UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBLEMAS (p,q) CON RECTAS EN R^d

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

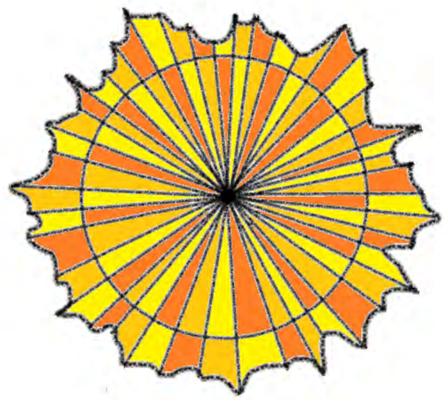
LUIS VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. DÉBORAH OLIVEROS BRANIFF

2014

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Vázquez
Apellido materno	Rodríguez
Nombre(s)	Luis
Teléfono	55 50 17 44
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	305131014
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dra.
Nombre(s)	Déborah
Apellido paterno	Oliveros
Apellido materno	Braniff
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ricardo
Apellido paterno	Strausz
Apellido materno	Santiago
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dra.
Nombre(s)	Martha Gabriela
Apellido paterno	Araujo
Apellido materno	Pardo
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dra. en M.A.
Nombre(s)	Amanda
Apellido paterno	Montejano
Apellido materno	Cantoral
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Problemas (p,q) con rectas en Rd.
Subtítulo	Cotas para el número de perforación de familias de rectas en el plano.
Número de Páginas	43 páginas
Año	2014

Que la paz se extienda en todas las dimensiones.

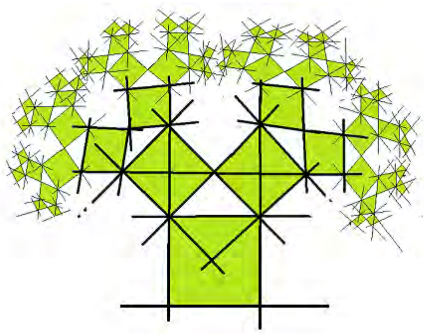


Agradezco a todos los seres que viven para la paz. En particular a mi madre, hermanos y amigos. Agradezco a toda la familia, que un día será la misma para todos los que vivimos en este mundo.

Índice general

PROBLEMAS (p, q) CON RECTAS EN $\mathbb{R}^d$.

1. Introducción



DEFINICIÓN 1. *Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^d$ es* ***convexo*** *si y sólo si para toda pareja de puntos $(A, B) \in C$ y para toda $t \in [0, 1]$ se cumple que $(1 - t) \cdot A + t \cdot B \in C$. Es decir, C es convexo si y sólo si el segmento de recta que une a cualesquiera dos puntos de C está contenido en C.*

Consideremos una familia C de conjuntos convexos en el plano. Cuando un conjunto T de puntos, cumple que para todo convexo $A \in \mathsf{C}$, existe un punto $p \in T$ tal que $p \in A$, se dice que T es **transversal** a C. Una pregunta interesante es: ¿Cúal es el mínimo número de puntos con los que se puede formar una transversal de C?, es decir, ¿cuál es el número $\pi(\mathsf{C}) := mín \left\{|T| \quad | \, T \text{ es transversal de } \mathsf{C}\right\}$?

Es claro que si no sabemos nada de la distribución de los convexos de C, lo que podemos hacer es tomar un punto en cada convexo y así formar una transversal T_0 de C (en cuyo caso tanto C como T_0 tienen la misma cardinalidad), aunque probablemente exista otra transversal T_1 de C con $|T_1| < |T_0|$. En el caso particular en que todos los elementos de C fueran ajenos dos a dos, entonces sabemos que efectivamente $\pi(\mathsf{C}) = \left|\mathsf{C}\right|$. Esta situación es muy distinta si sabemos algunas condiciones sobre C. Por ejemplo, si tomamos una familia finita C_0 de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^2$, $\left|\mathsf{C}_0\right| \geq 3$ y, con la propiedad de que cualesquiera tres elementos de C_0 tienen un punto en común, entonces ¿qué se puede decir del número $\pi(\mathsf{C}_0)$? El matemático vienés Eduard Helly (1884 – 1943) demostró que, en este caso, $\pi(\mathsf{C}_0) = 1$:

TEOREMA 1. *(Helly, 1923)*
Sea C *una familia finita de al menos* $d+1$ *conjuntos convexos en* $\mathbb{R}^d$. *Si los convexos de cualquier subfamilia de* C *de tamaño* $d+1$ *tienen un punto en común, entonces todos los convexos de* C *tienen un punto en común.*

A partir de este resultado nace una interesante gama de problemas llamados "Tipo Helly". Estos problemas surgen de considerar variaciones en las hipótesis del Teorema de Helly y tratar de encontrar el número $\pi(\mathsf{C})$, al cual se le llama *número de perforación de* C. Sin embargo, como se verá más adelante, en general no es una tarea sencilla.

Una variante interesante de las hipótesis del Teorema de Helly es la siguiente:

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p \geq q \geq 2$. Se dice que una familia A de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ *tiene la propiedad* (p, q), si cada que se toman p elementos de A, hay q de ellos que tienen un punto en común. En este contexto el Teorema de Helly se puede enunciar como sigue:

Sea C *una familia finita de al menos* $d+1$ *conjuntos convexos en* $\mathbb{R}^d$. *Si* C *tiene la propiedad* $(d+1,\ d+1)$, *entonces* $\pi(\mathsf{C}) = 1$.

Ahora, ¿qué sucede si se cambia la propiedad $(d+1,\ d+1)$ por la propiedad (p, q) para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geq q \geq 2$?, ¿se puede decir cuánto vale $\pi(\mathsf{C})$?

Con estas consideraciones, Hadwiger y Debrunner presentaron un resultado en la convención anual de la Comunidad Matemática de Suiza en el año de 1956:

TEOREMA 2. *(Hadwiger; Debrunner* [**8**]*) Sean* p *y* q *enteros tales que* $p \geq q \geq d+1$ *y* $(d-1)p < d(q-1)$ *y sea* C *una familia finita de conjuntos convexos en* $\mathbb{R}^d$. *Supongamos que* C *tiene por lo menos* p *elementos y que al tomar cualesquiera* p *elementos de* C *hay* q *de ellos que tienen un punto en común. Entonces existen* $p-q+1$ *puntos de* $\mathbb{R}^d$ *tales que cada elemento de* C *contiene al menos uno de ellos.*

Como observamos anteriormente, el Teorema de Helly se vuelve un caso particular del resultado anterior; cuando $p = q = d+1$. Este resultado se situa en los origenes de los "problemas (p, q)" los cúales se enfocan *en perforar lo más económicamente posible*, es decir, buscan acotar lo mejor posible el número de perforación de familias de conjuntos (no sólo convexos) en $\mathbb{R}^d$ con alguna propiedad (p, q).

Aunque los dos Teoremas que hemos enunciado nos dicen que $\pi(\mathsf{C}) = p-q+1$ es el menor posible número de perforación para familias finitas de convexos en $\mathbb{R}^d$, veremos más adelante que resultados de este tipo son bastante raros y por ello, en general, se buscará encontrar buenas aproximaciones de dicho número. En algunas ocasiones, la sola tarea de probar que el número de perforación es finito, puede ser una tarea complicada. El artículo *A survey of the Hadwiger-Debrunner (p,q)-problem* de Jürgen Eckoff [**7**] tiene un excelente compendio de resultados alrededor de este problema. El autor nos muestra que cuando los enteros p y q no satisfacen las hipótesis del Teorema de Hadwiger y Debrunner, se vuleve complicado probar que el número de perforación existe. Los autores del teorema conjeturaron que $\pi(\mathsf{C}) = 2$ cuando no se satisfacen dichas hipótesis.

El siguiente ejemplo propuesto por L. Danzer (figura 1.1), es una familia de seis triángulos congruentes con la propiedad $(4,3)$, que nos muestra que $\pi(\mathsf{C}) \neq 2$, pues el número de perforación de esta familia de triángulos es igual a 3, ya que no es posible perforar a los seis triángulos con solamente dos puntos, como se conjeturaba.

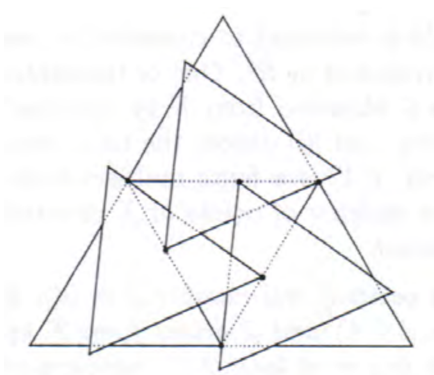


Figura 1.1

Sea $\mathcal{F}$ una famila de convexos en $\mathbb{R}^2$ que cumple la propiedad $(4,3)$. Una de las primeras cotas que se hicieron para el número de perforación de esta familia es $\pi(\mathcal{F}) \leq 4032$ [**3**]. Tiempo después se prueba que $\pi(\mathcal{F}) \leq 276$ y Turán hace la conjetura de que el 276 puede cambiarse por 223. Ahora, puede decirse mucho más que eso; Kleitman, Gyárfás y Tóth probaron recientemente que $\pi(\mathcal{F}) \leq 13$ [**9**]. La demostración de este hecho no es inmediata y aún está abierto el problema de encontrar el número de perforación exacto (o de mejorar la cota) para cualquier familia de convexos en $\mathbb{R}^2$ que cumpla la propiedad $(4,3)$.

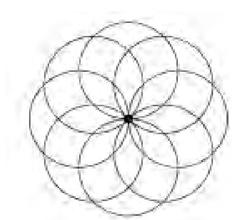
Así, tenemos que para familias $\mathcal{F}$ de convexos en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad $(4,3)$, se cumple:

$$3 \leq \pi(\mathcal{F}) \leq 13$$

En este trabajo nos enfocaremos principalmente en familias de conjuntos convexos de dimensión 1 en $\mathbb{R}^d$ es decir, en familias de rectas e intervalos en dicho espacio. Por un *intervalo en* $\mathbb{R}^d$ entendemos un subconjunto cerrado, conexo y acotado de una línea recta en $\mathbb{R}^d$. Así, estudiaremos los números de perforación de familias de rectas e intervalos que satisfacen las propiedades (p,q) y expondremos algunos resultados originales para estas familias.

La siguiente sección, que es un poco ajena al hilo central de esta exposición, está dedicada a introducir brevemente los "problemas tipo Helly", y nos servirá para exponer, a grandes rasgos, el contexto en el que nace esta tesis. Se le recomienda a todo aquel familiarizado con estos temas, que salte al capítulo 3 en el que se presentan algunos resultados generales de problemas (p,q), y que usaremos de base para la presentación de la parte original de esta tesis, que puede verse en los capítulos 4, 5 y 6.

2. El Teorema de Helly y algunas generalizaciones.



Muchos de los problemas que trataremos en este trabajo, se derivan del caso $d=1$ del Teorema de Helly; por lo cual incluímos su formulación y demostración para este caso:

TEOREMA 3. [*Helly caso* $d=1$] *Sea* $\mathcal{F}$ *una familia de intervalos en* $\mathbb{R}$ *tal que* $|\mathcal{F}|>1$. *Si cualesquiera dos intervalos de* $\mathcal{F}$ *tienen un punto en común, entonces todos los intervalos de* $\mathcal{F}$ *tienen un punto en común.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $I \in \mathcal{F}$. Llamaremos $E_i(I)$ al extremo izquierdo del intervalo I, es decir, $E_i(I) \leq t$ para toda $t \in I$; Esto puede hacerse sin problema pues $I \subset \mathbb{R}$. Análogamente, llamaremos $E_d(I)$ al extremo derecho de I; notemos que ambos extremos están en I por ser cerrado.

Primero lo demostaremos para el caso finito, es decir, $|\mathcal{F}| < \infty$.
Supongamos entonces que $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, I_3, ..., I_n\}$ y consideremos al punto $M := máx\,\{E_i(I_j) \ \mid I_j \epsilon \mathcal{F}\}$, el cual existe porque $|\mathcal{F}| < \infty$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $M = E_i(I_n)$. Como cualesquiera *dos* intervalos de $\mathcal{F}$ se intersectan, se debe tener que cualquier intervalo I_k, intersecta a I_n, lo que quiere decir que $E_i(I_n) \leq E_d(I_k)$ para toda $k \ \epsilon \ \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Entonces $E_d(I_k) \geq M = E_i(I_n)$ para toda $k \ \epsilon \ \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Por lo tanto $M \ \epsilon \ I_k$ para toda $k \ \epsilon \ \{1, 2, 3, ..., n\}$, es decir, todos los intervalos de $\mathcal{F}$ tienen un punto en común.

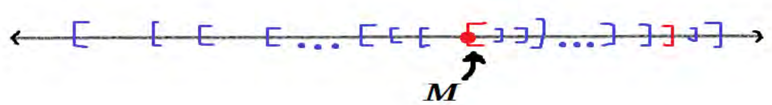


Figura 2.1

Caso $|\mathcal{F}| \nless \infty$.

Consideremos $A = \{E_i(I_j) \ \mid I_j \ \epsilon \ \mathcal{F}\}$
Afirmación.- A es acotado superiormente.

Sea $I_0 \ \epsilon \ \mathcal{F}$ un intervalo cualquiera. Como $I_k \cap I_0 \neq \emptyset$ para todo $I_k \ \epsilon \ \mathcal{F}$, entonces $E_i(I_k) \leq E_d(I_0)$ para todo $I_k \ \epsilon \ \mathcal{F}$, pues de lo contrario si existiera un $I_m \ \epsilon \ \mathcal{F}$ tal que $E_d(I_0) < E_i(I_m)$, se tendría que $I_m \cap I_0 = \emptyset$, contadiciendo la hipótesis de que cualesquiera dos intervalos de $\mathcal{F}$ se intersectan.

Entonces $E_d(I_0)$ es cota superior de A y como $A \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que A tiene supremo (por el axioma del supremo);
Sea $S = \sup A$.

Ahora supongamos que existe $I_s \ \epsilon \ \mathcal{F}$ tal que $E_d(I_s) < S$, entonces por la propiedad del supremo existe $\hat{I} \ \epsilon \ \mathcal{F}$ tal que $E_d(I_s) < E_i(\hat{I}\ ) \leq S$, pues de lo contario $E_d(I_s)$ seria cota superior de A y con ello S no sería supremo de A, lo que sería una contradicción.

Esto nos lleva a decir que existe $\hat{I} \in \mathcal{F}$ tal que

$$E_d(I_s) < E_i(\hat{I}) \leq S$$

lo cual implica que $I_s \cap \hat{I} = \emptyset$, contradiciendo la hipótesis de que cualesquiera *dos* intervalos de $\mathcal{F}$ se intersectan.

Por lo tanto *no* existe $I_s \in \mathcal{F}$ tal que $E_d(I_s) < S$,
entonces $S \leq E_d(I_k)$ para todo $I_k \in \mathcal{F}$.
Así $S \in I_k$ para todo $I_k \in \mathcal{F}$. □

Existen muchas variaciones y generalizaciones del teorema de Helly. Una de ellas consiste en cambiar la propiedad de tener un punto en común, por alguna otra propiedad $\wp$ de la familia $\mathcal{F}$. Esto ha generado una amplia serie de problemas, en los que se reconoce una estructura básica con las siguientes tres condiciones:

(1) *Un conjunto base o universo* Φ *de los objetos geométricos cerrados bajo inclusión*, y una familia $\mathcal{F} \subseteq \Phi$.

(2) *Una propiedad* $\wp$ de los subconjuntos $A \subseteq \mathcal{F}$.

(3) *Un número clave*, $\omega \in \mathbb{N}$, que nos dice que si cualquier subconjunto $A \subseteq \mathcal{F}$, con ω miembros o menos, tiene la propiedad $\wp$, entonces también $\mathcal{F}$ tiene la propiedad $\wp$.

Así, un problema tipo Helly tiene la siguiente forma:

"Sea $\mathcal{F} \subseteq \Phi$ con $|\mathcal{F}| \geq \omega$. Si cualquier subconjunto $A \subseteq \mathcal{F}$ con $|A| \leq \omega$ tiene la propiedad $\wp$, entonces el conjunto $\mathcal{F}$ tiene la propiedad $\wp$".

EJEMPLO 1. .

Objetos: puntos en $\mathbb{R}^2$.
 # clave: $\omega = 3$.
Propiedad: Colinearidad.

AFIRMACIÓN 1. *Si* $\mathcal{F}$ *es una familia de puntos en* $\mathbb{R}^2$ *tales que cualesquiera* 3 *de ellos son colineales, entonces todos son colineales.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $a, b, c \in \mathcal{F}$, por hipótesis son colineales, llamemos λ a la recta que pasa por a, b *y* c; entonces cualquier otro punto p de $\mathcal{F}$ tiene que estar en λ, de lo contrario a, b *y* p no serían colineales, contradiciendo la hipótesis. □

A continuación, probaremos un resultado de convexidad que utilizaremos para enunciar el siguiente ejemplo.

Definición 2. *Sea X un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$. La* ***envolvente convexa*** *o casco convexo de X, $C(X)$, es el conjunto convexo más pequeño de $\mathbb{R}^d$ que contiene a X. $C(X)$ resulta ser la intersección de todos los convexos en $\mathbb{R}^d$ que contienen a X, es decir: $C(X) = \cap \{B \text{ convexo } \mid X \subseteq B\}$. (Figura 2.2)*

Figura 2.2

Definición 3. *Sea V una familia de puntos en $\mathbb{R}^d$. Decimos que los puntos de V se encuentran en* ***posición convexa*** *si y solo si para todo $p \in V$ se tiene que $p \notin C(V \setminus \{p\})$.*

Teorema 4. [*Folklore*] *Para todo X conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^2$ se tiene que $C(X) = \cup \{C(\{\alpha, \beta, \gamma\}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in X\}$. (Figura 2.3)*

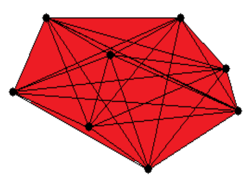


Figura 2.3

Demostración. Si $|X| < 3$, entonces no hay nada que probar. Supondremos que $|X| \geq 3$.

Como X es finito, debe existir un punto $p_0 \in X$ tal que podamos encontrar una recta l en $\mathbb{R}^2$ que contenga a p_0 y que cumpla que todo X queda contenido en uno de los semiplanos definidos por l. Tomemos a p_0 como eje de rotación de l y giremos en el sentido de las manecillas del reloj hasta que l contenga por lo menos dos puntos de X. Así la recta l contiene dos o más puntos de X de forma que todo el conjunto X continua estando contenido en el mismo semiplano definido por l. Ahora, de todos los puntos del conjunto X que están contenidos en l, nos fijaremos en el que está más lejos de p_0. A este punto (que existe porque X es finito) lo llamaremos p_1 y repetiremos este proceso, es decir, ahora tomaremos al punto p_1 como eje de rotación para la misma recta l que haremos girar también en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta contenga por lo menos dos puntos de X.

Continuando de esta forma tendremos un polígono cerrado y convexo (por construcción) en $\mathbb{R}^2$, en el que cada vértice es un punto de X. A este polígono lo llamaremos Q. Es claro que

$$Q = \cup \{C(\{\alpha, \beta, \gamma\}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in X\}$$

y solo nos falta ver que $Q = C(X)$.Por la definición de casco convexo, sabemos que $C(X) \subseteq Q$, pues Q es convexo y $C(X)$ es el convexo más pequeño que contiene a X.

Ahora, supongamos que hay un punto $\alpha \in Q$ tal que $\alpha \notin C(X)$.

Como $\alpha \notin C(X)$ (que es convexo), si tomamos cualesquiera dos puntos $t, s \in C(X)$ y el segmento de recta que los une $\overline{ts}$, entonces sabemos que $\alpha \notin \overline{ts}$. En particular si tomamos cualesquiera dos puntos $x, y \in X \subset C(X)$, sabemos que $\alpha \notin \overline{xy}$, lo cual implica que $\alpha \notin Q$, hecho que contradice la suposición de que si lo está.

Entonces $Q \subseteq C(X)$

Por lo tanto $C(X) = Q = \cup \{C(\{\alpha, \beta, \gamma\}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in X\}$. □

Note que en la Figura 2.4 cada tres puntos están en posición convexa pero los cuatro puntos no lo están, sin embargo, como lo muestra el siguiente ejemplo, la situación es distinta cuando cada cuatro puntos se encuentran en posición convexa.

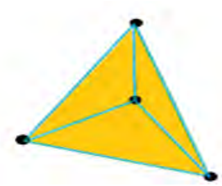


Figura 2.4

Ejemplo 2. .

Objetos: Puntos en $\mathbb{R}^2$.
 # clave: $\omega = 4$.
Propiedad: Estar en posición convexa.

Afirmación 2. *Si $\mathcal{F}$ es una familia finita de puntos en el plano tales que cualesquiera 4 de ellos están colocados en posición convexa, entonces todos están colocados en posición convexa.*

Demostración. Sea $p \in \mathcal{F}$ y sean $a, b, c \in \mathcal{F} \setminus \{p\}$ tres puntos cualesquiera. Por hipótesis a, b, c, p están en posición convexa, es decir,

$p \notin C(\{a, b, c\})$ para cualesquiera tres puntos en $\mathcal{F} \diagdown \{p\}$. Entonces $p \notin \cup \{C(\{\alpha, \beta, \gamma\}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F} \diagdown \{p\}\}$.

Ahora, por el Teorema anterior tenemos que

$$\cup \{C(\{\alpha, \beta, \gamma\}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F} \diagdown \{p\}\} = C(\mathcal{F} \diagdown \{p\})$$

con esto sabemos que $p \notin C(\mathcal{F} \diagdown \{p\})$ para todo $p \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto todos los puntos de $\mathcal{F}$ están en posición convexa. $\square$

En el siguiente ejemplo, una caja se puede entender como $I \times I$ para algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$; de esa forma la prueba de la siguiente afirmación es análoga a la que se hizo para el teorema de Helly en el caso $d = 1$.

DEFINICIÓN 4. *Una* ***caja*** *en $\mathbb{R}^2$ es un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^2$ y cuyas aristas son paralelas a los ejes cartesianos.*

EJEMPLO 3. *.*

Objetos: Cajas en $\mathbb{R}^2$.
 # clave: $\omega = 2$.
Propiedad: Tener un punto en común.

AFIRMACIÓN 3. *Sea W una familia finita de cajas en $\mathbb{R}^2$ tal que se intersectan dos a dos, entonces todas se intersectan. (Figura 2.5)*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los ejes canónicos X, Y de $\mathbb{R}^2$ y hagamos dos proyecciones de la familia de cajas W; una proyección en el eje X y la otra proyección en el eje Y. En ambos casos tendremos familias de intervalos en $\mathbb{R}^1$ que se intersectan dos a dos, pues si en alguna de las dos proyecciones tuvieramos dos intervalos que no se intersectan, tendríamos que las cajas correspondientes a dichos intervalos, tampoco se intersectan, hecho que contradice la hipótesis. Entonces ambas proyecciones arrojan familias de intervalos en $\mathbb{R}^1$ con la propiedad de que cualesquiera dos intervalos de la misma familia se intersectan. Así, por el Teorema 3, todos los intervalos de la proyección en el eje X se intersectan en un punto, llamémosle a. Análogamente, todos los intervalos de la proyección en el eje Y se intersectan en un punto que llamaremos b.

Por lo tanto, todas la cajas de la familia W se intersectan en el punto (a, b). $\square$

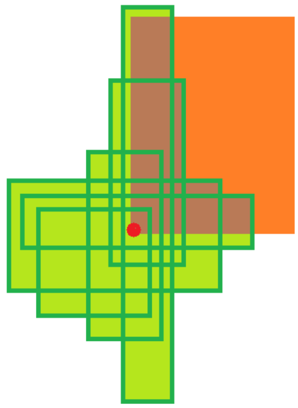


Figura 2.5

El último ejemplo lo enunciaremos como nuestro primer lema, ya que será citado más adelante.

LEMA 1. [*Folklore*] *Si* $\mathcal{F}$ *es una familia con más de tres intervalos en* $\mathbb{R}^d$ *y tiene la propiedad de que cualesquiera tres intervalos de* $\mathcal{F}$ *están en una misma linea recta de* $\mathbb{R}^d$, *entonces todos los intervalos de* $\mathcal{F}$ *están en una misma linea recta de* $\mathbb{R}^d$.

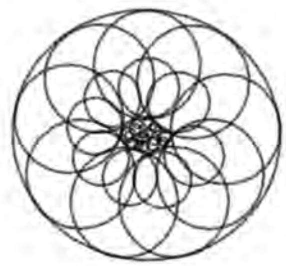
DEMOSTRACIÓN. Supongamos que hay *dos* intervalos de $\mathcal{F}$, I', I'' que no están en la misma linea recta de $\mathbb{R}^d$, entonces si tomamos un intervalo $I \in \mathcal{F} \setminus \{I', I''\}$ (que de hecho podemos tomar porque $|\mathcal{F}| \geq 3$), tenemos tres casos:

(1).- I está contenido en la recta que contiene a I'.
(2).- I está contenido en la recta que contiene a I''.
(3).- I no está contenido en ninguna de las dos rectas anteriores.

Así, en los tres casos tenemos 3 intervalos $\{I, I', I''\} \subseteq \mathcal{F}$ que no están en una misma linea recta de $\mathbb{R}^d$ (contradiciendo la hipótesis).

Por lo tanto *no* hay 2 intervalos de $\mathcal{F}$ que no estén en la misma linea recta de $\mathbb{R}^d$, lo que implica que todos los intervalos de $\mathcal{F}$ están en una misma linea recta de $\mathbb{R}^d$. $\square$

3. Algunos Teoremas (p, q)



En esta sección daremos algunas definiciones y resultados que son válidos tanto para familias de intervalos $\mathcal{F}$ como para familias de rectas $\mathcal{L}$, ambas inmersas en $\mathbb{R}^d$.

DEFINICIÓN 5. *Una familia* C *de convexos en* $\mathbb{R}^d$ ***satisface la propiedad*** (p, q), *con* $p, q \in \mathbb{N}$ *tales que* $p \geq q \geq 2$, *si cada que se toman* p *elementos de* C, *hay* q *de ellos que tienen un punto en común.*

Dadas familias C con alguna de estas propiedades (p, q), estamos interesados en encontrar $\pi(\mathsf{C})$, que es el mínimo número de puntos que intersectan a todos los elementos de C.

DEFINICIÓN 6. *Un* ***intervalo en*** $\mathbb{R}^d$ *es un subconjunto cerrado, acotado y conexo de una línea recta en* $\mathbb{R}^d$.

DEFINICIÓN 7. ***El grado en*** C ***de un punto*** α ***en*** $\mathbb{R}^d$, $\delta_{\mathsf{C}}(\alpha)$, *o simplemente* $\delta(\alpha)$ *cuando no haya ambigüedad, es el número de elementos de* C *que se intersectan en* α.

DEFINICIÓN 8. *Un punto* $\alpha \epsilon \mathbb{R}^d$ *es* ***un punto*** C***-*** ***(***$n -$ *ésimo), o simplemente (*$n -$ *ésimo) (cuando no haya ambigüedad) si y solo si* $\delta_{\mathsf{C}}(\alpha) = n$.

A partir de este punto, una familia $\tilde{N}$ representará:
1) Ó una familia $\mathcal{F}$ de intervalos.
2) Ó una familia $\mathcal{L}$ de rectas.
La dimensión en la que trabajemos será especificada en cada caso, y se hace la aclaración de que una familia $\tilde{N}$ no puede contener rectas e intervalos al mismo tiempo, es decir, a $\tilde{N}$ se le puede considerar como una familia que contiene exclusivamente intervalos, o como una familia que contiene exclusivamente rectas, pero no ambas. Por último, es claro que cualquier proposición que sea válida para una familia A de convexos, será válida para una familia $\tilde{N}$ (puesto que está compuesta

de convexos) siempre y cuando se respete la dimensión en la que se esté trabajando.

También a partir de este punto (a menos que se especifique lo contrario) $\mathcal{F}$ será una familia de intervalos y $\mathcal{L}$ será una familia de rectas; igualmente, la dimensión será especificada en cada caso.

En esta sección enunciamos algunos lemas que nos serán de utilidad más adelante para presentar algunos resultados de problemas (p,q).

LEMA 2. [*Folklore*] *Sean* $m, n \in \mathbb{N}$ *tales que* $m \leq n$.
Si una familia C *de convexos en* $\mathbb{R}^d$ *tiene la propiedad* (p, n), *entonces* C *tiene la propiedad* (p, m).

DEMOSTRACIÓN. Si $m = n$ no hay nada que probar.
Si $m < n$ por hipótesis, al tomar p elementos de C sabemos que n de ellos se intersectan, en particular m de ellos se intersectan. □

El siguiente Lema es válido para familias de rectas y para familias de intervalos.

LEMA 3. [*Folklore*] *Sea* $k \in \mathbb{N}$ *con* $k \geq 2$. *Si* $\tilde{N}$ *(familia de intervalos o familia de rectas) tiene por lo menos* k *elementos en* $\mathbb{R}^d$ *y tiene la propiedad* (k, k), *entonces* $\tilde{N}$ *tiene la propiedad* $(k-1, k-1)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\tilde{N}$ no tiene la propiedad $(k-1, k-1)$ y sea $A \subseteq \tilde{N}$ tal que $|A| = k-1$. Sabemos, por esta suposición, que $\pi(A) \geq 2$. Así, al tomar cualquier elemento $I \in (\tilde{N} \setminus A)$ se tiene que $\pi(A \cup \{I\}) \geq 2$; lo cual es una contradicción, pues por la hipótesis de la propiedad (k, k), se debe tener que $\pi(A \cup \{I\}) = 1$ ya que $|A \cup \{I\}| = k$.
Por lo tanto, para todo $A \subseteq \tilde{N}$ tal que $|A| = k-1$, se tiene que $\pi(A) = 1$, es decir, $\tilde{N}$ tiene la propiedad $(k-1, k-1)$. □

Es suficiente que el siguiente resultado lo enunciemos sólo para rectas.

LEMA 4. [*Folklore*] *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *tiene por lo menos* k *rectas y tiene la propiedad* $(k, k-1)$, *entonces* $\mathcal{L}$ *tiene la propiedad* $(k-1, k-2)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \{l_1, l_2, ..., l_{k-1}\} \subset \mathcal{L}$.

Afirmación.- Existe un punto p_0 tal que $\delta_A(p_0) \geq k-2$.
Supongamos lo contrario, es decir, que para todo punto $p \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\delta_A(p) < k-2$. Así, al tomar cualquier recta $l \in (\mathcal{L} \setminus$

A) tendríamos que para todo $p \in \mathbb{R}^2$ sucede que $\delta_{A\cup\{l\}}(p) \leq k-2$, contradiciendo la hipótesis de la propiedad $(k, k-1)$, pues $|A \cup \{l\}|$ $= k$. Por esto, debe haber un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\delta_{A\cup\{l\}}(p_0) \geq k-1$. Es decir, $\delta_A(p_0) \geq k-2$.

Así, para cualquier conjunto $A = \{l_1, l_2, ..., l_{k-1}\} \subset \mathcal{L}$ existe un punto p' tal que $\delta_A(p') \geq k-2$. (es decir, $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(k-1, k-2)$). $\square$

Teorema 5. [*Folklore*] *Sea* $\tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ *con tres o más elementos y con la propiedad* $(3,3)$, *entonces* $\pi(\tilde{N}) = 1$.

Demostración. Tomemos $I_1, I_2, I_3 \in \tilde{N}$; Sabemos que se intersectan.

Caso (1).-

Los tres elementos se intersectan en un solo punto p.

Sea $I \in (\tilde{N} \setminus \{I_1, I_2, I_3\})$.

Si $p \notin I$, entonces la familia $A = \{I_1, I_2, I\ \}$ no tiene puntos *triples*, es decir $d_A(p) < 3$, contradiciendo la propiedad $(3,3)$. Por lo tanto $p \in I$ para todo $I \in (\tilde{N} \setminus \{I_1, I_2, I_3\})$, entonces $\pi(\tilde{N}) = 1$.

Caso (2).-

La intersección de los tres elementos no es un único punto p, en cuyo caso, los tres elementos son tres intervalos que están en la misma línea recta de $\mathbb{R}^d$ y su intersección es todo un intervalo cerrado en dicha línea.

Por el caso (1) podemos asumir que para cualesquiera tres elementos $\{I_1, I_2, I_3\}$ de $\tilde{N}$ se tiene que su intersección es a su vez un intervalo, lo cual quiere decir que cualesquiera tres elementos de $\tilde{N}$ son intervalos que están en una misma linea recta de $\mathbb{R}^d$; entonces por el Lema 1, todos los elementos de $\tilde{N}$ son intervalos contenidos en la misma línea recta de $\mathbb{R}^d$.

Así, nos encontramos en el caso de una familia de intervalos $\tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^1$ con la propiedad $(3,3)$ y por el Lema 3, sabemos que $\tilde{N}$ tiene la propiedad $(2,2)$; así por el Teorema 3 (de Helly en el caso $d = 1$), tenemos que $\pi(\tilde{N}) = 1$. $\square$

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia de los últimos teoremas:

Corolario 1. [*Folklore*] *Si* $\tilde{N}$ *tiene* k *ó más elementos en* $\mathbb{R}^d$ *y tiene la propiedad* (k,k), *entonces* $\pi(\tilde{N}) = 1$.

Demostración. Es claro por el Lema 3 que si $\tilde{N}$ tiene la propiedad (k, k) se tiene que $\tilde{N}$ tiene la propiedad $(3, 3)$, y así, por el Teorema 5, sabemos que $\pi(\tilde{N}) = 1$. $\square$

Cuando se trabaja con intervalos en el plano, se deben considerar los casos en los que dos o más de ellos se intersectan estando contenidos en una misma recta, es decir, su intersección es a su vez un intervalo, e incluso los casos en los que un intervalo contiene a otro en su totalidad. Esto genera la posibilidad de que haya infinidades no numerables de puntos $\mathcal{F} - dobles$, $\mathcal{F} - triples$, ó $\mathcal{F} - (n - ésimos)$, y de que haya sucesiones anidadas de intervalos. De manera que el comportamiento de las familas de intervalos es muy diferente y en muchos casos más complejo que el de las familias de rectas: dos rectas que se intersectan en más de un punto, son la misma recta.

Nuestro trabajo se enfoca en entender las propiedades geométricas de las familas $\mathcal{L}$ de rectas en $\mathbb{R}^d$, que satisfacen que cualesquiera dos de ellas o son paralelas, o se intersectan en un solo punto.

De aquí en adelante, trabajarémos principalmente con familias $\mathcal{L}$ de rectas cualesquiera en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6. *([**10**]) Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene al menos p rectas y tiene la propiedad $(p, 3)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$.*

Demostración. Tomemos una subfamilia $A \subseteq \mathcal{L}$ sin puntos $A-triples$ y con la propiedad de que para todo $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ se tiene que existe al menos un punto p que es $(A \cup \{l\}) - triple$. Es decir, A es la subfamilia de $\mathcal{L}$ sin puntos triples más grande posible. Claramente una subfamila A con estas propiedades existe. Sabemos entonces que A tiene a lo más $p-1$ rectas, pues si tuviera p rectas o más, por hipótesis, tendría por lo menos un punto $A-triple$, pero estamos suponiendo que no hay puntos $A-triples$. Entonces A tiene a lo más $\binom{p-1}{2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ puntos dobles, y como tiene la propiedad de que al agregar cualquier recta, se forma un punto triple, se tiene que cualquier recta de la familia $(\mathcal{L} \setminus A)$ que se agregue a A debe contener por lo menos uno de estos $\binom{p-1}{2}$ puntos $A - dobles$.

Por lo tanto, todos las rectas de $\mathcal{L}$ se perforan con a lo más $\binom{p-1}{2}$ puntos, lo que implica $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2}$. $\square$

Lema 5. *[Folklore] Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene cuatro o más rectas y la propiedad $(4, 3)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$.*

Demostración. Sabemos que cada vez que tomamos cuatro rectas, al menos tres de ellas se intersectan, pero si todas ellas se intersectan cada vez que tomamos cuatro rectas, entonces $\mathcal{L}$ satisface la propiedad $(4,4)$ y por ello $\mathcal{L}$ satisface la propiedad $(3,3)$, así $\pi(\mathcal{L}) = 1$.

Por esto, se puede suponer que existen cuatro rectas $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathcal{L}$, tales que tres de ellas, digamos l_1, l_2, l_3, forman un punto triple p de forma que $p \notin l_4$.

En este caso sabemos que $\pi(\{l_1, l_2, l_3, l_4\}) = 2$, pues podemos tomar como transversal al conjunto $T = \{p, t\}$ con $t \in l_4$ un punto cualquiera.

Ahora, veamos que cualquier otra recta $l \in (\mathcal{L} \setminus \{l_1, l_2, l_3, l_4\})$ debe pasar por el punto p.

Supongamos que $p \notin l$.

Si l y l_4 no son paralelas, se intersectan en un punto digamos α y sabemos que a lo más una recta del conjunto $\{l_1, l_2, l_3\}$ podría pasar por α; sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha \in l_3$. Por esto, se pueden encontrar dos rectas del conjunto $\{l_1, l_2, l_3\}$ que no contienen al punto α, a saber, l_1 y l_2.

Así, como $p \notin l$ y $p \notin l_4$, se tiene que l_1, l_2, l_4 y l no forman ningún punto triple (contradiciendo la propiedad $(4,3)$).

Si l y l_4 son paralelas, y como $p \notin l$ y $p \notin l_4$, también en este caso se tiene que l_1, l_2, l_4 y l no forman ningún punto triple (contradiciendo la propiedad $(4,3)$).

Por lo tanto cualquier otra recta $l \in (\mathcal{L} \setminus \{l_1, l_2, l_3, l_4\})$ debe pasar por el punto p.

Esto quiere decir que $\pi(\mathcal{L}) = \pi(\{l_1, l_2, l_3, l_4\}) = 2$. □

Teorema 7. [*Folklore*] *Sea* $k \geq 4$. *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *con* k *o más rectas y tiene la propiedad* $(k, k-1)$*, entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$.

Demostración. Como $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(k, k-1)$, por el Lema 4 sabemos que tiene la propiedad $(k-1, k-2)$.

Al volver a aplicar el Lema 4 sabemos que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(k-2, k-3)$.

Por recursión sabemos entonces que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(4,3)$, y por el Lema 5, se tiene que $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$. □

Notemos que en la demostración del Teorema 7 , no se utiliza el caso $\mathcal{L}$ con la propiedad $(3,2)$, y en vez de ello la base es $\mathcal{L}$ la propiedad $(4,3)$. Antes de seguir y dejar atrás los casos en los que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p, p-1)$, añadiremos el caso $(3,2)$ para completar dicha familia de propiedades, pues es este el último caso del cual tiene sentido hablar

(el caso $(2,1)$ no nos dice nada bajo el entendido de que un elemento no puede intersectarse a sí mismo).

Observemos que el Lema 5 nos dice que si $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(4,3)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$, y también sabemos, por el Lema 3, que si $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(4,3)$, entonces cumple la propiedad $(3,2)$, sin embargo, el siguiente ejemplo prueba que $(3,2)$ **no** cumple $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$.

Observación.- *Que* $\mathcal{L}$ *tenga la propiedad* $(3,2)$, *no implica que* $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$.

Demostración. Consideremos a la familia $\mathcal{L}$ de seis rectas en el plano, como se muestra en la Figura 3.1 en donde l_1 y l_4 son paralelas, l_2 y l_5 son paralelas y, l_3 y l_6 son paralelas.

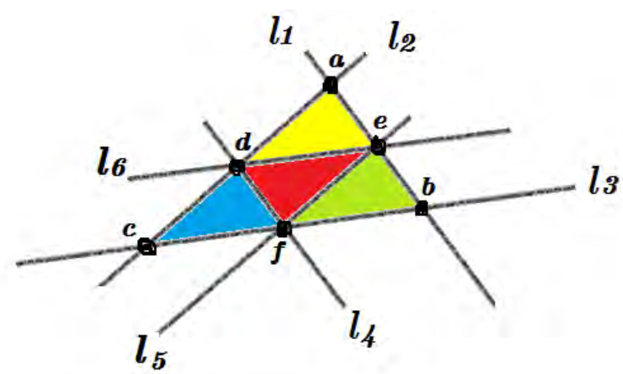


Figura 3.1

Primero veamos que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(3,2)$.

Sean $A = \{l_1, l_2, l_3\}$ y $B = \{l_4, l_5, l_6\}$. Así, al tomar cualesquiera tres rectas de $\mathcal{L}$ sabemos que debe haber dos de ellas que estén en A, o dos de ellas que estén en B; en ambos casos estas dos rectas se intersectan, pues cualesquiera dos rectas de A se intersectan y cualesquiera dos rectas de B se intersectan.

Por lo tanto $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(3,2)$.

Ahora vamos a perforar a todas las rectas de $\mathcal{L}$.

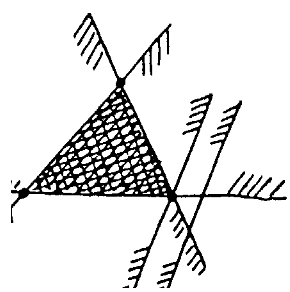
Si para ello consideramos al punto a, entonces nos quedan las tres rectas que conforman el triángulo rojo, y como estas tres rectas no son concurrentes, se necesitan dos puntos además de a para perforar a todas las rectas de $\mathcal{L}$, es decir, $\pi(\mathcal{L}) \geq 3$. Como la figura es simétrica, sucede lo mismo para los puntos b y c.

Si consideramos al punto d, entonces nos quedan las tres rectas no concurrentes que conforman al triángulo verde y por ello se necesitan dos puntos además de d para perforar a todas las rectas de $\mathcal{L}$; otra vez $\pi(\mathcal{L}) \geq 3$. Sucede lo mismo para los puntos e y f.

Por lo tanto, $\pi(\mathcal{L}) > 2$ y como el conjunto de puntos $\{d, e, f\}$ es una transvesal para $\mathcal{L}$, entonces $\pi(\mathcal{L}) = 3$. □

En la siguiente sección, nos enfocaremos en mejorar el Teorema 6 para familias de rectas que también tengan la propiedad $(p, 3)$.

4. Familias de rectas con la propiedad (p,3)



El Teorema 6 nos da una cota para el número de perforación de cualquier familia de rectas en el plano que tenga la propiedad $(p, 3)$, para cualquier $p \geq 3$. En esta sección se expone una forma de mejorar dicha cota, que consiste en explorar que le sucede al número de perforación de una familia de rectas $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$, cuando además de tener la propiedad $(p, 3)$, la cardinalidad de $\mathcal{L}$ es suficientemente grande, es decir, es mayor a un número entero dado k. O dicho de otro modo, queremos encontrar un entero k, tal que si $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p, 3)$ y $|\mathcal{L}| > k$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq n < \binom{p-1}{2}$; con $n \in \mathbb{N}$. En particular, demostramos el siguiente teorema:

Teorema 8. *Sea $p \geq 6$. Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad $(p, 3)$ y*

$$|\mathcal{L}| \geq \binom{p-1}{2} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{p-3} i) + 1$$

entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-3}{2} + 1$.

NOTA 1. *Es claro que si $p \geq 4$, entonces*

$$\binom{p-3}{2} + 1 = \frac{(p-3)(p-2)}{2} + 1 \ < \ \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \binom{p-1}{2}.$$

Demostraremos este resultado a lo largo de esta sección; para ello enuciamos algunos resultados y definiciones.

DEFINICIÓN 9. *sea $p \ \epsilon \ \mathbb{R}^2$, denotamos al* ***conjunto de líneas concurrentes en*** *p:*

$$\langle p \rangle_{\mathcal{L}} := \{I \ \epsilon \ \mathcal{L} \mid p \ \epsilon \ I\}$$

y a **su complemento:**

$$\langle p \rangle_{\mathcal{L}}^c = (\mathcal{L} \setminus \ \langle p \rangle_{\mathcal{L}}) := \{I \ \epsilon \ \mathcal{L} \ \mid \ p \notin I\}$$

LEMA 6. *Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad $(5,3)$ y existe un punto $p_0 \ \epsilon \ \mathbb{R}^2$ tal que $|\langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}| \geq 5$, entonces $\langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}^c$ tiene la propiedad $(3,3)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|\langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}^c| \leq 2$ el lema se sigue por vacuidad. De manera que podemos asumir que $|\langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}^c| \geq 3$.

Ahora, si suponemos que el lema es falso, podemos encontrar un conjunto $A \subseteq \langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}^c$ tal que $|A| = 3$ que no tenga puntos $A - triples$. Así, a lo más podemos encontrar tres puntos $A - dobles$. Como $|\langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}| \geq 5$, se tiene que existen por lo menos dos rectas $J_1, J_2 \ \epsilon \ \langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}$ tales que no contienen a ninguno de los tres puntos $A - dobles$. (Figura 4.1)

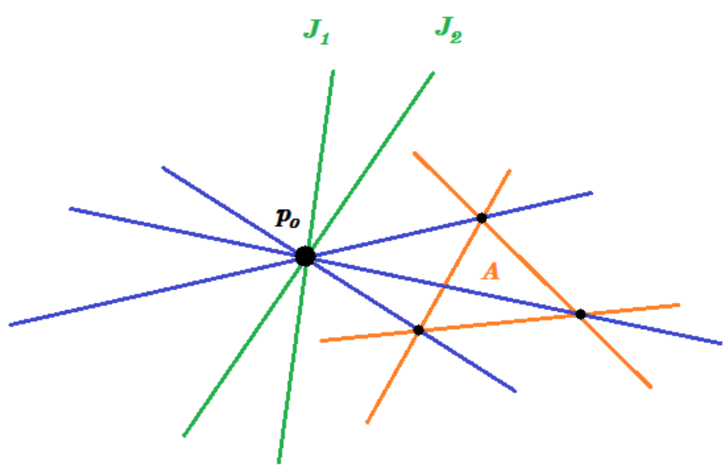


Figura 4.1

Claramente $B = A \cup \{J_1, J_2\}$, por construcción satisface que no tiene puntos $B-triples$. Entonces existe $B \subseteq \mathcal{L}$ con $B = |5|$ sin puntos $B - triples$, lo cual implica que B no tiene la propiedad $(5,3)$, y como $B \subseteq \mathcal{L}$, se tiene que $\mathcal{L}$ no tiene la propiedad $(5,3)$, contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto $\langle p_0 \rangle^c_{\mathcal{L}}$ tiene la propiedad $(3,3)$. □

A continuación se introduce terminología propia que facilitará la exposición.

Definición 10. *$\mathcal{L}$ es **k-degenerada** si todos excepto k de sus elementos pasan por un punto. En cualquier otro caso, decimos que $\mathcal{L}$ es **no-k-degenerada** (ó **k-general**).*

En la figura 4.2 hay exactamente 7 rectas de $\mathcal{L}$ que no pasan por el punto p_o, en este caso $\mathcal{L}$ es *7-degenerada.*

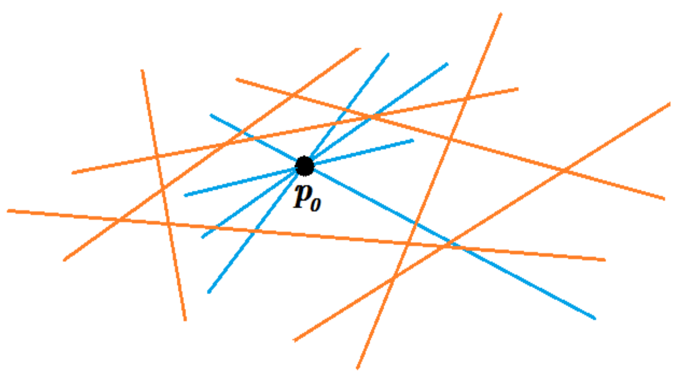


Figura 4.2

Observemos que la definición anterior es equivalente a la siguiente:

Definición 11. *$\mathcal{L}$ es **k-degenerada** si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $|\langle p_0 \rangle^c_{\mathcal{L}}| = k$. Y por el contrario $\mathcal{L}$ es **no-k-degenerada (k-general)** si para todo punto $p \in \mathbb{R}^2$ se tiene $|\langle p_0 \rangle^c_{\mathcal{L}}| \neq k$.*

Lema 7. *Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ es* no-2-degenerada *con la propiedad* $(5,3)$ *y existe un punto $p_0 \; \epsilon \; \mathbb{R}^2$ tal que $|\langle p_0 \rangle_{\mathcal{L}}| \geq 5$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$.*

Demostración. Como $\mathcal{L}$ es *no-2-degenerada* sabemos que es posible que todas las rectas de $\mathcal{L}$ pasen por el punto p_0. También es posible que todas las rectas de $\mathcal{L}$, salvo una de ellas, pasen por el punto p_0. En estos casos $\pi(\mathcal{L}) = 1$ y $\pi(\mathcal{L}) = 2$ respectivamente.

Por ello podemos suponer que $\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c$ tiene más de tres rectas. De esta forma tenemos las mismas condiciones del Lema 6 y por ello $\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c$ tiene la propiedad $(3,3)$. Entonces por el Teorema 5, tenemos que $\pi(\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c) \leq 1$.

Entonces, como $\mathcal{L} = \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}} \cup \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c$, tenemos que $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$. □

TEOREMA 9. *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *es* no-2-degenerada *con la propiedad* $(5,3)$ *y* $|\mathcal{L}| \geq 25$*, entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por el Teorema 6 que $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$, es decir, que todas las rectas de $\mathcal{L}$ se pueden perforar con a lo más 6 puntos en el plano. Si por cada uno de estos puntos pasaran a lo más 4 rectas de $\mathcal{L}$, entonces tendríamos a lo más $6 \cdot 4 = 24$ rectas en $\mathcal{L}$; pero como $|\mathcal{L}| \geq 25$, debe existir $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\delta_{\mathcal{L}}(p_0) \geq 5$. Así, se tienen todas las condiciones del Lema 7.

Por lo tanto $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$. □

Estos resultados que se hicieron para el caso particular de familias de rectas con la propiedad $(5,3)$, los vamos ahora a generalizar para familias con la propiedad $(p,3)$, con $p \geq 6$.

TEOREMA 10. *Sea* $p \geq 6$. *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *tiene la propiedad* $(p,3)$ *y existe* $p_0 \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\delta_{\mathcal{L}}(p_0) \geq 2 + \sum_{i=1}^{p-3} i$*, entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-3}{2} + 1$.

DEMOSTRACIÓN. En el caso en el que $|\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c| \leq p-3$, se tiene que $\pi(\mathcal{L}) \leq p-2$, pues $\mathcal{L} = \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c \cup \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}$. Y cuando $p \geq 6$, se tiene que $p-2 \leq \binom{p-3}{2} + 1$. Es decir, en el caso en el que $|\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c| \leq p-3$, se cumple el teorema y no queda nada que demostrar.

Por ello podemos suponer que $|\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c| \geq p-2$.

Afirmación.- Con las hipótesis del Teorema, se tiene que $\langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c$ cumple la propiedad $(p-2,3)$.

Supongamos que no, entonces podemos encontrar una subfamilia $A \subseteq \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}^c$ tal que $|A| = p-2$ que no tenga puntos $A-triples$. Entonces a lo más podemos encontrar $\binom{p-2}{2}$ puntos $A-dobles$.

Ahora, por hipótesis $\delta_{\mathcal{L}}(p_0) \geq 2 + \sum_{i=1}^{p-3} i \ = 2 + \left(\frac{(p-3)(p-2)}{2}\right)$

Entonces el número $(\ \delta_{\mathcal{L}}(p_0) \setminus |\{los\ puntos\ A-dobles\}|)\ \geq 2$, esto quiere decir que existen $J_1, J_2 \in \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}}$ tal que la familia $B = A \cup \{J_1, J_2\}$ no tiene puntos triples. Pero $B \subseteq \mathcal{L}$ y $|B| = p$, lo que implica que B

no tiene la propiedad $(p,3)$, entonces $\mathcal{L}$ no tiene la propiedad $(p,3)$ (contradiciendo la hipótesis)

Por lo tanto $\langle p_0\rangle^c_{\mathcal{L}}$ tiene la propiedad $(p-2,3)$. Entonces el Teorema 6 nos dice que $\pi(\langle p_0\rangle^c_{\mathcal{L}}) \leq \binom{p-3}{2}$ y como $\mathcal{L} = \langle p_0\rangle_{\mathcal{L}} \cup \langle p_0\rangle^c_{\mathcal{L}}$, se tiene que $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-3}{2} + 1$. □

Ahora, estamos ya listos para probar el Teorema 8:

Demostración. (*Del Teorema 8*) El Teorema 6 nos dice que $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2}$, es decir, todas las rectas de $\mathcal{L}$ se pueden perforar con a lo más $\binom{p-1}{2}$ puntos en el plano, y si por cada uno de estos puntos pasaran a lo más $1 + \sum_{i=1}^{p-3} i$ rectas de $\mathcal{L}$, naturalmente tendríamos a lo más $\binom{p-1}{2} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{p-3} i)$ rectas de $\mathcal{L}$ que pasan por dichos puntos de perforación; pero por hipótesis $|\mathcal{L}| \geq \binom{p-1}{2} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{p-3} i) + 1$, es decir, por uno de estos puntos de perforación pasan más de $(1 + \sum_{i=1}^{p-3} i)$ rectas de $\mathcal{L}$

Por lo tanto existe $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\delta_{\mathcal{L}}(p_0) \geq 2 + \sum_{i=1}^{p-3} i$. Con esto, nos encontramos con las condiciones del Teorema 10.

Entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-3}{2} + 1$. □

Analicemos algunos ejemplos de este teorema:

Cuando $p = 5$, por el Teorema 8, si $|\mathcal{L}| \geq 25$, entonces sabemos que el número de perforación queda acotado por: $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$. Para este caso la cota es *justa* siempre y cuando tengamos por lo menos 25 rectas. Se dice que una cota para el número de perforación es *justa* cuando es la menor posible, es decir, cuando es exactamente igual al número de perforación. En este caso por los ejemplos de la Figura 5.3 (más adelante) es claro que hay familias $\mathcal{L}$ con la propiedad $(5,3)$ tales que $\pi(\mathcal{L}) \geq 2$ y $\pi(\mathcal{L}) \geq 3$. Por ello es posible que para cualquier familia de rectas en el plano con la propiedad $(5,3)$ se tenga que su número de perforación sea 3. Para saber esto sólo queda estudiar que pasa con las familias que cumplen dicha propiedad y que tienen entre 6 y 24 rectas, pues para todos los demás casos ya sabemos que $\pi(\mathcal{L}) \leq 3$.

Cuando $p = 6$, por el Teorema 8, si $|\mathcal{L}| \geq \binom{5}{2} \cdot (1 + \sum_{i=1}^{3} i) + 1 = 10 \cdot (7) + 1 = 71$, entonces sabemos que $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{3}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$. Para este caso se hizo el Lema 8 (que se expone después del corolario siguiente), en el que se mejoró la cota de 4 a 3. Sin embargo, las hipótesis del Lema 8 son mucho más duras o específicas y por ello es difícil pensar que cualquier familia de rectas en el plano con la propiedad $(6,3)$ tenga número de perforación igual a 3.

Notemos que la hipótesis de la cardinalidad de $\mathcal{L}$ aumento en gran medida (de 25 a 71) y por ello también parece difícil que la cota para el número de perforación de estas familias de rectas sea 4, pues es muy posible que exista una familia con la propiedad $(6,3)$ y con menos de 71 rectas, que no pueda perforarse con 4 puntos.

Cuando $p=7$, si tenemos que $|\mathcal{L}| \geq 166$, entonces el Teorema 8 nos asegura que $\pi(\mathcal{L}) \leq 7$. Cuando $p=8$, si $|\mathcal{L}| \geq 337$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 11$. Cuando $p=9$, si $|\mathcal{L}| \geq 448$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 16$.

Es claro que entre más grande sea el entero p, más rectas se necesitan tener en $\mathcal{L}$ para que la cota del número de perforación funcione, y esto evidentemente no nos permite saber con exactitud quién es el número de perforación de una familia de rectas en el plano con alguna propiedad $(p,3)$; nuevamente se pone de manifiesto la dificultad de encontrar cotas justas. Sin embargo, algo bonito de este resultado es que se cumple para familias infinitas de rectas en el plano.

Sería interesante buscar nuevos métodos para mejorar la cota del número de perforación de familias de rectas con propiedades $(p,3)$, a la vez que se reducen, o se descartan, las demás condiciones.

De manera directa, aparece el siguiente resultado, que extiende a nuestro conjunto de familias de rectas.

COROLARIO 2. *Sea* $n \geq 2$. *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *tiene la propiedad* $(p,p-n)$ *con* $p \geq n+4$ *y tal que* $|\mathcal{L}| \geq \binom{p-1}{2} \cdot (1+\sum_{i=1}^{p-3} i)+1$, *entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-3}{2}+1$.

DEMOSTRACIÓN. Como por hipótesis $p \geq n+4$, se tiene que $p-n \geq 4 > 3$. Por otro lado como $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p,p-n)$, esto implica que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p,3)$; ya que por el Lema 2 sabemos que si $k \leq q$, entonces, que $\mathcal{L}$ tenga la propiedad (p,q), implica que $\mathcal{L}$ tiene la propiedad (p,k). Así $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p,3)$ y por el Teorema 8, $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-3}{2}+1$. $\square$

Para el caso $(6,3)$ bajo hipótesis semejantes a las que se dan en esta sección, logramos mejorar la cota aún más.

LEMA 8. *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *es no* $-$ 3 $-$ *degenerada,* $|\mathcal{L}| \geq 6$*, tiene la propiedad* $(6,3)$ *y existe* $p_1 \in \mathbb{R}_2$ *tal que* $\delta_{\mathcal{L}}(p_1) \geq 8$*, entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq 3$.

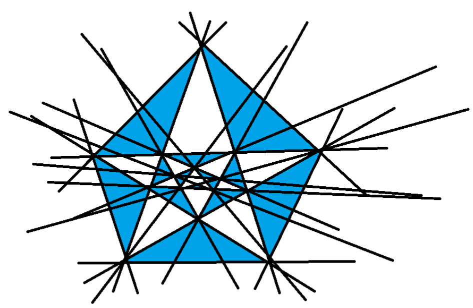
DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{L}$ es *no-3-degenerada*, entonces para todo punto $p \in \mathbb{R}^2$ se tiene $|\langle p \rangle_{\mathcal{L}}^{c}| \neq 3$ y por ello sabemos que sólo puede ocurrir una de las siguientes tres opciones: que todas las rectas de $\mathcal{L}$, salvo una, pasen por el punto p_1, que todas las rectas de $\mathcal{L}$, salvo dos de ellas pasen por el punto p_1, o que $|\langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{c}| \geq 4$. En los primeros dos casos se tiene que $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$ y $\pi(\mathcal{L}) \leq 3$ respectivamente, y por ello no queda nada que probar.

Entonces supondremos que $|\langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{c}| \geq 4$.

Como $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(6,3)$ y $d_{\mathcal{L}}(p_1) \geq 8$, la afirmación que aparece en la demostración del Teorema 10, nos asegura que $\langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{c}$ tiene la propiedad $(4,3)$ y como $|\langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{c}| \geq 4$, tenemos que $\pi(\langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{c}) \leq 2$.

Por tanto, como $\mathcal{L} = \langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}} \cup \langle p_1 \rangle_{\mathcal{L}}^{c}$, se tiene $\pi(\mathcal{L}) \leq 3$. $\square$

5. Familias de rectas en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad (p,4); $(p \leq 7)$



En esta sección trabajaremos con las familias de rectas en $\mathbb{R}^2$ que tienen la propiedad $(p,4)$, para $p \leq 7$.

Comenzaremos con unas observaciones sencillas que son corolarios de varios de nuestros resultados anteriores. Para empezar es importante hacer notar un hecho inmediato:

PROPOSICIÓN 1. *Si* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ *tiene la propiedad* $(p,4)$*, entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2, como $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p,4)$, entonces $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p,3)$, y por el Teorema 6 tenemos que $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2}$. $\square$

¿Cómo se puede mejorar la cota para el número de perforación de familias $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la propiedad $(p, 4)$?

Trataremos algunos ejemplos concretos de estas familias, que nos servirán para hacer una generalización intuitiva de este resultado.

El primer caso de una familia $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ de rectas con la propiedad $(p, 4)$, es el caso $(4, 4)$. Por el Lema 3 sabemos que la familia $\mathcal{L}$ tienen la propiedad $(3, 3)$ y por el Teorema 5, tiene número de perforación 1. Así la siguiente proposición es cierta:

Proposición 2. *Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad $(4, 4)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) = 1$.*

El siguiente es el caso de las familias $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ con la propiedad $(5, 4)$ que por el Teorema 7, sabemos que: "Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene cinco o más rectas y la propiedad $(5, 4)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$".

A continuación, trabajaremos con el caso de las familias que cumplen la propiedad $(6, 4)$ y para esto utilizaremos un razonamiento distinto:

Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ una familia de rectas en el plano con la propiedad $(p, 4)$, tomaremos el subconjunto más grande $A \subset \mathcal{L}$ de forma que no haya puntos $A - cuádruples$. Así, por la propiedad $(p, 4)$ sabemos que $|A| \leq p - 1$. Nos gustaría saber cuál es el máximo número de puntos $A - triples$, ya que dada cualquier recta $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$, cumple que $|A \cup \{l\}| = p$, y la propiedad $(p, 4)$ nos dice que existe por lo menos un punto $(A \cup \{l\}) - cuádruple$.

Es decir, en general queremos saber cuantos puntos triples se pueden formar con k rectas en el plano, de forma que no haya puntos cuádruples. Para esto introducimos la siguiente definición:

Definición 12. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea Ω la familia de todas las rectas de $\mathbb{R}^2$. Llamaremos $\partial(k, 3, s4)$* ***al máximo número de puntos*** *$\mathcal{L} - triples$ que se pueden formar con conjuntos $\mathcal{L} \subset \Omega$ de k rectas cualesquiera, de forma que no haya puntos $\mathcal{L} - cuádruples$. Es decir:*

$$\partial(k, 3, s4) = máx \left\{ |A| \ : A = \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathcal{L}}(x) = 3 \ con \ \mathcal{L} \subset \Omega \ , \ |\mathcal{L}| = k \ y \ tal \ que \\ \{y \in \mathbb{R}^2 \colon d_{\mathcal{L}}(y) \geq 4\} = \emptyset \end{array} \right\} \right\}$$

Por ejemplo, $\partial(1, 3, s4) = \partial(2, 3, s4) = 0$, pues no es posible formar puntos triples ni con una sola recta ni con dos. En cambio $\partial(3, 3, s4) = \partial(4, 3, s4) = 1$ porque el máximo número de puntos triples que se pueden formar con tres y cuatro rectas es 1, (Figura 5.1). También más adelante se prueba que $\partial(5,3,s4) = 2$. (Figura 5.2)

Lema 9. $\partial(4,3,s4) = 1$.

Demostración. Notemos primero que la configuración de la figura 5.1 alcanza la cota.

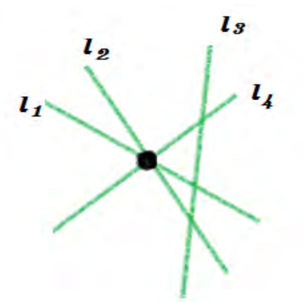


Figura 5.1

Ahora, supongamos que el lemma es falso; es decir, supongamos que con 4 rectas distintas en el plano, que llamaremos l_1, l_2, l_3 y l_4, se pueden formar por lo menos *dos* puntos triples $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, y de forma que no haya puntos cúadruples.

Fijémonos en el punto triple α y sin pérdida de generalidad supondremos que l_1, l_2 y l_4 son las rectas que pasan por α. Como no puede haber puntos cuádruples, sabemos que l_3 no puede pasar α.

Ahora, como l_1, l_2 y l_4 tienen un único punto de intersección (α) el punto triple β debe estar formado por l_3 y otras dos rectas, digamos sin pérdida de generalidad, l_1y l_2; lo que implica que en el punto β (que es distinto del punto α), se intersectan l_1y l_2, pero ya sabemos que también se intersectan en α, lo que quiere decir que $l_1 = l_2$, hecho que contradice que l_1, l_2, l_3 y l_4 sean todas distintas.

Entonces si existe un punto α que es $\{l_1, l_2, l_3, l_4\} - triple$, no puede existir otro punto β que también sea $\{l_1, l_2, l_3, l_4\} - triple$.

Por lo tanto $\partial(4,3,s4) = 1$. □

Lema 10. $\partial(5,3,s4) = 2$.

Demostración. Notemos primero que la configuración de la figura 5.2 alcanza la cota.

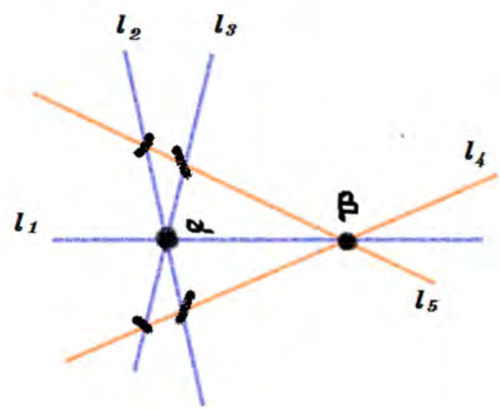


Figura 5.2

Supongamos que el lemma es falso, es decir, supongamos que con 5 rectas distintas en el plano, que llamaremos l_1, l_2, l_3, l_4 y l_5 se pueden formar por lo menos *tres* puntos triples α, β y $\gamma \in \mathbb{R}^2$, de forma que no haya puntos cúadruples.

Fijémonos en el punto triple α y sin pérdida de generalidad supondremos que l_1, l_2 y l_3 son las rectas que pasan por α. Como no puede haber puntos cuádruples, sabemos que dichas tres rectas son las únicas (del conjunto $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$) que contienen al punto α.

Ahora, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el punto $\beta \in l_1$; esto quiere decir que $\beta \notin l_2$ y que $\beta \notin l_3$ porque dos rectas en el plano, o son paralelas o se intersectan en un único punto; en este caso l_1, l_2 y l_3 se intersectan solamente en el punto α. Así de las cinco rectas l_1, l_2, l_3, l_4 y l_5, se debe tener que l_1, l_4 y l_5 pasan por el punto β; pues β es un punto triple.

Así, tenemos la siguiente configuración: La recta l_1 contiene a ambos puntos α y β ; las rectas l_2 y l_3 contienen al punto α, y las rectas l_4 y l_5 contienen al punto β. (Figura 5.2)

Entonces las únicas intersecciones entre las rectas l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, son los puntos α, β y los cuatro puntos dobles marcados en la Figura 5.2. De esta forma, para todo punto $x \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{\alpha, \beta\})$, se tiene que x **no** es punto $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\} - triple$.

Por lo tanto γ no puede ser $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\} - triple$.

De esta forma es claro que $\partial(5, 3, s4) = 2$. $\square$

Usando esto, tenemos:

Teorema 11. *Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ con 6 ó más rectas y tiene la propiedad $(6,4)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq 3$.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ con $|A| = 5$ sin puntos $A-$*cuádruples*. Si tal conjunto no existe, entonces $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(5,4)$, lo que implica que $\pi(\mathcal{L}) \leq 2 < 3$.

Si tal conjunto A existe, sabemos por la propiedad $(6,4)$ que para toda $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ hay por lo menos un punto $(A \cup \{l\}) -$ *cuádruple*, y es por ello que hay por lo menos un punto $A -$ *triple*.

Ahora, por el lema anterior, sabemos que $\partial(5,3,s4) = 2$, lo que nos dice que hay a lo más *dos* puntos $A -$ *triples*.

Si existiera $l_0 \in (\mathcal{L} \setminus A)$ tal que l_0 no pasara por ninguno de los puntos $A -$ *triples*, tendríamos que no hay puntos $(A \cup \{l_0\}) -$ *cuádruples* (contradiciendo la propiedad $(6,4)$).

Entonces para toda $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$, tenemos que l pasa, al menos (pues podría pasar por los *dos*), por alguno de los puntos $A -$ *triples*.

Esto quiere decir que $\pi(\mathcal{L} \setminus A) \leq 2$.

Ahora,

Caso (1).- Existe un **único** punto $A -$ *triple*.

En esta situación, sabemos que hay *tres* rectas de A que convergen en el punto α (Figura 5.3). Como $|A| = 5$, sabemos que hay dos rectas en A, l_1 y l_2, que no pasan por el punto α. Entonces l_1 y l_2 tienen dos opciones, o se intersectan o no, y en estos casos : $\pi(A) \leq 2$ ó $\pi(A) \leq 3$, respectivamente (Figura 5.3)

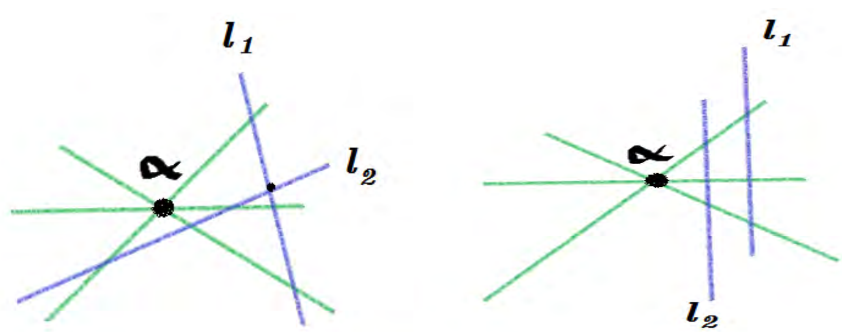


Figura 5.3

Y como se demostró arriba, todas las rectas de $\mathcal{L} \setminus A$ deben pasar por el punto $A -$ *triple*

Por lo tanto $\pi(\mathcal{L}) \leq 2$ ó $\pi(\mathcal{L}) \leq 3$.

Caso (2).- Existen **dos** puntos $A -$ *triples*.

En esta situación se puede afirmar que $\pi(A) = 2$, pues si $\pi(A) \geq 3$, tendríamos que *una* de las *cinco* rectas de A no pasa por ninguno de los *dos* puntos triples, lo que quiere decir que estos *dos* puntos triples se formaron solamente con *cuatro* rectas de A (contradiciendo el hecho de que $\partial(4,3,s4) = 1$)

Con esto es claro que $\pi(A) = 2$ y como todas las rectas de $\mathcal{L} \setminus A$ deben pasar por al menos uno de los puntos $A - triples$, tenemos que $\pi(\mathcal{L}) = \pi(A) = 2 \leq 3$.

Con esto se concluye la prueba. □

LEMA 11. $\partial(6,3,s4) = 4$.

DEMOSTRACIÓN. La configuración de la siguiente figura 5.4 alcanza la cota y por ello $\partial(6,3,s4) \geq 4$.

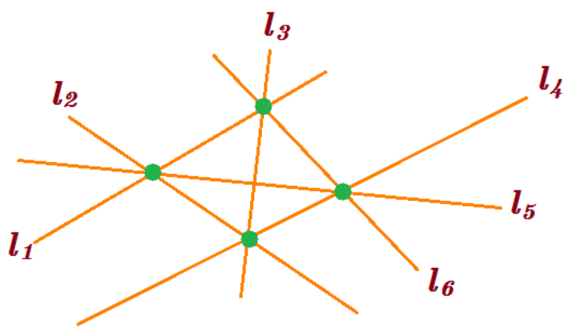


Figura 5.4

Supongamos que el lemma es falso, es decir, supongamos que con 6 rectas en el plano, que llamaremos l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 y l_6 se pueden formar por lo menos *cinco* puntos triples $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta \in \mathbb{R}^2$, de forma que no haya puntos cúadruples.

Fijemos nuestra atención en el punto triple α y sin pérdida de generalidad supongamos que l_1, l_2 y l_3 son las rectas que pasan por α. Como no puede haber puntos cuádruples, sabemos que dichas tres rectas son las únicas (del conjunto $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$) que contienen al punto α.

Afirmación.- $\{\beta, \gamma, \delta, \eta\} \subset \{x \in l_i \mid i \in \{1,2,3\}\}$.

Si suponemos que alguno de los puntos del conjunto $\{\beta, \gamma, \delta, \eta\}$, digamos β, cumple que $\beta \notin \{x \in l_i \mid i \in \{1,2,3\}\}$, tenemos que, como β es un punto $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} - triple$, las rectas l_4, l_5 y l_6 tienen que pasar por β.

Entonces para todo punto $x \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{\alpha, \beta\})$ se tendría que x **no** es un punto $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} - triple$ (Figura 5.5).

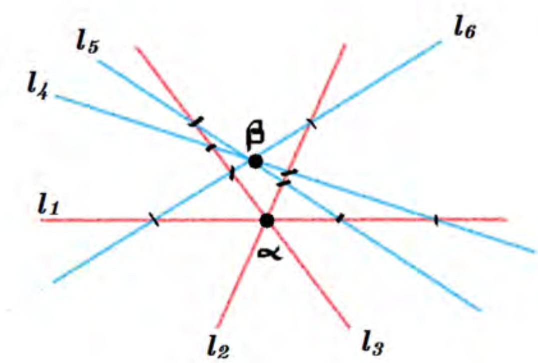


Figura 5.5

Entonces γ, δ, η **no** son puntos $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} - triples$ (contradiciendo la hipótesis de que lo son).

Por lo tanto los puntos $\beta, \gamma, \delta, \eta \in \{x \in l_i \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$. Entonces como hay cuatro puntos contenidos en tres rectas, se tiene que para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$ hay dos puntos del conjunto $\{\beta, \gamma, \delta, \eta\}$ que están el l_j; es decir, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\beta, \gamma \in l_1$, que $\delta \in l_2$ y $\eta \in l_3$.

Fijemos nuestra atención primero en los puntos $\alpha, \beta, \gamma \in l_1$.

Como l_2 y l_3 contienen a α, sabemos que estas dos rectas no pueden contener ni a β, ni a γ; pues los tres puntos están en l_1.

Ahora, como β es $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} - triple$, sabemos que dos rectas del conjunto $\{l_4, l_5, l_6\}$ contienen a β, digamos que l_4 y l_5 pasan por β. Esto nos dice que l_4 y l_5 no contienen a γ; pues β y γ están en l_1.

Por último, como γ es $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} - triple$, hay tres rectas del conjunto $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$ que contienen al punto γ, pero sabemos que $\gamma \notin \{x \in l_k \mid k \in \{2, 3, 4, 5\}\}$, lo que nos dice que solamente las dos rectas, a saber l_1 y l_6, contienen a γ (lo que contradice la hipótesis de que γ es $\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\} - triple$).

Por lo tanto no puede haber tres puntos del conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$ que sean colineales; lo cual implica que alguno de los puntos del conjunto $\{\beta, \gamma, \delta, \eta\}$ no esté en el conjunto $\{x \in l_i \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$, es decir que $\{\beta, \gamma, \delta, \eta\} \nsubseteq \{x \in l_i \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$ (lo que contradice la afirmación que arriba se demostró).

Esto quiere decir que alguno de los puntos del conjunto $\{\beta, \gamma, \delta, \eta\}$ cumple que **no** está en el conjunto $\{x \in l_i \mid i \in \{1,2,3\}\}$ y que **tampoco** está en el conjunto $[\mathbb{R}^2 \setminus \{x \in l_i \mid i \in \{1,2,3\}\}]$;(lo cual es implosible).

Por lo tanto con 6 rectas en el plano es imposible formar *cinco* puntos triples; y por la Figura 5.4, tenemos que $\partial(6,3,s4) = 4$. □

Gracias al lema anterior podemos ahora demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 12. *Si $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene 7 ó más rectas y tiene la propiedad* $(7,4)$*, entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq 4$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ con $|A| = 6$ sin puntos $A-cuádruples$. Si tal conjunto no existe, entonces $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(6,4)$, lo que implica, por el Teorema 11, que $\pi(\mathcal{L}) \leq 3 < 4$.

Si tal conjunto A existe, sabemos por la propiedad $(7,4)$ que para toda $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ hay por lo menos un punto $(A \cup \{l\}) - cuádruple$, y es por ello que hay por lo menos un punto $A - triple$.

Ahora, por el Lema 11, sabemos que $\partial(6,3,s4) = 4$, lo que nos dice que hay a lo más *cuatro* puntos $A - triples$.

Si existiera $l_0 \in (\mathcal{L} \setminus A)$ tal que l_0 no pasara por niguno de los puntos $A - triples$, tendríamos que no hay puntos $(A \cup \{l_0\}) - cuádruples$ (contradiciendo la propiedad $(7,4)$, pues $|(A \cup \{l_0\})| = 7$).

Entonces para toda $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$, tenemos que l pasa, al menos (pues puede pasar por dos o más de ellos), por alguno de los puntos $A - triples$.

Esto quiere decir que $\pi(\mathcal{L} \setminus A) \leq 4$.

Ahora,

Caso (1).- Existe **un único** punto $A - triple$, que llamaremos α.

Como hay *tres* rectas de A que contienen al punto α, sabemos que existen otras *tres* rectas de A que **no** contienen al punto α, puesto que no hay puntos $A - cuádruples$. Estas son todas las rectas de A; que son *seis*. Con esto es claro que $\pi(A) \leq 4$, pues podemos tomar un punto por cada una de las tres rectas que **no** pasan por α, y agregar a estos tres puntos el punto α; con lo que se tiene una transversal del conjunto de rectas A, que consta de cuatro puntos. Y como arriba se mencionó, toda $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ debe pasar por alguno de los puntos $A - triples$; en este caso $\alpha \in l$ para toda $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$.

Por lo tanto $\pi(\mathcal{L}) \leq 4$.

Caso (2).- Existen **dos** puntos $A-triples$, α y β.

Para formar dos puntos triples con rectas en el plano, son necesarias cinco rectas, pues ya se demostró que $\partial(4,3,s4)=1$ y que $\partial(5,3,s4)=2$. Así, hay cinco de las seis rectas de A que se perforan con los puntos α y β, lo que quiere decir que $\pi(A)=3$, pues como no hay puntos $A-cu\acute{a}druples$ debe haber una recta, que llamaremos l_1 de A que no contenga ni al punto α ni al punto β. Así es claro que si tomamos un punto cualquiera $t\in l_1$, entonces el conjunto de puntos $\{\alpha,\beta,t\}$ es una transversal para A. Y como arriba se mencionó, toda $l\in(\mathcal{L}\setminus A)$ debe pasar por alguno de los puntos $A-triples$; en este caso $\alpha\in l$ ó $\beta\in l$ para toda $l\in(\mathcal{L}\setminus A)$.

Por lo tanto $\pi(\mathcal{L})\leq 3<4$.

Caso (3).- Hay **tres o más** puntos $A-triples$.

En este último caso solamente pueden haber 3 ó 4 puntos $A-triples$.

Tanto para formar 3 puntos triples con rectas en el plano, como para formar 4 puntos triples con rectas en el plano, son necesarias seis rectas, pues ya se demostró que $\partial(5,3,s4)=2$ y que $\partial(6,3,s4)=4$.

Entonces es claro que si hay 3 puntos $A-triples$, se tiene que $\pi(A)\leq 3$, y que si hay 4 puntos $A-triples$, se tiene que $\pi(A)\leq 4$. Y como toda $l\in(\mathcal{L}\setminus A)$ debe pasar por alguno de los puntos $A-triples$, se tiene que:

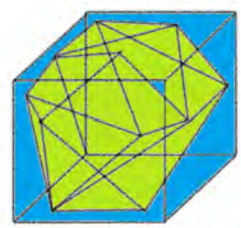
- Si hay 3 puntos $A-triples$, entonces $\pi(\mathcal{L})\leq 3$.

-Si hay 4 puntos $A-triples$, se tiene que $\pi(\mathcal{L})\leq 4$.

En los tres casos $\pi(\mathcal{L})\leq 4$, lo que concluye la prueba. □

Los resultados de este capítulo nos darán una base para presentar algunos hechos generales.

6. Aportaciones y Conclusiones Generales



En los ejemplos concretos del capítulo anterior, en los que es pequeño tanto el número p de rectas como el grado q de los puntos que se quieren formar, es sencillo ver quién es el número $\partial(p, q, sr)$, pero dar un resultado general que nos diga cuánto vale dicho número, no es una tarea fácil y de hecho no existe tal resultado; más aún no existe ni siquiera un resultado que acote $\partial(k, 3, s4)$ para cualquier entero k. Sin embargo, es posible dar una cota para este número de forma que nos ayude a acotar a su vez el número de perforación de las familias de rectas $\mathcal{L}$ en el plano. En ese sentido, este capítulo, en el que presentamos otras de nuestras aportaciones y conclusiones se ocupará de generalizar las ideas expresadas en los resultados particulares del capítulo 5..

Primero un resultado para familias con la propiedad $(p, 4)$; para ello daremos una cota para el número $\partial(p, 3, s4)$:

Lema 12. $\partial(p, 3, s4) \leq \frac{(p)(p-1)}{6}$.

Demostración. Tomemos p rectas cualesquiera en el plano con la condición de que no formen puntos cúadruples entre sí. Al conjunto de puntos dobles que estas p rectas generan, lo llamaremos A_2 y al conjunto de puntos triples que estas p rectas generan, lo llamaremos A_3. Pediremos también la condición de que $A_3 \neq \emptyset$.

Ahora, modificaremos ligeramente la posición de las p rectas de la siguiente manera: Por cada punto triple $t \in A_3$, moveremos ligeramente las tres rectas que pasan por t de forma que desaparezca el punto triple, y en vez de él, aparezcan tres puntos dobles. De esta forma, haremos que desaparezcan todos los puntos triples y por cada punto triple aparezcan tres puntos dobles.

Sabemos que el número de puntos dobles que se pueden formar con p rectas es menor o igual a $\binom{p}{2}$. Por ello al modificar nuestras p rectas con el procedimento antes descrito tenemos que el número de puntos dobles, sumado a tres veces el número de puntos triples, es menor o igual a $\binom{p}{2}$; es decir:

$$|A_2|+3\,|A_3| \leq \binom{p}{2} \;\text{ implica que }\; |A_3| \leq \frac{\binom{p}{2}-|A_2|}{3} \leq \frac{\binom{p}{2}}{3} = \frac{(p)(p-1)}{6}. \quad \square$$

Usando este lema, podemos demostrar el siguiente Teorema:

Teorema 13. *Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$ con p ó más rectas. Si $\mathcal{L}$ tiene la propiedad $(p,4)$, entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{3} + p - 4$.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ sin puntos cuádruples pero tal que para cualquier $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ se tiene que hay por lo menos un punto $(A \cup \{l\}) - cu\acute{a}druple$.

Por la hipótesis de la propiedad $(p,4)$, sabemos que $|A| \leq p-1$ (pues si $|A| = p$, tendríamos por lo menos un punto $A - cu\acute{a}druple$; lo que contradice la elección de A).

Por el lema anterior sabemos que $\partial(p-1, 3, s4) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{3}$. Esto nos dice que con las rectas en A se pueden formar a lo más $\frac{\binom{p-1}{2}}{3}$ puntos $A - triples$ de forma que no haya punto $A - cu\acute{a}druples$.

Entonces sabemos que para cualquier $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ se tiene que l pasa por alguno de los $\frac{\binom{p-1}{2}}{3}$ puntos $A - triples$ (pues si $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ sabemos que hay por lo menos un punto $(A \cup \{l\}) - cu\acute{a}druple$).

Por lo tanto $\pi(\mathcal{L} \backslash A) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{3}$.

Ahora, solo nos falta ver con cuántos puntos podemos perforar a las rectas de A que no pasan por ningún punto $A - triple$.

Si llamamos $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x \text{ } es \text{ } punto \text{ } A - triple\}$, podemos afirmar que $B \neq \emptyset$ porque si con $p-1$ rectas de $\mathcal{L}$ no se pueden formar puntos triples, entonces con p rectas de $\mathcal{L}$ no se pueden formar puntos cuádruples (contradiciendo la propiedad $(p,4)$).

Tomemos $b \in B$. sabemos que hay tres rectas de A que pasan por el punto b y por ello hay a lo más $(p-1) - 3 = p - 4$ rectas de A que podrían no pasar por ningún punto $A - triple$; y estas $p-4$ rectas se pueden perforar trivialmente con $p-4$ puntos del plano (un punto por cada recta).

De esta forma:

$$\pi(\mathcal{L}) \leq \; \pi(\mathcal{L} \backslash A) + p - 4 \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{3} + p - 4.$$

$\square$

Considérese la prueba del lema anterior como un complemento a la prueba del siguiente teorema general, pues como esencialmente son la misma demostración, y la primera es más fácil de visualizar, nos permite ahora ser breves:

TEOREMA 14. $\partial(p, q-1, sq) \leq \frac{\binom{p}{2}}{\binom{q-1}{2}}$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos p rectas cualesquiera en el plano con la condición de que no formen puntos $q-ésimos$ entre sí. Al conjunto de puntos dobles que estas p rectas generan, lo llamaremos A_2, al conjunto de puntos triples que estas p rectas generan, lo llamaremos $A_3, ...,$ al conjunto de puntos $(q-1)-ésimos$ lo llamaremos A_{q-1}. Pediremos también la condición de que $A_{q-1} \neq \emptyset$.

Ahora, haremos que desaparezcan todos los puntos $(q-1)-ésimos$ y por cada punto $(q-1)-ésimo$ aparezcan $\binom{q-1}{2}$ puntos dobles.

Sabemos que el número de puntos dobles que se pueden formar con p rectas es menor o igual a $\binom{p}{2}$ y por ello:

$$|A_2| + \binom{3}{2}|A_3| + \binom{4}{2}|A_4| + ... + \binom{q-1}{2}|A_{q-1}| \leq \binom{p}{2}$$

con esto se tiene:

$$|A_{q-1}| \leq \frac{\binom{p}{2} - \left[|A_2| + \binom{3}{2}|A_3| + \binom{4}{2}|A_4| + ... + \binom{q-2}{2}|A_{q-2}|\right]}{\binom{q-1}{2}} \leq \frac{\binom{p}{2}}{\binom{q-1}{2}}.$$

□

Con ayuda de la cota que nos proporciona el Teorema 14, surge el siguiente:

TEOREMA 15. *Sea $\mathcal{L}$ una familia de rectas en el plano con más de $p-1$ rectas. Si $\mathcal{L}$ tiene la propiedad (p, q), entonces* $\pi(\mathcal{L}) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}} + p - q$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ sin puntos $q-ésimos$ pero tal que para cualquier $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ se tiene que hay por lo menos un punto $(A \cup \{l\}) - q - ésimo$.

Por la hipótesis de la propiedad (p, q), sabemos que $|A| \leq p-1$ (pues si $|A| = p$, tendríamos por lo menos un punto $A - q - ésimo$; lo que contradice la elección de A).

Por el Lema anterior sabemos que $\partial(p-1,q-1,sq) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}}$. Esto nos dice que con las rectas en A se pueden formar a lo más $\frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}}$ puntos $A-(q-1)-\acute{e}simos$ de forma que no haya puntos $A-q-\acute{e}simos$.

Entonces sabemos que para cualquier $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ se tiene que l pasa por alguno de los $\frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}}$ puntos $A-(q-1)-\acute{e}simos$ (pues si $l \in (\mathcal{L} \setminus A)$ sabemos que hay por lo menos un punto $(A \cup \{l\})-q-\acute{e}simos$).

Por lo tanto $\pi(\mathcal{L} \backslash A) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}}$.

Ahora, solo nos falta ver con cuantos puntos podemos perforar a las rectas de A que no pasan por ningún punto $A-(q-1)-\acute{e}simos$.

Si llamamos $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \ es \ punto \ A-(q-1)-\acute{e}simo\}$,

podemos afirmar que $B \neq \emptyset$ porque si con $p-1$ rectas de $\mathcal{L}$ no se pueden formar puntos $(q-1)-\acute{e}simos$, entonces con p rectas de $\mathcal{L}$ no se pueden formar puntos $q-\acute{e}simos$ (contradiciendo la propiedad (p,q)).

Tomemos $b \in B$. sabemos que hay $q-1$ rectas de A que pasan por el punto b y por ello hay a lo más $(p-1)-(q-1) = p-q$ rectas de A que podrían no pasar por ningún punto $A-(q-1)-\acute{e}simo$; y estas $p-q$ rectas se pueden perforar trivialmente con $p-q$ puntos del plano (un punto por cada recta).

De esta forma:

$$\pi(\mathcal{L}) \leq \pi(\mathcal{L} \backslash A) + p - q \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}} + p - q.$$

□

Observación.- *Si $p \geq q \geq 3$, sabemos para toda $\mathcal{L}$ una familia de rectas en el plano con la propiedad (p,q), se tiene que $\pi(\mathcal{L}) \leq \binom{p-1}{2}$. (pues (p,q) implica $(p,3)$).*

Entonces la cota anterior tiene sentido pues:

LEMA 13. $\frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}} + p - q < \binom{p-1}{2}$

DEMOSTRACIÓN. Primero hay que observar que los resultados anteriores tienen sentido para $p \geq 3$ y $q \geq 3$ pues de lo contrario, si $q < 3$, entonces $\binom{q-1}{2} = 0$ (así la cota estaría indefinida). Lo mismo ocurre para p, pues como $q \leq p$, tenemos que si $p < 3$ implica que $q < 3$ (cota indefinida).

Por lo tanto $p, q \geq 3$.

Siendo así, veamos que se verifica la siguiente desigualdad:

$$0 < p^2 - 5p + 2 + 2q + \left(q^2 - 3q\right)\left(p^2 - 4p + 2 + q\right).$$

Para hacerlo más visible y evitarnos cuentas de más, llamarémos $T_1 = p^2 - 5p + 2 + 2q$; $T_2 = q^2 - 3q$; $T_3 = p^2 - 4p + 2 + q$ y explorarémos su comportamiento.

Entonces queremos ver si se cumple que $0 < T_1 + T_2T_3$.

Notemos que $T_2 \geq 0$ porque si $q \geq 3$, entonces $q^2 \geq 3q$.

Ahora, si $p \geq 5$, entonces $p^2 \geq 5p \geq 4p$ y así $T_1 > 0$ y $T_3 > 0$. Entonces en los casos en los que $p \geq 5$, T_1 y T_3 siempre son positivos y T_2 es siempre mayor o igual a cero.

Para terminar de verificar nuestra desigudad, solo nos queda ver los casos: $(p, q) = (3, 3)$, $(p, q) = (4, 3)$, $(p, q) = (4, 4)$.

(1).- $(p, q) = (3, 3)$
En este caso $T_1 = (3)^2 - 5(3) + 2 + 2(3) = 2 > 0$
y $T_2T_3 = 0$ porque $T_2 = 0$.

(2).- $(p, q) = (4, 3)$
Aquí $T_1 = (4)^2 - 5(4) + 2 + 2(4) = 6 > 0$
y $T_2T_3 = 0$.

(3).- $(p, q) = (4, 4)$
$T_1 = (4)^2 - 5(4) + 2 + 2(4) = 6 > 0$
$T_2 = (4)^2 - 3(4) = 4 > 0$
y $T_3 = (4)^2 - 4(4) + 2 + (4) = 6 > 0$.

De esta forma queda demostrado que

$$0 < p^2 - 5p + 2 + 2q + \left(q^2 - 3q\right)\left(p^2 - 4p + 2 + q\right).$$

Ahora, sumando $p^2 - 3p + 2$ de ambos lados:

$$p^2 - 3p + 2 < p^2 - 3p + 2 + p^2 - 5p + 2 + 2q + \left(q^2 - 3q\right)\left(p^2 - 4p + 2 + q\right).$$

Es decir

$$p^2 - 3p + 2 < 2p^2 - 8p + 4 + 2q + \left(q^2 - 3q\right)\left(p^2 - 4p + 2 + q\right).$$

Entonces

$$p^2 - 3p + 2 < 2\left(p^2 - 4p + 2 + q\right) + \left(q^2 - 3q\right)\left(p^2 - 4p + 2 + q\right)$$

$$\Longrightarrow \quad p^2 - 3p + 2 < (2 + q^2 - 3q)(p^2 - 4p + 2 + q)$$

$$\Longrightarrow \tfrac{p^2-3p+2}{q^2-3q+2} < p^2 - 4p + 2 + q = p^2 - 3p + 2 + q - p$$

$$\Longrightarrow \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}} < \binom{p-1}{2} + q - p$$

$$\Longrightarrow \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}} + p - q < \binom{p-1}{2}.$$

Que es lo que se quería demostrar. □

Para finalizar nos gustaría comentar brevemente el trabajo que se hizo en los capítulos 5 y 6. La base fue pensar en familias de rectas en el plano con la propiedad $(p, 4)$ para algún entero p. Se introdujo el número $\partial(p, 3, s4)$ que es el máximo número de puntos triples que se pueden formar con p rectas en el plano, de forma que no haya puntos cuádruples.

Conocer buenas cotas de este número es útil por lo siguiente:

Sea $\mathcal{L}$ una familia de rectas en el plano con la propiedad $(p, 4)$. Tomemos $A \subset \mathcal{L}$ con $|A| = p-1$ tal que no haya puntos $A-cu\acute{a}druples$. Sabemos que hay por lo menos un punto $A - triple$, pues de lo contrario para cualquier $l \in \mathcal{L}$ tendríamos que no hay puntos $(A \cup \{l\}) - cu\acute{a}druples$, lo que contradice la propiedad $(p, 4)$ pues $|(A \cup \{l\})| = p$. Con esto sabemos que el número de perforación de $\mathcal{L} \diagdown A$ queda acotado por el número $\partial(p, 3, s4)$. Finalmente al agregar puntos que perforen las $p - 1$ rectas de A, sabemos una buena cota para $\pi(\mathcal{L})$.

Arriba se dio una cota general

$$\partial(p, q-1, sq) \leq \frac{\binom{p}{2}}{\binom{q-1}{2}}.$$

Con ayuda de esta cota se hizo el:

Teorema 15.- *Sea $\mathcal{L}$ una familia de rectas en el plano. Si $\mathcal{L}$ tiene la propiedad (p, q), entonces $\pi(\mathcal{L}) \leq \frac{\binom{p-1}{2}}{\binom{q-1}{2}} + p - q$.*

Pensar en el número $\partial(p, q-1, sq)$ abre un amplio camino para aproximarse al número de perforación de las familias de rectas en el plano con alguna propiedad (p, q), ya que no parece muy difícil poder mejorar la cota que aquí se dio para $\partial(p, q-1, sq)$ para cualesquiera enteros p, q. Sin embargo, está busqueda puede resultar bastante interesante y extensa, puesto que no se conoce ni siquiera el caso $q = 4$, es decir, el número $\partial(p, 3, s4)$.

Bibliografía

[1] N. Alon and G. Kalai. *Bounding the piercing number,* Discrete and Computational Geometry, 13 (1995) 245-256.

[2] N. Alon and D. J. Kleitman. *Piercing convex sets,* Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 27 (1992) 252-256.

[3] N. Alon and D. J. Kleitman. *Piercing convex sets and the Hadwiger- Debrunner (p,q)-problem.* Adv. Math. 96 (1992) 103-112.

[4] M. Berger, *Convexity*, The American Mathematical Monthly, Vol. 97, No. 8, Special Geometry Issue (Oct.,1990), pp. 650-678

[5] L. Danzer and B. Grünbaum. *Intersection properties of boxes in* $\mathbb{R}^d$, Combinatorica 2(3) (1982) 237–246.

[6] L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee. Helly's theorem and its relatives. Convexity, American Mathematical Society, 7: 101-179, 1963.

[7] J. Eckhoff. *A survey of the Hadwiger-Debrunner (p,q)-problem,* Discrete and Computational Geometry, Volume 25, 2003, pp 347-377.

[8] H. Hadwiger and H. Debrunner, Uber eine Variante zum Helly'schen Satz, Arch. Math. 8, (1957), 309-313.

[9] D. J. Kleitman, A. Gy´arf´as and G. T´oth, Convex sets in the plane with three of every four meeting, Combinatorica 21 (2001) 221-232.

[10] D. Oliveros, L. Montejano, J. Jeronimo, M. Huicochea. *About the piercing number of a family of intervals,* Discrete and computational Geometry, Preprint.