18634  | 1.23909   | 1.53533    | 0.53533           |
| 132 | 0.98698    | 0.18012  | 1.23910   | 1.53537    | 0.53537           |

Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$<br>(m) | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$<br>(m) | $\Delta H$<br>(m) |
|-----|------------|----------|-----------|------------|-------------------|
| 133 | 0.99446    | 0.17391  | 1.23911   | 1.53540    | 0.53540           |
| 134 | 1.00194    | 0.16770  | 1.23912   | 1.53543    | 0.53543           |
| 135 | 1.00941    | 0.16149  | 1.23913   | 1.53545    | 0.53545           |
| 136 | 1.01689    | 0.15528  | 1.23914   | 1.53547    | 0.53547           |
| 137 | 1.02437    | 0.14907  | 1.23915   | 1.53549    | 0.53549           |
| 138 | 1.03185    | 0.14286  | 1.23915   | 1.53550    | 0.53550           |
| 139 | 1.03932    | 0.13665  | 1.23916   | 1.53551    | 0.53551           |
| 140 | 1.04680    | 0.13043  | 1.23916   | 1.53553    | 0.53553           |
| 141 | 1.05428    | 0.12422  | 1.23917   | 1.53553    | 0.53553           |
| 142 | 1.06175    | 0.11801  | 1.23917   | 1.53554    | 0.53554           |
| 143 | 1.06923    | 0.11180  | 1.23917   | 1.53555    | 0.53555           |
| 144 | 1.07671    | 0.10559  | 1.23917   | 1.53555    | 0.53555           |
| 145 | 1.08419    | 0.09938  | 1.23918   | 1.53556    | 0.53556           |
| 146 | 1.09166    | 0.09317  | 1.23918   | 1.53556    | 0.53556           |
| 147 | 1.09914    | 0.08696  | 1.23918   | 1.53556    | 0.53556           |
| 148 | 1.10662    | 0.08075  | 1.23918   | 1.53556    | 0.53556           |
| 149 | 1.11409    | 0.07453  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 150 | 1.12157    | 0.06832  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 151 | 1.12905    | 0.06211  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 152 | 1.13653    | 0.05590  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 153 | 1.14400    | 0.04969  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 154 | 1.15148    | 0.04348  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 155 | 1.15896    | 0.03727  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 156 | 1.16643    | 0.03106  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 157 | 1.17391    | 0.02484  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |
| 158 | 1.18139    | 0.01863  | 1.23918   | 1.53557    | 0.53557           |

Tabla 3.25c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.2$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|-----------|---------|------------|
|     | (m)     |          |           | (m)     | (m)        |
| 159 | 1.18887 | 0.01242  | 1.23918   | 1.53557 | 0.53557    |
| 160 | 1.19634 | 0.00621  | 1.23918   | 1.53557 | 0.53557    |
| 161 | 1.20382 | 0.00000  | 1.23918   | 1.53557 | 0.53557    |

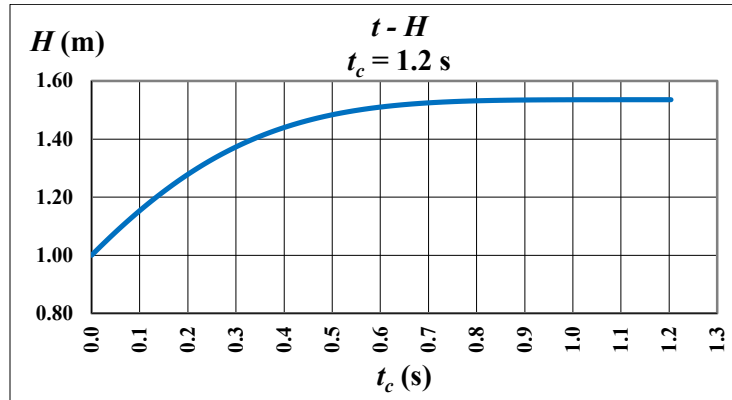


Figura 3.12b. Variación de  $H$  ( $t_c=1.2$  s)

Se observó que para un tiempo de cierre de 1.2 s, la carga máxima fue de  $H_{m\acute{a}x} = 1.536$  m y la sobrepresión máxima

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = H_{m\acute{a}x} - H$$

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = 1.536 - 1.0 = 0.536 \text{ m}$$

Con la medición realizada, sucedió lo siguiente

$$H_{m\acute{a}x} = 1.5 \text{ m}$$

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = 1.5 - 0.61 = 0.89 \text{ m}$$

Comparando la carga máxima y la sobrepresión máxima calculada con la medida, obtuvimos los siguientes porcentajes de error.

Tabla 3.25d. Porcentaje de error ( $t_c=1.2$  s)

|                   | Allievi | Medido | % error |
|-------------------|---------|--------|---------|
| $H_{m\acute{a}x}$ | 1.536   | 1.5    | 2%      |
| $\Delta H$        | 0.536   | 0.89   | 40%     |

Para  $t_c = 1.5$  s

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 0   | 0       | 1        | 1       | 1       | 0          |
| 1   | 0.00748 | 0.99502  | 1.00493 | 1.00988 | 0.00988    |
| 2   | 0.01495 | 0.99005  | 1.00976 | 1.01962 | 0.01962    |
| 3   | 0.02243 | 0.98507  | 1.01451 | 1.02923 | 0.02923    |
| 4   | 0.02991 | 0.98010  | 1.01916 | 1.03869 | 0.03869    |
| 5   | 0.03739 | 0.97512  | 1.02372 | 1.04800 | 0.04800    |
| 6   | 0.04486 | 0.97015  | 1.02819 | 1.05718 | 0.05718    |
| 7   | 0.05234 | 0.96517  | 1.03257 | 1.06621 | 0.06621    |
| 8   | 0.05982 | 0.96020  | 1.03687 | 1.07509 | 0.07509    |
| 9   | 0.06729 | 0.95522  | 1.04107 | 1.08383 | 0.08383    |
| 10  | 0.07477 | 0.95025  | 1.04519 | 1.09242 | 0.09242    |
| 11  | 0.08225 | 0.94527  | 1.04922 | 1.10086 | 0.10086    |
| 12  | 0.08973 | 0.94030  | 1.05317 | 1.10916 | 0.10916    |
| 13  | 0.09720 | 0.93532  | 1.05703 | 1.11731 | 0.11731    |
| 14  | 0.10468 | 0.93035  | 1.06081 | 1.12531 | 0.12531    |
| 15  | 0.11216 | 0.92537  | 1.06450 | 1.13317 | 0.13317    |
| 16  | 0.11963 | 0.92040  | 1.06812 | 1.14088 | 0.14088    |
| 17  | 0.12711 | 0.91542  | 1.07165 | 1.14844 | 0.14844    |
| 18  | 0.13459 | 0.91045  | 1.07511 | 1.15585 | 0.15585    |
| 19  | 0.14207 | 0.90547  | 1.07848 | 1.16312 | 0.16312    |
| 20  | 0.14954 | 0.90050  | 1.08178 | 1.17025 | 0.17025    |
| 21  | 0.15702 | 0.89552  | 1.08500 | 1.17723 | 0.17723    |
| 22  | 0.16450 | 0.89055  | 1.08815 | 1.18407 | 0.18407    |
| 23  | 0.17197 | 0.88557  | 1.09122 | 1.19076 | 0.19076    |
| 24  | 0.17945 | 0.88060  | 1.09422 | 1.19731 | 0.19731    |
| 25  | 0.18693 | 0.87562  | 1.09714 | 1.20373 | 0.20373    |
| 26  | 0.19441 | 0.87065  | 1.10000 | 1.21000 | 0.21000    |
| 27  | 0.20188 | 0.86567  | 1.10278 | 1.21613 | 0.21613    |

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|-----------|---------|------------|
|     | (m)     |          |           | (m)     | (m)        |
| 28  | 0.20936 | 0.86070  | 1.10550   | 1.22213 | 0.22213    |
| 29  | 0.21684 | 0.85572  | 1.10815   | 1.22799 | 0.22799    |
| 30  | 0.22431 | 0.85075  | 1.11073   | 1.23372 | 0.23372    |
| 31  | 0.23179 | 0.84577  | 1.11324   | 1.23931 | 0.23931    |
| 32  | 0.23927 | 0.84080  | 1.11569   | 1.24477 | 0.24477    |
| 33  | 0.24675 | 0.83582  | 1.11808   | 1.25010 | 0.25010    |
| 34  | 0.25422 | 0.83085  | 1.12040   | 1.25531 | 0.25531    |
| 35  | 0.26170 | 0.82587  | 1.12267   | 1.26038 | 0.26038    |
| 36  | 0.26918 | 0.82090  | 1.12487   | 1.26533 | 0.26533    |
| 37  | 0.27665 | 0.81592  | 1.12701   | 1.27016 | 0.27016    |
| 38  | 0.28413 | 0.81095  | 1.12910   | 1.27486 | 0.27486    |
| 39  | 0.29161 | 0.80597  | 1.13112   | 1.27944 | 0.27944    |
| 40  | 0.29909 | 0.80100  | 1.13310   | 1.28391 | 0.28391    |
| 41  | 0.30656 | 0.79602  | 1.13501   | 1.28826 | 0.28826    |
| 42  | 0.31404 | 0.79104  | 1.13688   | 1.29249 | 0.29249    |
| 43  | 0.32152 | 0.78607  | 1.13869   | 1.29661 | 0.29661    |
| 44  | 0.32899 | 0.78109  | 1.14045   | 1.30062 | 0.30062    |
| 45  | 0.33647 | 0.77612  | 1.14215   | 1.30452 | 0.30452    |
| 46  | 0.34395 | 0.77114  | 1.14381   | 1.30831 | 0.30831    |
| 47  | 0.35143 | 0.76617  | 1.14542   | 1.31199 | 0.31199    |
| 48  | 0.35890 | 0.76119  | 1.14698   | 1.31557 | 0.31557    |
| 49  | 0.36638 | 0.75622  | 1.14850   | 1.31905 | 0.31905    |
| 50  | 0.37386 | 0.75124  | 1.14997   | 1.32243 | 0.32243    |
| 51  | 0.38133 | 0.74627  | 1.15140   | 1.32571 | 0.32571    |
| 52  | 0.38881 | 0.74129  | 1.15278   | 1.32890 | 0.32890    |
| 53  | 0.39629 | 0.73632  | 1.15412   | 1.33199 | 0.33199    |
| 54  | 0.40377 | 0.73134  | 1.15542   | 1.33499 | 0.33499    |

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|-----------|---------|------------|
|     | (m)     |          |           | (m)     | (m)        |
| 55  | 0.41124 | 0.72637  | 1.15667   | 1.33789 | 0.33789    |
| 56  | 0.41872 | 0.72139  | 1.15789   | 1.34071 | 0.34071    |
| 57  | 0.42620 | 0.71642  | 1.15907   | 1.34344 | 0.34344    |
| 58  | 0.43367 | 0.71144  | 1.16021   | 1.34609 | 0.34609    |
| 59  | 0.44115 | 0.70647  | 1.16131   | 1.34865 | 0.34865    |
| 60  | 0.44863 | 0.70149  | 1.16238   | 1.35113 | 0.35113    |
| 61  | 0.45611 | 0.69652  | 1.16342   | 1.35354 | 0.35354    |
| 62  | 0.46358 | 0.69154  | 1.16441   | 1.35586 | 0.35586    |
| 63  | 0.47106 | 0.68657  | 1.16538   | 1.35811 | 0.35811    |
| 64  | 0.47854 | 0.68159  | 1.16631   | 1.36029 | 0.36029    |
| 65  | 0.48601 | 0.67662  | 1.16721   | 1.36239 | 0.36239    |
| 66  | 0.49349 | 0.67164  | 1.16808   | 1.36442 | 0.36442    |
| 67  | 0.50097 | 0.66667  | 1.16892   | 1.36638 | 0.36638    |
| 68  | 0.50845 | 0.66169  | 1.16974   | 1.36828 | 0.36828    |
| 69  | 0.51592 | 0.65672  | 1.17052   | 1.37011 | 0.37011    |
| 70  | 0.52340 | 0.65174  | 1.17127   | 1.37188 | 0.37188    |
| 71  | 0.53088 | 0.64677  | 1.17200   | 1.37358 | 0.37358    |
| 72  | 0.53835 | 0.64179  | 1.17270   | 1.37523 | 0.37523    |
| 73  | 0.54583 | 0.63682  | 1.17338   | 1.37681 | 0.37681    |
| 74  | 0.55331 | 0.63184  | 1.17403   | 1.37834 | 0.37834    |
| 75  | 0.56079 | 0.62687  | 1.17466   | 1.37982 | 0.37982    |
| 76  | 0.56826 | 0.62189  | 1.17526   | 1.38123 | 0.38123    |
| 77  | 0.57574 | 0.61692  | 1.17584   | 1.38260 | 0.38260    |
| 78  | 0.58322 | 0.61194  | 1.17640   | 1.38391 | 0.38391    |
| 79  | 0.59069 | 0.60697  | 1.17694   | 1.38518 | 0.38518    |
| 80  | 0.59817 | 0.60199  | 1.17745   | 1.38640 | 0.38640    |
| 81  | 0.60565 | 0.59701  | 1.17795   | 1.38757 | 0.38757    |



Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|-----------|---------|------------|
|     | (m)     |          |           | (m)     | (m)        |
| 82  | 0.61313 | 0.59204  | 1.17843   | 1.38869 | 0.38869    |
| 83  | 0.62060 | 0.58706  | 1.17889   | 1.38977 | 0.38977    |
| 84  | 0.62808 | 0.58209  | 1.17933   | 1.39081 | 0.39081    |
| 85  | 0.63556 | 0.57711  | 1.17975   | 1.39181 | 0.39181    |
| 86  | 0.64303 | 0.57214  | 1.18015   | 1.39276 | 0.39276    |
| 87  | 0.65051 | 0.56716  | 1.18054   | 1.39368 | 0.39368    |
| 88  | 0.65799 | 0.56219  | 1.18091   | 1.39456 | 0.39456    |
| 89  | 0.66547 | 0.55721  | 1.18127   | 1.39540 | 0.39540    |
| 90  | 0.67294 | 0.55224  | 1.18161   | 1.39621 | 0.39621    |
| 91  | 0.68042 | 0.54726  | 1.18194   | 1.39698 | 0.39698    |
| 92  | 0.68790 | 0.54229  | 1.18225   | 1.39772 | 0.39772    |
| 93  | 0.69537 | 0.53731  | 1.18255   | 1.39843 | 0.39843    |
| 94  | 0.70285 | 0.53234  | 1.18284   | 1.39911 | 0.39911    |
| 95  | 0.71033 | 0.52736  | 1.18311   | 1.39976 | 0.39976    |
| 96  | 0.71781 | 0.52239  | 1.18338   | 1.40038 | 0.40038    |
| 97  | 0.72528 | 0.51741  | 1.18363   | 1.40097 | 0.40097    |
| 98  | 0.73276 | 0.51244  | 1.18386   | 1.40153 | 0.40153    |
| 99  | 0.74024 | 0.50746  | 1.18409   | 1.40207 | 0.40207    |
| 100 | 0.74771 | 0.50249  | 1.18431   | 1.40259 | 0.40259    |
| 101 | 0.75519 | 0.49751  | 1.18451   | 1.40308 | 0.40308    |
| 102 | 0.76267 | 0.49254  | 1.18471   | 1.40354 | 0.40354    |
| 103 | 0.77015 | 0.48756  | 1.18490   | 1.40399 | 0.40399    |
| 104 | 0.77762 | 0.48259  | 1.18508   | 1.40441 | 0.40441    |
| 105 | 0.78510 | 0.47761  | 1.18525   | 1.40481 | 0.40481    |
| 106 | 0.79258 | 0.47264  | 1.18541   | 1.40520 | 0.40520    |

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\zeta_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|-----------|---------|------------|
|     | (m)     |          |           | (m)     | (m)        |
| 107 | 0.80005 | 0.46766  | 1.18556   | 1.40556 | 0.40556    |
| 108 | 0.80753 | 0.46269  | 1.18571   | 1.40591 | 0.40591    |
| 109 | 0.81501 | 0.45771  | 1.18585   | 1.40623 | 0.40623    |
| 110 | 0.82249 | 0.45274  | 1.18598   | 1.40655 | 0.40655    |
| 111 | 0.82996 | 0.44776  | 1.18610   | 1.40684 | 0.40684    |
| 112 | 0.83744 | 0.44279  | 1.18622   | 1.40712 | 0.40712    |
| 113 | 0.84492 | 0.43781  | 1.18633   | 1.40738 | 0.40738    |
| 114 | 0.85239 | 0.43284  | 1.18644   | 1.40764 | 0.40764    |
| 115 | 0.85987 | 0.42786  | 1.18654   | 1.40787 | 0.40787    |
| 116 | 0.86735 | 0.42289  | 1.18663   | 1.40810 | 0.40810    |
| 117 | 0.87483 | 0.41791  | 1.18672   | 1.40831 | 0.40831    |
| 118 | 0.88230 | 0.41294  | 1.18681   | 1.40851 | 0.40851    |
| 119 | 0.88978 | 0.40796  | 1.18689   | 1.40870 | 0.40870    |
| 120 | 0.89726 | 0.40299  | 1.18696   | 1.40887 | 0.40887    |
| 121 | 0.90473 | 0.39801  | 1.18703   | 1.40904 | 0.40904    |
| 122 | 0.91221 | 0.39303  | 1.18710   | 1.40920 | 0.40920    |
| 123 | 0.91969 | 0.38806  | 1.18716   | 1.40935 | 0.40935    |
| 124 | 0.92717 | 0.38308  | 1.18722   | 1.40949 | 0.40949    |
| 125 | 0.93464 | 0.37811  | 1.18727   | 1.40962 | 0.40962    |
| 126 | 0.94212 | 0.37313  | 1.18732   | 1.40974 | 0.40974    |
| 127 | 0.94960 | 0.36816  | 1.18737   | 1.40985 | 0.40985    |
| 128 | 0.95707 | 0.36318  | 1.18742   | 1.40996 | 0.40996    |
| 129 | 0.96455 | 0.35821  | 1.18746   | 1.41006 | 0.41006    |
| 130 | 0.97203 | 0.35323  | 1.18750   | 1.41016 | 0.41016    |
| 131 | 0.97951 | 0.34826  | 1.18754   | 1.41024 | 0.41024    |
| 132 | 0.98698 | 0.34328  | 1.18757   | 1.41033 | 0.41033    |

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

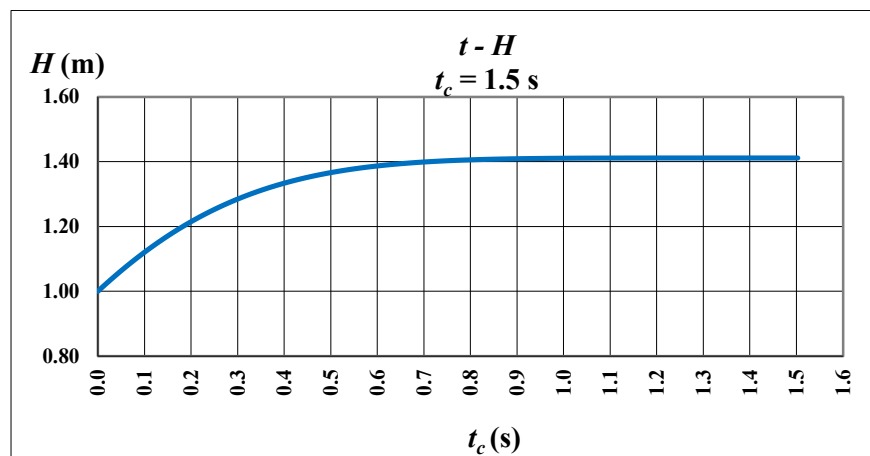
| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 133 | 0.99446 | 0.33831  | 1.18760 | 1.41040 | 0.41040    |
| 134 | 1.00194 | 0.33333  | 1.18763 | 1.41047 | 0.41047    |
| 135 | 1.00941 | 0.32836  | 1.18766 | 1.41054 | 0.41054    |
| 136 | 1.01689 | 0.32338  | 1.18769 | 1.41060 | 0.41060    |
| 137 | 1.02437 | 0.31841  | 1.18771 | 1.41066 | 0.41066    |
| 138 | 1.03185 | 0.31343  | 1.18773 | 1.41071 | 0.41071    |
| 139 | 1.03932 | 0.30846  | 1.18775 | 1.41076 | 0.41076    |
| 140 | 1.04680 | 0.30348  | 1.18777 | 1.41081 | 0.41081    |
| 141 | 1.05428 | 0.29851  | 1.18779 | 1.41085 | 0.41085    |
| 142 | 1.06175 | 0.29353  | 1.18781 | 1.41089 | 0.41089    |
| 143 | 1.06923 | 0.28856  | 1.18782 | 1.41092 | 0.41092    |
| 144 | 1.07671 | 0.28358  | 1.18784 | 1.41095 | 0.41095    |
| 145 | 1.08419 | 0.27861  | 1.18785 | 1.41098 | 0.41098    |
| 146 | 1.09166 | 0.27363  | 1.18786 | 1.41101 | 0.41101    |
| 147 | 1.09914 | 0.26866  | 1.18787 | 1.41104 | 0.41104    |
| 148 | 1.10662 | 0.26368  | 1.18788 | 1.41106 | 0.41106    |
| 149 | 1.11409 | 0.25871  | 1.18789 | 1.41108 | 0.41108    |
| 150 | 1.12157 | 0.25373  | 1.18790 | 1.41110 | 0.41110    |
| 151 | 1.12905 | 0.24876  | 1.18790 | 1.41112 | 0.41112    |
| 152 | 1.13653 | 0.24378  | 1.18791 | 1.41113 | 0.41113    |
| 153 | 1.14400 | 0.23881  | 1.18792 | 1.41115 | 0.41115    |
| 154 | 1.15148 | 0.23383  | 1.18792 | 1.41116 | 0.41116    |
| 155 | 1.15896 | 0.22886  | 1.18793 | 1.41117 | 0.41117    |
| 156 | 1.16643 | 0.22388  | 1.18793 | 1.41118 | 0.41118    |
| 157 | 1.17391 | 0.21891  | 1.18794 | 1.41119 | 0.41119    |
| 158 | 1.18139 | 0.21393  | 1.18794 | 1.41120 | 0.41120    |

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$     | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$     | $\Delta H$ |
|-----|---------|----------|---------|---------|------------|
|     | (m)     |          |         | (m)     | (m)        |
| 159 | 1.18887 | 0.20896  | 1.18794 | 1.41121 | 0.41121    |
| 160 | 1.19634 | 0.20398  | 1.18794 | 1.41121 | 0.41121    |
| 161 | 1.20382 | 0.19900  | 1.18795 | 1.41122 | 0.41122    |
| 162 | 1.21130 | 0.19403  | 1.18795 | 1.41122 | 0.41122    |
| 163 | 1.21877 | 0.18905  | 1.18795 | 1.41123 | 0.41123    |
| 164 | 1.22625 | 0.18408  | 1.18795 | 1.41123 | 0.41123    |
| 165 | 1.23373 | 0.17910  | 1.18795 | 1.41124 | 0.41124    |
| 166 | 1.24121 | 0.17413  | 1.18796 | 1.41124 | 0.41124    |
| 167 | 1.24868 | 0.16915  | 1.18796 | 1.41124 | 0.41124    |
| 168 | 1.25616 | 0.16418  | 1.18796 | 1.41124 | 0.41124    |
| 169 | 1.26364 | 0.15920  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 170 | 1.27111 | 0.15423  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 171 | 1.27859 | 0.14925  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 172 | 1.28607 | 0.14428  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 173 | 1.29354 | 0.13930  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 174 | 1.30102 | 0.13433  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 175 | 1.30850 | 0.12935  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 176 | 1.31598 | 0.12438  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 177 | 1.32345 | 0.11940  | 1.18796 | 1.41125 | 0.41125    |
| 178 | 1.33093 | 0.11443  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |
| 179 | 1.33841 | 0.10945  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |
| 180 | 1.34588 | 0.10448  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |
| 181 | 1.35336 | 0.09950  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |
| 182 | 1.36084 | 0.09453  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |
| 183 | 1.36832 | 0.08955  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |
| 184 | 1.37579 | 0.08458  | 1.18796 | 1.41126 | 0.41126    |

Tabla 3.25e. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s) (Continuación)

| $i$ | $t$<br>(m) | $\tau_i$ | $\xi_i$ | $H$<br>(m) | $\Delta H$<br>(m) |
|-----|------------|----------|---------|------------|-------------------|
| 185 | 1.38327    | 0.07960  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 186 | 1.39075    | 0.07463  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 187 | 1.39822    | 0.06965  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 188 | 1.40570    | 0.06468  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 189 | 1.41318    | 0.05970  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 190 | 1.42066    | 0.05473  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 191 | 1.42813    | 0.04975  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 192 | 1.43561    | 0.04478  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 193 | 1.44309    | 0.03980  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 194 | 1.45056    | 0.03483  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 195 | 1.45804    | 0.02985  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 196 | 1.46552    | 0.02488  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 197 | 1.47300    | 0.01990  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 198 | 1.48047    | 0.01493  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 199 | 1.48795    | 0.00995  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 200 | 1.49543    | 0.00498  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |
| 201 | 1.50290    | 0.00000  | 1.18796 | 1.41126    | 0.41126           |

Figura 3.12c. Variación de  $H$  ( $t_c = 1.5$  s)

Se observó que para un tiempo de cierre de 1.5 s, la carga máxima fue de  $H_{m\acute{a}x} = 1.411$  m y la sobrepresión máxima

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = H_{m\acute{a}x} - H$$

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = 1.411 - 1.0 = 0.411 \text{ m}$$

Con la medición realizada, sucedió lo siguiente

$$H_{m\acute{a}x} = 1.5 \text{ m}$$

$$\Delta H_{m\acute{a}x} = 1.5 - 0.61 = 0.89 \text{ m}$$

Comparando la carga máxima y la sobrepresión máxima calculada con la medida, obtuvimos los siguientes porcentajes de error.

**Tabla 3.25f. Porcentaje de error ( $t_c=1.5$  s)**

|                                     | <b>Allievi</b> | <b>Medido</b> | <b>% error</b> |
|-------------------------------------|----------------|---------------|----------------|
| <b><math>H_{m\acute{a}x}</math></b> | 1.411          | 1.5           | 6%             |
| <b><math>\Delta H</math></b>        | 0.411          | 0.89          | 54%            |

### 3.10 Solución aplicando el método de las características

A diferencia de la solución con las ecuaciones de Allievi, en este método se consideran otras variables como las pérdidas por fricción, así como el uso de condiciones de frontera variables. Una de ellas es la ley de cierre no uniforme determinada anteriormente, no obstante que en la solución de Allievi, se utilizó una ley de cierre lineal.

Con el fin de llevar cierto orden en el cálculo, el primer paso fue obtener las condiciones iniciales a flujo permanente. Posteriormente se aplicó la condición de estabilidad y convergencia del método y de esta forma se definió la malla característica que se empleó como apoyo para plantear el esquema de diferencias finitas.

#### Condiciones de estabilidad y convergencia

Se requiere conocer el intervalo de tiempo y los puntos de interés, para lo cual aplicamos la condición de estabilidad de Courant, ecuación (2.71), de la cual podemos decir lo siguiente

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$$

Donde  $\Delta x$  se define de la siguiente forma.

$$\Delta x = \frac{L}{N}, N \geq 2$$

donde

$L$  longitud de la tubería, en m

$N$  número mínimo entero de tramos en que debe dividirse el conducto

Si  $N = 5$  tramos y  $L = 4.3$  m, se tiene

$$\Delta x = \frac{4.3}{5} = 0.86 \text{ m}$$

Así,  $\Delta t$  resulta:

$$\Delta t = \frac{0.86}{1,150.17} = 0.000747 \text{ s}$$

De esta manera

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,150.17} = 0.0008694 \text{ s/m}$$

y

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{0.000747}{0.86} = 0.000868 \text{ s/m}$$

Con esto se cumple con la condición de estabilidad de Courant, sin embargo cabe mencionar que se puede elegir un número mayor de tramos con el fin de obtener más precisión en el cálculo, pero en este caso se considera adecuado el número de tramos elegido ya que la finalidad de este trabajo es su aplicación en la implementación como práctica de laboratorio, y una malla más grande implicaría mucho más iteraciones creando dependencia con la capacidad de las computadoras personales de los alumnos.

Una vez conocidos  $\Delta t$  y  $\Delta x$ , se define la malla característica, la cual se encuentra representada en la figura 3.13. Esta malla está compuesta de cinco secciones, de las cuales, la sección 0 representa la condición de frontera aguas arriba (tanque con nivel constante), la sección 5 representa la condición de frontera aguas abajo (válvula de esfera) y las secciones 1, 2, 3 y 4, representan los puntos interiores de la malla.



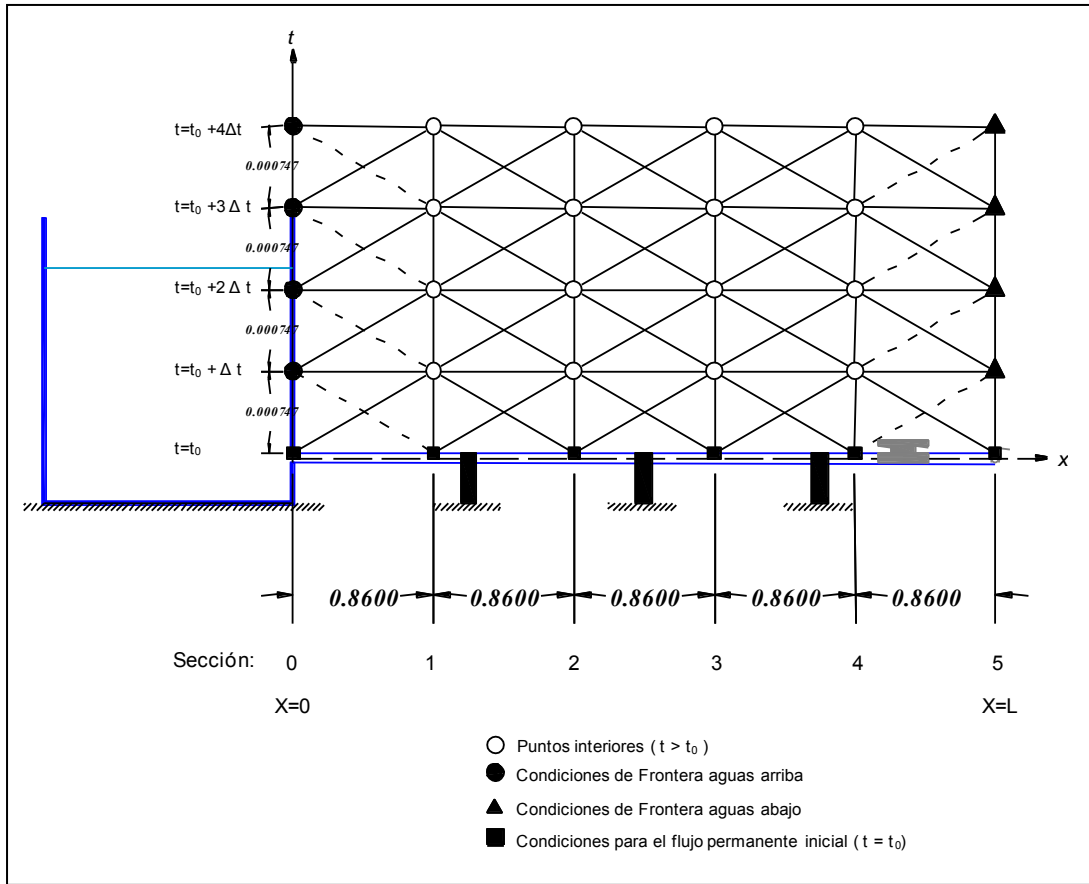


Figura. 3.13. Malla característica del caso de estudio

### Planteamiento de las ecuaciones características

Una vez definida la malla característica, se realizó el cálculo de las constantes necesarias para realizar el planteamiento de las ecuaciones características.

De la ecuación 2.57, obtenemos el valor de la constante  $C_a$ . Sustituyendo valores, resultó

$$C_a = \frac{9.81 \times 0.00317}{1,150.17} = 2.7011 \times 10^{-5}$$

Así mismo, existe otra constante que está en función del factor de fricción obtenido, la cual definimos con la siguiente ecuación

$$F = \frac{f \Delta t}{2DA}$$

Sustituyendo los valores se tiene

$$F = \frac{(0.035)(0.000747)}{2(0.0635)(0.00317)} = 0.065$$

Con estos valores, se hizo el planteamiento de las constantes  $C_p$  y  $C_n$ , las cuales pueden ser conocidas para cada instante de tiempo y que forman parte de las ecuaciones características. Estas constantes quedaron definidas con las ecuaciones 2.55 y 2.56, y ahora, sustituyendo los valores se tiene

$$C_{pi} = Q_{i-1} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{i-1} - 0.065Q_{i-1}|Q_{i-1}| \quad (3.21)$$

y

$$C_{ni} = Q_{i+1} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{i+1} - 0.065Q_{i+1}|Q_{i+1}| \quad (3.22)$$

Ahora, la ecuación característica positiva (ecuación 2.53), queda de la siguiente forma

$$Q_{pi} = C_{pi} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{pi} \quad (3.23)$$

y la ecuación característica negativa (ecuación 2.54), queda como

$$Q_{pi} = C_{ni} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{pi} \quad (3.24)$$

Los puntos interiores de la malla (figura 3.8) se definen a partir de la ecuación 2.58

$$Q_{pi} = 0.5(C_{pi} + C_{ni}) \quad (3.25)$$

y de la ecuación (3.23)

$$h_{pi} = \frac{C_{pi} - C_{ni}}{2C_a}$$

Sustituyendo el valor de la constante  $C_a$  en la ecuación anterior, resulta

$$h_{pi} = 18,510.86 (C_{pi} - C_{ni}) \quad (3.26)$$

Las ecuaciones 3.25 y 3.26, definen el gasto  $Q$  y la carga de presión  $h$  en los puntos interiores de la malla.

### Condiciones de frontera

- **Condición de frontera aguas arriba (Sección 0)**

En este caso, se tomó en cuenta tanto la pérdida local a la entrada de la tubería, como la carga de velocidad, a fin de que el fenómeno transitorio sea modelado lo más apegado a la realidad.

La condición de frontera aguas arriba está representada por el depósito de carga constante y las ecuaciones que determinan el gasto  $Q$  y la carga  $h$  en esta sección son las ecuaciones 2.62 y 2.63. Para el dispositivo experimental utilizado, se determinó el valor del coeficiente de pérdidas a la entrada de la tubería con un valor de  $k = 0.5$  (ver pérdidas locales), lo que lleva a calcular el valor de la constante  $k_1$  (ecuación 2.64). Sustituyendo el valor de  $k$  y  $C_a$  en la ecuación (2.64), dio como resultado

$$k_1 = 0.206$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación (2.62), para obtener la carga  $h$  en la condición de frontera aguas arriba

$$H_p = 1 - (1 + 0.5) \frac{Q_p^2}{2(9.81)(0.003167)^2} \quad (3.27)$$

y sustituyendo constantes en la ecuación (2.63), resultó

$$Q_p = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(0.206)[C_{ni} + (2.7011 \times 10^{-5})(1)]}}{2(0.206)} \quad (3.28)$$

*Nota:* en las ecuaciones (2.62) y (2.63),  $H_{dep}$  está medido a partir del P.H.C. hasta el nivel de la superficie libre de agua en el depósito. En este caso, la carga de posición no está tomándose en cuenta por encontrarse totalmente horizontal nuestro dispositivo experimental, por lo cual  $H_{dep}$  = carga constante en el depósito, la cual en las mediciones se fijó en 1.0 m.

- **Condición de frontera aguas abajo (Sección 5)**

La variable  $Q_p$  en la frontera aguas abajo, quedó definida con la ecuación 2.69, en la cual  $C_v$  está dado por la siguiente relación

$$C_v = (\tau Q_0)^2 / (C_a H_{0v})$$

La ley de cierre no uniforme o curva  $\tau$ - $t$ , quedó definida en la tabla 3.20 donde se observa el comportamiento de la carga piezométrica a lo largo de la tubería con respecto al tiempo de cierre ( $t_c$ ) de la válvula de esfera.

Se sabe que en flujo permanente  $Q_0 = 0.00376 \text{ m}^3/\text{s}$  en cualquier sección de la tubería y la carga en la sección aguas arriba de la válvula  $H_{0v} = 0.6 \text{ m}$ , obtenido del cálculo de las pérdidas totales, por lo que, la expresión para determinar el coeficiente  $C_v$ , queda de la siguiente forma

$$C_v = [\tau(0.00376)]^2 / [(2.7011 \times 10^{-5})(0.6)]$$

### Esquema de diferencias finitas.

Una vez definidas las condiciones iniciales, las condiciones de frontera aguas arriba de la tubería, las condiciones de frontera aguas abajo de la tubería y los puntos intermedios de la malla característica aplicada al dispositivo experimental, se realizó el esquema explícito de diferencias finitas. En esta sección se presenta el cálculo para el primer instante de tiempo, es decir para  $t = t_0 + \Delta t$  y posteriormente, en el anexo A, se presentan las tablas donde se muestra el cálculo para cada instante de tiempo, así como para cada tiempo de cierre propuesto.

Se sabe que para  $t = t_0$  se presentan las condiciones iniciales a flujo permanente. Estos datos se pueden ver en la tabla 3.26.

**Tabla 3.26. Condiciones iniciales a flujo permanente**

| <i>Sección</i> | <i>X</i> | <i>Q</i>            | <i>h<sub>pz</sub></i> |
|----------------|----------|---------------------|-----------------------|
|                | (m)      | (m <sup>3</sup> /s) | (m)                   |
| 0              | 0.00     | 0.00376             | 0.8923                |
| 1              | 0.86     | 0.00376             | 0.8583                |
| 2              | 1.72     | 0.00376             | 0.8242                |
| 3              | 2.58     | 0.00376             | 0.7902                |
| 4              | 3.44     | 0.00376             | 0.7562                |
| 5              | 4.30     | 0.00376             | 0.6000                |

Para el instante  $t = t_0 + \Delta t$ , es decir para  $t = 0.000747 \text{ s}$ , se presenta la forma en que deben ser calculados el gasto  $Q$  y la variación de la carga  $h$  con respecto a la posición en la tubería. Los subíndices que aparecerán en las ecuaciones, por ejemplo  $Q_{1,0}$ , representan la sección (i) y el instante de tiempo (t) respectivamente que se deben utilizar para realizar el cálculo.

**Condición de frontera aguas arriba****Sección 0:  $X = 0, i=0$** 

$$C_{n_0} = Q_{1,0} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{1,0} - 0.065 Q_{1,0} |Q_{1,0}|$$

$$C_{n_0} = 0.00376 - 2.7011 \times 10^{-5} (0.8583) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{n_0} = 0.0037359$$

$$Q_{p_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(0.206)[0.0037359 + (2.7011 \times 10^{-5})(1)]}}{2(0.206)}$$

$$Q_{p_0} = 0.00376 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_0} = 1 - (1 + 0.5) \left[ \frac{0.00376^2}{2(9.81)(0.003167)^2} \right]$$

$$h_{p_0} = 0.892236 \text{ m.c.a.}$$

**Puntos interiores****Sección 1:  $X=0.86\text{m}, i=1$** 

$$C_{p_1} = Q_{0,0} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{0,0} - 0.065 Q_{0,0} |Q_{0,0}|$$

$$C_{p_1} = 0.00376 + 2.7011 \times 10^{-5} (0.8923) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{p_1} = 0.00378318$$

$$C_{n_1} = Q_{2,0} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{2,0} - 0.065 Q_{2,0} |Q_{2,0}|$$

$$C_{n_1} = 0.00376 - 2.7011 \times 10^{-5} (0.8242) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{n_1} = 0.00373682$$

$$Q_{p_1} = 0.5 (C_{p_1} - C_{n_1})$$

$$Q_{p_1} = 0.5 (0.00378318 - 0.00373682)$$

$$Q_{p_1} = 0.00376 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_1} = 18,510.86 (C_{p_1} - C_{n_1})$$

$$h_{p_1} = 18,510.86(0.00378318 - 0.00373682)$$

$$h_{p_1} = 0.8582 \text{ m. c. a.}$$

**Sección 2:  $X=1.72 \text{ m}$ ,  $i=2$**

$$C_{p_2} = Q_{1,0} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{1,0} - 0.065 Q_{1,0} |Q_{1,0}|$$

$$C_{p_2} = 0.00376 + 2.7011 \times 10^{-5}(0.8583) - 0.065(0.00376)|0.00376|$$

$$C_{p_2} = 0.00378226$$

$$C_{n_2} = Q_{3,0} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{3,0} - 0.065 Q_{3,0} |Q_{3,0}|$$

$$C_{n_2} = 0.00376 - 2.7011 \times 10^{-5}(0.7902) - 0.065(0.00376)|0.00376|$$

$$C_{n_2} = 0.0037377$$

$$Q_{p_2} = 0.5 (C_{p_2} - C_{n_2})$$

$$Q_{p_2} = 0.5(0.00378226 - 0.0037377)$$

$$Q_{p_2} = 0.00376 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_2} = 18,510.86 (C_{p_2} - C_{n_2})$$

$$h_{p_2} = 18,510.86(0.00378226 - 0.0037377)$$

$$h_{p_2} = 0.8241 \text{ m. c. a.}$$

**Sección 3:  $X=2.58 \text{ m}$ ,  $i=3$**

$$C_{p_3} = Q_{2,0} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{2,0} - 0.065 Q_{2,0} |Q_{2,0}|$$

$$C_{p_3} = 0.00376 + 2.7011 \times 10^{-5}(0.8242) - 0.065(0.00376)|0.00376|$$

$$C_{p_3} = 0.0037813435$$

$$C_{n_3} = Q_{4,0} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{4,0} - 0.065 Q_{4,0} |Q_{4,0}|$$

$$C_{n_3} = 0.00376 - 2.7011 \times 10^{-5} (0.7562) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{n_3} = 0.0037386553$$

$$Q_{p_3} = 0.5 (C_{p_3} - C_{n_3})$$

$$Q_{p_3} = 0.5 (0.0037813435 - 0.0037386553)$$

$$Q_{p_3} = 0.00376 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_3} = 18,510.86 (C_{p_3} - C_{n_3})$$

$$h_{p_3} = 18,510.86 (0.0037813435 - 0.0037386553)$$

$$h_{p_3} = 0.7902 \text{ m. c. a.}$$

#### Sección 4: $X=3.44 \text{ m}$ , $i=4$

$$C_{p_4} = Q_{3,0} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{3,0} - 0.065 Q_{3,0} |Q_{3,0}|$$

$$C_{p_4} = 0.00376 + 2.7011 \times 10^{-5} (0.7902) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{p_4} = 0.0037804251$$

$$C_{n_4} = Q_{5,0} - 2.7011 \times 10^{-5} h_{5,0} - 0.065 Q_{5,0} |Q_{5,0}|$$

$$C_{n_4} = 0.00376 - 2.7011 \times 10^{-5} (0.6) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{n_4} = 0.0037428744$$

$$Q_{p_4} = 0.5 (C_{p_4} - C_{n_4})$$

$$Q_{p_4} = 0.5 (0.0037804251 - 0.0037428744)$$

$$Q_{p_4} = 0.0037616 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_4} = 18,510.86 (C_{p_4} - C_{n_4})$$

$$h_{p_4} = 18,510.86(0.0037804251 - 0.0037428744)$$

$$h_{p_4} = 0.6951 \text{ m. c. a.}$$

*Condición de frontera aguas abajo*

**Sección 5:  $X=4.3 \text{ m}$ ,  $i=5$**

$$C_{p_5} = Q_{4,0} + 2.7011 \times 10^{-5} h_{4,0} - 0.065 Q_{4,0} |Q_{4,0}|$$

$$C_{p_5} = 0.00376 + 2.7011 \times 10^{-5} (0.7562) - 0.065 (0.00376) |0.00376|$$

$$C_{p_5} = 0.0037795067$$

$$Q_{p_5} = 0.5 \left( -C_v + \sqrt{C_v^2 + 4C_p C_v} \right)$$

$$C_v = \frac{(\tau Q_0)^2}{C_a H_0}$$

Para un tiempo de cierre  $t_c = 1.0$  segundos (ecuación 3.15):

$$\tau = 0.9378(0.0007477)^2 - 1.9396(0.0007477) + 1.0$$

$$\tau = 0.998550$$

$$C_v = \frac{(0.998550 \times 0.00376)^2}{(2.7011 \times 10^{-5})(0.6)}$$

$$C_v = 0.8698085$$

$$Q_{p_5} = 0.5 \left( -0.8698085 + \sqrt{(0.8698085)^2 + 4(0.0037795067)(0.8698085)} \right)$$

$$Q_{p_5} = 0.0037632 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_5} = \frac{C_{p_5} - Q_{p_5}}{C_a}$$

$$h_{p_5} = 37,021.73(0.00377951 - 0.0037632)$$

$$h_{p_5} = 0.6038 \text{ m. c. a.}$$



De esta forma, se determinaron las variables  $Q_p$  y  $h_p$  a lo largo de la tubería para cada instante de tiempo, así como para cada tiempo de cierre propuesto.

### **3.10.1 Resultados**

A continuación se presentan las gráficas donde se puede observar la variación de la carga de presión ( $h$ ) con respecto a la posición en la tubería ( $X$ ) y el instante de tiempo que se presenta ( $t$ ). Así mismo, las tablas con los resultados de los cálculos correspondientes, se presentan en el anexo A.

Tiempo de cierre ( $t_c = 1.0$  s)

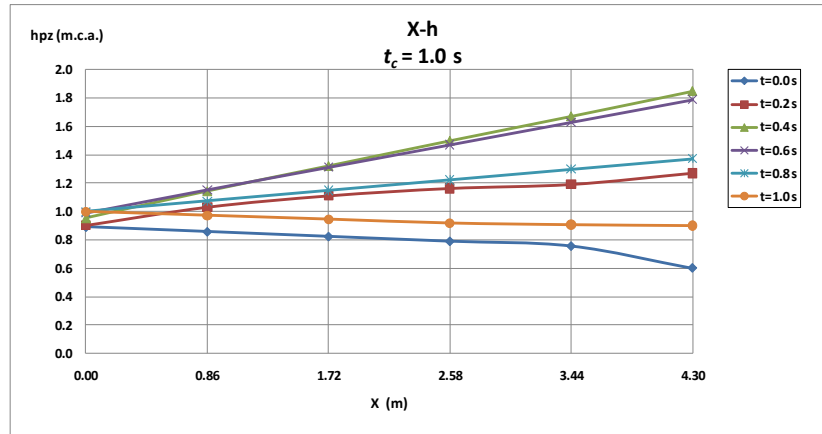


Figura 3.14. Carga de presión – Posición ( $t_c=1.0$  s)

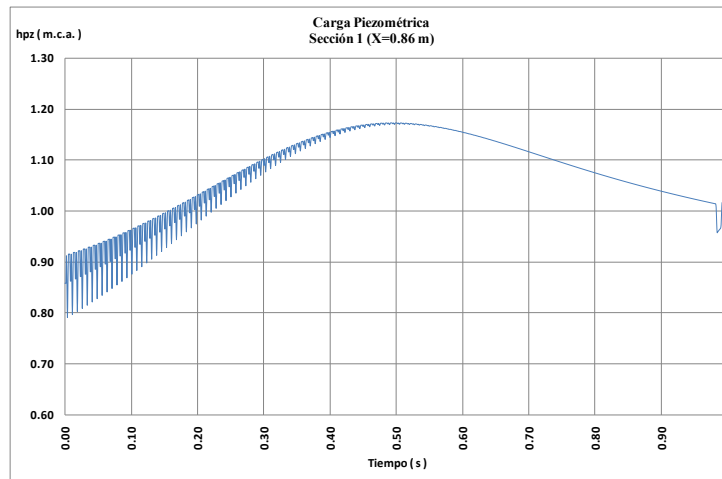


Figura 3.15. Sección 1, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

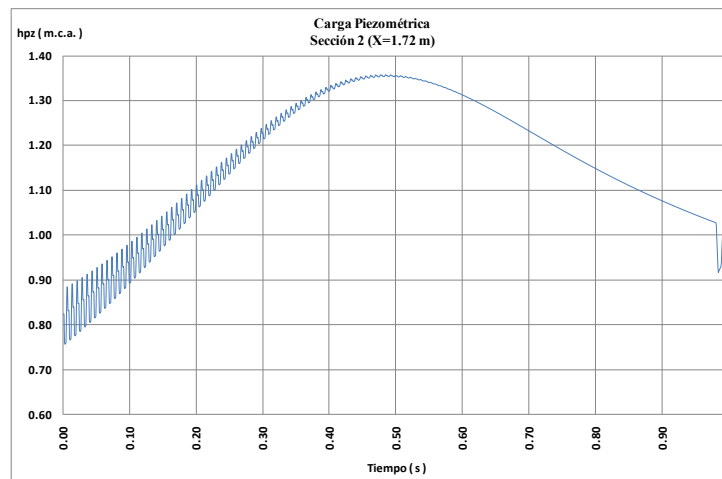


Figura 3.16. Sección 2, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

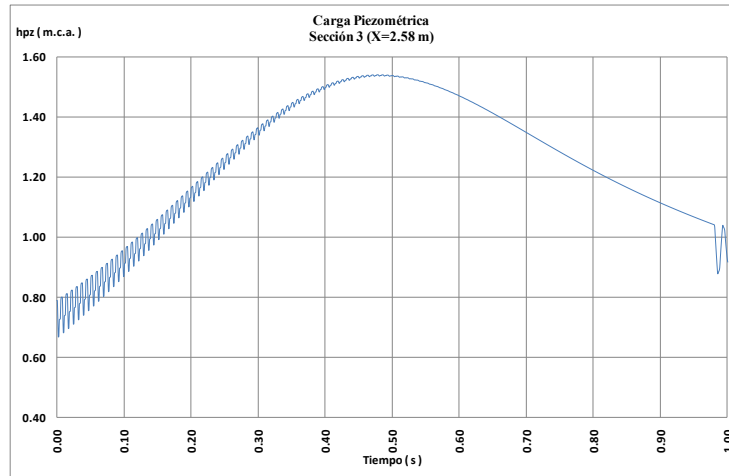


Figura 3.17. Sección 3, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

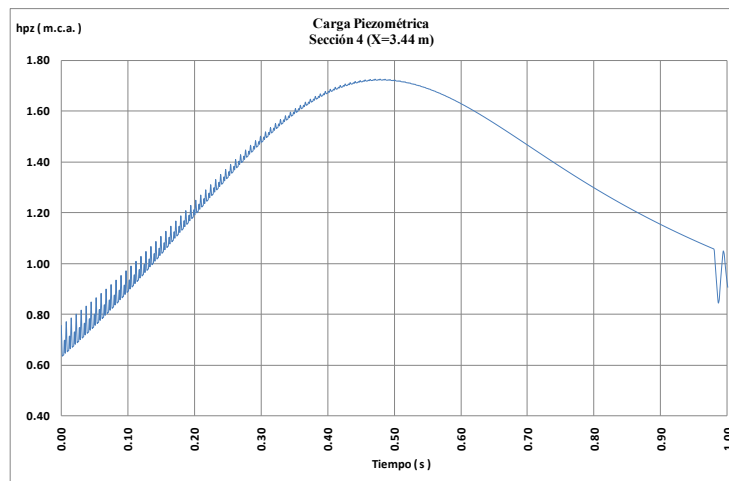


Figura 3.18. Sección 4, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

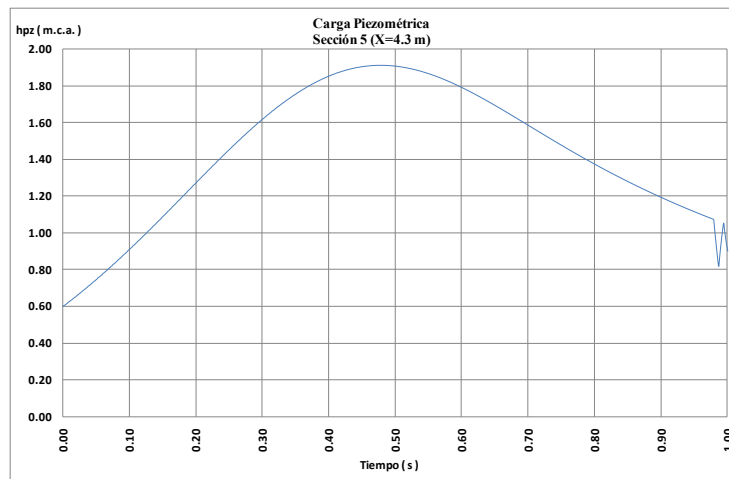


Figura 3.19. Sección 5, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

Tiempo de cierre ( $t_c = 1.2$  s)

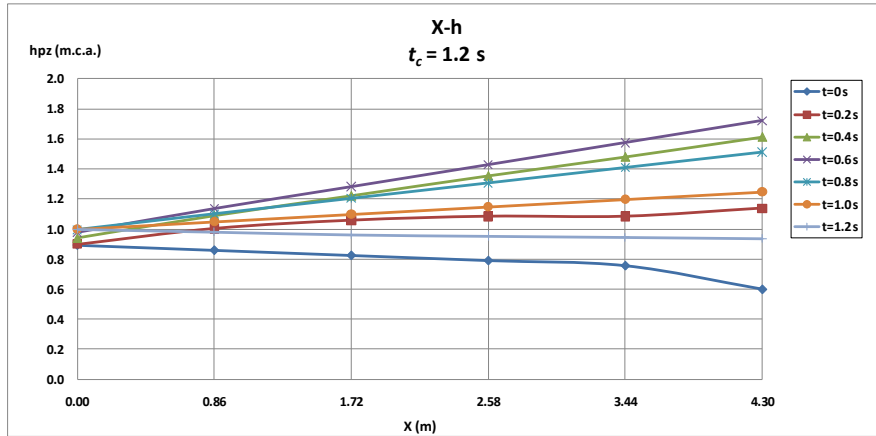


Figura 3.20. Carga de presión – Posición ( $t_c=1.2$  s)

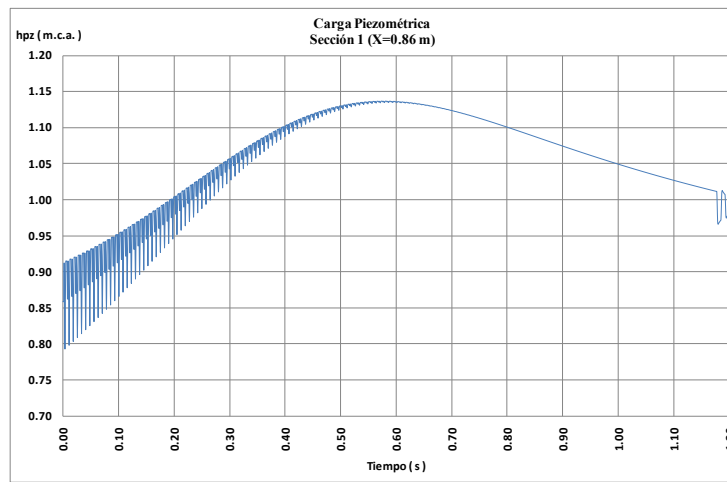


Figura 3.21. Sección 1, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.2$  s)

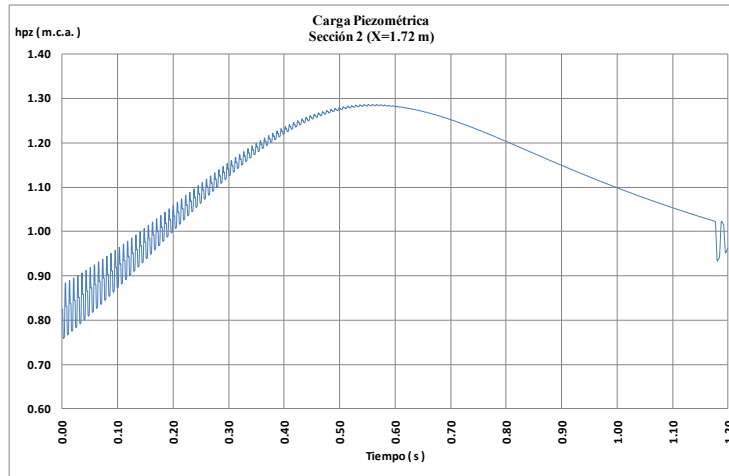


Figura 3.22. Sección 2, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.2$  s)

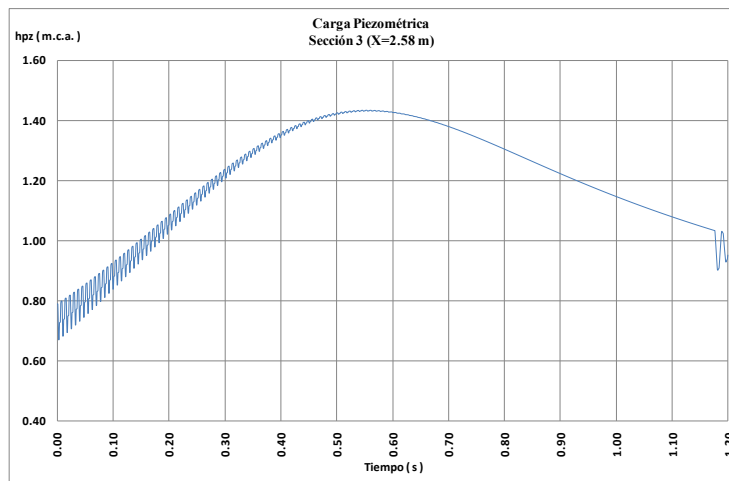


Figura 3.23. Sección 3, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.2$  s)

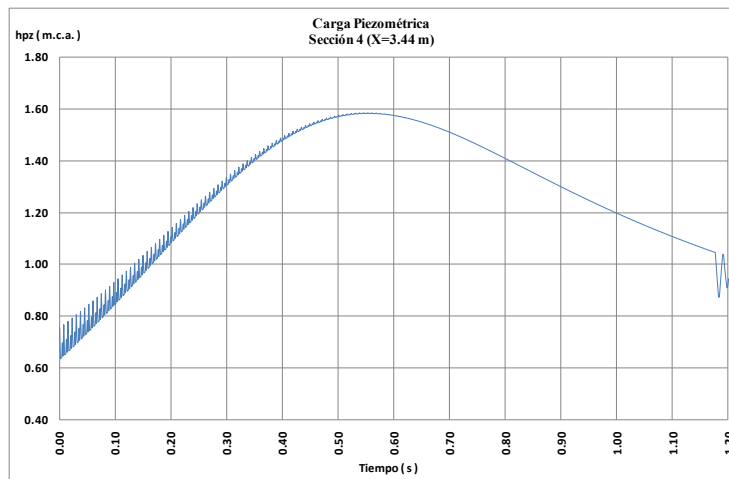


Figura 3.24. Sección 4, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.2$  s)

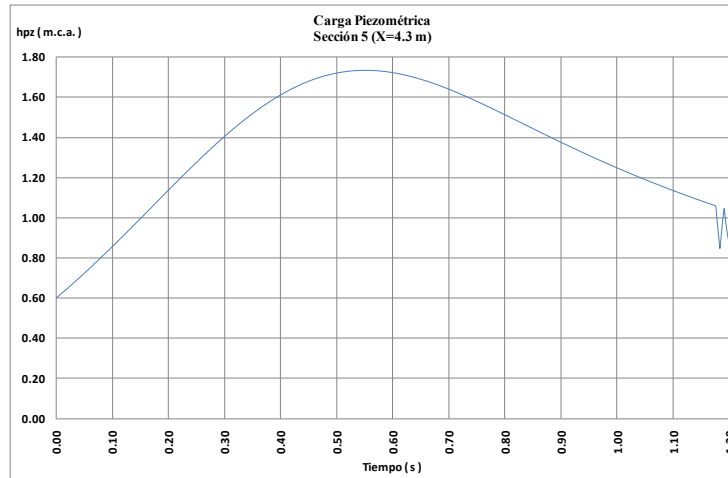


Figura 3.25. Sección 5, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.2$  s)

Tiempo de cierre ( $t_c = 1.5$  s)

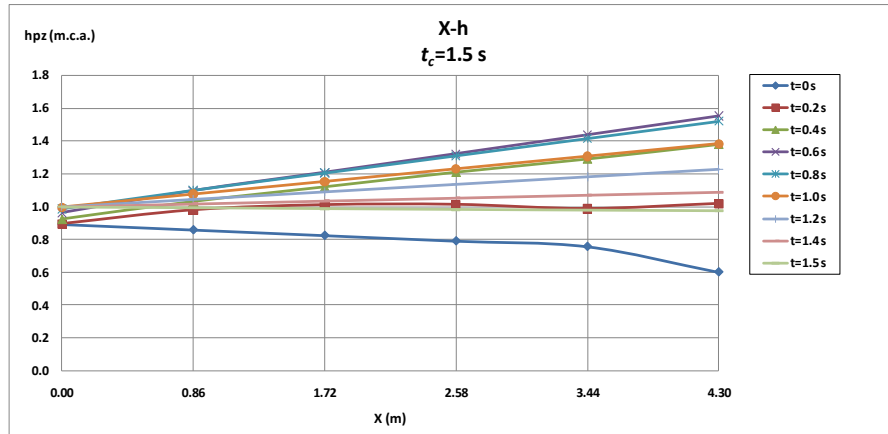


Figura 3.26. Carga de presión – Posición ( $t_c=1.5$  s)

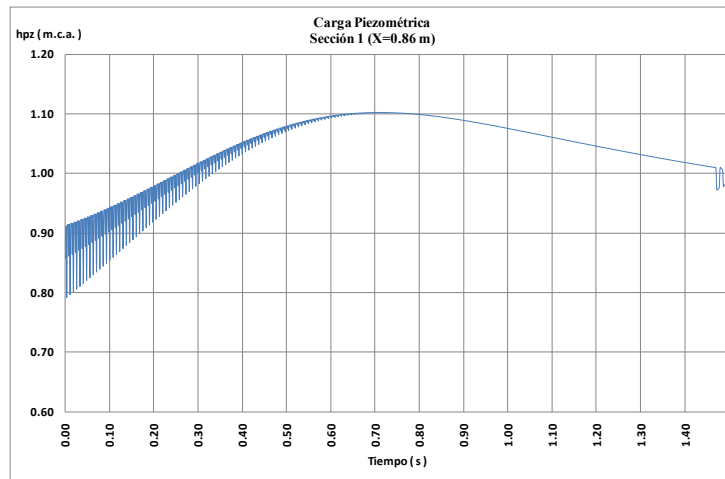


Figura 3.27. Sección 1, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.5$  s)

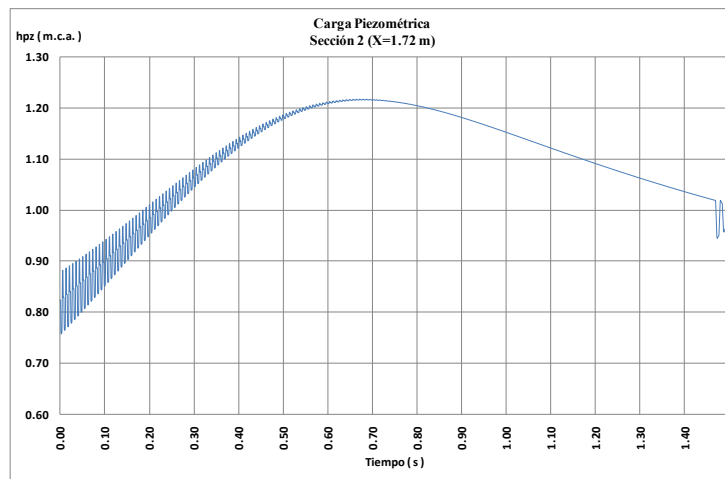


Figura 3.28. Sección 2, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.5$  s)

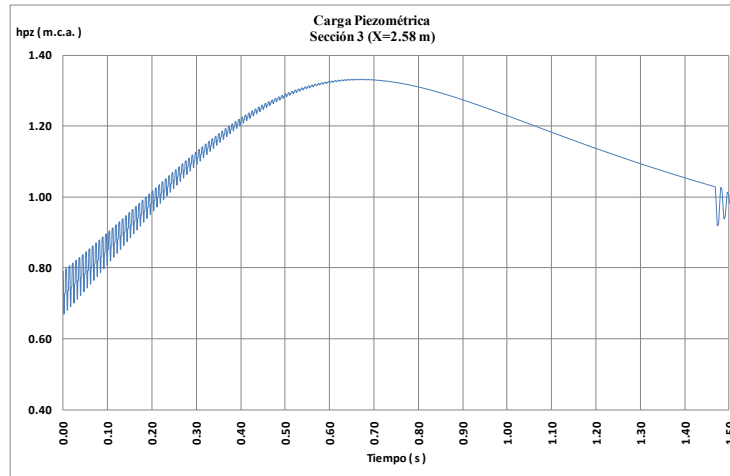


Figura 3.29. Sección 3, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.5$  s)

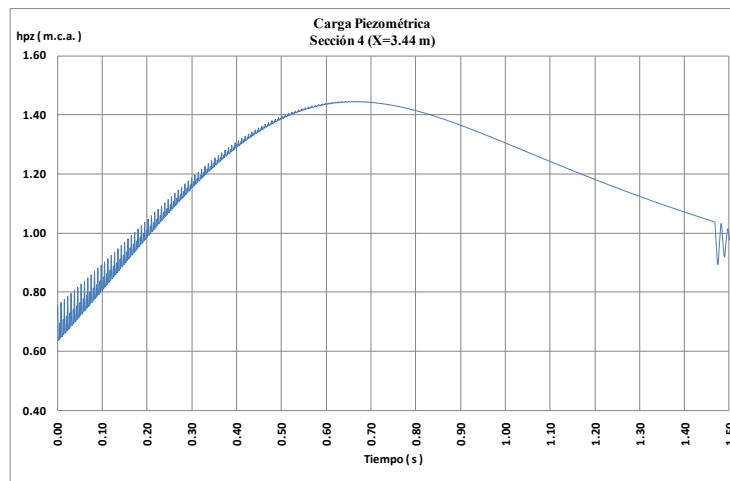


Figura 3.30. Sección 4, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.5$  s)

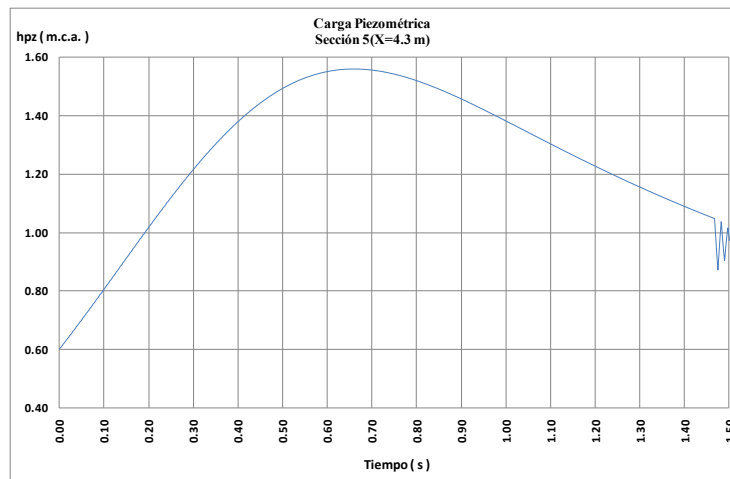


Figura 3.31. Sección 5, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.5$  s)



De los resultados obtenidos, se observa la variación de la carga de presión respecto a la posición en la tubería y respecto a cada instante de tiempo. Para el tiempo de cierre propuesto de  $t_c=1.0$  segundos, la carga máxima calculada en la sección 5, tuvo una variación entre 1.8 y 1.9 metros. Respecto al tiempo de cierre  $t_c=1.2$  segundos, la carga máxima calculada en la sección 5 fue de 1.73 m y por último al realizar el cálculo para un tiempo de maniobra de cierre  $t_c=1.5$  segundos, la carga máxima calculada en la sección 5 de la tubería, fue de 1.56 m.

Recordando que la carga de presión máxima que se midió en el dispositivo experimental en la sección 5 fue de 1.5 metros, se puede decir que el cálculo realizado con un tiempo de cierre propuesto de  $t_c=1.5$  segundos, es el que más se aproxima a lo medido. Sin embargo, aunque sigue existiendo una diferencia del 5 por ciento, debido a la posición que existe entre el piezómetro instalado y la sección 5 propuesta teóricamente, se considera una buena aproximación ya que también intervienen factores como la exactitud al determinar la ley de cierre o al determinar las pérdidas por fricción y locales. También existe otro factor importante, como los dispositivos utilizados para medir la carga de presión, conocidos como piezómetros, los cuales se considera que no tienen la suficiente resolución para tomar una medida más exacta.

Es por ello que se agregarán a este trabajo algunas propuestas para poder obtener mejores mediciones, así como algunas modificaciones al dispositivo experimental para obtener resultados más representativos del fenómeno transitorio.

## **4 PROPUESTAS DE DISPOSITIVOS EXPERIMENTALES**

En el laboratorio de hidráulica de la Facultad de Ingeniería UNAM existen dos dispositivos experimentales para reproducir el fenómeno de golpe de ariete y realizar las mediciones asociadas. Uno de ellos es el que se ha utilizado en el caso de estudio del capítulo 3 y consta de tanque – tubería – válvula de esfera. Existe otro dispositivo que consta de instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula, pero no se encuentra en operación.

Estos dispositivos podrían funcionar mejor con equipo de medición y control adecuados, por ello se proponen las siguientes mejoras a los equipos.

### **4.1 Mejoras al dispositivo experimental tanque – tubería – válvula esférica**

Las mejoras que se proponen al dispositivo experimental actual tienen por objetivo el poder observar la variación real de la onda de presión al presentarse el golpe de ariete y compararla con la presión simulada mediante el método de las características.

El dispositivo experimental actual permite observar en los piezómetros el aumento de la presión cuando se presenta el golpe de ariete. La medición que se hace en los piezómetros al momento de realizar el cierre brusco en la válvula suele ser poco precisa ya que depende de la vista del observador, la cual puede incurrir en errores de medición. El dato que se obtiene de la medición es puntual y no permite observar la variación de la onda de presión.

Además de los piezómetros se propone utilizar transductores de presión que tienen la capacidad de calibrarse para medir señales eléctricas y convertirlas en valores de presión.

#### **4.1.1. Implementación de los instrumentos de medición y control adecuados**

Como se observa en la figura 4.1 se puede aprovechar la infraestructura del dispositivo experimental actual. Las mejoras consisten en instalar dos sensores de presión con un intervalo de medición de 0 a 50 psi (0 a 3.5 kg/cm<sup>2</sup>) alimentados por una fuente de voltaje. Uno de los sensores sería instalado en el extremo inicial de la tubería (sensor 1, figura 4.1) y el segundo sensor, sería instalado en el extremo final de la tubería, antes de la válvula de esfera (sensor 2, figura 4.1). Estos sensores podrán monitorear la variación en la onda de presión durante las maniobras de cierre o apertura de la válvula de esfera, así como almacenar estos datos en una tarjeta de adquisición de datos. Se tiene la ventaja de poder conectar una computadora a la tarjeta de adquisición de datos y desplegar mediante un software en tiempo real la variación de la onda de presión.

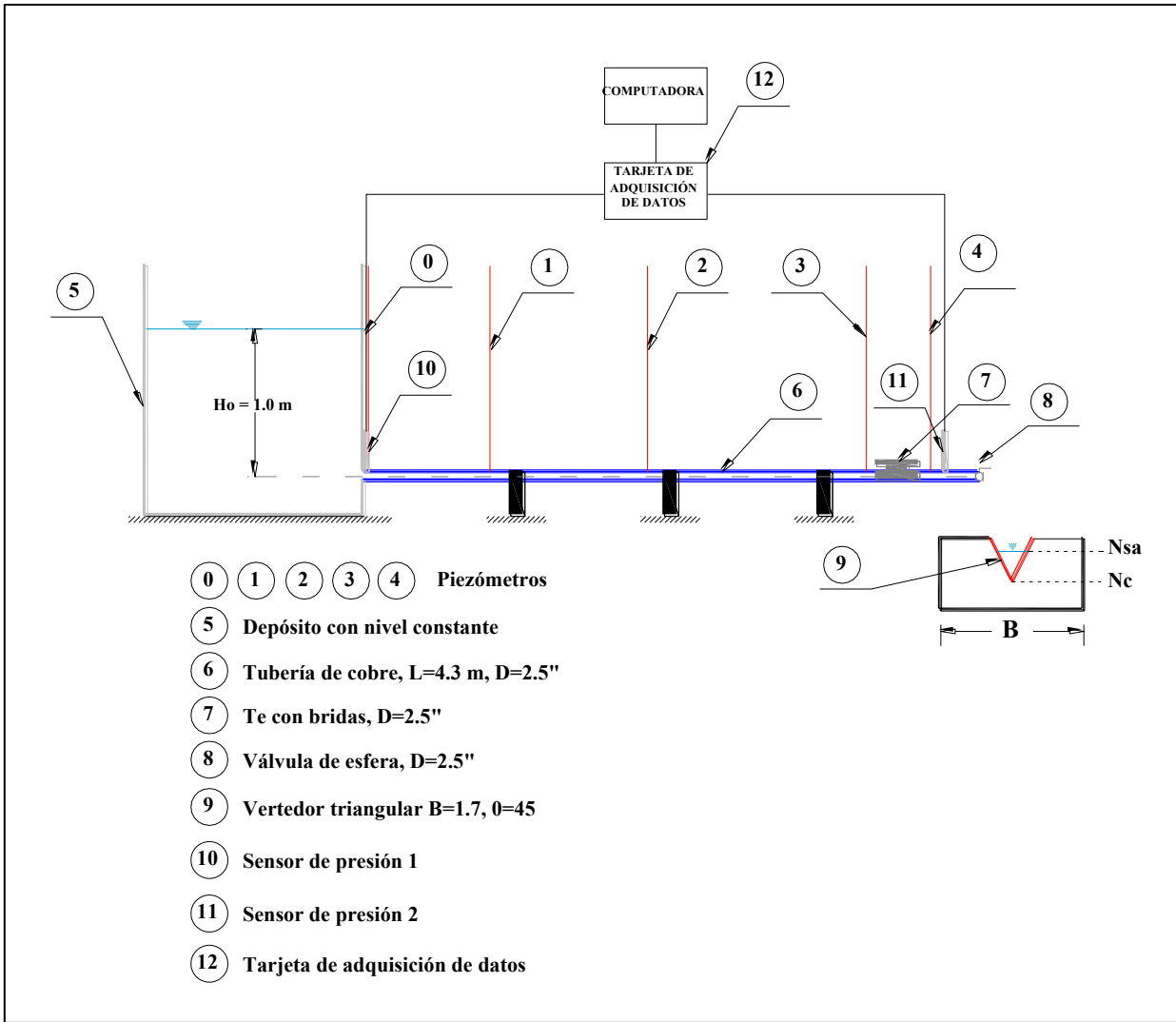


Figura 4.1. Mejoras al dispositivo experimental tanque – tubería – válvula de esfera

En lo que respecta al sistema electrónico del equipo (figura 4.2) la señal de voltaje que transmite cada sensor es enviada a la tarjeta de adquisición de datos y mediante un software, estas señales se pueden desplegar y almacenar en una computadora personal. También se pueden programar las tareas necesarias para adquirir las señales de voltaje enviadas por los sensores de presión.

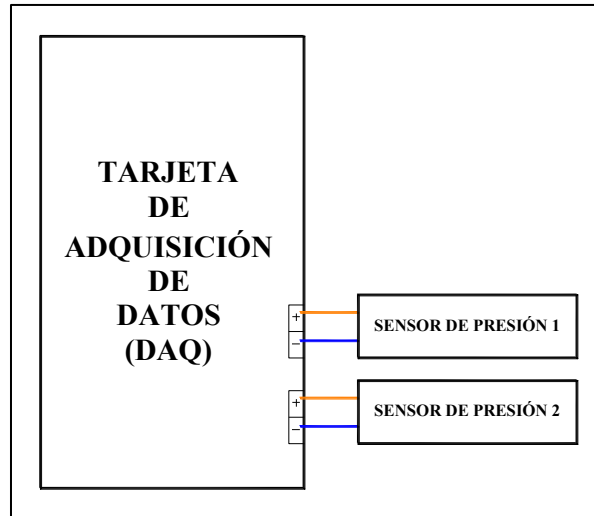


Figura 4.2. Esquema del sistema electrónico sensor – DAQ

El costo aproximado en Moneda Nacional que implican estas mejoras, se resume en la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Presupuesto Opción 1

| CONCEPTO   | UNIDAD | CANTIDAD | P.U.            | IMPORTE     |
|--|--------|----------|-----------------|-------------|
| Suministro de sensor de presión relativa de 50 PSI, con salida 0-10 VDC, alimentación 14-30VDC, material acero inoxidable, con rosca NPT 1/4-18 macho.                 | Pza.   | 2        | \$2,494.08      | \$4,988.16  |
| Suministro de Fuente de poder 24V/1.04A, dimensiones 104mm X 35mm X 45mm, montaje en riel DIN, voltaje de entrada 100-240 VAC.   | Pza.   | 1        | \$622.08        | \$622.08    |
| Suministro de Tarjeta USB con 8 entradas y 2 salidas análogas de voltaje, 16 E/S digitales, frecuencia de muestreo de 48 KS/s (Tarjeta de adquisición de datos (DAQ)). | Pza.   | 1        | \$3,627.00      | \$3,627.00  |
| Software TracerDAQ profesional.  | Pza.   | 1        | \$2,786.00      | \$2,786.00  |
|  |        |          | <b>SUBTOTAL</b> | \$12,023.24 |
|  |        |          | <b>IVA 16%</b>  | \$1,923.72  |
|  |        |          | <b>TOTAL</b>    | \$13,946.96 |

## 4.2. Propuesta de nuevo dispositivo

Otro de los dispositivos experimentales utilizados para reproducir el golpe de ariete es el que consta de una instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula. Con las mejoras que a continuación se presentan se pretende rehabilitar este dispositivo para su correcto funcionamiento ya que actualmente no se encuentra en operación.

### 4.2.1. Instalación hidráulica red-tubería en espiral-válvula.

El dispositivo mostrado en la figura 4.3 está formado por una tubería de cobre en espiral de 0.0127 m (1/2") de diámetro y 61 metros de longitud. Cuenta con la conexión a un manómetro de carátula y un osciloscopio donde anteriormente se observaba la variación de la presión en el interior de la tubería. Tiene también una válvula solenoide la cual puede cerrarse bruscamente para producir una sobrepresión en la tubería que es abastecida por medio de su conexión a la red hidráulica.

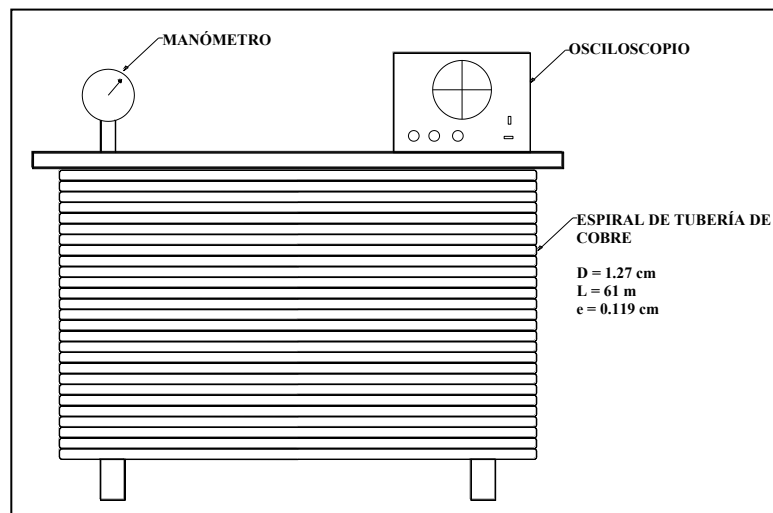


Figura 4.3. Instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula

Los accesorios como el osciloscopio y la válvula solenoide no se encuentran en funcionamiento por lo cual se propone remplazarlos por otros accesorios que permitan reproducir y observar el fenómeno del golpe de ariete.

### 4.2.2. Instrumentos de medición y control

Existen instrumentos de medición y control de funcionamiento electrónico o electromecánico que pueden facilitar la operación de este tipo de sistemas, así como permitir el almacenamiento de registros. Tales equipos son

1. Sensores de presión
2. Fuente de voltaje
3. Relevador

4. Válvula solenoide
5. Tarjeta de adquisición de datos
6. Software

A continuación se muestra una descripción del funcionamiento y características de los instrumentos de medición y control que se proponen para el nuevo dispositivo experimental.

### 1. Sensores de presión

Se llama **sensor** al instrumento que produce una señal, usualmente eléctrica, que refleja el valor de una propiedad, mediante alguna correlación definida.

En términos estrictos, un **sensor** es un instrumento que no altera la propiedad sensada; existe, además, el concepto estricto de transductor: un instrumento que convierte una forma de energía en otra (o una propiedad en otra).

Para este caso los sensores de presión a implementar tanto para el dispositivo experimental que consta de tanque – tubería – válvula de esfera y el dispositivo que consta de instalación red – tubería en espiral – válvula, entregan una señal analógica de 4 a 20 miliamperes. Cada sensor posee un módulo de acondicionamiento de señal capaz de entregar una señal analógica de voltaje de 0 – 10 volts de corriente directa, proporcional a la presión medida.

### Equipo a utilizar

Los sensores de presión OEM (Fabricante de Equipos Originales) serie PMP300 recomendados para estas opciones están diseñados con una precisión de ingeniería para adaptarse a muchas aplicaciones de medición de presión OEM e industriales. Su robusto diseño es resistente a la vibración, golpes, grandes variaciones de temperatura, RFI (Solicitud de Información) y muchas otras condiciones ambientales extremas que son típicas en aplicaciones industriales y OEM.

Su funcionamiento y fiabilidad son respaldados por la soldadura de todo el cuerpo de acero inoxidable de la celda de medición que elimina la necesidad de cubiertas en materiales suaves que pueden deteriorarse con el tiempo.



Figura 4.4. Sensor de presión

**Características**

- OEM
- Salida amplificada
- De bajo costo
- Tamaño compacto
- Intervalo de presión de 0 a 50 PSI (0 a 3.5 Kg/cm<sup>2</sup>)

**Tabla 4.2. Especificaciones de los sensores de presión**

| <b>Sensor de presión</b> |   |
|--------------------------|---|
| Canales                  | 1   |
| Temperatura compensada   | Min: 0 °C<br>Max: 80 °C   |
| Excitación               | 14 Vdc a 30 Vdc para transductores con salida a voltaje<br>10 Vdc a 30 Vdc para transductores con salida de corriente |
| Histéresis               | Min: -0.16% de R.O.<br>Max: 0.16% de R.O.   |
| No linealidad            | Min: -1% de R.O.<br>Max: 1% de R.O.   |
| No repetibilidad         | Min: -0.1% R.O.<br>Max: 1% de R.O.  |
| Temperatura en operación | Min: 0 °C, Max: 80 °C   |
| Temperatura Shift Span   | Min: -0.02% de carga/F<br>Max: 0.02% de carga/F   |
| Temperatura Shift Zero   | Min: -0.02% de R.O./F<br>Max: 0.02% de R.O./F   |
| Salida                   | De 0 – 10 Vdc ó 4 – 20 mA   |
| Excitación calibrada a   | 24 Vdc  |
| Altura                   | 2.4”  |
| Peso                     | 2.8 oz  |
| Diámetro                 | 1.06”   |

## 2. Fuente de voltaje LBCSP-142

Una fuente de voltaje es un dispositivo que convierte la tensión alterna de la red de suministro, en una o varias tensiones, prácticamente continuas, que alimentan los distintos circuitos del aparato eléctrico al que se conecta.

Los sensores de presión a implementar requieren una fuente de voltaje para su alimentación y para proteger a los sensores de presión contra sobre voltajes y así evitar que puedan ser dañados o arrojar lecturas erróneas.

La fuente de voltaje que se propone para alimentar a los dos sensores de presión es la siguiente:

### Equipo a utilizar



Figura 4.5. Fuente de voltaje

### Características

- Posee una gran variedad de rangos de voltaje/corriente para diferentes tipos de aplicaciones
- Diseño compacto con montaje en riel DIN
- Opción de RoHS
- De bajo costo



**Tabla 4.3. Especificaciones de la fuente voltaje**

| <b>Fuente de voltaje</b>            |   |       |
|-------------------------------------|---|-------|
| <b>Modelo</b>                       | <b>25W</b>  |       |
| <b>ENTRADA</b>                      |   |       |
| Voltaje                             | 100 ~ 240 Vac, 47 ~ 63 Hz   |       |
| Eficiencia (a 110V de entrada)      | 24V   | 76%   |
| Corriente pico de entrada           | 110V  | 20A   |
|                                     | 220V  | 40A   |
| <b>SALIDA</b>                       |   |       |
| Indicador de salida                 | LED Verde   |       |
| Ajuste de voltaje                   | -10% a 10% (Con ajuste de VR)   |       |
| Ripple (Vp-p)                       | 24V   | 150mV |
| Tolerancia de voltaje               | ±1.0% max. (con entrada ajustada, 0 a 100% de carga)                                      |       |
| Linealidad                          | ±1.0% max. (con entrada ajustada, 0 a 100% de carga)                                      |       |
| Influencia de la carga              | ±1.0% max. (con entrada ajustada, 0 a 100% de carga)                                      |       |
| Tiempo de inicio                    | Máximo de 3 segundos  |       |
| Tiempo en espera                    | 13ms  |       |
| Protección contra corto             | En el modelo estándar, se reinicia automáticamente  |       |
| <b>ESPECIFICACIONES AMBIENTALES</b> |   |       |
| Temperatura ambiente                | Operación:-15°C ~ 50°C; Almacén:-20°C~85°C (Sin condensación)                             |       |
| Humedad                             | Operación: 5 a 95% RH; Almacén: 5 a 95% RH  |       |
| Influencia de la temperatura        | Máximo 0.05% / °C ( 0 ~ 50 °C)  |       |
| Influencia del voltaje              | Máximo 0.5% ( de 85 a 264 VAC de entrada, 100% de carga)                                  |       |
| Vibración                           | 10 a 500 Hz, 2G, 10 min/ciclo en una hora cada dirección X, Y y Z                         |       |
| Resistencia al golpe                | 150 m/s2 (como 50 g) cada 3 veces en las direcciones X, Y, y Z                            |       |
| <b>SEGURIDAD ELÉCTRICA</b>          |   |       |
| Estrecho dieléctrico                | 2.0 kV AC en 1 minuto (Entre la entrada, salida, carcasa; detección: 20mA)                |       |
| Dieléctrico                         | Mínimo 100MΩ (Entre entrada, salida y carcasa) a 500Vdc                                   |       |
| EMC                                 | EN55022 Clase B, EN61000-3-2, EN61000-3-3, EN55024, IEC61000-4-2, -3, -4, -5, -6, -8, -11 |       |
| <b>ESPECIFICACIONES MECÁNICAS</b>   |   |       |
| Dimensiones                         | 104 x 35 x 45   |       |
| Material                            | ABS negro. UL94V0   |       |
| Terminales                          | Terminales a tornillo, hasta 2 x 2.5 mm, 2 cables   |       |
| Montaje                             | Riel DIN de 35mm (EN50022)  |       |
| Peso                                | 190 g   |       |

### 3. Relevador

El **relé** o **relevador** es un dispositivo electromecánico. Funciona como un interruptor controlado por un circuito eléctrico en el que, por medio de una bobina y un electroimán, se acciona un juego de uno o varios contactos que permiten abrir o cerrar otros circuitos eléctricos independientes.

Dado que el relé es capaz de controlar un circuito de salida de mayor potencia que el de entrada, puede considerarse, en un amplio sentido, como un amplificador eléctrico. Como tal se emplearon en telegrafía, haciendo la función de repetidores que generaban una nueva señal con corriente procedente de pilas locales a partir de la señal débil recibida por la línea. Se les llamaba “relevadores”. De ahí relé.

#### Equipo a utilizar

En este caso se utilizará una tarjeta modelo CIO-ERB08, con su respectivo conector C37FF y su terminal a tornillos CIO-MINI37, la cual actuará como interfaz de control del cierre y apertura de la válvula solenoide. Dicha tarjeta estará conectada a la tarjeta de adquisición de datos.

#### Características del equipo a emplear

- 8 relevadores forma C
- Reset en encendido
- Todos los relevadores son reemplazables

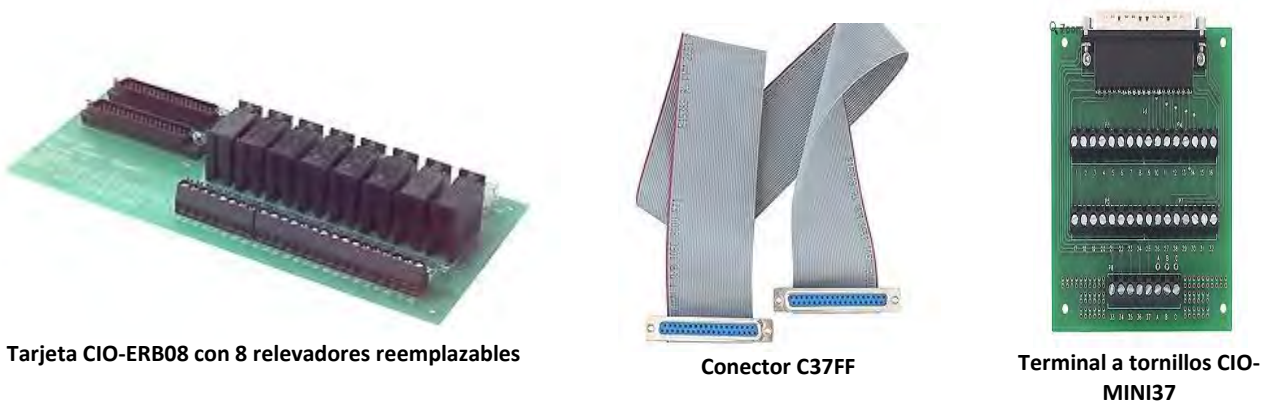


Figura 4.6. Tarjeta CIO-ERB08 y accesorios

**Tabla 4.4. Especificaciones del relevador**

| <b>Relevador</b>           |  |
|----------------------------|--|
| Relevadores                | 8 SPDT, forma C  |
| Capacidad de los contactos | 10A a 28 VDC, 10A a 120 VAC  |
| Tiempo de funcionamiento   | 20 milisegundos  |
| Tiempo de liberación       | 10 milisegundos  |
| Consumo de energía         | máximo de 0.95A a +5V  |
| Alimentación requerida     | + 5V, alimentación externa o desde la PC con el cable CPCPOWER-10 (incluido) |

#### 4. Válvula solenoide

En muchas aplicaciones es necesario controlar el paso de algún tipo de flujo, desde corriente eléctrica hasta gases o líquidos. Esta tarea es realizada por válvulas. En particular, las accionadas por solenoides permiten su implementación en lugares de difícil acceso y facilitan la automatización del proceso al ser accionadas eléctricamente.

Este tipo de válvula se opera variando la corriente que circula a través de un solenoide (conductor ubicado alrededor de un émbolo, en forma de bobina). Esta corriente, al circular por el solenoide, genera un campo magnético que atrae un émbolo móvil. Por lo general estas válvulas operan de forma completamente abierta o completamente cerrada, aunque existen aplicaciones en las que se controla el flujo en forma lineal.

Al finalizar el efecto del campo magnético, el émbolo vuelve a su posición por efecto de la gravedad, un resorte o por presión del fluido a controlar.



Figura 4.7. Válvula Solenoide

Para el dispositivo red – tubería en espiral – válvula solenoide, se implementará esta válvula para efectuar el cierre brusco del flujo en la tubería y así provocar el golpe de ariete. Como ya se comentó el cierre y la apertura de esta válvula se controlará mediante el relevador elegido.

Tabla 4.5. Especificaciones de la válvula solenoide

| Válvula solenoide              |   |
|--------------------------------|---|
| Modelo                         | 2PO160 – ½  |
| Tipo de válvula                | 2 vías normalmente abierto (NO)                                     |
| Acción                         | Diafragma ascensor directo, Unidireccional, diferencial cero        |
| Cv (orificio, en mm)           | 4.8 (16)  |
| Presión de trabajo             | 0 a 90 PSI  |
| Prueba de presión              | 200 PSI   |
| Temperatura de funcionamiento  | Media: -5 a 50 °C; Ambiente: -5 a 45 °C                             |
| Tamaño de puerto (NPT)         | 1/2"  |
| Materiales del cuerpo          | Nylon de ingeniería   |
| Materiales de sellado          | NBR (Buna N), Opciones: VITON, EPDM                                 |
| Bobina de servicio             | Clase H, IP65, 100% ED  |
| Voltaje                        | Opciones de voltaje: 12, 24 VDC; 24, 110/120, 220/240 VAC, 50/60 Hz |
| Tolerancia de tensión          | 10% del voltaje especificado  |
| Configuración de los contactos | 14 a 30 W   |
| Conexiones eléctricas          | DIN 43650, forma A  |
| Servicio                       | Líquido   |

### 5. Tarjeta de adquisición de datos modelo USB – 1408FS

La **adquisición de datos** o adquisición de señales, consiste en la toma de muestras del mundo real (sistema analógico) para generar datos que puedan ser procesados por una computadora. Consiste, en tomar un conjunto de señales físicas, convertirlas en tensiones eléctricas y digitalizarlas de manera que se puedan procesar en una computadora. Se requiere una etapa de acondicionamiento, que adecua la señal a niveles compatibles con el elemento que hace la transformación a señal digital. El elemento que hace dicha transformación es el módulo de digitalización o tarjeta de adquisición de datos (DAQ).

Las señales procedentes de cada sensor de presión serán enviadas a la tarjeta de adquisición de datos cuyas características son las siguientes:

#### Equipo a utilizar



Figura 4.8. Tarjeta de Adquisición de Datos

El modelo USB – 1408FS es un dispositivo basado en la tecnología USB que fija un nuevo estándar para la rentabilidad, basado en la PC para entradas y salidas análogas y digitales. Proporcionando 8 entradas single – ended, resolución de 13 bits o 4 entradas diferenciales con resolución de 14 bits, las unidades ofrecen tasas de muestreo de hasta 48 kilomuestras/segundo con 8 rangos de entrada seleccionables por software. La unidad también proporciona 2 canales de salida análoga de 12 bits, un contador de 32 bits y 16 bits de entradas y salidas digitales.

El USB – 1408FS es confiable y bastante resistente para cualquier aplicación DAQ. Si no fuera así, no vendría con una garantía de por vida y una garantía por daños causados.

#### Características del equipo a emplear

- 8 entradas análogas con terminal común “single – ended” y 4 diferenciales
- Resolución 14 bits (Diferencial) / 13 bits (SE)
- Tasa de muestreo de hasta 48 kilomuestras/segundo
- 2 salidas análogas de 12 bits
- 16 bits de entrada y salida digitales

## 6. Software a emplear

La tarjeta de adquisición de datos es conectada a una computadora personal. El software a emplear Tracer DAQ profesional sirve para desplegar los valores obtenidos por la tarjeta, así como graficar y realizar registros en la computadora para poder analizarlos posteriormente. Otra de las funciones del software es programar las funciones que corresponden a la adquisición de las dos señales de voltaje [0-10 VDC] entregadas por los dos sensores de presión y programar el envío de las señales de control [0-5 VDC] de la tarjeta de adquisición de datos al relevador de control de la válvula solenoide.

TracerDAQ profesional incluye las siguientes aplicaciones:

**Graficador.** Aplicación de 48 canales para registrar y graficar datos de entradas analógicas, digitales, contadores y temperaturas de una o más tarjetas DAQ de Measurement Computing. Características de muestreo basadas en la velocidad de la tarjeta utilizada (hasta 1 millón de muestras por canal), triggering usando un disipador de software interno, un disipador de software externo (o un disipador por intervalos de tiempo), la habilidad de configurar alarmas condicionales, agregar comentarios (anotaciones) al display de plot y volver a mostrar una adquisición.

**Osciloscopio.** Aplicación de osciloscopio con 4 canales que muestra los valores adquiridos de las entradas análogas. Características de muestreo basadas en la velocidad de la tarjeta utilizada y triggering usando un disipador de software interno o un disipador de hardware externo, la habilidad para agregar una referencia o un canal matemático, muestra valores de medidas específicas para cada canal y datos de canal a escala.

**Generador de funciones.** Genera múltiples formas de onda de 16 canales (seno, cuadrada, triangular, constante, sierra y personalizable). La aplicación de Generador de Funciones, genera formas de onda para salidas análogas a la tasa máxima del dispositivo de Measurement Computing. El generador de función muestra la forma de onda, muestras por ciclo, tasa de escaneo interno y frecuencia base de la señal de salida del canal análogo seleccionado. El usuario puede efectuar barrido logarítmico y lineal, cambiar la fase, ciclo de trabajo, múltiplo de pulso y amplitud de la forma de onda.

**Generador de pulsos.** Aplicación Generador de pulsos de 20 canales que muestra la forma de onda, muestras por ciclo, tasa de escaneo interno y frecuencia base de salida del canal contador/timer seleccionado. El usuario puede cambiar la frecuencia, el ciclo de trabajo y el estado inicial de la forma de onda.

Incluye el CD MCC DAQ con:

- Software Graficador y Registrador GRATUITO – TracerDAQ™ 2.0
- Librerías y ejemplos para C, C++, VB, Delphi, etc.
- Vis y ejemplos para LabVIEW™
- Software configurador – InstaCal

### **4.2.3. Implementación de los instrumentos de medición y control en la instalación hidráulica propuesta.**

Una vez elegidos los instrumentos de medición y control, se deberán implementar en la instalación hidráulica existente que se describió en el apartado 4.2.1, de la cual se aprovechará la tubería en espiral de cobre, de 1/2" de diámetro y 61 m de longitud.

A esta tubería se le instalarán 2 sensores de presión (tabla 4.2), los cuales se colocarán en la parte media de la tubería (sensor 1) y en el extremo final de la misma (sensor 2). Se ha elegido que los sensores de presión tengan un intervalo de medición de 0 a 50 PSI (0 A 3.5 Kg/cm<sup>2</sup>), ya que es el rango en el que se espera se generen las sobrepresiones máximas.

Los sensores de presión elegidos necesitan ser alimentados por una fuente de voltaje (tabla 4.3). Esta fuente de voltaje a su vez funcionará para proteger a los sensores de presión contra sobre voltajes y a su vez para que no se envíen mediciones erróneas.

Al final de la tubería, después del sensor aguas abajo, se instalará una válvula solenoide (tabla 4.5) con el fin de garantizar la interrupción rápida del flujo para generar el golpe de ariete. Dicha válvula solenoide será activada por una interfaz llamada relevador (tabla 4.4).

En lo que respecta al sistema electrónico y de adquisición de datos, se utilizará una tarjeta DAQ (Tarjeta de adquisición de datos), la cual será la encargada de adquirir las señales procedentes de cada sensor.

A su vez la tarjeta de adquisición de datos alimentará directamente al relevador el cual actúa como interfaz del control de cierre y apertura de la válvula solenoide.

La tarjeta de adquisición de datos estará conectada a una computadora personal.

El software a emplear servirá para desplegar los valores obtenidos por la tarjeta, para graficar y registrar los datos de las mediciones en una computadora para su análisis posterior.

En la figura 4.9 se presenta el arreglo de la instalación hidráulica propuesta con los instrumentos de control y medición adaptados.

En la figura 4.10 se muestra el esquema del arreglo electrónico de los instrumentos de control y medición.



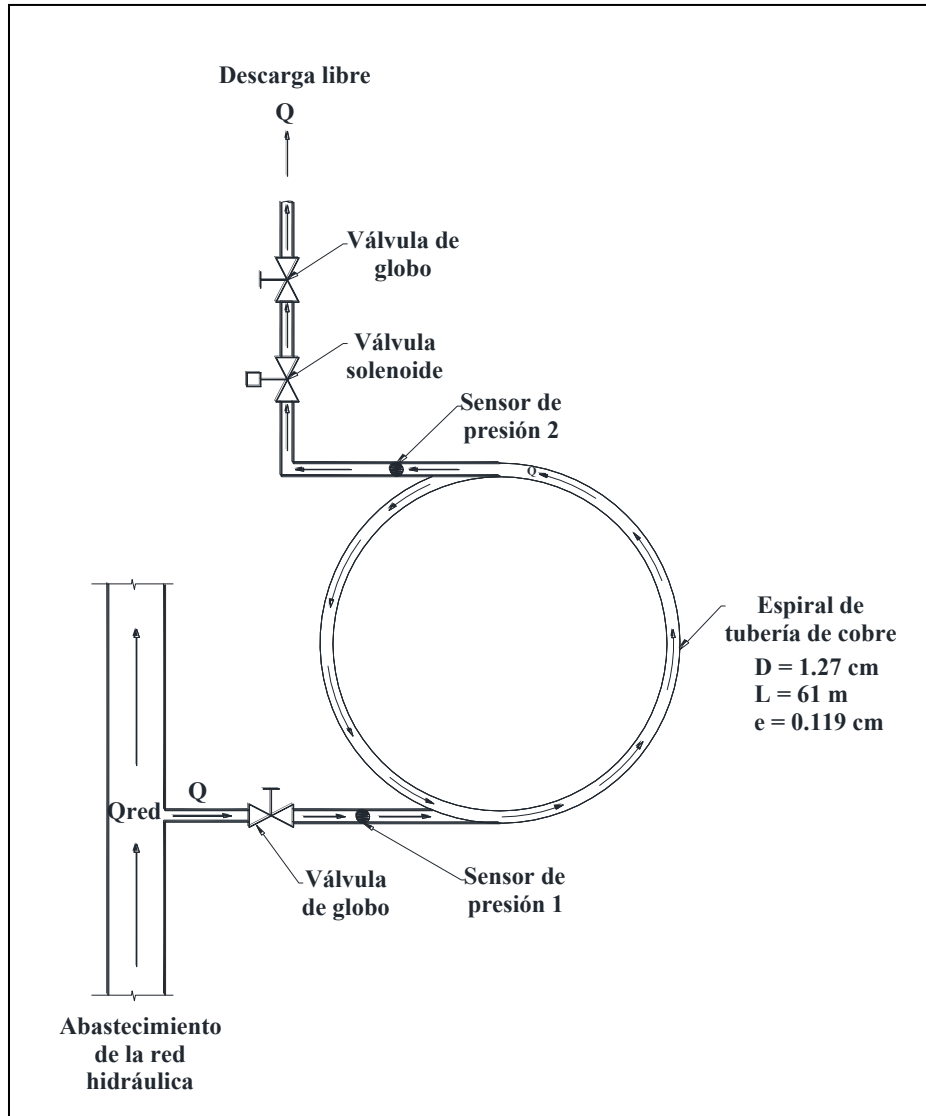


Figura 4.9. Arreglo de la instalación hidráulica propuesta

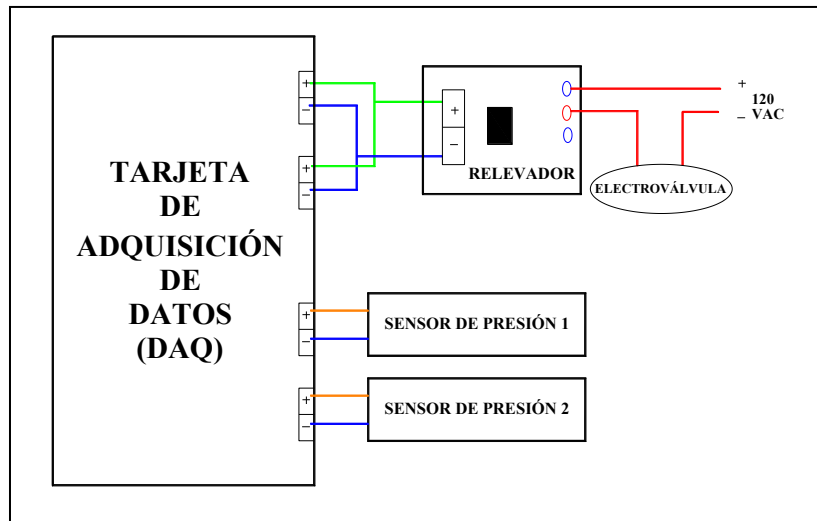


Figura 4.10. Arreglo electrónico

El costo aproximado en Moneda Nacional que implican estas mejoras, se resume en la tabla 4.6.

**Tabla 4.6. Presupuesto Opción 2**

| CONCEPTO  | UNIDAD | CANTIDAD | P.U.            | IMPORTE            |
|---|--------|----------|-----------------|--------------------|
| Suministro de sensor de presión relativa de 50 PSI, con salida 0-10 VDC, alimentación 14-30VDC, material acero inoxidable, con rosca NPT 1/4-18 macho.  | Pieza. | 2        | \$2,494.08      | \$4,988.16         |
| Suministro de Fuente de poder 24V/1.04A, dimensiones 104mm X 35mm X 45mm, montaje en riel DIN, voltaje de entrada 100-240 VAC.  | Pieza. | 1        | \$622.08        | \$622.08           |
| Suministro de Tarjeta USB con 8 entradas y 2 salidas análogas de voltaje, 16 E/S digitales, frecuencia de muestreo de 48 KS/s (Tarjeta de adquisición de datos (DAQ))   | Pieza. | 1        | \$3,627.00      | \$3,627.00         |
| Software TracerDAQ profesional  | Pieza. | 1        | \$2,786.00      | \$2,786.00         |
| Suministro de Módulo de 8 relevadores tipo C de 10 A. Salidas del relevador con terminales a tornillo. Entrada de control con conector de 37 pines. Entrada de voltaje de 5V (se puede tomar desde la fuente de la PC con el cable incluido). Incluye etapa driver de control | Pieza. | 1        | \$3,144.40      | \$3,144.40         |
| Suministro de Clave de 37 conductores, conectores hembra a hembra, 2 ft largo.  | Pieza  | 1        | \$558.18        | \$558.18           |
| Suministro de Terminal universal a tornillos 4 x 4  | Pieza  | 1        | \$1,469.86      | \$1,469.86         |
| Suministro de Válvula solenoide de ½"   | Pza.   | 1        | \$1,202.50      | \$1,202.50         |
| Suministro de Válvula de globo de ½"  | Pza.   | 2        | \$300.00        | \$600.00           |
|   |        |          | <b>SUBTOTAL</b> | <b>\$18,998.18</b> |
|   |        |          | <b>IVA 16%</b>  | <b>\$3,039.71</b>  |
|   |        |          | <b>TOTAL</b>    | <b>\$22,037.89</b> |

## 5. PROPUESTA DE PRÁCTICAS DE LABORATORIO

### 5.1. Práctica “Golpe de ariete aplicando el método de las características” en dispositivo experimental existente

Parte del objetivo de esta tesis, fue vincular las bases teóricas del método de las características, con la parte experimental del fenómeno transitorio del golpe de ariete en una práctica de laboratorio. Es por ello que, en base a los resultados adquiridos en el caso de estudio, se presenta una propuesta de práctica de laboratorio, para que el alumno pueda conocer y tener la capacidad de aplicar el método de las características.

En esta propuesta de práctica de laboratorio se plantean los objetivos que el alumno deberá alcanzar en la realización de la práctica, así como los antecedentes para comprender de mejor manera el fenómeno transitorio. En seguida se muestra el desarrollo que se debe seguir durante la práctica, con el fin de que el alumno tome las lecturas adecuadas, las cuales serán la base para iniciar el análisis del golpe de ariete.

Posteriormente se indica la forma en que se deberá realizar la memoria de cálculo, en la cual está incluida la solución por medio del método de las características, el cual se pretende explicar de la manera más sencilla y didáctica posible.

Como se vio en la solución presentada en el capítulo *tres*, el criterio de estabilidad y convergencia del método, no permite utilizar una malla con menos de cinco tramos, ya que los resultados podrían no ser confiables, es por esta razón, que la malla propuesta para la práctica, sea igual a la presentada en la solución del capítulo *tres*, con la opción de que el alumno realice los cálculos en su computadora personal y presente únicamente los resultados por medio de gráficas.

Finalmente, se muestra cómo deben ser analizados los resultados obtenidos en la memoria de cálculo, seguido de una serie de preguntas por medio de las cuales se reflejen los aspectos más importantes del tema en estudio, así como del método empleado en la solución.

Se presenta a continuación la propuesta para la realización de la práctica de laboratorio “Golpe de ariete aplicando el método de las características”.

**Objetivo**

Observar la variación de la carga de presión a lo largo de una tubería, provocada por el cierre y apertura de una válvula colocada en su extremo final.

Calcular y analizar la variación de la carga de presión generada en una tubería por el cierre de una válvula, aplicando el método de las características.

**Antecedentes**

- Flujo permanente en conductos a presión
- Flujo transitorio en conductos a presión
- Teoría del golpe de ariete
- Celeridad de una onda de presión
- Clasificación de maniobras de válvula
- Método de las características

**Desarrollo****Medición de condiciones iniciales en flujo permanente.**

1. Abrir la válvula de alimentación del tanque y establecer una carga constante  $H_0$  en el depósito y registrar su valor, en m. Ver figura 5.1.
2. Abrir parcialmente la válvula de esfera ubicada en el extremo final de la tubería, hasta alcanzar el nivel de cresta  $N_c$  en el canal de aproximación y registrar la lectura correspondiente  $N_c$  en el vertedor de sección triangular.
3. Abrir totalmente la válvula de esfera y esperar a que se establezca el flujo. Cuando esto suceda, medir el nivel  $N_{sa}$ , en m, en el vertedor triangular.
4. Purgar los piezómetros y medir la carga de presión  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y  $H_4$ , en m. Ver figura 5.1
5. Cerrar bruscamente la válvula de esfera y en el mismo instante, medir la carga de presión máxima  $H_{máx}$ , en el piezómetro no. 3 o 4. Ver figura 5.1.
6. Finalmente, realizar una maniobra de apertura y observar el comportamiento de la columna de agua en el piezómetro.

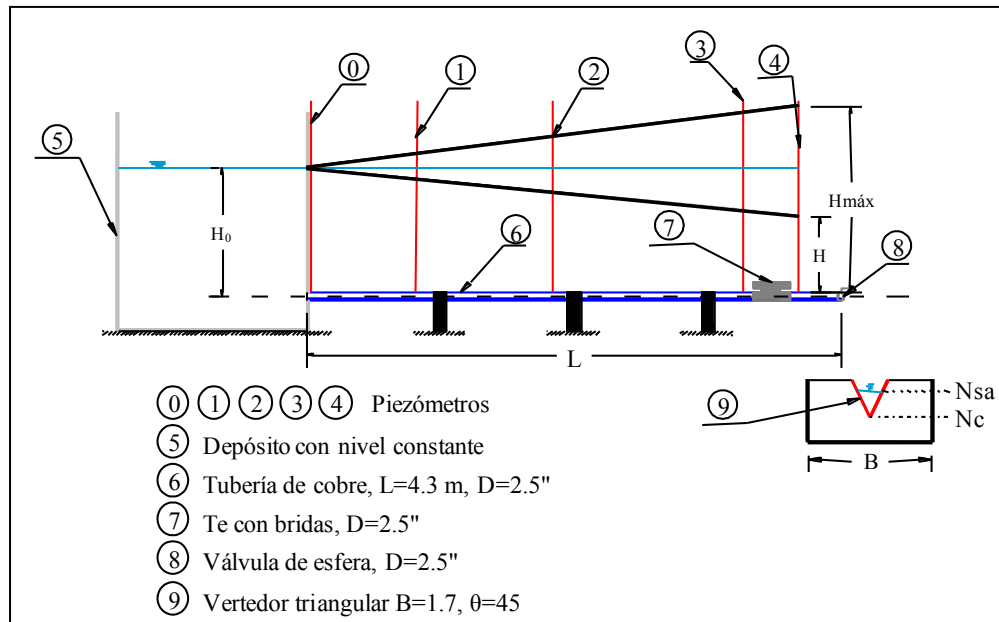


Figura 5.1. Dispositivo experimental

Registro de datos

Tabla 5.1. Registro de datos

|                           |              |  |   |
|---------------------------|--------------|--|---|
| Tanque de carga constante | $H_0 =$      |  | m |
| Vertedor triangular       | $N_c =$      |  | m |
|                           | $N_{sa} =$   |  | m |
| Piezómetro                | $H_1 =$      |  | m |
|                           | $H_2 =$      |  | m |
|                           | $H_3 =$      |  | m |
|                           | $H_4 =$      |  | m |
|                           | $H_{4máx} =$ |  | m |

**Memoria de cálculo**

1. Calcular el gasto  $Q$  de la tubería, en  $m^3/s$ , que pasa por el vertedor triangular, según la ecuación

$$Q = Ch^{5/2}$$

donde:

$C$  coeficiente de descarga del vertedor, en  $m^{1/2}/s$

$$C = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan \frac{\theta}{2} \mu \quad ec. (4.2)$$

$h$  carga en el vertedor,  $h = |N_{sa} - N_c|$ , en m;

$g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$ ;

$\theta$  ángulo del vértice del vertedor,  $\theta=45^\circ$ ;

$B$  ancho del canal de aproximación,  $B=1.70$  m;

$\mu$  coeficiente experimental que depende de  $\theta$  y  $h$  según figura 7.9 de la referencia 1;

$K$  coeficiente experimental que depende de  $B$  y  $h$  según figura 7.10 de la referencia 1.

2. Calcular la celeridad de la onda  $a$ , en  $m/s$ , de la onda de presión en la tubería, con la ecuación:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_0} + \frac{D}{E_m e} \right)}}$$

donde:

$a$  celeridad de la onda de presión, en  $m/s$ ;

$\rho$  densidad del agua,  $\rho = 1,000$   $Kg/m^3$ ;

$E_0$  módulo de elasticidad del agua,

$$E_0 = 2.18 \times 10^9 \text{ Pa};$$

$E_m$  módulo de elasticidad de la tubería,

$$E_m = 118.7 \times 10^9 \text{ Pa};$$

$D$  diámetro de la tubería,  $D = 0.0635$  m;

$e$  espesor de la tubería,  $e = 0.0018$  m.

3. Calcular el periodo  $T$ , en segundos, de la onda de presión, como:  $T = \frac{2L}{a}$ , donde  $L$  es la longitud de tubería. Ver figura 5.1

4. Solución aplicando el Método de las Características

**Ecuaciones características:**

$$Q_P = C_p - C_a H_P \dots ec. (1) \text{ Ec. característica positiva}$$

$$Q_P = C_n + C_a H_P \dots ec. (2) \text{ Ec. característica negativa}$$

en las cuales:

$$C_{pi} = Q_{i-1} + C_a h_{i-1} - F Q_{i-1} |Q_{i-1}| \dots ec. (3)$$

$$C_{ni} = Q_{i+1} - C_a h_{i+1} - F Q_{i+1} |Q_{i+1}| \dots ec. (4)$$

donde:

$$C_a = \frac{gA}{a} \quad y \quad F = \frac{f \Delta t}{2DA}$$

Considerar  $f=0.035$ ,  $\Delta t=0.000747$  segundos y  $\Delta x=0.86$  m. Ver figura 5.2

**Puntos interiores:**

$$Q_{Pi} = 0.5(C_{pi} + C_{ni}) \dots ec. (5)$$

$$h_{pi} = \frac{C_{pi} - C_{ni}}{2C_a} \dots ec. (6)$$

**Condiciones de frontera:**

- **Condición de frontera aguas arriba. Tanque con nivel constante**

$$Q_{Pi} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k_1(C_{ni} + C_a H_0)}}{2K_1} \dots ec. (7)$$

donde:

$$k_1 = \frac{C_a(1 + k)}{2gA^2} \dots ec. (8)$$

Considerar  $k = 0.5$  (Coeficiente de pérdida a la entrada de la tubería).

$$H_{Pi} = H_0 - (1 + k) \frac{Q_P^2}{2gA^2} \dots ec. (9)$$



▪ **Válvula situada en el extremo final aguas abajo**

$$Q_{pi} = 0.5 \left( -C_v + \sqrt{C_v^2 + 4C_{pi}C_v} \right) \dots ec. (10)$$

donde:

$$C_v = (\tau Q_0)^2 / (C_a H_{0v}) \dots ec. (11)$$

Considerar  $H_{0v}=0.6$  m (Carga de presión en la válvula en flujo permanente)

Siendo  $\tau$  la ley de cierre no uniforme definida para un tiempo de cierre  $t_c=1.5$  segundos. La ley de cierre está dada por la siguiente ecuación:

$$\tau = 0.4168 t^2 - 1.2931 t + 1.0 \dots ec. (12)$$

Por otra parte:

$$h_{p5} = \frac{C_{p5} - Q_{p5}}{C_a} \dots ec. (13)$$

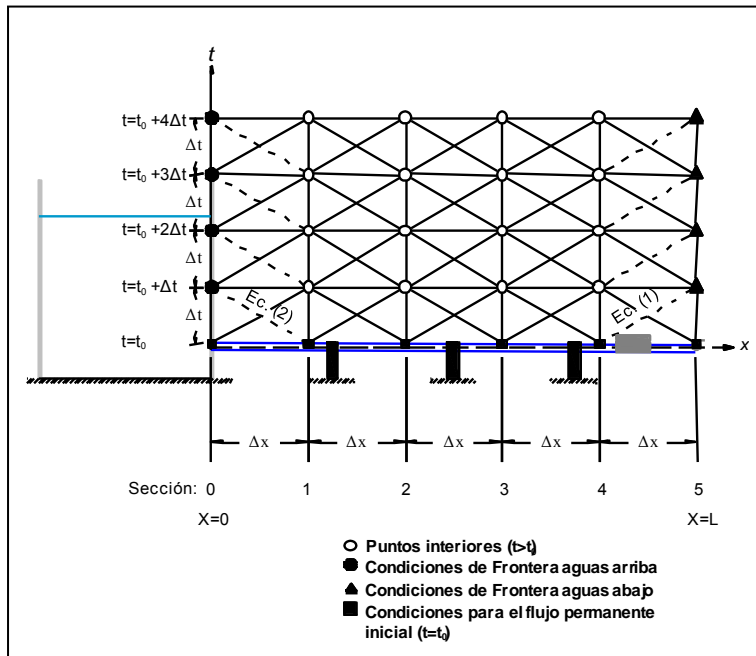


Figura 5.2. Malla característica

**Tabla de cálculo**

**Tabla 5.2. Tabla de cálculo**

| Sección (i) | 0     |       |        | 1      |       |       |        | 2      |       |       |        | 3      |       |       |        | 4      |       |       |        | 5      |       |       |  |
|-------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--|
| t (s)       | $h_0$ | $Q_0$ | $Cn_0$ | $Cp_1$ | $h_1$ | $Q_1$ | $Cn_1$ | $Cp_2$ | $h_2$ | $Q_2$ | $Cn_2$ | $Cp_3$ | $h_3$ | $Q_3$ | $Cn_3$ | $Cp_4$ | $h_4$ | $Q_4$ | $Cn_4$ | $Cp_5$ | $h_5$ | $Q_5$ |  |
| t=t0        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |  |
| t=t0+Δt     |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |  |
| t=1.0       |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |  |

- Dibujar la curva X-h, en m, para los instantes de tiempo 0, 0.4, 0.8, 1.2 y 1.5 segundos.
- Dibujar la curva T-h, en s y m, respectivamente, en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5.
- Comparar la carga máxima medida en el dispositivo con la obtenida en el inciso 5, en la sección 5.

**Instrumentos de medición**

- Flexómetro

**Referencias bibliográficas**

- Sotelo A., G., *Hidráulica General Vol. I*, Ed. Limusa, México 1990.
- Mataix, C., *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Ed. Harla, México, 1990.
- Gardea V., H., *Aprovechamientos Hidráulicos y de Bombeo*, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Mataix, C. *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Ed. Harla, México, 1995.
- Mancebo, U. *Teoría del golpe de ariete y sus aplicaciones en ingeniería hidráulica*. Ed. Limusa, México, 1997.
- Chaudhry, M. Hanif. *Applied Hydraulic Transients*.

**Cuestionario**

El cuestionario tendrá de 5 a 10 preguntas relacionadas con el desarrollo y memoria de cálculo y variarán cada semestre.

**5.2. Práctica “Golpe de ariete aplicando el método de las características” en dispositivo experimental propuesto.**

Con base en la hoja de cálculo realizada en el capítulo 3 para dar solución al caso de estudio, se realizó la solución para el dispositivo experimental propuesto. A diferencia del dispositivo experimental existente, el dispositivo propuesto no cuenta con un aforador de pared delgada, por lo cual el gasto en condiciones iniciales en flujo permanente se determinará por medio de un aforo volumétrico. Así mismo, el dispositivo propuesto cuenta con una válvula solenoide para efectuar el cierre instantáneo y provocar el golpe de ariete. Para realizar las mediciones de la variación en la presión, se propone la instalación de dos sensores de presión aguas arriba y aguas abajo de la tubería, los cuales desplegarán las mediciones por medio de una tarjeta de adquisición de datos hacia una computadora.

En seguida se indica el procedimiento para realizar la práctica de laboratorio, así como la solución por medio del método de las características.

### 5.2.1. MEMORIA DE CÁLCULO

#### Medición y registro de lecturas.

Abrir la válvula de alimentación general a la tubería en espiral y mantener en posición abierta la válvula solenoide.

Una vez establecido el gasto en la tubería, medir con el manómetro de carátula y con el sensor de presión 1 la carga de presión establecida ( $hp_0$ ). El valor esperado o supuesto de la carga de presión inicialmente establecida es de  $1.00 \text{ kg/cm}^2$  ( $10.00 \text{ m}$  de columna de agua).

Realizar tres mediciones de volumen y tiempo para calcular el gasto correspondiente con la siguiente ecuación.

$$Q = \frac{V}{t}$$

Donde

$V$  = volumen aforado

$t$  = tiempo de aforo

y calcular el gasto promedio como

$$Q_{prom} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3}$$

El valor del gasto promedio esperado es de  $0.1 \text{ l/s}$  ó  $1 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

Poner en posición cerrada la válvula solenoide y observar la evolución de la presión en los dos sensores de presión.

Registrar los datos obtenidos en la tabla 5.3.

Tabla 5.3. Registro de lecturas

|                      |                    |       |            |
|----------------------|--------------------|-------|------------|
| Tubería de descarga  | $hp_0 =$           | 10.00 | m.c.a.     |
| Aforador volumétrico | $V_1 =$<br>$t_1 =$ |       | $m^3$<br>s |
|                      | $V_2 =$<br>$t_2 =$ |       | $m^3$<br>s |
|                      | $V_3 =$<br>$t_3 =$ |       | $m^3$<br>s |
| Sensores de presión  | $hp_{s1} =$        |       | m.c.a.     |
|                      | $hp_{s2} =$        |       | m.c.a.     |
|                      | $hp_{máx2} =$      |       | m.c.a.     |

### Cálculo de celeridad de la onda de presión en la tubería.

donde:

densidad del agua,  $\rho = 1,000 \text{ Kg/m}^3$ ;

módulo de elasticidad del agua,  $E_v = 2.18 \times 10^9 \text{ Pa}$ ;

módulo de elasticidad de la tubería de cobre,  $E_t = 118.7 \times 10^9 \text{ Pa}$ ;

diámetro de la tubería,  $D = 0.0127 \text{ m}$ ;

espesor de la tubería,  $e = 0.00119 \text{ m}$ .

Por lo tanto la celeridad es:

$$a = \frac{1}{\sqrt{(1000) \left( \frac{1}{2.18 \times 10^9} + \frac{0.0127}{(118.7 \times 10^9)(0.00119)} \right)}}$$

$$a = 1,350.09 \text{ m/s}$$

### Periodo $T$ de la onda de presión.

$$T = \frac{2L}{a}$$

donde:

$$L = 61.00 \text{ m}$$

$$a = 1,350.09 \text{ m/s}$$

$$\text{Por lo tanto } T = \frac{(2 \times 61.00)}{1,350.09} = 0.0904 \text{ s}$$

**Determinación del factor de fricción**

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + at$$

donde

$\varepsilon_0$  rugosidad del tubo (nuevo), en mm;

$a$  coeficiente que depende del grupo en el que se clasifique el agua que va a escurrir, según la tabla 3.4;  $a = 0.025$

$t$  número de años de servicio de la tubería;  $t = 15$  años

$\varepsilon_t$  rugosidad del conducto, después de  $t$  años de servicio, en mm.

Según la tabla 3.3, para la tubería lisa de cobre, la rugosidad absoluta (tubería nueva de cobre) es  $\varepsilon_0 = 0.0015$  mm

Sustituyendo los valores en la ecuación 3.5:

$$\varepsilon_t = 0.0015 + (0.025 \times 15) = 0.3765 \text{ mm}$$

De la ecuación de continuidad, la velocidad es

$$V = \frac{0.0001}{0.00013} = 0.769 \text{ m/s}$$

Si se considera una viscosidad cinemática del fluido  $\nu$ , se obtiene de la figura 3.4, para una temperatura promedio de 20°C.

$$\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Una vez determinada la velocidad y la viscosidad cinemática del fluido, el número de Reynolds tiene el siguiente valor

$$Re = \frac{(0.769 \times 0.0127)}{1 \times 10^{-6}} = 9,766.3$$

A partir del diagrama de Moody (figura 3.5), y con la rugosidad relativa  $\varepsilon/D$ , se determinó el factor de fricción correspondiente a la tubería del dispositivo experimental.

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.3765}{12.7} = 0.029$$

Del diagrama de Moody con el valor de la relación anterior y el número de Reynolds obtenido anteriormente, el valor del factor de fricción  $f = 0.059$

Una vez determinado el factor de fricción, se realizó el cálculo de las pérdidas por fricción con la ecuación de Darcy- Weisbach.

Algunas características geométricas e hidráulicas de la tubería son:

$$D \text{ (tubería)} = 0.0127 \text{ m}$$

$$A \text{ (tubería)} = 0.00013 \text{ m}^2$$

$$Q_0 = 0.00010 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Rh = 0.00318 \text{ m}$$

$$V = 0.78941 \text{ m/s}$$

$$V^2/2g = 0.03176 \text{ m}$$

Considerando 5 tramos de tubería iguales a razón de 12.2 m cada uno, la pérdida por fricción calculada con la ecuación de Darcy-Weisbach, es

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = 0.059 \frac{12.2}{0.0127} 0.03176 = 1.8 \text{ m}$$

Utilizando las pérdidas por fricción calculadas con la ecuación de Darcy-Weisbach y tomando en cuenta la carga de velocidad, se obtuvieron las siguientes cargas de presión

**Tabla 5.4. Pérdidas totales Darcy – Weisbach**

| <b>Pérdida total <math>h_r</math>, en m</b> |        |
|---|--------|
| Tramo 1                                     | 1.8002 |
| Tramo 2                                     | 3.6003 |
| Tramo 3                                     | 5.4005 |
| Tramo 4                                     | 7.2007 |
| Tramo 5                                     | 9.0009 |

Tabla 5.5. Carga piezométrica

|           | Carga Piezométrica, en m |           |           |           |           |           |           |
|-----------|--------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           | $H_0$                    | $h_{pz0}$ | $h_{pz1}$ | $h_{pz2}$ | $h_{pz3}$ | $h_{pz4}$ | $h_{pz5}$ |
| Calculado | 10                       | 9.9682    | 8.1681    | 6.3679    | 4.5677    | 2.7675    | 0.9674    |

**Ley para maniobra de cierre lineal.**

$$Q_5 = 0.0001 - 0.0001t; \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

$$Q_5 = 0; \quad \text{para } t > 1$$

Una vez determinadas las condiciones iniciales a flujo permanente, se realiza la solución mediante el método de las características.

**Condiciones de estabilidad y convergencia**

Se requiere conocer el intervalo de tiempo y los puntos de interés, para lo cual aplicamos la condición de estabilidad de Courant, ecuación (2.71), de la cual podemos decir lo siguiente

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$$

Donde  $\Delta x$  se define de la siguiente forma.

$$\Delta x = \frac{L}{N}, N \geq 2$$

donde:

$L$  longitud de la tubería, en m

$N$  número mínimo entero de tramos en que debe dividirse el conducto

Si  $N = 5$  tramos y  $L = 61.00$  m, se tiene

$$\Delta x = \frac{61.00}{5} = 12.2 \text{ m}$$

Así,  $\Delta t$  resulta:

$$\Delta t = \frac{12.2}{1,350.09} = 0.00904 \text{ s}$$





**Planteamiento de las ecuaciones características**

Una vez definida la malla característica, se realizó el cálculo de las constantes necesarias para las ecuaciones características.

De la ecuación 2.57, obtenemos el valor de la constante  $C_a$ . Sustituyendo valores, resultó

$$C_a = \frac{9.81 \times 0.00013}{1,350.09} = 9.45 \times 10^{-7}$$

Existe otra constante que está en función del factor de fricción obtenido, la cual definimos con la siguiente ecuación

$$F = \frac{f \Delta t}{2DA}$$

Sustituyendo los valores se tiene

$$F = \frac{(0.059)(0.00904)}{2(0.0127)(0.00013)} = 161.53$$

Con estos valores, se hizo el planteamiento de las constantes  $C_p$  y  $C_n$ , las cuales pueden ser conocidas para cada instante de tiempo y que forman parte de las ecuaciones características. Estas constantes quedaron definidas con las ecuaciones 2.55 y 2.56, y ahora, sustituyendo los valores se tiene

$$C_{pi} = Q_{i-1} + 9.45 \times 10^{-7} h_{i-1} - 161.53Q_{i-1}|Q_{i-1}| \tag{5.1}$$

y

$$C_{ni} = Q_{i+1} - 9.45 \times 10^{-7} h_{i+1} - 161.53Q_{i+1}|Q_{i+1}| \tag{5.2}$$

Ahora, la ecuación característica positiva (ecuación 2.53), queda de la siguiente forma

$$Q_{pi} = C_{pi} - 9.45 \times 10^{-7} h_{pi} \tag{5.3}$$

y la ecuación característica negativa (ecuación 2.54), queda como

$$Q_{pi} = C_{ni} + 9.45 \times 10^{-7} h_{pi} \tag{5.4}$$

Los puntos interiores de la malla (figura ) se definen a partir de la ecuación 2.58

$$Q_{pi} = 0.5(C_{pi} + C_{ni}) \tag{5.5}$$

y de la ecuación (3.23)

$$h_{pi} = \frac{C_{pi} - C_{ni}}{2C_a}$$

Sustituyendo el valor de la constante  $C_a$  en la ecuación anterior, resulta

$$h_{pi} = 529,100.53 (C_{pi} - C_{ni}) \quad (5.6)$$

Las ecuaciones 5.5 y 5.6, definen el gasto  $Q$  y la carga de presión  $h$  en los puntos interiores de la malla.

### Condiciones de frontera

- **Condición de frontera aguas arriba (Sección 0)**

La condición de frontera aguas arriba está representada por una tubería con una presión constante y las ecuaciones que determinan el gasto  $Q$  y la carga  $h$  en esta sección son las ecuaciones 2.62 y 2.63. Para el dispositivo experimental utilizado, se determinó el valor del coeficiente de pérdidas a la entrada de la tubería con un valor de  $k = 0.5$  (ver pérdidas locales), lo que lleva a calcular el valor de la constante  $k_1$  (ecuación 2.64). Sustituyendo el valor de  $k$  y  $C_a$  en la ecuación (2.64), dio como resultado

$$k_1 = 0.206$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación (2.62), para obtener la carga  $h$  en la condición de frontera aguas arriba

$$H_p = 1 - (1 + 0.5) \frac{Q_p^2}{2(9.81)(0.003167)^2} \quad (5.7)$$

y sustituyendo constantes en la ecuación (2.63), resultó

$$Q_p = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(0.206)[C_{ni} + (2.7011 \times 10^{-5})(1)]}}{2(0.206)} \quad (5.8)$$

- **Condición de frontera aguas abajo (Sección 5)**

$$h_{p5} = \frac{C_p - Q_p}{C_a} = \frac{C_p - Q_p}{9.45 \times 10^{-7}} = 1,058,201.06(C_{p5} - Q_5) \quad (5.9)$$

$$Q_5 = 0.0001 - 0.0001t; \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

$$Q_5 = 0; \quad \text{para } t > 1 \text{ s}$$

**Esquema de diferencias finitas**

Se sabe que para  $t = t_0$  se presentan las condiciones iniciales a flujo permanente. Estos datos se pueden ver en la tabla 5.6.

**Tabla 5.6. Condiciones iniciales a flujo permanente**

| <i>Sección</i> | <i>X</i> | <i>Q</i>            | <i>h<sub>pz</sub></i> |
|----------------|----------|---------------------|-----------------------|
|                | (m)      | (m <sup>3</sup> /s) | (m)                   |
| 0              | 0.00     | 0.0001              | 9.9682                |
| 1              | 12.20    | 0.0001              | 8.1681                |
| 2              | 24.40    | 0.0001              | 6.3679                |
| 3              | 36.60    | 0.0001              | 4.5677                |
| 4              | 48.80    | 0.0001              | 2.7675                |
| 5              | 61.00    | 0.0001              | 0.9674                |

Para el instante  $t = t_0 + \Delta t$ , es decir para  $t = 0.00904$  s, se presenta la forma en que deben ser calculados el gasto  $Q$  y la variación de la carga  $h$  con respecto a la posición en la tubería. Los subíndices que aparecerán en las ecuaciones, por ejemplo  $Q_{1,0}$ , representan la sección (i) y el instante de tiempo (t) respectivamente que se deben utilizar para realizar el cálculo.

**Condición de frontera aguas arriba**

**Sección 0:  $X = 0, i=0$**

$$C_{n_0} = Q_{1,0} - 9.45 \times 10^{-7} h_{1,0} - 161.53 Q_{1,0} |Q_{1,0}|$$

$$C_{n_0} = 0.0001 - 9.45 \times 10^{-7} (8.1681) - 161.53 (0.0001) |0.0001|$$

$$C_{n_0} = 9.066 \times 10^{-5}$$

$$Q_{p_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(0.206)[9.066 \times 10^{-5} + (9.45 \times 10^{-7})(1)]}}{2(0.206)}$$

$$Q_{p_0} = 9.16032 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_0} = 10 - (1 + 0.5) \left[ \frac{(9.16032 \times 10^{-5})^2}{2(9.81)(0.000127)^2} \right]$$

$$h_{p_0} = 9.9602 \text{ m.c.a.}$$

**Puntos interiores**

**Sección 1: X=12.2 m, i=1**

$$C_{p_1} = Q_{0,0} + 9.45 \times 10^{-7} h_{0,0} - 161.53 Q_{0,0} |Q_{0,0}|$$

$$C_{p_1} = 0.0001 + 9.45 \times 10^{-7} (9.9682) - 161.53 (0.0001) |0.0001|$$

$$C_{p_1} = 0.0001078$$

$$C_{n_1} = Q_{2,0} - 9.45 \times 10^{-7} h_{2,0} - 161.53 Q_{2,0} |Q_{2,0}|$$

$$C_{n_1} = 0.0001 - 9.45 \times 10^{-7} (6.3679) - 161.53 (0.0001) |0.0001|$$

$$C_{n_1} = 0.000092367$$

$$Q_{p_1} = 0.5 (C_{p_1} - C_{n_1})$$

$$Q_{p_1} = 0.5 (0.0001078 - 0.000092367)$$

$$Q_{p_1} = 0.0000077165 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_1} = 529,100.53 (C_{p_1} - C_{n_1})$$

$$h_{p_1} = 529,100.53 (0.0001078 - 0.000092367)$$

$$h_{p_1} = 8.1656 \text{ m. c. a.}$$

**Sección 2: X=24.4 m, i=2**

$$C_{p_2} = Q_{1,0} + 9.45 \times 10^{-7} h_{1,0} - 161.53 Q_{1,0} |Q_{1,0}|$$

$$C_{p_2} = 0.0001 + 9.45 \times 10^{-7} (8.1681) - 161.53 (0.0001) |0.0001|$$

$$C_{p_2} = 0.00010610$$

$$C_{n_2} = Q_{3,0} - 9.45 \times 10^{-7} h_{3,0} - 161.53 Q_{3,0} |Q_{3,0}|$$

$$C_{n_2} = 0.0001 - 9.45 \times 10^{-7} (4.5677) - 161.53 (0.0001) |0.0001|$$

$$C_{n_2} = 0.000094068$$

$$Q_{p_2} = 0.5 (C_{p_2} - C_{n_2})$$

$$Q_{p_2} = 0.5 (0.00010610 - 0.000094068)$$

$$Q_{p_2} = 0.000006016 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_2} = 529,100.53 (C_{p_2} - C_{n_2})$$

$$h_{p_2} = 529,100.53(0.00010610 - 0.000094068)$$

$$h_{p_2} = 6.3661 \text{ m. c. a.}$$

**Sección 3: X=36.6 m, i=3**

$$C_{p_3} = Q_{2,0} + 9.45 \times 10^{-7} h_{2,0} - 161.53 Q_{2,0} |Q_{2,0}|$$

$$C_{p_3} = 0.0001 + 9.45 \times 10^{-7} (6.3679) - 161.53(0.0001)|0.0001|$$

$$C_{p_3} = 0.0001044$$

$$C_{n_3} = Q_{4,0} - 9.45 \times 10^{-7} h_{4,0} - 161.53 Q_{4,0} |Q_{4,0}|$$

$$C_{n_3} = 0.0001 - 9.45 \times 10^{-7} (2.7675) - 161.53(0.0001)|0.0001|$$

$$C_{n_3} = 0.0000957$$

$$Q_{p_3} = 0.5 (C_{p_3} - C_{n_3})$$

$$Q_{p_3} = 0.5(0.0001044 - 0.0000957)$$

$$Q_{p_3} = 0.00000435 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_3} = 529,100.53 (C_{p_3} - C_{n_3})$$

$$h_{p_3} = 529,100.53(0.0001044 - 0.0000957)$$

$$h_{p_3} = 4.60317 \text{ m. c. a.}$$

**Sección 4: X=48.8 m, i=4**

$$C_{p_4} = Q_{3,0} + 9.45 \times 10^{-7} h_{3,0} - 161.53 Q_{3,0} |Q_{3,0}|$$

$$C_{p_4} = 0.0001 + 9.45 \times 10^{-7} (4.5677) - 161.53(0.0001)|0.0001|$$

$$C_{p_4} = 0.0001027$$

$$C_{n_4} = Q_{5,0} - 9.45 \times 10^{-7} h_{5,0} - 161.53 Q_{5,0} |Q_{5,0}|$$

$$C_{n_4} = 0.0001 - 9.45 \times 10^{-7}(0.9674) - 161.53(0.0001)|0.0001|$$

$$C_{n_4} = 0.00009747$$

$$Q_{p_4} = 0.5(C_{p_4} - C_{n_4})$$

$$Q_{p_4} = 0.5(0.0001027 - 0.00009747)$$

$$Q_{p_4} = 0.000002615 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_4} = 529,100.53(C_{p_4} - C_{n_4})$$

$$h_{p_4} = 529,100.53(0.0001027 - 0.00009747)$$

$$h_{p_4} = 2.76719 \text{ m. c. a.}$$

***Condición de frontera aguas abajo***

**Sección 5:  $X=61.0 \text{ m}$ ,  $i=5$**

$$C_{p_5} = Q_{4,0} + 9.45 \times 10^{-7}h_{4,0} - 161.53Q_{4,0}|Q_{4,0}|$$

$$C_{p_5} = 0.0001 + 9.45 \times 10^{-7}(2.7675) - 161.53(0.0001)|0.0001|$$

$$C_{p_5} = 0.0001009$$

$$Q_5 = 0.0001 - 0.0001(0.00903645)$$

$$Q_5 = 0.00009909 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_{p_5} = 1,058,201.06(C_{p_5} - Q_5)$$

$$h_{p_5} = 1,058,201.06(0.0001009 - 0.00009909)$$

$$h_{p_5} = 1.915343 \text{ m. c. a.}$$

De esta forma, se determinan las variables  $Q_p$  y  $h_p$  a lo largo de la tubería para cada instante de tiempo.

A continuación se presentan las gráficas donde se puede observar la variación de la carga de presión ( $h$ ) con respecto a la posición en la tubería ( $X$ ) y el instante de tiempo que se presenta ( $t$ ).

**Tiempo de cierre ( $t_c = 1.0$  s)**

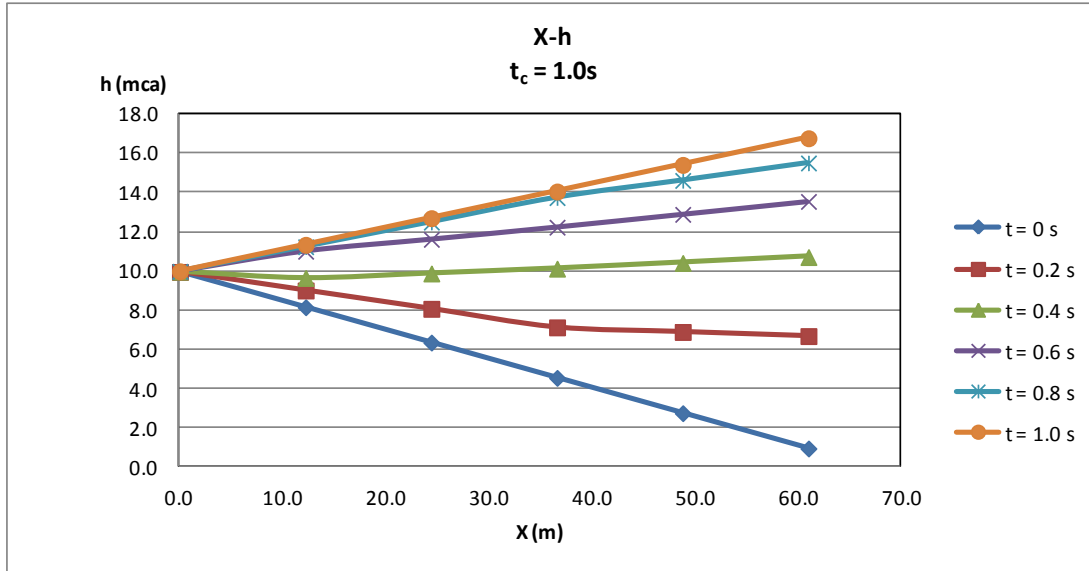


Figura 5.4. Carga de presión – Posición ( $t_c=1.0$  s)

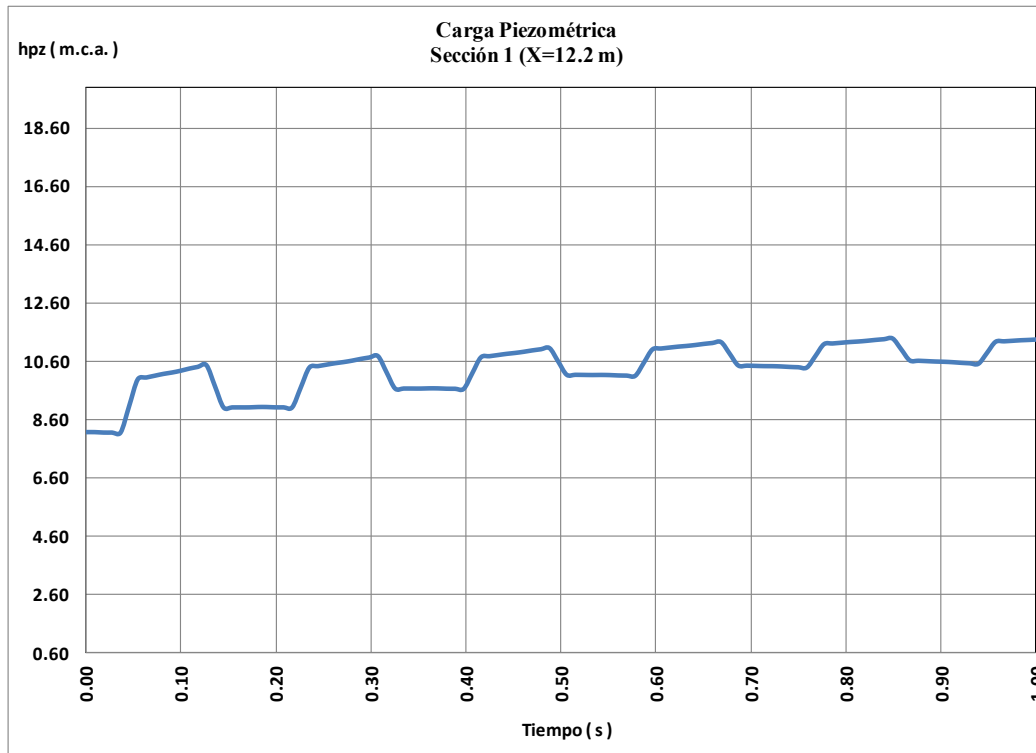


Figura 5.5. Sección 1, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)



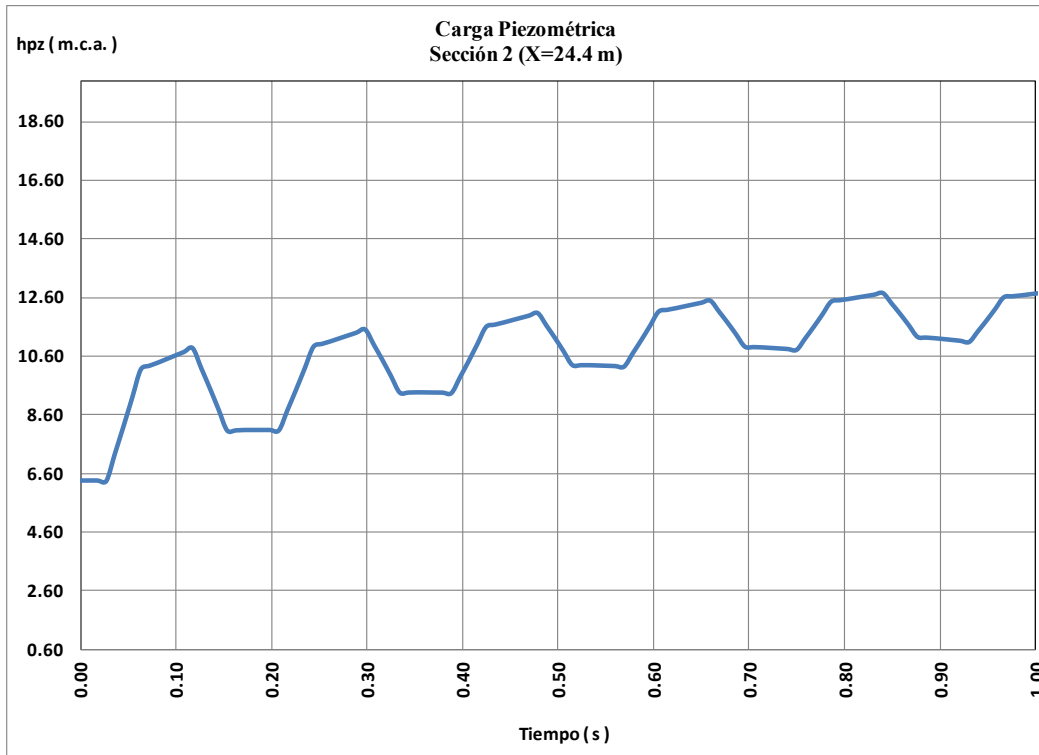


Figura 5.6. Sección 2, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

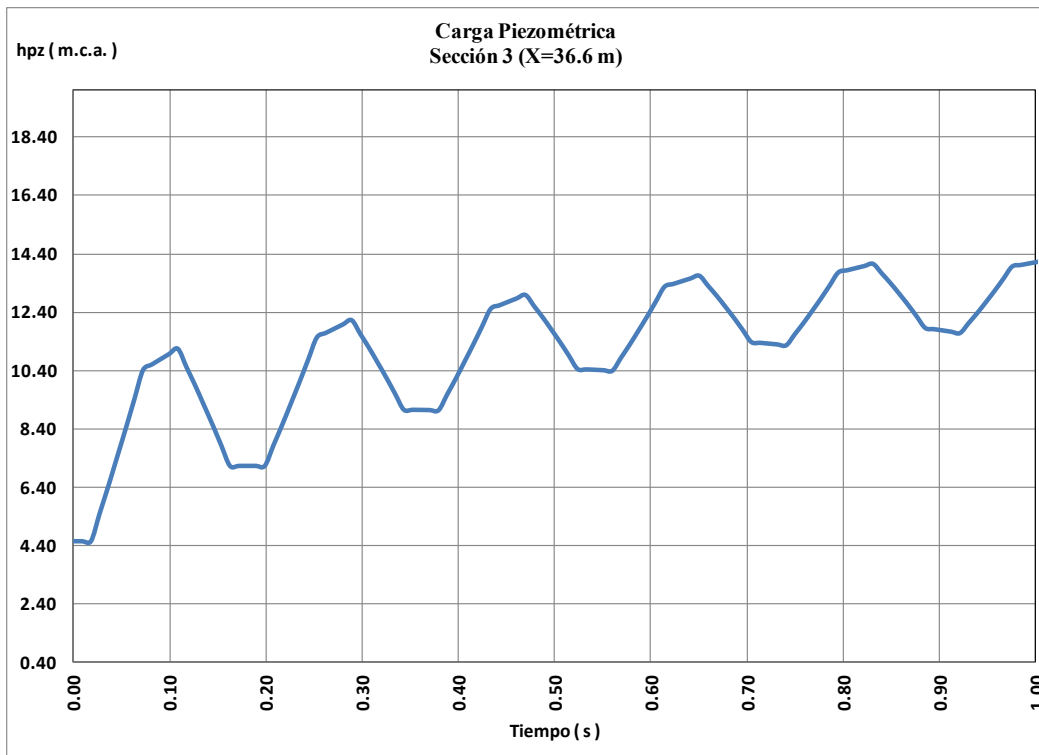


Figura 5.7. Sección 3, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

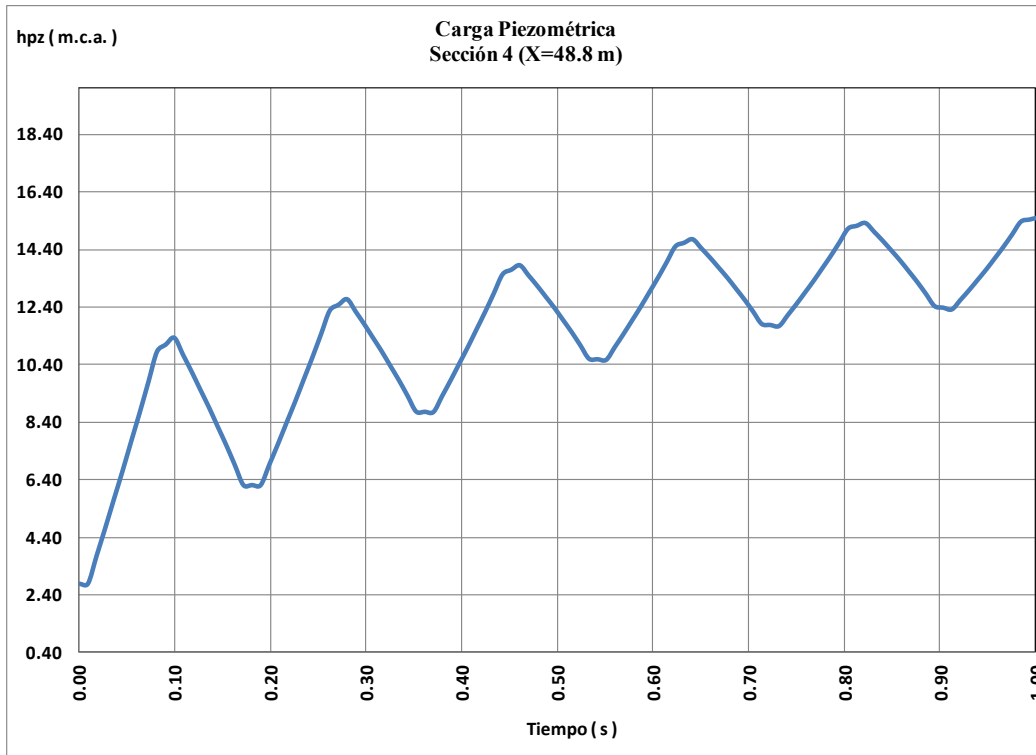


Figura 5.8. Sección 4, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

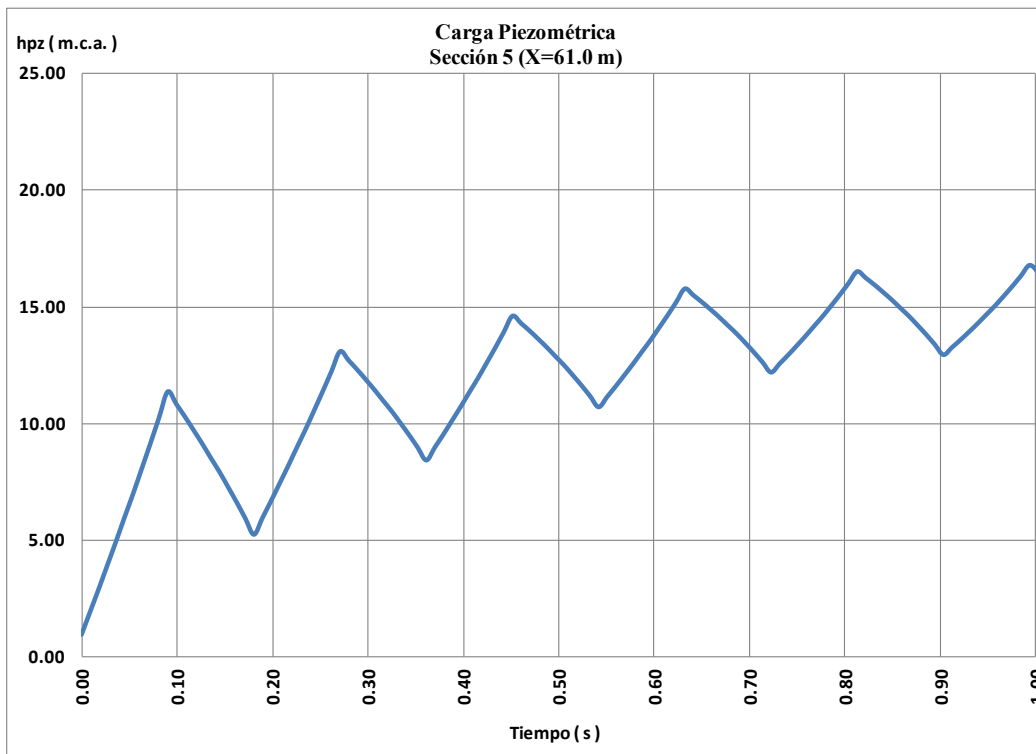


Figura 5.9. Sección 5, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=1.0$  s)

**Tiempo de cierre ( $t_c = 0.5$  s)**

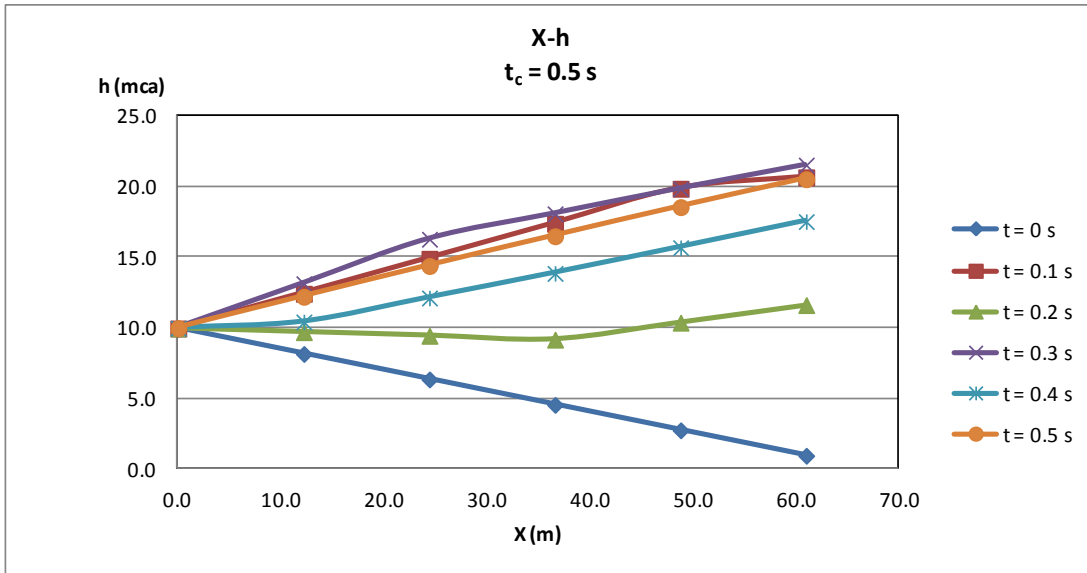


Figura 5.10. Carga de presión – Posición ( $t_c=0.5$  s)

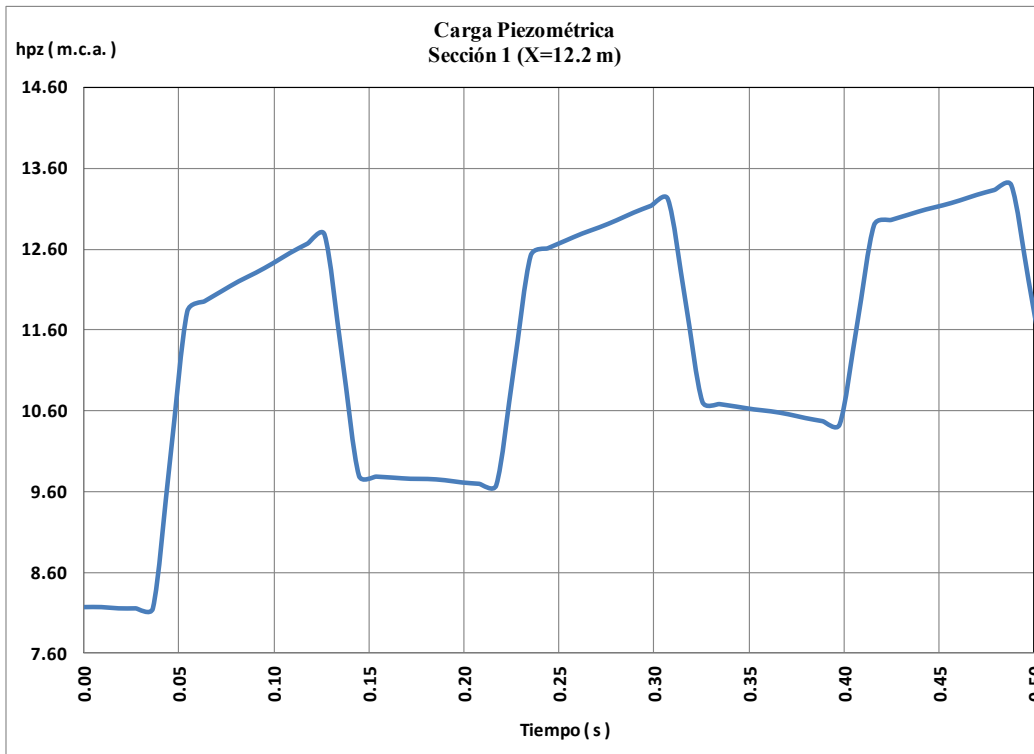


Figura 5.11. Sección 1, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=0.5$  s)

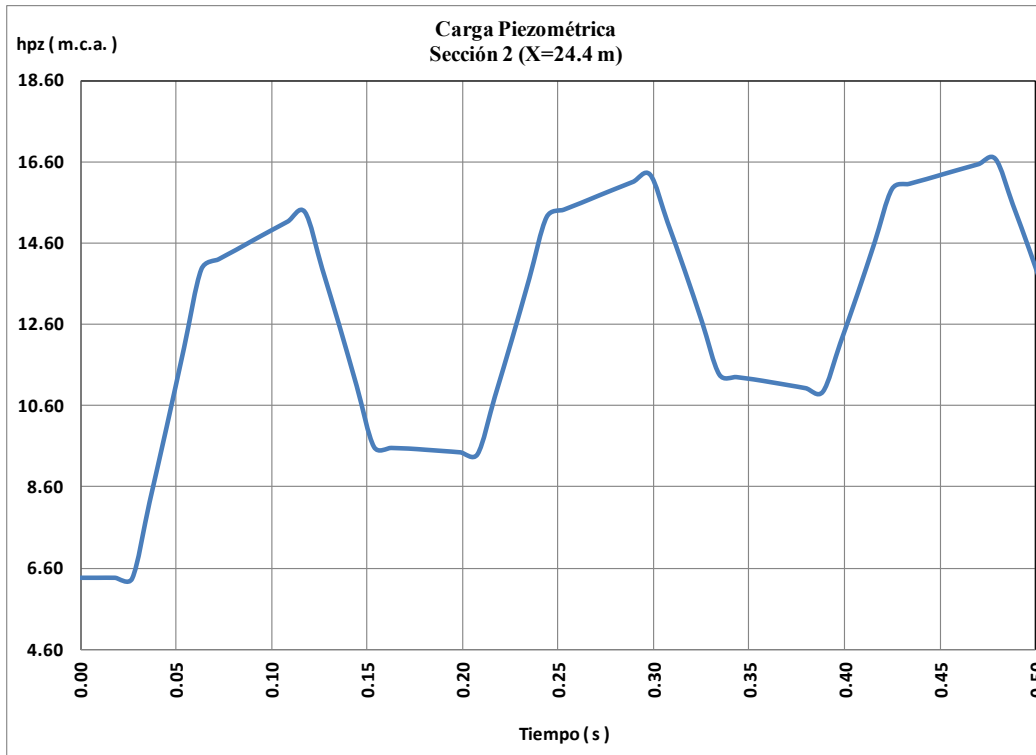


Figura 5.12. Sección 2, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=0.5$  s)

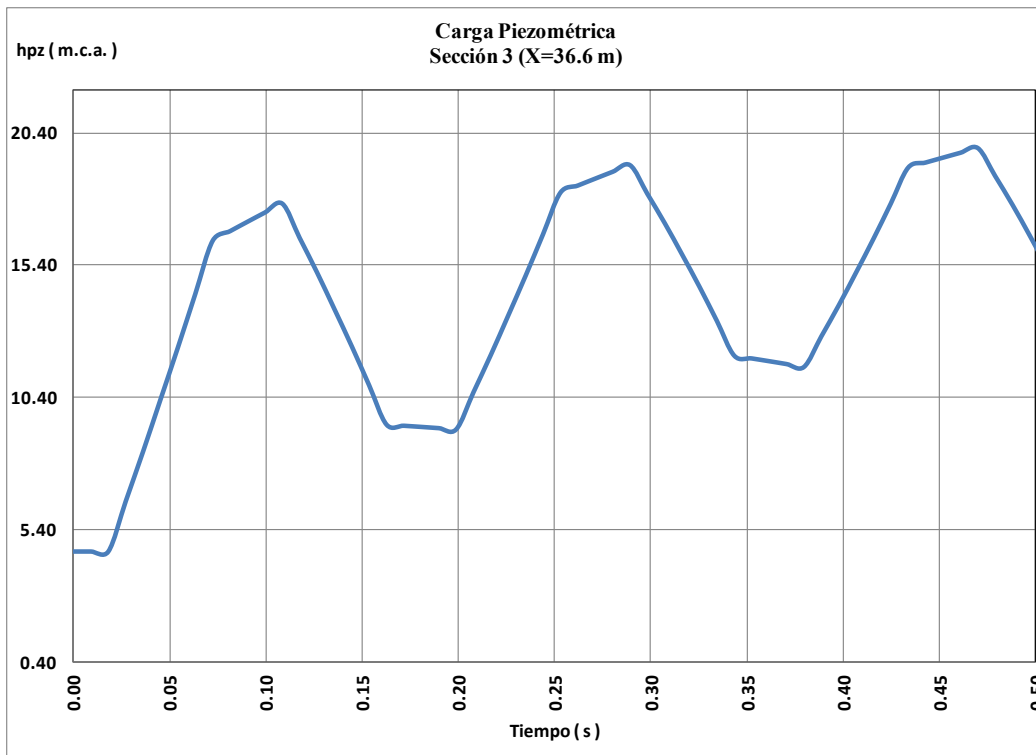


Figura 5.13. Sección 3, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=0.5$  s)

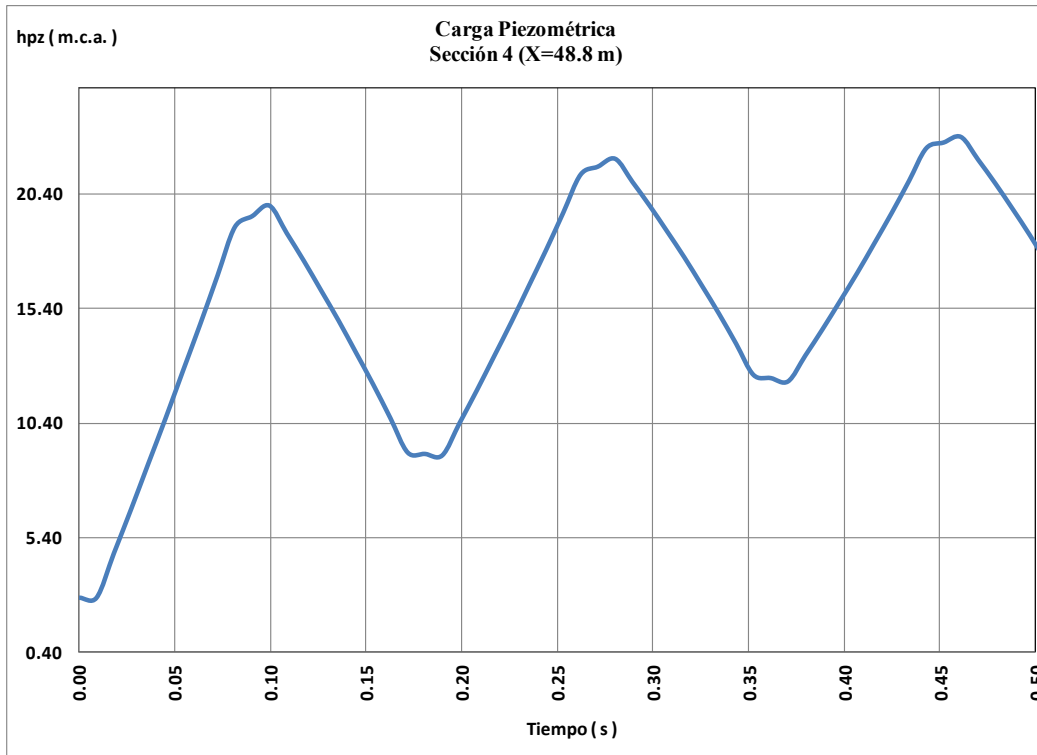


Figura 5.14. Sección 4, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=0.5$  s)

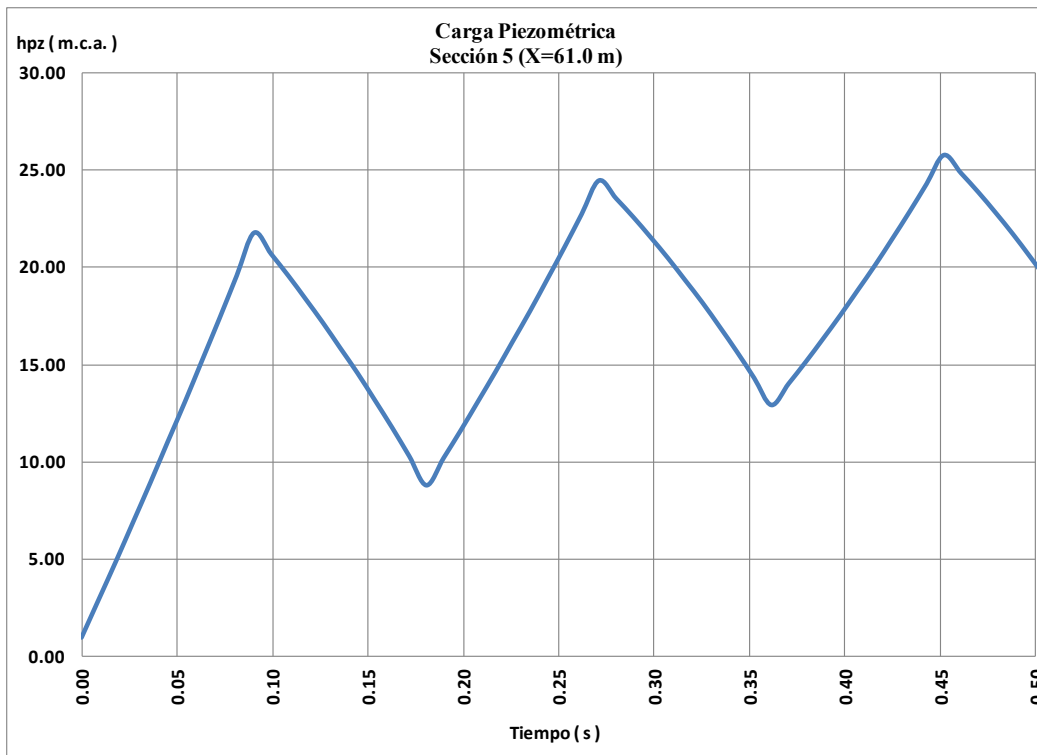


Figura 5.15. Sección 5, Carga de presión – Tiempo ( $t_c=0.5$  s)

Las condiciones iniciales en cuanto a la presión inicial en la tubería y el gasto establecido corresponden a valores de  $1.00 \text{ Kg/cm}^2$  y  $0.0001 \text{ m}^3/\text{s}$ . Dichos valores son supuestos y adecuados a las características de la tubería.

De los resultados obtenidos, se observa la variación de la carga de presión respecto a la posición en la tubería y respecto a cada instante de tiempo. Para el tiempo de cierre propuesto de  $t_c=1.0$  segundos, la carga máxima calculada en la sección 5, tuvo una presión máxima de 16.78 metros de columna de agua.

Para el tiempo de cierre propuesto de  $t_c=0.5$  segundos, la carga máxima calculada en la sección 5, tuvo una presión máxima de 25.76 metros de columna de agua.

La variación en la onda de presión calculada deberá ser comparada con la variación de la onda de presión registrada por los sensores de presión.

Se presenta a continuación la propuesta para la realización de la práctica de laboratorio “Golpe de ariete aplicando el método de las características”, para un tiempo de cierre de 1.0 segundos.

### **Objetivo**

Observar la variación de la carga de presión a lo largo de una tubería, provocada por el cierre y apertura de una válvula colocada en su extremo final.

Calcular y analizar la variación de la carga de presión generada en una tubería por el cierre de una válvula, aplicando el Método de las Características.

### **Antecedentes**

- Flujo permanente en conductos a presión
- Flujo transitorio en conductos a presión
- Teoría del golpe de ariete
- Celeridad de una onda de presión
- Clasificación de maniobras de válvula
- Método de las características

### **Desarrollo**

#### **Medición de condiciones iniciales en flujo permanente.**

1. Abrir la válvula de alimentación general y la válvula solenoide hasta que se establezca el flujo.
2. Determinar el gasto mediante aforo volumétrico.
3. Conectar los sensores de presión.
4. Colocar en posición de cerrado la válvula solenoide y observar la evolución de la presión en los dos sitios de ubicación de los sensores de presión.
5. Finalmente, realizar una maniobra de apertura y observar el comportamiento de la presión en los dos sitios de ubicación de los sensores de presión.

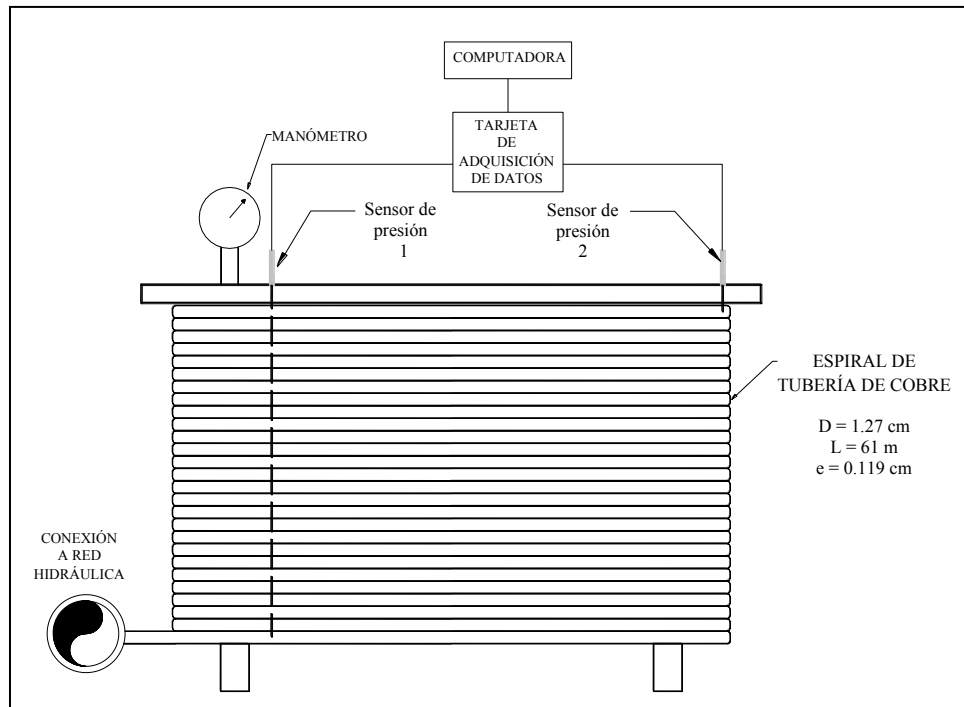


Figura 5.10. Dispositivo experimental

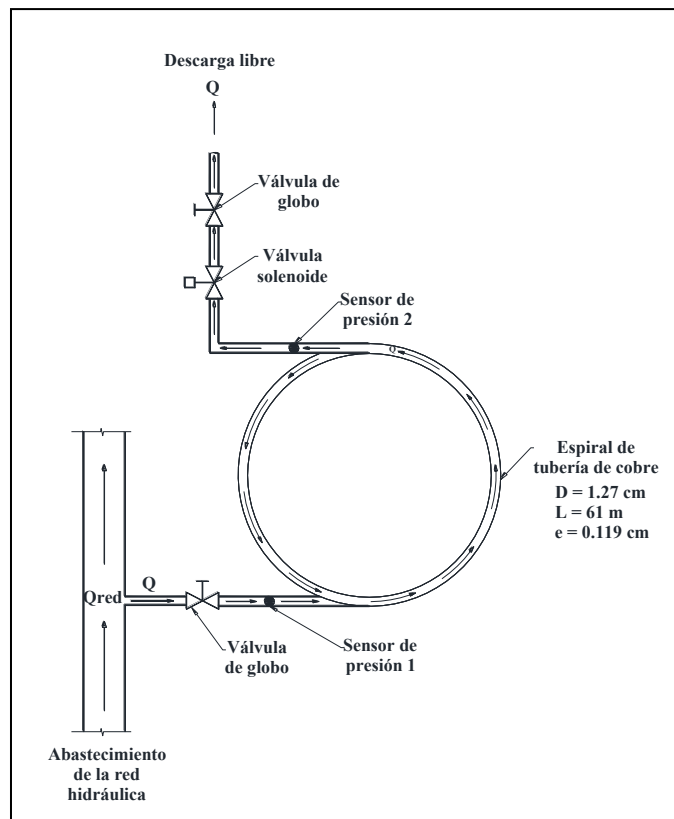


Figura 5.11. Arreglo de la instalación hidráulica propuesta



**Registro de datos**

Tabla 5.7. Registro de datos

|                      |                  |  |                     |
|----------------------|------------------|--|---------------------|
| Tubería de descarga  | $H_0 =$          |  | M                   |
| Aforador volumétrico | $V1 =$<br>$t1 =$ |  | m <sup>3</sup><br>s |
|                      | $V2 =$<br>$t2 =$ |  | m <sup>3</sup><br>s |
|                      | $V3 =$<br>$t3 =$ |  | m <sup>3</sup><br>s |
| Sensores de presión  | $H_{s1} =$       |  | M                   |
|                      | $H_{s2} =$       |  | M                   |
|                      | $H_{máxs2} =$    |  | M                   |

**Memoria de cálculo**

1. Una vez tomadas las tres mediciones de volumen y tiempo, calcular los gastos  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  de la tubería, en m<sup>3</sup>/s, según la ecuación

$$Q = \frac{V}{t}$$

Donde

$V$  = volumen aforado

$t$  = tiempo de aforo

y calcular el gasto promedio como

$$Q_{prom} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{3}$$

2. Calcular la celeridad de la onda  $a$ , en m/s, de la onda de presión en la tubería, con la ecuación:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_v} + \frac{D}{E_t e} \right)}}$$

donde:

$a$  celeridad de la onda de presión, en m/s;

$\rho$  densidad del agua,  $\rho = 1,000 \text{ Kg/m}^3$ ;

$E_v$  módulo de elasticidad del agua,

$$E_v = 2.18 \times 10^9 \text{ Pa};$$

$E_t$  módulo de elasticidad de la tubería,

$$E_t = 118.7 \times 10^9 \text{ Pa};$$

$D$  diámetro de la tubería,  $D = 0.0127 \text{ m}$ ;

$e$  espesor de la tubería,  $e = 0.00119 \text{ m}$ .

3. Calcular el periodo  $T$ , en segundos, de la onda de presión, como:  $T = \frac{2L}{a}$ , donde  $L = 61.00 \text{ m}$  es la longitud de tubería.

4. Solución aplicando el Método de las Características

**Ecuaciones características:**

$$Q_p = C_p - C_a H_p \dots \text{ec. (1) Ec. característica positiva}$$

$$Q_p = C_n + C_a H_p \dots \text{ec. (2) Ec. característica negativa}$$

en las cuales:

$$C_{pi} = Q_{i-1} + C_a h_{i-1} - F Q_{i-1} |Q_{i-1}| \dots \text{ec. (3)}$$

$$C_{ni} = Q_{i+1} - C_a h_{i+1} - F Q_{i+1} |Q_{i+1}| \dots \text{ec. (4)}$$

donde:

$$C_a = \frac{gA}{a} \quad \text{y} \quad F = \frac{f \Delta t}{2DA}$$

Considerar  $f=0.059$ ,  $\Delta t=0.009036$  segundos y  $\Delta x=12.2 \text{ m}$ . Ver figura 5.12

**Puntos interiores:**

$$Q_{pi} = 0.5(C_{pi} + C_{ni}) \dots ec. (5)$$

$$h_{pi} = \frac{C_{pi} - C_{ni}}{2C_a} \dots ec. (6)$$

**Condiciones de frontera:**

- **Condición de frontera aguas arriba. Tanque con nivel constante**

$$Q_{pi} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k_1(C_{ni} + C_a H_0)}}{2K_1} \dots ec. (7)$$

donde:

$$k_1 = \frac{C_a(1 + k)}{2gA^2} \dots ec. (8)$$

Considerar  $k = 0.5$  (Coeficiente de pérdida a la entrada de la tubería).

$$H_{pi} = H_0 - (1 + k) \frac{Q_p^2}{2gA^2} \dots ec. (9)$$

- **Válvula situada en el extremo final aguas abajo**

Considerando un cierre lineal ( $t_c = 1.0$  s)

$$Q_p = Q_0 - Q_0 t; \quad 0 \leq t \leq 1 \dots ec. (10)$$

$$Q_p = 0; \quad t > 1 \dots ec. (11)$$

Por otra parte:

$$h_{p_5} = \frac{C_{p_5} - Q_{p_5}}{C_a} \dots ec. (12)$$

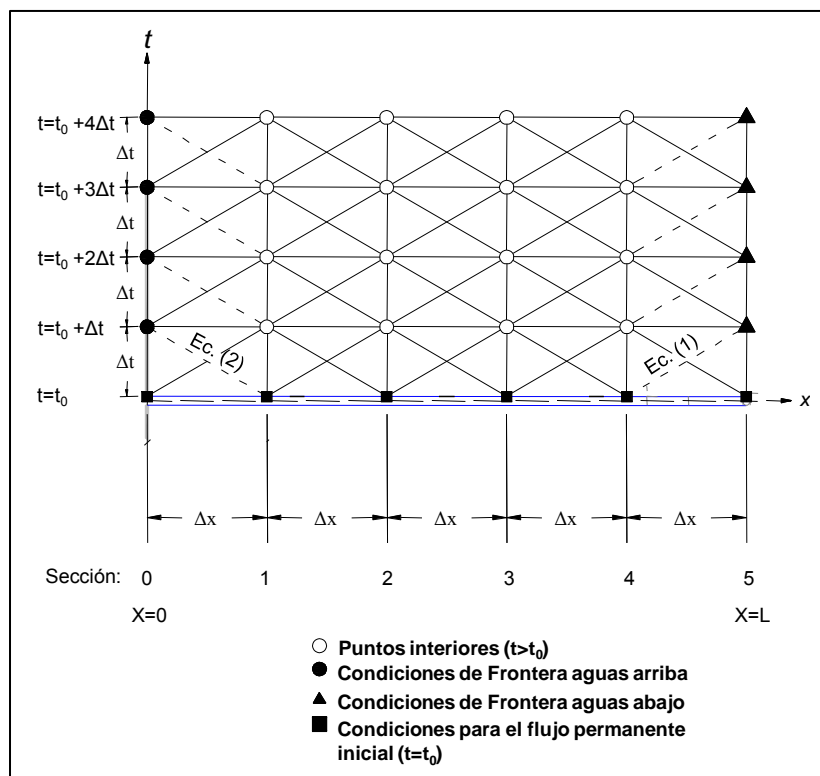


Figura 5.12. Malla característica

Tabla de cálculo

Tabla 5.8. Tabla de cálculo

| Sección (i) | 0     |       |        | 1      |       |       |        | 2      |       |       |        | 3      |       |       |        | 4      |       |       |        | 5      |       |       |  |
|-------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|--|
| t (s)       | $h_0$ | $Q_0$ | $Cn_0$ | $Cp_1$ | $h_1$ | $Q_1$ | $Cn_1$ | $Cp_2$ | $h_2$ | $Q_2$ | $Cn_2$ | $Cp_3$ | $h_3$ | $Q_3$ | $Cn_3$ | $Cp_4$ | $h_4$ | $Q_4$ | $Cn_4$ | $Cp_5$ | $h_5$ | $Q_5$ |  |
| t=t0        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |  |
| t=t0+Δt     |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |  |
| t=1.0       |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |        |        |       |       |  |

- Dibujar la curva  $X-h$ , en m, para los instantes de tiempo 0, 0.4, 0.8 y 1.0 segundos.
- Dibujar la curva  $T-h$ , en s y m, respectivamente, en las secciones 1, 2, 3, 4 y 5.
- Comparar las curvas desplegadas por los sensores de presión, con la obtenida en el inciso 5, en la sección 5.

### **Instrumentos de medición**

- Probeta graduada
- Cronómetro

### **Referencias bibliográficas**

1. Sotelo A., G., *Hidráulica General Vol. I*, Ed. Limusa, México 1990.
2. Mataix, C., *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Ed. Harla, México, 1990.
3. Gardea V., H., *Aprovechamientos Hidráulicos y de Bombeo*, Facultad de Ingeniería, UNAM.
4. Mataix, C. *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Ed. Harla, México, 1995.
5. Mancebo, U. *Teoría del golpe de ariete y sus aplicaciones en ingeniería hidráulica*. Ed. Limusa, México, 1997.
6. Chaudhry, M. Hanif. *Applied Hydraulic Transients*.

### **Cuestionario**

El cuestionario tendrá de 5 a 10 preguntas relacionadas con el desarrollo y memoria de cálculo y variarán cada semestre.

## 6 CONCLUSIONES

- Se definieron los conceptos principales que se utilizaron como base para comprender el fenómeno transitorio conocido como golpe de ariete.
- Se investigó sobre la teoría de dos métodos de solución para el golpe de ariete, tales como, el método de Allievi y el método de las características.
- Se aplicó un método numérico de solución para el fenómeno transitorio golpe de ariete en el dispositivo experimental instalado en el Laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Dicho método consistió en el método de las características y para fines de comparación se utilizó también el método de Allievi.
- Para la aplicación del método de las características se obtuvo la ley para maniobra de cierre no uniforme de la válvula de esfera específicamente.
- Se obtuvieron resultados del fenómeno transitorio golpe de ariete provocado en el dispositivo experimental tanque – tubería – válvula de esfera con el método de Allievi y con el método de las características, para diferentes tiempos de cierre de la válvula de esfera.
- Se propuso la instalación de instrumentos de medición en el dispositivo tanque – tubería – válvula de esfera, tales como dos sensores de presión con un rango de medición de 0 a 50 psi, alimentados mediante una fuente de poder, una tarjeta de adquisición de datos, y un software para desplegar las variaciones de la presión en una computadora.
- Se realizó una propuesta de práctica de laboratorio para que los alumnos de la asignatura *Hidráulica de Máquinas*, conozcan y empleen el método de las características como método de solución para el golpe de ariete provocado en el dispositivo experimental tanque – tubería – válvula de esfera.

- Se realizó una propuesta para la rehabilitación del dispositivo experimental instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula, para poder representar el fenómeno golpe de ariete en este dispositivo.
- Se realizó la solución mediante el método de las características para el caso del golpe de ariete provocado en el dispositivo instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula a partir de datos supuestos, ya que el dispositivo no se encuentra en funcionamiento.
- Se propuso la instalación de instrumentos de medición y control para el dispositivo experimental que consta de instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula. Los instrumentos de medición se resumen en: dos sensores de presión con un rango de medición de 0 – 50 psi, los cuales serán alimentados por una fuente de poder. Dicho rango de presión es apto para soportar las presiones calculadas para este caso. Así mismo se propone el uso de una tarjeta de adquisición de datos, para captar las señales enviadas por los sensores de presión. Dicha tarjeta viene acompañada de un software para poder desplegar en tiempo real la variación de la onda de presión.
- En cuanto al instrumento de control del dispositivo, se uso una válvula solenoide, la cual al momento de cerrarse provocará el golpe de ariete. Esta válvula será controlada mediante la tarjeta de adquisición de datos utilizando como interfase un módulo de relevadores, para realizar la activación de la válvula solenoide.
- El método de las características resulta ser más representativo de lo que realmente pasa en las conducciones, ya que se pueden incluir variables como condiciones de frontera tales como tanques de carga constante, bombas, leyes de maniobra de cierre no lineales, así como poder tomar en cuenta los cambios de diámetro a lo largo de la conducción, así como las pérdidas por fricción y locales que se presentan. Dichas variables no se pueden incluir en otros métodos como el método de Allievi o el método de Joukowsky.
- Finalmente, el método de las características resulta práctico y sencillo en su aplicación. Se pudieron obtener resultados muy apegados a lo medido, por lo cual se considera que la convergencia del método es aceptable.

- Con la realización de la memoria de cálculo del caso de estudio del capítulo 3, se pudo plantear una propuesta para práctica de laboratorio, teniendo como solución el método de las características.
- Con la realización de la memoria de cálculo para el caso del dispositivo propuesto instalación hidráulica – tubería en espiral – válvula, se pudo plantear una propuesta para práctica de laboratorio, teniendo como solución el método de las características.
- Por último, las dos propuestas de práctica de laboratorio pretenden formar parte del material didáctico para la impartición de la práctica “Golpe de Ariete” que actualmente se imparte en el laboratorio de hidráulica de la Facultad de Ingeniería, UNAM.



**BIBLIOGRAFÍA**

1. Sotelo A., G., *Hidráulica General Vol. I*, Ed. Limusa, México 1990.
2. Mataix, C., *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Ed. Harla, México, 1990.
3. Gardea V., H., *Aprovechamientos Hidráulicos y de Bombeo*, Facultad de Ingeniería, UNAM.
4. Mataix, C. *Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas*, Ed. Harla, México, 1995.
5. Mancebo, U. *Teoría del golpe de ariete y sus aplicaciones en ingeniería hidráulica*. Ed. Limusa, México, 1997.
6. Chaudhry, M. Hanif. *Applied Hydraulic Transients*.
7. Manual de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento. *Fenómenos Transitorios en Líneas de Conducción*. Comisión Nacional de Agua, México, 2007
8. Moisés Berezowsky Verduzco. *Cámaras de Oscilación. Análisis y Diseño Hidráulico*.
9. José Luis Sánchez Bibriesca. *Método de las Características en Problemas de Frontera Variable*. Ingeniería Hidráulica en México. Enero/Abril de 1987.