Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El conjunto de los módulos estándar es un sistema estratificante

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Jorge Enrique Vega Acevedo

DIRECTOR DE TESIS:

Edith Corina Sáenz Valadez

2014

Dedico esta tesis a mi familia que siempre me han apoyado,
A mis profesores que me enseñaron con dedicación,
A mis amigos que siempre tienen una palabra de aliento.
Gracias.

Índice general

Introducción

Los módulos estándar sobre álgebras de artin fueron definidas por C.M.Ringel en conexión con el estudio de ciertas álgebras estandarmente estratificadas, las llamadas álgebras casi-hereditarias, ver [6]. Las álgebras casi-hereditarias aparecen de manera natural en las categorias de peso máximo que se originan en el contexto de las álgebras de Lie y de ciertos grupos algebraicos.

Sea $P(i), P(2), \dots P(n)$ los módulos proyectivos inescindibles no isomorfos de una álgebra de artin Λ. Por definición el módulo estándar $\Delta(i)_\Lambda$ es el módulo cociente $P(i)/U(i)$ donde $U(i)) = \Sigma_{f:P(j)\to P(i);j>i}\, Im\, f$. El conjunto de los módulos estándar es denotador por $\Delta = \{\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(n)\}$. Se dice que el álgebra Λ es estandarmente estratificada a la derecha si el módulo regular Λ_Λ tiene una filtración con factores isomorfos a los módulos estándar.

El concepto de sistema estratificante de talla t fue introducido por K.Erdmann y C.Sáenz en 2003, ver [4]. Dicho concepto es importante, en el estudio de las álgebras estandarmente estratificadas, porque produce un módulo Y cuyo anillo de endomorfismos $A = End_\Lambda(Y)$ es estandarmente estratificado.

Un sistema estratificante de talla t es un par $(\theta, \leqslant)$, que consta de un conjunto de R-módulos inescindibles

$$\theta = \{\theta(1), \dots, \theta(t)\}$$

que satisface ciertas condiciones homológicas relacionadas con el orden natural $\leqslant$ en el conjunto $\Omega_t = \{1, 2 \dots, t\}$.

El primer capítulo de este trabajo consta de un resumen de la teoría de módulos que es necesaria para el desarrollo del mismo. Para agilizar la lectura de este capítulo hemos omitido las demostraciones, éstas pueden consultarse en [2].

En el segundo capítulo, primeramente desarrollamos los conceptos y resultados que son necesarios para poder demostrar el Teorema de Krull-Schmidt. Una vez hecho esto, desarrollamos de manera breve, la teoría relativa al concepto de módulo proyectivo. Como hemos visto, los módulos proyectivos y el Teorema de Krull-Schmidt son indispensables para poder definir el concepto de módulo estándar.

En el tercer capítulo, consideramos fundamentalmente K-álgebras de dimensión finita y básicas sobre un campo algebraicamente cerrado K. Por comodidad nos referimos a ellas únicamente como álgebras y las denotamos por R.

En dicho capítulo primeramente se introducen y se estudian con detalle los conceptos de módulo estándar y de sistema estratificante de talla t. Luego enunciamos y demostramos el resultado central de esta tesis, a saber, demostramos que el par $(\Delta, \leqslant)$, que consta de el conjunto Δ de los R-módulos estándar y del orden natural $\leqslant$ en el conjunto $\Omega_n, = \{1, 2, \ldots, n\}$ es un sistema estratificante de talla n.

Capítulo 1

Módulos.

En este capítulo revisaremos los conceptos y resultados de la Teoría de Módulos que nos serán de gran utilidad para el desarrollo de los capítulos posteriores. Con el propósito de hacer el capítulo más compacto hemos omitido las demostraciones de los resultados, éstos pueden consultarse en [2].

1.1. Módulos.

En esta sección veremos la definición de un R-módulo izquierdo.

Sea R un anillo asociativo con $1_R \in R$. Pedimos que $1_R \neq 0_R$.

Definición 1.1.1. *Decimos que un* ***R-módulo izquierdo****, donde R es un anillo, es un grupo abeliano M que tiene una multiplicación escalar:*

$$\begin{aligned} \sigma : \quad R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$$

tal que se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $r(m + m') = rm + rm', \quad \forall r \in R$ *y* $\forall m, m' \in M$*;*

(2) $(r + r')m = rm + r'm, \quad \forall r, r' \in R$ *y* $\forall m \in M$*;*

(3) $(rr')m = r(r'm), \quad \forall r, r' \in R$ *y* $\forall m \in M$*;*

(4) $1_R m = m, \quad \forall m \in M$*.*

Recordemos que si M es un grupo abeliano, entonces el conjunto $End(M) = \{f : M \longrightarrow M \mid f$ es homomorfismo de grupos$\}$ es un anillo con las siguientes operaciones:

(1) $(f+g)(m) = f(m) + g(m), \quad \forall m \in M$;

(2) $(f \circ g)(m) = f(g(m)), \quad \forall m \in M$.

Los siguientes dos resultados caracterizan a un R-módulo izquierdo M en términos de un homomorfismo de anillos.

Proposición 1.1.2. *Sean R un anillo, M un grupo abeliano y $\varphi : R \longrightarrow End(M)$ un homomorfismo de anillos. Definimos $\sigma : R \times M \longrightarrow M$ por $\sigma(r,m) = \varphi_r(m)$, donde $\varphi_r = \varphi(r)$. Entonces σ es una multiplicación escalar que hace de M un R-módulo izquierdo. Recíprocamente, si M es un R-módulo izquierdo y $\sigma : R \times M \longrightarrow M$ es su multiplicación escalar, entonces la función $\varphi : R \longrightarrow End(M)$ dada por:*

$$\varphi(r) : \begin{array}{l} M \longrightarrow M \\ m \longmapsto rm \end{array}$$

es un homomorfismo de anillos.

Notación: ${}_RM$ denota que M es un R-módulo izquierdo.

Ejemplos 1.1.3.

(1) Sea V un espacio vectorial sobre un campo R, se tiene que ${}_RV$ es un R-módulo izquierdo.

(2) Un grupo abeliano M es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo.

Definición 1.1.4. *Sea M un R-módulo izquierdo. Un subconjunto N de ${}_RM$ es un **R-submódulo izquierdo de M**, si satisface lo siguiente:*

(1) N es un subgrupo de M;

(2) $an \in N; \quad \forall a \in R$ y $\forall n \in N$.

Notación: ${}_RN \leqslant {}_RM$ denota que N es un R-submódulo izquierdo de M.

Ejemplos 1.1.5.

(1) Si M es un grupo abeliano y N es un subgrupo de M, entonces N es un $\mathbb{Z}$-submódulo izquierdo de M.

(2) Si V es un K-espacio vectorial donde K es un campo y W es un subespacio vectorial de V, entonces W es un K-submódulo izquierdo de V.

Lema 1.1.6. *Sea M un R-módulo izquierdo y N un R-submódulo izquierdo de M. Entonces N es un R-módulo izquierdo.*

Definición 1.1.7. *Sean M un R-módulo izquierdo y N un R-submódulo izquierdo de M. Si $M \neq N$ decimos que N es un **R-submódulo izquierdo propio de M**.*

Notación: ${}_RN < {}_RM$ denota que N es un R-submódulo izquierdo propio de M.

Para continuar con nuestro trabajo necesitamos el concepto de A-combinación lineal.

Definición 1.1.8. *Sean M un R-módulo izquierdo, $X \subseteq M$ y $A \subseteq R$. Un elemento de la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \text{ con } a_i \in A \text{ y } x_i \in X \text{ para } i = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}$$

*es una **combinación lineal de elementos en X**. También se dice que es una **A-combinación lineal**.*

Notación: Denotaremos AX al conjunto de todas las A-combinaciones lineales con elementos en X.

Proposición 1.1.9. *Sea M un R-módulo izquierdo y sea $\varnothing \neq X \subseteq M$. Entonces RX es un R-submódulo izquierdo de M.*

Proposición 1.1.10. *Sean M un R-módulo izquierdo y N un subconjunto no vacío de M. Entonces son equivalentes:*

(1) N es un R-módulo izquierdo;

(2) $RN = N$;

(3) $\forall a, b \in R$ *y* $x, y \in N$, $\quad ax + by \in N$.

Convención 1.1.11. *Si M es un R-módulo izquierdo y $X = \varnothing$ convenimos que $R\varnothing = \{0_M\}$. Se acostumbra denotar al R-módulo izquierdo $\{0_M\}$ por* 0.

Necesitaremos las siguientes proposiciones para caracterizar al R-módulo izquierdo RX.

Proposición 1.1.12. *Sea $\mathcal{A} = \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia no vacía de R-submódulos izquierdos de ${}_RM$. Entonces $\bigcap\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$ es un R-submódulo izquierdo de ${}_RM$.*

Corolario 1.1.13. *Sean M un R-módulo izquierdo y $X \subseteq M$. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{{}_RN \leqslant {}_RM : X \subseteq N\}$. Entonces $\bigcap\limits_{{}_RN \in \mathcal{A}} {}_RN$ es el R-submódulo izquierdo más pequeño de ${}_RM$ que contiene a X. Es decir, si ${}_RL$ es un R-submódulo izquierdo de M que contiene a X, entonces $\bigcap\limits_{{}_RN \in \mathcal{A}} {}_RN \leqslant {}_RL$.*

El Corolario 1.1.13 motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.14. *Sean M un R-módulo izquierdo, $X \subseteq M$ y $\mathcal{A} = \{{}_RN \leqslant {}_RM : X \subseteq {}_RN\}$. Decimos que el R-módulo izquierdo $\bigcap\limits_{{}_RN \in \mathcal{A}} {}_RN$ es el **R-submódulo izquierdo de M generado por X** y se denota por $\langle X \rangle$.*

Es inmediato de la Definición 1.1.8 y del Corolario 1.1.13 el siguiente resultado.

Corolario 1.1.15. *Si M es un R-módulo izquierdo y $X \subseteq M$, entonces el R-submódulo izquierdo generado por X es RX. Es decir, $RX = \langle X \rangle$.*

Definición 1.1.16. *Sean $M_1, M_2, \ldots, M_n$ subconjuntos no vacíos de un R-módulo izquierdo M. Definimos **la suma de $M_1, M_2, \ldots, M_n$** como:*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n := \{x_1 + x_2 + \cdots + x_n : x_i \in M_i, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Lema 1.1.17. *Si M es un R-módulo izquierdo y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son R-submódulos izquierdos de M, entonces $M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ es un R-submódulo izquierdo de M.*

De la Definición 1.1.16 tenemos de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.1.18. *Si M es un R-módulo izquierdo y $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son R-submódulos izquierdos de M, entonces:*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n = R(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n).$$

El resultado anterior motiva la siguiente definición. Nótese que en este caso el conjunto $\mathcal{A}$ puede ser infinito.

Definición 1.1.19. *Sea $\mathcal{A} = \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de R-submódulos izquierdos de un R-módulo izquierdo M. Definimos* ***la suma de $\mathcal{A}$****, denotada por $\sum_{\alpha\in A} M_\alpha$, como:*

$$\sum_{\alpha\in A} M_\alpha := R(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha).$$

De la definición del R-módulo izquierdo generado por $\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha$, se tiene de forma inmediata el siguiente resultado.

Proposición 1.1.20. *Sean ${}_RM$ y $\mathcal{A} = \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de R-submódulos izquierdos de ${}_RM$. Entonces:*

$$\sum_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigcup\{M_{\alpha_1} + \cdots + M_{\alpha_n} : \text{con } n \in \mathbb{N}\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A \quad i = 1, 2, \ldots\}.$$

Esto es, cada elemento $x \in \sum_{\alpha\in A} M_\alpha$ se puede escribir como

$$x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_n} \text{ con } x_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}.$$

De los resultados anteriores podemos dar las siguientes definiciones, para ello y por comodidad dados un R-módulo M y $\mathcal{A} = \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de R-submódulos izquierdos de R_M, denotaremos la familia $\mathcal{A}$ por $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Definición 1.1.21. *Sea M un R-módulo izquierdo. Si $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ es una colección de R-submódulos izquierdos de M, entonces:*

(1) *Decimos que* $\sum_{\alpha\in A} M_\alpha$ *es el* ***R-submódulo izquierdo generado por*** $(\boldsymbol{M_\alpha})_{\boldsymbol{\alpha\in A}}$.

(2) *Si* $M = \sum_{\alpha\in A} M_\alpha$, *decimos que* ***los R-submódulos izquierdos*** $(\boldsymbol{M_\alpha})_{\boldsymbol{\alpha\in A}}$ ***generan a*** $\boldsymbol{M}$.

(3) *Si* X *es un subconjunto de* M *tal que* $RX = M$, *decimos que* $\boldsymbol{X}$ ***genera a*** $\boldsymbol{M}$, *o que* $\boldsymbol{X}$ ***es un conjunto generador de*** $\boldsymbol{M}$.

(4) *Decimos que un R-módulo izquierdo con un conjunto generador finito es un* ***R-módulo izquierdo finitamente generado***.

(5) *Decimos que un R-módulo izquierdo* M *con un conjunto generador que conste de un solo elemento es un* ***R-módulo izquierdo cíclico***.

Ejemplos 1.1.22.

(1) *Sea* $x \in {}_RM$. *Entonces* $R\{x\} = \{rx : r \in R\}$ *es un R-módulo izquierdo cíclico. Se denota por* Rx.

En particular, ${}_RR$ *es cíclico ya que* ${}_RR = R1 = \{r1_R : r \in R\}$. *Se le conoce como el R-módulo izquierdo regular*

(2) *Cada R-módulo izquierdo* M *está generado por el conjunto de todos sus R-submódulos izquierdos cíclicos. Es decir,* $M = \sum_{x\in M} Rx$.

Definición 1.1.23. *Sea* S *un R-módulo izquierdo diferente de cero. Decimos que* S *es* ***simple*** *si sus únicos R-submódulos izquierdos son él mismo y el R-módulo izquierdo cero.*

Ejemplo 1.1.24.

(1) $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ *con* p *primo es un* $\mathbb{Z}$*-módulo izquierdo simple.*

Definición 1.1.25. *Sean* M *un R-módulo izquierdo y* N *un R-módulo izquierdo propio de* M. *Decimos que* N *es un* ***R-submódulo izquierdo maximal de M*** *si para todo* ${}_RL \leqslant {}_RM$ *con* ${}_RN \leqslant {}_RL$, *se tiene que* ${}_RL = {}_RN$ *ó bien* ${}_RL = {}_RM$.

Ejemplo 1.1.26.

(1) *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Tenemos que $W = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ es un K-submódulo izquierdo maximal de V.*

Para la demostración de la siguiente proposición se usa el Lema de Zörn.

Proposición 1.1.27. *Sea M un R-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces cada R-submódulo izquierdo propio de M está contenido en un R-submódulo izquierdo maximal. En particular, M tiene un R-submódulo izquierdo maximal.*

A continuación veremos cómo los conceptos de R-módulo izquierdo maximal y de R-módulo izquierdo simple están íntimamente ligados. Para ello, consideremos K un R-submódulo izquierdo de ${}_RM$. Sabemos que el conjunto

$$M/K = \{x + K : x \in M\}$$

es un grupo abeliano con la operación $(x + K) + (y + K) = (x + y) + K$.

La siguiente proposición muestra que el grupo abeliano M/K es un R-módulo izquierdo.

Proposición 1.1.28. *Sean M un R-módulo izquierdo y K un submódulo izquierdo de M. Entonces:*

$$M/K = \{x + K : x \in M\}$$

es un R-módulo izquierdo con la multiplicación escalar dada por $r(x + K) = rx + K$.

Definición 1.1.29. *Sean M un R-módulo izquierdo y K un R-submódulo izquierdo de M. Al R-módulo izquierdo M/K se le conoce como el* ***R-módulo izquierdo cociente****.*

Corolario 1.1.30. *El R-módulo izquierdo cociente M/K es simple si, y sólo si, K es un R-módulo izquierdo maximal.*

Observación 1.1.31. *Sea R un anillo. Dado que R es diferente de cero y está generado por el 1_R, tenemos que ${}_RR$ tiene un ideal maximal I (Ver Proposición 1.1.27). Por lo tanto R/I es simple. Es decir, los R-módulos izquierdos simples existen.*

A partir de ahora, algunas veces sólo diremos que M es un R-módulo en lugar de un R-módulo izquierdo. De la misma manera, diremos que N es un R-submódulo de M en lugar de un R-submódulo izquierdo de M.

1.2. Homomorfismos de Módulos.

En esta sección estudiaremos a las funciones entre R-módulos que preservan la estructura de R-módulo.

Definición 1.2.1. *Sean ${}_RM$ y ${}_RN$ dos R-módulos. Decimos que una función $f : M \longrightarrow N$ es un* ***R-homomomorfismo*** *si:*

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in {}_RM;$

(2) $f(rx) = rf(x), \quad \forall x \in {}_RM, \quad \forall r \in R.$

Algunas veces diremos homomorfismo en lugar de R-homomorfismo.

Ejemplos 1.2.2.

(1) $I : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ *dada por* $I(m) = m$ *es un R-homomorfismo.*

(2) $0 : {}_RM \longrightarrow {}_RN$ *dada por* $0(m) = 0_N$ *es un R-homomorfismo.*

(3) Si ${}_RK$ es un R-submódulo de ${}_RM$, consideremos la función $\pi : {}_RM \longrightarrow M/K$ dada por $\pi(m) = m + K$, la cual es un R-homomorfismo. Se le conoce como la proyección canónica.

(4) Si ${}_RK$ es un R-submódulo de ${}_RM$, consideremos la función $i : {}_RK \longrightarrow {}_RM$ dada por $i(k) = k$, la cual es un R-homomorfismo. Se le conoce como la inclusión canónica.

Definición 1.2.3. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Definimos el* ***kernel de f*** *como:*

$$Ker f := \{m \in M : f(m) = 0_N\}.$$

Proposición 1.2.4. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces $Ker f$ es un R-submódulo de M.*

Definición 1.2.5. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Definimos la* ***imagen de f*** *como:*

$$Imf := \{f(m) : m \in M\}.$$

Proposición 1.2.6. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces Imf es un R-submódulo de N.*

Definición 1.2.7. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Definimos la* ***coimagen de f*** *como:*

$$Coimf := M/Kerf.$$

Definición 1.2.8. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Definimos el* ***cokernel de f*** *como:*

$$Cokerf := M/Imf.$$

Definición 1.2.9. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Decimos que:*

(1) f es un ***monomorfismo****, si f es inyectiva.*

(2) f es un ***epimorfismo****, si f es suprayectiva.*

(3) f es un ***isomorfismo****, si f es biyectiva.*

Observación 1.2.10. *Las definiciones anteriores no son las categóricas.*

Ejemplos 1.2.11.

(1) Si ${}_RK \leqslant {}_RM$, tenemos que la proyección canónica $\pi : {}_RM \longrightarrow M/K$ es un epimorfismo.

(2) Si ${}_RK \leqslant {}_RM$, tenemos que la inclusión canónica $i : {}_RK \longrightarrow {}_RM$ es un monomorfismo.

(3) Tenemos que $I : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ dada por $I(m) = m$ es un isomorfismo.

La siguiente proposición caracteriza a los monomorfismos.

Proposición 1.2.12. *Sean M y N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f *es monomorfismo;*

(2) $Ker f = 0$*;*

(3) Para cada $_RK$ *y cada par de* R*-homomorfismos* $g, h : K \longrightarrow M$, $fg = fh$ *implica* $g = h$*;*

(4) Para cada $_RK$ *y cada* R*-homomorfismo* $g : K \longrightarrow M$, $fg = 0$ *implica* $g = 0$.

Análogamente la siguiente proposición caracteriza a los epimorfismos.

Proposición 1.2.13. *Sean* M *y* N R*-módulos y* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) f *es epimorfismo;*

(2) $Im f = N$*;*

(3) Para cada $_RK$ *y cada par de* R*-homomorfismos* $g, h : N \longrightarrow K$, $gf = hf$ *implica* $g = h$*;*

(4) Para cada $_RK$ *y cada* R*-homomorfismo* $g : N \longrightarrow K$, $gf = 0$ *implica* $g = 0$.

Proposición 1.2.14. *Sean* M *y* N R*-módulos y* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo. Entonces,* f *es un isomorfismo si, y sólo si, existe* $g : N \longrightarrow M$ *un* R*-homomorfismo tal que* $fg = I_N$ *y* $gf = I_M$.

Notación: Con la notación y propiedades de la Proposición 1.2.14, se denota a g como f^{-1} y se le llama la inversa de f. También se dice que M y N son R-módulos isomorfos y se denota por $M \simeq N$.

Definición 1.2.15. *Sean* M, N R*-módulos,* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo y* T *un* R*-submódulo de* N*. Definimos la* ***imagen inversa de*** $\boldsymbol{T}$ *como:*

$$f^{-1}(T) := \{m \in M : f(m) \in T\}.$$

Teorema 1.2.16 (El Teorema del Factor)**.** *Sean* M, M', N *y* N' R*-módulos izquierdos y* $f : M \longrightarrow N$ *un* R*-homomorfismo.*

(1) *Si $g : M \longrightarrow M'$ es un epimorfismo con $Kerg \subseteq Kerf$, entonces existe un único homomorfismo $h : M' \longrightarrow N$ tal que f=hg. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ M' \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Más aún, $Kerh = g(Kerf)$ e $Imh = Imf$, de donde h es monomorfismo si, y sólo si, $Kerg = Kerf$, y h es epimorfismo si, y sólo si, f es epimorfismo.

(2) *Si $g : N' \longrightarrow N$ es un monomorfismo con $Imf \subseteq Img$, entonces existe un único homomorfismo $h : M \longrightarrow N'$ tal que f=gh. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h"'] & N \\ N' \arrow[ur, hook, "g"] & \end{tikzcd}$$

Más aún, $Kerh = Kerf$ e $Imh = g^{-1}(Imf)$, de donde h es monomorfismo si, y sólo si, f es monomorfismo, y h es epimorfismo si, y sólo si, $Img = Imf$.

Las demostraciones de los Teoremas de Isomorfismo se desprenden directamente del Teorema del Factor.

Corolario 1.2.17 (Los Teoremas de Isomorfismo)**.** *Sean M y N R-módulos izquierdos.*

(1) *Si $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo, entonces hay un único isomorfismo*

$$\eta : M/Kerf \longrightarrow N \text{ tal que } \eta(m+k) = f(m).$$

(2) *Si* ${}_RK \leqslant {}_RL \leqslant {}_RM$*, entonces* $M/L \simeq (M/K)/(L/K)$.

(3) *Si* ${}_RH \leqslant {}_RM$ *y* ${}_RK \leqslant {}_RM$*, entonces* $(H+K)/K \simeq H/H \cap K$.

Corolario 1.2.18 (El Teorema de la Correspondencia)**.** *Sean* M *y* N R*-módulos izquierdos y* $f : M \longrightarrow N$ *un epimorfismo. Entonces la función*

$$F : \{{}_RL \leqslant {}_RM : Kerf \leqslant {}_RL\} \longrightarrow \{{}_RT : {}_RT \leqslant {}_RN\}$$

dada por $F(L) = f(L)$ *es una función biyectiva con inversa*

$$G : \{{}_RT : {}_RT \leqslant {}_RN\} \longrightarrow \{{}_RL \leqslant {}_RM : Kerf \leqslant {}_RL\}$$

dada por $G(T) = f^{-1}(T)$.

Terminamos esta sección con la siguiente proposición.

Proposición 1.2.19. *Sean* M *y* N R*-módulos y* $f, g : M \longrightarrow N$ R*-homomorfismos. Si* $M = \langle X \rangle$ *y* $f|_X = g|_X$*, entonces* $f = g$.

1.3. Exactitud.

En esta sección estudiaremos el concepto de exactitud, el cual nos será muy útil en las secciones posteriores. También estudiaremos los conceptos de suma directa interna y de sucesión exacta corta que se escinde y veremos cómo se relacionan dichos conceptos.

Definición 1.3.1.

(1) *Decimos que un par de* R*-homomorfismos* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *es* ***exacto en M*** *si* $Imf = Kerg$.

(2) *Decimos que una sucesión (finita o infinita) de* R*-homomorfismos*

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1}$$

es ***exacta*** *si es exacta en cada* M_i*. Es decir, si para cada* i *se tiene que* $Imf_i = Kerf_{i+1}$.

Lema 1.3.2. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces:*

(1) $0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{f} N$ *es exacta si, y sólo si, f es un monomorfismo;*

(2) $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ *es exacta si, y sólo si, f es un epimorfismo;*

(3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ *es exacta si, y sólo si, f es un isomorfismo.*

Proposición 1.3.3. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces:*

$$0 \longrightarrow Kerf \overset{i}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{f} N \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} N/Imf = Cokerf \longrightarrow 0$$

es exacta, donde i es la inclusión canónica y π la proyección canónica.

Definición 1.3.4. *Decimos que una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

*es una **sucesión exacta corta**.*

Para definir el concepto de suma directa necesitamos la noción de R-submódulos independientes.

Definición 1.3.5. *Sean M_1 y M_2 R-submódulos de ${}_RM$.*

*(1) Decimos que **M_1 y M_2 generan a M** si $M = M_1 + M_2$ (Ver Definición 1.1.21);*

*(2) Decimos que **M_1 y M_2 son independientes** si $M_1 \cap M_2 = \{0_M\}$;*

*(3) El R-homomorfismo $j : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ dado por $j(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ se conoce como el **homomorfismo canónico**.*

Observación 1.3.6. *Usando la notación de la definición anterior tenemos que $Imj = M_1 + M_2$ y $Kerj = \{(x, -x) : x \in M_1 \cap M_2\}$.*

Definición 1.3.7. *Sean M_1 y M_2 R-submódulos de ${}_RM$. Decimos que **M es la suma directa interna de M_1 y M_2**, y escribimos $M = M_1 \oplus M_2$, si*

(1) M_1 y M_2 generan a M;

(2) M_1 y M_2 son independientes.

Lema 1.3.8. *Sean M_1 y M_2 R-submódulos de ${}_RM$. Entonces $M = M_1 \oplus M_2$ si, y sólo si, el homomorfismo canónico $j : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ es un isomorfismo.*

Definición 1.3.9. *Sean M un R-módulo izquierdo y M_1 un R-submódulo de M. Decimos que **M_1 es un sumando directo de M** si existe un R-submódulo M_2 de M tal que $M = M_1 \oplus M_2$.*

Definición 1.3.10. *Sean M un R-módulo izquierdo y M_1 un sumando directo de M tal que $M = M_1 \oplus M_2$. Al R-módulo M_2 se le llama **sumando directo complementario de M_1**.*

Ejemplo 1.3.11. *Consideremos $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Tomemos a $M_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}$ y $M_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$. Tenemos que $\mathbb{R}^2 = M_1 \oplus M_2$.*

Lema 1.3.12. *Sean $f : M \longrightarrow N$ y $f' : N \longrightarrow M$ R-homomorfismos tales que $ff' = I_N$. Entonces f es un epimorfismo, y f' es un monomorfismo. Además, $M = Kerf \oplus Imf'$.*

El resultado anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.13. *Si $f : M \longrightarrow N$ y $f' : N \longrightarrow M$ son R-homomorfismos tales que $ff' = I_N$, decimos que:*

*(1) f es un **epimorfismo que se escinde**.*

*(2) f' es un **monomorfismo que se escinde**.*

Notación: Denotamos

$$M - \overset{f}{\oplus} \rightarrow N \longrightarrow 0$$

cuando f es un epimorfismo que se esinde.

Y denotamos

$$0 \longrightarrow N - \overset{f'}{\oplus} \rightarrow M$$

cuando f' es un monomorfismo que se escinde.

Ejemplo 1.3.14. *Consideremos los siguientes homomorfismos:*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f':\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

tenemos que $ff'(x) = f(f'(x)) = f(x,0) = x$. *Por lo tanto* $ff' = I_{\mathbb{R}}$, *de donde* f *es un epimorfismo que se escinde y* f' *es monomorfismo que se escinde. Además, tenemos que* $\mathbb{R}^2 = Imf' \oplus Kerf = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Definición 1.3.15. *Decimos que una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

se ***escinde*** *si* f *es un monomorfismo que se escinde y* g *es un epimorfismo que se escinde.*

Ejemplo 1.3.16. *Consideremos los* $\mathbb{R}$*-módulos:* $M_1 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ *y* $M_2 = \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$. *Entonces la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \pi_2:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_2 \\ (a,b) & \longmapsto & (0,b) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} i_1:M_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,0) & \longmapsto & (a,0) \end{array}$$

es una sucesión exacta corta que se escinde ya que $\pi_1 i_1 = I_{M_1}$ *y* $\pi_2 i_2 = I_{M_2}$, *donde:*

$$\begin{array}{rcl} \pi_1:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_1 \\ (a,b) & \longmapsto & (a,0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} i_2:M_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (0,b) & \longmapsto & (0,b). \end{array}$$

Por el Lema 1.3.12 anterior tenemos que $\mathbb{R}^2 = Imi_1 \oplus Ker\pi_1$.

La siguiente proposición caracteriza a una sucesión exacta corta que se escinde.

Proposición 1.3.17. *Los siguientes enunciados acerca de una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

son equivalentes:

(1) La sucesión se escinde;

(2) f es monomorfismo que se escinde;

(3) g es epimorfismo que se escinde;

(4) $Imf = Kerg$ es un sumando directo de M;

(5) Cada homomorfismo $h : M_1 \longrightarrow M$ se factoriza a través de f;

(6) Cada homomorfismo $h : M \longrightarrow M_2$ se factoriza a través de g.

1.4. Sumas Directas y Producto de Módulos.

En esta sección estudiaremos los conceptos de producto directo y de suma directa.

1.4.1. Producto de Módulos.

Definición 1.4.1. *Decimos que un par $(M, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ que consta de un R-módulo M y de un conjunto indexado de R-homomorfismos $p_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ con $\alpha \in A$ es un* ***producto directo de $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$*** *($M_\alpha$ es un R-módulo para cada $\alpha \in A$) en caso de que para cada R-módulo N y cada conjunto $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ de R-homomorfismos $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$ con $\alpha \in A$ exista un único R-homomorfismo $f : N \longrightarrow M$ tal que $f_\alpha = p_\alpha f$ $(\alpha \in A)$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & M \arrow[d, "p_\alpha"] \\ & M_\alpha \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.4.2. *Sea $\mathbb{R}^2$ que es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2.*

Sean $M_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}$ y $M_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$

Ahora consideremos las transformaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} p_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_1 \\ (a, b) & \longmapsto & (a, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} p_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & M_2 \\ (a, b) & \longmapsto & (0, b) \end{array}$$

Sean $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow M_1$ y $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow M_2$ transformaciones lineales. Tenemos que la transformación lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

para $i = 1, 2$. De donde $(\mathbb{R}^2, (p_i)_{i\in\{1,2\}})$ es un producto directo de $(M_i)_{i\in\{1,2\}}$.

En la siguiente definición daremos una descripción del R-modulo producto.

Definición 1.4.3. *Sean $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-módulos. Se tiene que en el producto cartesiano, $\bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha$, podemos definir las operaciones:*

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A} + (y_\alpha)_{\alpha\in A} = (x_\alpha + y_\alpha)_{\alpha\in A}; \quad \forall (x_\alpha)_{\alpha\in A}, (y_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha;$$

$$a(x_\alpha)_{\alpha\in A} = (ax_\alpha)_{\alpha\in A}; \quad \forall (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha \text{ y } \forall a \in R.$$

*Es rutinario verificar que con estas operaciones el conjunto $\bigtimes_{\alpha\in A} M_\alpha$ es un R-módulo. Se le conoce como el **R-módulo producto**, y se denota $\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$.*

El siguiente teorema establece la importancia que tiene el R-módulo producto.

Teorema 1.4.4. *Sean $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-módulos izquierdos, N un R-módulo izquierdo y $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ R-homomorfismos tales que $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Entonces existe un único homomorfismo $N \xrightarrow{f} \prod_{\alpha\in A} M_\alpha$*

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & M_\alpha. \end{tikzcd}$$

Es decir, $\pi_\alpha f = f_\alpha \quad \forall\alpha \in A$, *donde* $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$, *está dado por* $\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha\in A}) = x_\alpha$.

Definición 1.4.5. *Con la notación del Teorema 1.4.4, tenemos:*

(1) El homomorfismo $f : N \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$, *se conoce como* ***el producto directo de*** $(\boldsymbol{f_\alpha})_{\boldsymbol{\alpha\in A}}$, *y se denota* $f = \prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$.

(2) A la propiedad que cumple el homomorfismo producto directo; esto es $\pi_\alpha(\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha) = f_\alpha$, *se le llama* ***la propiedad universal del producto directo****.*

Ejemplo 1.4.6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre un campo K y sea $\beta = \{x_1, x_2\}$ una base de V. Consideremos:*

$\pi_1 : \langle x_1\rangle \prod \langle x_2\rangle \longrightarrow \langle x_1\rangle$ *dada por* $(ax_1, bx_2) \longmapsto ax_1$ *y*

$\pi_2 : \langle x_1\rangle \prod \langle x_2\rangle \longrightarrow \langle x_2\rangle$ *dada por* $(ax_1, bx_2) \longmapsto bx_2$

Sean $f_1 : V \longrightarrow \langle x_1\rangle$ *y* $f_2 : V \longrightarrow \langle x_2\rangle$ *transformaciones lineales. Entonces existe la transformación lineal* $f = \prod\limits_{i=1}^{2} f_i : V \longrightarrow \prod\limits_{i=1}^{2}\langle x_i\rangle$ *dada por* $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ *tal que el siguiente diagrama conmuta para* $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\prod_{i=1}^{2} f_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod\limits_{i=1}^{2}\langle x_i\rangle \arrow[d, "\pi_i"] \\ & \langle x_i\rangle. \end{tikzcd}$$

Es decir, para $i = 1, 2$ se cumple que $\pi_i(\prod_{i=1}^{2} f_i) = f_i$.

1.4.2. Suma Directa de Módulos.

En esta subsección trataremos el concepto dual del producto directo, esto es la suma directa o coproducto.

Definición 1.4.7. *Decimos que un par $(M, (j_\alpha)_{\alpha\in A})$ que consta de un R-módulo M y de R-homomorfismos $j_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ (para cada $\alpha \in A$) es un **coproducto de** $(\boldsymbol{M_\alpha})_{\boldsymbol{\alpha\in A}}$ si para cada R-módulo y cada conjunto de R-homomorfismos $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ ($\alpha \in A$) existe un único R-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} N & M \arrow[l, "f"'] \\ & M_\alpha \arrow[ul, "f_\alpha"] \arrow[u, "j_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

para todo $\alpha \in A$.

Ejemplo 1.4.8. *Sea $\mathbb{R}^2$ visto como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2.*

Sean $M_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}$ y $M_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$

Ahora consideremos las transformaciones lineales :

$$\begin{array}{rcl} j_1 : M_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,0) & \longmapsto & (a,0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} j_2 : M_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (0,b) & \longmapsto & (0,b) \end{array}$$

Sean $f_1 : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ transformaciones lineales tenemos que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, donde $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$ es tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "f"'] \\ & M_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, "j_i"'] \end{tikzcd}$$

para $i = 1, 2$. Es decir, $(\mathbb{R}^2, (j_i)_{i\in\{1,2\}})$ es una suma directa de $(M_i)_{i\in\{1,2\}}$.

Necesitamos la siguiente definición para dar una descripción del R-módulo suma directa.

Definición 1.4.9. *Decimos que un elemento* $x = (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *es* ***cero para casi toda*** $\boldsymbol{\alpha \in A}$ *si su soporte,* $s(x) = \{\alpha \in A : \pi_\alpha(x) = x_\alpha \neq 0\}$ *es finito, donde* $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$ *está dada por* $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$.

Lema 1.4.10. *Sea* $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *un conjunto indexado de* R*-módulos izquierdos. Entonces*

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \{x \in \prod_{\alpha\in A} M_\alpha : s(x) \text{ es finito } \}$$

es un R*-submódulo de* $\prod\limits_{A} M_\alpha$.

Definición 1.4.11. *Dado un conjunto indexado* $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *de* R*-módulos izquierdos. Decimos que el* R*-módulo izquierdo* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *es* ***la suma directa externa de*** $\boldsymbol{(M_\alpha)_{\alpha\in A}}$.

Observación 1.4.12. *Si* A *es finito, entonces* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha = \prod\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$.

Definición 1.4.13. *Sea* $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *un conjunto indexado de* R*-módulos. Consideremos el* R*-homomorfismo*

$$i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \prod_{\beta\in A} M_\beta \quad (\forall\ \alpha \in A)$$

dado por $i_\alpha(m_\alpha) = (x_\beta) \in \prod\limits_{\beta\in A} M_b$ *donde* $x_\beta = 0$ *si* $\beta \neq \alpha$ *y* $x_\beta = m_\alpha$ *si* $\beta = \alpha$*. A este* R*-homomorfismo se le conoce como* ***la*** $\boldsymbol{\alpha}$***-ésima inclusión natural***.

La siguiente proposición establece que el R-módulo $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ junto con las inclusiones naturales $(i_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un coproducto de $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$. (Ver definición 1.4.7).

Proposición 1.4.14. *Sea* $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ *un conjunto indexado de* R*-módulos izquierdos. Entonces la suma directa externa* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ *es un coproducto de* $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$

Observación 1.4.15. *Supongamos que* $f = \bigoplus_A f_\alpha$ *es la suma directa de los* R*-homomorfismos* $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M, \quad \alpha \in A$. *Como* $fi_\alpha = f_\alpha, \quad \forall \alpha \in A$ *tenemos que* $Imf_\alpha \leqslant Imf$.

Corolario 1.4.16. *Con la notación de la Proposición 1.4.14. Si* $f = \bigoplus_A f_\alpha$, *entonces* $Imf = \sum_A Imf_\alpha$ *donde*

$$\sum_A Imf_\alpha = \{f_{\alpha_1}(x_1) + \ldots + f_{\alpha_n}(x_n) : \alpha_j \in A\}.$$

Una vez habiendo definido la suma directa externa, veamos el concepto de suma directa interna.

Definición 1.4.17. *Supongamos que* $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ *es un conjunto indexado de* R*-submódulos de* M. *Sean* $j_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ *los correspondientes homomorfismos inclusión canónica (para cada* $\alpha \in A$*). Decimos que* M *es la* ***suma directa interna de sus R-submódulos*** $(\boldsymbol{M_\alpha})_{\boldsymbol{\alpha \in A}}$ *si*

$$\begin{array}{rcl} j = \bigoplus_{\alpha \in A} j_\alpha : \bigoplus_A M_\alpha & \longrightarrow & M \\ x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} & \longmapsto & \sum_A j_\alpha(x_\alpha) = \sum_A x_\alpha \end{array}$$

es un isomorfismo. Se denota a la suma directa interna de M *por* $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$.

Ejemplo 1.4.18. *Consideremos a* $\mathbb{R}^n$ *como un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* n.

Consideremos los $\mathbb{R}$*-submódulos de* $\mathbb{R}^n$, $M_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = 0, \quad \forall k \neq i\}$ *y sean* $j_i : M_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *las inclusiones canonicas para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Entonces $j = \bigoplus_{i=1}^{n} j_i : \bigoplus_{i=1} M_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *dada por* $j(x) = (x_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, x_n)$ *es claramente un isomorfismo.*

Por lo que $\mathbb{R}^n$ *es la suma directa interna de sus* R*-submódulos* M_i $i = 1, \ldots, n$.

El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de la suma directa interna.

Proposición 1.4.19. *Sea $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos de M. Entonces M es la suma directa interna de $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ si, y sólo si, cada $x \in M$ se puede escribir de manera única como $x = \sum\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ con $x_\alpha \in M_\alpha$ con solo un número finito de x_α distinto de cero.*

Necesitamos la siguiente definición para dar otra caracterización de la suma directa interna de un R-módulo M.

Definición 1.4.20. *Sea $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos de M. Decimos que $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ es **independiente** si para cada $\alpha \in A$ se tiene que:*

$$M_\alpha \cap (\sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta) = \{0\}.$$

Observación 1.4.21. *Notemos que la definición anterior es consistente con la definición de R-submódulos independientes para el caso en le que el conjunto indexado consta de solo dos R-submódulos. (Ver definición 1.3.5).*

Ejemplo 1.4.22. *Considera los R-submódulos de $\mathbb{R}^n$, $M_j = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = 0, \quad \forall k \neq j\}$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Veamos que el conjunto $(M_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ es un conjunto independiente de $\mathbb{R}$-submódulos de $\mathbb{R}^n$.

Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in M_j \cap (\sum\limits_{k\neq j} M_k)$. Por estar $(x_1, \ldots, x_n) \in M_j$ tenemos que $x_k = 0$ $\forall k \neq j$. Por otro lado, por estar $(x_1, \ldots, x_n) \in \sum\limits_{k\neq j} M_k$ tenemos que $x_j = 0$. Por lo tanto $(x_1, \ldots, x_n) = (0, 0 \ldots, 0)$.

De donde, $M_j \cap (\sum\limits_{k\neq j} M_k) = \{0\} \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Como corolario de la Proposición 1.4.19 tenemos el siguiente resultado. (Ver Definición 1.1.21).

Corolario 1.4.23. *El R-módulo M es la suma directa interna de sus R-submódulos $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ si, y sólo si, $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un conjunto independiente y genera a M.*

La siguiente definición va ser de gran utilidad en la secciones posteriores.

Definición 1.4.24. *Si los R-submódulos $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M son idependientes, decimos que la suma $\sum\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$ es **directa** y escribimos*

$$\sum_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$$

*También podemos referirnos a esta suma como una **descomposición directa de $\sum\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$**.*

1.5. Idempotentes y Módulos Inescindibles.

En esta sección estudiaremos a los endomorfismos idempotentes y a los R-módulos inescindibles. Durante toda la sección trabajaremos con la suma directa interna de un R-módulo.

1.5.1. Endomorfismos Idempotentes.

Empezamos esta subsección estudiando el concepto de endomorfismo idempotente. Veremos que este concepto esta íntimamente ligado con la descomposición en suma directa interna de un R-módulo.

Definición 1.5.1. *Sea K un sumando directo de M con sumando directo complementario K', es decir, $M = K \oplus K'$. Definimos $p_K : M \longrightarrow K$ dada por $p_K(m) = m_K$, donde $m = m_K + m_{K'}$.*

*A p_K se le conoce como **la proyección de M sobre K a lo largo de K'**.*

Observación 1.5.2. *Con la notación de la definición anterior se tiene que la proyección de M sobre K a lo largo de K', p_K, es un epimorfismo.*

Ejemplo 1.5.3. *Sean* $M = \mathbb{R}^2$, $K = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ *y* $K' = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ *es claro que* $M = K \oplus K'$ *y* $p_K : M \longrightarrow K$ *dada por* $p_K(a, b) = (a - b, 0)$ *ya que* $(a, b) = (a - b, 0) + (b, b)$.

Además tenemos que $Ker\ p_k = \{(a, b) : (a-b, 0) = (0, 0)\}$ *de donde* $a-b = 0$ *y por lo tanto* $a = b$. *Esto es,* $Ker\ p_k = K'$.

Lema 1.5.4. *Si* $M = K \oplus K'$, *entonces la proyección de* M *sobre* K *a lo largo de* K' *es el único epimorfismo*

$$p_K : M \longrightarrow K$$

que satisface $p_K|_K = I_K$ *y* $Ker\ p_K = K'$.

Lema 1.5.5. *Sea* K *un sumando directo de* M *con sumando directo complementario* K'. *Es decir,* $M = K \oplus K'$. *Entonces* $p_{K'} : M \longrightarrow K'$ *(la proyección de* M *sobre* K' *a lo largo de* K*) está dada por* $p_{K'}(m) = m - p_K(m)$.

La siguiente proposición caracteriza cuándo un R-submódulo L de M es un sumando directo complementario de K'.

Proposición 1.5.6. *Sean* $M = K \oplus K'$, $p_K : M \longrightarrow K$ *la proyección de* M *sobre* K *a lo largo de* K' *y* L *un* R*-submódulo de* M. *Entonces* $M = L \oplus K'$ *si, y sólo si,* $p_K : L \longrightarrow K$ *es un isomorfismo.*

Definición 1.5.7. *Dado un* R*-módulo* M, *denotamos por* $End({}_RM)$ *al conjunto de todos los endomorfismos de* M. *Esto es,*

$$End({}_RM) = \{f : M \longrightarrow M : \ f \text{ es un } R\text{-homomorfismo } \}.$$

Es fácil ver que $End({}_RM)$ *es un anillo asociativo con uno. Se le conoce como* ***el anillo de los endomorfismos de M****.*

Definición 1.5.8. *Sean* $M = K \oplus K'$ *y* $p_K : M \longrightarrow K$ *(la proyección de* M *sobre* K *a lo largo de* K'*). Definimos* $e_K \in End({}_RM)$ *dado por* $\boldsymbol{e_k(m) = p_K(m)}$.

Observación 1.5.9. *Con la notación de la Definición anterior es claro que* e_K *es un* R*-homomorfismo.*

Lema 1.5.10. *Con la notación de la Definición anterior se tiene que* $e_K^2 = e_K$ *e* $Im(e_K) = K$.

Recordemos que, dado R un anillo asociativo con 1_R, se tiene que un elemento $e \in R$ es idempotente si $e^2 = e$. Es claro que 0_R y 1_R son siempre elementos idempotentes en R.

Notación: Dado un endomorfismo idempotente $e \in End({}_RM)$, denotamos algunas veces a $Im(e)$ la imagen de M bajo e, por Me.

El siguiente lema establece las principales propiedades que satisfacen los endomorfismos idempotentes.

Lema 1.5.11. *Sea* e *un endomorfismo idempotente de* M. *Entonces*

(1) $Id - e$ *es idempotente en* $End({}_RM)$;

(2) $Ker\ e = \{x \in M : x = x(Id - e)\} = Im(Id - e)$;

(3) $Im\ e = \{x \in M : x = xe\} = Ker(Id - e)$;

Como consecuencia inmediata del Lema 1.5.4 y del Lema 1.5.11 tenemos.

Corolario 1.5.12. *Si* $M = K \oplus K'$, *entonces existe un único endomorfismo idempotente* $e_K \in End({}_RM)$ *tal que* $K = Me$ *y* $K' = M(Id - e_k)$.

1.5.2. Los idempotentes de una descomposición.

Una vez habiendo estudiado el concepto de endomorfismo idempotente de un R-módulo M, estudiaremos la relación de éste con el concepto de suma directa interna del R-módulo M. Para lo anterior usaremos el Corolario 1.5.12.

Supongamos que M tiene una descomposición en suma directa interna de $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, es decir $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Entonces para cada $\alpha \in A$

$$M = M_\alpha \oplus (\sum_{\beta \neq \alpha} M_\beta).$$

Por el Corolario 1.5.12, tenemos que para cada $\alpha \in A$ existe un único $e_\alpha \in End({}_RM)$ tal que $M_\alpha = Me_\alpha$ y $Ker\ e_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.5.13. *Llamamos a $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$* ***los idempotentes para la descomposición $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$****, y para cada $\alpha \in A$ llamamos a e_α* ***el idempotente para M_α en esta descomposición****.*

De hecho se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.5.14. *Sea $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos de M. Entonces $M = \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ si, y sólo si, existe un conjunto indexado $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de idempotentes en $End({}_RM)$ tales que para cada $\alpha \in A$, $M_\alpha = Me_\alpha$ y $Ker\ e_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha} M_\beta$.*

Ejemplo 1.5.15. *Sea ${}_{\mathbb{R}}M = \mathbb{R}^3$ y $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ con $M_1 = \{(a,0,0) : a \in \mathbb{R}\}$, $M_2 = \{(0,b,0) : b \in \mathbb{R}\}$ y $M_3 = \{(c,c,c) : c \in \mathbb{R}\}$.*

Tenemos que

$e_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $e_1(a,b,c) = (a-c,0,0)$, $e_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $e_2(a,b,c) = (0,b-c,0)$ y $e_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $e_3(a,b,c) = (c,c,c)$, es un conjunto indexado de idempotentes en ${}_{\mathbb{R}}M$ tales que para toda $\alpha \in \{1,2,3\}$ $M_\alpha = Me_\alpha$ y $Ker\ e_\alpha = \sum_{\alpha\neq\beta} M_\beta$. De donde (e_1,e_2,e_3) son los idempotentes para esta descomposición.

Definición 1.5.16. *Dado un conjunto de idempotentes $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de un anillo R se dice que los idempotentes son* ***ortogonales*** *si $e_je_i = \delta_{ij}e_j$ para toda $i,j \in A$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.*

Ejemplo 1.5.17. *Retomando a los idempotentes del Ejemplo 1.5.15 dados por:*

$e_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde $e_1(a,b,c) = (a-c,0,0)$.

$e_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *donde* $e_2(a,b,c) = (0, b-c, 0)$.

$e_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *donde* $e_3(a,b,c) = (c,c,c)$.

Tenemos que (e_1, e_2, e_3) *es un conjunto de idempotentes ortogonales. Verifiquemos la condición para* $i \neq j$.

$e_1 e_2 = e_1(0, b-c, 0) = (0,0,0)$,

$e_2 e_1 = e_2(a-c, 0, 0) = (0,0,0)$,

$e_1 e_3 = e_1(c,c,c) = (0,0,0)$,

$e_3 e_1 = e_1(a-c, 0, 0) = (0,0,0)$,

$e_2 e_3 = e_2(c,c,c) = (0,0,0)$,

$e_3 e_2 = e_3(0, b-c, 0) = (0,0,0)$.

Del Lema 1.5.11 tenemos de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 1.5.18. *Los idempotentes* $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ *para una descomposición* $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ *son ortogonales.*

Definición 1.5.19. *Decimos que un conjunto finito de idempotentes ortogonales* $e_1, \ldots, e_n$ *en un anillo* R *es* ***completo*** *si* $e_1 + \cdots +, e_n = 1_R$ *con* $1_R \in R$.

Corolario 1.5.20. *Sean* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ R*-submódulos de* M*. Entonces* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ *si, y sólo si, existe un conjunto completo de idempotentes ortogonales* $e_1, e_2 \ldots, e_n \in End({}_RM)$ *con* $M_i = Me_i$ *para* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 1.5.21. *Retomando a los idempotentes del Ejemplo 1.5.15 dados por:*

$e_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $e_1(a,b,c) = (a-c, 0, 0)$.

$e_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $e_2(a,b,c) = (0, b-c, 0)$.

$e_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $e_3(a,b,c) = (c,c,c)$.

Veamos que el conjunto (e_1, e_2, e_3) *es completo.*

$e_1 + e_2 + e_3(a, b, c) = e_1(a, b, c) + e_2(a, b, c) + e_3(a, b, c) = (a - c, 0, 0) + (0, b - c, 0) + (c, c, c) = (a - c + c, b - c + c, c) = (a, b, c) = Id_{\mathbb{R}^3}(a, b, c)$.

Por lo tanto, $e_1 + e_2 + e_3 = Id_{\mathbb{R}^3} = 1_{End({}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3)}$.

1.5.3. Módulos Inescindibles.

Por último en esta subsección estudiaremos el concepto de R-módulo inescindible. En particular, veremos cómo se relaciona dicho concepto con la noción de endomorfismo idempotente primitivo.

Definición 1.5.22. *Sea M un R-módulo no cero. Decimos que M es* ***inescindible*** *si sus únicos sumandos directos son M y $\{0_M\}$.*

Ejemplo 1.5.23. *Se tiene que ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es inescindible como $\mathbb{Z}$-módulo.*

Supongamos que ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}a \bigoplus \mathbb{Z}b$ de donde $1 = ma + nb$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $(a, b) = 1$.

Pero $ba \in \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = 0$, de donde $ba = 0$ y entonces $b = 0$ ó $a = 0$, por lo cual $\mathbb{Z}a = 0$ ó $\mathbb{Z}b = 0$. Por lo tanto, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es inescindible.

Proposición 1.5.24. *Sea e un idempotente en $End({}_RM)$. Entonces hay un isomorfismo de anillos*

$$\phi : eEnd({}_RM)e \longrightarrow End({}_RMe)$$

dado por

$$\begin{array}{rcl} \phi(ese) : Me & \longrightarrow & Me \\ xe & \longmapsto & x(ese) \end{array}$$

donde $s \in End({}_RM)$.

Definición 1.5.25. *Decimos que un idempotente $e \in R$ es* ***primitivo*** *si $e = e_1 + e_2$ con e_1 y e_2 idempotentes ortogonales, implica que $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$.*

La siguiente proposición establece cómo se relaciona el concepto de endomorfismo idempotente primitivo con el de R-módulo inescindible.

Proposición 1.5.26. *Sea M un R-módulo no cero. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *M es inescindible;*

(2) *0 y Id_M son los únicos idempotentes en $End(_RM)$;*

(3) *Id_M es un idempotente primitivo en $End(_RM)$.*

El siguiente corolario nos proporciona una caracterización de los sumandos directos inescindibles.

Corolario 1.5.27. *Sean M un R-módulo y $e = e^2 \in End(_RM)$ con $e \neq 0$. Entonces Me es inescindible si, y sólo si, e es un idempotente primitivo.*

Capítulo 2

Teoría Avanzada de Módulos.

Una vez que ya hemos estudiado los resultados básicos relacionados con los R-módulos, abordaremos ahora los conceptos de ciertos R-módulos especiales tales como R-módulo semisimple, R-módulo artiniano, R-módulo noetheriano, etc. Estos nuevos conceptos nos permitirán enunciar y demostrar el Teorema de Jordan-Hölder y el Teorema de Krull-Schmidt.

2.1. Módulos Semisimples, El Soclo y el Radical.

2.1.1. Módulos Semisimples.

Recordemos que como R es un anillo asociativo con 1_R, entonces R es finitamente generado y por lo tanto R tiene ideales maximales; de donde por el Corolario 1.1.30 tenemos que existen R-módulos simples.

Definición 2.1.1. *Sea $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos simples de un R-módulo M.*

(1) Si ${}_RM$ es la suma directa (interna) de $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$, entonces decimos que $M = \bigoplus_A T_\alpha$ es una ***descomposición semisimple de M****.*

(2) Decimos que un R-módulo M es ***semisimple*** *si tiene una descomposición semisimple.*

Ejemplos 2.1.2.

(1) Si ${}_RM$ es simple, entonces ${}_RM$ es semisimple.

(2) $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-módulo semisimple ya que $\mathbb{R}^2 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$ es una descomposición semisimple de $\mathbb{R}^2$.

Una de las propiedades más importantes de los R-módulos simples nos la da la Proposición 2.1.4. Para demostrar dicha proposición es necesario establecer primero el siguiente lema.

Lema 2.1.3. *Sea $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos simples de M. Si*

$$M = \sum_{\alpha\in A} T_\alpha,$$

entonces para cada R-submódulo K de M hay un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $(T_\beta)_{\beta\in B}$ es independiente y $M = K \oplus (\bigoplus_B T_\beta)$.

Del Lema 2.1.3 tenemos como consecuencia el siguiente resultado. Ver definición 1.1.21.

Proposición 2.1.4. *Si M es un R-módulo izquierdo generado por un conjunto indexado de R-submódulos simples $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$, entonces hay un subconjunto $B \subseteq A$ tal que*

$$M = \bigoplus_B T_\beta.$$

En particular, M es semisimple.

Proposición 2.1.5. *Sea M un R-módulo izquierdo semisimple con descomposición semisimple $M = \bigoplus_A T_\beta$. Si*

$$0 \longrightarrow {}_RK \xrightarrow{f} {}_RM \xrightarrow{g} {}_RN \longrightarrow 0$$

es un sucesión exacta corta, entonces se tiene:

(1) La sucesión se escinde;

(2) ${}_RK$ y ${}_RN$ son semisimples;

(3) Existe un subconjunto $B \subseteq A$ e isomorfismos tales que

$$N \simeq \bigoplus_{B} T_\beta \quad y \quad K \simeq \bigoplus_{A \setminus B} T_\alpha.$$

El resultado anterior nos dice que cada R-submódulo y cada cociente de un R-módulo semisimple es semisimple.

Corolario 2.1.6. *Sea $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos simples de M. Si ${}_RT$ es un R-submódulo simple de M tal que*

$$T \cap \sum_{A} T_\alpha \neq 0,$$

entonces hay un $\alpha \in A$ tal que $T_\alpha \simeq T$.

Terminamos esta sección con el siguiente resultado, el cual caracteriza a los R-módulos semisimples.

Teorema 2.1.7. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) ${}_RM$ es semisimple;

(2) ${}_RM$ es la suma de un conjunto de R-submódulos simples;

(3) ${}_RM$ es la suma de sus R-submódulos simples;

(4) Cada R-submódulo de ${}_RM$ es un sumando directo de ${}_RM$;

(5) Cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow {}_RK \xrightarrow{f} {}_RM \xrightarrow{g} {}_RN \longrightarrow 0$$

se escinde.

2.1.2. El Soclo y El Radical.

En esta subsección estudiaremos el concepto del soclo y el radical de un R-módulo izquierdo, conceptos que serán de gran importancia en secciones posteriores.

Definición 2.1.8. *Sea M un R-módulo izquierdo. Definimos* ***el soclo de M*** *como la suma de todos sus R-submódulos simples. Es decir,*

$$Soc\ M = \sum_{\alpha \in A} S_\alpha$$

donde S_α es un R-submódulo simple de M.

Ejemplos 2.1.9.

(1) Consideremos a $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Tenemos que $N = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ es el único $\mathbb{Z}$-submódulo simple de $\mathbb{Z}_4$, entonces $Soc\ \mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{2}\}$.

(2) Consideremos a $\mathbb{R}^n$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Los $\mathbb{R}$-módulos simples son los $\mathbb{R}$-módulos ($\mathbb{R}$-subespacios vectoriales) de dimensión 1.

Tomemos los $\mathbb{R}$-submódulos

$$N_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = 0 \quad \forall k \neq i\}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sabemos que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, entonces por el Teorema 2.1.7, $\mathbb{R}^n$ es semi-simple y por tanto $Soc\ \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.10. *Sea M un R-módulo izquierdo. Definimos* ***el radical de M*** *como:*

$$Rad\ M = \bigcap \{{}_R K < {}_R M : K \text{ es maximal en } M\}.$$

Ejemplo 2.1.11. *Consideremos a $\mathbb{Z}$ como un $\mathbb{Z}$-módulo. Sabemos que $\mathbb{Z}p$ con p primo es un $\mathbb{Z}$-submódulo maximal de $\mathbb{Z}$, de donde Rad $\mathbb{Z} = \{0\}$.*

Para continuar con el desarrollo de esta sección necesitamos la definición de un R-módulo esencial y de un R-módulo superfluo.

Definición 2.1.12.

(1) *Decimos que un R-submódulo ${}_RK$ de ${}_RM$ es* ***esencial*** *(o* ***grande****) en ${}_RM$ denotado*

$$ {}_RK \trianglelefteq {}_RM, $$

si para cualquier R-submódulo ${}_RL \leqslant {}_RM$ tal que,

$$ {}_RK \cap {}_RL = \{0\} \text{ se tenga que } {}_RL = 0. $$

(2) *Decimos que un R-submódulo ${}_RK$ de ${}_RM$ es* ***superfluo*** *(o* ***pequeño****) en ${}_RM$ denotado*

$$ {}_RK \ll {}_RM, $$

si para cualquier R-submódulo ${}_RL \leqslant {}_RM$ tal que,

$$ {}_RK + {}_RL = M \text{ se tenga que } {}_RL = {}_RM. $$

Ejemplo 2.1.13. *Consideremos $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Tenemos que $\{\overline{0}, \overline{2}\}$ es $\mathbb{Z}$-submódulo esencial y superfluo de $\mathbb{Z}_4$ ya que $\mathbb{Z}_4, \{\overline{0}, \overline{2}\}$ y $\{\overline{0}\}$ son los únicos $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Z}_4$.*

Las siguientes proposiciones caracterizan al soclo y al radical de un R-módulo M.

Proposición 2.1.14. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces*

$$ Soc\ M = \bigcap \{ {}_RL \leqslant {}_RM : L \text{ es esencial en } M \}. $$

Proposición 2.1.15. *Si M es un R-módulo izquierdo, entonces*

$$ Rad\ M = \sum \{ {}_RL \leqslant {}_RM : L \text{ es superfluo en } M \}. $$

A continuación revisaremos algunas propiedades importantes del soclo de un R-módulo M.

Proposición 2.1.16. *Sean M y N R-módulos izquierdos y sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces*

$$f(Soc\ M) \leqslant Soc\ N.$$

Corolario 2.1.17. *Sea M un R-módulo y sea $K \leqslant M$. Entonces*

$$Soc\ K = K \cap Soc\ M.$$

En particular,

$$Soc(Soc\ M) = Soc\ M.$$

Proposición 2.1.18. *Si $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un conjunto indexado de R-submódulos de M tal que $M = \bigoplus_A M_\alpha$, entonces*

$$Soc\ M = \bigoplus_A Soc\ M_\alpha.$$

Para terminar esta subsección ahora revisaremos algunas propiedades importantes del radical de un R-módulo M.

Proposición 2.1.19. *Sean M y N R-módulos izquierdos y sea $f : M \longrightarrow N$ un R-homomorfismo. Entonces*

$$f(Rad\ M) \leqslant Rad\ N.$$

Proposición 2.1.20. *Si $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo y si $Ker f \leqslant Rad\ M$, entonces $Rad\ N = f(Rad\ M)$. En particular,*

$$Rad\ (M/Rad\ M) = 0.$$

Proposición 2.1.21. *Si $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un conjunto indexado de R-submódulos de M tal que $M = \bigoplus_A M_\alpha$, entonces*

$$Rad\ M = \bigoplus_A Rad\ M_\alpha.$$

2.2. Módulos Artinianos y Noetherianos.

En esta sección veremos la definición de un R-módulo artiniano y de un R-módulo noetheriano. Así como algunas propiedades importantes.

Antes de dar la definición de un R-módulo artiniano y de un R-módulo noetheriano vamos a revisar los conceptos conocidos como las condiciones de cadena.

Definición 2.2.1.

(1) *Decimos que un conjunto $\mathcal{L}$ de R-submódulos de M satisface* ***la condición ascendente de cadena*** *si para cualquier cadena ascendente*

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ldots \leqslant L_n \ldots$$

en $\mathcal{L}$, hay un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_{n_o+i} = L_{n_0}$ para $i = 1, 2, \ldots$

(2) *Decimos que un conjunto $\mathcal{L}$ de R-submódulos de M satisface* ***la condición descendente de cadena*** *si para cualquier cadena descendente*

$$L_1 \geqslant L_2 \geqslant \ldots \geqslant L_n \ldots$$

en $\mathcal{L}$, hay un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_{n0+i} = L_{n_0}$ para $i = 1, 2, \ldots$

Ejemplos 2.2.2.

(1) *Sea ${}_FV$ un F-espacio vectorial de dimension finita, entonces cada conjunto $\mathcal{L}$ de F-subespacios de ${}_FV$ satisface la condición ascendente de cadena.*

(2) *Sea ${}_FV$ un F-espacio vectorial de dimension finita, entonces cada conjunto $\mathcal{L}$ de F-subespacios de ${}_FV$ satisface la condición descendente de cadena.*

Definición 2.2.3.

(1) *Decimos que un R-módulo M es* ***noetheriano****, si para cada cadena ascendente de R-submódulos de M*

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ldots \leqslant L_n \ldots$$

existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_{n0+i} = L_{n_0}$ para $i = 1, 2, \ldots$. Es decir, toda cadena ascendente $L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ldots \leqslant L_n \ldots$ de R-submódulos de M satisface la condición ascendente de cadena.

(2) *Decimos que un R-módulo M es* ***artiniano****, si para cada cadena descendente de R-submódulos de M*

$$L_1 \geqslant L_2 \geqslant \ldots \geqslant L_n \ldots$$

existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_{n_0+i} = L_{n_0}$ para $i = 1, 2, \ldots$. Es decir, toda cadena descendente $L_1 \geqslant L_2 \geqslant \ldots \geqslant L_n \ldots$ de R-submódulos de M satisface la condición descendente de cadena.

Ejemplos 2.2.4.

(1) *${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es noetheriano pero no es artiniano.*

(2) *Un espacio vectorial de dimension finita ${}_FV$ es noetheriano y artiniano.*

Para poder dar una caracterización de los R-módulos artinianos y noetherianos, respectivamente, necesitamos dar la definición de un R-módulo finitamente cogenerado y recordar la definición de un R-módulo finitamente generado.

Definición 2.2.5. *Decimos que un R-módulo izquierdo M es* ***finitamente cogenerado*** *en caso de que para cada cualquier subconjunto de R-submódulos de M con $\bigcap_{N \in \mathcal{A}} N = \{0\}$, se tiene que existe un subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\bigcap_{N \in \mathcal{F}} N = \{0\}$.*

Ejemplo 2.2.6. *Sea S un R-módulo simple. Entonces el conjunto $\mathcal{A}$ de todos los R-submódulos de S, consta de dos elementos. Por lo que si $\bigcap_{\mathcal{A}} S_i = \{0_S\}$, entonces $\{0_S\} \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es finito podemos escoger a $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ tal que $\bigcap_{\mathcal{F}} S_i = \{0_S\}$. Por lo tanto, S es finitamente cogenerado.*

Recordemos que un R-módulo M es finitamente generado si tiene un conjunto generador finito. El siguiente lema nos da una caracterización de un R-módulo finitamente generado.

Lema 2.2.7. *Sea M un R-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Para todo conjunto $\mathcal{A}$ de R-submódulos de M con $\sum_{N\in\mathcal{A}} N = M$ existe un subconjunto finito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\sum_{N\in\mathcal{F}} N = M$;

(2) M es finitamente generado.

La siguiente proposición nos proporciona una caracterización de un R-módulo artiniano. Para la demostración de dicha proposición se requiere el Teorema de la Correspondencia.

Proposición 2.2.8. *Sea M un R-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) ${}_RM$ es artiniano;

(2) Cada R-módulo factor de ${}_RM$ es finitamente cogenerado;

(3) Cada conjunto no vacío de R-submódulos de ${}_RM$ tiene un elemento minimal.

Análogamente, la siguiente proposición nos proporciona una caracterización de un R-módulo noetheriano.

Proposición 2.2.9. *Sea M un R-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) ${}_RM$ es noetheriano;

(2) Cada R-submódulo de ${}_RM$ es finitamente generado;

(3) Cada conjunto no vacío de R-submódulos de ${}_RM$ tiene un elemento maximal.

El siguiente resultado establece, en particular, que todo R-submódulo de un R-módulo artiniano (noetheriano) también es artiniano y (noetheriano).

Proposición 2.2.10. *Sea*

$$0 \longrightarrow {}_RK \longrightarrow {}_RM \longrightarrow {}_RN \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta. Entonces ${}_RM$ es artiniano (noetheriano) si, y sólo si, ${}_RK$ y ${}_RN$ son artinianos (noetherianos).

De la proposición anterior obtenemos de manera inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.2.11. *Sea ${}_RM = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$. Entonces ${}_RM$ es artiniano (noetheriano) si, y sólo si, cada $M_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ es artiniano (noetheriano).*

Terminamos esta sección con la siguiente proposición, la cual sera retomada en la sección 2.4.

Proposición 2.2.12. *Sea M un R-módulo (no cero) que sea artiniano o noetheriano. Entonces existe una descomposición de M en suma directa de R-submódulos*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n,$$

donde cada R-módulo M_i es inescindible $(i = 1, \ldots, n)$.

2.3. Módulos de Longitud Finita.

En esta sección introduciremos el concepto de R-módulos de longitud finita y probaremos el Teorema de Jordan-Hölder.

Recordemos que un R-módulo M es semisimple si ${}_RM$ es la suma de R-módulos simples. Una caracterización de estos R-módulos es: ${}_RM$ es semisimple si, y sólo si, cada R-submódulo de M es un sumando directo de ${}_RM$. (Ver Teorema 2.1.7). Como consecuencia de lo anterior se tiene que cada R-submódulo y cada R-módulo cociente de un R-módulo cociente de un R-módulo semisimple ${}_RM$ es semisimple. Pero en general la categoría de los R-módulos semisimples, no es cerrada bajo extensiones. Esto conduce al estudio de R-módulos de longitud finita, que es la categoría más pequeña cerrada bajo extensiones que contiene a los R-módulos simples.

Definición 2.3.1. *Sea M un R-módulo.*

*(1) Decimos que un R-módulo M es de **longitud finita**, si hay una cadena descendente finita de R-submódulos, la cual se conoce como filtración finita*

$$F: \qquad M = M_0 \geqslant M_1 \geqslant \ldots \geqslant M_n = 0$$

tal que M_i/M_{i+1} es cero o simple para todo $i = 0, \ldots, n-1$.

*(2) Decimos que dicha filtración F de M es una **serie de composición generalizada** y a los R-módulos cociente no cero M_i/M_{i+1} los llamamos **los factores de composición de la filtración F**.*

*(3) Si ningún R-módulo cociente M_i/M_{i+1} es cero para $i = 0, \ldots, n-1$, entonces F se dice que es una **serie de composición para M**.*

*(4) Para cada R-módulo simple S denotamos por $m_S^F(M)$ al **número de factores de composición de F que son isomorfos a ${}_RS$**. A $m_S^F(M)$ se le conoce como **la multiplicidad de ${}_RS$ en ${}_RM$ con respecto a la serie de composición generalizada de F**.*

*(5) Definimos **la longitud de M con respecto a la filtración F**, denotada, $l_F(M)$, como $\sum m_S^F(M)$; donde la suma se toma sobre todos los R-módulos simples.*

*(6) Definimos **la longitud de M**, denotada por $l(M)$ como el mínimo de las longitudes $l_F(M)$ y la multiplicidad de ${}_RS$ en ${}_RM$, denotada por $m_s(M)$ es el minimo de $m_S^F(M)$.*

Ejemplo 2.3.2. *Consideremos ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = {}_{\mathbb{R}}N_1 \oplus {}_{\mathbb{R}}N_2 \oplus {}_{\mathbb{R}}N_3$*

${}_{\mathbb{R}}N_1 = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, ${}_{\mathbb{R}}N_2 = \{(0, b, 0) : b \in \mathbb{R}\}$ *y* ${}_{\mathbb{R}}N_3 = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$ *se tiene que*

$$\mathbb{R}^3 > N_1 \oplus N_2 > N_1 > 0$$

es una filtración finita de $\mathbb{R}$-submódulos de ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$.

Ahora bien, lo que nosotros queremos demostrar es que la multiplicidad del R-módulo ${}_RS$ en ${}_RM$, $m_S^F(M)$, no depende de la serie de composición F de M. De esto se desprende que la longitud de M, $l(M)$, no depende de la serie de composición F.

Para ello, consideramos

$$0 \longrightarrow {}_RA \xrightarrow{f} {}_RB \xrightarrow{g} {}_RC \longrightarrow 0.$$

una sucesión exacta corta y sea F una serie de composición generalizada

$$B = B_0 \geqslant B_1 \geqslant \ldots \geqslant B_n = 0.$$

de B. La serie de composición generalizadas F induce series de composición generalizadas F' de A y F'' de C dadas por:

$$A = f^{-1}(B) \geqslant f^{-1}(B_1) \geqslant \ldots \geqslant f^{-1}(B_n) = 0$$

y

$$C = g(B) \geqslant g(B_1) \geqslant \ldots \geqslant g(B_n) = 0.$$

Donde $f^{-1}(B_n) = 0$, ya que f es monomorfismo y $C = g(B)$, ya que g es epimorfismo. Escribimos $f^{-1}(B_i) = A_i$ y $g(B_i) = C_i$.

Proposición 2.3.3. *Considerando la notación anterior se tiene:*

(1) Para cada R-módulo simple ${}_RS$:

$$m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(C) = m_S^F(B);$$

(2) $l_{F'}(A) + l_{F''}(C) = l_F(B)$.

A continuación enunciaremos y probaremos el Teorema de Jordan-Hölder.

Teorema 2.3.4 (Jordan-Hölder)**.** *Sea B un R-módulo de longitud finita, F y G dos series de composición para B. Entonces para cada R-módulo simple S tenemos que:*

$$m_S^F(B) = m_S^G(B),$$

y por tanto

$$l_F(B) = l_G(B) = l(B).$$

Demostración.

Haremos la prueba por inducción sobre la longitud de ${}_RB$, $l({}_RB)$.

Si $l({}_RB) = 0$. Tenemos que existe una serie de composición generalizada, H, de ${}_RB$:

$$ {}_RB = B_0 \geqslant B_1 \geqslant \ldots \geqslant B_n = 0, $$

tal que $l_H({}_RB) = l({}_RB) = 0$. Entonces para todo R-módulo simple S, tenemos que $\sum m_S^H(B) = 0$, de donde $m_S^H(B) = 0\ \forall\ S$ simple por lo cual,

$$ B_i/B_{i+1} = 0, \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}; $$

de donde $B_0 = B_1 = \ldots = B_{n-1} = B_n$. Como $B_n = 0$, se tiene que $B = 0$ y por tanto se tiene trivialmente el resultado en este caso.

Si $l({}_RB) = 1$. Tenemos que existe una serie de composición generalizada, H, de ${}_RB$:

$$ {}_RB = B_0 \geqslant B_1 \geqslant \ldots \geqslant B_n = 0, $$

tal que $l_H({}_RB) = l({}_RB) = 1$. Entonces $B_i/B_{i+1} \simeq S$ para algún R-módulo simple S y $B_j/B_{j+1} = 0$ para toda $j \neq i$ De donde, $B = B_i$ y denotemos por K a B_{i+1}.

Consideremos la sucesión exacta

$$ 0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/K \longrightarrow 0 $$

Como H es una serie de composición generalizada para ${}_RB$ tenemos por la Proposición 2.3.5 que existen H' y H'' series de composición generalizadas para K y B/K respectivamente, y

$$ l_{H'}(K) + l_{H''}(B/K) = l_H(B) = 1. $$

De donde, $l_{H'}(K) = 0$ y $l_{H''}(B/K) = 1$ ó $l_{H'}(K) = 1$ y $l_{H''}(B/K) = 0$. Claramente el segundo caso no puede pasar ya que $l_{H''}(B/K) = 0$ implica, por el caso anterior, que $B/K = 0$. Lo cual es una contradicción, ya que $B/K \simeq S$ para algún R-módulo simple.

De donde sólo tenemos el caso $l_{H'}(K) = 0$ y $l_{H''}(B/K) = 1$. Como $l_{H'}(K) = 0$ tenemos que, por el caso anterior que $K = 0$ y por tanto $B \simeq B/K \simeq S$. Es decir, B es un R-módulo simple. Por lo tanto, el resultado se sigue de manera inmediata.

Supongamos que se cumple el resultado para $l({}_RB) \leqslant n-1$.

Ahora, si $l({}_RB) = n > 1$, entonces tenemos que existe una serie de composición generalizada H de ${}_RB$:

$$ {}_RB = B_0 \geqslant B_1 \geqslant \ldots \geqslant B_n = 0, $$

tal que $l_H({}_RB) = l({}_RB) = n$. De donde ${}_RB$ no es un R-módulo simple y por tanto ${}_RB$ tiene un R-submódulo $0 \neq {}_RA < {}_RB$.

Así pues podemos considerar la siguiente sucesión exacta

$$ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/A \longrightarrow 0. $$

Como H es una serie de composición generalizada de ${}_RB$, tenemos por la Proposición 2.3.5 que existen H' y H'' son series de composición generalizadas de A y B/A respectivamente, tales que

$$ l_{H'}(A) + l_{H''}(B/A) = l_H(B). $$

Como $l(A) + l(B/A) \leqslant l_{H'}(A) + l_{H''}(B/A) = l_H(B) = l(B)$, se tiene que $l(A) \leqslant l(B)$ y $l(B/A) \leqslant l(B)$. Veamos primero que $l(A) < l(B)$ y que $l(B/A) < l(B)$.

Supongamos para llegar a un contradicción que $l(A) = l(B)$. Entonces $l(B/A) = 0$. Lo cual es una contradicción ya que $A \neq B$.

Ahora si suponemos que $l(B/A) = l(B)$. Entonces $l(A) = 0$ Lo cual es una contradicción ya que $A \neq 0$.

Por lo tanto, $l(A) < l(B)$ y $l(B/A) < l(B)$.

Ahora bien, sean F y G dos serie de composición de B y consideramos F' y G' las filtraciones inducidas de A. Como $l(A) < l(B)$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que para cada R-módulo simple S, $m_S^{F'}(A) = m_S^{G'}(A)$ y $l_{F'}(A) = l_{G'}(A) = l(A)$.

Análogamente consideremos F'' y G'' las filtraciones inducidas por F y G de B/A. Como $l(B/A) < l(B)$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que para cada R-módulo simple S, $m_S^{F''}(B/A) = m_S^{G''}(B/A)$ y $l_{F''}(B/A) = l_{G''}(B/A) = l(B/A)$.

Finalmente por la Proposición 2.3.5 tenemos que $m_S^F(B) = m_S^{F'}(A) + m_S^{F''}(B/A)$ y $m_S^G(B) = m_S^{G'}(A) + m_S^{G''}(B/A)$ y además $l_F(B) = l_{F'}(A) + l_{F''}(B/A)$ y $l_G(B) = l_{G'}(A) + l_{G''}(B/A)$.

Por lo tanto, $m_S^F(B) = m_S^G(B)$ y $l_F(B) = l_G(B) = l(A) + l(B/A) = l(B)$.

$\square$

Como consecuencia directa del Teorema de Jordan-Hölder tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.3.5. *Sea*

$$0 \longrightarrow {}_RA \longrightarrow {}_RB \longrightarrow {}_RC \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos de longitud finita. Entonces

$$l(A) + l(C) = l(B).$$

Corolario 2.3.6 (El teorema de la dimensión)**.** *Sean M un R-módulo de longitud finita, N y K R-submódulos de ${}_RM$. Entonces*

$$l(K + N) + l(K \cap N) = l(K) + l(N).$$

EL siguiente resultado nos proporciona una caracterización de los R-módulos de longitud finita no-cero

Teorema 2.3.7. *Sea ${}_RM$ R-módulo no cero. Entonces ${}_RM$ tiene una serie de composición si, y sólo si, M es artiniano y noetheriano.*

Lema 2.3.8. *Sea M un R-módulo y $f : M \longrightarrow M$ un endomorfismo de M.*

(1) Si ${}_RM$ es artiniano, entonces $Imf^n + Kerf^n = M$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además f es un automorfismo si, y sólo si, f es un monomorfismo.

(2) Si ${}_RM$ es noetheriano, entonces $Imf^n \cap Kerf^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además f es un automorfismo si, y sólo si, f es un epimorfismo.

Proposición 2.3.9. *Si M es un R-módulo de longitud finita n y f un endomorfismo de M, entonces*

$$M = Imf^n \oplus Kerf^n.$$

Corolario 2.3.10. *Sea M un R-módulo de longitud finita y f un endomorfismo de M. Entonces los siguientes resultados son equivalentes:*

(1) f es monomorfismo;

(2) f es epimorfismo;

(3) f es isomorfismo.

2.4. Descomposición de Módulos en Inescindibles

En esta sección estudiaremos las descomposiciones en R-módulos inescindibles, las cuales utilizaremos para demostrar el Teorema de Krull-Schmidt.

Definición 2.4.1. *Sea M un R-módulo izquierdo y sea $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos de ${}_RM$. Decimos que una descomposición de ${}_RM$*

$${}_RM = \bigoplus_A M_\alpha$$

*es una **descomposición en inescindibles**, en caso de que cada M_α sea inescindible.*

Ejemplo 2.4.2.

(1) Sea S un R-módulo semisimple. Consideremos la descomposición de ${}_RS$.

$$ {}_RS = \bigoplus_A S_\alpha $$

con S_i simple. Se tiene que ésta es una descomposición en inescindibles.

(2) Sea M un R-módulo artiniano o noetheriano, por la Proposición 2.2.12 existe una descomposición de ${}_RM$ en suma directa de R-submódulos

$$ {}_RM = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n, $$

donde cada R-módulo M_i es inescindible $(i = 1, \ldots, n)$.

Definición 2.4.3. *Sea M un R-módulo y*

$$ {}_RM = \bigoplus_A M_\alpha = \bigoplus_B B_\beta $$

*dos descomposiciones de ${}_RM$. Decimos que **las descomposiciones son equivalentes**, si existe $\sigma : A \longrightarrow B$ una biyección tal que $M_\alpha \simeq N_{\sigma(A)} \quad (\alpha \in A)$.*

Ejemplo 2.4.4. *Consideremos ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = {}_{\mathbb{R}}M_1 \oplus {}_{\mathbb{R}}M_2 = {}_{\mathbb{R}}N_1 \oplus {}_{\mathbb{R}}N_2$, donde:*

$$ {}_{\mathbb{R}}M_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\} \text{ y } {}_{\mathbb{R}}M_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}. $$

$$ {}_{\mathbb{R}}N_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\} \text{ y } {}_{\mathbb{R}}N_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = 0\}. $$

Es claro que ${}_{\mathbb{R}}M_2 \simeq {}_{\mathbb{R}}N_2$ y ${}_{\mathbb{R}}M_1 \simeq {}_{\mathbb{R}}N_1$, de donde podemos definir a $\sigma : \{1,2\} \longrightarrow \{1,2\}$ con $\sigma(1) = 1$ y $\sigma(2) = 2$, la cual es una biyección.

Proposición 2.4.5. *Sean $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(N_\beta)_{\beta \in B}$ dos conjuntos indexados de R-submódulos de ${}_RM$ tales que*

$$ {}_RM = \bigoplus_A M_\alpha = \bigoplus_B N_\beta, $$

y $\sigma : A \longrightarrow B$. Entonces estas dos descomposiciones son equivalentes vía σ si, y sólo si, existe un automorfismo $f : {}_RM \longrightarrow {}_RM$ tal que $f(M_\alpha) = N_{\sigma(\alpha)}, \quad \forall \alpha \in A$.

Definición 2.4.6. *Sean M un R-módulo y ${}_RK$ un sumando directo de ${}_RM$. Decimos que K es* ***un sumando directo maximal de ${}_RM$****, si ${}_RK$ tiene un complemento directo inescindible ${}_RN$ en ${}_RM$.*

La siguiente definición será de gran importancia en esta sección.

Definición 2.4.7. *Sean M un R-módulo izquierdo y $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ un conjunto indexado de R-submódulos de ${}_RM$. Decimos que una* ***descomposición de ${}_RM$***

$$\boldsymbol{{}_RM = \bigoplus_A M_\alpha}$$

complementa sumandos directos (maximales) *en caso de que para cada sumando directo (maximal) ${}_RK$ de ${}_RM$ existe $B \subseteq A$ tal que*

$${}_RM = (\bigoplus_B M_\beta) \oplus K.$$

Lema 2.4.8. *Sea ${}_RM = \bigoplus_A M_\alpha$ una descomposición que complementa sumandos directos maximales. Si*

$${}_RM = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \oplus K$$

con $N_1, \ldots, N_n$ inescindibles, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tales que

$${}_RM_{\alpha_i} \simeq N_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

y para cada $1 \leqslant l \leqslant n$

$${}_RM = M_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus M_{\alpha_l} \oplus N_{l+1} \oplus \ldots \oplus N_n \oplus K.$$

Concluimos esta sección con el siguiente resultado.

Teorema 2.4.9. *Si ${}_RM$ tiene una descomposición en inescindibles que complementa sumandos directos maximales, entonces todas las descomposiciones en inescindibles de ${}_RM$ son equivalentes.*

2.5. Teorema de Krull-Schmidt.

En esta sección finalmente demostraremos el Teorema de Krull-Schmidt.

Recordemos que un anillo conmutativo R es local en caso que tenga un único ideal maximal.

Proposición 2.5.1. *Si R es un anillo local, entonces 0 y 1 son sus únicos idempotentes.*

Necesitamos el siguiente resultado para poder probar el Teorema de Krull-Schmidt.

Teorema 2.5.2 (Azumaya). *Si un R-módulo M tiene una descomposición directa*

$$_RM = \bigoplus_A M_\alpha$$

donde cada anillo de endomorfismos $End(M_\alpha)$ es local, entonces ésta es una descomposición en inescindibles y

(1) Todo sumando directo no cero de $_RM$ tiene un sumando directo inescindible.

(2) La descomposición $_RM = \bigoplus\limits_A M_\alpha$ complementa sumandos directos maximales. En particular, la descomposición $_RM = \bigoplus\limits_A M_\alpha$ es equivalente a otra descomposición en inescindibles de $_RM$.

Tenemos el siguiente resultado como consecuencia del Teorema 2.5.2.

Corolario 2.5.3. *Si $_RM$ tiene una descomposición directa finita*

$$_RM = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

donde cada anillo de endomorfismos $End(M_i)$ es local, entonces esta descomposición complementa sumandos directos.

Con el trabajo que hemos desarrollado, el Teorema de Krull-Schmidt es una consecuencia del Teorema 2.5.2 y del siguiente Lema.

Lema 2.5.4. *Si M es un R-módulo inescindible de longitud finita, entonces $End({}_RM)$ es un anillo local.*

Teorema 2.5.5 (Krull-Schmidt)**.** *Sea M un R-módulo no cero de longitud finita. Entonces ${}_RM$ tiene una descomposición en inescindibles*

$$ {}_RM = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n $$

tal que para toda descomposición en inescindibles

$$ {}_RM = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k, $$

se tiene que $n = k$, y existe una permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que

$$ M_{\sigma(i)} \simeq N_i \qquad (i = 1, \ldots, n), $$

y para cada $1 \leqslant l \leqslant n$

$$ {}_RM = M_{\sigma(1)} \oplus \ldots \oplus M_{\sigma(l)} \oplus N_{l+1} \oplus \ldots \oplus N_n. $$

Demostración.

Como $0 \neq {}_RM$ es de longitud finita, sabemos que ${}_RM$ tiene una serie de composición. Luego tenemos por el Teorema 2.3.7 que, ${}_RM$ es artiniano y neotheriano. Usando la Proposición 2.2.12 tenemos que existe una descomposición de ${}_RM$ en suma directa de R-submódulos

$$ {}_RM = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n $$

donde cada R-módulo M_i es inescindible $(i = 1, \ldots, n)$.

Por el Lema 2.5.4 tenemos que cada anillo de endomorfismo $End({}_RM_i)$ es local. Aplicando el Corolario 2.5.3, obtenemos que la descomposición anterior complementa sumandos directos. En particular, complementa sumandos directos maximales. Por el Teorema 2.4.9 tenemos que todas las descomposiciones en inescindibles de ${}_RM$ son equivalentes. Es decir, dada una descomposición en inescindibles de ${}_RM$

$$ {}_RM = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k, $$

se tiene que $n = k$ y existe $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ una biyección tal que $M_{\sigma(i)} \simeq N_i \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Por último, por el Lema 2.4.8 para $K = 0$, tenemos que existen $\sigma(1), \ldots, \sigma(n) \in \{1, \ldots, n\}$ tales que

$$M_{\sigma(i)} \simeq N_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

y para cada $1 \leqslant l \leqslant n$

$${}_RM = M_{\sigma(1)} \oplus \ldots \oplus M_{\sigma(l)} \oplus N_{l+1} \oplus \ldots \oplus N_n.$$

□

2.6. Módulos Libres y Proyectivos.

En esta última sección revisaremos los conceptos de un R-módulo libre y de un R-módulo proyectivo, Estos conceptos tendrán un gran importancia en el desarrollo de este trabajo.

2.6.1. Módulos libres.

En esta subsección revisaremos la definición de un R-módulo libre y su utilidad para definir otro tipo de R-módulos.

Definición 2.6.1. *Decimos que un R-módulo F es un **R-módulo libre**, si F es isomorfo a una suma directa de copias de R: Esto es, existe un conjunto de índices B con $F = \bigoplus_{b \in B} Rb$, donde $Rb = \langle b \rangle \simeq R$ para todo $b \in B$. Al conjunto B se le conoce como una base de F.*

Ejemplos 2.6.2.

(1) Consideremos a $\mathbb{R}^n$ como un $\mathbb{R}$-módulo, tenemos que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-módulo libre con $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$.

(2) Cada anillo R considerado como R-módulo izquierdo es un R-módulo libre, ${}_RR = \{r \cdot 1 : r \in R\}$ con $B = \{1\}$ ó $B = \{-1\}$.

Observación 2.6.3. *De la Definición 1.4.17 y la Proposición1.4.19 se tiene que cada $m \in F$ tiene una única expresión de la forma*

$$m = \sum_{x \in B} a_x x$$

donde $a_x \in R$ y casi todo $a_x = 0$. Se dice que $F = \langle B \rangle$.

Proposición 2.6.4. *Sea R un anillo. Dado cualquier conjunto B, existe un R-módulo libre F con base B. Esto es,*

$$F = \langle B \rangle = \{\sum rx : x \in B \ y \ r \in R\}.$$

Proposición 2.6.5 (Extendiendo por linealidad)**.** *Sea R un anillo y F el R-módulo con base X. Si M es cualquier R-módulo y si $f : X \longrightarrow M$ es cualquier función. Entonces existe un único R-homomorfismo $\widehat{f} : F \longrightarrow M$ tal que $\widehat{f}\mu = f$ donde $\mu : X \longrightarrow F$ es la inclusión esto es $\widehat{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in X$. Se dice que $\widehat{f}$ extiende a f y se tiene el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dr, dashed, "\hat{f}"] & \\
X \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "f"'] & M.
\end{tikzcd}$$

En los resultados siguientes se muestran las propiedades de los R-módulos libres.

Teorema 2.6.6. *Cada R-módulo M es un cociente de un R-módulo libre F. Más aún, ${}_RM$ es finitamente generado si, y sólo si, F puede ser escogido finitamente generado.*

Teorema 2.6.7. *Sean F un R-módulo libre y $\rho : {}_RM \longrightarrow {}_RM''$ un epimorfismo. Entonces para cada $h : {}_RF \longrightarrow {}_RM''$ existe un R-homomorfismo $g : {}_RF \longrightarrow {}_RM$ tal que $\rho g = h$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
& {}_RF \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\
{}_RM \arrow[r, "\rho"'] & {}_RM'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

2.6.2. Módulos Proyectivos.

En esta subsección estudiaremos las propiedades de un R-módulo proyectivo. El concepto de R-módulo proyectivo está motivado por el Teorema 2.6.7.

Definición 2.6.8. *Decimos que un R-módulo P es* ***proyectivo****, si para cualquier epimorfismo $\rho : {}_RM \longrightarrow {}_RM''$ y cualquier homomorfismo $h : {}_RP \longrightarrow {}_RM''$, existe un R-homomorfismo g tal que $\rho g = h$ Es decir, el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
 & {}_RP \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\
{}_RM \arrow[r, "\rho"'] & {}_RM'' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.6.9. *Todo R-modulo libre F es proyectivo.*

Proposición 2.6.10. *Un R-módulo P es proyectivo si, y sólo si, toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow {}_RA \xrightarrow{i} {}_RB \xrightarrow{\rho} {}_RP \longrightarrow 0$$

se escinde.

Teorema 2.6.11.

(1) Un R-módulo P es proyectivo si, y sólo si, ${}_RP$ es sumando directo de un R-módulo libre.

(2) Un R-módulo P finitamente generado es proyectivo si, y sólo si, ${}_RP$ es un sumando directo de R^n para alguna n.

Corolario 2.6.12.

(1) Todo sumando directo de un R-módulo proyectivo es R-módulo proyectivo.

(2) Toda suma directa de R-módulos proyectivos es un R módulo proyectivo.

Capítulo 3

Los módulos estándar.

En este capítulo introduciremos los conceptos, así como los resultados necesarios para demostrar que el conjunto de los R-módulos estándar es un sistema estratificante, donde R es una K-álgebra de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado K.

3.1. Morfismos minimales izquierdos.

En esta sección introduciremos el concepto de morfismo minimal izquierdo y derecho respectivamente. Esta noción es interesante especialmente cuando trabajamos con R-módulos de longitud finita. A lo largo de esta sección R denotará un anillo asociativo con 1_R.

Definición 3.1.1. *Sean R un anillo, B un R-módulo y M un R-módulo fijo consideramos* ***la categoría R-Mod $\backslash M$*** *que tiene por objetos a los R-homomorfismos $f : M \longrightarrow B$, y un morfismo $g : f \longrightarrow f'$ donde $f : M \longrightarrow B$, $f' : M \longrightarrow B'$ y $g : B \longrightarrow B'$ es un R-homomorfismo tal que $f' = gf$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & B' \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B. \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

Observación 3.1.2. *Se sigue que $g : f \longrightarrow f'$ es un isomorfismo en R-Mod $\backslash M$ si, y sólo si, $g : B \longrightarrow B'$ es un isomorfismo en R-Mod.*

Definición 3.1.3. *Decimos que un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow B$ es **minimal izquierdo**, si para cada morfismo $g : f \longrightarrow f$ que cumple $f = gf$ se tiene que g es un automorfismo. Es decir, para todo R-homomorfismo $g : B \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

se tiene que g es un automorfismo.

Ejemplo 3.1.4. *Consideremos $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ un R-módulo de longitud finita, el R-homomorfismo $\pi_1 : M \longrightarrow M_1$ tal que para todo R-homomorfismo $g : B \longrightarrow B$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & M_1 \\ M \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \\ & M_1. \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

Donde g es un automorfismo ya que $g\pi_1$ es un epimorfismos, entonces g es un epimorfismo y al ser M_1 un R-módulo de longitud finita se tiene que g es un isomorfismo.

Por lo cual π_1 es un R-homomorfismo minimal izquierdo.

A continuación vamos a introducir una relación de equivalencia en los objetos de R-Mod$\backslash M$. Dicha relación está dada por: $f \sim f'$ si $Hom(f, f') \neq \varnothing$ y

$Hom(f', f) \neq \emptyset$. Es decir, $f \sim f'$ si existen $g : f \longrightarrow f'$ y $h : f' \longrightarrow f$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} & B' \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & B'. \arrow[uu, "h"'] \end{tikzcd}$$

(1) Veamos que la relación $\sim$ es reflexiva.

Consideremos a $Id_f : f \longrightarrow f$ el cual es un R-homomorfismo $Id_B : B \longrightarrow B$ tal que $f = Id_B f$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B. \arrow[uu, "Id_B"'] \end{tikzcd}$$

De donde $Hom(f, f) \neq \emptyset$ por lo tanto $f \sim f$.

(2) Por definición, la relación $\sim$ es simétrica

(3) Veamos que que la relación $\sim$ es transitiva.

Sean $f : M \longrightarrow B$, $h : M \longrightarrow B''$ y $t : M \longrightarrow B'$ tales que $f \sim h$ y $h \sim t$.

Ahora bien, como $f \sim h$ tenemos que $Hom(f, h) \neq \emptyset$, por lo cual existe $g : f \longrightarrow h$ tal que $h = gf$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B'' \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

y como $h \sim t$ tenemos que $Hom(h,t) \neq \emptyset$, por lo cual existe $g' : h \longrightarrow t$ tal que $t = g'h$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & B' \\
M \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "h"'] & \\
 & B''. \arrow[uu, "g'"']
\end{tikzcd}$$

De donde tenemos que $g'gf = g'h = t$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & B' \\
M \arrow[ur, "t"] \arrow[dr, "f"'] & B'' \arrow[u, "g'"'] \\
 & B. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Por lo cual $Hom(f,t) \neq \emptyset$. Análogamente tenemos $Hom(t,f) \neq \emptyset$. Por lo tanto $f \sim t$.

En la siguiente proposición mostraremos que dado un R-módulo de longitud finita B la clase de equivalencia de un objeto $f : M \longrightarrow B$ en la categoría R-Mod$\backslash M$ contiene un homomorfismo minimal izquierdo. Recordemos que denotamos por $l(B)$ a la longitud del R-módulo B.

Proposición 3.1.5. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Cada clase de equivalencia en R-Mod$\backslash M$ que contiene un R-homomorfismo $h : M \longrightarrow B$ con B de longitud finita, contiene un único homomorfismo minimal izquierdo salvo isomorfismo.*

Demostración.

Consideremos la clase de equivalencia de un R-homomorfismo $h : M \longrightarrow N$ con N de longitud finita. Escojamos $f : M \longrightarrow B$ en la clase de equivalencia de h tal que $l(B)$ es la más pequeña posible, y sea $g : f \longrightarrow f$ un morfismo en R-Mod $\backslash M$. Entonces $f = gf$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B. \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que $g : B \longrightarrow B$ es un automorfismo.

Consideremos la inclusión canónica $i : Img \longrightarrow B$ y $\widehat{h} : M \longrightarrow Img$ dada por $\widehat{h}(m) = f(m)$. Se tiene que los siguientes diagramas conmutan. Es decir, $\widehat{h} \sim f$

$$\begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\hat{h}"'] & \\ & Img \arrow[uu, hook, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Img \\ M \arrow[ur, "\hat{h}"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B. \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd}$$

Afirmamos que Img es de longitud finita y $l(Img) = l(B)$.

Lo anterior es cierto ya que $Img \leqslant B$ y B es de longitud finita, de donde Img es de longitud finita, por lo cual $l(Img) \leqslant l(B)$. Como $l(B)$ es la más pequeña posible, entonces $l(Img) = l(B)$.

Ahora bien, consideremos la siguiente sucesión exacta, donde
$\pi : B \longrightarrow B/Img$ es la proyección canónica

$$0 \longrightarrow Img \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} B/Img \longrightarrow 0$$

Por el Corolario 2.3.5 tenemos que:

$$l(Img) + l(B/Img) = l(B).$$

De donde $l(B/Img) = l(B) - l(Img) = 0$, esto implica que $B/Img = 0$, por lo cual $B = Img$. Por tanto g es un epimorfismo y por el Corolario 2.3.10 tenemos que g es un automorfismo. Por lo tanto, f es minimal izquierdo.

Veamos la unicidad de $f : M \longrightarrow B$ salvo isomorfismo.

Sea $\widehat{f} : M \longrightarrow B'$ un R-homomorfismo que es equivalente a $f : M \longrightarrow B$, Esto es, existen $g : B \longrightarrow B'$ y $h : B' \longrightarrow B$ tales que $f' = gf$ y $f = hf'$. Es decir, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} & B' \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & B \arrow[uu, "g"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & B'. \arrow[uu, "h"'] \end{tikzcd}$$

De donde tenemos que $hgf = hf' = f$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B' \arrow[u, "h"'] \\ & B. \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Como f es minimal izquierdo tenemos que hg es un isomorfismo, entonces h es un epimorfismo y g es un monomorfismo. Análogamente obtenemos que gh es un isomorfismo, entonces h es un monomorfismo y g es un epimorfismo. Por lo cual g y h son isomorfismos. De donde por la Observación 3.1.2 tenemos que f y f' son isomorfos.

$\square$

La Proposición 3.1.5 motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.6. *Sea $f : M \longrightarrow B$ un homomorfismo con B de longitud finita. Entonces el único homomorfismo minimal izquierdo salvo isomorfismo en la clase de equivalencia de f en R-Mod $\backslash M$ se le llama* ***la versión minimal izquierda de f***.

Como hemos hecho, cuando tenemos un R-homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ podemos definir $f' : M \longrightarrow Imf$ dada por $f'(m) = f(m) \quad \forall m \in M$. Usaremos esto en el siguiente resultado.

Teorema 3.1.7. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Sea $f : M \longrightarrow Y$ un objeto en R-$Mod\backslash M$ con Y de longitud finita. Entonces existe una descomposición $Y = Y' \oplus Y''$ tal que $p'f : M \longrightarrow Y'$ es minimal izquierdo y $p''f : M \longrightarrow Y''$ es cero, donde $p' : Y \longrightarrow Y'$ y $p'' : Y \longrightarrow Y''$ son las proyecciones naturales dadas por la descomposición $Y = Y' \oplus Y''$. Más aún, el homomorfismo $p'f$ es una versión minimal izquierda de f.*

Demostración.

Por la Proposición 3.1.5 existe $g : M \longrightarrow B$ un R-homomorfismo minimal izquierdo con B de longitud finita y equivalente a f. Entonces existen $s : B \longrightarrow Y$ y $t : Y \longrightarrow B$ tales que $f = sg$ y $g = tf$. Es decir, que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} & Y \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & B \arrow[uu, "s"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & Y. \arrow[uu, "t"'] \end{tikzcd}$$

De donde tenemos que $tsg = tf = g$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \\ M \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[u, "t"'] \\ & B. \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

Como g es minimal izquierdo, se tiene que ts es un automorfismo.

Afirmación $Y = Im\ s \oplus Ker\ t$.

Veamos que $Im\ s + Ker\ t = Y$.

Sea $y \in Y$ como $t(y) \in B$ y ts es un isomorfismo, entonces $\exists x \in B$ tal que $t(y) = ts(x)$. Tomando $y = s(x) + y - s(x)$ donde claramente $s(x) \in Im\ s$ y como $t(y - s(x)) = t(y) - t(s(x)) = t(y) - t(y) = 0$, se tiene que $y - s(x) \in Ker\ t$. Por lo tanto $Y = Im\ s + Ker\ t$.

Veamos que son independientes.

Sea $x \in Im\ s \cap Ker\ t$, entonces $x = s(y)$ para algún $y \in B$ y como $x \in Ker\ t$, entonces $t(x) = 0$. Por lo anterior sabemos $t(x) = t(s(y))$. Como ts es isomorfismo tenemos que $y = 0$, de donde $x = s(y) = s(0) = 0$. Por lo tanto $x = 0$.

Veamos que $p''f : M \longrightarrow Y''$ es cero con $Y'' = Ker\ t$. Sea $m \in M$ entonces $p''f(m) = p''(s(g(m)))$. Como $s(g(m)) \in Im\ s$, tenemos que $p''(s(g(m))) = 0$.

Veamos que $p'f : M \longrightarrow Y'$ es un homomorfismo minimal izquierdo con $Y' = Im\ s$. Sea $h : Y' \longrightarrow Y'$ un homomorfismo tal que $p'f = hp'f$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Y' \\ M \arrow[ur, "p'f"] \arrow[dr, "p'f"'] & \\ & Y'. \arrow[uu, "h"'] \end{tikzcd}$$

Como Y es de longitud finita, entonces Y' es de longitud finita, por lo cual, por el Corolario 2.3.10 basta probar que h es un monomorfismo.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& B \\
& Y' \arrow[u, "t"'] \\
M \arrow[uur, "g"] \arrow[ur, "p'f"] \arrow[r, "p'f"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & Y' \arrow[u, "h"'] \\
& Y \arrow[u, "p'"'] \\
& B. \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in M$ notemos que $p'f(a) = f(a)$ (ya que $f(a) = p'f(a) + p''f(a)$ y $p''f(a) = 0$). De donde $thp'sg = thp'f = tp'f = tf = g$, por lo cual el diagrama anterior conmuta.

Como g es un homomorfismo minimal izquierdo, entonces $thp's$ es un isomorfismo. Sólo nos resta verificar que h es un monomorfismo.

Sea $x \in Y'$ tal que $h(x) = 0$. Como $x \in Im\ s$, tenemos que $x = s(y)$. Como $s(y) \in Im\ s$, tenemos que $p'(s(y)) = s(y)$. Entonces $h(p'(s(y))) = h(s(y)) = 0$, de donde $t(h(p'(s(y)))) = 0$. Dado que $thp's$ es un isomorfismo tenemos que $y = 0$, de donde $x = s(y) = s(0) = 0$. Por lo tanto $x = 0$.

Por lo cual $p'f$ es un homomorfismo minimal izquierdo.

Por último veamos que $p'f \sim f$.

Es claro que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Y' \\ M \arrow[ur, "p'f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & Y. \arrow[uu, "p'"'] \end{tikzcd}$$

de donde $Hom(p'f, f) \neq \emptyset$.

También es claro que el siguiente diagrama conmuta, con i la inclusión canónica

$$\begin{tikzcd} & Y \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "p'f"'] & \\ & Y'. \arrow[uu, "i"'] \end{tikzcd}$$

de donde $Hom(f, p'f) \neq \emptyset$. Por lo tanto $p'f \sim f$.

□

El siguiente resultado se desprende de manera inmediata de la proposición anterior.

Corolario 3.1.8. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Sea $f : M \longrightarrow Y$ un objeto en R-Mod$\backslash M$ con Y un R-módulo inescindible y de longitud finita. Entonces $f : M \longrightarrow Y$ es un R-homomorfismo minimal izquierdo.*

Análogamente a lo hecho en esta sección podemos definir un homomorfismo minimal derecho y dualmente tenemos las propiedades anteriormente mencionadas. El lector interesado puede ver esto en [1].

3.2. Álgebras

En esta sección vamos a estudiar el concepto de una K-álgebra. Los resultados establecidos en esta sección serán utilizados para el desarrollo de las secciones posteriores. A partir de ahora K denotará un campo algebraicamente cerrado. Por simplicidad sólo nos referiremos a éste como un campo.

Definición 3.2.1. *Sea K un campo. Una **K-álgebra R** es un anillo (asociativo con 1_R) que posee una estructura de K-espacio vectorial de tal forma que*

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b) \quad \forall \alpha \in K \text{ y } \forall a, b \in R.$$

A lo largo de esta sección y en las secciones posteriores R denotará una K-álgebra, y algunas veces diremos sólo álgebra en lugar de K-álgebra.

Ejemplo 3.2.2.

(1) Un campo K es una K-álgebra.

(2) Si R es una K-álgebra, tenemos que $M_{n\times n}(R)$ es una K-álgebra.

Definición 3.2.3. *Sean R y R' dos K-álgebras. Un **homomorfismo de K-álgebras***

$$\phi : R \longrightarrow R'$$

es un homomorfismo de K-espacios vectoriales y de anillos simultáneamente. Es decir, se satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b), \quad \forall a, b \in R$;

(2) $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \quad \forall a, b \in R$;

(3) $\phi(\alpha a) = \alpha\phi(a), \quad \forall \alpha \in K, \ \forall a \in R$;

(4) $\phi(1_R) = 1_{R'}$.

Definición 3.2.4. *Decimos que R es una **K-álgebra de dimensión finita**, si es de dimensión finita como K-espacio vectorial.*

A partir de ahora consideremos sólo álgebras de dimension finita. Por comodidad, algunas veces, sólo diremos que son álgebras.

Ejemplo 3.2.5. *Sea $\mathbb{R}$ el campo de los números reales, el cual sabemos que posee una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial y es de dimensión 1. Por lo cual es una $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión finita.*

Observación 3.2.6. *Consideremos R-mod la categoría de los R-módulos izquierdos finitamente generados con R una K-álgebra de dimensión finita. Se tiene que los objetos en R-mod son K-espacios vectoriales de dimensión finita, y por ende son R-módulos de longitud finita.*

A partir de ahora consideremos sólo R-módulos izquierdos finitamente generados con R una K-álgebra de dimensión finita.

Notemos que el álgebra R de dimensión finita está generada, como R-módulo por 1_R, de donde ${}_RR$ es un R-módulo finitamente generado y por tanto ${}_RR$ es de longitud finita. Por el Teorema de Krull-Schmidt sabemos entonces que R tiene una descomposición

$$ {}_RR = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n) $$

donde cada $P(i)$ es un R-módulo inescindible y tal que para toda descomposición en inescindibles

$$ {}_RR = P'(1) \oplus \ldots \oplus P'(k), $$

se tiene que $n = k$ y existe una permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que

$$ P(\sigma(i)) \simeq P'(i) \qquad (i = 1, \ldots, n). $$

Además como corolario del Teorema de Krull-Schmidt, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.7. *Sea R una K-álgebra de dimensión finita y*

$$ {}_RR = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n) $$

su descomposición en suma directa de R-módulos inescindibles (salvo isomorfismo). Entonces cualquier R-módulo proyectivo inescindible P en R-mod es isomorfo a algún $P(i)$ para $i = 1, ..., n$.

El Corolario 3.2.7 motiva la siguiente definición.

Definición 3.2.8. *Decimos que una K-álgebra de dimensión finita es **básica** si los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición*

$$_RR = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$$

no se repiten. Es decir, $P(i) \simeq P(j)$ si, y sólo si, $i = j$.

A continuación veremos dos resultados que relacionan a los proyectivos inescindibles que aparecen en la descomposición de un álgebra con un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos en R.

Proposición 3.2.9. *Sea R una K-álgebra de dimensión finita. Sea*

$$_RR = P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$$

su descomposición en suma directa de R-módulos proyectivos inescindibles. Descompongamos, en esta descomposición, a 1_R, esto es:

$$1_R = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

donde $e_i \in P(i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Entonces $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos.

Demostración.

El sistema es completo por hipótesis.

Veamos que son idempotentes y ortogonales.

Tenemos que $1_R = e_1+e_2+\ldots+e_n$ entonces $e_i = e_i 1_R = e_i(e_1+e_2+\ldots+e_n) = e_ie_1 + e_ie_2 + \ldots + e_ie_n$, para $i = 1, \ldots, n$.

De donde $e_i - e_ie_i = e_ie_1 + e_ie_2 + \ldots + e_ie_{i-1} + e_ie_{i+1} + \ldots + e_ie_n$. Como $e_i - e_ie_i \in P(i)$ y $e_ie_1 + e_ie_2 + \ldots + e_ie_{i-1} + e_ie_{i+1} + \ldots + e_ie_n \in \sum_{i \neq j} P(j)$, tenemos que $e_i - e_ie_i = 0$, por ser $P(1) \oplus \ldots \oplus P(n)$ una suma directa. De donde $e_i = e_i^2$ y $e_ie_1 + e_ie_2 + \ldots + e_ie_{i-1} + e_ie_{i+1} + \ldots + e_ie_n = 0$ y dado que $e_ie_j \in P(j)$ para cada $j = 1 \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, tenemos que $e_ie_j = 0$ para $i \neq j$.

Por lo tanto el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ está formado por elementos idempotentes y ortogonales.

Veamos que e_i es primitivo para $i = 1, \ldots, n$. Para ver esto, veamos primero que $Re_i = P(i)$ para $i = 1, \ldots, n$, donde $Re_i = \{re_i : r \in R\}$.

Claramente $Re_i \subseteq P(i)$ ya que $e_i \in P(i)$ y $P(i)$ es un R-módulo.

Ahora bien veamos que $P(i) \subseteq Re_i$. Sea $x \in P(i)$ tenemos que $x = x(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = xe_1 + xe_2 + \ldots + xe_n$.

De donde $x - xe_i = xe_1 + xe_2 + \ldots + xe_{i-1} + xe_{i+1} + \ldots + xe_n$, como $x - xe_i \in P(i)$ y $xe_1 + xe_2 + \ldots + xe_{i-1} + xe_{i+1} + \ldots + xe_n \in \sum_{i \neq j} P(j)$ al ser suma directa tenemos que $x - xe_i = 0$, entonces $x = xe_i$. Esto implica que $x \in Re_i$

Supongamos que e_i no es primitivo para algún $i = \{1, \ldots, n\}$. Por lo cual $e_i = f + g$ con $f^2 = f$ y $g^2 = g$ y $fg = gf = 0$, entonces $Re_i = R(f + g) = Rf + Rg$. Es fácil ver que la suma $Rf + Rg$ es directa. De donde $Re_i = P(i)$ no es inescindible. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto e_i es primitivo para $i = 1, \ldots, n$.

□

La Proposición anterior motiva el siguiente resultado.

Proposición 3.2.10. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos. Entonces*

$$_RR = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$$

es una descomposición en inescindibles de R.

Demostración.

Como $1_R = e_1 + \ldots + e_n$ tenemos que $\forall r \in R, \quad r = r1 = r(e_1 + \ldots + e_n) = re_1 + \ldots + re_n$ esto implica que $R = Re_1 + \ldots + Re_n$

Veamos que son suma directa.

Sea $r \in Re_i \cap Re_j$ entonces $r = \lambda e_i = \lambda e_i^2 = \lambda e_i e_i = re_i$ y análogamente $r = re_j$ esto implica que $r = re_i = re_j e_i$. Como son ortogonales $e_j e_i = 0$ con $i \neq j$. Por lo tanto $r = 0$.

Por último, veamos que cada Re_i es inescindible.

Supongamos que hay un Re_i no inescindible para algún $i = \{1, \ldots, n\}$, entonces $Re_i = Rf \oplus Rg$ de donde $e_i = f + g$ como e_i es primitivo, entonces $f = 0$ ó $g = 0$ por lo cual $Rf = 0$ ó $Rg = 0$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto Re_i es inescindible.

$\square$

A partir de ahora, supongamos que R es una K-álgebra básica de dimensión finita.

Proposición 3.2.11. *Sea R una K-álgebra de dimensión finita y básica. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos de R. Entonces*

$$\{Re_1/Rad\ Re_1, Re_2/Rad\ Re_2, \ldots, Re_n/Rad\ Re_n\}$$

es una lista completa de todos los R-módulos simples no-isomorfos.

3.3. Sistemas Estratificantes.

En esta sección estudiaremos la definición de sistema estratificante y enunciaremos algunas de sus propiedades.

Como ya lo mencionamos, en la sección 3.2, estamos considerando sólo K-álgebras de dimensión finita, donde K es un campo algebraicamente cerrado. Más aún, a partir de ahora nuestras álgebras serán básicas. Dichas K-álgebras serán denotadas por R o bien por A y nos referiremos a ellas, en ocasiones, sólo como álgebras.

De la misma manera, recordemos que denotamos por R-mod a la categoría de los R-módulos izquierdos finitamente generados y consideraremos sólo R-módulos izquierdos finitamente generados, a menos que específicamente digamos otra cosa. Nos referiremos a ellos como R-módulos.

Antes de estudiar la definición de sistema estratificante necesitamos enunciar varios conceptos preliminares. Así pues, empezaremos esta sección dando la definición de una $\mathcal{X}$-aproximación a la izquierda de un R-módulo M.

Definición 3.3.1. *Sea $\mathcal{X}$ una subcategoría completa de R-mod. Y sea M un R-módulo (finitamente generado). Una **$\mathcal{X}$-aproximación a la izquierda de M** es un R-homomorfismo $\beta : M \longrightarrow X$ con $X \in \mathcal{X}$ tal que para cualquier homomorfismo $\beta' : M \longrightarrow X'$ con $X' \in \mathcal{X}$, hay un homomorfismo $\xi : X \longrightarrow X'$ satisfaciendo*

$$\beta' = \xi\beta.$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X' \\ M \arrow[ur, "\beta'"] \arrow[r, "\beta"'] & X. \arrow[u, dashed, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

Definición 3.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos, denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a **la subcategoría completa de R-mod que contiene al R-módulo cero y a todos los R-módulos que son filtrados por R-módulos en $\mathcal{C}$**. Esto es, un R-módulo no cero M está en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ si hay una cadena finita*

$$M = M_0 > M_1 > \ldots > M_m = 0$$

de R-submódulos de M tales que M_i/M_{i+1} es isomorfo a un R-módulo en $\mathcal{C}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, m-1$. En particular, si $\mathcal{C} = \varnothing$ entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \{0\}$.

Definición 3.3.3. *Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos subcategorías completas de R-mod. Denotamos por $\boldsymbol{Ext^i_R(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0}$ cuando se tiene $Ext^i_R(X, Y) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ y $i \in \mathbb{N}$.*

La siguientes categorías están relacionadas con la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Definición 3.3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos. Definimos a la categoría de los **R-módulos inyectivos relativos a la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$** como:*

$$\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \{X \in R\text{-}mod \; : Ext^1_R(\mathcal{F}(\mathcal{C}), X) = 0\}.$$

Definición 3.3.5. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos. Definimos a la categoría de los **R-módulos proyectivos relativos a la categoría $\mathcal{F}(\mathcal{C})$** como:*

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{X \in R\text{-}mod \; : Ext^1_R(X, \mathcal{F}(\mathcal{C})) = 0\}.$$

Antes de dar la definición de un sistema estratificante consideremos el conjunto $\Omega_t = \{1, 2, \ldots, t\}$ con el orden total natural. Es decir, $1 \leqslant 2 \leqslant 3 \ldots \leqslant t$. En base a lo anterior, ahora podemos dar la definición de un sistema estratificante.

Definición 3.3.6. *Sean $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^{t}$ un conjunto de R-módulos y $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^{t}$ un conjunto de R-módulos inescindibles. El sistema $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ es un* ***sistema estratificante de talla t****, si se cumplen las siguientes tres condiciones.*

(1) $Hom(\theta(j), \theta(i)) = 0$ para $j > i$;

(2) Para cada $i \in \Omega_t$ existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$$

tal que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j < i\})$;

(3) $Ext_R^1(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$, donde $Y = \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$.

Ejemplo 3.3.7. *Consideremos el álgebra $R = KC/I$, donde C es el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

e I es el ideal generado por $\alpha\beta$.

Los R-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha"] \\ 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(2) = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1. \end{tikzcd}$$

Los R-módulos inyectivos inescindibles son:

$$I(1) = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \alpha \\ 2 \\ \downarrow \beta \\ 1 \end{array} \qquad I(2) = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \alpha \\ 2. \end{array}$$

Tomando el conjunto $\theta = \{\theta(1) = S(1), \theta(2) = P(2)\}$ *y* $\underline{Y} = \{Y(1) = S(1), Y(2) = P(1) = I(1)\}$*y el* $\leqslant$ *el orden total natural en el conjunto* $\Omega_2 = \{1, 2\}$.

(1) *Es claro que* $Hom_R(\theta(2), \theta(1)) = 0$

(2) *Veamos que existen las sucesiones exactas requeridas.*

Para $i = 1$ *tenemos*

$$0 \longrightarrow \theta(1) \longrightarrow \theta(1) \longrightarrow 0$$

donde $Z(1) = 0$, *ya que* $\theta(1) = Y(1)$.

Para $i = 2$ *tenemos*

$$0 \longrightarrow \theta(2) \longrightarrow P(1) \longrightarrow \theta(1) \longrightarrow 0$$

donde $Z(2) = \theta(1) \in \mathcal{F}(\{\theta(j) : j < 2\})$.

(3) *Veamos que* $Ext^1_R(\mathcal{F}(\theta), Y) = 0$, *donde* $Y = Y(1) \oplus Y(2)$. *Esto es equivalente a demostrar los siguientes incisos.*

a) $Ext^1_R(\theta(1), Y(1)) = 0$.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \theta(2) \longrightarrow P(1) \longrightarrow \theta(1) \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $Hom_R(\square, Y(1))$ *obtenemos la sucesión exacta larga*

$$0 \longrightarrow Hom_R(\theta(1), Y(1)) \longrightarrow Hom_R(P(1), Y(1)) \longrightarrow Hom_R(\theta(2), Y(1))$$
$$\longrightarrow Ext^1_R(\theta(1), Y(1)) \longrightarrow Ext^1_R(P(1), Y(1)) \longrightarrow Ext^1_R(\theta(2), Y(1)) \longrightarrow$$

Como $P(1)$ *es un R-módulo proyectivo, entonces se tiene que* $Ext^1_R(P(1), Y(1)) = 0$ *y dado que* $Y(1) = \theta(1)$ *ya sabemos que* $Hom_R(\theta(2), Y(1)) = 0$. *Por lo tanto* $Ext^1_R(\theta(1), Y(1)) = 0$.

b) $Ext_R^1(\theta(2), Y(1)) = 0$.
Como $\theta(2) = P(2)$ *es un* R*-modulo proyectivo, entonces se tiene que* $Ext_R^1(\theta(2), Y(1)) = 0$.

c) $Ext_R^1(\theta(1), Y(2)) = 0$.
Como $Y(2) = I(1)$ *es un* R*-modulo inyectivo, entonces se tiene que* $Ext_R^1(\theta(1), Y(2)) = 0$.

d) $Ext_R^1(\theta(2), Y(2)) = 0$.
Como $Y(2) = I(1)$ *es un* R*-modulo inyectivo, entonces se tiene que* $Ext_R^1(\theta(2), Y(2)) = 0$.

De lo anterior concluimos que el sistema $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ *es un sistema estratificante de talla* 2.

El siguiente lema nos proporciona la unicidad para el R-homomorfismo $\alpha_i : \theta(i) \longrightarrow Y(i)$ dado en la Definición 3.3.6.

Lema 3.3.8. *Para* $i = 1, \ldots, t$, *sea* $\alpha_i : \theta(i) \longrightarrow Y(i)$ *el* R*-homomorfismo dado en la Definición 3.3.6 (2). Entonces* α_i *es un homomorfismo minimal izquierdo y es una* $\mathcal{I}(\theta)$*-aproximación izquierda de* $\theta(i)$.

Demostración.

Por la Observación 3.2.6 tenemos que $Y(i)$ es de longitud finita. Y como $Y(i)$ es inescindible tenemos por el Corolario 3.1.8, que α_i es un R-homomorfismo minimal izquierdo.

Veamos que $\alpha_i : \theta(i) \longrightarrow Y(i)$ es una es una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$$

y $X \in \mathcal{I}(\theta)$ aplicando el funtor $Hom_R(\square, X)$ obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Hom_R(Z(i), X) \longrightarrow Hom_R(Y(i), X) \xrightarrow{\alpha_i^*} Hom_R(\theta(i), X) \\ \longrightarrow Ext_R^1(Z(i), X) \longrightarrow Ext_R^1(Y(i), X) \longrightarrow Ext_R^1(\theta(i), X) \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Como $X \in \mathcal{I}(\theta)$ y $Z(i) \in \mathcal{F}(\theta)$, tenemos que $Ext^1_R(Z(i), X) = 0$ de donde la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_R(Z(i), X) \longrightarrow Hom_R(Y(i), X) \xrightarrow{\alpha_i^*} Hom_R(\theta(i), X) \longrightarrow 0$$

es exacta. Así α_i^* es suprayectiva, entonces para todo R-homomorfismo $f : \theta(i) \longrightarrow X$ existe $g : Y(i) \longrightarrow X$ tal que $g\alpha_i = \alpha_i^*(g) = f$. Es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \\ \theta(i) \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\alpha_i"'] & Y(i) \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd} .$$

Por lo tanto α_i es una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$.

□

Definición 3.3.9. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ y $(\theta', \underline{Y'}, \leqslant)$ dos sistemas estratificantes de talla t, y para $i = 1, \ldots, t$ sean $\alpha_i : \theta(i) \longrightarrow Y(i)$ y $\alpha_i' : \theta'(i) \longrightarrow Y(i)'$ los R-homomorfismos dados en la Definición 3.3.6 (2). Un* ***morfismo de sistemas estratificantes*** *$f : (\theta, \underline{Y}, \leqslant) \longrightarrow (\theta', \underline{Y'}, \leqslant)$ es un conjunto de homomorfismos $f = \{f_1(i), f_2(i)\}_{i=1}^t$, donde $f_1(i) : \theta(i) \longrightarrow \theta'(i)$ y $f_2(i) : Y(i) \longrightarrow Y'(i)$ son R-homomorfismos tales que $f_2(i)\alpha_i = \alpha_i' f_1(i)$, para toda $i = 1, \ldots, t$.*

Además, el morfismo $f = \{f_1(i), f_2(i)\}_{i=1}^t : (\theta, \underline{Y}, \leqslant) \longrightarrow (\theta', \underline{'}Y, \leqslant)$ es un isomorfismo si $f_1(i)$ y $f_2(i)$ son R-isomorfismos para toda $i = 1, \ldots, t$.

Proposición 3.3.10. *Sean $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ y $(\theta, \underline{Y'}, \leqslant)$ sistemas estratificantes de talla t. Entonces para toda $i = 1, \ldots, t$, existen R-isomorfismos $f_i : Y(i) \longrightarrow Y'(i)$, tales que $f = \{1_\theta, f_i\}_{i=1}^t : (\theta, \underline{Y}, \leqslant) \longrightarrow (\theta, \underline{Y'}, \leqslant)$ es un isomorfismo de sistemas estratificantes.*

Demostración.

Para $i = 1, \ldots, t$ sean $\alpha_i : \theta(i) \longrightarrow Y(i)$ y $\alpha_i' : \theta(i) \longrightarrow Y'(i)$ los *R*-homomorfismos dados en la Definición 3.3.6 (2).

Como α_i es una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$, tenemos que existe $f_i : Y(i) \longrightarrow Y'(i)$ tal que $f_i\alpha_i = \alpha_i'$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Y'(i) \\ \theta(i) \arrow[ur, "\alpha_i'"] \arrow[r, "\alpha_i"'] & Y(i) \arrow[u, dashed, "f_i"'] \end{tikzcd} .$$

Análogamente como α_i' es una $\mathcal{I}(\theta)$-aproximación izquierda de $\theta(i)$, tenemos que existe $g_i : Y'(i) \longrightarrow Y(i)$ tal que $g_i\alpha_i' = \alpha_i$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Y(i) \\ \theta(i) \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[r, "\alpha_i'"'] & Y'(i) \arrow[u, dashed, "g_i"'] \end{tikzcd} .$$

De donde $f_ig_i\alpha_i' = f_i\alpha_i = \alpha_i'$ y $g_if_i\alpha_i = g_i\alpha_i' = \alpha_i$. Dado que α_i y α_i' son minimales izquierdos, entonces f_ig_i y g_if_i son isomorfismos. Como f_ig_i es un epimorfismo, entonces f_i es un epimorfismo. Como g_if_i es un monomorfismo, entonces f_i es un monomorfismo. Por lo tanto f_i es un isomorfismo.

Es claro que $1_{\theta(i)} : \theta(i) \longrightarrow \theta(i)$ es un isomorfismo, y que $f_i\alpha_i = \alpha_i' = \alpha_i' 1_{\theta(i)}$, para toda $i = 1, \ldots, t$. Por lo tanto f es un isomorfismo de sistemas estratificantes.

□

Vamos a utilizar el siguiente resultado, que aparece en [4], para dar una caracterización de los sistemas estratificantes. La importancia de esta caracterización radica en el hecho de que sólo se necesita imponer condiciones sobre el conjunto $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^t$.

Proposición 3.3.11. *Dado el conjunto $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^t$ de R-módulos no cero y $\leqslant$ el orden total en el conjunto Ω_t las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) Existe un conjunto de R-módulos inescindibles $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^t$ tal que $(\theta, \underline{Y}, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla t.

(2) El conjunto θ satisface las siguientes condiciones:

(i) $Hom_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *para* $j > i$*;*

(ii) $Ext^1_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *para* $j \geqslant i$*;*

(iii) $\theta(i)$ *es inescindible, para toda* $i = 1, \ldots, t$*.*

Como corolario del resultado anterior tenemos de forma inmediata la siguiente caracterización que aparece en [5].

Caracterización 3.3.12. *Un sistema estratificante* $(\theta, \leqslant)$ *de talla* t *consiste de un conjunto* $\theta = \{\theta(i)\}_{i=1}^t$ *de* R*-módulos inescindibles y* $\leqslant$ *el orden total en el conjunto* Ω_t *tales que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $Hom_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *para* $j > i$*;*

(2) $Ext^1_R(\theta(j), \theta(i)) = 0$ *para* $j \geqslant i$*.*

3.4. Propiedades de los módulos estándar.

En esta sección veremos la definición de un R-módulo estándar, y probaremos que el conjunto de los R-módulos estándar es un sistema estratificante.
A lo largo de esta sección continuamos con la notación y convenciones establecidas en las secciones anteriores. Es decir, R denotará una K-álgebra básica de dimensión finita sobre un campo K algebraicamente cerrado

Antes de definir a los R-módulos estándar consideremos la descomposición de ${}_RR$ en suma directa de proyectivos inescindibles ${}_RR = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \ldots \oplus Re_n$ (Ver las Proposiciones 3.2.9 y 3.2.10). Recordemos que $P(i) = Re_i$ es un R-módulo proyectivo inescindible tal que $S(i) \simeq Re_i/Rad\ Re_i$ con $S(i)$ un R-módulo simple, para $i = 1, \ldots, n$. Más aún, $S(1), \ldots, S(n)$ es una lista completa de todos los R-módulos simples (salvo isomorfismo).

Consideremos el conjunto $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$ y fijamos el orden total natural $\leqslant$ en el conjunto Ω_n.

Definición 3.4.1. *Sea* $\{P(1), \ldots, P(n)\}$ *el conjunto de los* R*-módulos proyectivos inescindibles. Denotamos por* $U(i)$ *a* ***la suma de todas la imágenes de los R-homomorfismos*** $\boldsymbol{f : P(j) \longrightarrow P(i)}$ ***con*** $\boldsymbol{j > i}$*. Es decir,*

$$U(i) = \sum_{f: P(j) \longrightarrow P(i); j > i} Im\ f.$$

Observación 3.4.2. *$U(i)$ es un R-submódulo propio de $P(i)$, para $i = 1, \dots, n$.*

Definición 3.4.3. *Sea $\{P(i), \dots, P(n)\}$ el conjunto de los R-módulos proyectivos inescindibles, sea $U(i)$ la suma de todas la imágenes de los R-homomorfismos $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$. Para cada i, $i = 1, \dots, n$ definimos $\Delta(i) = P(i)/U(i)$, como **el i-ésimo R-módulo estándar**. El conjunto $\Delta = \{\Delta(1), \dots \Delta(n)\}$ se conoce como **el conjunto de los R-módulos estándar**.*

Consideremos el conjunto $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$ y $\leqslant$ el orden natural en este conjunto. El objetivo de esta sección es demostrar que $(\Delta, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla n. Para ello, necesitaremos primero establecer las propiedades básicas que satisfacen los R-módulos estándar.

Definición 3.4.4. *Sea $\{P(1), \dots, P(n)\}$ el conjunto de los R-módulos proyectivos inescindibles. Para cada i, $i = 1, \dots, n$ definimos el conjunto:*

$$\mathcal{A}_i = \{P(i)/N : P(i)/N \text{ es cociente de } P(i) \text{ con factores de composición } S(j),\ j \leqslant i\}.$$

Además, en cada conjunto $\mathcal{A}_i$ definimos la relación $\subseteq$, dada por $P(i)/L \subseteq P(i)/L'$ si, y sólo si, $L' \leqslant L$.

Lema 3.4.5. *Para cada i, $i = 1, \dots, n$ tenemos que $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$ y la relación $\subseteq$, es un orden parcial en $\mathcal{A}_i$.*

Demostración.

Para cada i, $i = 1, \dots, n$, tenemos que $S(i) \simeq P(i)/Rad\ P(i) \in \mathcal{A}_i$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$.

Ahora bien, para cada i, $i = 1, \dots, n$, veamos que la relación $\subseteq$ es un orden parcial en $\mathcal{A}_i$.

(1) Veamos que la relación $\subseteq$ es reflexiva.

Sea $P(i)/L \in \mathcal{A}_i$. Como $L \leqslant L$, entonces $P(i)/L \subseteq P(i)/L$.

Por lo tanto la relación $\subseteq$ es reflexiva.

(2) Veamos que la relación $\subseteq$ es antisimétrica.

Sean $P(i)/L$ y $P(i)/N \in \mathcal{A}_i$.

Supongamos que $P(i)/L \subseteq P(i)/N$ y $P(i)/N \subseteq P(i)/L$. Entonces $N \leqslant L$ y $L \leqslant N$, de donde $N = L$. Por lo cual $P(i)/L = P(i)/N$ y la relación $\subseteq$ es antisimétrica.

(3) Veamos que la relación $\subseteq$ es transitiva.

Sean $P(i)/L$, $P(i)/M$ y $P(i)/N \in \mathcal{A}_i$.

Supongamos que $P(i)/L \subseteq P(i)/M$ y $P(i)/M \subseteq P(i)/N$. Entonces $N \leqslant M$ y $M \leqslant L$, de donde $N \leqslant L$. Por lo cual $P(i)/L \subseteq P(i)/N$ y la relación $\subseteq$ es transitiva.

$\square$

El siguiente lema establece que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el R-módulo estándar $\Delta(i)$ tiene factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i$. Es decir, $\Delta(i) \in \mathcal{A}$.

Lema 3.4.6. *Sea R una K-álgebra básica de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el R-módulo estandar $\Delta(i) \in \mathcal{A}_i$.*

Demostración.

Por el Teorema de Jordan-Hölder tenemos que $\Delta(i)$ tiene una serie de composición:

$$\Delta(i) = P(i)/U(i) = M_0/U(i) > M_1/U(i) > \ldots > M_s/U(i) = 0.$$

Supongamos, para llegar a un contradicción que $S(j)$ es un factor de composición de $\Delta(i)$ con $j > i$. Es decir, para algún $l \in \{0, \ldots, s-1\}$

$$\big(M_l/U(i)\big)/\big(M_{l+1}/U(i)\big) \simeq M_l/M_{l+1} = S(j)$$

con $j > i$.

Consideremos las proyecciones canónicas π_1 y π_2

$$M_l \xrightarrow{\pi_1} M_l/U(i) \qquad \text{y} \qquad M_l/U(i) \xrightarrow{\pi_2} \big(M_l/U(i)\big)/\big(M_{l+1}/U(i)\big)$$

Por otro lado consideremos la proyección canónica $\pi_{Rad\ P(j)} : P(j) \longrightarrow P(j)/Rad\ P(j) \simeq S(j)$.

Como $\pi_2\pi_1$ es un epimorfismo y $P(j)$ es un R-módulo proyectivo, tenemos que existe un R-homomorfismo $f : P(j) \longrightarrow M_l$ tal que $\pi_2\pi_1 f = \pi_{Rad\ P(j)}$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & & P(j) \arrow[dll, dashed, "f"'] \arrow[d, "\pi_{Rad\ P(j)}"] & \\
M_l \arrow[r, "\pi_1"'] & M_l/U(i) \arrow[r, "\pi_2"'] & S(j) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $M_l \leqslant P(i)$, tenemos que podemos considerar a $f : P(j) \longrightarrow P(i)$. Dado que $j > i$, tenemos que $Imf \leqslant U(i)$. De donde $\pi_1 f = 0$, por lo cual $0 = \pi_2\pi_1 f = \pi_{Rad\ P(j)}$. Lo cual es una contradicción, ya que $P(j)/Rad\ P(j) \simeq S(j) \neq 0$ y $\pi_{Rad\ P(j)}$ es un epimorfismo.

Por lo tanto, $\Delta(i) = P(i)/U(i)$ tiene sólo factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i$.

$\square$

El siguiente resultado afirma que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el R-módulo estándar $\Delta(i)$ es maximal en $\mathcal{A}_i$ con respecto al orden parcial $\subseteq$. Más aún, $\Delta(i)$ es el único maximal.

Proposición 3.4.7. *Sea R una K-álgebra básica de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado. Entonces $\Delta(i)$ es el cociente maximal de $P(i)$ con factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i$.*

Demostración.

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, por el Lema 3.4.6 sabemos que $\Delta(i)$ tiene sólo factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i$.

Veamos que $\Delta(i)$ es un cociente maximal de $P(i)$ en $\mathcal{A}_i$.

Supongamos que existe $P(i)/L \supseteq P(i)/U(i) = \Delta(i)$ con $P(i)/L \in \mathcal{A}_i$.

Para demostrar que $P(i)/L = P(i)/U(i)$ supongamos, para llegar a una contradicción, que $P(i)/L \neq P(i)/U(i)$. Es decir, $P(i)/L \supset P(i)/U(i)$ y por tanto $L < U(i)$.

Como $U(i) = \sum Imf$ con $f : P(j) \longrightarrow P(i)$, $j > i$, tenemos que existe un R-homomorfismo $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$, tal que $Imf \nleqslant L$. Para este homomorfismo $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$, tenemos por el Teorema 1.2.17 tenemos $P(j)/Kerf \simeq Imf$ y podemos considerar la proyección canónica $\pi_{Kerf} : P(j) \longrightarrow P(j)/Kerf$. Como $Ker(\pi_{Kerf}) = Kerf < P(j)$ (ya que si $Kerf = P(j)$, entonces $Imf = \{0\}$). Por lo tanto, $Ker\ (\pi_{Kerf}) \leqslant Rad\, P(j) < P(j)$. Ahora bien, por la Proposición 2.1.20 tenemos que $\pi_{Kerf}(Rad\ P(j)) = Rad\ (P(j)/Kerf)$, de donde

$$Rad\ (P(j)/Kerf) = (Rad\ P(j))/Kerf.$$

Por lo tanto, $(P(j)/Kerf)/(Rad\ P(j)/Kerf) \simeq P(j)/Rad\ P(j) \simeq S(j)$ con $j > i$. Esto implica que $Imf/Rad\ Imf \simeq S(j)$ con $j > i \quad (1)$, por lo cual $Rad\ Imf$ es el único R-submódulo maximal de Imf.

Ahora bien, como $L + Imf \leqslant P(i)$, entonces $P(i)/L \geqslant (L + Imf)/L$ y por el Teorema 1.2.17 tenemos

$$(L + Imf)/L \simeq Imf/(L \cap Imf).$$

Como $L \cap Imf < Imf$ (ya que si $L \cap Imf = Imf$, entonces $Imf \leqslant L$. Lo cual es una contradicción.) y dado que el único R-submódulo maximal de Imf es el $Rad\ Imf$, entonces $L \cap Imf \leqslant Rad\ Imf$. Por tanto tenemos:

$$Imf/(L \cap Imf) \geqslant Rad\ Imf/(L \cap Imf).$$

De donde

$$P(i)/L \geqslant (L + Imf)/L \simeq Imf/(L \cap Imf) \geqslant (Rad\ Imf)/(L \cap Imf). \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos

$$\big(Imf/(L \cap Imf)\big)/\big((Rad\, Imf)/(L \cap Imf)\big) \simeq Imf/Rad\, Imf \simeq S(j) \text{ con } j > i.$$

Por lo tanto $P(i)/L$ tiene un factor de composicións $S(j)$ con $j > i$. Lo cual es una contradicción, ya que $P(i)/L$ sólo tiene factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i$.

Esto demuestra que $\Delta(i) = P(i)/U(i)$ es un cociente maximal de $P(i)$ con factores de composición $S(j)$ con $j \leqslant i$.

Por último veamos que $\Delta(i)$ es el único maximal en $\mathcal{A}_i$.

Sea $P(i)/L$ un maximal en $\mathcal{A}_i$. Si $P(i)/L \supseteq \Delta(i)$ ó $P(i)/L \subseteq \Delta(i)$ es claro que $P(i)/L = \Delta(i)$, por ser maximales.

En el caso que no sean comparables, tenemos que $P(i)/L \not\supseteq \Delta(i)$ y $P(i)/L \not\subseteq \Delta(i)$. Lo cual implica $L \nleqslant U(i)$ y $L \ngeqslant U(i)$.

Como $U(i) = \sum Imf$ con $f : P(j) \longrightarrow P(i),\ j > i$, tenemos que existe un R-homomorfismo $f : P(j) \longrightarrow P(i)$ con $j > i$, tal que $Imf \nleqslant L$. Procediendo de la misma manera que en la primera parte de la demostración concluimos que $P(i)/L \notin \mathcal{A}_i$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\Delta(i)$ es el único maximal en $\mathcal{A}_i$.

$\square$

Recordemos que nuestro objetivo es demostrar que el par $(\Delta, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla n. Para ello, estableceremos las siguientes propiedades que satisfacen los módulos estándar $\Delta(i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Lema 3.4.8. *Para cada i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que Rad $\Delta(i) = (Rad\ P(i))/U(i)$.*

Demostración.

Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\pi : P(i) \longrightarrow P(i)/U(i)$ la proyección canónica. Como $Ker\ \pi = U(i) < P(i)$ y $Rad\ P(i)$ es el único R-submódulo maximal de $P(i)$, tenemos que $U(i) \leqslant Rad\ P(i)$. Por la Proposicion 2.1.20 tenemos que $\pi(Rad\ P(i)) = Rad\ (P(i)/U(i))$, de donde $Rad\ \Delta(i) = (Rad\ P(i))/U(i)$.

$\square$

Corolario 3.4.9. *Para cada i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que Rad $\Delta(i)$ es el único R-submódulo maximal de $\Delta(i)$.*

Demostración.

Por el Lema 3.4.8 sabemos que $Rad\ \Delta(i) = (Rad\ P(i))/U(i)$. De donde,

$$\Delta(i)/Rad\ \Delta(i) = \Big(P(i)/U(i)\Big)/\Big((Rad\ P(i))/U(i)\Big) \simeq P(i)/Rad\ P(i) \simeq S(i).$$

Por lo tanto $Rad\ \Delta(i)$ es un R-submódulo maximal de $\Delta(i)$ y por ende es el único submódulo maximal de $\Delta(i)$.

□

Para demostrar que el par $(\Delta, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla n utilizaremos la Caracterización 3.3.12. En el siguiente lema probaremos que el conjunto de los R-módulos estándar satisface la condición (1) de dicha caracterización.

Lema 3.4.10. *Sea $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$ el conjunto de los R-módulos estándar. Entonces $Hom_R(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para $j > i$.*

Demostración.

Supongamos que existe un R-homomorfismo $0 \neq f : \Delta(j) \longrightarrow \Delta(i)$ con $j > i$. Por el Teorema 1.2.17 tenemos $\Delta(j)/Kerf \simeq Imf$.

Como $f \neq 0$, tenemos que $Kerf < \Delta(j)$, de donde por el Corolario 3.4.9 $Kerf \leqslant Rad\ \Delta(j)$.

Consideremos $\pi_{Kerf} : \Delta(j) \longrightarrow \Delta(j)/Kerf$ la proyección canónica.

Como $Kerf \leqslant Rad\ \Delta(j)$ y π_{Kerf} es un epimorfismo, por el Teorema 2.1.20, tenemos $\pi_{Kerf}(Rad\,\Delta(j)) = Rad\,(\Delta(j)/Kerf)$, de donde $(Rad\,\Delta(j))/Kerf = Rad\ (\Delta(j)/Kerf)$. Lo cual implica que:

$\big(\Delta(j)/Kerf\big)/\big(Rad\ \Delta(j)/Kerf\big) \simeq \Delta(j)/Rad\ \Delta(j) \simeq S(j)$ con $j > i$. De donde, $Imf/Rad\ Imf \simeq S(j)$ con $j > i$. Lo cual es una contradicción ya que $Imf \leqslant \Delta(i)$. Por lo tanto, $Hom_R(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para $j > i$.

□

En el siguiente resultado veremos que el conjunto de los R-módulos estándar satisface la condición (2) dada en la Caracterización 3.3.12.

Lema 3.4.11. *Sea $\Delta = \{\Delta(1), \ldots, \Delta(n)\}$ el conjunto de los R-módulos estándar. Entonces $Ext^1_R(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para $j \geqslant i$.*

Demostración.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U(j) \longrightarrow P(j) \longrightarrow \Delta(j) \longrightarrow 0$$

aplicando el funtor $Hom_R(\square, \Delta(i))$ obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Hom_R(\Delta(j), \Delta(i)) &\longrightarrow Hom_R(P(j), \Delta(i)) \longrightarrow Hom_R(U(j), \Delta(i)) \\ &\longrightarrow Ext^1_R(\Delta(j), \Delta(i)) \longrightarrow Ext^1_R(P(j), \Delta(i)) \ldots \end{aligned}$$

Como $P(j)$ es un R-módulo proyectivo, entonces se tiene que $Ext^1_R(P(j), \Delta(i)) = 0$. Veamos que $Hom_R(U(j), \Delta(i)) = 0$ para $j \geqslant i$.

Supongamos que existe un R-homomorfismo $0 \neq f : U(j) \longrightarrow \Delta(i)$ con $j \geqslant i$.

Como $f \neq 0$, entonces $Kerf < U(j)$ y por la Proposición 1.1.27 tenemos que $Kerf \leqslant M$ con M un R-submódulo maximal de $U(i)$. Entonces $U(j)/M \simeq S(k)$ para algún k. Ahora bien por el Teorema 1.2.17 tenemos $U(j)/Kerf \simeq Imf$ y por el Teorema 1.2.17 tenemos

$$U(j)/M \simeq \big(U(j)/Kerf\big)/\big(M/Kerf\big).$$

De donde,

$$S(k) \simeq U(j)/M \simeq \big(U(j)/Kerf\big)/\big(M/Kerf\big) \simeq Imf/\big(M/Kerf\big).$$

Como $Imf \leqslant \Delta(i)$, entonces Imf tiene factores de composición $S(l)$ con $l \leqslant i \leqslant j$. Por lo tanto, $K \leqslant j$.

Ahora bien, como $P(j) > U(j) > M$ tenemos que

$$P(j)/M > U(j)/M \quad \text{y} \quad \big(P(j)/M\big)/\big(U(j)/M\big) \simeq P(j)/U(j) = \Delta(j).$$

De donde tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow U(j)/M \longrightarrow P(j)/M \longrightarrow \Delta(j) \longrightarrow 0$$

y podemos concluir que $P(j)/M$ tiene factores de composición $S(l)$ con $l \leqslant j$.

Por último, como $U(j) > M$, entonces $P(j)/M \supset P(j)/U(j)$. Lo cual es una contradicción, ya que por la Proposición 3.4.7 sabemos que $\Delta(j)$ es el cociente maximal de $P(j)$ con factores de composición $S(l)$ con $l \leqslant j$.

De donde podemos concluir $Hom_R(U(j), \Delta(i)) = 0$ para $j \geqslant i$ y por lo tanto, $Ext^1_R(\Delta(j), \Delta(i))$ para $j \geqslant i$.

$\square$

Lema 3.4.12. *Sea R una K-álgebra de dimensión finita sobre K un campo algebraicamente cerrado. Entonces $\Delta(i)$ es un R-módulo inescindible para toda $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración.

Por el Lema 3.4.8 sabemos que $Rad\ \Delta(i) = (Rad\ P(i))/U(i)$. De donde

$$\Delta(i)/Rad\ \Delta(i) \simeq \Big(P(i)/U(i)\Big)/\Big((Rad\ P(i))/U(i)\Big) \simeq P(i)/Rad\ P(i) \simeq S(i).$$

Por lo cual $\Delta(i)/Rad\ \Delta(i) \simeq S(i)$.

Ahora bien, supongamos que $\Delta(i)$ no es inescindible. Entonces $\Delta(i) = M_i \oplus M_2$ con $M_1 \neq 0$ y $M_2 \neq 0$. Por la Proposición 2.1.21 tenemos que $Rad\ (M_1 \oplus M_2) = Rad\ M_1 \oplus Rad\ M_2$. De donde

$\Delta(i)/Rad\ \Delta(i) = (M_1 \oplus M_2)/Rad\ (M_1 \oplus M_2) \simeq (M_1 \oplus M_2)/(Rad\ M_1 \oplus Rad\ M_2) \simeq (M_1/Rad\ M_1) \oplus (M_2/Rad\ M_2)$. Lo cual es una contradicción, ya que $S(i)$ es un R-módulo simple y por tanto inescindible.

Por lo tanto, $\Delta(i)$ es un R-módulo inescindible para toda $i = 1, \ldots, n$.

$\square$

Con los resultados anteriores, ahora podemos concluir el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.4.13. *Sea $\Delta = \{\Delta(i)\}_{i=1}^n$ el conjunto de los R-módulos estándar y el orden total $\leqslant$ en el conjunto Ω_n. Entonces $(\Delta, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla n.*

Demostración.

Por el Lema 3.4.10 tenemos que $Hom_R(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para $j > i$, y por el Lema 3.4.11 tenemos que $Ext^1_R(\Delta(j), \Delta(i)) = 0$ para $j \geqslant i$. Por último por el Lema 3.4.12 tenemos que cada R-módulo estandar $\Delta(i)$ es inescindible.

Por la Caracterización 3.3.12 podemos concluir que $(\Delta, \leqslant)$ es un sistema estratificante de talla n.

□

A continuación daremos algunos ejemplos de sistemas estratificantes de talla n.

Ejemplo 3.4.14. *Consideremos el álgebra $R = KC/I$, donde C es el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, shift left, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

e I es el ideal generado por $\alpha_2\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1 - \beta_2\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ y $\alpha_2\beta_2$.

Los R-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1) = \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad P(2) = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ 1 \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & 3 \arrow[dl, "\beta_2"] \\ & 2 & \end{tikzcd} \qquad P(3) = \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta_2"] \\ 2 \end{tikzcd}$$

Ahora calculando los R-módulos estándar obtenemos:

$$\Delta(1) = S(1) \qquad \Delta(2) = \begin{tikzcd} 2 \arrow[d, "\beta_1"] \\ 1 \end{tikzcd} \qquad \Delta(3) = P(3).$$

Tenemos que $(\Delta = \{\Delta(1), \Delta(2), \Delta(3)\}, \leqslant)$, donde $\leqslant$ es el orden natural en el conjunto $\Omega_3 = \{1, 2, 3\}$, es un sistema estratificante de talla 3.

Ejemplo 3.4.15. *Consideremos el álgebra $R = KC/I$, donde C es el siguiente carcaj*

$$3 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\gamma} 4$$

e I es el ideal generado por $\beta\gamma$.

Los R-módulos proyectivos inescindibles son:

$$P(1) = S(1) \qquad P(2) = \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ 1 \end{array} \qquad P(3) = \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ 1 \end{array} \qquad P(4) = \begin{array}{c} 4 \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ 2 \end{array}$$

Ahora calculando los R-módulos estándar obtenemos:

$$\Delta(1) = S(1) \qquad \Delta(2) = P(2) \qquad \Delta(3) = P(3) \qquad \Delta(4) = P(4)$$

Tenemos que $(\Delta = \{\Delta(1), \Delta(2), \Delta(3), \Delta(4)\}, \leqslant)$, donde $\leqslant$ es el orden total en el conjunto $\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, es un sistema estratificante de talla 4.

Bibliografía

[1] M. Auslander, I. Reiten & S.O. Smalo. Representation Theory of Artin Algebras, *Cambridge University Press*, (1995), New York USA, ISBN: 0-521-41134-3.

[2] Frank W. Anderson & Kent R. Fuller. Rings and Categories of Modules, *Springer-Verlag*, (1992), New York USA, ISBN: 0-387-97845-3.

[3] C. Cibils, F. Larrión & L. Salmerón. Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones, *Instituto de Matemáticas UNAM*, (1982), Distrito Federal, México.

[4] K. Erdmann, C. Sáenz. On standarly stratified algebras, Comm. Algebra 31 (7) (2003) 3429-3446.

[5] E. N. Marcos, O. Mendoza & C. Sáenz. Stratifying systems via relative simple modules, Journal of Algebra 280 (2004) 472-487.

[6] C.M. Ringel, The category of modules with good filtration over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, Math.Z. 208 (1991) 209-233.

[7] Joseph J. Rotman. An Introduction to Homological Algebra, *Springer*, (2009), New York USA, ISBN: 978-0-387-24527-0.