



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA - CONTROL

ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS  
ELÉCTRICOS DE POTENCIA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ÚRSULA FLORES GAMA

TUTORES PRINCIPALES  
DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ, FI  
DRA. CRISTINA VERDE RODARTE, II

MÉXICO, D.F. MARZO 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

Secretario: Dra. Verde Rodarte María Cristina

Vocal: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

1er. Suplente: Dr. Fuerte Esquivel Claudio Rubén

2o. Suplente: Dr. Mina Antonio Jesús Dario

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTORES DE TESIS:**

DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ

DRA. CRISTINA VERDE RODARTE

---

FIRMA

---

FIRMA

A mis padres,  
por su amor y ejemplo de  
tenacidad.

# Agradecimientos

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** y al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**.

A los profesores del Colegio de Control de la UNAM, en especial al Dr. Paul Maya y la Dra. Cristina Verde, por todo el conocimiento, apoyo y paciencia que me brindaron.

A la BBC: Cesar, Carla, Rafael, Miguel, Jared, Daniel, Uriel, Manuel, Adrian y Luis, por brindarme su amistad y hacer de esta etapa algo grandioso.

A mis amigos, todos ellos, por su motivación.

A Jorge, por todo su cariño y apoyo.

A mi familia, por estar a mi lado en todo momento, tal vez no físicamente, pero en mi corazón, los quiero.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Definición de sistema eléctrico de potencia . . . . .	9
1.2. Centros de Control . . . . .	9
1.3. Estados de operación de un SEP . . . . .	10
1.4. Estimación de estados en un SEP . . . . .	12
1.5. Motivación y problema . . . . .	16
1.6. Estado del arte . . . . .	17
1.7. Objetivos . . . . .	19
1.8. Descripción del contenido de la Tesis . . . . .	19
<b>2. Antecedentes Matemáticos</b>	<b>20</b>
2.1. Modelado de un SEP . . . . .	20
2.1.1. El Jacobiano de mediciones, $H$ . . . . .	24
2.2. Existencia de la solución . . . . .	26
2.3. Optimización . . . . .	27
2.4. Métodos de estimación . . . . .	28
2.4.1. Mínimos Cuadrados Ponderados . . . . .	28
2.4.2. Propuestas basadas en subsistemas . . . . .	30
<b>3. Casos de Estudio</b>	<b>35</b>
3.1. SEP de tres buses . . . . .	35
3.1.1. Estimación por mínimos cuadrados ponderados . . . . .	36
3.1.2. Algoritmo de solución incremental . . . . .	38
3.1.3. Algoritmo <i>difusivo</i> . . . . .	43
3.2. SEP de nueve buses . . . . .	45

3.2.1. Estimación por: mínimos cuadrados ponderados y algoritmo de solución incremental . . . . .	46
<b>4. Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A. Ecuaciones de flujos de potencia de una línea de transmisión</b>	<b>54</b>
<b>B. Descomposición <math>LU</math>, <math>QR</math> y de Cholesky</b>	<b>57</b>
B.1. Descomposición $LU$ . . . . .	57
B.2. Descomposición $QR$ . . . . .	58
B.3. Descomposición de Cholesky . . . . .	59





# Nomenclatura

$E_k$ ( $E_m$ )	Voltaje complejo del bus $k$ ( $m$ ) a tierra.
$H \in \mathbb{R}^{m \times n}$	Jacobiano de mediciones.
$h_i(x)$	Función que relaciona la medición $i$ con el vector de estados $x$ .
$I_{km}$	Corriente compleja a través de la línea de transmisión que va del bus $k$ al bus $m$ .
$\text{Im}(H)$	Imagen de $H$ .
$J(x)$	Suma ponderada de los cuadrados de los residuos de las mediciones.
$\text{ker}(H)$	Núcleo de $H$ .
$me$	Número de mediciones usadas para la estimación.
$N_i$	Conjunto de buses directamente conectados al bus $k$ .
$n$	Número de estados a estimar.
$P_k$	Inyección de potencia activa al bus $k$ .
$P_{km}$	Flujo de potencia activa a través de la línea de transmisión que va del bus $k$ al bus $m$ .
$Q_k$	Inyección de potencia reactiva al bus $k$ .
$Q_{km}$	Flujo de potencia reactiva a través de la línea de transmisión que va del bus $k$ al bus $m$ .
$R$	Matriz de covarianza de las mediciones.
$V_k$	Magnitud del voltaje nodal.
$x \in \mathbb{R}^n$	Vector de variables de estado del sistema.
$Y = G + jB$	Matriz compleja de la admitancia de nodos, con elementos $G_{km} + jB_{km}$ .
$Y_{km} = g_{km} + jb_{km}$	Admitancia de la rama en serie que conecta al bus $k$ con el bus $m$ .
$Y_s = g_{si} + jb_{si}$	Admitancia en derivación conectada al bus $i$ .
$z \in \mathbb{R}^m$	Vector de mediciones.
$\eta$	Vector de error de las mediciones.
$\theta_k$	Ángulo del fasor de voltaje nodal.
$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$	Diferencia angular del fasor de voltaje entre el bus $k$ y el $m$ .
$\mathbb{E}[\eta]$	Valor esperado de $\eta$

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presenta una breve definición de Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) y un panorama de las funciones que tiene un Centro de Control de un SEP, lo que nos lleva a presentar el concepto de estado de operación de un SEP y el de estimación del estado del mismo. Por último se plasman la motivación, el problema y los objetivos asociados a este trabajo.

### 1.1. Definición de sistema eléctrico de potencia

Un sistema eléctrico de potencia (SEP) es un conjunto de elementos que tiene como fin generar, transformar, transmitir, distribuir y consumir energía eléctrica de tal forma que se logre la mayor calidad al menor costo posible.

Así que un SEP consta de plantas generadoras (sistema de generación) que producen la energía eléctrica consumida por las cargas, una red de transmisión y de distribución para transportar esa energía de las plantas a los puntos de consumo. Un SEP también incluye equipo adicional de control, protección y monitorización para lograr que el suministro de energía se realice con las características de continuidad de servicio, regulación de tensión y control de frecuencia requeridas [Viqueira Landa, 2004].

### 1.2. Centros de Control

Desde un punto de vista de supervisión se desea que un SEP mantenga el suministro de energía eléctrica, con las características antes mencionadas, dentro de límites operativos seguros y a un mínimo costo de funcionamiento. Con este fin se mantiene una monitorización constante de las condiciones del sistema, con lo que se puede determinar su estado operativo. Para lograr esta meta

se cuenta con herramientas computacionales como son los programas de flujos de potencia, de análisis de seguridad, de contingencia de elementos de transmisión o los estimadores de estados. Estas herramientas se encuentran disponibles en los centros de control. Por ejemplo, a los centros de control equipados con estimador de estados y otras aplicaciones de cómputo para el análisis de la red, llamados programas computacionales de aplicación avanzada (advanced application software, en inglés) además del software de control de la generación, se les llama sistemas de gestión de la energía (energy management systems, EMS). Se puede decir que “el centro de control es el sistema nervioso central de un SEP. El centro de control siente el pulso del SEP, ajusta su condición, coordina sus movimientos y proporciona defensa frente a acontecimientos exógenos.” [Wu et al., 2005].

Convencionalmente un centro de control cumple con ciertas funciones para operar un SEP, estas funciones se implementan en forma de software en las computadoras y se les llama aplicaciones. Se puede agrupar en dos las funciones que cumple un centro de control, el primer grupo sirve para la operación del SEP y cumplen el papel de la adquisición de datos, control de la generación y análisis y control de la red. El segundo grupo de funciones son aplicaciones enfocadas a la parte de negocios, y se conocen como el sistema de gestión de negocios (o BMS por si siglas en inglés), sirven para la gestión financiera, la gestión de la información y la determinación del precio de la energía.

Es en el primer grupo de funciones donde se utiliza la herramienta de estimación de estados para proporcionar un cálculo exacto del estado operativo actual del sistema. A continuación se da una definición de los estados operativos de un SEP y la herramienta de estimación de estados será tratada más adelante.

### 1.3. Estados de operación de un SEP

Para un SEP se definen tres diferentes estados operativos dependiendo de sus condiciones de operación [Abur and Expósito, 2004].

Antes de exponer los estados operativos se presentan las siguientes dos definiciones útiles para entenderlos.

- Restricciones operativas: Un SEP opera bajo ciertas restricciones de la propia generación y de la red de transmisión, que incluyen:
  - Límites de flujos de potencia de las líneas de transmisión.
  - Límite superior e inferior de la magnitud de voltaje de los buses, es importante conservar las magnitudes de voltaje en los diferentes nodos dentro de límites establecidos en los que no se afecte al sistema ni a los equipos conectados.

- Restricciones de igualdad, son típicamente las ecuaciones de balance de carga es decir, la potencia generada debe ser tal que sea suficiente para cubrir la demanda más las pérdidas en la red. Otro ejemplo típico son las ecuaciones de flujo de potencia.
  - Restricciones de desigualdad, consideran los límites que deben satisfacer las variables de control y estado. Estas restricciones reflejan los límites operativos impuestos a los dispositivos y al sistema eléctrico de potencia.
- Contingencias eléctricas: Ocurren cuando un elemento o subsistema de la red es retirado o sale de servicio de manera imprevista o programada. Pueden causar cortes en el suministro de la energía eléctrica; las más comunes y de interés son las salidas de líneas de transmisión o de generadores, debido a fallas inesperadas del equipo o causas naturales, como tormentas.

Los estados de operación de un SEP son:

1. Normal. Es cuando todas las cargas del sistema reciben energía eléctrica de los generadores existentes sin violar ninguna restricción operativa.
  - a) Un estado normal se dice que es seguro si el sistema puede permanecer en él después de que ha ocurrido una contingencia.
  - b) Un estado normal se dice inseguro cuando el balance de potencia en cada bus y todas las restricciones operativas de desigualdad son satisfechas, aunque el sistema permanece vulnerable ante alguna de las contingencias eléctricas.
2. Emergencia. Es cuando un SEP continua suministrando energía eléctrica a todas las cargas del sistema, sin embargo, lo hace violando alguna de las restricciones operativas.
3. Restaurativo: Se le llama estado restaurativo, si durante un estado de emergencia, para evitar el colapso del sistema, se tomaron medidas correctivas de control, que llevaron a desconectar cargas, líneas, transformadores u otros equipos; y como resultado de esta reducción de carga y reconfiguración de la topología, las violaciones de los límites de operación pueden ser eliminadas y el sistema puede recuperar estabilidad, entonces, el balance de la carga contra la generación se puede restaurar con el fin de iniciar el suministro de energía eléctrica a todas las cargas.

De la anterior lista, se observa que si un SEP se encuentra en un estado operativo normal y seguro no es necesario implementar medidas de control post contingencias. En un estado normal pero inseguro se deben de llevar a cabo acciones preventivas para evitar que el sistema pase a un estado de emergencia. El estado de emergencia requiere que los operadores tomen acciones

correctivas inmediatas para así regresar al sistema a un estado normal. Y por último las acciones que deben tomar con el fin de regresar al sistema de un estado restaurativo al normal se conocen como controles restaurativos.

De la anterior descripción de los estados operativos en los que se puede encontrar un SEP es evidente que se desea mantener al sistema en un estado normal y seguro tomando en cuenta que las condiciones de operación varían a lo largo del tiempo. Para lograr esa meta se realiza de manera periódica un análisis de seguridad del SEP que consiste en

- Monitorizar constantemente las condiciones del sistema.
- Determinar el estado operativo en el que se encuentra el sistema.
- Determinar las acciones de control a seguir dependiendo del estado en el que se encuentre el sistema.

La monitorización constante de las condiciones del sistema implica la adquisición de mediciones de éste con el propósito de poder efectuar una estimación del estado del mismo. Es bajo este contexto que se ve la importancia de la estimación de estados en los SEP; como una herramienta que facilita la supervisión del sistema, proporcionando una base de datos de la red confiable y en tiempo real, incluyendo el estado existente en base al cual las funciones de evaluación de la seguridad de este, puedan implementarse confiablemente con el fin de analizar las contingencias y determinar cualquier acción correctiva requerida.

El problema, entonces, es estimar el estado del SEP, entendiendo como estado del sistema los valores de magnitud y ángulo de los fasores de voltaje de todos los nodos de la red, dado un conjunto de mediciones a lo largo de la línea de transmisión. Como se presentará en capítulos posteriores, este problema se puede ver como uno de optimización no lineal que tiene como dificultad la dimensión del sistema.

## 1.4. Estimación de estados en un SEP

La estimación del estado en un SEP consiste en obtener los fasores de voltaje en todos los buses del sistema en un momento determinado del tiempo. Para esto el SEP se expresa como la relación entre el estado del sistema y sus variables medidas. Al conocer el estado del sistema y el modelo de la red se puede determinar las condiciones de operación del sistema en un tiempo dado, es decir, especificar totalmente el sistema; sin embargo el disponer de manera continua de todo el estado no siempre es factible. El principal problema es la dimensión del sistema y la frecuencia de muestreo de los datos.

El objetivo de un estimador del estado es proporcionar los valores de las variables de estado del sistema, con un criterio de optimalidad especificado previamente. En el caso de un SEP el vector de estados consiste en el conjunto de fasores complejos de voltaje de cada uno de los buses del sistema; el término bus es sinónimo de nodo pero éste es más usado en el contexto de potencia.

El diseño de un estimador de estados se puede ver como un proceso que típicamente incluye [Abur and Expósito, 2004], [Monticelli, 1999]

- Procesador de topología. El estimador de estados convencionalmente realiza el cálculo de las variables de estado con base en un modelo del tipo bus/rama como el que se utiliza en el cálculo de los flujos de potencia. Sin embargo, la forma en que está conectada la red se describe generalmente mediante un diagrama unifilar. Entonces la función del procesador de la topología de la red (NTP, por sus siglas en inglés) es transformar esa descripción a una del tipo bus/rama para que se pueda formular el problema de estimación. El procesamiento de la topología convencionalmente se lleva a cabo previo a otras etapas del proceso, como la estimación del estado, el análisis de observabilidad o el procesamiento de datos erróneos. Esto permite que, al momento de realizar la estimación del estado, se asuma que la topología de la red y sus parámetros son correctos, de aquí la importancia de este paso en todo el proceso de estimación.
- Análisis de observabilidad. La noción de observabilidad en la teoría de control se refiere a la medida de qué tan bien el estado interno de un sistema puede ser inferido mediante el conocimiento de las salidas externas del mismo. La misma noción se mantiene para un SEP, y es definida como la habilidad de reconstruir unívocamente el estado del sistema usando un conjunto determinado de mediciones. La observabilidad de una red dada, es determinada por el tipo y localización de las mediciones disponibles, como también por la topología de la red. El análisis de observabilidad se lleva a cabo dado un conjunto de mediciones y su localización y dará como respuesta si es posible encontrar un estimado único para verificar el estado del sistema. Este análisis se hace fuera de línea para comprobar la pertinencia de la configuración de las mediciones existentes; también se hace en línea, antes de la estimación del estado, para determinar si las mediciones que están disponibles en tiempo real hacen posible la estimación del estado, y si no es así, cuáles partes de la red contienen variables de estado que puedan ser estimadas (islas observables), así como cuáles pseudomediciones pueden ser añadidas para mejorar la observabilidad. Las pseudomediciones son valores que corresponden a la información que nos daría una variable medida, pero que son calculadas u obtenidas, típicamente, basándose en datos históricos o predicciones de la carga a corto plazo.

Entonces las condiciones de solubilidad del problema de estimación son determinadas por el

análisis de observabilidad. Las metodologías del análisis de observabilidad se pueden clasificar, a grandes rasgos, en un enfoque estructural o un enfoque algebraico [Tran et al., 2012]

- Observabilidad topológica. Un SEP se dice topológicamente observable, si existe un árbol expandido, tal que cualquier camino de ramas entre dos nodos no medidos al menos contenga una rama cuyo flujo de potencia sea medido.
- Observabilidad algebraica. Un SEP se dice que es algebraicamente observable, si su Jacobiano de Mediciones tiene rango completo por columna al ser valuado en el vector plano, vector de estado donde se asume que todos los voltajes de nodo son iguales a uno por unidad y están en fase entre ellos.

Usualmente un SEP es diseñado para ser observable bajo diversas condiciones de operación, sin embargo, la falta de observabilidad temporal puede ocurrir debido a cambios inesperados en la topología de la red o fallas en el sistema de comunicación de los datos, por eso es importante el análisis de observabilidad.

- Solución del Estimador de Estados. Su función es determinar el mejor estimado del estado del sistema, con la ayuda de los dos pasos anteriores. Es en este punto del proceso de estimación de estados donde esta tesis se centra, por lo que el tema será abordado a profundidad en los siguientes capítulos.
- Procesador de datos erróneos. Está diseñado para detectar la existencia de errores gruesos en el conjunto de mediciones, los errores gruesos son aquellos errores en las mediciones que pueden provocar estimaciones totalmente alejadas de la realidad. El procesador de datos erróneos es de gran importancia porque detecta la existencia de esos errores y, si existen, procede a identificar cuales son las mediciones erróneas, para eliminarlas con ayuda de la suficiente redundancia en la configuración de las mediciones. Los errores en las mediciones usualmente existen debido a la precisión finita de los dispositivos de medición y al medio de telecomunicación. El tratamiento que se le da a los errores en las mediciones depende del método de estimación del estado usado en la implementación.
- Procesador de errores paramétricos y estructurales. Estima varios parámetros, detecta errores estructurales en la configuración de la red e identifica el estatus erróneo de los interruptores.

Al final los resultados obtenidos por el proceso completo de estimación del estado son usados para clasificar el estado del sistema y tomar las acciones necesarias dependiendo la condición en que se encuentre.

El proceso de estimación de estados es una herramienta indispensable dentro de las aplicaciones de los centros de control. Si bien existe la formulación de flujos de potencia para obtener el estado de un SEP, la estimación de estados considera más tipos de entradas que los flujos de potencia, que solo acepta como entrada las potencias de nodo de los buses de carga, y la potencia activa de nodo y magnitud de voltaje en los buses controlados por voltaje; si una de estas cantidades no se encuentra disponible la solución convencional de los flujos de potencia no se puede obtener.

Una desventaja más de los flujos de potencia se presenta cuando una de las cantidades que utilizan tiene un error, ya que carece de la habilidad para detectar, identificar y eliminar errores; lo que lleva a un error en el cálculo del estado. Con el proceso de estimación de estados los datos erróneos pueden ser detectados con un tratamiento estadístico. Otra ventaja de la estimación de estados es que opera en tiempo real, sin embargo, asume que la topología de la red es completamente conocida y fue procesada sin error para crear un modelo de bus/rama, lo cual implica que los parámetros de la red sean conocidos exactamente [Grainger and Stevenson, 1994].

Otra opción para conocer el estado actual de un SEP es la implementación de unidades de medición fasorial (PMU's por su siglas en inglés). Un PMU es un dispositivo de medición digital capaz de proporcionar un muestreo de secuencia positiva de fasores de voltaje y corriente; éste muestreo es realizado a alta velocidad y permite poner una marca de tiempo en la cual se realizó el muestreo. Los tiempos de las etiquetas asociadas con las mediciones son calibrados por el Sistema de Posicionamiento Global (GPS), lo que permite la sincronización de las mediciones de fasores hechas a través de grandes extensiones geográficas de un sistema de energía. Esto también permite la creación de una visión global del sistema en el instante en que las mediciones fueron tomadas.

La presencia de los dispositivos PMU's permite obtener de manera directa y precisa mediciones de magnitud y ángulo de fase de corriente y voltaje en cualquier nodo del sistema eléctrico de potencia; de tal manera, si existieran PMU's en cada uno de los nodos que integran el sistema eléctrico, se obtendría su condición de operación de manera instantánea sin necesidad de realizar un estudio de estimación de estado. Sin embargo, existen dos factores importantes por los cuales no es posible reemplazar por completo el estimador de estado en los centros de control. Primero, debido al alto costo que tendría colocar un PMU en cada nodo del sistema eléctrico, donde puede haber cientos de nodos, por lo que sólo se seleccionan ciertos puntos en donde es conveniente colocar un dispositivo de este tipo. Segundo, debido a los problemas de medición y/o comunicación a los que son susceptibles, podrían existir mediciones no disponibles en cierto momento [Rendón Salgado, 2013].



## 1.5. Motivación y problema

La amplia distribución geográfica y la gran dimensión del SEP en muchas regiones, provocan que un enfoque en el que toda la red sea analizada como un gran sistema para dar solución al problema de estimación del estado sea poco práctico; la carga computacional es grande y se enfrentan dificultades para satisfacer las exigencias contradictorias sobre la velocidad del cálculo para obtener el estado estimado, su precisión, la ocupación de poca memoria y la capacidad de detectar-identificar varios datos anómalos; es por esto que surge el enfoque de estimación del estado en un SEP dividiendo el sistema en áreas o subsistemas, que implica la separación del conjunto de mediciones en grupos de ellas, más no la separación física del sistema real.

Por ejemplo en México los centros de control y el Sistema Eléctrico Nacional (SEN) son operados por el Centro Nacional de Control de Energía (CENACE), entidad perteneciente a Comisión Federal de Electricidad (CFE), el cual tiene como función principal planear, dirigir y supervisar la operación del sistema eléctrico del país. El SEN actualmente está formado por tres sistemas independientes de energía eléctrica que operan de forma coordinada mediante el intercambio de información a través de centros de control. Estos tres sistemas son el sistema interconectado nacional, el sistema eléctrico de Baja California Norte y el sistema eléctrico de Baja California Sur. El sistema interconectado nacional está dividido en sistemas eléctricos regionales que comparten recursos de generación para lograr un funcionamiento más económico y confiable en su conjunto a través de una operación coordinada por las siguientes áreas de control: noroeste, norte, noreste, occidental, central, oriental, sureste y peninsular. Asimismo, las dos regiones de la península de Baja California permanecen como sistemas aislados con sus propios centros de control, Figura 1.5.

Con el fin de hacer el presente estudio se asume que el SEP cumple con las siguientes características

- El sistema opera en estado estacionario con frecuencia constante.
- Se consideran sistemas trifásicos balanceados.
- La línea de transmisión está completamente transpuesta.
- Los dispositivos en serie o derivación son simétricos en las tres fases.
- El sistema puede ser dividido en varias áreas de supervisión.
- La topología de la red y sus parámetros son correctos.
- El sistema tiene observabilidad algebraica.



Figura 1.1: División del Sistema Eléctrico Nacional (SEN)

Dada la problemática ya expuesta y las suposiciones anteriores, en el presente trabajo se analiza el problema de la estimación de las variables de estado de un SEP desde dos enfoques. En primer lugar se comparan dos técnicas de estimación cuya diferencia estriba en el método matemático y en la forma en que es tratado el sistema (completo o dividido en áreas). En la segunda parte se analiza la cantidad mínima de información necesaria para llevar a cabo la estimación y, en su caso, qué información puede ser útil si se encuentran mediciones erróneas.

## 1.6. Estado del arte

El concepto de la estimación de estados en un SEP fue introducido a final de la década de los 60, principios de la de los 70, por Fred Schweppe. En sus trabajos, Schweppe discute brevemente una técnica fundamentada en los conceptos básicos de un estimador estático del estado y su correspondiente lógica de detección e identificación. En [Schweppe and Wildes, 1970], la discusión abarca el problema en general, modelos matemáticos y algoritmos para la estimación de estado, la detección e identificación. En [Schweppe and Rom, 1970] un modelo matemático aproximado y las simplificaciones resultantes en la estimación, detección e identificación se discuten. En [Schweppe, 1970] se discuten diversos problemas que se presentan al momento de implementar la aplicación, asociados con la dimensión del sistema, la velocidad y la capacidad de almacenamiento de las computado-

ras, y la naturaleza variable en el tiempo de un SEP real. Este trabajo es visto como un ejercicio de modelado del SEP y formulación del problema de estimación para estos sistemas, para que la estimación clásica y la teoría de detección puedan ser empleadas. Las ecuaciones resultantes son razonables y reportan resultados satisfactorios durante simulaciones.

Desde la introducción del concepto por Schweppe las herramientas para la estimación del estado han sido beneficiadas por un gran número de desarrollos teóricos y mejoras prácticas, como es el caso del enfoque multiárea, cuya investigación se remonta a finales de la década de los 70, poco después de que los estimadores comenzaran a ser implementados.

La investigación en ese campo llevó a la creación de los esquemas jerárquicos multiniveles como el de [Van Cutsem et al., 1981], donde se proponen dos niveles de cálculo. En el nivel más bajo una estimación convencional es llevada a cabo por cada uno de los subsistemas y la coordinación de los estimados locales es hecha en el nivel superior. Otro esquema jerárquico multinivel es propuesto en [Gomez-Exposito and de la Villa Jaen, 2009]. Este trabajo presenta una metodología de estimación de estado de dos niveles destinada a integrar los resultados proporcionados por estimadores locales. En el primer nivel las mediciones *primas* son procesadas a nivel local por un estimador de estado lineal; los resultados de esta etapa que comprende ambas, variables de estado y covarianzas asociadas, se pasan a una estimación de estado convencional. Los resultados de las simulaciones muestran que el enfoque propuesto es computacionalmente más eficiente que el convencional, en particular con conjuntos de mediciones altamente redundantes.

Sin embargo, los esquemas antes mencionados requieren que la información de todos los subsistemas o áreas sea concentrada en un centro de control para ser coordinada, como alternativa a este enfoque surgen trabajos como [Conejo et al., 2007], que propone un procedimiento de estimación de estados multiárea, que permite la estimación del estado de un SEP con multiáreas mientras se preserva la independencia de cada área; o el trabajo que en 2011 proponen Tao Yang, Hongbin Sun y Anjan Bose, [Yang et al., 2011], que consiste en un estimador de dos niveles, lineal, descentralizado, basado en mediciones fasoriales. También se encuentra el trabajo [Pasqualetti et al., 2011], que admite la presencia de varios centros de control cooperando entre sí para calcular el estimado de mínima varianza del estado por dos métodos distribuidos; los dos métodos distribuidos se basan en diferentes formas de cooperación entre los centros de control: en el primer método se usa un modo incremental de cooperación, en el segundo es implementada una interacción *difusiva*; el proceso requiere que cada centro de control conozca solamente las mediciones y la estructura de una subparte de toda la red.

Por último, en el trabajo [Gómez-Expósito et al., 2011] se presenta una revisión crítica del estado del arte de los métodos de estimación usando multiáreas; basados en varios criterios de clasificación, proponen por primera vez una taxonomía de los métodos multiárea de estimación, identificando

dos categorías principales, llamadas “de dos niveles” o jerárquica y la descentralizada.

Los métodos de estimación del estado usando multiáreas fueron introducidos en la década de los 70, en parte para eludir las limitaciones de las computadoras disponibles entonces. Hoy en día, como ya se dijo en la Sección 1.5, la gran dimensión de los SEP representa un problema que provoca que un enfoque de estimación dividiendo el sistema sea estudiado para darle solución.

La infraestructura requerida para la comunicación de la información para la estimación del estado y la carga computacional que acarrea la estimación siguen siendo temas de gran importancia y una forma de abordarlos es analizando la cantidad de información que recibe el estimador, como se ve en [Gomez-Exposito and de la Villa Jaen, 2009]. Es por eso que en el presente trabajo también se analiza dicho problema.

Con respecto a el tema, otra ventaja del enfoque multiárea es que al dividir el sistema se crean centros de control locales que se encargan de la información de su área. Esta información después puede ser procesada directamente en el centro de control local, enfoque descentralizado, o ser enviada, después de un procesamiento local, a un centro de control que la coordine, enfoque centralizado. Un enfoque descentralizado de reciente formulación como el de [Pasqualetti et al., 2011] da una nueva metodología de solución al problema, provocando que una comparación entre este enfoque y el global sea otro problema de interés a tratar en esta tesis.

## 1.7. Objetivos

Dado el problema de estimación del estado en un SEP, el objetivo de la tesis es:

1. Determinar si los resultados arrojados por un estimador del estado que divide en áreas el sistema son mejores, o al menos iguales, a los obtenidos con un estimador de estados convencional con el área no dividida.
2. Determinar cuál es la cantidad de información mínima requerida para que el sistema sea observable.
3. Seguir un procedimiento para descartar mediciones redundantes, mediciones que no son necesarias para que el sistema cumpla con la observabilidad algebraica.

## 1.8. Descripción del contenido de la Tesis

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos. El primer capítulo presenta la definición del tema, la motivación y el problema a tratar en este trabajo, el estado del arte y por último los objetivos asociados a esta tesis.

En el capítulo dos se dan los antecedentes matemáticos del problema de estimación del estado, estos antecedentes incluyen el análisis matemático para el modelado del sistema, también presenta los antecedentes de la existencia de la solución del sistema que arroja el modelado, y de la teoría de optimización para llegar a la solución. Finalmente se describen los métodos de estimación.

En el tercer capítulo se presentan dos sistemas para ser usados como ejemplo de aplicación de los métodos, se obtienen los resultados de la aplicación de los diferentes métodos con diferentes casos de mediciones, también se descartan mediciones redundantes. Con las estimaciones de sus estados se realizan las comparaciones.

El cuarto capítulo presenta las conclusiones generales de esta tesis y trabajo futuro.

## Capítulo 2

# Antecedentes Matemáticos

Como se menciona en la introducción, la estimación del estado en un SEP consiste en obtener los fasores de voltaje en todos los buses del sistema en un momento determinado del tiempo. Para esto el SEP se expresa como la relación entre el estado del sistema y las variables medidas, esta relación se obtiene de una aproximación matemática de un SEP que da como resultado un modelo matemático no lineal.

En el presente capítulo se describe el modelo genérico de un SEP y se formula el problema de estimación como un sistema de ecuaciones algebraicas de gran escala, considerando dicho modelo, para entonces solucionar aplicando la teoría de optimización; finalmente se describen algunas metodologías de solución a dicho problema.

### 2.1. Modelado de un SEP

Un SEP consta de tres elementos básicos: plantas generadoras, una red de transmisión y de distribución y los puntos de consumo, estos elementos se unen en los buses y se pueden modelar como

- Generadores
- Líneas de transmisión
- Cargas

Los generadores se modelan como una fuente de tensión ideal, que generan una diferencia de potencial entre sus terminales constante e independiente de la carga que alimente. Las cargas se modelan, de manera similar, como un sumidero constante de energía que se obtiene de cualquier fuente de tensión. Los buses del sistema se pueden clasificar en

1. Bus  $PQ$  o bus de carga
2. Bus  $PV$ , bus de generación o también bus controlado por voltaje
3. Bus de referencia o slack bus en inglés. Este bus importante para la estimación de estados en un SEP porque el ángulo del fasor de voltaje de él se elige como referencia para los ángulos de todos los fasores de voltaje de los demás buses. Siendo este valor una referencia, puede ser elegido arbitrariamente, en la práctica usualmente se establece que este ángulo tendrá un valor igual a cero. Es por esto que el valor del ángulo del fasor de voltaje de este bus no es estimado y no forma parte del vector de estados a estimar.

Las líneas de transmisión pueden representarse de varias maneras, por ejemplo, dependiendo de su clasificación por su longitud. Según esta clasificación hay tres tipos de líneas de transmisión:

- Líneas cortas, que miden menos de  $80[km]$  de longitud.
- Líneas medias, tienen entre  $80$  y  $240[km]$  de longitud.
- Líneas largas, de más de  $240[km]$  de longitud.

Para representar la línea de transmisión de un SEP, con el propósito de estimar su estado, se usará el modelo de parámetros concentrados de una línea de transmisión de mediana longitud, que la describe con una buena precisión. Una línea de longitud media se puede representar con suficiente exactitud por una resistencia y una inductancia en serie, por lo general se incluye una admitancia en derivación a tierra, usualmente una capacitancia pura, si toda la admitancia se supone concentrada en el punto medio del circuito que representa a la línea, se dice que es un circuito T nominal, si la admitancia se supone dividida en dos partes iguales en los extremos de la línea se dice que el circuito es  $\pi$  nominal, Figura 2.1; el circuito  $\pi$  será la representación usada.

Para poder representar una línea de transmisión de mediana longitud por medio de un circuito  $\pi$  se asumen las siguientes condiciones

- El sistema opera en estado estacionario con frecuencia constante.
- Se consideran sistemas trifásicos balanceados.
- La línea de transmisión está completamente transpuesta.
- Los dispositivos en serie o derivación son simétricos en las tres fases.

Entonces se buscan las ecuaciones que relacionen lo que se mide en un SEP y su estado. Las mediciones típicamente usadas para la estimación de estados en SEP's son:

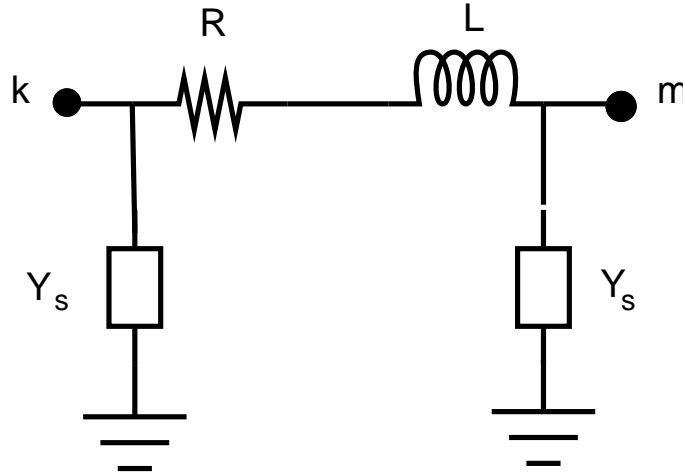


Figura 2.1: Circuito  $\pi$  de una línea de transmisión que conecta los nodos  $k$  y  $m$

1. Inyección de potencia nodal activa y reactiva (potencia de nodo),  $P_k$  y  $Q_k$ .
2. Flujo de potencia activa y reactiva en las ramas de la red (potencia de línea),  $P_{km}$  y  $Q_{km}$
3. Magnitud de voltaje nodal,  $V_k$ .

Con el fin de obtener las expresiones matemáticas que relacionan los fasores de voltaje en los buses con las mediciones, se lleva a cabo un análisis por el método de nodos, que se presenta en el Apéndice A de este trabajo. En este punto basta con mencionar que las cantidades medidas no sólo incluyen a parte del estado del sistema (magnitud y ángulo de voltaje en algunos de los buses), sino también se pueden considerar mediciones de potencia (como las mencionadas anteriormente) y de corrientes, lo que tiene como consecuencia que se tengan a disposición más mediciones que variables de estado para llevar a cabo la estimación.

Las ecuaciones resultantes del análisis por el método de nodos, usando la ley de corrientes de Kirchoff, para los tipos de mediciones usadas típicamente en la estimación de estados en SEP's son:

- Flujos de potencia activa y reactiva del bus  $k$  al bus  $m$

$$P_{km} = V_k^2 (g_{sk} + g_{km}) - V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \quad (2.1)$$

$$Q_{km} = -V_k^2 (b_{sk} + b_{km}) - V_k V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.2)$$



- Inyecciones de potencia activa y reactiva al bus  $k$

$$P_k = V_k \sum_{m \in N_i} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (2.3)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in N_i} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2.4)$$

Esto significa que las inyecciones de potencia activa y reactiva al bus  $k$  es el resultado de la suma de las potencias que están fluyendo a través de cada componente de transmisión conectado al nodo  $k$ , es decir

$$P_k = \sum_{m \in N_i} P_{km} \quad (2.5)$$

$$Q_k = \sum_{m \in N_i} Q_{km} \quad (2.6)$$

- Voltaje nodal Cuando se tiene una medición de voltaje, la ecuación correspondiente es únicamente la magnitud de voltaje del nodo en cuestión, es decir

$$V_k = V_k \quad (2.7)$$

Dichas ecuaciones se encuentran completamente definidas en el Apéndice A.

Con base en lo anterior, el modelo matemático resultante, considerando que los datos de las mediciones que se reciben son perfectos, puede escribirse

$$z = h(x) \quad (2.8)$$

donde

$z$  es el vector de mediciones,

$x$  es el vector de variables de estado del sistema,

$h(\cdot)$  es la relación matemática entre las mediciones y las variables de estado.

Sin embargo, si se consideran pequeños errores en los datos de las mediciones recibidas, debidos, por ejemplo, a la precisión finita de los dispositivos de medición o al medio de comunicación, la relación entre lo que se mide y el estado de un SEP se expresa como

$$z = h(x) + \eta$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{me} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_{me}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{me} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde

$n$  es el número de estados a estimar

$me$  es el número de mediciones usadas para la estimación del estado

$\eta$  es el vector de error de las mediciones

$h_i(x)$  es una función, generalmente no lineal, que expresa las cantidades medidas,  $z_i$ , en términos de las variables de estado, que conforman el vector  $x$ . Es determinada por medio de las leyes de Kirchoff y la matriz de admitancias  $Y$  del sistema.

Un SEP realmente no se encuentra en un verdadero estado estacionario (estático), por ejemplo las cargas siempre están cambiando, o la entrada y salida de línea de generadores y líneas de transmisión cambian el estado de la red. Sin embargo, es razonable considerar que un SEP se encuentre en un estado estacionario, con un punto de operación determinado, por un intervalo de tiempo, debido a que, cuando un SEP se encuentra en un estado de operación normal, la variación de sus condiciones de operación es lenta. Entonces se puede linealizar el sistema (2.8) al rededor del punto de operación.

Expandiendo el lado derecho de la ecuación (2.8) en series de Taylor y despreciando los términos de mayor orden, porque se asume que  $(x - x_0)$  es pequeño, se tiene

$$z = h(x_0) + \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (2.10)$$

Se define  $x_0$  igual al perfil de voltaje plano, donde todos los voltajes de los buses del sistema se asumen con un valor de 1.0 en por unidad y en fase entre ellos, ya que es el punto de operación que se trata de mantener en un SEP que opera en condiciones normales. Entonces nuestro sistema linealizado queda de la forma

$$z = Hx + c \quad (2.11)$$

donde

$H = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$  es conocido como el Jacobiano de mediciones,

$c$  es un vector de términos independientes que proviene de  $h(x_0)$

### 2.1.1. El Jacobiano de mediciones, $H$

La estructura del Jacobiano de mediciones  $H$ , considerando las mediciones que típicamente se emplean para realizar la estimación de estados en un SEP, es la siguiente

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_k}{\partial \theta} & \frac{\partial P_k}{\partial V} \\ \frac{\partial P_{km}}{\partial \theta} & \frac{\partial P_{km}}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_k}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_{km}}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_{km}}{\partial V} \\ 0 & \frac{\partial V_k}{\partial V} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A continuación se presentan las expresiones para cada entrada de la matriz (2.12).

- Elementos correspondientes a las mediciones de inyección de potencia activa nodal. De la expresión (2.3) y bajo la consideración de que  $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} &= \sum_{m=1}^N V_k V_m (-G_{km} \sin \theta_{km} + B_{km} \cos \theta_{km}) - V_k^2 B_{kk} \\ \frac{\partial P_k}{\partial \theta_m} &= V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ \frac{\partial P_k}{\partial V_k} &= \sum_{m=1}^N V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) - V_k G_{kk} \\ \frac{\partial P_k}{\partial V_m} &= V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \end{aligned}$$

- Elementos que corresponden a las mediciones de inyección de potencia reactiva nodal. De la expresión (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} &= \sum_{m=1}^N V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) - V_k^2 G_{kk} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_m} &= V_k V_m (-G_{km} \cos \theta_{km} - B_{km} \sin \theta_{km}) \\ \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} &= \sum_{m=1}^N V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) - V_k B_{kk} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} &= V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned}$$

- Elementos correspondientes a las mediciones de flujo de potencia activa. De la expresión (2.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{km}}{\partial \theta_k} &= V_k V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \\
\frac{\partial P_{km}}{\partial \theta_m} &= -V_k V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \\
\frac{\partial P_{km}}{\partial V_k} &= -V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) + 2V_k (g_{km} + g_{sk}) \\
\frac{\partial P_{km}}{\partial V_m} &= -V_k (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km})
\end{aligned}$$

- Elementos correspondientes a las mediciones de flujo de potencia reactiva. De la expresión (2.2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{km}}{\partial \theta_k} &= -V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \\
\frac{\partial Q_{km}}{\partial \theta_m} &= V_k V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \\
\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_k} &= -V_m (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) - 2V_k (b_{km} + b_{sk}) \\
\frac{\partial Q_{km}}{\partial V_m} &= -V_k (g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km})
\end{aligned}$$

- Elementos correspondientes a las mediciones de magnitudes de voltaje. De la expresión (2.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_k}{\partial \theta_k} &= 0 \\
\frac{\partial V_k}{\partial \theta_m} &= 0 \\
\frac{\partial V_k}{\partial V_k} &= 1 \\
\frac{\partial V_k}{\partial V_m} &= 0
\end{aligned}$$

## 2.2. Existencia de la solución

Se observa de la ecuación (2.11), que el problema de estimación de estados en un SEP se puede ver como el de resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de gran escala.

*Definición 2.2.1* Sea  $Ax = a$  un sistema de ecuaciones lineales, si todos sus términos independientes ( $a=0$ ) son nulos se dice que es homogéneo, de lo contrario es llamado sistema de ecuaciones no homogéneo.

Como en el caso de la ecuación (2.11)  $z \neq 0$ , este sistema es no homogéneo [Bronshtein et al., 2007].

*Definición 2.2.2* Un sistema es consistente cuando existe por lo menos un vector  $x = \alpha$  tal que  $z = Hx + c$  se satisface.

*Definición 2.2.3* Si  $x$  es el vector que satisface todas las ecuaciones lineales del sistema

$$z = Hx + c$$

se dice que  $x$  es la solución del sistema de ecuaciones lineales.

La existencia y unicidad de la solución depende del rango de la matriz aumentada  $M = [H, z]$ . Un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo tiene al menos una solución si el  $\text{rango}(H) = \text{rango}(M)$ , es más

1. si el rango,  $r$ , de  $H$  es igual a  $n$  el sistema tiene una única solución
2. para  $r < n$  el sistema tiene infinidad de soluciones.

Para la estimación de estados en un SEP se tiene el caso en que el número de mediciones,  $m$ , es mayor al número de variables de estado a estimar,  $n$ , lo que genera un conjunto de ecuaciones linealmente independientes de rango  $r$ , donde puede pasar que  $r < n$ , y por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales que representa al sistema tiene una infinidad de soluciones, por lo que se necesita un criterio para decidir cuál de esas soluciones es la mejor para nuestro problema, la respuesta a esa pregunta se obtiene usando técnicas de optimización.

### 2.3. Optimización

Como se dijo en la introducción, el problema de la estimación del estado en un SEP se puede ver como un problema de optimización que tiene como dificultad la dimensión del sistema, en el caso de que no se tenga una única solución del sistema (2.11).

La optimización surge como respuesta a la necesidad de dar solución a problemas de toma de decisiones en sistemas. Con el problema de la toma de decisiones surge el concepto de la mejor, u óptima, decisión.

Dentro de una clasificación de los problemas de optimización, que se basa en el rol de la toma de decisiones, se encuentran el problema de estimación. Los problemas de estimación son realmente una clase especial de problemas de aproximación, que están motivados por el deseo de aproximar una entidad matemática general, como puede ser una función, a una de forma más simple y especificada [Luenberger, 1968].

Una estimación del estado de un SEP coincide con el vector más parecido a  $x$ , llamado  $\hat{x}$ , que resuelva la ecuación  $z = Hx + \eta$ .

El problema de optimización considerado es el: Problema de norma mínima. Dado un vector  $x$  en un espacio pre-Hilbert,  $X$ , y un subespacio  $M$  en  $X$ , encontrar el vector  $m \in M$  más cercano a  $x$  en el sentido de que minimice  $\|x - m\|$ . Por supuesto, si  $x$  se encuentra en  $M$ , la solución es trivial. Sin embargo, en general, se deben de contestar tres preguntas importantes para poder obtener una solución completa al problema. Primera, ¿existe un vector  $m \in M$  que minimice  $\|x - m\|$ , o no existe un vector  $m$  que sea al menos tan bueno como todos los demás? Segunda, ¿la solución es única? Y tercera, ¿cómo caracterizar las soluciones?

El teorema de la proyección es uno de los más simples y elegantes resultados de la teoría de la optimización que contesta esas preguntas. En un espacio Euclideo tridimensional ordinario, afirma que la línea más corta entre un punto y un plano es proporcionada por la perpendicular del punto al plano. En su forma generalizada, este principio de optimización forma la base de toda aproximación por mínimos cuadrados, control y procedimientos de estimación [Luenberger, 1968].

**Teorema 2.3.1 (Teorema de la proyección clásica)** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $M$  un subespacio cerrado de  $H$ . Correspondiente a cualquier vector  $x \in H$ , existe un vector único  $m_0 \in M$ , tal que  $\|x - m_0\| \leq \|x - m\|$  para todo  $m \in M$ . Aún más, una condición necesaria y suficiente para que  $m_0 \in M$  sea el vector único minimizante es que  $x - m_0$  sea ortogonal a  $M$ .*

Un área de aplicación del Teorema 2.3.1 es la estimación estática. Los problemas de estimación son resueltos mediante la aplicación del teorema de la proyección, lo que lleva al desarrollo de enfoques de solución como el de mínimos cuadrados [Luenberger, 1968].

## 2.4. Métodos de estimación

### 2.4.1. Mínimos Cuadrados Ponderados

Una forma de resolver el problema de obtener el mejor estimado es utilizando un estimador por mínimos cuadrados ponderados, para lo cual se hacen las siguientes consideraciones con respecto a las propiedades estadísticas del error de medición

- Los errores de medición son variables aleatorias gaussianas independientes con media cero, i.e.  $E[\eta_i] = 0$ ;  $i = 1, \dots, m$ , y varianzas respectivas  $\sigma_i^2$ . La suposición de una media igual a cero implica que el error en cada medición tiene igual probabilidad de tomar un valor positivo o negativo de la magnitud dada. Además, el que los errores de las mediciones sean

independientes,  $\mathbb{E}[\eta_i \eta_j] = 0$  para  $i \neq j$ , tiene como consecuencia que su covarianza

$$\text{cov}(\eta) = \mathbb{E}[\eta \eta^T] = R \quad (2.13)$$

sea una matriz diagonal con elementos correspondientes a la varianza  $\mathbb{E}[\eta_i^2] = \sigma_i^2$ .

Si se despeja el error de medición de la Ecuación (2.9) tenemos

$$\eta = z - h(x)$$

y la función objetivo a minimizar es la suma ponderada de los cuadrados de los residuos de las mediciones, que es lo que se desea minimizar

$$J(x) = \sum_{i=1}^m (z_i - h(x))^2 / R_{ii} \quad (2.14)$$

o en su forma matricial

$$J(x) = [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)] \quad (2.15)$$

con

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sigma_2^2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}$$

Entonces, se minimiza la función de la Ecuación (2.15); lo que significa que en su mínimo debe de cumplir la primera condición de optimalidad, que se expresa como:

$$g(x) = \frac{\partial J(x)}{\partial x} = -H^T(x) R^{-1} [z - h(x)] = 0 \quad (2.16)$$

donde  $H^T$  es la traspuesta del jacobiano de mediciones.

El siguiente paso es expandir la función  $g(x)$  en series de Taylor alrededor del vector de estados  $x^k$

$$g(x) = g(x^k) + \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x^k} (x - x^k) + \dots = 0 \quad (2.17)$$

despreciando los términos de mayor orden se obtiene un método recursivo conocido como el método de Gauss-Newton

$$x^{k+1} = x^k + [G(x^k)]^{-1} g(x^k) \quad (2.18)$$

donde

$k$  es el índice de la iteración en la que se encuentra el método

$x^k$  es la solución del método en la iteración  $k$

$$G(x^k) = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x^k}$$

Si  $G(x)$  es dispersa, positiva definida y simétrica, nos dice que el sistema es observable.

**Definición 2.4.1 (Matriz dispersa [de la Fuente O'Connor, 1997])** *Una matriz dispersa es una matriz de gran tamaño en la que la mayor parte de los elementos que la conforman son cero.*

Para verificar si una matriz de dimensiones  $n \times n$  es dispersa un criterio aceptado es: si el número de elementos no nulos que la conforman es  $n^{\gamma+1}$ , donde  $\gamma < 1$ . Valores típicos de este parámetro suelen ser: 0.2 para problemas de análisis de sistemas eléctricos de generación y transporte de energía.

## 2.4.2. Propuestas basadas en subsistemas

Una idea propuesta para la solución del problema de estimación, que se usa en particular en sistemas de gran dimensión, es la de dividir el sistema en subsistemas más pequeños, también llamados áreas. Cada subsistema tiene un centro de control y en estos centros existen monitores que se encargan de recibir la información de los sensores en ese subsistema. Esta idea ha sido explorada por varios autores (véase por ejemplo [Conejo et al., 2007]). Aquí se exploran dos propuestas presentadas en [Pasqualetti et al., 2011] donde se considera que los centros de control cooperan entre sí para determinar el estimado de mínima varianza del estado. En la primera propuesta se emplea un modo incremental de cooperación entre los centros de control, y en la segunda se considera una interacción *difusiva* (así llamada por los autores) entre ellos; Ambas propuestas requieren que cada centro de control conozca solamente las mediciones y la estructura de su propio subsistema.

Para iniciar, se supone que el sistema es de la forma

$$z = Hx + \eta \tag{2.19}$$

con

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

donde  $m$  igual al número de monitores.



Además la matriz de covarianza de las mediciones,  $R$ , ver ecuación (2.13), también queda dividida

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

### Propuesta 1. Solución incremental

Esta propuesta requiere que el vector de mediciones pertenezca a la imagen del jacobiano de mediciones. Esto con el fin de que el sistema (2.19) sea consistente y exista la solución. Aquí conviene presentar la siguiente definición

**Definición 2.4.2 (Imagen de un matriz [Grossman and Farah, 1988])** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$ . Entonces la **imagen** de  $A$ , denotada por  $\text{Im}(A)$ , está dada por

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ para alguna } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Una vez que se ha garantizado lo anterior, se utiliza de manera apropiada el teorema de la proyección para dar solución al el problema de norma mínima (Sección 2.3).

La solución propuesta se presenta en la forma del siguiente algoritmo, también ver la Figura 2.2.

---

**Requiere:**  $[z_1^T \dots z_m^T]^T \in \text{Im} \left( [H_1^T \dots H_m^T]^T \right)$

**Inicio**

**Entradas:**  $H_i, z_i;$

**si**  $i = 1$

**entonces**

**a. Condiciones iniciales:**  $\hat{x}_0 := 0, K_0 := I_n;$

**de lo contrario**

**b. Recibir:**  $\hat{x}_{i-1}$  y  $K_{i-1}$  del monitor  $i - 1;$

**fin de la condición**

**c.**  $\hat{x}_i := \hat{x}_{i-1} + K_{i-1} (H_i K_{i-1})^\dagger (z_i - H_i \hat{x}_{i-1});$

$K_i := \text{Basis}((K_{i-1} \text{Ker}(H_i K_{i-1})));$

**si**  $i < m$

**d. Transmitir:**  $\hat{x}_i$  y  $K_i$  al monitor  $i + 1$ ;

**de lo contrario**

**e. Regresar:**  $\hat{x}_m$ ;

**fin de la condición**

**Fin**

---

donde

$I_n$  es una matriz identidad de orden  $n$ ,

el símbolo  $\dagger$  denota la pseudoinversa de una matriz,

$i \in \{1, \dots, m\}$  denota el número de monitor al que pertenecen las mediciones.

### Estimación incremental

La condición de que  $z \in \text{Im}(H)$  es difícil de cumplir en la práctica debido al vector de error,  $\eta$ , ecuación (2.19). Por lo tanto el algoritmo de solución de norma mínima incremental no se puede usar directamente para computar el estimado del sistema. La solución se da al reformular el problema adecuadamente y ampliar el sistema, lo que logra que la condición se cumpla.

Recordando que  $\eta$ , es un vector aleatorio, desconocido e inmedible, con las propiedades estadísticas mencionadas en la Sección 2.4.1, se tiene que la matriz  $R$  es positiva definida y simétrica, por lo tanto existe una matriz de rango completo  $B$  tal que  $R = BB^T$ ; también se asume que el  $\ker(H) = 0$ . Entonces, el sistema se puede ampliar

$$z = \begin{bmatrix} H & \varepsilon B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

donde  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\mathbb{E}[\bar{\eta}] = 0$  y  $\mathbb{E}[\bar{\eta}\bar{\eta}^T] = \varepsilon^{-2}I$ . Véase que, debido a que  $B$  tiene rango completo, el sistema es compatible indeterminado, lo que quiere decir que  $z \in \text{Im}(\begin{bmatrix} H & \varepsilon B \end{bmatrix})$  y el  $\ker(\begin{bmatrix} H & \varepsilon B \end{bmatrix}) \neq 0$ . Entonces

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\varepsilon) \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & \varepsilon B \end{bmatrix}^\dagger z \quad (2.22)$$

y sea

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

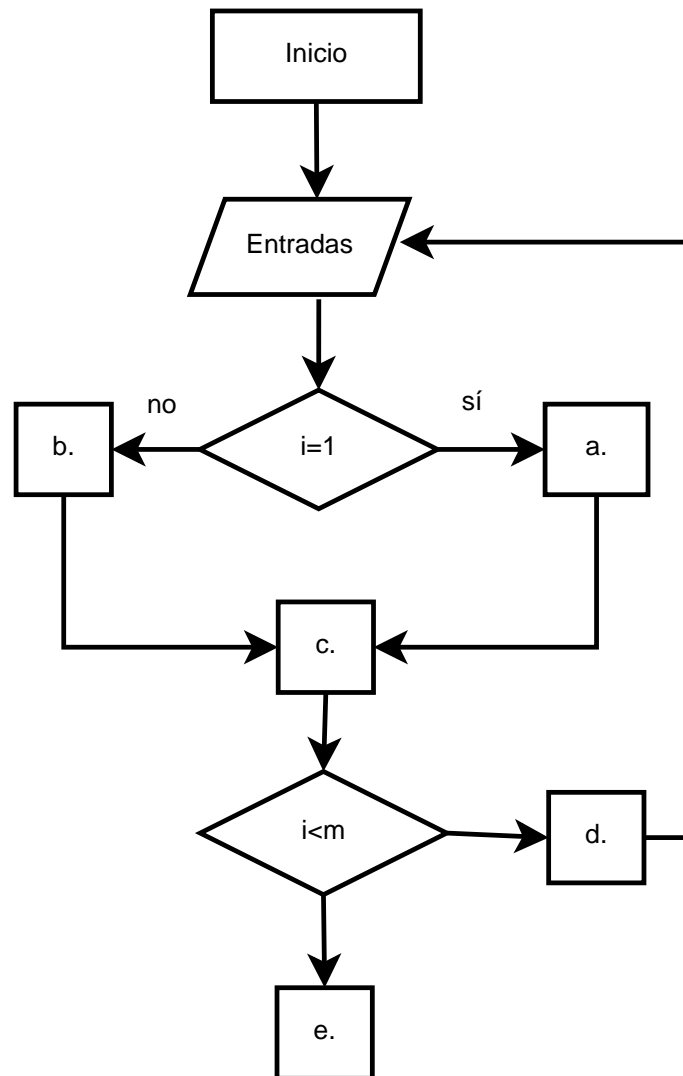


Figura 2.2: Algoritmo de solución de norma mínima incremental

con lo que se puede implementar el algoritmo, tomando como entradas  $[H \quad \varepsilon B]$  y  $z$ , y siendo  $\hat{x}_m$  la solución del estimador del estado.

Este algoritmo requiere que los monitores tengan un orden para poder transmitir el estimado del monitor  $i$  al monitor  $i + 1$ . Para no tener que cumplir con ese requerimiento que puede verse como una restricción se presentó la siguiente propuesta.

### Propuesta 2. Estimación *difusiva*

La segunda propuesta presenta un algoritmo de estimación *difusivo*, que no necesita de un orden entre los monitores, orden en el que se transmite el estimado al siguiente monitor. Solo requiere que la interconexión de los monitores esté conectada. Para entender este concepto se presentan las siguientes definiciones.

Un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, cada arista en un grafo une dos nodos distintos. Un grafo permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Más formalmente se define como:

**Definición 2.4.3 (Grafo [Bondy and Murty, 2008])** *Un grafo  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste en un conjunto  $V(G)$  de vértices y un conjunto  $E(G)$ , disjunto de  $V(G)$ , de aristas, junto con una función de incidencia  $\psi_G$  que asocia a cada arista  $G$  un par no ordenado de (no necesariamente distintos) vértices de  $G$ . Si  $e$  es una arista y  $u$  y  $v$  son vértices de tal manera que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , entonces se dice que  $e$  es una unión entre  $u$  y  $v$ , y los vértices  $u$  y  $v$  son llamados los extremos de  $e$ . Denotando el número de vértices y aristas en  $G$  como  $v(G)$  y  $e(G)$ ; estos dos parámetros básicos se llaman el orden y el tamaño de  $G$ , respectivamente.*

Cuando las aristas no tienen orientación se dice que el grafo es no dirigido, esto es:

**Definición 2.4.4 (Grafo no dirigido)** *El grafo  $G = (V(G), E(G))$  es no dirigido si para toda  $u, v \in V(G)$ :*

$$(u, v) \in E(G) \Leftrightarrow (v, u) \in E(G).$$

Un camino en un grafo representa una manera de ir de un origen a un destino recorriendo aristas en el grafo.

Un grafo no dirigido se dice que está conectado si existe un camino entre cualesquiera dos vértices.

Entonces la condición de esta propuesta se refiere a que el grafo no dirigido de interconexión de los monitores esté conectado.

Una vez que se ha explicado lo anterior se presenta el algoritmo *difusivo* propuesto para dar solución a la estimación del estado, también ver la Figura 2.3.

**Inicio****Entradas:**  $H_i, \varepsilon B_i, z_i$ ;

$$\text{a. } \hat{x}_i := [H_i \quad \varepsilon B_i]^\dagger z_i;$$

$$K_i := \text{Basis}(\ker([H_i \quad \varepsilon B_i]))$$

**b. mientras**  $K_i \neq 0$  **hacer****c. para**  $j \in N_i$  **hacer****d. Recibir:**  $\hat{x}_j$  y  $K_j$ ;

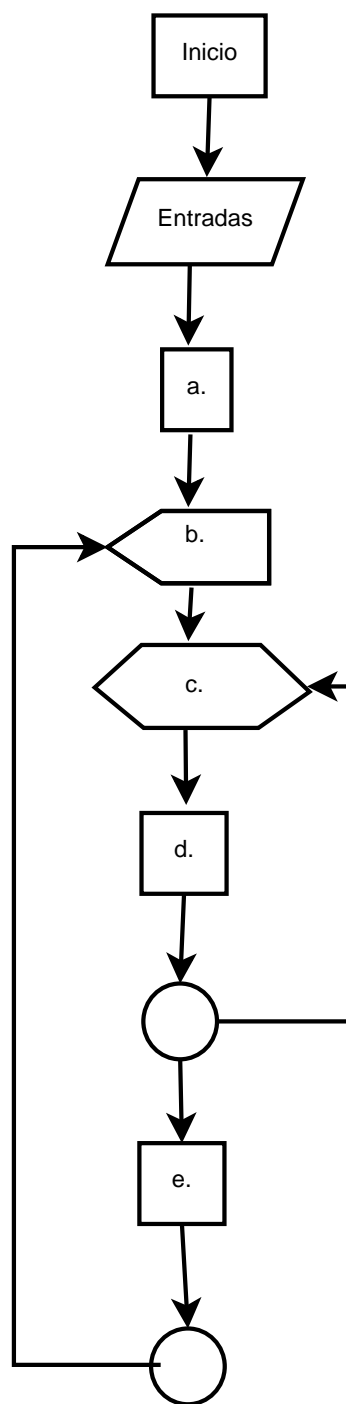
$$\hat{x}_i := \hat{x}_i + [K_i \quad 0] [-K_i \quad K_j]^\dagger (\hat{x}_i - \hat{x}_j)$$

$$K_i := \text{Basis}(Im(K_i) \cap Im(K_j))$$

**fin de la condición****e. Transmitir:**  $\hat{x}_i$  y  $K_i$ **fin de la condición****Fin**

En resumen, los dos métodos difieren en el modo de cooperación de los centros de control: el primer método implementa un modo incremental de cooperación, que implica que a los monitores de los subsistemas se les asigne un orden,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , para la comunicación de su estimado; el monitor  $i$  obtendrá su estimado y lo pasará al monitor  $i + 1$ , para que éste pueda obtener el suyo, y así hasta el monitor  $m$ , el cual obtendrá el estimado del estado del sistema global. La segunda propuesta utiliza una interacción *difusiva*, la cual no necesita del orden entre los monitores de la primera propuesta, lo que requiere es que la interconexión de los monitores esté conectada; la interacción *difusiva* consiste en que cada monitor lleva a cabo su proceso de estimación y transmite su estimado a todos los monitores vecinos (con lo que tiene comunicación directa) para que ellos obtengan su estimado, hasta cumplir con la primera condición del algoritmo.

Estas dos enfoques, propuestos recientemente, pertenecen a la categoría de estimadores de estado multiárea descentralizados. Una característica interesante es que en ambos algoritmos los monitores sólo usan las mediciones y la estructura de la matriz jacobiana de mediciones de su área para llegar al estimado del sistema global. Otra característica es, que la forma en que se comunican los monitores requiere que formen parte de un sistema que pueda compartir información local entre ellos, en este caso el estimado de cada monitor, a diferencia de otros esquemas descentralizados que asumen que las áreas sólo acceden a información de la frontera de sus vecinas.

Figura 2.3: Algoritmo de estimación del estado *difusivo*

Por lo anterior, es de nuestro interés hacer una comparación entre estas dos propuestas y el método convencional de estimación por mínimos cuadrados ponderados.

## Capítulo 3

# Casos de Estudio

Para ilustrar los esquemas de estimación de estados usados en SEP y compararlos entre ellos, en particular con las recientes propuestas presentadas en [Pasqualetti et al., 2011], en este capítulo se presentan dos ejemplos, uno con un sistema de tres buses y otro considerando un sistema de nueve buses. En ambos casos se realiza una comparación entre la estimación tomando el sistema con un área global y posteriormente tomando el sistema con más de un área. Posteriormente, con el sistema de nueve buses se reduce el número de información para la estimación y se vuelve a comparar la estimación con este nuevo conjunto de mediciones, agregando a las comparaciones conjuntos con un error en una medición.

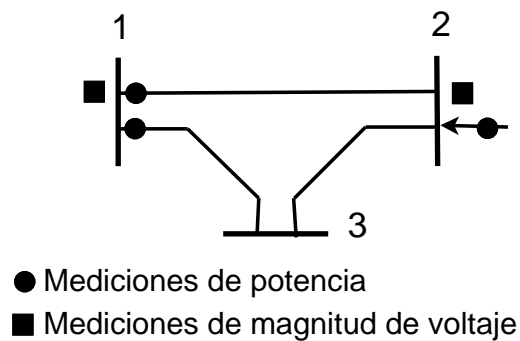


Figura 3.1: Diagrama del SEP de tres buses con mediciones [Abur and Expósito, 2004]



### 3.1. SEP de tres buses

Considere el sistema de tres buses [Abur and Expósito, 2004], Figura 3.1, con los datos presentados en la Tabla 3.1 y donde se deben estimar tres magnitudes de los fasores de voltaje y dos ángulos de los mismos.

Tabla 3.1: Datos del sistema de tres buses [Abur and Expósito, 2004]

Línea	Resistencia [pu]	Reactancia [pu]	Susceptancia total [pu]
1-2	0.01	0.03	0.0
1-3	0.02	0.05	0.0
2-3	0.03	0.08	0.0

Los valores de sus mediciones y su desviación estándar del error se dan en la Tabla 3.2

Tabla 3.2: Mediciones y desviación estándar del error de medición [Abur and Expósito, 2004]

Medición	Valor [pu]	$\sqrt{R_{ii}}$ [pu]
$P_{12}$	0.888	0.008
$P_{13}$	1.173	0.008
$P_2$	-0.501	0.010
$Q_{12}$	0.568	0.008
$Q_{13}$	0.663	0.008
$Q_2$	-0.286	0.010
$V_1$	1.006	0.004
$V_2$	0.968	0.004

En resumen, el sistema cuenta con

- tres nodos,
- estado a estimar  $x = [\theta_2 \ \theta_3 \ V_1 \ V_2 \ V_3]^T$ ,
- ocho mediciones dadas por  $z = [P_{12} \ P_{13} \ P_2 \ Q_{12} \ Q_{13} \ Q_2 \ V_1 \ V_2]^T$ .

#### 3.1.1. Estimación por mínimos cuadrados ponderados

Para la estimación por mínimos cuadrados ponderados se minimiza la ecuación (2.15), teniendo como medida de ponderación la matriz  $R$ , que para este ejemplo es

$$R = \begin{bmatrix} 0.008^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.010^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.008^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.008^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.010^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004^2 \end{bmatrix}$$

La matriz Jacobina  $H$  se expresa de la siguiente forma

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{12}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{12}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{12}}{\partial V_1} & \frac{\partial P_{12}}{\partial V_2} & \frac{\partial P_{12}}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_{13}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_{13}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_{13}}{\partial V_1} & \frac{\partial P_{13}}{\partial V_2} & \frac{\partial P_{13}}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial V_1} & \frac{\partial P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_{12}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial V_1} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_{13}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_{13}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_{13}}{\partial V_1} & \frac{\partial Q_{13}}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_{13}}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial V_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial V_1}{\partial V_1} & \frac{\partial V_1}{\partial V_2} & \frac{\partial V_1}{\partial V_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial V_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial V_2}{\partial V_1} & \frac{\partial V_2}{\partial V_2} & \frac{\partial V_2}{\partial V_3} \end{bmatrix}$$

Entonces considerando la solución por mínimos cuadrados ponderados, no iterativa, que minimiza la varianza ponderada del error de estimación [Luenberger, 1968], se tiene

$$x_{wls} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} z$$

el vector del estado del sistema que resulta de esta estimación es

$$x_{wls} = \begin{bmatrix} 1.214816801891946 \\ -2.589190098578095 \\ 0.999733079661015 \\ 0.974266920338850 \\ 0.942753127374618 \end{bmatrix}$$

Considerando la solución por mínimos cuadrados ponderados iterativa, expresada en la ecuación (2.18), el estimado se da en tres iteraciones, tomando como criterio de convergencia

$$\Delta x = x^{k+1} - x^k < 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
 x^{k=1} &= \begin{bmatrix} -1.214816801891947 \\ -2.589190098578097 \\ 0.999733079661085 \\ 0.974266920338919 \\ 0.942753127374686 \end{bmatrix} \\
 x^{k=2} &= \begin{bmatrix} -1.247536805181468 \\ -2.745877684163344 \\ 0.999630914063072 \\ 0.974157696598569 \\ 0.943888506874402 \end{bmatrix} \\
 x^{k=3} &= \begin{bmatrix} -1.247546976954521 \\ -2.745716711403646 \\ 0.999629257855364 \\ 0.974156071583298 \\ 0.943890380777907 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El criterio de convergencia se logró a la tercer iteración. Se puede ver que  $x^{k=1} = x_{wls}$  debido a que esta es la respuesta de los mínimos cuadrados ponderados sin iteraciones. Finalmente se computa las mediciones estimadas y su residuo

$$\begin{aligned}
 r &= z - h(\hat{x}) \\
 &= \begin{bmatrix} -0.004991980906213 \\ 0.001975538072815 \\ -0.005025043025367 \\ 0.009178310102284 \\ -0.004618708515175 \\ 0.011749528729334 \\ 0.006370742144636 \\ -0.006156071583298 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para llegar a los resultados iterativos se uso una descomposición por Cholesky de la matriz  $G$ , la descomposición de una matriz es usada para resolver sistemas de ecuaciones de gran escala. También se pueden usar las descomposiciones  $QR$  o  $LU$ , la Tabla 3.3 presenta una comparación de los resultados.

Como se puede observar, las tres descomposiciones arrojan resultados muy similares, y la norma de su residuo es casi igual; la cantidad de decimales reportados muestra que los resultados son muy

Tabla 3.3: Tabla comparativa de los resultados con diferentes descomposiciones

con $x^{k=0} = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]'$	Cholesky	$QR$	$LU$
Tercera iteración	1.0e-005 *	1.0e-005 *	1.0e-005 *
$\Delta\theta_2$	-0.017753093053822	-0.017753093050469	-0.017753093050697
$\Delta\theta_3$	0.280950466276353	0.280950466276309	0.280950466265506
$\Delta V_1$	-0.165620770763257	-0.165620770775016	-0.165620770773038
$\Delta V_2$	-0.162501527100944	-0.162501527098728	-0.162501527109347
$\Delta V_3$	0.187390350480754	0.187390350487875	0.187390350487032
Estado estimado			
$\theta_2$	-1.247546976954521	-1.247546976954518	-1.247546976954519
$\theta_3$	-2.745716711403646	-2.745716711403645	-2.745716711403647
$V_1$	0.999629257855364	0.999629257855364	0.999629257855364
$V_2$	0.974156071583298	0.974156071583298	0.974156071583298
$V_3$	0.943890380777907	0.943890380777907	0.943890380777907
Norma del residuo	0.019395425344842	0.019395425344843	0.019395425344843

similares si se considera que el modelo es por unidad. Las diferentes descomposiciones de la matriz  $G$  tienen ventajas y desventajas que pueden alterar los resultados para cada red, por ejemplo, la carga computacional que implican los algoritmos para obtenerlas, dependiendo de la red a analizar se deberá escoger entre alguna de estas; ver Apéndice B.

### 3.1.2. Algoritmo de solución incremental

Para este algoritmo no se necesita la matriz  $R$ , sin embargo requiere que  $z \in \text{Im}(H)$ ; considere que la imagen de  $H$  es el espacio columna de  $H$ . Entonces para saber si  $z \in \text{Im}(H)$  se debe de verificar si el sistema  $Hx = z$  sea consistente [Poole, 2006]. Como esto no se cumple en nuestro ejemplo debido a la linealización del modelo que describe al SEP y a que nuestras mediciones no son perfectas, este algoritmo no se puede aplicar. Sin embargo, para demostrar su uso se escoge como vector de estados “perfecto” el generado por la estimación por mínimos cuadrados ponderados y con la ecuación (2.8) se genera un nuevo vector de mediciones “perfectas” ( $z^p$ ), que cumplen con la condición de  $z \in \text{Im}(H)$ ; debido a que el vector fue generado de la forma antes descrita, no se hará una comparación de los resultados de este ejemplo con el anterior. Al seguir los pasos de la Figura 2.2 los resultados para distintas subdivisiones o áreas se describen a continuación:

#### Un solo monitor

Con el propósito de mostrar este algoritmo se pone como primer ejemplo el caso de un solo monitor, es decir el SEP no se divide en áreas.

Entonces el algoritmo se reduce a

**Entradas:**  $H, z^p$

**Requiere:**  $z^p \in \text{Im}(H)$       $\checkmark$

$$i = 1$$

$$\hat{x}_0 = 0 \text{ y } K_0 = I_n;$$

$$\hat{x}_1 = H^\dagger z^p$$

$i = \text{número de monitores}$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_{\text{estimado}}$$

Como en nuestro caso  $(H^T H)$  es invertible, entonces  $H^\dagger = (H^T H)^{-1} H^T$  y  $\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T z^p$ , se puede observar que el algoritmo estima el vector de estado por el método de mínimos cuadrados [Luenberger, 1968]. Y el estado estimado es

$$\hat{x}_{estimado} = \begin{bmatrix} -1.247546976954513 \\ -2.745716711403680 \\ 0.999629257855363 \\ 0.974156071583298 \\ 0.943890380777907 \end{bmatrix}$$

**Dos monitores**

Este algoritmo fue pensado para ser implementado en SEP's con más de un área. Para el sistema de 3 buses se consideraron 2 áreas

- **Monitor 1, bus 1 y 3. Monitor 2, bus 2**

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-0.0000000000000000	-1.247546976954496
$\theta_3$	-2.745716711403672	-2.745716711403672
$V_1$	0.999629257855364	0.999629257855364
$V_2$	0	0.974156071583298
$V_3$	0.943890380777907	0.943890380777907

- **Monitor 1, buses 2 y 3. Monitor 2, bus 1**

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-0.912411173279276	-1.247546976954509
$\theta_3$	-0.433605256840185	-2.745716711403678
$V_1$	1.186747574435791	0.999629257855364
$V_2$	0.974156071583298	0.974156071583298
$V_3$	0.439255848332300	0.943890380777907

- **Monitor 1, buses 1 y 2. Monitor 2, bus 3**

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.247546976954507	-1.247546976954507
$\theta_3$	-2.745716711403662	-2.745716711403662
$V_1$	0.999629257855364	0.999629257855364
$V_2$	0.974156071583298	0.974156071583298
$V_3$	0.943890380777907	0.943890380777907

Con el algoritmo incremental, a diferencia del método de mínimos cuadrados ponderados, cuando se hace una estimación con más de un área, no se necesita hacer corrección del ángulo del fasor de voltaje, ya que en cada monitor se estima el vector de estados completo, con los datos disponibles del área, lo cuál es una ventaja.

Sin embargo, como ya se dijo en la Sección 2.4.2, no es posible aplicar el algoritmo en la práctica debido a que es difícil que el sistema cumpla con la condición de que  $z \in \text{Im}(H)$ . Entonces, para aplicar el algoritmo en nuestros casos de estudio se sigue la reformulación del problema planteada en la misma Sección 2.4.2, quedando el sistema en la forma

$$z = [H \quad \varepsilon B] \begin{bmatrix} x \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

con lo que se puede implementar el algoritmo, tomando como entradas  $[H \quad \varepsilon B]$  y  $z$ . Donde  $R = BB^T$ , para obtener la matriz  $B$  se descompuso por Cholesky la matriz de covarianza de las mediciones, ver Apéndice B. El parámetro  $\varepsilon$  debe ser  $\varepsilon > 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Usando esta metodología los resultados de la estimación de estados son:

**Un solo monitor**

$$\hat{x}_{estimado} = \begin{bmatrix} -1.214816801891886 \\ -2.589190098577059 \\ 0.999733079637797 \\ 0.974266920315625 \\ 0.942753127351259 \end{bmatrix}$$

y la norma de su residuo es 0.059922578349796 si la comparamos con la norma del residuo producida por el método de WLS, es mayor.

**Dos monitores**

- **Monitor 1, bus 1 y 3. Monitor 2, bus 2**

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-0.000000000000042	-1.214816801891891
$\theta_3$	-2.600655432098327	-2.589190098577658
$V_1$	1.005999999968714	0.999733079637752
$V_2$	0	0.974266920315580
$V_3$	0.949389999968538	0.942753127351209

La norma de su residuo es 0.059922578349742

- **Monitor 1, buses 2 y 3. Monitor 2, bus 1**

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-0.928356470867913	-1.214816801891871
$\theta_3$	-0.424524624803147	-2.589190098577619
$V_1$	1.178412926179616	0.999733079637753
$V_2$	0.96799999958679	0.974266920315580
$V_3$	0.436174811456946	0.942753127351209

La norma de su residuo es 0.059922578349760

- **Monitor 1, buses 1 y 2. Monitor 2, bus 3**

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.200919538593890	-1.214816801891882
$\theta_3$	-2.489936427331782	-2.589190098577653
$V_1$	0.999972055865009	0.999733079637752
$V_2$	0.974027944088370	0.974266920315580
$V_3$	0.939792842290762	0.942753127351209

La norma de su residuo es 0.059922578349742

Se puede ver que la norma del residuo en todos los casos es muy semejante, sin embargo, es más pequeño el residuo cuando se hace la estimación con dos áreas con este algoritmo.

### 3.1.3. Algoritmo *difusivo*

Con el algoritmo anterior se necesita que los monitores estén ordenados, para que el monitor  $i$  transmita al siguiente monitor  $i + 1$ , con este algoritmo eso no es necesario. Los resultados de la estimación con este algoritmo se muestran a continuación

- **Monitor 1, bus 1 y 3. Monitor 2, bus 2.** El monitor 1 entrega su estimado al monitor 2

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.214816801892241	-1.214816801888890
$\theta_3$	-2.589190098578124	-2.589190098568898
$V_1$	0.999733079638179	0.999733079638604
$V_2$	0.974266920316195	0.974266920316341
$V_3$	0.942753127351784	0.942753127351379



El monitor 2 transmite su estimado al monitor 1

	$x_2$	$x_1 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.214816801889583	-1.214816801889583
$\theta_3$	-2.589190098565432	-2.589190098572338
$V_1$	0.999733079637365	0.999733079637796
$V_2$	0.974266920315352	0.974266920315352
$V_3$	0.942753127351495	0.942753127351150

- **Monitor 1, buses 2 y 3. Monitor 2, bus 1.** Monitor 1 transmite su estimado al monitor 2

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.214816801884934	-1.214816801884931
$\theta_3$	-2.589190098596418	-2.589190098599663
$V_1$	0.999733079639783	0.999733079638641
$V_2$	0.974266920316137	0.974266920316675
$V_3$	0.942753127350090	0.942753127351573

El monitor 2 transmite su estimado al monitor 1

	$x_2$	$x_1 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.214816801896541	-1.214816801884931
$\theta_3$	-2.589190098621229	-2.589190098599663
$V_1$	0.999733079638973	0.999733079638641
$V_2$	0.974266920316210	0.974266920316675
$V_3$	0.942753127351758	0.942753127351573

- **Monitor 1, buses 1 y 2. Monitor 2, bus 3.** Monitor uno transmite su estimado a monitor dos

	$x_1$	$x_2 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.214816801891512	-1.214816801891485
$\theta_3$	-2.589190098564798	-2.589190098570898
$V_1$	0.999733079637447	0.999733079637483
$V_2$	0.974266920315323	0.974266920315323
$V_3$	0.942753127351057	0.942753127351021

El monitor 2 transmite su estimado al monitor 1

	$x_2$	$x_1 = x_{estimada}$
$\theta_2$	-1.214816801904641	-1.214816801892628
$\theta_3$	-2.589190098577885	-2.589190098574635
$V_1$	0.999733079638302	0.999733079638200
$V_2$	0.974266920314388	0.974266920316059
$V_3$	0.942753127351701	0.942753127351918

Resumiendo para el caso del SEP con tres buses se observa que el método de mínimos cuadrados ponderados iterativo es mejor que el no iterativo, porque ambos empiezan con un vector,  $x^0$ , que se supone cercano a la solución, pero al hacer las iteraciones el método lleva a una convergencia de la solución al valor óptimo. Se usaron diferentes descomposiciones de la matriz  $G$  para evitar el cálculo de la inversa de la misma, arrojando resultados muy similares las factorizaciones usadas. Al comparar el enfoque de solución por mínimos cuadrados ponderados contra el algoritmo de solución incremental se obtiene que este da un resultado más óptimo que el primero, basados en la norma de su residuo. Sin embargo, al comparar la solución incremental por el enfoque global contra el multiárea, éste da una solución con una norma del residuo menor. Por último el algoritmo de solución incremental y el *difusivo* solo difieren en el modo de cooperación de los centro de control, por lo que los resultados arrojados por ambos son muy similares.

## 3.2. SEP de nueve buses

Considere el sistema de nueve buses [Anderson et al., 1977], Figura 3.2, con los datos de la Tabla 3.4 y donde se deben estimar las nueve magnitudes de los fasores de voltaje y ocho ángulos de los mismos.

Los valores tomados como mediciones son obtenidos de la Tabla 3.5 y con las ecuaciones de flujos de potencia de línea.

En resumen el sistema cuenta con:

- nueve nodos,
- 63 mediciones típicas posibles,
- estado a estimar  $x = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7 \ \theta_8 \ \theta_9 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5 \ V_6 \ V_7 \ V_8 \ V_9]^T$ .

Tabla 3.4: Datos del sistema de nueve buses [Anderson et al., 1977]

Línea	Resistencia [pu]	Reactancia [pu]	Susceptancia (Ys) [pu]
1-4	0	0.0576	0
2-7	0	0.0625	0
3-9	0	0.0586	0
4-5	0.01	0.085	0.088
4-6	0.017	0.092	0.079
5-7	0.032	0.161	0.153
6-9	0.039	0.17	0.179
7-8	0.0085	0.072	0.0745
8-9	0.0119	0.1008	0.1045

### 3.2.1. Estimación por: mínimos cuadrados ponderados y algoritmo de solución incremental

Para dar solución al problema de estimación del estado para el caso del SEP de nueve buses por el método de **mínimos cuadrados ponderados** se minimiza la ecuación (2.15), y se forma la matriz  $R$  con los datos de la tabla 3.6.

Posteriormente se construye la matriz  $H$ , tomando la estructura presentada en la Sección 2.1.1, para obtener la solución dada en la ecuación (2.18), de manera similar a como se hizo en el caso de tres buses.

Para este caso primero se tomaron 43 mediciones, se llega a la estimación en tres iteraciones, considerando como criterio de convergencia  $\Delta x = x^{k+1} - x^k < 10^{-4}$  y usando una descomposición por Cholesky de la matriz  $G$ . El vector de estado resultante es:

$$\begin{aligned}
 x_{estimada} &= [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7 \ \theta_8 \ \theta_9 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5 \ V_6 \ V_7 \ V_8 \ V_9]^T \\
 &= [9.28001 \ 4.66475 \ -2.21679 \ -3.98881 \ -3.6874 \ 3.7197 \ 0.727535 \ 1.96672 \\
 &\quad 1.04 \ 1.025 \ 1.025 \ 1.02579 \ 0.995631 \ 1.01265 \ 1.02577 \ 1.01588 \ 1.03235]^T
 \end{aligned}$$

y la norma de su residuo es  $1.524433949331624 \times 10^{-4}$ .

Luego se tomaron 20 mediciones, y la norma del residuo fue de  $2.702874318192858 \times 10^{-6}$ . Lo que demuestra que disminuir el número de mediciones no afecta la precisión de la estimación. La reducción del número de mediciones se hace con base en un análisis del rango de la matriz  $H$ , determinando que filas de esta son linealmente dependientes y eliminando la medición asociada estas.

Tabla 3.5: Datos obtenidos de una corrida de flujos de potencia [Sauer and Pai, 1998]

Bus y su tipo	Voltaje [pu]	$P_G$ [pu]	$Q_G$ [pu]	$-P_L$ [pu]	$-Q_L$ [pu]
1 (slack)	1.04	0.716	0.27	-	-
2 (P-V)	1.025 $\angle$ 9.3°	1.63	0.67	-	-
3 (P-V)	1.025 $\angle$ 4.7°	0.85	-0.109	-	-
4 (P-Q)	1.026 $\angle$ - 2.2°	-	-	-	-
5 (P-Q)	0.996 $\angle$ - 4.0°	-	-	1.25	0.5
6 (P-Q)	1.013 $\angle$ - 3.7°	-	-	0.9	0.3
7 (P-Q)	1.026 $\angle$ 3.7°	-	-	-	-
8 (P-Q)	1.016 $\angle$ 0.7°	-	-	1.00	0.35
9 (P-Q)	1.032 $\angle$ 2.0°	-	-	-	-

Tabla 3.6: Desviación estándar de las mediciones

Tipo de Medición	Desviación Estándar
Magnitud de voltaje	0.004
Flujo de potencia de línea	0.008
Potencia de nodo	0.010

Las mediciones usadas fueron

$$z = [P_{57} P_{69} P_1 P_2 P_3 P_5 P_6 P_8 Q_1 Q_2 Q_3 Q_5 Q_6 Q_8 V_1 V_2 V_3 V_4 V_7 V_9]^T$$

Para el mismo caso de 20 mediciones se implementó el **algoritmo incremental** con dos áreas, la del monitor uno que incluye los buses 2, 3, 5, 6, 7, 8 y 9; y la del monitor dos con los buses 1 y 4. La norma del residuo de la estimación fue de 0.510819330545079.

De este caso la matriz  $H$  tiene un rango de 17, buscando las mediciones mínimas necesarias para que el problema de estimación tenga solución se toman 17 mediciones, de tal forma que el rango de la matriz  $H$  continúe siendo de 17. Entonces del vector  $z$  de 20 mediciones se quitan 3, cuya  $\frac{\partial h_i(x)}{\partial x}$  asociada tenga dependencia lineal con otra fila de la matriz  $H$ .

La selección de cuáles mediciones quitar se llevo a cabo de la siguiente manera. A la matriz  $H$  se le aplicó una descomposición por Dulmage-Mendelsohn, donde se distinguieron dos conjuntos, Figura 3.3, siendo el nuevo orden del vector de estado y del vector de mediciones

$$x_{per} = [\theta_2 \theta_3 \theta_8 V_8 \theta_5 \theta_7 V_5 \theta_6 \theta_9 V_6 \theta_4 V_1 V_2 V_3 V_4 V_7 V_9]^T$$

$$z = [P_2 P_3 Q_8 P_8 Q_5 P_{57} P_5 P_{69} P_6 Q_6 P_1 Q_1 Q_2 Q_3 V_4 V_7 V_9 V_1 V_2 V_3]^T$$

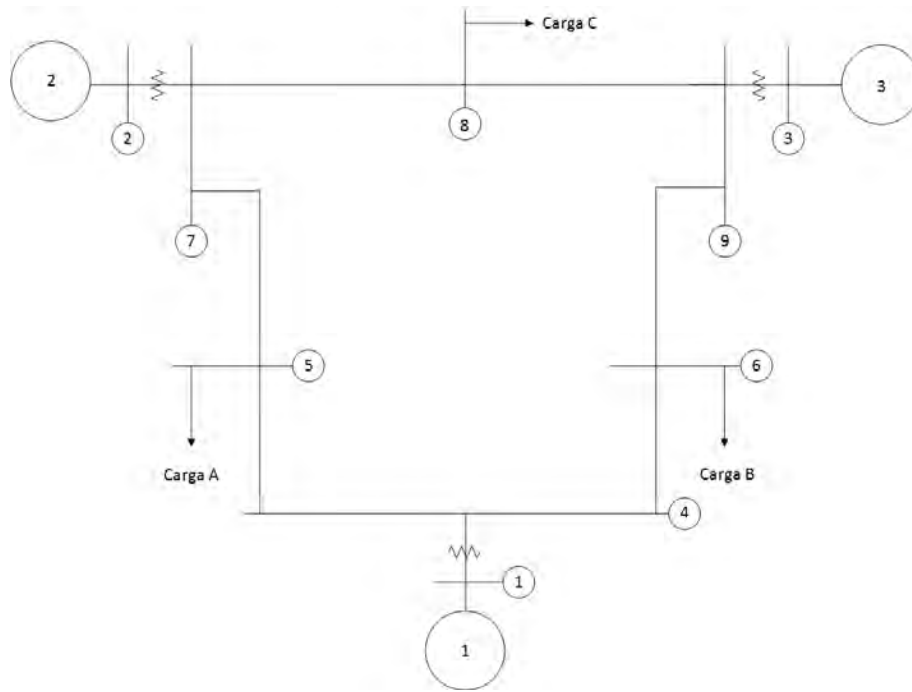


Figura 3.2: Diagrama del SEP de nueve buses

La descomposición por Dulmage-Mendelsohn es una permutación de una matriz  $A$  que reduce el trabajo necesario para las factorizaciones LU y QR y proporciona una caracterización precisa de matrices de rango estructuralmente deficiente; es una herramienta útil para muchos algoritmos y teoremas de matrices dispersas. Se compone de dos pasos principales: una permutación para obtener una diagonal libre de ceros y otro paso para transformar la matriz en una forma triangular de bloque [Davis, 2006]. Lleva el nombre de A. L. Dulmage y Nathan Mendelsohn, quienes la publicaron en 1958.

Suponiendo que cada conjunto pertenecía a un monitor, se asignaron las mediciones correspondientes a dichos conjuntos a dos monitores, lo que generó una matriz  $H_1$  correspondiente al monitor 1 y una matriz  $H_2$  que corresponde al monitor 2; haciendo un análisis de rango a las matrices  $H_i$  de cada monitor, se encontró que el rango de la matriz  $H_1$  es de 7, y el de  $H_2$  es de 10. Siendo la matriz  $H_1$  de dimensión  $10 \times 17$  se observa que tiene tres filas linealmente dependientes y estas pueden ser eliminadas.

Con el nuevo conjunto de mediciones,

$$z = [P_{57} P_{69} P_1 P_2 P_3 P_5 P_6 P_8 Q_5 Q_6 Q_8 V_1 V_2 V_3 V_4 V_7 V_9]^T,$$

se realizaron las siguientes estimaciones.

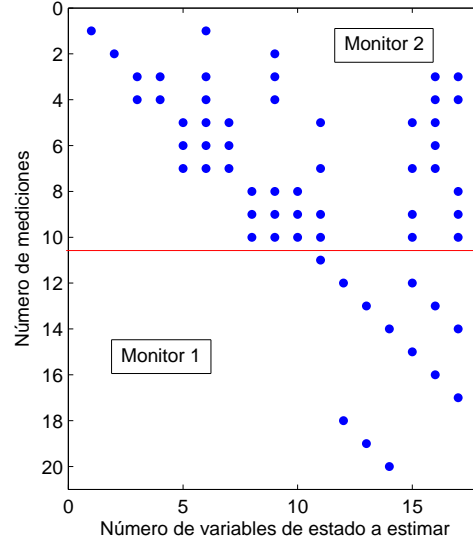


Figura 3.3: Reconfiguración de la matriz  $H$  después de la descomposición por Dulmage-Mendelsohn

- Por **mínimos cuadrados ponderados** se obtuvo una estimación cuya norma del residuo fue de  $4.458557793271244 \times 10^{-9}$ .
- Con el **algoritmo de solución incremental**.
  - Estimación por áreas.

Para determinar las áreas se realizó una descomposición por Dulmage-Mendelsohn del Jacobiano de mediciones  $H$  quedando dos áreas por estimar con las siguientes mediciones

$$z_1 = [P_2 \ P_3 \ Q_8 \ P_8 \ Q_5 \ P_{57} \ P_5 \ P_{69} \ P_6 \ Q_6]^T$$

$$z_2 = [P_1 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_7 \ V_9]^T$$

y el nuevo orden de las variables de nuestro estado queda

$$x_{per} = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_8 \ V_8 \ \theta_5 \ \theta_7 \ V_5 \ \theta_6 \ \theta_9 \ V_6 \ \theta_4 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_7 \ V_9]^T$$

Se estima el estado  $x$  usando las mediciones  $z_1$  y  $z_2$ . Posteriormente se introduce un error del 10% en las mediciones  $P_2$ ,  $P_{57}$  (que corresponden al área 1),  $P_1$  y  $V_4$  (que corresponden al área 2). Los resultados se muestran en la figura (3.4) donde se grafica el error relativo de los valores del estado.

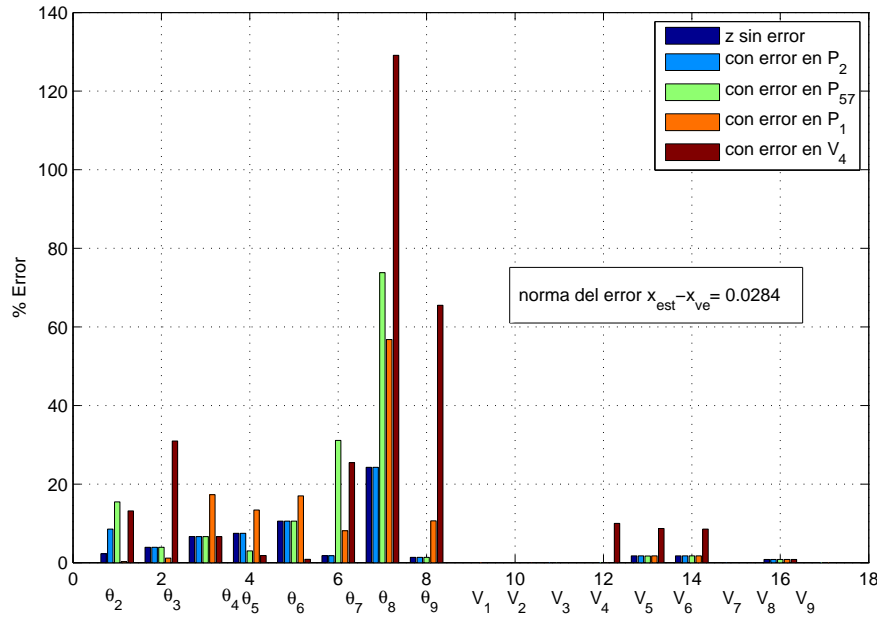


Figura 3.4: Valores del error relativo del estado estimado para un sistema dividido en dos áreas, sin error y con error en una medición.

- Estimación Global.

Se estima el estado  $x$  usando las mediciones  $z$ . Posteriormente se introduce un error del 10% en las mismas mediciones que en la sección anterior. Los resultados se muestran en la figura (3.5) donde se grafica el error relativo de los valores del estado.

Ahora se cambian dos mediciones del conjunto anterior, preservando el tipo de medición, el número de ellas y el rango de la matriz  $H$ .

Mediciones:

$$z = [P_{45} P_{46} P_1 P_2 P_3 P_5 P_6 P_8 Q_5 Q_6 Q_8 V_1 V_2 V_3 V_4 V_7 V_9]^T$$

Con este nuevo conjunto de mediciones se realizaron las siguientes estimaciones.

- Por **mínimos cuadrados ponderados** se obtuvo una estimación cuya norma del residuo fue de  $4.845072176674990 \times 10^{-9}$ .
- Con el **algoritmo de solución incremental**.
  - Estimación por áreas.

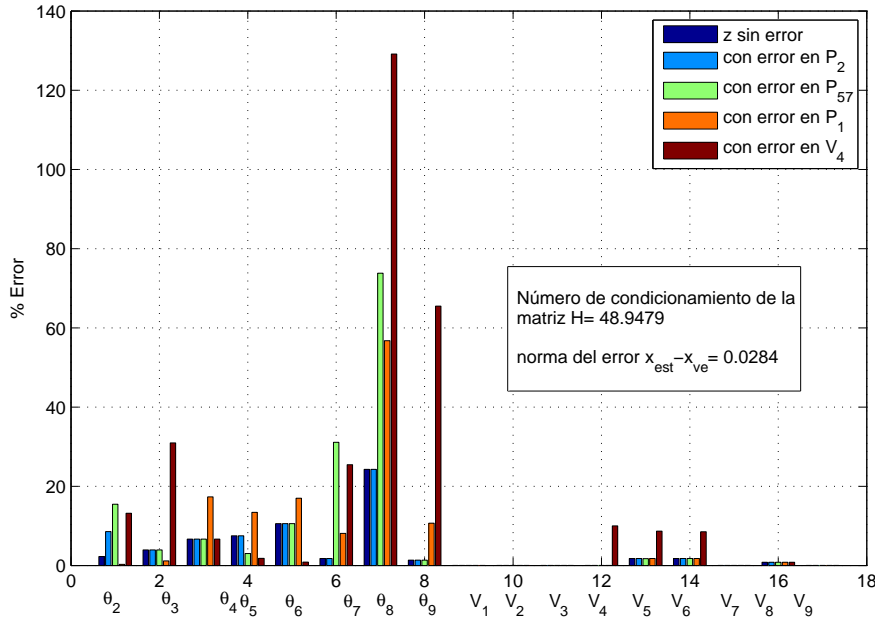


Figura 3.5: Valores del error relativo del estado estimado para un sistema sin división, sin error y con error en una medición.

Para determinar las áreas se realizó una descomposición por Dulmage-Mendelsohn del Jacobiano de mediciones  $H$  quedando dos áreas por estimar con las siguientes mediciones

$$z_1 = [P_2 \ P_3 \ Q_8 \ P_8 \ P_{45} \ P_5 \ Q_5 \ P_{46} \ P_6 \ Q_6]^T$$

$$z_2 = [P_1 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_7 \ V_9]^T$$

y el nuevo orden de las variables de nuestro estado queda

$$x_{per} = [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_8 \ V_8 \ \theta_5 \ \theta_7 \ V_5 \ \theta_6 \ \theta_9 \ V_6 \ \theta_4 \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_7 \ V_9]^T$$

Se estima el estado  $x$  usando las mediciones  $z_1$  y  $z_2$ . Posteriormente se introduce un error del 10% en las mediciones  $P_2, P_{45}$  (que corresponden al área 1),  $P_1$  y  $V_4$  (que corresponden al área 2). Los resultados se muestran en la figura (3.6) donde se grafica el error relativo de los valores del estado.

- Estimación Global.

Se estima el estado  $x$  usando las mediciones  $z$ . Posteriormente se introduce un error del 10% en las mismas mediciones que en el punto anterior anterior. Los resultados se muestran en la figura (3.7) donde se grafica el error relativo de los valores del estado.



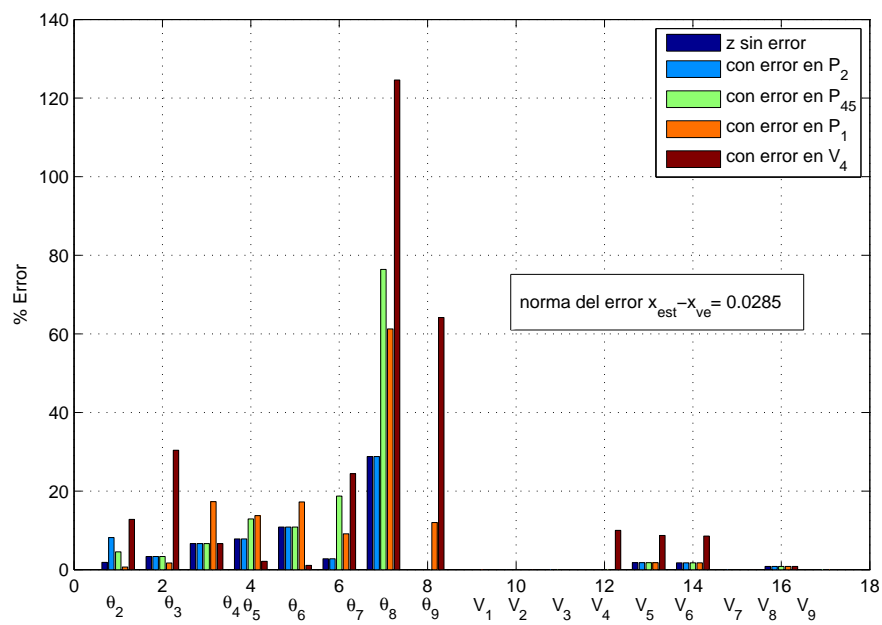


Figura 3.6: Valores del error relativo del estado estimado para un sistema dividido en dos áreas, sin error y con error en una medición.

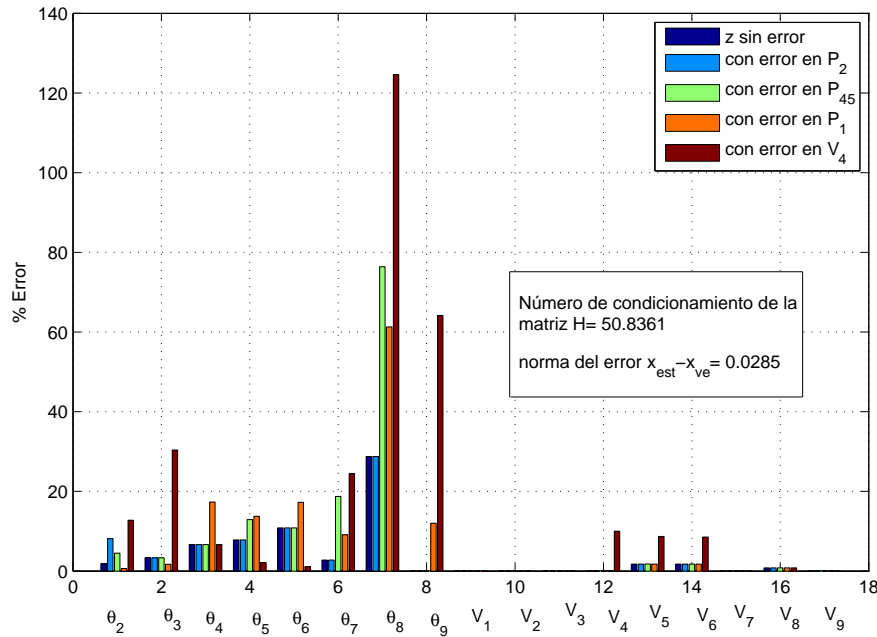


Figura 3.7: Valores del error relativo del estado estimado para un sistema sin división, sin error y con error en una medición.

Los resultados no cambian si la estimación es global o en dos áreas bajo el algoritmo incremental. Los errores de potencia activa afectan en la estimación de los ángulos del fasor de voltaje, y no a las magnitudes de este, los errores de potencia reactiva afectan a las magnitudes del fasor de voltaje. Por último, el error que más afecta es el de las mediciones de voltaje.

Resumiendo, en la comparación entre el método por un área global por mínimos cuadrados ponderados y los algoritmos de [Pasqualetti et al., 2011], que dividen el sistema en áreas, el residuo de la estimación es menor por el primero. Las estimaciones obtenidas mediante estos dos métodos son similares, y basándose en la norma del residuo que producen se llega a la conclusión de que los resultados arrojados por estos estimadores de estado que divide el área en sistemas son iguales a los obtenidos con un estimador de estados convencional. Sin embargo un estimador multiáreas descentralizado ofrece las ventajas del propio enfoque, y en particular las propuestas aquí analizadas, no requieren de una corrección del ángulo del fasor de voltaje, lo cual da a este enfoque una cualidad que no tiene el convencional.

Al momento de analizar la observabilidad algebraica del sistema, se observa que solamente es necesario que cuente con cierto número de filas linealmente independientes para dar solución al problema. Este número de filas está directamente relacionado al número de mediciones que se usa para la estimación, por lo tanto es posible determinar la cantidad de información mínima requerida

para que el sistema sea observable. Siguiendo el análisis del rango del jacobiano de mediciones, se propone un procedimiento para reducir el número de mediciones usadas para la estimación y usar el número mínimo de mediciones determinado por el análisis. La disminución de la información en el vector de mediciones no afecta la exactitud de la estimación.

Del análisis de los errores en las mediciones se ve que dependiendo del tipo de medición con error, este afecta más directamente a el tipo de estado (magnitud o ángulo del voltaje) y también se ve que dependiendo del tipo de mediciones se afecta la estimación, mientras más mediciones de voltaje se tengan más exacta la estimación, suponiendo que las mediciones del voltaje sean precisas.

## Capítulo 4

# Conclusiones

El enfoque multiáreas para la estimación de estados en un SEP presentado en este trabajo, en donde el computo del estimado se lleva a cabo por diferentes monitores encargados de su área, ofrece las ventajas de facilitar el seguimiento y control de un SEP con amplia distribución geográfica y gran dimensión, haciendo que la carga computacional sea menor al encargarse de la información de un número menor de buses, lo que ayuda a un cálculo más veloz para obtener el estado estimado. En este trabajo se usaron dos sistemas para observar la comparación entre el enfoque convencional de estimación del sistema global y el enfoque multiáreas, los resultados obtenidos demuestran que la estimación convencional por mínimos cuadrados ponderados tiene un residuo del error menor, sin embargo, el problema de estimación tratado con los algoritmos multiáreas arroja estimados con una norma de su residuo pequeña, por lo tanto también son precisos, lo que nos dice que los resultados arrojados por el estimador del estado que divide en áreas del sistema son iguales al enfoque convencional sin división. Por lo tanto el usar las propuestas basadas en subsistemas no compromete los resultados y ofrece ventajas ya discutidas.

También se hicieron comparaciones entre la estimación por los algoritmos presentados por [Pasqualetti et al., 2011] en una área y multiáreas, al compararlos fue mejor el estimado cuando se divide el sistema. Es importante destacar que se observó que se puede realizar la división del sistema en áreas y escoger los monitores geográficamente o dividiendo la matriz  $H$  por grupos de mediciones, sin que esto afecte significativamente el resultado de la estimación.

Por último, se determinó la cantidad de información mínima requerida para que el sistema fuera observable y se planteó un procedimiento para descartar mediciones redundantes. Se compararon los resultados obtenidos con diferentes número de componentes en el vector de mediciones y se observó que al disminuir el número de mediciones se disminuye la carga computacional, y no se afecta la precisión de la estimación, incluso mejora dependiendo del tipo de mediciones que se

ocupen, siendo también importante mencionar que en el estudio no se tomó en cuenta el análisis de información errónea en las mediciones, sin embargo se vio el efecto que un error provocaría en el enfoque multiáreas.

La reducción de mediciones usadas para la estimación del estado nos lleva a plantear criterios para saber cuál eliminar del vector  $z$ . En el presente trabajo esa decisión se tomó basándose en el análisis de la matriz  $H$ ; pero al introducir errores en el conjunto de mediciones se observa que el tipo de medición influye en el resultado. Por otro lado, un factor que influye en la observabilidad del sistema es la ubicación geográfica del sensor. Un procedimiento para descartar mediciones redundantes que tome en cuenta estos criterios y nos permita saber cuáles mediciones son más confiables o más importantes, dependiendo de que tipo de medición se trata y donde está localizado el sensor, queda como trabajo futuro.

## Apéndice A

# Ecuaciones de flujos de potencia de una línea de transmisión

Estas ecuaciones se derivan de la representación de la línea de transmisión del SEP como un circuito  $\pi$ , aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff al circuito, Figura A.1, se tiene

$$I_{km} = E_k Y_s + (E_k - E_m) Y_{km} \quad (\text{A.1})$$

Reescribiendo la ecuación (A.1)

$$I_{km} = E_k (Y_s + Y_{km}) - E_m Y_{km} \quad (\text{A.2})$$

Ahora se toman las siguientes convenciones para expresar (A.2) en función de admitancias

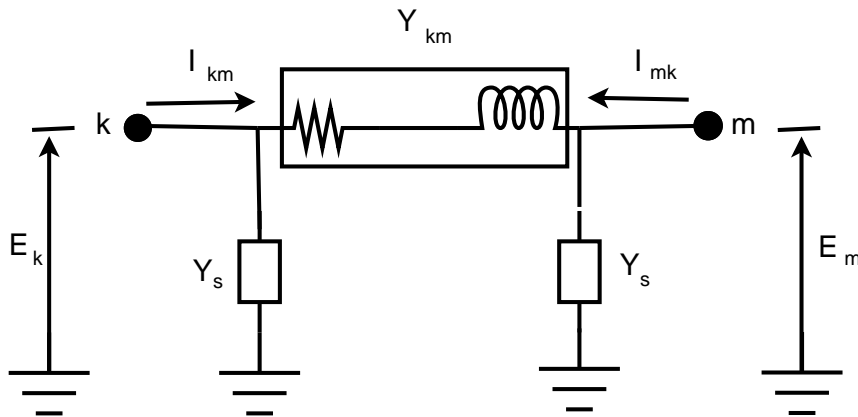


Figura A.1: Circuito  $\pi$

complejas nodales de la red

$$Y_{kk} = Y_s + Y_{km} = G_{kk} + jB_{kk} \quad (\text{A.3})$$

$$Y_{km} = -Y_{km} = g_{km} + jb_{km} \quad (\text{A.4})$$

entonces la ecuación (A.2) queda

$$I_{km} = E_k Y_{kk} + E_m Y_{km} \quad (\text{A.5})$$

Si el flujo de potencia complejo que fluye del bus  $k$  al bus  $m$  es

$$S_{km} = P_{km} + jQ_{km} = E_k I_{km}^* \quad (\text{A.6})$$

Se sustituye la ecuación (A.5) en la ecuación (A.6)

$$\begin{aligned} S_{km} &= P_{km} + jQ_{km} = E_k (E_k Y_{kk} + E_m Y_{km})^* \\ &= P_{km} + jQ_{km} = E_k^2 Y_{kk}^* + E_k E_m^* Y_{km}^* \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sabemos que  $E_k$  y  $E_m$  al ser números complejos se pueden representar como

$$\begin{aligned} E_k &= V_k e^{j\theta_k} \\ E_m &= V_m e^{j\theta_m} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (A.7) se reescribe

$$P_{km} + jQ_{km} = V_k^2 Y_{kk}^* + V_k V_m Y_{km}^* e^{j(\theta_k - \theta_m)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.3) y (A.4)

$$P_{km} + jQ_{km} = V_k^2 (G_{kk} - jB_{kk}) + V_k V_m (G_{km} - jB_{km}) e^{j(\theta_k - \theta_m)} \quad (\text{A.8})$$

si decimos que  $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$

$$e^{j\theta_{km}} = \cos \theta_{km} + j \sin \theta_{km}$$

La ecuación (A.8) queda

$$P_{km} + jQ_{km} = V_k^2 (G_{kk} - jB_{kk}) + V_k V_m (G_{km} - jB_{km}) (\cos \theta_{km} + j \sin \theta_{km}) \quad (\text{A.9})$$

Desarrollando y separando la ecuación (A.9) en su parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} P_{km} + jQ_{km} &= V_k^2 G_{kk} - jV_k^2 B_{kk} + V_k V_m G_{km} \cos \theta_{km} - jV_k V_m B_{km} \cos \theta_{km} + \dots \\ &\quad \dots + jV_k V_m G_{km} \sin \theta_{km} + V_k V_m B_{km} \sin \theta_{km} \\ P_{km} &= V_k^2 G_{kk} + V_k V_m G_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m B_{km} \sin \theta_{km} \\ &= V_k^2 G_{kk} + V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} Q_{km} &= -V_k^2 B_{kk} - V_k V_m B_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m G_{km} \sin \theta_{km} \\ &= -V_k^2 B_{kk} + V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

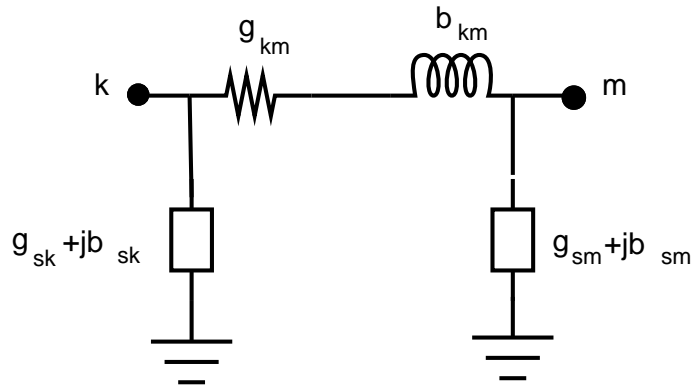


Figura A.2: Circuito  $\pi$

Si

$$Y_s = g_{sk} + jb_{sk} \text{ o } Y_s = g_{sm} + jb_{sm} \quad (\text{A.12})$$

dependiendo a qué bus está conectada  $Y_s$ , ver Figura A.2, las ecuaciones de flujos de potencia activa y reactiva del bus  $k$  al bus  $m$  son

$$P_{km} = V_k^2(g_{sk} + g_{km}) + V_k V_m(g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km}) \quad (\text{A.13})$$

$$Q_{km} = -V_k^2(b_{sk} + b_{km}) + V_k V_m(g_{km} \sin \theta_{km} - b_{km} \cos \theta_{km}) \quad (\text{A.14})$$

Pueden obtenerse ecuaciones similares para el caso en que se requieran las potencias activa y reactiva que fluyen del bus  $m$  al bus  $k$  simplemente intercambiando  $k$  y  $m$  en las ecuaciones (A.13) y (A.14).



## Apéndice B

# Descomposición $LU$ , $QR$ y de Cholesky

En álgebra lineal la descomposición de una matriz, también llamada factorización de una matriz, es la descomposición de la misma como el producto de dos o más matrices según una forma canónica. La factorización de matrices es usada cuando se quiere resolver sistemas de ecuaciones con un número muy grande tanto de variables como de ecuaciones.

### B.1. Descomposición $LU$

La descomposición  $LU$  (del inglés Lower-Upper) es la factorización de una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una superior. La cual está directamente relacionada con las operaciones elementales aplicadas a una matriz para llevarla a una forma triangular inferior.

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$ , la factorización  $LU$  da como resultado.

$$A = LU \tag{B.1}$$

donde  $L$  es una matriz triangular inferior de  $m \times m$  y  $U$  es una matriz escalonada de  $m \times n$ .

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de la descomposición es que todos los menores principales de  $A$  sean distintos de cero. Si la matriz  $A$  es no singular, la descomposición es única. En la Figura B.1 se muestra un esquema para la descomposición.

Para usar la descomposición  $LU$  en la resolución un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b \tag{B.2}$$

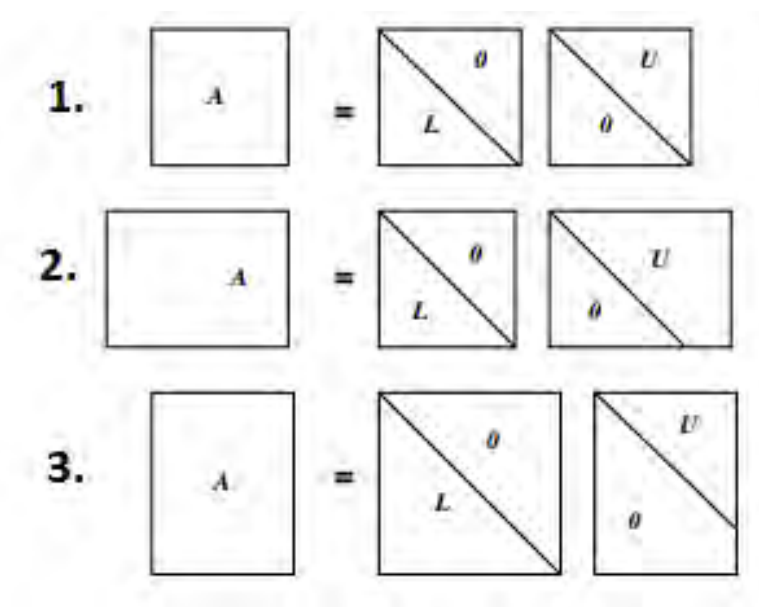


Figura B.1: Esquema de la descomposición LU. 1)  $m = n$ , 2)  $m < n$ , 3)  $m > n$

se sustituye (B.1) en (B.2)

$$L(Ux) = b$$

y se hace un cambio de variable,  $y = Ux$ ; entonces, primero se resuelve el sistema de ecuaciones

$$Ly = b$$

y después

$$Ux = y$$

obteniendo  $x$  de una forma más simple gracias a la estructura triangular de la descomposición.

## B.2. Descomposición QR

La factorización QR, también conocida como triangularización ortogonal, es la factorización de una matriz como el producto de una matriz ortogonal por una triangular superior.

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  con rango columna completo igual a  $n$ , la factorización QR da como resultado

$$A = QR \tag{B.3}$$

donde  $Q$  es una matriz ortogonal, esto significa que  $Q^T Q = I$ , de  $m \times m$  y  $R$  es una matriz triangular superior de  $m \times n$ .

Los métodos de cálculo de la factorización QR pueden ser mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a las columnas de  $A$ , mediante el uso de transformaciones de Householder y mediante transformaciones de Givens.

La factorización QR puede usarse en la resolución del sistema de ecuaciones lineales (B.2), cuando el número de ecuaciones es distinto al de incógnitas, siguiendo un procedimiento similar al de la descomposición LU y tomando en cuenta que  $Q^T Q = I$

$$\begin{aligned} QRx &= b \\ Q^T QRx &= Q^T b \\ Rx &= Q^T b \end{aligned}$$

Obteniendo  $x$  de una forma más simple gracias a la estructura triangular de  $R$ .

### B.3. Descomposición de Cholesky

La descomposición de Cholesky es la factorización de una matriz simétrica definida positiva como el producto de una matriz triangular inferior y la traspuesta de la matriz triangular inferior. El resultado de Cholesky ha sido extendido a matrices complejas. Se deriva de la factorización LU.

En general, si  $A$  es Hermitiana y definida positiva el resultado de la descomposición es

$$A = LL^* \tag{B.4}$$

donde  $L$  es una matriz triangular inferior con entradas en la diagonal positivas y  $L^*$  es la conjugada traspuesta de  $L$ .

La descomposición de Cholesky es única, dada una matriz Hermitiana positiva definida  $A$ , hay una única matriz triangular inferior  $L$  con entradas diagonales estrictamente positivas tales que  $A = LL^*$ . En el caso de que  $A$  sea semidefinida positiva las factorizaciones de Cholesky no son únicas en general.

La descomposición de Cholesky se usa para hallar la solución al sistema (B.2) con el mismo método que la descomposición LU.

En la Tabla B.1 se presenta un resumen de estas tres descomposiciones.

Tabla B.1: Descomposiciones de matrices

Descomposición	Condiciones para $A$	
$LU$ $A_{m \times m} = L_{m \times m} U_{m \times m}$	-Cuadrada para ser única	$L$ triangular inferior y diagonal principal de unos $U$ triangular superior
$QR$ $A_{m \times n} = Q_{m \times m} R_{m \times n}$	- Rango de $A$ sea igual a $n$	$Q$ es ortogonal $Q^T Q = 1$ $R$ es triangular superior
Cholesky $A_{m \times m} = L_{m \times m} L_{m \times m}^T$	-Cuadrada -Simétrica -Positiva definida	$L$ es triangular superior y única

# Bibliografía

- [Abur and Expósito, 2004] Abur, A. and Expósito, A. (2004). *Power System State Estimation: Theory and Implementation*. Power Engineering (Willis). Taylor & Francis.
- [Anderson et al., 1977] Anderson, P., Fouad, A., of Electrical, I., and Engineers, E. (1977). *Power System Control and Stability*. IEEE Press Power Systems Engineering Series. Ieee Press.
- [Bondy and Murty, 2008] Bondy, A. and Murty, U. (2008). *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer.
- [Bronshtein et al., 2007] Bronshtein, I., Semendyayev, K., Musiol, G., and Mühlig, H. (2007). *Handbook of Mathematics*. Springer.
- [Conejo et al., 2007] Conejo, A., De La Torre, S., and Canas, M. (2007). An optimization approach to multiarea state estimation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 22(1):213–221.
- [Davis, 2006] Davis, T. (2006). *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. Fundamentals of Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [de la Fuente O’Connor, 1997] de la Fuente O’Connor, J. (1997). *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera: códigos en FORTRAN y C con aplicaciones de sistemas de energía eléctrica*. Reverté.
- [Gomez-Exposito and de la Villa Jaen, 2009] Gomez-Exposito, A. and de la Villa Jaen, A. (2009). Two-level state estimation with local measurement pre-processing. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 24(2):676–684.
- [Gómez-Expósito et al., 2011] Gómez-Expósito, A., de la Villa Jaén, A., Gómez-Quiles, C., Rousseaux, P., and Cutsem, T. V. (2011). A taxonomy of multi-area state estimation methods. *Electric Power Systems Research*, 81(4):1060 – 1069.
- [Grainger and Stevenson, 1994] Grainger, J. and Stevenson, W. (1994). *Power system analysis*. McGraw-Hill series in electrical and computer engineering: Power and energy. McGraw-Hill.

- [Grossman and Farah, 1988] Grossman, S. and Farah, J. (1988). *Algebra lineal*. EDITORIAL IBEROAMERICANA.
- [Luenberger, 1968] Luenberger, D. (1968). *Optimization by Vector Space Methods*. Professional Series. John Wiley & Sons.
- [Monticelli, 1999] Monticelli, A. (1999). *State Estimation in Electric Power Systems: A Generalized Approach*. Kluwer international series in engineering and computer science. Kluwer Academic Publishers.
- [Pasqualetti et al., 2011] Pasqualetti, F., Carli, R., and Bullo, F. (2011). A distributed method for state estimation and false data detection in power networks. In *Smart Grid Communications (SmartGridComm), 2011 IEEE International Conference on*, pages 469–474.
- [Poole, 2006] Poole, D. (2006). *Álgebra lineal: una introducción moderna*. Thomson.
- [Rendón Salgado, 2013] Rendón Salgado, A. (2013). Estimación de estado distribuida de sistemas eléctricos de potencia mediante mediciones fasoriales. Master’s thesis, UNAM.
- [Sauer and Pai, 1998] Sauer, P. and Pai, A. (1998). *Power System Dynamics and Stability*. Prentice Hall.
- [Schweppe, 1970] Schweppe, F. (1970). Power system static-state estimation, part III: Implementation. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-89(1):130–135.
- [Schweppe and Rom, 1970] Schweppe, F. and Rom, D. (1970). Power system static-state estimation, part II: Approximate model. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-89(1):125–130.
- [Schweppe and Wildes, 1970] Schweppe, F. and Wildes, J. (1970). Power system static-state estimation, part I: Exact model. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-89(1):120–125.
- [Tran et al., 2012] Tran, G., Kiani, A., Annaswamy, A., Sharon, Y., Motto, A., and Chakraborty, A. (2012). Necessary and sufficient conditions for observability in power systems. In *Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2012 IEEE PES*, pages 1–8.
- [Van Cutsem et al., 1981] Van Cutsem, T., Horward, J., and Ribbens-Pavella, M. (1981). A two-level static state estimator for electric power systems. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-100(8):3722–3732.

- [Viqueira Landa, 2004] Viqueira Landa, J. (2004). *Redes Eléctricas*, volume Tomo I. UNAM, Facultad de Ingeniería, México.
- [Wu et al., 2005] Wu, F., Moslehi, K., and Bose, A. (2005). Power system control centers: Past, present, and future. *Proceedings of the IEEE*, 93(11):1890–1908.
- [Yang et al., 2011] Yang, T., Sun, H., and Bose, A. (2011). Transition to a two-level linear state estimator; part ii: Algorithm. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 26(1):54–62.