



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE ALTAS ENERGÍAS**

**ESTRUCTURAS NO-CONMUTATIVAS EN CAMPOS Y
COSMOLOGÍA**

**TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:
MANUEL CORTÉS RUBIO**

**TUTOR PRINCIPAL
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**MIEMBRO COMITÉ TUTOR
DR. MARCOS ROSENBAUM PITLUCK
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Summer 2007- Winter 2013

Non-commutative Structures in Fields and Cosmology.

(Thesis for master of science in physics)¹

Manuel Cortes Rubio²
Candidato

Dr. Jose David Vergara Oliver³
Tutor principal

Dr. Marcos Rosenbaum Pitluck⁴ y Dr. Hernando Quevedo Cubillos⁵
Tutores

*Instituto de Ciencias Nucleares,
Universidad Nacional Autónoma de México,
México D.F., C.P. 04510, Apdo. Postal 70-543*

Abstrac

A study on different topics related to non-commutative spaces is presented. From the mathematical point of view this analysis is the study of quantum groups. Here different techniques are presented for deforming Hopf algebras. Three original results are presented in this section. The first two are the description of a Heisenberg algebra and Poincare algebra on a space where the coordinates do not commute like the moments. These deformed algebras are obtained by the technique of coordinate transformation. El tercer resultado es la deformación del algebra de Heisenberg mediante el empleo de la técnica del twist de Drinfeld. On the other hand, from the physical point of view, the analysis focuses on cosmological models. This non-commutative analysis will be classical and quantum level of the universe of Kantowski-Sachs. Here is presented an original result. For this study we have deformed the Poisson brackets for introducing non-commutativity to classic level. We obtained by this deformation a cyclic universe with an isotropic transition, free of singularities and with an inflationary mechanism.

¹Posgrado en ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México.

²e-mail: mancr_ing@hotmail.com

³e-mail: vergara@nuclecu.unam.mx

⁴e-mail: mrosen@nuclecu.unam.mx

⁵e-mail: quevedo@nuclecu.unam.mx

Verano 2007- Invierno 2013

Estructuras No-conmutativas en Campos y Cosmología.
(Tesis de maestría en ciencias físicas)⁶

Manuel Cortes Rubio⁷
Candidato

Dr. Jose David Vergara Oliver⁸
Tutor principal

Dr. Marcos Rosenbaum Pitluck⁹ y Dr. Hernando Quevedo Cubillos¹⁰
Tutores

*Instituto de Ciencias Nucleares,
Universidad Nacional Autónoma de México,
México D.F., C.P. 04510, Apdo. Postal 70-543*

Resumen

Se presenta un estudio sobre diferentes tópicos relacionados con espacios no-conmutativos. Desde el punto de vista matemático, este análisis se desarrolla sobre el estudio de grupos cuánticos. Aquí se mostraran diferentes técnicas para deformar álgebras de Hopf. En esta sección se presentan tres resultados originales. Los dos primeros son las álgebras de Heisenberg y Poincare descritas sobre un espacio fase no-conmutativo tanto en coordenadas como en momentos. Estas álgebras deformadas se obtendrán mediante la técnica de transformación de coordenadas. El tercer resultado es la deformación del álgebra de Heisenberg mediante el empleo de la técnica del twist de Drinfeld. Por otro lado, desde el punto de vista físico, el análisis gira en torno a modelos cosmológicos. En particular este trabajo se centra sobre el estudio tanto clásico como cuántico del universo de Kantowski-Sachs. Aquí se presentara un resultado original. Para este estudio hemos introducido un principio de no-conmutatividad a nivel clásico sobre el espacio fase de un universo de Kantowski-Sach. Hemos obtenido via este principio un universo cíclico, con una transición isotrópica, libre de singularidades y provisto de un mecanismo inflacionario.

⁶Posgrado en ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México.

⁷e-mail: mancr_ing@hotmail.com

⁸e-mail: vergara@nuclecu.unam.mx

⁹e-mail: mrosen@nuclecu.unam.mx

¹⁰e-mail: quevedo@nuclecu.unam.mx

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Simetrías y unificación	2
1.2. Gravedad cuántica	3
1.3. Espacios no-conmutativos	7
1.4. Organización de la tesis	10
2. Gravedad	12
2.1. Relatividad especial.	13
2.1.1. Grupo de Poincaré.	13
2.1.2. Algebra de Poincaré $U(iso(3,1))$	16
2.2. Ecuaciones de Einstein	19
2.3. Formalismo ADM	21
2.4. Cuantización canónica de teorías de norma	24
2.5. Ecuación de Wheeler-DeWitt.	27
2.5.1. Universo clásico Friedmann-Robertson-Walker.	31
2.5.2. Universo cuántico Friedmann-Robertson-Walker.	32
2.5.3. Universo cuántico de Kantowski-Sach.	34
3. Estructuras algebraicas	36
3.1. Semigrupos y monoides	37
3.2. Grupos	37
3.2.1. Representación de grupos	39
3.2.2. Grupos de Lie	39
3.3. Anillos y campos	39
3.4. Espacios vectoriales	40
3.5. Algebras de Lie	40
3.5.1. Algebra de Lie $sl(2)$	41
3.5.2. Algebra de Lie $H(3,1)$	42
3.5.3. Algebra de Lie $iso(3,1)$	43
3.6. Algebras de Lie a partir de grupos de Lie.	44
3.7. Grupos de Poisson-Lie.	45
3.8. Ecuación de Yang-Baxter.	46
3.9. Algebra universal envolvente	47
3.9.1. Algebra universal envolvente $U(sl(2))$	47
3.10. Algebras asociativas con unidad y \mathbb{C} -algebras.	47
3.10.1. Homeomorfismo entre K-algebras	49
3.11. Coalgebra	49
3.11.1. Homeomorfismos entre coalgebras	50

3.12. Relación entre K-algebras y coalgebras	51
3.13. Bialgebra	52
3.14. Algebra de Hopf	52
3.14.1. Álgebra de Hopf $U(sl(2))$	53
3.14.2. Algebra de Hopf $U\Xi$	55
3.14.3. Algebra de Hopf $\delta_\xi(U\Xi)$	57
3.14.4. Algebra de Hopf $U(H(3, 1))$	58
3.14.5. Algebra de Hopf $U(iso(3, 1))$	60
4. Cuantización por deformación y Producto de Moyal-Weyl.	64
4.1. Motivación	64
4.1.1. Mecánica lagrangiana y hamiltoniana	64
4.2. Variedades simplécticas y de Poisson	66
4.3. Espacio fase	68
4.3.1. Cuantización por deformación	69
4.4. Producto de Moyal-Weyl	71
4.4.1. Transformada de Fourier	71
4.4.2. Cuantización de Weyl.	72
4.4.3. Función de Wigner	77
4.4.4. Producto de Moyal	80
4.5. Dinámica cuántica Moyal-Weyl	82
5. Simetrías, productos-\star y espacios no-conmutativos	84
5.1. Simetrías y productos deformados.	84
5.2. Productos deformados a partir de $U(iso(3, 1))$	85
5.2.1. Producto- \star_θ	85
5.2.2. Producto- $\star_{\theta^{kl}}$	86
5.2.3. Producto- $\star_{\theta^{oi}}$	87
5.2.4. Producto- \star_κ	87
5.2.5. Producto- $\star_{\hat{\kappa}}$	88
5.2.6. Producto- $\star_{\bar{\kappa}}$	88
5.2.7. Composición de productos- \star	89
6. Grupos cuánticos.	92
6.1. q -Deformación y \hbar -adic álgebra.	93
6.1.1. Algebra de Hopf $U_q(sl(2))$	93
6.1.2. Algebra de Hopf $U_{\hbar}(sl(2))$	96
6.1.3. Relación $U_q(sl(2))$ y $U_{\hbar}(sl(2))$ y limite clásico.	96
6.2. Deformación por medio de transformación de coordenadas.	97
6.2.1. Algebra de Hopf $U_{\Theta}^{\Theta}(H(3, 1))$	97
6.2.2. Relación entre $U(H(3, 1))$ y $U_{\Theta}^{\Theta}(H(3, 1))$	99
6.2.3. Algebra de Hopf $U_{\Theta}^{\Theta}(iso(3, 1))$	101
6.3. Deformación por medio de mapeos de Weyl.	105
6.3.1. Doble relatividad especial.	105
6.3.2. Espacio κ -Minkowski	106
6.3.3. Algebra de Hopf $U_{\kappa}(iso(3, 1))$	107
6.4. Deformación por medio de Twist.	110
6.4.1. Estructuras coalgebraicas compatibles con algebras defor- madas.	110
6.4.2. Twist.	111

6.4.3.	Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}}(sl(2))$	112
6.4.4.	Deformación de Jordan $U\Xi^{\mathcal{F}}$	115
6.4.5.	Deformación de Jordan $\delta_{\xi}(U\Xi)^{\mathcal{F}}$	117
6.4.6.	Deformaciones de Jordan para $U(H(3,1))$	118
6.4.7.	Deformaciones de Jordan para $U(iso(3,1))$	125
6.4.8.	Composición de twist's.	129
7.	Cosmología.	134
7.1.	Introducción	134
7.2.	Universo Kantowski-Sach	137
7.2.1.	Ecs. de movimiento y no-conmutatividad	141
7.2.2.	Análisis de resultados	142
7.3.	Universo de K-S cuántico no-conmutativo.	146
7.4.	Direcciones en gravedad no-conmutativa.	147
8.	Conclusiones y Trabajo Futuro.	149
	Bibliografía	151

*Dedicado a
mi madre, mi padre, mis hermanos
y especialmente a
María, Gregoria y Leonardo.*

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Dr. José David Vergara Oliver, por su asesoría, sus consejos, pero sobre todo por su inagotable paciencia sin la cual este trabajo no hubiese sido concluido. Al Dr. Marcos Rosenbaum Pitluck por la revisión y corrección de este trabajo, pero especialmente por su gran gentileza. Al Dr. Hernando Quevedo Cubillos, al Dr. Merced Montesinos Velásquez, al Dr. Xavier Hernández Doring y al Dr. Román Linares Romero por sus observaciones y recomendaciones. Al Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos por la beca complementaria que me otorgo. A mis compañeros Luis Federico Preisser, Jessica Olvera, Alejandro Peláez, Igmarr Rosas, Juan Carlos Degollado, Anahí Flores, Enrique Pomposo, Omar Pizano, Javier Díaz, Jairo Olaya, Fermin Maya, Mauro Velásquez, Jaime y Zhenia González por su compañía y amistad. A mi padre Manuel, a mi madre Luisa y a mis hermanos: Ivette, Javier, Edith y Cesar, por su apoyo y ejemplo. Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca de nivel maestría que me otorgo para realizar mis estudios. Al Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM y a su personal por haberme facilitado las instalaciones y el ambiente propicio para llevar a cabo este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

Al abordar la biografía de mi héroe, Alexei Fiodorovitch, experimento cierta perplejidad: aunque le llamo «mi héroe», sé que no es un gran hombre. Por lo tanto, se me dirigirán sin duda preguntas como éstas: «¿Qué hay de notable en Alexei Fiodorovitch para que lo haya elegido usted como héroe? ¿Qué ha hecho? ¿Quién lo conoce y por qué? ¿Hay alguna razón para que yo, lector, emplee mi tiempo en estudiar su vida?» La última pregunta es la más embarazosa, pues la única respuesta que puedo dar es ésta: «Tal vez. Eso lo verá usted leyendo la novela. » ¿Pero y si, después de leerla, el lector no ve en mi héroe nada de particular? Digo esto porque preveo que puede ocurrir así. A mis ojos, el personaje es notable, pero no tengo ninguna confianza en convencer de ello al lector. Es un hombre que procede con seguridad, pero de un modo vago y oscuro.

Los Hermanos Karamazov
FIÓDOR M. DOSTOIEVSKI

La parte mas importante de este trabajo es presentar algunos resultados originales que hemos obtenido en el tiempo en que hemos trabajado en este proyecto. Tres de ellos tienen un enfoque matemático en el sentido que se deja de lado la parte interpretativa y fenomenológica. Estos son la obtención de las álgebras deformadas de Poincaré y Heisenberg mediante dos técnicas diferentes. Un cuarto resultado tiene un enfoque mas físico. Este resultado es la descrip-

ción de un universo de Kantowski-Sachs en un espacio no-conmutativo tanto en coordenadas y momentos.

La otra parte y no menos importante que la anterior, es presentar este trabajo de la forma mas articulada posible. Esto ultimo tiene la finalidad de (en medida de nuestras capacidades) generar un texto sencillo para alguien que tiene un primer acercamiento con estas ideas. Por esta razón se decidió dedicar los primeros capítulos, como una revision de los conceptos tanto matemáticos, como físicos descritos sobre espacios ordinarios (conmutativos). De esta manera, cuando el lector aborde la segunda parte, dedicada al estudio de estos conceptos pero descritos sobre espacios no-conmutativos, la transición resulte un poco mas sencilla.

Dicho lo anterior, a continuación se presenta una breve introducción, cuya finalidad es, plantear algunas de las muchas motivaciones que han dado pie al estudio de la descripción de teorías físicas sobre espacios no-conmutativos. No hay que perder de vista que los temas centrales en este trabajo son: no-conmutatividad, simetrías y cosmología.

1.1. Simetrías y unificación

Existe una simetría cuando la expresión matemática de las leyes de la física es independiente del sistema de referencia, ya sea espacio-temporal o del espacio abstracto donde varían los números cuánticos que caracterizan a las partículas. Las simetrías que relacionan propiedades intrínsecas de las partículas, se denominan simetrías internas para diferenciarlas de las simetrías globales espacio-temporales. De estas ultimas son ejemplos las rotacionales y traslacionales que forman el grupo de Poincaré $iso(3, 1)$ que es la base de la teoría de la relatividad especial. El papel de las simetrías en la física de partículas elementales adquirieron la categoría de fundamental en la década de los 50's cuando se les identificó como un ingrediente básico para la determinación de la dinámica. Por esto fue fundamental postularlas como simetrías locales, es decir cuando se exige que las transformaciones que forman el grupo correspondiente varíen de punto a punto en el espacio cuatridimensional cotidiano. A éstas se les denomina simetrías de norma y para que sean exactas se requiere la existencia de campos que representan las fuerzas (las partículas cuyo intercambio entre las partículas ordinarias son la causa de las interacciones conocidas o de nuevas interacciones). Así la interacción electromagnética es consecuencia ineludible de la simetría de norma asociada al grupo $U(1)$, mientras que para el caso de las fuerzas débil y fuerte les corresponden los grupos $SU(2)$ y $SU(3)$, respectivamente. Las interacciones electrodébiles resultan de la simetría de norma $SU(2) \times U(1)_Y$, donde el grupo $U(1)_Y$ corresponde a la hipercarga Y . Finalmente el modelo estándar esta basado en el grupo de norma $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [1, 2].

En este trabajo las simetrías se estudiarán mediante algebras de Hopf, ya que a diferencia de las algebras de Lie permiten describir las simetrías tanto para el caso de espacio-tiempo conmutativo como no-conmutativo [4, 5, 6].

Hasta la fecha, casi todas las pruebas experimentales de las tres fuerzas descritas por el modelo estándar están de acuerdo con sus predicciones. Sin embargo, el modelo estándar no alcanza a ser una teoría completa de las interacciones fundamentales debido a que no incluye la gravedad y aun no queda clara la forma en que esta se incorporara [3].

1.2. Gravedad cuántica

A partir de las cuatro interacciones mencionadas anteriormente es como la filosofía reduccionista de la física logra explicar todos los fenómenos de la naturaleza. Tanto la electrodinámica como las interacciones débil y fuerte son actualmente entendidas como teorías de norma y han sido cuantizadas exitosamente. Esto significa que a partir de la teoría clásica original es posible construir una teoría cuántica asociada que permite calcular correcciones a las predicciones clásicas. Estas predicciones pueden ser hechas finitas -en lenguaje técnico las teorías son renormalizables-, y numerosos experimentos han confirmado su exactitud. Cuando se trata de aplicar métodos similares a la interacción gravitacional resulta imposible hacer finita la teoría, es decir esta resulta no-renormalizable, además de arrojar otras inconsistencias. Todo procedimiento de unificar relatividad general (teoría que describe la interacción gravitacional), con los procedimientos de cuantización de la mecánica cuántica se encuentra eventualmente con problemas de incompatibilidad. Esta incompatibilidad radica, principalmente, en que las suposiciones que ambas teorías hacen son completamente diferentes.

Por un lado, la relatividad general es una teoría geométrica por excelencia que modela a la gravedad como un espacio-tiempo cuya curvatura esta determinada por una distribución de masa, es decir, no hay un espacio-tiempo de subyacente fijo. La curvatura (tensor de Einstein) es debida a la presencia de masa y otras formas de energía (el tensor energía-momento). La teoría predice singularidades del espacio-tiempo, tales como la gran explosion o agujeros negros.

Por otro lado, la teoría cuántica esta formulada desde el principio sobre una estructura de subyacente fijo (no dinámica). En particular, la teoría cuántica de campos describe campos de partículas impuestas en un espacio-tiempo plano de relatividad especial. En esta teoría existen divergencias UV, que se pueden resolver solamente aplicando un procedimiento de renormalización orden a orden.

Una forma natural de cuantizar la gravedad plantea la necesidad de cuantizar directamente las ecuaciones de Einstein

$$\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] = 8\pi G T_{\mu\nu}[g] \quad (1.1)$$

Parece lógico pensar que por el hecho de que la materia este sujeta a principios de mecánica cuántica, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}[g]$ debe tratarse como un operador. El camino mas sencillo a seguir es fijando la geometría y manteniendo el carácter cuántico de la materia reemplazando $T_{\mu\nu}[g]$ por su valor de expectación $\langle \hat{T}_{\mu\nu}[\eta] \rangle$ en un estado de vacío de Minkowski. Sin embargo al realizar esto sucede que la solución arroja que $g \neq \eta$, por lo tanto este resultado tendrá que re-insertarse en la definición del valor de expectación de vacío, y así sucesivamente. En general la interacción resultante no converge y el procedimiento se hace inconsistente, por lo que también se hace necesario cuantizar también el campo gravitatorio, de tal forma que esto conduce a ecuaciones cuánticas no lineales de Einstein

$$\left[\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{R} \hat{g}_{\mu\nu} \right] = 8\pi G \hat{T}_{\mu\nu}[g] \quad (1.2)$$

Esto plantea una problematica no solo técnica, sino que también conceptual.

Históricamente ha habido muchos intentos para resolver estas inconsistencias partiendo desde perspectivas diferentes y con enfoques radicalmente diferentes sin embargo los formalismos que mas han destacado son la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica canónica[7, 8].

La teoría de cuerdas es una generalización de la teoría cuántica de campos en donde las partículas puntuales son reemplazadas por objetos unidimensionales extendidos, llamados cuerdas, que se propagan en una variedad espacio-tiempo subyacente fija. Los distintos modos de vibración corresponden a distintas partículas. Esta teoría intenta unificar todas las interacciones de la naturaleza, incluyendo la gravedad. La forma en que la gravedad se incorpora en la teoría de cuerdas es sumamente sorprendente, ya que esta aparece como una predicción y no es necesario incluirla a priori. Cuando se obtienen los distintos estados de oscilación de la cuerda y se observan sus propiedades, aparecen aquellos que tienen exactamente las propiedades que se sabe debe poseer la partícula asociada con la gravedad, es decir, aquella que describe pequeñas perturbaciones del espacio-tiempo. Teoría de cuerdas es capaz de reproducir la relatividad general de Einstein (mas pequeñas correcciones)[9].

Otro tipo de objetos físicos que se encuentran en la teoría de cuerdas son las D-branas, que poseen cierta masa y carga. Las D-branas son objetos dinámicos y sus excitaciones son descritas por cuerdas abiertas cuyos extremos están limitados a moverse sobre ellas. Como excitaciones, las cuerdas abiertas no pueden existir de forma independiente de la D-brana. Sin embargo, estas pueden cerrar sus extremos y escapar de la D-brana como cuerdas cerradas, o en sentido inverso, una cuerda cerrada puede abrirse sobre la D-brana para convertirse en una cuerda abierta. El mecanismo por el cual la D-brana hace esto es muy particular. Se sabe que la D-brana interactúa con sus alrededores mediante la absorción y la emisión de cuerdas cerradas. En particular, la D-brana puede emitir cuerdas cerradas que corresponden a los gravitones, i.e., los portadores de la interacción gravitacional. Cuando estos gravitones interactúan con una cuerda que viaja a través del espacio-tiempo hace que su propagación se altere tal y como si existiera una geometría curva de tal forma que es posible determinar la geometría a partir de estos objetos[10].

La teoría de cuerdas tiene la ventaja de ser perturbativamente renormalizable a todo orden y unificar todas interacciones de la naturaleza. Sin embargo cuenta con más estructura de la que minimamente se necesita para explicar la mayoría de la fenomenología actual, la más radical de ellas es la necesidad de incorporar dimensiones extras. Además, hasta el momento no hay una evidencia experimental directa que permita saber si es correcta o no. A pesar de esto, la teoría de cuerdas sigue siendo el principal candidato para una teoría unificada de la naturaleza y se ha mantenido como un campo de investigación muy activo, que ha producido un gran impacto no solo en la física sino también en las matemáticas.

Mientras la teoría de cuerdas trata al espacio-tiempo curvo de la relatividad general como una modificación de un campo subyacente fijo sin masa de espín dos, la formulación canónica de la gravedad cuántica trata directamente la métrica del espacio-tiempo mismo como un campo e intenta cuantizarlo directamente. De acuerdo con este enfoque, se debe formular a la relatividad general en una forma canónica o hamiltoniana. En esta descripción se elige un conjunto de variables para el espacio de configuraciones y para los momentos canónicamente conjugados, que describen el estado del sistema a un tiempo dado. La evolución

temporal de estas variables se obtiene a partir de las ecuaciones de Hamilton. La cuantización consiste entonces en promover las variables de configuración y los momentos conjugados a operadores en un espacio de estados cuánticos (espacio de Hilbert) sujetos a relaciones de conmutación análogas a los corchetes de Poisson clásicos.

En la décadas de los 50's y 60's, Dirac, Wheeler, De Witt y otros [11, 12, 13, 14] trabajaron en la elección mas natural de las variables para el campo de configuración. Ellos consideraron para esto la 3-métrica inducida para una foliación arbitraria de hipersuperficies espaciales, que permitiera separar el espacio del tiempo. Una vez esto se procedería a aplicar la transformada de Legendre a la acción de Einstein-Hilbert para obtener un hamiltoniano. Los momentos conjugados (directamente relacionados con la curvatura extrínseca de la hipersuperficie) codifican la evolución temporal de las 3-métrica. Esta formulación se enfrenta con el problema de las constricciones, que proviene de la invariancia ante difeomorfismos de la teoría. El procedimiento que se adopta en este tipo de teorías es tratar las constricciones también como operadores cuánticos \hat{A} , e imponerles la condición que los estados físicos $|\psi\rangle$ sean invariantes ante la acción de estos operadores $e^{i\epsilon\hat{A}}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ o a orden infinitesimal $\hat{A}|\psi\rangle = 0$. De esta manera el hamiltoniano resultante H se convierte en lo que se ha llamado vinculo hamiltoniano \hat{H} , que se trata de una densidad hamiltoniana restringida a anularse por las ecuaciones de movimiento, es decir:

$$\hat{H}|\psi\rangle = 0 \tag{1.3}$$

A esta ecuación se le conoce como de Wheeler-DeWitt y al procedimiento se le denomina geometrodinamica. El operador de Wheeler-DeWitt es un operador diferencial de segundo orden de forma no polinomial y con coeficientes que ni siquiera son analíticos en estas variables de configuración, y por lo tanto el espacio de soluciones es extremadamente complicado de obtener. Por otro lado seria natural interpretar una solución de la ecuación de Wheeler-DeWitt como la amplitud de probabilidad de que el sistema cuántico gravitacional se encontré en un estado con la métrica dada. Pero esta interpretacion directa resulto imposible debido a que tal probabilidad puede ser negativa además de contener otras inconsistencias.

A raíz de estos problemas la geometrodinamica solo pudo resolver algunos modelos cosmológicos homogéneos cuyas métricas dependen de uno o varios parámetros que son funciones solo del tiempo, el cual, a su vez puede ser sustituido por uno de dichos parámetros.

Este problema fue atacado con mayor exito por un formalismo iniciado por Ashtekar, Lee Smolin, Carlo Rovelli y colaboradores en 1986 [15, 16], mediante la reformulación de las ecuaciones de Einstein en términos de nuevas variables: la conexión (en lugar de la 3-métrica) y su momento conjugado, lo que facilita notablemente la tarea de resolver las constricciones. Poco después se encontraron soluciones a las ecuaciones derivadas de esta teoría, la cual se conoce ahora como gravedad cuántica de lazos. El aspecto mas destacable de esta formulación de gravedad cuántica es que a escalas muy pequeñas, el espacio-tiempo no esta descrito por una variedad suave y continua sino por elementos discretos. El papel de introducir nuevas variables aun no es entendido del todo y esta teoría tiene el problema de no recuperar el limite clásico.

A lo largo del tiempo estos han sido los enfoques que han tenido mas impacto

e influencia dentro de la comunidad científica, sin embargo no han sido los únicos. Algunos otros intentos que destacan son:

- I Teoría de twistors
- II Gravedad cuantica euclidea
- III Gravedad discreta lorenziana
- IV Calculo Regge

En todos estos intentos la concepción del espacio-tiempo es sumamente radical, ya que en ellos se introducen valores discretos de las coordenadas espacio-temporales (excepto en twistors, en donde esto es una consecuencia) en las ecuaciones que rigen la evolución de las funciones de onda que representan partículas elementales en estado libre o en interacción [3, 7].

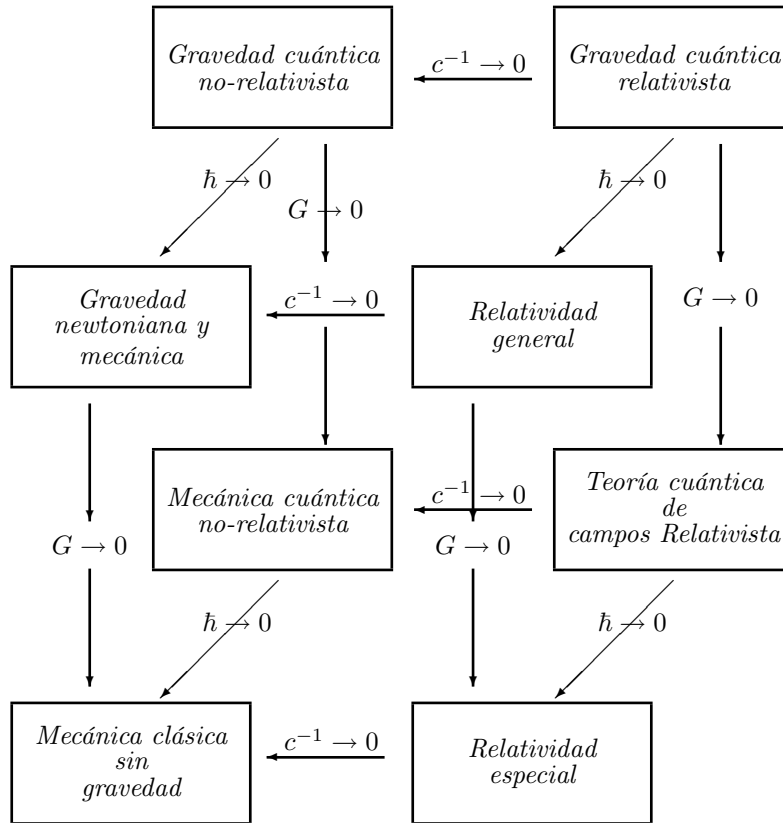


Fig. 1.1 Siete límites fundamentales de la física teórica

Estos modelos tienen un interés matemático: resolver por métodos numéricos ecuaciones diferenciales que no tienen una solución analítica exacta y por otra parte evitar los valores infinitos que aparecen en los desarrollos perturbativos de dichas ecuaciones. La conexión con la teoría cuántica de campos en todos los casos es sumamente remota. Si bien ha habido un progreso considerable en la

cuantización de la gravedad, no existe aun un consenso general en la comunidad sobre la forma final que debería tener la teoría cuántica de la relatividad general. Sin embargo, el estado de todas las investigaciones ponen de manifiesto que ninguna de las direcciones de investigación lograra por si misma la unificación. Las diferentes teorías han encontrado terrenos de similitud: la forma de concebir el espacio-tiempo y la existencia de una escala de energía.

Por un lado es claro es que no es posible formular una teoría completa sin la necesidad de incluir un cambio fundamental en la manera en que se concibe el espacio-tiempo y en donde la variedad diferencial suave que modela el espacio-tiempo debe sufrir un cambio drástico.

Mientras que por otro todos los formalismos antes mencionados coinciden en que existe una escala de energía (o equivalente de distancia) a la que las descripciones actuales de la naturaleza pierden validez: La longitud de Planck.

En este trabajo, partiendo de las ideas de geometrodinámica, desarrollaremos la descripción del modelo cosmológico de Kantowski-Sach, sobre un espacio no-conmutativo tanto en coordenadas y momentos, con el fin de analizar como se modifica la evolución de este universo al introducir estas deformaciones.

1.3. Espacios no-conmutativos

Desde el punto de vista matemático es posible pasar de la relatividad especial de Einstein o la mecánica cuántica, a la gravedad Newtoniana, via la contracción de alguno(s) parámetro(s) característicos c^{-1} ó \hbar respectivamente, es decir (c^{-1} ó $\hbar \rightarrow 0$). De las misma manera es posible pasar de la relatividad general a la relatividad especial via la contracción del parámetro G . Los parámetros c^{-1} , \hbar y G , ya sea individualmente, en pares o los tres juntos, forman un conjunto de siete contracciones correspondientes a las teorías físicas conocidas [17, 18]. El ingrediente de la gravedad cuántica es el hecho de que contendría los tres parámetros mencionados, de ahí la asociación de una longitud denominada de Planck, como escala de manifestación de sus efectos Fig. 1.1. La única combinación de estas constantes con dimensiones de distancia que se puede lograr es:

$$l_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1,6 \times 10^{-36} m \quad (1.4)$$

En mecánica cuántica, la energía necesaria para medir la estructura del espacio-tiempo con resolución de longitud de Planck l_p es $\hbar c/l_p$, en relatividad general esta energía sería tal, que en esa region se distribuiría la energía suficiente para formar un agujero negro microscópico con un radio de Schwarzschild del mismo orden de magnitud, por lo cual en este escenario semi-clásico, abrirían dos consecuencias interesantes:

1. Dado que las fluctuaciones cuánticas de carácter puramente gravitacional tendrían la misma magnitud que las fluctuaciones cuánticas descritas por el modelo estándar, entonces todas las interacciones en la naturaleza estarían unificadas a distancias del orden de la longitud de Planck.
2. Por otro lado los agujeros negros crecen en tamaño al aumentar su energía, entonces se podría formar un agujero negro mayor que la longitud de Planck, por lo cual no se lograría mejorar la precisión. De esta manera resulta que la posibilidad de producir agujeros negros como fluctuaciones

cuánticas, implica la existencia de una distancia mínima o un principio de incertidumbre en las coordenadas:

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq l_p^2 \quad (1.5)$$

La existencia de una distancia mínima tiene implicaciones serias y es que el espacio-tiempo clásico, con variables espaciales y tiempo abelianas, generadoras de un álgebra conmutativa de funciones, tendría que modificarse por un álgebra no-conmutativa de operadores. De tal suerte que el campo gravitatorio descrito por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sería un operador y su falta de conmutatividad afectaría a la geometría del espacio-tiempo, haciendo la geometría no-conmutativa [19].

Desde el punto de vista puramente matemático la geometría y la topología son un conjunto con alguna estructura en particular que llamamos espacio. Sin embargo, aun objetos tan fundamentales como las curvas elípticas se estudian mejor no en términos de conjuntos de puntos, sino examinando las funciones continuas que se pueden definir sobre este espacio. Fue Weierstrass quien abrió un nuevo camino en la geometría, al estudiar directamente el conjunto de funciones complejas que satisfacen un álgebra de adición en particular, y derivar el conjunto de puntos a partir de estas.

El estudio formal de estas ideas surge con los trabajos de Gelfand, Naimark y Segal [20] que establecieron una equivalencia entre los espacios topológicos Hausdorff localmente compactos y las C^* -álgebras abelianas no necesariamente unitarias, prosiguieron con Hilbert que estableció la relación entre las variedades afines y las álgebras conmutativas. Continuaron con Grothendieck quien relacionó la teoría de esquemas y la topología, más recientemente Connes ha generalizado este tipo de dualidades para el caso no-conmutativo [21, 22, 23]. La idea central es encontrar una forma de relacionar el espacio, con el álgebra de funciones definidas sobre éste. En este esquema las propiedades geométricas se obtienen a partir de propiedades algebraicas via relaciones de equivalencia. A diferencia de los primeros casos, los trabajos de Connes extienden estos estudios para el caso en que las álgebras no-conmutan.

Uno de los avances más importantes del siglo XX, fue el descubrimiento de la formulación matemática de la mecánica cuántica por Heisenberg en 1925 [24, 25]. Desde el punto de vista matemático, esto es una transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica, via la deformación del álgebra clásica conmutativa de observables en el álgebra no-conmutativa de observables cuánticos. Recordando que en mecánica clásica un observable (ej. energía, posición, momento, etc) es una función sobre una variedad llamada espacio fase del sistema, mientras que en el caso cuántico estos son operadores definidos en un espacio de Hilbert.

Connes ha realizado algo muy parecido a lo anteriormente mencionado. Su propósito ha consistido en generalizar la noción de espacio desde el punto de vista de diferentes áreas de las matemáticas (ej. teoría de la medida, geometría y topología), tomando como punto de partida que las álgebras definidas sobre dicho espacio no-conmutan. Algunas de las contribuciones de estos estudios incluyen: teoría de álgebra de operadores, topología algebraica y diferencial, teoría de números, efecto Hall cuántico, renormalización en teoría cuántica de campos, teoría de cuerdas y modelo estándar.

En la formulación de Connes del modelo estándar, el espacio-tiempo está desdoblado en dos hojas correspondientes a las dos posibles quiralidades. Los

bosones de norma corresponderían a desplazamientos en las direcciones continuas, mientras que el campo de Higgs estaría asociado a la dirección discreta. La principal ventaja de la aproximación de Connes al modelo estándar es que en ella todas las interacciones, incluyendo las de los escalares que producen la ruptura espontánea de la simetría, provienen de un único operador de Dirac de manera que el Higgs aparece integrado en el modelo de una forma más natural que en la formulación habitual. La principal predicción está relacionada con la masa de Higgs pero aun no ha podido ser contrastada experimentalmente.

El término geometrías no-conmutativas ha sido empleado para describir varias teorías diferentes. Deformación por cuantización y grupos cuánticos son dos vertientes que han surgido de forma muy independiente del espíritu original de la formulación de Connes, y que sin embargo actualmente resultan dos de los elementos más importantes del programa global de la geometría no-conmutativa desde el punto de vista físico.

El procedimiento que permite encontrar una descripción cuántica de la dinámica de un sistema físico a partir de su descripción clásica es llamado cuantización. Cuando el procedimiento se realiza a partir de la deformación de la estructura algebraica de la dinámica clásica hasta obtener una estructura no-conmutativa adecuada para llevar a cabo la descripción cuántica se denomina cuantización por deformación [26, 27, 28]. La realización matemática rigurosa de este procedimiento apareció en los 70's con los trabajos de Boris Fedosov [29], sobre la cuantización de variedades simplécticas. Estas ideas han evolucionado mucho en las dos últimas décadas; primero usando métodos algebraicos y después combinando estos métodos con ideas geométricas. Una deformación particular de una estructura algebraica, es mediante la sustitución de un producto no-conmutativo actuando sobre los elementos de la estructura conmutativa. Se pueden definir muchos productos no-conmutativos, sin embargo el ejemplo fundamental es el producto de Moyal-Weyl [30, 31] en el espacio de fases euclídeo, usado por Moyal [32] para estudiar mecánica cuántica estadística desde el punto de vista del espacio de fases clásico en la década de los 40's. El procedimiento más general de la existencia de una cuantización por deformación para variedades de Poisson arbitrarias ha sido desarrollada por Maxim Kontsevich [33], muy recientemente.

El estudio formal de los grupos cuánticos, inició a partir de los trabajos de L.D. Faddeev, quien trabajaba en aspectos algebraicos de sistemas cuánticos integrables, específicamente en el marco del problema inverso de la dispersión cuántica. Motivados por ciertas consideraciones en esta dirección, Kulish y Reshetikhin definen en 1980 el álgebra $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ que es una deformación a un parámetro del álgebra universal envolvente $sl(2, \mathbb{C})$. Poco después Sklyanin demostró que esta álgebra $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ admite una estructura de Hopf, pero esta no es ni conmutativa ni coconmutativa [34, 35].

Poco después, Drinfeld y Jimbo generalizan esto último al definir de forma independiente para cada álgebra de Lie simple \mathfrak{g} , una álgebra que es una deformación a un parámetro del álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} que admite una estructura de álgebra de Hopf que de igual manera, no es ni conmutativa ni coconmutativa. Ambas definiciones son esencialmente equivalentes. Para Drinfeld $U_\hbar(\mathfrak{g})$ es un álgebra sobre el anillo de series formales de potencias, mientras que para Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$ es un álgebra sobre \mathbb{C} que depende de un parámetro q .

Drinfeld acuña la expresión de *grupos cuánticos* y ofrece en un famoso artículo presentado en el ICM de Berkeley en 1986 (leído por Cartier ya que no le fue autorizado salir de la Unión Soviética)[36]. Aquí interpreta con precisión a

$U_{\hbar}(\mathfrak{g})$ como una deformación formal -en el sentido de Lichnerowicz- del algebra universal envolvente de \mathfrak{g} . Esto lleva directamente a las nociones de grupos de Lie-Poisson. Además muestra como a partir de las representaciones de dimensión finita de $U_{\hbar}(\mathfrak{g})$ es posible obtener soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter.

Fue el mismo Drinfeld quien poco después, observo que cada algebra universal envolvente cuántica esta relacionada con una algebra universal no-deformada, mediante un automorfismo interno al cual llamo twist universal. En este sentido este twist contiene toda la información sobre la deformación cuántica de una simetría clásica.

En este trabajo se presentará un estudio detallado sobre grupos cuánticos. Este estudio se desarrollará empleando diferentes técnicas de deformación. Aunque estudiaremos varios grupos, nuestro estudio se centrará sobre el grupo de Poincaré $U(iso(3,1))$.

A finales del año 2006, J.Wess y colaboradores en una serie de trabajos han realizado una descripción de la gravedad sobre un espacio no-conmutativo [37, 38]. Partiendo del algebra de difeomorfismos conocida, han construido una algebra deformada en coordenadas dependiente de un parámetro θ , via un twist. Esta nueva representación preserva las relaciones algebraicas de la teoría original, pero tiene reglas de comultiplicación diferentes. En estos trabajos se construye un calculo tensorial covariante no-conmutativo, en donde las nociones de: métrica, derivada covariante, curvatura y torsion quedan bien definidas. Esta geometría es la base para formulación de una relatividad general no-conmutativa. El twist que se emplea en estos trabajos es construido a partir de producto no-conmutativo de Moyal-Weyl. Un aspecto central en esta construcción lo constituye el estudio del algebra de Poincaré deformada [39].

En este trabajo se presentará de forma detallada el desarrollo de estas ideas. Se presentará la geometría no-conmutativa, así como también la acción de Einstein-Hilbert deformada.

1.4. Organización de la tesis

El *Capítulo 2* es una revisión de relatividad, tanto especial, general y cosmología. En la primera sección, dedicada al estudio de la relatividad especial, surgirá la simetría de Poincaré, como el grupo de transformaciones que deja invariante la pseudodistancia. Se construye el álgebra de Lie y se presenta el álgebra correspondiente de esta simetría. Posteriormente a esto se presenta una revisión de relatividad general. En la sección dedicada a la relatividad general, se deducirán las ecuaciones de Einstein via un principio variacional. También se mostrará que estas ecuaciones describen la dinámica de una superficie cuatridimensional en donde los papeles del espacio y el tiempo juegan un papel idéntico que no permite conceptualizar la evolución en el tiempo del campo gravitacional. El Formalismo ADM que también se presenta en esta sección, permitirá estudiar esta cuatro-superficie en términos de una tres-superficie dotada de una evolución temporal, esto ultimo sera importante para analizar la gravedad desde el punto de vista hamiltoniano. Partiendo de este formalismo, se aplicara el método de cuantización canónica al hamiltoniano gravitacional, dando lugar a la ecuación de Wheeler-DeWitt. Por ultimo en este capítulo, se analizaran los modelos cosmológicos de Friedman-Robertson-Walker y Kantowski-Sach y se

presentará la cuantización canónica de estos (mini-super universos). El *Capítulo 3*, es un apartado matemático que tiene como finalidad construir el concepto de algebra de Hopf, a partir de estructuras algebraicas más fundamentales. En este capítulo se presentará de forma detallada las nociones de grupo y algebra de Lie, elementos centrales en la descripción de las simetrías físicas. A partir de estas nociones se establecerá la forma de construir una algebra de Hopf a partir de una de Lie, mediante el algebra universal envolvente de esta ultima y se presentará esto anterior para el caso del algebra de Lie de los campos vectoriales. En el *Capítulo 4* se revisará el concepto de cuantización por deformación, del cual se desprenderá el producto no-conmutativo de Moyal-Weyl. En el *Capítulo 5* se presentara un método para obtener productos no-conmutativos a partir de los campos tensoriales que definen una simetría. Al final de este capítulo se presentará explícitamente una serie de productos no-conmutativos correspondientes al algebra de Poincaré $U(iso(3, 1))$. El *Capítulo 6* es una revision general del concepto de grupo cuántico. Aquí se presentaran las técnicas para deformar algebras de Hopf clásicas. En este capítulo se presentaran ejemplos concretos de deformaciones sobre las algebras $U(sl(2))$, $U(H(3, 1))$, $U(iso(3, 1))$ y el algebra de los campos vectoriales $U\Xi$. En el *Capítulo 7* se presentara un estudio no-conmutativo sobre el modelo cosmológico de Kantowski-Sachs. Esta deformación se realizará tanto a nivel clásico como a nivel cuántico.

Capítulo 2

Gravedad

La teoría de la relatividad general, postulada por Albert Einstein en 1915, parte del base que la gravitación no es una fuerza, como la consideraba la física newtoniana, sino mas bien una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. En donde un objeto masivo atrae a otro pequeño debido a que este ultimo se desliza a través de la deformación que el primero le ocasiona al espacio-tiempo, en el cual ambos están inmersos.

Desde el nacimiento de la teoría especial de la relatividad en 1905, Einstein pensó que la teoría de la gravitación de Newton tendría que ser modificada, ya que esto implicaba que la fuerza de la gravedad se propagaría entre distintos objetos a una velocidad infinita, y este hecho contradecía su naciente teoría.

Hubieron dos ideas que guiaron a Einstein hacia el camino de la relatividad general. Primero fue el principio de equivalencia, que establecía que todos los objetos caen exactamente de la misma forma en un campo gravitacional. Y posteriormente el principio de Mach, que establecía que la inercia local de un objeto debe ser producida por la distribución total de la materia en el universo. Así el principio de equivalencia llevo a Einstein a identificar la gravedad con la geometría del espacio-tiempo. Mientras que el principio de Mach lo llevo a concluir que dicha geometría debería ser alterada por la distribución de masa y energía.

La teoría de Einstein culmina con las ecuaciones que llevan su nombre. Estas ecuaciones relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de materia-energía. Hay varias formas de llegar a estas ecuaciones. En este capitulo la forma en que se obtendrán sera via un principio variacional.

El espacio-tiempo de la relatividad general esta descrito por una superficie 4-dimensional, en donde los papeles de tiempo y espacio juegan un papel idéntico. Esto representa una elegancia a nivel teórico, sin embargo a nivel practico no permite visualizar la evolución en el tiempo del campo gravitacional. A la separación de los papeles del espacio y el tiempo se denomina formalismo $3 + 1$ o ADM (Arnowitt, Deser y Misner). Este formalismo es el punto de partida en la construcción de una formulación hamiltoniana de la gravedad.

El punto central de este capitulo es la ecuación de Wheeler-DeWitt. Esta ecuación sera obtenida en este capitulo a partir de la cuantización canónica del hamiltoniano de la gravedad. Partiendo de la ecuación de Wheeler-DeWitt se estudiaran los modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker y de Kanstowski-Sach.

2.1. Relatividad especial.

Si una partícula se mueve con una velocidad \vec{V} , respecto a un sistema de referencia inercial O , entonces con respecto a otro O' , según las transformaciones de Galileo, este se moverá con velocidad $\vec{V} + \vec{v}$, con \vec{v} la velocidad relativa entre ambos sistemas. Esto en principio se tendría también que aplicar a la luz, la cual se creía se desplazaba a través de una sustancia llamada éter que llenaba todo el espacio. Así de acuerdo a las ecuaciones de transformación de Galileo, los rayos luminosos enviados en la dirección del movimiento de la tierra viajarían más rápido que los rayos enviados en dirección transversal. Como es bien sabido el experimento de interferometría de Michaelson y Morley a finales del siglo *XIX*, mostró con gran precisión que no existía ningún retraso entre estos dos rayos, demostrando así la ausencia de éter y que la luz se desplazaba a la misma velocidad independientemente de la velocidad relativa entre los sistemas de referencia.

En aquel tiempo también era sabido que las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo no quedaban invariantes ante transformaciones de Galileo. Einstein en su teoría especial de la relatividad mostró que son las transformaciones de Lorentz (cuyo grupo asociado también está determinado por seis parámetros) las que dejan invariantes tanto la forma de las ecuaciones de Maxwell como la velocidad de la luz.

2.1.1. Grupo de Poincaré.

Si la velocidad de la luz debe ser la misma para todos los sistemas inerciales. Entonces esto significa que si x_i es la posición de una señal de luz a un tiempo t en un sistema, y el mismo rayo de luz se encuentra en x'_i al tiempo t' en otro sistema, entonces se tiene que satisfacer

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - x_i x_i = c^2 t'^2 - x'_i x'_i. \quad (2.1)$$

Al introducir la notación

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^i) \quad i = 1, 2, 3 \\ &= (t, \vec{x}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

la última expresión se puede reescribir de la siguiente manera

$$s^2 = x^0 x^0 - x^i x^i = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (2.3)$$

donde la métrica $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ es cero excepto para $\mu = \nu$, con $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, y en donde índices repetidos implican suma.

Si se relaciona (x'_i, t') con (x_i, t) y se exige que se satisfaga (2.1) entonces,

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g'_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu. \quad (2.4)$$

Al introducir un conjunto de transformaciones lineales

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_i x^i, \quad (2.5)$$

tales que también preservan (2.1). Entonces estas $\Lambda^\mu{}_\nu$ tienen que satisfacer

$$g'_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g'_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma. \quad (2.6)$$

Por tanto

$$g_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g'_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Al multiplicar esta ultima igualdad por $g^{\sigma\lambda}$ y contraer respecto a los indices σ ,

$$\Lambda^\mu{}_\rho g^{\lambda\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = \delta^\lambda{}_\rho, \quad (2.8)$$

es decir,

$$\Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu = \delta^\lambda{}_\rho, \quad (2.9)$$

donde la matriz

$$g^{\lambda\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma g'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu, \quad (2.10)$$

es la inversa de Λ . La operación de contracción de la matriz Λ con los tensores $g^{\lambda\sigma}$ y $g_{\mu\nu}$, indicada en el primer miembro de la ultima igualdad, se reduce a la transposición de la matriz Λ y al cambio de signos en su primera fila y su primera columna. De este modo, la matriz de transformación que deja invariante la longitud del vector (2.4) pose la propiedad de que su matriz inversa se obtiene a partir de ella mediante la transposición y el cambio de signos de los elementos de la primera fila y la primera columna. Estas matrices se denominan seudoortogonales. El determinante de la matriz (2.10) coincide con el determinante de la matriz Λ . Por lo tanto, $(\det\Lambda)^2 = 1$ y consecuentemente,

$$\det\Lambda = \pm 1. \quad (2.11)$$

Considerando la igualdad (2.7) en el caso de $\lambda = \sigma = 0$

$$\Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 g_{\mu\nu} = 1, \quad (2.12)$$

o, en forma explícita,

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 - (\Lambda^2{}_0)^2 - (\Lambda^3{}_0)^2 = 1. \quad (2.13)$$

De aquí se infiere la desigualdad $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$. Esto ultimo y (2.11) determinan cuatro conjuntos de trasformaciones que juntas forman las las transformaciones de Lorentz generales. Por separado estos conjuntos son los siguientes:

1. $L_+^\uparrow \Rightarrow \det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \geq +1.$
2. $L_+^\downarrow \Rightarrow \det\Lambda = +1, \Lambda^0{}_0 \leq +1.$
3. $L_-^\uparrow \Rightarrow \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq +1.$
4. $L_-^\downarrow \Rightarrow \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq +1.$

De aquí, solo la transformación L_+^\uparrow denominada transformación de Lorentz propia contiene la unidad. Los demás conjuntos de transformaciones ($L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$) no la contienen y son transformaciones impropias, esto significa que ningún elemento de cualquiera de ellos puede pasar de manera continua a otro conjunto. A continuación se presentan unos ejemplos de transformaciones de Lorentz propias e impropias,

1. Rotaciones: la transformación

$$\begin{aligned}
x'^0 &= x^0, \\
x'^1 &= x^1 \cos \alpha - x^2 \sin \alpha, \\
x'^2 &= x^1 \sin \alpha + x^2 \cos \alpha, \\
x'^3 &= x^3,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

define una rotación espacial, y su matriz correspondiente es

$$L_{12}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1 \cos \alpha & -x^2 \sin \alpha & 0 \\ 0 & x^1 \sin \alpha & x^2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

donde $\det(L_{12}) = 1$ y $\Lambda^0_0 = 1$ por lo tanto $L_{12} \in L_+^\uparrow$, y corresponde a una rotación propia a lo largo del eje- z .

2. Boosts: la transformación:

$$\begin{aligned}
x'^0 &= x^0 \cosh \alpha - x^1 \sinh \alpha, \\
x'^1 &= -x^0 \sinh \alpha + x^1 \cosh \alpha, \\
x'^2 &= x^2, \\
x'^3 &= x^3,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

de la misma forma que en el caso anterior esta transformación define un boost, cuya matriz viene dada por:

$$L_{01}(\alpha) = \begin{pmatrix} x^0 \cosh \alpha & -x^1 \sinh \alpha & 0 & 0 \\ x^1 \cosh \alpha & x^1 \sinh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

donde $\det(L_{01}) = 1$ y $\Lambda^0_0 = \cosh \alpha \geq 1$ por lo tanto $L_{12} \in L_+^\uparrow$, y corresponde a un boost a lo largo del eje- x , y en donde se identifica

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}; \quad \sinh \alpha = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.18}$$

en donde v es la velocidad relativa del sistema de referencia inercial. A esta transformación se le denomina: transformación de Lorentz especial.

3. Inversion temporal: definido por $x'^0 = -x^0$, $x'^i = x^i$. Donde $\det(L) = -1$ y $\Lambda^0_0 = -1$, por lo tanto $L \in L_-^\downarrow$.
4. Inversion total: definidas por $x'^\mu = -x^\mu$. Donde $\det(L) = +1$ y $\Lambda^0_0 = -1$, por ende $L \in L_+^\downarrow$.

Toda transformación de Lorentz, puede ser escrita como la composición de estas cuatro transformaciones. Se puede demostrar que toda transformación perteneciente a L_+^\uparrow se puede obtener a partir de la especial aplicando los correspondientes giros espaciales, los cuales, evidentemente, no cambian el signo

de la componente temporal. Las transformaciones L_-^\uparrow se pueden obtener de las correspondientes transformaciones L_+^\uparrow mediante la inversión, la cual tampoco cambia el signo del tiempo. Es por esto que para un estudio solo basta centrarse en las rotaciones y los boost. Estas transformaciones, forman un grupo, el grupo de Lorentz. Todos sus elementos pueden ser parametrizados mediante parámetros continuos: tres parámetros para las rotaciones y tres parámetros para los boost.

2.1.2. Algebra de Poincaré $U(iso(3, 1))$

El grupo de Lorentz es un grupo hexaparamétrico de transformaciones continuas o grupo de Lie. Para las transformaciones infinitesimales tenemos

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + (M_i)^\mu{}_\nu \delta a^i, \quad (2.19)$$

donde $(M_i)^\mu{}_\nu$ son los generadores del grupo, δa^i son las variaciones pequeñas de los parámetros a^i , $i = 1, \dots, 6$. Al escribir la condición (2.7),

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\sigma + (M_i)^\mu{}_\sigma \delta a^i)(\delta^\nu{}_\rho + (M_k)^\nu{}_\rho \delta a^k) = \eta_{\sigma\rho}. \quad (2.20)$$

De aquí al igualar los términos lineales

$$(M_i)^\rho{}_\sigma + (M_i)^\sigma{}_\rho = 0. \quad (2.21)$$

Es decir, la matriz de generadores debe ser antisimétrica. Los seis generadores M_i pueden ser numerados con dos índices, $i \rightarrow \alpha\beta$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 4$),

$$(M_{\alpha\beta})_{\rho\sigma} = -(M_{\beta\alpha})_{\rho\sigma}. \quad (2.22)$$

Así que solo quedan seis generadores independientes y los parámetros $a^{\alpha\beta}$ correspondientes a los giros en los planos $\alpha\beta = 12$ para $i = 3$, $\alpha\beta = 23$ para $i = 1$, $\alpha\beta = 31$ para $i = 2$ y a los boost en los planos $\alpha\beta = 01$ para $i = 4$, $\alpha\beta = 02$ para $i = 5$ y $\alpha\beta = 03$ para $i = 6$. Por otro lado, conociendo la fórmula de Euler para los giros infinitesimales de un vector \vec{r} :

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (2.23)$$

o bien

$$\delta r_i = \varepsilon_{ijk} \delta \varphi_j r_k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.24)$$

donde $\delta \vec{\varphi} = \vec{n} \varphi$, $|\vec{n}| = 1$, \vec{n} es la dirección del eje de giro, $\delta \varphi$ es el ángulo de giro, ε_{ijk} es el tensor unidad absolutamente antisimétrico, normalizado por la condición $\varepsilon_{123} = 1$. Consecuentemente, los generadores del grupo de rotación tridimensionales $O(3)$, el cual es un subgrupo del grupo de Lorentz propio, se puede escribir en la forma

$$(M_j)_{ik} = \varepsilon_{ijk}. \quad (2.25)$$

De donde se deduce que $(M_j)_{ik} = -(M_j)_{ki}$. Sustituyendo el índice i de los generadores por la numeración doble introducida anteriormente, $i \rightarrow mn$, y teniendo en cuenta que,

$$(M_{mn})_{ik} = -(M_{nm})_{ik}, \quad (2.26)$$

entonces se puede reescribir la definición (2.25) en forma explícita,

$$(M_{mn})_{ik} = -\delta_{mi}\delta_{nk} + \delta_{mk}\delta_{ni}. \quad (2.27)$$

Esta última ecuación define los generadores del subgrupo $O(3)$ del grupo de Lorentz propio L_+^\uparrow , los cuales, en el caso general, satisfacen las condiciones (2.21) y (2.22). La generalización covariante de la definición (2.27) de los generadores $(M_{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ es la igualdad,

$$(M_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = -\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu}. \quad (2.28)$$

Un cálculo directo permite verificar fácilmente la validez de las siguientes relaciones de conmutación para los generadores del grupo L_+^\uparrow

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = -\eta_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\delta}M_{\gamma\beta}. \quad (2.29)$$

Aquí los generadores $M_{\alpha\beta}$ se deben interpretar como operadores que pueden estar definidos en una representación arbitraria. A partir de (2.19), es posible obtener una representación en términos de operadores diferenciales,

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + (X_i)^\mu{}_\beta x^\beta \delta a^i + \mathcal{O}(X^2) \\ &= x^\mu + (X_i)^\alpha{}_\beta x^\beta (\partial_\alpha x^\mu) \delta a^i + \mathcal{O}(X^2) \\ &= x^\mu - \frac{i}{2} (X_i)^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} x^\mu \delta a^i + \mathcal{O}(X^2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

con

$$M_{\alpha\beta} = i(\eta_{\alpha\rho}x^\rho\partial_\beta - \eta_{\beta\rho}x^\rho\partial_\alpha). \quad (2.31)$$

Esta es una buena representación ya que satisface todas las propiedades anteriormente mencionadas. En particular para (2.29),

$$\begin{aligned} [M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] &= -[\eta_{\alpha\rho}x^\rho\partial_\beta - \eta_{\beta\rho}x^\rho\partial_\alpha, \eta_{\gamma\sigma}x^\sigma\partial_\delta - \eta_{\delta\sigma}x^\sigma\partial_\gamma] \\ &= -[\eta_{\alpha\rho}x^\rho\partial_\beta, \eta_{\gamma\sigma}x^\sigma\partial_\delta] + [, \gamma \leftrightarrow \delta] + [\alpha \leftrightarrow \beta,] - [\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \delta] \\ &= -(\eta_{\alpha\rho}\eta_{\gamma\beta}x^\rho\partial_\delta - \eta_{\gamma\sigma}\eta_{\alpha\delta}x^\sigma\partial_\beta) \\ &\quad + (\gamma \leftrightarrow \delta) + (\alpha \leftrightarrow \beta) - (\gamma, \alpha \leftrightarrow \delta, \beta) \\ &= -\eta_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} + \eta_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\delta}M_{\gamma\beta}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Además de las transformaciones de Lorentz, sobre los vectores del espacio de Minkowski puede actuar una transformación de traslación, concretamente

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad (2.33)$$

donde $a^\mu = cte$ es un tetravector constante. Esta transformación es un desplazamiento homogéneo en la dirección del vector a^μ . En la representación vectorial, los generadores de traslación se pueden encontrar del modo siguiente,

$$x'^\mu = x^\mu + (P_\rho)^\mu{}_\nu a^\rho x^\nu = x^\mu + a^\mu, \quad (2.34)$$

es decir,

$$(P_\rho)^\mu{}_\nu x^\nu = \delta^\mu{}_\nu, \quad (P_\rho)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \partial_\rho. \quad (2.35)$$

Estas traslaciones forman un grupo de Lie conmutativo (abeliano),

$$[P_\xi, P_\rho] = 0, \quad (2.36)$$

cuyo espacio de grupo (espacio de parámetro a^μ) es el propio espacio de Minkowski. El grupo de Lorentz junto con el grupo de traslaciones forman el grupo de Poincaré. Las relaciones (2.29) y (2.36), junto con,

$$[P_\rho, M_{\mu\nu}] = \eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu, \quad (2.37)$$

definen una algebra de Lie, denominada algebra de Poincaré $iso(3, 1)$. Los generadores P_μ y $M_{\mu\nu}$ del algebra Lie son vectores tangentes a la variedad diferencial correspondiente al grupo $g(\vec{\alpha})$ en la vecindad del elemento identidad (§ 3.6), es decir cada uno de ellos satisface,

$$I_\alpha = \left. \frac{dg(\vec{\alpha})}{d\alpha_i} \right|_{\vec{\alpha}=0}. \quad (2.38)$$

Estos elementos muchas veces son la única forma de trabajar con grupos que contienen un número infinito de elementos. Las funciones definidas sobre esta variedad forman un campo vectorial A . Sobre este campo está definido el mapeo $m : A \otimes A \rightarrow A$, el cual se denomina multiplicación o producto. Este mapeo a su vez induce una estructura definida mediante $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, la cual se denomina comultiplicación o coproducto:

$$\Delta(\ell)(f \otimes g) = \ell(f \cdot g), \quad (2.39)$$

donde $\ell \in A$, asigna a toda función lineal en A una función lineal en $A \otimes A$. Para obtener los coproductos de los generadores diferenciales, el procedimiento usual es determinar de que manera actúan estos frente al producto de dos funciones. Para (2.35),

$$\partial_\mu(fg) = (\partial_\mu f)g + f(\partial_\mu g), \quad (2.40)$$

por lo tanto,

$$\Delta(P_\mu) = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu. \quad (2.41)$$

Si consideramos el operador multiplicación definido como $m(f \otimes g) = fg$, entonces,

$$m(\Delta(P_\mu)(f \otimes g)), \quad (2.42)$$

es completamente equivalente a (2.40). Por otro lado para (2.31),

$$\begin{aligned} i(\eta_{\mu\rho}x^\rho\partial_\nu - \eta_{\nu\rho}x^\rho\partial_\mu)(fg) &= i[\eta_{\mu\rho}x^\rho(\partial_\nu f)g + \eta_{\mu\rho}x^\rho f(\partial_\nu g) \\ &\quad - \eta_{\nu\rho}x^\rho(\partial_\mu f)g - \eta_{\nu\rho}x^\rho f(\partial_\mu g)] \\ &= i[(\eta_{\mu\rho}x^\rho\partial_\nu f - g_{\nu\rho}x^\rho\partial_\mu f)g \\ &\quad + f(\eta_{\mu\rho}x^\rho\partial_\nu g - g_{\nu\rho}x^\rho\partial_\mu g)], \end{aligned} \quad (2.43)$$

de aquí,

$$\Delta(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Podemos ver así, que el coproducto es una manera sistemática de escribir la regla de Leibniz y que nos permitirá generalizar esta idea al caso no-conmutativo.

2.2. Ecuaciones de Einstein

Desde el punto de vista del enfoque Lagrangiano, la dinámica de un sistema físico se describe definiendo una densidad lagrangiana, es decir cierta función escalar real $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$ de las variables dinámicas del sistema $\{\phi^i(x^\mu)\}$ y sus derivadas. Las ecuaciones dinámicas se buscan a partir del principio de Hamilton, el cual exige que la variación del funcional de acción

$$S[\phi] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (2.45)$$

definido en una cierta región \mathcal{M} del espacio coordenado, sea un extremo para variaciones pequeñas de las variables $\{\delta\phi_i(x^\mu)\}$, las cuales se anulan en la frontera de dicha región. No existen reglas generales para la construcción de los Lagrangianos, excepto el hecho que si se desea que el sistema que se describe posea cierto grupo de simetrías, su Lagrangiana debe ser invariante respecto a dicho grupo, lo cual implica la correspondiente invariancia de las ecuaciones de movimiento.

En la teoría general de la relatividad, las transformaciones de simetría son las transformaciones de difeomorfismos. El grupo de Poincaré constituye un caso particular de estas transformaciones. Por lo tanto para construir una Lagrangiana a la teoría general de la relatividad es necesario tener un escalar que sea invariante ante transformaciones de coordenadas, que dependa solamente de las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (este será el campo dinámico), y de sus derivadas que en principio pueden ser de cualquier orden. El caso más simple y no trivial de un escalar que satisface esta propiedad es el escalar R de Ricci. Este escalar se obtiene a partir de la contracción de índices del tensor de Riemann $R_{\rho\lambda\delta}{}^\mu$, que a su vez contiene toda la información sobre la curvatura del espacio. El escalar R solo depende de $g_{\mu\nu}$ y de sus primeras y segundas derivadas. De hecho R es el único escalar que se puede construir que no depende de derivadas superiores a orden dos. En §7.2 se obtendrá de forma explícita R a partir de una métrica $g_{\mu\nu}$.

Partiendo del conocimiento, que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio tiempo, adicionado a la condicionante que $\sqrt{-g}d^4x$ es un invariante de volumen ante difeomorfismos, fue como Hilbert en 1915 sugirió la siguiente acción,

$$S_H = \int d^4x \mathcal{L}_H, \quad (2.46)$$

donde,

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R. \quad (2.47)$$

A partir de la acción de Hilbert, es posible obtener las ecuaciones que determinan las propiedades del espacio-tiempo, a través del campo definido por la métrica en presencia de la materia y la energía distribuidos en el. Para llegar a estas ecuaciones es preciso aplicar este principio variacional a la acción de Hilbert,

$$\delta S_H = \int d^4x \left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g} \right]. \quad (2.48)$$

Para realizar este cálculo se expresaran el primer y el tercer término en función de $\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$. Primeramente para el tercer término, teniendo en cuenta que

$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, se puede deducir,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.49)$$

Para calcular $\delta R_{\mu\nu}$ se observa que aunque las cantidades $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ no constituye un tensor, sus variaciones $\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ si lo forman. En efecto $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu dx^\lambda$ es el cambio que experimenta un vector debido a las traslaciones desde un punto p a un punto infinitesimalmente proximo p' . Por consiguiente, $\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu dx^\lambda$ es la diferencia entre dos vectores que resulta de dos corrimientos paralelos (uno con las $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ no variadas y otro con las $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ variadas) desde el punto p al punto p' . Pero la diferencia entre dos vectores aplicados al mismo punto es un vector; por consiguiente $\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ es un tensor.

Si se adopta un sistema de coordenadas localmente geodésico, entonces en este punto todos los $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0$. Teniendo en cuenta esto y a partir del tensor de Ricci escrito de la forma,

$$R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda = R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho\Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho, \quad (2.50)$$

se puede obtener,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma\right) \\ &= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu = \frac{\partial w^\sigma}{\partial x^\sigma}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde,

$$w^\sigma = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^\nu. \quad (2.52)$$

Dado que w^λ es un vector, es posible escribir esta ultima relación, en un sistema arbitrario de coordenadas,

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\sqrt{-g}w^\sigma). \quad (2.53)$$

De aquí,

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x = \int \frac{\partial(\sqrt{-g}w^\sigma)}{\partial x^\sigma}d^4x. \quad (2.54)$$

De acuerdo al teorema de Stokes esta integral resulta ser igual a la integral de $(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu)$ extendida a la frontera de la región tetra-dimensional ∂D . Dado que en ∂D la variación del campo se anula, esta integral resulta ser nula,

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = 0. \quad (2.55)$$

Al sustituir (2.49) y (2.55) en (2.48), se concluye,

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

Por lo cual,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (2.57)$$

Teniendo en cuenta la acción,

$$S = \frac{1}{8\pi G} S_H + S_M, \quad (2.58)$$

se obtiene,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.59)$$

Para que estas ecuaciones sean consistentes para el caso clásico ($\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$) es necesario,

$$\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.60)$$

con $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento. A las ecuaciones (2.57) se les denomina ecuaciones de Einstein en el vacío, mientras que (2.60), reciben el nombre de ecuaciones de Einstein en presencia de materia. Se tratan de diez ecuaciones ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) para las diez componentes de la métrica ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Dichas ecuaciones son de segundo orden respecto a la métrica, es decir respecto al campo gravitatorio, y relacionan la curvatura de este (es decir espacio-tiempo) con el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ de la materia. El tensor de energía-momento caracteriza la distribución y el movimiento de la materia. Sus componentes T^{00}, T^{0i}, T^{ij} son respectivamente, la densidad de energía, la densidad de impulso (densidad de flujo de energía) y la densidad de flujo de impulso de la materia. Este tensor es una característica universal de la materia y es inherente a todos los tipos de materia.

2.3. Formalismo ADM

A la formulación de la relatividad general que resulta de la separación de superficies tridimensionales Σ_t de tipo espacio, parametrizadas en termino de un tiempo coordenado t , se denomina formalismo ADM. Cuando un espacio-tiempo dotado de una métrica ($M^4, g_{\mu\nu}$) se puede separar en hipersuperficies tridimensionales Σ_t , se dice que este espacio métrico admite una foliación. Es decir ($M^4, g_{\mu\nu}$) estaría representado por la evolución de tales superficies: $M^4 \sim M^3 \times \mathbb{R}$. Las hipersuperficies Σ_t representan una familia de sub-espacios riemannianos (M^3, h_{ij}) de dimensión tres, dotados de una métrica inducida h_{ij} sobre M^3 .

Este formalismo consiste primeramente, en descomponer la métrica $g_{\mu\nu}$ en términos de tres elementos. El primero es una métrica h_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) que medirá la distancia dentro de las hipersuperficies Σ_t , es decir $dl^2 = h_{ij} dx^i dx^j$. El segundo elemento es una función denominada lapso N , que será en esencia una medición temporal de un observador moviéndose a través de las hipersuperficies Σ_t , es decir $d\tau = N dt$. Y finalmente el tercero es un vector de corrimiento N^i que medirá la velocidad relativa entre esos observadores. En términos de estos elementos, el elemento de línea entre dos eventos espacio-tiempo $p(x^i, t)$ y $p'(x^i + dx^i, t + dt)$ se escribe de la forma,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt) - (N dt)^2 \\ &= (N_i N^i - N^2) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por lo tanto de aquí,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^i N_i & -N_i \\ -N_i & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

De esta forma se tiene bien definida una pseudodistancia ds^2 para M^4 , que brinda una forma de medir distancias en las hipersuperficies Σ_t . Es decir h_{ij} proporciona las distancias infinitesimales entre puntos con coordenadas x^i y $x^i + dx^i$ de la variedad tridimensional Σ_t . Por lo tanto h_{ij} es una buena 3-métrica y caracteriza la geometría intrínseca de Σ_t . De esto último es posible escribir el elemento de volumen en términos de las nuevas variables,

$$\sqrt{-g}d^4x = N\sqrt{h}d^3xdt. \quad (2.63)$$

De la misma forma también es posible mostrar que las componentes del vector normal unitario n^μ a las hipersuperficies es

$$n^\mu = (1/N, -N^i/N). \quad (2.64)$$

El vector dual de este vector es

$$n_\mu = (-N, 0). \quad (2.65)$$

Por lo tanto

$$n^\nu n_\nu = -1. \quad (2.66)$$

Al estudiar las hipersuperficies espaciales que forman la foliación, es importante distinguir entre dos tipos de curvatura, la "intrínseca" que depende de la geometría interna y la curvatura "extrínseca" que está relacionada con la forma en que estas hipersuperficies se encuentran inmersas en M^4 .

La curvatura intrínseca queda determinada por el tensor de Ricci tridimensional que se define en términos de la métrica espacial h_{ij} . La curvatura extrínseca se define en términos del comportamiento del vector normal n^i al ser transportado paralelamente. El tensor de curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ es una medida del cambio en el vector normal bajo transporte paralelo, y se define mediante,

$$K_{\alpha\beta} := -\nabla_\alpha n_\beta, \quad (2.67)$$

donde ∇ es la derivada covariante. Esta derivada covariante puede ser escrita en términos de los símbolos de Christoffel de la forma,

$$\nabla_\alpha n_\beta = \partial_\alpha n_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda n_\lambda. \quad (2.68)$$

Este tensor de curvatura extrínseca es simétrico ($K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$) y tiene la propiedad $n^\alpha K_{\alpha\beta} = 0$. De esto último se sigue que el tensor $K_{\alpha\beta}$ es puramente espacial. Por esta razón se escribirá solo con componentes espaciales K_{ij} . Sustituyendo el vector normal (2.64) en la definición de la curvatura extrínseca es posible mostrar que K_{ij} está dada en términos de la métrica de la forma,

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + D_j N_i + D_i N_j \right), \quad (2.69)$$

donde D_i es el operador de derivada covariante compatible con h_{ij} . El conjunto (K_{ij}, h_{ij}) caracteriza unívocamente a cada hipersuperficie Σ_t de la foliación, de tal forma que provee los datos iniciales para reconstruir $(M^4, g_{\mu\nu})$.

El siguiente objeto a proyectar sobre las hipersuperficies Σ_t serán los tensores definidos sobre el espacio tangente $T_p(M)$. Para lograr esto se introduce el operador de proyección sobre Σ_t ,

$$h^\mu{}_\nu := \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu. \quad (2.70)$$

De esta definición, por ejemplo al proyectar un vector v^α se obtiene

$$h^\mu{}_\nu n^\nu = \underbrace{\delta^\mu{}_\nu n^\nu}_{=n^\mu} + n^\mu \underbrace{n_\nu n^\nu}_{=-1} = 0. \quad (2.71)$$

Esto significa que todo vector proyectado a la hipersuperficie es ortogonal a n^α .

Por consistencia las componentes espaciales de este nuevo operador de proyección deben coincidir con la métrica inducida h_{ij} , definida sobre Σ_t , al ser escrita en su forma mixta $h^i{}_j$.

De esta manera un 4-vector $w \in T_p(M)$ se descompone en componentes normales como

$${}^3w^\mu := h^\mu{}_\nu w^\nu. \quad (2.72)$$

A partir de la definición (2.70) esto puede representarse de la forma,

$$w^\mu = {}^3w^\mu + w_\perp n^\mu, \quad (2.73)$$

donde $w_\perp := -n_\mu w^\mu$.

Este resultado se puede generalizar para tensores de todo orden. En principio, se puede definir una derivada covariante D sobre $T_p(\Sigma_t)$ de forma análoga con lo anterior, es decir, proyectando el tensor que se obtiene de aplicar la derivada covariante en $T_p(M)$ sobre un 4-vector ¹,

$$D_\lambda w^\mu := h^\gamma{}_\lambda h^\mu{}_\alpha \nabla_\gamma w^\alpha. \quad (2.74)$$

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi, que relacionan la curvatura (intrínseca) del espacio-tiempo con la curvatura intrínseca de la hipersuperficie Σ_t y su correspondiente curvatura extrínseca, se obtienen al aplicar el operador $(D_\rho D_\beta - D_\beta D_\rho)$ sobre un vector ${}^3w_\mu \in T_p(\Sigma_t)$. Primeramente, a partir de (2.74) se obtiene,

$$\begin{aligned} D_\rho D_\beta {}^3w_\mu &= h^\alpha{}_\rho h^\delta{}_\beta h^\tau{}_\mu \nabla_\alpha (h^\epsilon{}_\delta h^\theta{}_\tau \nabla_\epsilon {}^3w_\theta) \\ &= h^\alpha{}_\rho h^\delta{}_\beta h^\tau{}_\mu [(\nabla_\alpha h^\epsilon{}_\delta) h^\theta{}_\tau \nabla_\epsilon {}^3w_\theta \\ &\quad + h^\epsilon{}_\delta (\nabla_\alpha h^\theta{}_\tau) \nabla_\epsilon {}^3w_\theta + h^\epsilon{}_\delta h^\theta{}_\tau \nabla_\alpha \nabla_\epsilon {}^3w_\theta]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Esto en virtud, de tener en cuenta: $h^\alpha{}_\rho h^\delta{}_\beta \nabla_\alpha h^\epsilon{}_\delta = -n^\epsilon K_{\beta\epsilon}$, relación que se obtiene al escribir $h^\epsilon{}_\delta$ como $\delta^\epsilon{}_\delta + n^\epsilon n_\delta$. Después de identificar términos, es posible simplificar y obtener,

$$D_\rho D_\beta {}^3w_\mu = -(h^\theta{}_\mu n^\epsilon K_{\rho\beta} + h^\epsilon{}_\beta n^\theta K_{\mu\rho}) \nabla_\epsilon {}^3w_\theta + h^\alpha{}_\rho h^\epsilon{}_\delta h^\theta{}_\tau \nabla_\alpha \nabla_\epsilon {}^3w_\theta. \quad (2.76)$$

De esta relación y la definición de tensor de curvatura,

$${}^3R_{\rho\beta\nu}{}^\mu ({}^3w_\mu) := (D_\rho D_\beta - D_\beta D_\rho) {}^3w_\nu, \quad (2.77)$$

¹El operador D_α se define como la proyección de la cuatro-derivada ∇_α sobre la hipersuperficie Σ_t y resulta además que es la derivada covariante compatible con h_{ij} .

se obtiene,

$${}^3R_{\rho\beta\mu}{}^\alpha = K_{\mu\beta}K^\alpha{}_\rho - K_{\mu\rho}K^\alpha{}_\beta + h^\eta{}_\rho h^\epsilon{}_\beta h^\theta{}_\mu R_{\eta\epsilon\theta}^\alpha. \quad (2.78)$$

A partir de esta relación, es posible encontrar el escalar de curvatura, contrayendo los índices α, β y ρ, μ . Al realizar esto se obtiene,

$${}^3R = K_{\mu\beta}K^{\beta\mu} - K^2 + R + 2R^{\perp\perp}, \quad (2.79)$$

donde $2R^{\perp\perp} := n^\epsilon n^\alpha R_{\epsilon\sigma}$. Teniendo en cuenta la relación

$$R^{\perp\perp} = \nabla_\alpha(a^\alpha + Kn^\alpha) - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + K^2, \quad (2.80)$$

donde $a^\alpha := n^\beta \nabla_\beta n^\alpha$, la ecuación (2.79) adquiere la forma,

$$R = {}^3R + K_{\beta\mu}K^{\beta\mu} - K^2 - 2\nabla_\alpha(a^\alpha + Kn^\alpha). \quad (2.81)$$

Finalmente al definir,

$$R_{nn} \equiv R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = -K_{\beta\mu}K^{\beta\mu} + K^2 + \nabla_\alpha(a^\alpha + Kn^\alpha), \quad (2.82)$$

se encuentra la forma mas común de expresar las ecuaciones de Gauss-Codazzi,

$$R = {}^3R - 2R_{nn} + K^2 - K_{\beta\mu}K^{\beta\mu}. \quad (2.83)$$

Cabe mencionar que al proyectar el tensor de curvatura de curvatura definido en M^4 sobre Σ_t , se ha roto la covarianza y se ha obtenido un escalar de curvatura definido en las hipersuperficies Σ_t con un parámetro de evolución. Este parámetro de evolución será sumamente importante mas adelante cuando se considere el escalar ${}^3R - 2R_{nn} + K^2 - K_{\beta\mu}K^{\beta\mu}$ en la acción de Einstein-Hilbert, afín de construir el formalismo hamiltoniano de la relatividad general.

2.4. Cuantización canónica de teorías de norma

Uno de los retos fundamentales de la física es la cuantización de las teorías de norma. Una teoría de norma, es una teoría invariante ante un grupo de transformaciones. En el caso de la gravedad como se menciono anteriormente, el grupo de difeomorfismos son las transformaciones que dejan invariante a la teoría. Existen diferentes métodos para la cuantización de estas teorías. En esta sección se presentara el método de Dirac.

Toda teoría de norma esta caracterizada por un lagrangiano singular, es decir,

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0. \quad (2.84)$$

Esto significa que no todas las aceleraciones se encuentran determinadas por las ecuaciones de movimiento, por lo que la teoría contiene cierta arbitrariedad. Esta arbitrariedad se refleja mediante la aparición de parámetros arbitrarios en las soluciones de las ecuaciones de movimiento. En estas teorías los observables son solamente aquellas combinaciones de variables dinámicas que son independientes de esto parámetros arbitrarios. La ecuación (2.84) indica además que no todos

los momentos $\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ están determinados por las velocidades, es decir, existen m'_1 relaciones del tipo,

$$\phi(\pi, q)_{A_1} \approx 0, \quad (2.85)$$

donde \approx significa que estas relaciones son cero una vez que se hayan evaluado todos los paréntesis de Poisson donde estas aparezcan. Estos objetos reciben el nombre de constricciones primarias. El número de constricciones primarias independientes es igual a la dimensión de la matriz (2.84) menos el rango de la misma. Las constricciones (2.85) definen una subvariedad del espacio fase llamada superficies de restricción, sobre la cual está restringido el movimiento del sistema. El hamiltoniano de estas teorías,

$$H_0 = \dot{q}^j \pi_j - L, \quad (2.86)$$

no está unívocamente determinado como una función exclusivamente de momentos y coordenadas, ya que las variaciones en estas variables no son todas independientes sino que deben estar restringidas para preservar las constricciones primarias. Por lo tanto este hamiltoniano está solamente bien definido únicamente sobre la superficie de restricción. Para extender la teoría fuera de esta superficie se define el nuevo hamiltoniano,

$$H_1 = H_0 + \lambda^{A_1} \phi_{A_1}, \quad (2.87)$$

donde A_1 son las constricciones primarias independientes y λ^{A_1} son los multiplicadores de Lagrange correspondientes. Para que la superficie de restricción se preserve en el tiempo, es necesario que $\dot{\phi}_{A_1} \approx 0$, es decir,

$$\{\phi_{A_1}, H_1\} = V_{A_1}^{B_1} \phi_{B_1} + V_{A_1}^{A_2} \phi_{A_2} \approx 0, \quad (2.88)$$

donde $\{A, B\}$ es el paréntesis de Poisson de las cantidades A y B . En esta etapa podrían aparecer nuevas constricciones ϕ_{A_2} , llamadas secundarias. Si se obtuvieran constricciones secundarias, sería necesario pedir que estas también se conserven en el tiempo. Al hacer esto último podrían aparecer una nueva generación de nuevas constricciones. Este proceso continúa hasta que ya no se encuentran nuevas. Una vez que se obtiene la colección completa de constricciones, se definen las variables de primera clase como aquellas que tienen paréntesis de Poisson ≈ 0 con cada una de las constricciones. Es decir, F es de primera clase si,

$$\{F, \phi_A\} = V_A^B(\pi, q) \phi_B, \quad (2.89)$$

con el índice $A = 1, \dots, M$, donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$, con m_N siendo el número de constricciones de la n -ésima generación. Las cantidades de segunda clase son aquellas que no satisfacen esta condición. En consecuencia, es posible definir como constricciones de primera clase G_a a todas aquellas que satisfagan la relación,

$$\{G_a, \phi_B\} = C_{aB}^C(\pi, q) \phi_C, \quad (2.90)$$

con $a = 1, \dots, p$. Por lo cual, las funciones de estructura $C_{aB}^C(\pi, q)$, pueden depender de las coordenadas y los momentos, es decir, no necesariamente se tiene una álgebra de Lie. En el caso de las constricciones de primera clase no es posible determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a ellas y estos son los parámetros arbitrarios que aparecerán en la solución de las ecuaciones de

movimiento. Sin embargo, para el caso de constricciones de segunda clase, χ_α es posible determinar dichos multiplicadores debido a la existencia de la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}, \quad (2.91)$$

cuyo determinante es diferente de cero y por lo tanto invertible. Esto permite mostrar que todos los multiplicadores de Lagrange asociados a estas constricciones pueden ser determinados. En consecuencia, cuando se tienen solo constricciones de segunda clase no existe libertad de norma aun cuando el lagrangiano es singular. Así, desde el punto de vista hamiltoniano, una teoría de norma es aquella que tiene al menos una restricción de primera clase.

Dirac postulo que todas las constricciones generan transformaciones de norma. Esto significa que el cambio de una función arbitraria de momentos y coordenadas $F(\pi, q)$ bajo una transformación de norma, esta dado por,

$$\delta F = \{F, \epsilon^a G_a\}, \quad (2.92)$$

donde el índice a rotula todas las constricciones de primera clase y el parámetro de las transformación $\epsilon^a(q, \pi, t)$, puede depender de las coordenadas del espacio fase y del tiempo. Si se considera que todas las constricciones de primera clase son generadoras de transformaciones de norma, entonces es posible escribir, en lugar de hamiltoniano H_1 , otro que tome en cuenta la arbitrariedad inherente al extenderlo fuera de la superficie de restricción. Este hamiltoniano se le conoce como el hamiltoniano extendido y esta dado por,

$$H_E = H_0 + \lambda^a G_a. \quad (2.93)$$

Las ecuaciones de movimiento, sobre la superficie de constricciones, asociadas a este hamiltoniano son,

$$\dot{q} = \{q, H_E\} = \frac{\partial H_0}{\partial \pi} + \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial \pi}, \quad (2.94)$$

$$\dot{\pi} = \{\pi, H_E\} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial q}. \quad (2.95)$$

$$(2.96)$$

Estas ecuaciones de movimiento y las constricciones $G_a \approx 0$, pueden obtenerse al variar con respecto a los parámetros π, q y λ^a la acción,

$$S = \int_a^b (\pi \dot{q} - H_0 - \lambda^a G_a). \quad (2.97)$$

Como los n multiplicadores de Lagrange λ^a son arbitrarios, uno puede imponer n condición de de norma para determinarlos,

$$N_a(\lambda, \pi, q) = 0. \quad (2.98)$$

Y dado que también se desea que dichas condiciones fijen totalmente la norma, esta debe satisfacer la relación,

$$\det\{G_a, N_b\} \neq 0, \quad (2.99)$$

de tal manera que la matriz $\{G_a, N_b\}$ sea invertible y de este modo puedan determinarse todos los multiplicadores de Lagrange.

Para cuantizar una teoría de norma desde el punto de vista de Dirac, se tiene que seguir una secuencia de pasos. El primero consiste en promover las constricciones de primera clase a nivel de operadores en el espacio de Hilbert correspondiente. Posteriormente se promueven a operadores cuánticos las constricciones de primera clase,

$$G_a \rightarrow \hat{G}_a. \quad (2.100)$$

Luego se postula que un estado $|\psi\rangle$ es físico solo si es aniquilado por el operador,

$$\hat{G}_a|\psi\rangle = 0. \quad (2.101)$$

Por ultimo se postula que los observable de la teoría son todos aquellos operadores hermíticos del espacio fase, invariantes bajo una transformación de norma, es decir, que conmutan con todas las constricciones de primera clase:

$$\hat{F} = \hat{F}^\dagger \text{ es observable} \Leftrightarrow \delta\hat{F} = [\hat{F}, \epsilon^a \hat{G}_a] = 0. \quad (2.102)$$

Este método de cuantización tiene grandes ventajas ya que no es necesario fijar una norma para obtener una teoría cuántica. Esto ultimo sera importante cuando se cuantize la teoría de la gravedad.

2.5. Ecuación de Wheeler-DeWitt.

Una vez revisadas las nociones básicas tanto de la formulación hamiltoniana y la cuantización canónica, se construirá el hamiltoniano correspondiente a la acción de Hilbert, en términos de las variables ADM. Posteriormente se aplicara la técnica de cuantización a este hamiltoniano. A la ecuación resultante se le denomina de Wheeler-DeWitt, por sus autores John Wheeler y Bryce DeWitt, en la década de los 60's.

La acción de Hilbert (2.46) se puede expresar haciendo uso de la descomposición ADM (2.83) de la siguiente forma,

$$S = \int L dt = \int dt d^3x \sqrt{h} N \left[K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^3R \right] + \mathcal{O}(\partial_M), \quad (2.103)$$

donde h indica el determinante de la 3-métrica de la hipersuperficie espacial y $\mathcal{O}(\partial_M)$ se refiere a términos de borde. En esta expresión se ha suprimido la acción correspondiente a la materia, además de considerarse a $16\pi G = 1$, esto a fin de simplificar el análisis. Por la forma de la curvatura extrínseca, el lagrangiano no depende de derivadas temporales de N o de N^i , luego sus momentos conjugados son,

$$\begin{aligned} \pi^0 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0, \\ \pi^i &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^i} = 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

En la terminología de Dirac, los momentos conjugados de N y N^i , no son variables dinámicas sino constricciones de tipo primarias; es decir, el corchete de Poisson entre dos cualesquiera de ellos es nulo en la hipersuperficie.

Con el objeto de calcular los momentos canónicos conjugados a las seis h_{ij} , definidos como,

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}}, \quad (2.105)$$

se introduce el objeto de cuatro índices,

$$G^{ijkl} \equiv \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} (h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk}) - h^{ij} h^{kl} \right]. \quad (2.106)$$

A este objeto se le denomina supermetrica. A partir de esto se puede escribir el lagrangiano de la forma,

$$\mathcal{L} = N (G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{h} {}^3R). \quad (2.107)$$

De aquí se pueden construir los momentos a partir de su definición y la expresión anterior,

$$\pi^{ij} = N \left(2G^{mnkl} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \right), \quad (2.108)$$

de la ecuación (2.69) se sigue que,

$$\frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -\frac{1}{2N} \left(\frac{1}{2} (\delta_i^m \delta_j^n + \delta_j^m \delta_i^n) \right), \quad (2.109)$$

por lo que se tiene,

$$\pi^{ij} = -G^{ijkl} K_{kl}. \quad (2.110)$$

Para realizar la transformada de Legendre de la lagrangiana y definir el hamiltoniano, es necesario despejar las velocidades como funciones de los momentos. Las velocidades \dot{N}^μ son funciones arbitrarias y por lo tanto, no se pueden expresar en términos de las coordenadas y momentos. Las velocidades de la métrica h_{ij} se podrán expresar de tal forma si es posible invertir (2.105), es decir expresar K_{ij} en términos de los momentos. La inversa de la supermetrica G^{ijkl} es un objeto tal que al contraerlo con ella, da como resultado la identidad,

$$G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_i^m \delta_j^n + \delta_j^m \delta_i^n, \quad (2.111)$$

es decir,

$$G_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\frac{1}{2} (h_{ik} h_{jm} + h_{il} h_{jk}) - \frac{1}{2} h_{ij} h_{kl} \right]. \quad (2.112)$$

De aquí la curvatura extrínseca se podrá expresar como,

$$K_{ij} = -G_{ijkl} \pi^{kl}. \quad (2.113)$$

A partir de (2.69) y (2.113) se escriben las velocidades \dot{h}_{ij} de la forma,

$$\dot{h}_{ij} = -D_i N_j - D_j N_i + 2N G_{ijkl} \pi^{kl}. \quad (2.114)$$

Por lo tanto a este nivel, es posible escribir la densidad hamiltoniana,

$$\begin{aligned} (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}) &= -G^{ijkl} K_{kl} (D_i N_j + D_j N_i - 2N K_{ij}) \\ &\quad - N (G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{h} {}^3R). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Al escribir esta densidad tensorial en términos de los momentos, se obtiene siguiente hamiltoniano,

$$H = \int d^3x (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}) = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i), \quad (2.116)$$

donde \mathcal{H} y \mathcal{H}_i están dados por,

$$\mathcal{H} = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h}^3 R, \quad (2.117)$$

y

$$\mathcal{H}_i = 2h_{ik} D_j \pi^{jk}. \quad (2.118)$$

Finalmente, la acción en forma hamiltoniana es,

$$S = \int dt d^3x (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i). \quad (2.119)$$

Es interesante notar en esta expresión, que al realizar variaciones respecto de h_{ij} y π^{ij} se obtienen las ecuaciones de Einstein correspondientes a $G_{ij} = 0$, mientras que al realizar las variaciones respecto de N y de N^i se obtienen las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 0, \\ \mathcal{H}^i &= 0, \end{aligned} \quad (2.120)$$

que corresponden, respectivamente, a las ecuaciones restantes $G_{00} = 0$ y $G_{0i} = 0$. Estas constricciones también pueden ser obtenidas imponiendo la condición que la derivada temporal de las constricciones primarias se anulen. Esto es esencial para que la estructura de las constricciones del sistema se mantengan durante la evolución dinámica. Las constricciones que se obtienen de este modo se denominan secundarias. Estas constricciones son, además, de primera clase; es decir, el paréntesis de Poisson entre dos cualesquiera de ellos es nulo en la hipersuperficie. Esto asegura independencia de la evolución dinámica en la foliación.

Para cuantizar el hamiltoniano (2.116), se convierten la métrica h_{ij} y el momento π^{ij} , en operadores que satisfagan las reglas de conmutación,

$$\begin{aligned} [\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}, t), \hat{h}_{kl}(\mathbf{y}, t)] &= [\hat{\pi}^{ij}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}^{kl}(\mathbf{y}, t)] = 0, \\ [\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}^{kl}(\mathbf{y}, t)] &= \frac{i}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Se puede adoptar una representación particular, la representación de la métrica (en analogía con la representación de posición en mecánica cuántica ordinaria). En esta representación, el funcional de onda se convierte en un funcional de la 3-métrica, y el momento se reemplaza por la derivada variacional con respecto a la 3-métrica,

$$\pi^{ij} \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}(\mathbf{x})}. \quad (2.122)$$

Posteriormente se demanda que las funciones de onda sean aniquiladas por los operadores de las constricciones primarias,

$$\hat{\pi} \psi = -i \frac{\delta \psi}{\delta N} = 0, \quad (2.123)$$

$$\hat{\pi}^i \psi = -i \frac{\delta \psi}{\delta N_i} = 0. \quad (2.124)$$

Esto implica que ψ es independiente de N y N^i , mientras que a partir de (2.116) se obtiene,

$$\left(\hat{G}_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\delta^2}{\delta h_{ij}(\mathbf{x}) \delta h_{kl}(\mathbf{x})} + \sqrt{h(\mathbf{x})} {}^3R \right) \psi[h_{ij}] = 0, \quad (2.125)$$

$$\left(\hat{h}_{ik} D_j \frac{\delta}{\delta h_{jk}(\mathbf{x})} \right) \psi[h_{ij}] = 0. \quad (2.126)$$

La ecuación (2.125) se denomina ecuación de Wheeler-DeWitt para un superespacio. Esta ecuación sería la análoga a la ecuación de Schrodinger (es de segundo orden en derivadas funcionales), y tendría que ser interpretada como la ecuación cuántica de la gravedad, y su alcance representaría la explicación de fenómenos como las singularidades de los hoyos negros o incluso el origen del universo, entre otros. Sin embargo esta ecuación cuántica está muy lejos de explicar estos y otros problemas abiertos de la física teórica.

Las ecuaciones de Wheeler-DeWitt, tanto para el caso general superespacio, como para los casos restringidos minisuperespacio (este análisis será hecho mas adelante) tienen muchos problemas técnicos y conceptuales, los mas importantes son los siguientes:

1. El ordenamiento de los operadores al momento de cuantizar, no necesariamente puede ser el adecuado. Es necesario hacer una regularización.
2. No queda claro, si es necesaria la condición de hermiticidad a los operadores, esto con la argumentación que el espacio de Hilbert en donde se halla la representación del algebra canónica no es el mismo espacio de Hilbert en donde se imponen las condiciones físicas sobre los estados que satisfacen las constricciones. En la gran mayoría de los modelos de minisuperespacio sus respectivos modelos son hermiticos sin necesidad de imponerlo.
3. Es necesario construir un producto interno adecuado en el espacio de Hilbert físico.
4. La ecuación para superespacio, contiene el producto de dos derivadas funcionales, en el mismo punto, que al actuar en una funcional de h_{ij} generara un factor $\delta^3(0)$ (arrojando un término infinito). De tal forma que esta ecuación requeriría una regularización. Para los modelos de minisuperespacio, este problema no se transmite ya que los grados de libertad de estos modelos son finitos.
5. A menos que se trabajen con funcionales que sean explícitamente invariantes bajo difeomorfismos espaciales, el acoplamiento de la ecuación de Wheeler-DeWitt y las constricciones de momentos, causan severos problemas, típicamente en la forma de términos no locales. Esto tanto para superespacio, como para minisuperespacio.
6. No hay un tiempo. Solo la evolución de parámetros cosmológicos
7. No es claro en ninguno de los casos que condiciones a la frontera hay que usar, o si quiera si es necesario hacerlo. No hay nada externo al universo.

8. Para ambos casos no se tiene una ecuación de conservación bien definida y una densidad de probabilidad positiva.

Estudiar modelos miniuniversos, representa librar una serie de obstáculos que frenan el estudio del caso general. A continuación se analizarán estos casos restringidos, muy en particular para dos modelos cosmológicos.

2.5.1. Universo clásico Friedmann-Robertson-Walker.

Los modelos cosmológicos homogéneos son ejemplos de espacios con grupo de movimiento de rango tres de orbitas tridimensionales. Dichas orbitas son sub-espacios tridimensionales cuyos puntos se caracterizan por tener valores iguales del tiempo cósmico. El modelo (*FRW*) se basa en la suposición de homogeneidad e isotropía del universo. En virtud de esto, en dicho modelo ninguna componente de la métrica debe depender de las coordenadas espaciales, y el espacio tridimensional-una orbita cuasi-espacial del grupo de movimientos-debe ser un espacio de curvatura constante \mathbf{k} . Si $\mathbf{k} > 0$, se dice que el modelo es cerrado; si $\mathbf{k} < 0$, es abierto; y si $\mathbf{k} = 0$, entonces es del tipo plano. El modelo (*FRW*) para $\mathbf{k} > 0$ esta compuesto por orbitas que son esferas tridimensionales S^3 . Por otro lado el principio cosmológico establece que cada una de las variedades espaciales Σ_t del formalismo ADM, debe ser homogénea e isotropica, lo que hace que se trate de una variedad maximalmente simétrica. El elemento de línea tridimensional para estas variedades es,

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega, \\ d\Omega &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (2.127)$$

donde k caracteriza el modelo que se tome, ya que esta relacionado con el escalar de curvatura por medio de $6k = R$. Para describir el elemento de línea de la variedad en la cual están inmersas las hipersuperficies Σ_t , se aplica un resultado, que afirma la posibilidad de encontrar un sistema de coordenadas en el cual la métrica de la variedad M^4 sea de la forma,

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 + f(t)dl^2. \quad (2.128)$$

Para escalar t de modo que $g_{00} = -1$, con la finalidad de forzar que la métrica tenga signatura $(-, +, +, +)$, se hace la función $f(t)$ positiva, de tal forma que $f(t) = R^2(t)$. Esto conduce a la métrica de Robertson Walker en su forma usual,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right). \quad (2.129)$$

Por otro lado, para evitar infinitos debidos a términos de superficie, se considera un modelo cerrado en donde $k = 1$. Por otro lado se escribe $r \rightarrow \sin \xi$, para que la métrica describa la S^3 esfera que caracteriza a este modelo, de esta manera,

$$\frac{dr^2}{1 - r^2} = \frac{d\xi^2 \cos^2 \xi}{1 - \sin^2 \xi} = d\xi^2. \quad (2.130)$$

De aquí,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left(d\xi^2 + \sin^2 \xi d\Omega \right). \quad (2.131)$$

En este modelo R se conoce como factor de escala, y determina el tamaño del universo en función de tiempo. Una vez fijando la distribución de energía y materia, es decir el tensor de energía momento, como un fluido perfecto, es decir: $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$. Al aplicar las ecuaciones de Einstein se encuentra la evolución temporal de R ,

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.132)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = -8\pi Gp. \quad (2.133)$$

Al restar (2.132) a (2.133) se obtiene,

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.134)$$

Esta ecuación determina como se comporta el universo dependiendo de la forma de la materia en su interior. Para la materia común, $\rho + 3p \geq 0$, el factor de escala estaría en desaceleración. Además, dado que lo que se observa actualmente es expansión ($\dot{R} \geq 0$), se tiene que en algún t el factor de escala fue cero. Se puede re-escalar y decir que $R(t=0) = 0$; este momento es asociado con la creación del universo, un momento en el cual todos los puntos del universo actual estuvieron unidos.

Este modelo tiene muchos problemas, principalmente cuando se analiza el espacio a escalas de energías de Plank, sin embargo algunas de estas dificultades pueden ser resueltas cuando se le agrega un mecanismo de inflación, propuesto por Guth en 1981 [87]. A este modelo con el mecanismo con inflación se le conoce como modelo estándar de la cosmología.

2.5.2. Universo cuántico Friedmann-Robertson-Walker.

Para cuantizar una teoría gravitacional desde el punto de vista canónico, primeramente se requiere encontrar el escalar de curvatura R del espacio-tiempo en su formulación *ADM*, a partir de este escalar se construye la respectiva acción de Einstein-Hilbert, con la cual queda definida una hamiltoniana, que es el punto de partida en la cuantización canónica de la teoría.

La curvatura extrínseca de este modelo es,

$$K_{ij} = -\frac{\dot{R}}{R}h_{ij}. \quad (2.135)$$

Por lo cual y teniendo en cuenta la definición del escalar de curvatura en su descomposición *ADM* (2.83) se obtiene,

$${}^4R = K^2 - K_{ij}K^{ij} + {}^3R = 6\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{6}{R^2}. \quad (2.136)$$

De (2.131) para la función lapso, $N = 1$ y $h = \det h_{ij}$, por lo tanto,

$$\sqrt{h} = R^3 \sin^2 \xi \sin \theta. \quad (2.137)$$

De esta manera a partir de (2.47) y (2.136) se obtiene,

$$\mathcal{L} = -\frac{6}{16\pi G}(R\dot{R} - R)\sin^2 \xi \sin \theta. \quad (2.138)$$

Por lo cual se obtiene la acción,

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = -\frac{6}{16\pi G} \int_{\Sigma} (R\dot{R} - R) \sin^2 \xi \sin \theta dt d^3x. \quad (2.139)$$

Al integrar sobre una 4-esfera resulta,

$$S = -\frac{12\pi^2}{16\pi G} \int (R\dot{R}^2 - R) dt. \quad (2.140)$$

De aquí,

$$L = -\frac{3\pi}{4G} (R\dot{R}^2 - R). \quad (2.141)$$

En este momento ya solo tenemos el factor de escala R como parámetro. Para cuantizar se tiene que encontrar el hamiltoniano de la forma canónica, tomando a R como la única variable dinámica,

$$H = \pi_R \dot{R} - L. \quad (2.142)$$

Para el caso de π_R ,

$$\pi_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = -\frac{3\pi}{2G} R\dot{R}. \quad (2.143)$$

Al despejar \dot{R} de la expresión anterior y sustituirlo en (2.142) se obtiene finalmente el hamiltoniano,

$$H = -\frac{G\pi_R^2}{3\pi R} - \frac{3\pi}{4G} R. \quad (2.144)$$

Usando el procedimiento de cuantización de Dirac, se promueven las variables R y π_R a los operadores,

$$\begin{aligned} \pi_R &\rightarrow \hat{\pi}_R = -i \frac{\partial}{\partial R}, \\ R &\rightarrow \hat{R}, \end{aligned} \quad (2.145)$$

que satisfacen la relación de conmutación,

$$[\hat{R}, \hat{\pi}_R] = i, \quad (2.146)$$

donde se consideró $\hbar = 1$. De (2.144) y (2.145) se obtiene la ecuación de Wheeler-DeWitt para el modelo cerrado de Friedman-Robertson-Walker,

$$\mathcal{H}\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{9\pi^2}{4G^2} R^2 \right) \psi[R] = 0, \quad (2.147)$$

cuyas soluciones son,

$$\psi(R) = a_1 e^{(k/2)R^2}. \quad (2.148)$$

De aquí se vemos que para esta modelo se obtiene una función de onda que solo depende del factor de escala R , es decir una ecuación cuántica que proporciona la evolución radial del modelo S^3 del universo.

2.5.3. Universo cuántico de Kantowski-Sach.

De forma análoga a Friedmann-Robertson-Walker ahora se procederá a cuantizar el universo de Kantowski-Sach. Este universo sera parte central de este trabajo ya que sobre este modelo se introducirá no-conmutatividad mas adelante. En §7.2 se presenta un estudio detallado sobre algunas características y propiedades de este universo. En dicha sección se deducirá que el hamiltoniano de este universo resulta

$$H = \pi_\beta^2 - \pi_\Omega^2 - 6 \exp(-2\sqrt{3}\Omega). \quad (2.149)$$

Al promover las variables dinámicas del sistema a operadores

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \hat{\Omega} = \Omega; \quad \beta \rightarrow \hat{\beta} = \beta, \\ \pi_\Omega &\rightarrow \hat{\pi}_\Omega = -i \frac{\partial}{\partial \Omega}; \quad \pi_\beta \rightarrow \hat{\pi}_\beta = -i \frac{\partial}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (2.150)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación,

$$\begin{aligned} [\hat{\Omega}, \hat{\pi}_\Omega] &= [\hat{\beta}, \hat{\pi}_\beta] = i, \\ [\hat{\Omega}, \hat{\beta}] &= [\hat{\pi}_\Omega, \hat{\pi}_\beta] = 0, \end{aligned} \quad (2.151)$$

donde se ha considerado $\hbar = 1$, se obtiene la ecuación de Wheeler-DeWitt (2.125) para un universo de Kantowski-Sachs,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 6 \exp(-2\sqrt{3}\Omega) \right] \psi(\Omega, \beta) = 0. \quad (2.152)$$

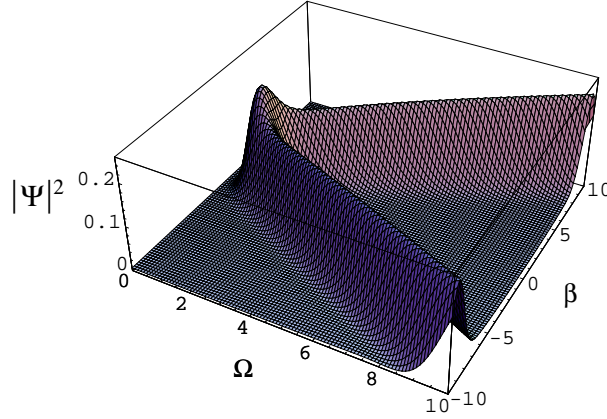


Figura 2.1: Variación de $|\psi|^2$ con respecto a Ω y β . Se muestra que solo puede existir un universo alrededor de $\Omega = 4,81$ y $\beta = 0$.

Las soluciones de (2.152) son,

$$\psi_\nu(\Omega, \beta) = e^{i\nu\sqrt{3}\beta} K_{i\nu}[4e^{\sqrt{3}\Omega}], \quad (2.153)$$

donde ν es una constante de valor real, mientras que $K_{i\nu}$ son funciones de Bessel modificadas. Por lo tanto un estado cuántico en este universo estaría dado por

una superposición de estados [80],

$$\psi(\Omega, \beta) = \sum_{\nu} C_{\nu} e^{i\nu\sqrt{3}\beta} K_{i\nu}[4e^{-\sqrt{3}\Omega}], \quad (2.154)$$

cuya amplitud de probabilidad queda de manifiesto en la Fig 2.1, para Ω en el rango $[0, 10]$ y β en el rango $[-10, 10]$. Aquí se puede ver que existe un estado preferencial (pico de la distribución) al rededor del punto $\Omega = 4,812$ y $\beta = 0$. Este resultado se interpreta como la existencia de un solo universo alrededor de esa vecindad.

Capítulo 3

Estructuras algebraicas

La teoría de partículas elementales se basa en la aplicación de la teoría de grupos para su clasificación, así como en la teoría de campos para describir sus interacciones. El concepto de grupo entra en las teorías de campos y de las partículas elementales mediante el concepto de simetría. Si un sistema es invariante respecto a ciertas transformaciones (es decir si ciertas transformaciones son simetrías del sistema), entonces, evidentemente, estas transformaciones, realizadas una tras otra también constituyen una transformación invariante del sistema (es decir el producto de dos simetrías también es una simetría). Es natural esperar que la transformación inversa de una simetría también sea una simetría; así mismo se puede incluir la transformación identidad del sistema, cuando el sistema no se transforma. De este modo, el conjunto de todas las simetrías de un sistema físico conforman un grupo.

El conocimiento del grupo de simetrías de un sistema físico es muy importante y en ocasiones es la única información confiable del sistema. A partir del grupo de simetrías se pueden predecir los elementos estructurales que conforman el sistema, sus características e incluso determinar su interacción utilizando el aparato de los campos de norma.

Dentro de la teoría de grupos existen los que diagonalmente tienen estructura de variedad diferencial, a estos se les denominan de Lie. No siempre es cómodo trabajar con grupos de Lie en las aplicaciones físicas. Sin embargo estos pueden ser sustituidos por las álgebras de sus generadores, es decir por los vectores tangentes al espacio grupal alrededor del elemento neutro. De este modo, a todo grupo de Lie se le puede poner en correspondencia el álgebra de Lie de sus generadores.

Esta mencionada correspondencia entre los grupos y las álgebras de Lie permite utilizar en las aplicaciones físicas, en lugar de los grupos de Lie, las álgebras de sus generadores. Por ejemplo, se puede verificar la invariancia $g(\alpha)(\varphi) = \varphi$ de una u otra magnitud física φ no para todo el conjunto infinito de elementos del grupo, sino para un número finito de sus generadores.

El espacio $\mathcal{F}(M)$ de funciones C^∞ sobre una variedad suave M (objeto de estudio en física) forma un álgebra conmutativa bajo el punto de vista de la adición y la multiplicación. Si G es un grupo de Lie, los mapeos inversos de G dotan a $\mathcal{F}(G)$ con dos estructuras extras llamados mapeo comultiplicación $\mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$ y mapeo antipoda $\mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G)$. Estos mapeos satisfacen cierto reflejo de las condiciones de asociatividad de la multiplicación en G

y del inverso. Estas ideas conducen la noción de Algebra de Hopf (estas algebras no necesariamente deben ser conmutativas).

Las Algebras de Hopf proveen una generalización mas amplia del concepto de simetría, ahora los elementos del grupo no necesariamente son invertibles, sin embargo están provistos de una estructura mas débil llamada antipoda, que brinda una inversion no-local linealizada para cada uno de los elementos del grupo, es decir habrá algunos elementos que ahora no tengan inverso. Sin embargo siempre sera posible encontrar ese inverso como una combinación lineal de elementos en un entorno de este.

Un segundo punto sobre estas algebras es que sus representaciones definen un producto tensorial. Por ejemplo, si J_z es el operador de momento angular, entonces un elemento $\Delta J_z = J_z \otimes 1 + 1 \otimes J_z$ define un producto tensorial (esta suma es una característica de las algebras de Lie: en grupos cuánticos esto es mas complicado). Los elementos que satisfacen este tipo de coproducto se les denomina primitivos del algebra de Hopf. El producto tensorial es simétrico, la simetría viene implementada de la transposición usual de espacios vectoriales. Para el caso de algebras de Hopf, también se tiene un producto tensorial sin embargo este ya no necesariamente tiene que ser simétrico.

Para abordar el concepto de algebra de Hopf en este capitulo, se presentaran las definiciones, así como ejemplos de estructuras más simples, con la finalidad que el concepto central sea una extensión de estas.

3.1. Semigrupos y monoides

Definición 1. Una operación $*$ en un conjunto X es una función $*$: $X \times X \rightarrow X$.

Definición 2. La operación $*$: $X \times X \rightarrow X$ es asociativa si:

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad \forall x, y, z \in X. \quad (3.1)$$

Definición 3. A la pareja ordenada $(X, *)$ se denomina semigrupo. Por otro lado, si $*$ es una operación asociativa en X y $e \in X$ entonces,

1. e es un neutro izquierdo para $*$, si $e * x = x, \quad \forall x \in X$.
2. e es un neutro derecho para $*$, si $x * e = x, \quad \forall x \in X$.
3. e es neutro para $*$, si e es un neutro izquierdo y derecho para $*$.

Definición 4. La terna $(M, *, e)$ es un monoide si $(M, *)$ es un semigrupo y e es neutro para $*$.

Definición 5. La operación $*$ es conmutativa si:

$$a * b = b * a, \quad \forall a, b \in M. \quad (3.2)$$

3.2. Grupos

Definición 6. Un grupo es un monoide $(M, *, e)$ en el que cada elemento tiene inverso.

Definición 7. Si la operación en un grupo $(M, *, e)$ es conmutativa, entonces se dice que el grupo es conmutativo o abeliano.

Definición 8. El orden de un grupo G , es el número de elementos del conjunto de éste.

Ejemplo 1. Son grupos finitos:

GF1: (\mathbb{Q}, \cdot) (producto ordinario).

GF2: El grupo de dos elementos $\{e, g\}$. Donde $g^2 = e$. Por ejemplo si se toman los números 1 y -1 con la operación multiplicación, justo forman un grupo de este tipo. También el grupo de transformaciones de vectores formado por la paridad y la identidad es de este tipo.

GF3: Giros de un polígono regular de n -lados (la operación del grupo es la composición de giros).

GF4: El grupo S_n de permutaciones de n objetos. Este grupo tiene $n!$ elementos y para $n > 2$ es no-abeliano. Para $n = 1, 2$ coincide con los ejemplos anteriores.

Ejemplo 2. Son grupos infinitos:

GI1: El conjunto de números reales \mathbb{R} es grupo abeliano con la operación suma. Si se excluye el 0, entonces es grupo abeliano con la operación multiplicación.

GI2: El grupo de rotaciones de vectores en tres dimensiones.

GI3: El grupo $GL(N, \mathbb{R})$ de matrices reales $N \times N$ invertibles con la operación multiplicación, es un grupo no abeliano. Si fueran matrices complejas $N \times N$ al grupo se le denomina $GL(N, \mathbb{C})$. El grupo real tiene dimensión N^2 y el segundo dimensión compleja N^2 , es decir, dimensión real $2N^2$.

Definición 9. Sea G un grupo y U un subconjunto de este. Se dice que U es un subgrupo si las operaciones de grupo cierran dentro de U ,

$$\forall g, g' \in U \Rightarrow g \circ g'^{-1} \in U. \quad (3.3)$$

Definición 10. Dados dos grupos G y G' se dice que una aplicación $\varphi : G \rightarrow G'$ es un homeomorfismo, si preserva la estructura de grupo, i.e.

$$\varphi(g \circ h) = \varphi(g) * \varphi(h), \quad (3.4)$$

donde \circ y $*$ son las operaciones correspondientes a los grupos G y G' . Si la aplicación es biyectiva, se dice que es un isomorfismo.

Ejemplo 3. Son subgrupos:

SUG1: $O(N)$: Un subgrupo de $GL(N, \mathbb{R})$ formado por las matrices ortogonales $N \times N$, que cumplen con la condición

$$\Omega \Omega^t = \mathbb{I}. \quad (3.5)$$

SUG2: $SO(N)$: Un subgrupo del anterior formado por las matrices ortogonales de determinante 1.

3.2.1. Representación de grupos

Definición 11. Dado un grupo G llamamos *representación de este*, a un homeomorfismo $D : G \rightarrow GL(N, K)$ de dicho grupo en un grupo de matrices reales o complejas ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Así pues cada elemento g del grupo le hace corresponder una matriz $D(g)$, de tal forma que:

$$D(g_1 \circ g_2) = D(g_2)D(g_1). \quad (3.6)$$

Ejemplo 4. Son representaciones:

R1: El grupo de rotaciones es isomorfo al grupo de matrices ortogonales con determinante 1.

R2: El grupo de Lorentz es isomorfo al grupo $O(3,1)$ de matrices que dejan invariante la métrica de Minkowski.

3.2.2. Grupos de Lie

Definición 12. Un grupo de Lie es una variedad diferencial G de dimensión finita que es también un grupo topológico en el cual las operaciones de multiplicación e inversión,

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad i : G \rightarrow G, \quad (3.7)$$

$$(a, b) \mapsto ab \quad a \mapsto a^{-1}, \quad (3.8)$$

son suaves (i.e. infinitamente diferenciables).

Ejemplo 5. Son grupos de Lie:

GL1: \mathbb{R}^n , ya que es una variedad diferencial de dimensión n , y adicionalmente forma un grupo topológico aditivo. Las operaciones de adición y cambio de signo son suaves.

GL2: $GL_n(\mathbb{R})$, el grupo general lineal, ya que es una variedad diferencial de dimensión n^2 y también es un grupo topológico.

GL3: $O(n)$, el grupo ortogonal es un subgrupo topológico de $GL_n(\mathbb{R})$, adicionalmente también es una variedad diferencial de dimensión finita.

3.3. Anillos y campos

Definición 13. Un anillo es una quinteta $(R, +, *, 0, 1)$ tal que:

1. $(R, +, 0)$ es un grupo conmutativo.
2. $(R, *, 1)$ es un monoide.
3. $*$ se distribuye sobre $+$, por ambos lados, es decir:

$$\begin{aligned} r * (s + t) &= (r * s) + (r * t), \quad \forall r, s, t \in R, \\ (s + t) * r &= (s * r) + (t * r), \quad \forall r, s, t \in R. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ejemplo 6. Son anillos bajo la suma y el producto ordinario,

A1: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot, 0, 1)$,

A2: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$,

A3: $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Definición 14. Un anillo $(R, +, *, 0, 1)$ es un:

1. Anillo conmutativo si $*$ es conmutativa.
2. Dominio si $(R/0, *, 1)$ es un monoide con cancelación.
3. Anillo con división si $((R/0, *, 1)$ es un grupo.
4. Campo si $(R/0, *, 1)$ es un grupo abeliano.

3.4. Espacios vectoriales

Definición 15. Un espacio vectorial A es una quinteta $(V, +, \bar{0}, K, \cdot : K \times V \rightarrow V)$, tal que:

1. $(V, +, \bar{0})$ es un grupo abeliano.
2. $\cdot : K \times V \rightarrow V$, satisface:
 - 2.1 $1 \cdot a = a, \quad \forall a \in V,$
 - 2.2 $(\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall a \in V,$
 - 2.3 $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall a \in V,$
 - 2.4 $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b, \quad \forall \alpha, \beta \in F, \forall a, b \in V.$

Los elementos de V se denominan vectores, y los de K escalares. Es común representar un espacio vectorial como, V_K y se lee: el campo vectorial V sobre un campo K .

Ejemplo 7. Son espacios vectoriales:

EV1: $(\mathbb{R}^n, \tilde{+}, \bar{0}, \mathbb{R}, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$ con:

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \tilde{+} (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \\ c \cdot (a_1, \dots, a_n) &= (c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_n). \end{aligned}$$

3.5. Algebras de Lie

Definición 16. Sea A un espacio vectorial de dimensión r . Supongase que en este espacio hay definida una segunda operación binaria $* : A \times A \rightarrow A$. Si A cumple con propiedades:

1. Es lineal respecto al segundo argumento:

$$v * (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 (v * w_1) + \lambda_2 (v * w_2) \quad \forall v, w \in A; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

2. Es antisimétrica:

$$v * w = -w * v. \quad (3.11)$$

3. *Cumple con la identidad de Jacobi:*

$$y * (v * w) + w(y * v) + v * (w * y) = 0, \quad (3.12)$$

entonces se dice que A tiene estructura de algebra de Lie.

Ejemplo 8. Se denomina paréntesis de Poisson de dos funciones $f(x, p)$ y $g(x, p)$ en un espacio fase, al producto escalar de sus gradientes:

$$\{f, g\} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (3.13)$$

con:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial x} \right). \quad (3.14)$$

Propiedades 1. El paréntesis de Poisson satisface las siguientes propiedades

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (\text{antisimetría}), \quad (3.15)$$

$$\{\lambda f_1 + \mu f_2, g\} = \lambda \{f_1, g\} + \mu \{f_2, g\}, \quad (3.16)$$

$$0 = \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} \quad (\text{identidad de Jacobi}), \quad (3.17)$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}, \quad (3.18)$$

$$\{e^{\lambda f}, g\} = \lambda e^{\lambda f} \{f, g\}, \quad (3.19)$$

donde λ, μ son constantes.

De las anteriores propiedades se sigue que en el espacio fase las funciones $f(x, p)$ forman un algebra de Lie respecto al paréntesis de Poisson.

Ejemplo 9. Se denomina conmutador de dos operadores A y B en un espacio de Hilbert al objeto definido como:

$$[A, B] = AB - BA. \quad (3.20)$$

Propiedades 2. El Conmutador satisface,

$$[A, B] = -[B, A] \quad (\text{antisimetría}), \quad (3.21)$$

$$[\lambda A + \mu B, C] = \lambda [A, C] + \mu [B, C], \quad (3.22)$$

$$0 = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \quad (\text{identidad de Jacobi}), \quad (3.23)$$

$$[AB, C] = A[B, C] + B[A, C], \quad (3.24)$$

donde λ, μ son numeros complejos.

De las anteriores propiedades se sigue que en el espacio de Hilbert, los operadores forman un algebra de Lie, respecto al conmutador.

3.5.1. Algebra de Lie $sl(2)$.

El algebra de Lie $gl(2) = L(M_2(k))$ de matrices complejas de 2×2 es una algebra cuatro-dimensional. Las cuatro matrices,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

forman una base de $gl(2)$. Estas matrices satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$[E, F] = H, \quad (3.27)$$

$$[H, E] = 2E, \quad (3.28)$$

$$[H, F] = -2F. \quad (3.29)$$

Para la relación (3.27),

$$[E, F] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H. \quad (3.30)$$

Esta ultima relación es antisimétrica,

$$[F, E] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -H. \quad (3.31)$$

Las relaciones (3.28) y (3.29), así como sus antisimetrías se corroboran de la misma forma. Estas matrices también satisfacen la relación,

$$[E, [F, H]] + [F, [H, E]] + [H, [E, F]] = 2[E, F] + 2[F, E] + [H, H] = 0, \quad (3.32)$$

es decir la identidad de Jacobi. De esto ultimo así como de (3.27), (3.28), (3.29) y sus relaciones de antisimetrías se sigue que $gl(2)$ forma un algebra de Lie.

Las matrices de traza cero en $gl(2)$ forman el subespacio $sl(2)$ extendido en la base $\{E, F, H\}$. La relación,

$$[I, E] = [I, F] = [I, H] = 0, \quad (3.33)$$

muestra que $sl(2)$ es el ideal de $gl(2)$ y que este es un isomorfismo entre algebras de Lie,

$$gl(2) \cong sl(2) \oplus kI, \quad (3.34)$$

Por lo cual el estudio del algebra $gl(2)$ se reduce al de $sl(2)$.

3.5.2. Algebra de Lie $H(3, 1)$.

Los operadores diferenciales,

$$(X^\mu, P_\nu = I, -i\partial_\nu), \quad (3.35)$$

satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$[X^\mu, X^\nu] = 0, \quad (3.36)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.37)$$

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta_\nu^\mu I. \quad (3.38)$$

Las relaciones (3.36), (3.37) y (3.38) son bilineales y antisimétricas además satisfacen la identidad de Jacobi,

$$[X^\mu, [X^\nu, X^\rho]] + [X^\nu, [X^\rho, X^\mu]] + [X^\rho, [X^\mu, X^\nu]] = 0, \quad (3.39)$$

$$[X^\mu, [X^\nu, P_\rho]] + [X^\nu, [P_\rho, X^\mu]] + [P_\rho, [X^\mu, X^\nu]] = 0, \quad (3.40)$$

$$[X^\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, X^\mu]] + [P_\rho, [X^\mu, P_\nu]] = 0, \quad (3.41)$$

$$[P_\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, P_\mu]] + [P_\rho, [P_\mu, P_\nu]] = 0. \quad (3.42)$$

Para (3.41),

$$[X^\mu, [P_\nu, P_\rho]] = [X^\mu, 0] = 0, \quad (3.43)$$

$$[P_\nu, [P_\rho, X^\mu]] = -i\delta_\rho^\mu [P_\nu, 1] = 0, \quad (3.44)$$

$$[P_\rho, [X^\mu, P_\nu]] = i\delta_\nu^\mu [P_\rho, 1] = 0. \quad (3.45)$$

De (3.43), (3.44) y (3.45) se sigue,

$$[X^\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, X^\mu]] + [P_\rho, [X^\mu, P_\nu]] = 0. \quad (3.46)$$

Las relaciones (3.39), (3.40) y (3.42) se comprueban de forma análoga.

De que las relaciones (3.36), (3.37) y (3.38) sea bilineales, antisimétricas y satisfagan la identidad de Jacobi se sigue que los generadores (3.35) forman un algebra de Lie denotada por $H(4, 1)$.

3.5.3. Algebra de Lie $iso(3, 1)$.

Los operadores diferenciales,

$$P_\mu = -i\partial_\mu, \quad (3.47)$$

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \quad (3.48)$$

Satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.49)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu, \quad (3.50)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha}. \quad (3.51)$$

Para (3.51),

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] &= -(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) + (x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha)(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ &= -\eta_{\nu\alpha}x_\mu\partial_\beta + \eta_{\nu\beta}x_\mu\partial_\alpha + \eta_{\mu\alpha}x_\nu\partial_\beta - \eta_{\mu\beta}x_\nu\partial_\alpha \\ &\quad + \eta_{\beta\mu}x_\alpha\partial_\nu - \eta_{\beta\nu}x_\alpha\partial_\mu - \eta_{\alpha\mu}x_\beta\partial_\nu + \eta_{\alpha\nu}x_\beta\partial_\mu \\ &= \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Las relaciones (3.49) y (3.50) se comprueban de forma similar.

Las relaciones (3.49), (3.50) y (3.50) son bilineales y antisimétricas, además de satisfacer la identidad de Jacobi,

$$[P_\mu, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, P_\mu]] + [P_\rho, [P_\mu, P_\nu]] = 0 \quad (3.53)$$

$$[M_{\alpha\beta}, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, M_{\alpha\beta}]] + [P_\rho, [M_{\alpha\beta}, P_\nu]] = 0 \quad (3.54)$$

$$[M_{\alpha\beta}, [M_{\nu\sigma}, P_\rho]] + [M_{\nu\rho}, [P_\rho, M_{\alpha\beta}]] + [P_\rho, [M_{\alpha\beta}, M_{\nu\sigma}]] = 0 \quad (3.55)$$

$$[M_{\alpha\beta}, [M_{\nu\sigma}, M_{\rho\gamma}]] + [M_{\nu\rho}, [M_{\rho\gamma}, M_{\alpha\beta}]] + [M_{\rho\gamma}, [M_{\alpha\beta}, M_{\nu\sigma}]] = 0. \quad (3.56)$$

Para (3.54),

$$[M_{\alpha\beta}, [P_\nu, P_\rho]] = 0, \quad (3.57)$$

$$[P_\nu, [P_\rho, M_{\alpha\beta}]] = [P_\nu, -\eta_{\beta\rho}P_\alpha + \eta_{\alpha\rho}P_\beta] = -\eta_{\beta\rho}[P_\nu, P_\alpha] + \eta_{\alpha\rho}[P_\nu, P_\beta] = 0 \quad (3.58)$$

$$[P_\rho, [M_{\alpha\beta}, P_\nu]] = [P_\rho, \eta_{\beta\nu}P_\alpha - \eta_{\alpha\nu}P_\beta] = \eta_{\beta\nu}[P_\rho, P_\alpha] - \eta_{\alpha\nu}[P_\rho, P_\beta] = 0. \quad (3.59)$$

De (3.57), (3.58) y (3.59) se comprueba (3.54),

$$[M_{\alpha\beta}, [P_\nu, P_\rho]] + [P_\nu, [P_\rho, M_{\alpha\beta}]] + [P_\rho, [M_{\alpha\beta}, P_\nu]] = 0. \quad (3.60)$$

La corroboración de (3.53), (3.55) y (3.56) se realiza de forma análoga.

Que las relaciones (3.49), (3.50) y (3.51) sean bilineales, antisimétricas y satisfagan la relación de Jacobi, se sigue que los generadores (3.47) y (3.48) forman un álgebra de Lie, denominada *iso*(3, 1).

3.6. Álgebras de Lie a partir de grupos de Lie.

Dado el carácter de variedad diferencial de un grupo de Lie G de dimensión r , es posible parametrizar los elementos de este grupo por un conjunto de r números reales $g(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Esta parametrización se puede escoger de tal forma que $g(0) = e$, por lo tanto es posible construir unas matrices llamadas generadores infinitesimales I_i , que proporcionan la información topológica y geométrica sobre el grupo en torno a una vecindad del elemento neutro e . Estos generadores I_i se obtienen mediante,

$$I_i = \left. \frac{dD(\vec{\alpha})}{d\alpha_i} \right|_{\vec{\alpha}=0}. \quad (3.61)$$

Las matrices de la representación del grupo en la vecindad del elemento neutro e , están dadas en función de los generadores infinitesimales, de la siguiente manera,

$$D(\vec{\alpha}) = \mathbb{I} - \sum_i \alpha_i I_i + O(\alpha^2). \quad (3.62)$$

Si se considera el producto de matrices,

$$D(\vec{\lambda}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) = D(\vec{\alpha})D(\vec{\beta})D(\vec{\alpha})^{-1}D(\vec{\beta})^{-1}, \quad (3.63)$$

entonces este es un elemento del grupo, que es igual al elemento neutro si α o β son iguales a 0. Por tanto desarrollando para pequeños valores de estos parámetros,

$$D(\vec{\lambda}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) = \mathbb{I} - \alpha_i \beta_j [I_i, I_j] + \dots = I - \lambda_k I_k + \dots, \quad (3.64)$$

donde la segunda igualdad proviene de que la matriz resultante corresponde a una del grupo en el entorno del elemento neutro. De aquí se sigue la relación,

$$[I_i, I_j] = c_{ijk} I_k, \quad (3.65)$$

donde los coeficientes c_{ijk} son números que se pueden obtener a partir de la ley de composición del grupo,

$$\begin{aligned} g(\vec{\lambda}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})) &= g(\vec{\beta})^{-1} \circ g(\vec{\alpha})^{-1} \circ g(\vec{\beta}) \circ g(\vec{\alpha}), \\ \lambda_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) &= \sum_{ij} c_{ijk} \alpha_i \beta_j + \dots, \end{aligned} \quad (3.66)$$

y por lo tanto independientes de la representación en cuestión. En resumen los coeficientes c_{ijk} son característicos del grupo y se llaman constantes de estructura del grupo.

3.7. Grupos de Poisson-Lie.

Si se consideran dos variedades de Poisson M_1 y M_2 . El producto cartesiano $M_1 \times M_2$ esta equipado con una estructura natural de Poisson, ya que el espacio de funciones en $M_1 \times M_2$ es el producto tensorial de funciones en M_1 y en M_2 . Esto quiere decir que uno puede escribir cualquier función en la forma $f(x, y) = \sum_i f_i^{(1)}(x) f_i^{(2)}(y)$, donde la suma es en general infinita y requiere la definición de una topología. Se define en este contexto para dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ el paréntesis,

$$\{f, g\}_{M_1 \times M_2} = \sum_{ij} \{f_i^{(1)}, g_j^{(1)}\}_{M_1} f_i^{(2)} g_j^{(2)} + \{f_i^{(2)}, g_j^{(2)}\}_{M_2} f_i^{(1)} g_j^{(1)}. \quad (3.67)$$

Este objeto satisface las propiedad de un paréntesis de Poisson, e implica que toda función en M_1 conmuta con cualquier función en M_2 .

En particular si G es un grupo de Lie dotado con una estructura de Poisson, el producto $G \times G$ también tiene una estructura de Poisson. Uno puede preguntarse a este nivel si la multiplicación $(g, h) \rightarrow gh$ de $G \times G$ a G es compatible con la respectiva estructura de Poisson, siendo mas precisos, si se tienen dos variedades de Poisson M y N y un mapeo $\phi : M \rightarrow N$, este mapeo se denomina de Poisson, si para cualquiera dos funciones f_1, f_2 , en N se tiene $\{f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi\}_M = \{f_1, f_2\}_N \circ \phi$. En este caso la multiplicación es de Poisson si,

$$\{f_1(gh), f_2(gh)\}_{G \times G} = \{f_1, f_2\}_G(gh), \quad (3.68)$$

donde del lado izquierdo de la ecuación, $f_1(gh), f_2(gh)$ son vistas como funciones en $G \times G$.

Un grupo de Poisson-Lie G es un grupo de Lie G equipado con una estructura de Poisson tal que la multiplicación en G , visto como el mapeo $G \times G \rightarrow G$, es un mapeo de Poisson.

Para describir la estructura de Poisson sobre G se usa el algebra de Lie \mathcal{G} ,

$$[E_a, E_b]_{\mathcal{G}} = C^c{}_{ab} E_c. \quad (3.69)$$

Los generadores E_a actúan como derivadas sobre toda función en el punto $g \in G$. Al considerar los campos vectoriales invariantes por la derecha (o izquierda) ∇_a^R definidos por,

$$\nabla_a^R f(g) = \left. \frac{d}{dt} f(e^{tE_a} g) \right|_{t=0}. \quad (3.70)$$

Estos campos vectoriales forman una base en el espacio tangente $T_g G$, con $[\nabla_a^R, \nabla_b^R] = C^c{}_{ab} \nabla_c^R$, por lo tanto el paréntesis de Poisson de dos funciones $f_1, f_2 \in G$ se puede escribir como combinación bilineal de derivadas con coeficientes $\Omega^{ab}(g)$,

$$\{f_1, f_2\}_{G(g)} = \sum_{a,b} \Omega^{ab}(g) (\nabla_a^R f_1)(g) (\nabla_b^R f_2)(g). \quad (3.71)$$

Los coeficientes $\Omega^{ab}(g)$ contienen toda la información de la estructura de Poisson. De aquí el elemento $\Omega(g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ se escribe como,

$$\Omega(g) = \sum_{a,b} \Omega^{ab}(g) E_a \otimes E_b. \quad (3.72)$$

La consistencia entre la estructura de grupo de Lie y la estructura simpléctica de G se obtiene imponiendo que los campos ∇_a^R sean localmente hamiltonianos, es decir que estos campos sean generadores infinitesimales de transformaciones simplécticas. Esto ultimo se expresa mediante la anulaci3n de la derivada de Lie,

$$\mathcal{L}_{\nabla_a^R}\Omega = (di_{\nabla_a^R} + i_{\nabla_a^R}d)\Omega = 0, \quad (3.73)$$

donde $i_{\nabla_a^R}$ es el producto interior. La condici3n de cociclo $d\Omega = 0$, implica que la forma $i_{\nabla_a^R}\Omega$ es cerrada, por lo tanto existen funciones f_a tales que $i_{\nabla_a^R}\Omega = df_a$.

3.8. Ecuaci3n de Yang-Baxter.

Dado que las funciones f_a se obtienen a partir de las transformaciones can3nicas generadas por ∇_a^R . Consecuentemente $\{f_a, f_b\} = -\nabla_a^R(f_b) = \Omega_{ab}$. De aqu3 para la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} & \{\{f_a, f_b\}, f_c\} + \{\{f_c, f_a\}, f_b\} + \{\{f_b, f_c\}, f_a\} \\ &= \{\Omega_{ab}, f_c\} + \{\Omega_{ca}, f_b\} + \{\Omega_{bc}, f_a\} \\ &= \nabla_c^R(\Omega_{ab}) + \nabla_b^R(\Omega_{ca}) + \nabla_a^R(\Omega_{bc}) = \mathfrak{B}.74 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta,

$$\nabla_c^R(\Omega_{ab}) = \frac{1}{2}[\nabla_c^R\nabla_b^R(f_a) - \nabla_c^R\nabla_a^R(f_b)], \quad (3.75)$$

en (3.74) se tiene,

$$C^d_{cd}\Omega_{ad} + C^d_{ac}\Omega_{bd} + C^d_{ba}\Omega_{cd} = 0. \quad (3.76)$$

Contrayendo con el producto $\Omega^{ka}\Omega^{jb}\Omega^{ic}$ se obtiene,

$$C^i_{ab}\Omega^{ka}\Omega^{jb} + C^j_{ab}\Omega^{ia}\Omega^{kb} + C^k_{ab}\Omega^{ja}\Omega^{ib} = 0. \quad (3.77)$$

Esta es la condici3n que debe satisfacer $\Omega(g)$ para que se satisfaga la identidad de Jacobi. Esta ecuaci3n se denomina ecuaci3n cl3sica de Yang-Baxter.

En la literatura cuando se relaciona la ecuaci3n de Yang-Baxter con los grupos de Poisson-Lie, el elemento $\Omega(g)$ se denomina r -matriz y se denota como $r(g)$. Al definir,

$$r_{12} = r^{ab}E_a \otimes E_b \otimes 1, \quad (3.78)$$

$$r_{13} = r^{ab}E_a \otimes 1 \otimes E_b, \quad (3.79)$$

$$r_{23} = r^{ab}1 \otimes E_a \otimes E_b, \quad (3.80)$$

de aqu3,

$$[r_{12}, r_{13}] = r^{ab}r^{cd}[E_a, E_c] \otimes E_b \otimes E_d = r^{db}r^{ec}C^a_{de}E_a \otimes E_b \otimes E_c, \quad (3.81)$$

$$[r_{12}, r_{23}] = r^{ab}r^{cd}E_a \otimes [E_b, E_c] \otimes E_d = r^{ad}r^{ec}C^b_{de}E_a \otimes E_b \otimes E_c, \quad (3.82)$$

$$[r_{13}, r_{23}] = r^{ab}r^{cd}E_a \otimes E_c \otimes [E_b, E_d] = r^{ad}r^{be}C^c_{de}E_a \otimes E_b \otimes E_c. \quad (3.83)$$

Por lo tanto (3.77) es equivalente a la ecuaci3n,

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (3.84)$$

Esta es la forma en que com3nmente se presenta en la literatura la ecuaci3n cl3sica de Yang-Baxter.

3.9. Algebra universal envolvente

Definición 17. Si $T^0 = \mathbb{C}$, $T^1 = g$ y $T^n = g \otimes \dots \otimes g$ (n veces), entonces se define el algebra tensorial de g como el elemento,

$$T(g) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n. \quad (3.85)$$

Al subespacio de $T(g)$ generado por los elementos,

$$\forall g_a, g_b \in g : g_a \otimes g_b - g_b \otimes g_a - i \sum_{c=1}^p f_{abc} g_c = 0, \quad (3.86)$$

se le denomina ideal de $T(g)$ y se le denota como \mathcal{I}_g .

Definición 18. Si g es una algebra de Lie sobre un campo F con una base p -dimensional, $(g_a)_{a \in \{1, \dots, p\}}$ y corchete $[\cdot, \cdot]_g$. Entonces el algebra universal envolvente $U(g)$ es definida como el cociente entre el algebra tensorial $T(g)$ (generada a través del producto tensorial de los elementos de g) y el ideal $\mathcal{I}_g \subset T(g)$, es decir:

$$U(g) = \frac{T(g)}{\mathcal{I}_g}. \quad (3.87)$$

3.9.1. Algebra universal envolvente $U(sl(2))$.

El algebra universal envolvente $U = U(sl(2))$ es el algebra de polinomios de elementos de $sl(2)$, por lo cual esta algebra tiene como base de (3.27-3.29) a $\{E^i F^j H^k\}_{i,j,k \in \mathbb{N}}$. Uno puede demostrar por inducción que las relaciones (3.27), (3.28) y (3.29), implican para esta algebra,

$$E^p H^q = (H - 2pI)^q E^p, \quad (3.88)$$

$$F^p H^q = (H + 2pI)^q F^p, \quad (3.89)$$

$$[E, F^p] = p(H + (p-1)I)F^{p-1}, \quad (3.90)$$

$$[E^p, F] = p(H - (p+1)I)E^{p-1}. \quad (3.91)$$

Para (3.90) por inducción se satisface para $p = 1$. Para $p > 1$ se tiene,

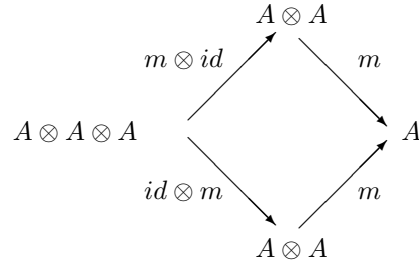
$$\begin{aligned} [E, F^p] &= [E, F^{p-1}]F + F^{p-1}[E, F] \\ &= (p-1)F^{p-2}(H - (p-2)I)F + F^{p-1}H \\ &= F^{p-1}((p-1)(H - pI) + H) = pF^{p-1}(H - pI + I) \\ &= pF^{p-1}(H - pI + I). \end{aligned} \quad (3.92)$$

La relación (3.91) se comprueba de forma análoga, mientras que (3.88) y (3.89) se prueban usando doble inducción en p y q , usando las relaciones $EH = (H-2I)E$ y $FH = (H+2I)F$.

3.10. Algebras asociativas con unidad y \mathbb{C} -algebras.

Definición 19. Una algebra asociativa con unidad (K -Algebra), es un triplete (A, m, i) , definido sobre un espacio vectorial A_K , donde los mapeos $m : A \otimes A \rightarrow A$ y $i : K \rightarrow A$, satisfacen las siguientes propiedades:

1. El mapeo multiplicación $m : A \otimes A \rightarrow A$, satisface el axioma de asociatividad expresado en términos del siguiente diagrama conmutativo:

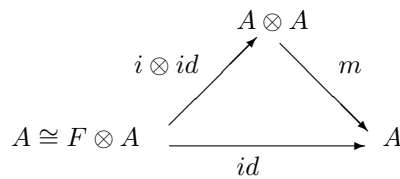
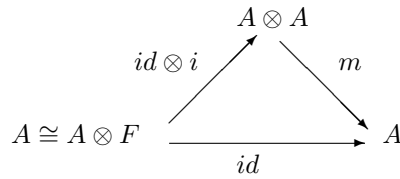


Equivalentemente: $m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$, donde $id : A \rightarrow A$ es la aplicación identidad $a \mapsto a$, y el símbolo " \circ " indica la composición de las aplicaciones.

2. Existe un elemento unidad $1 \in A$ que satisface la propiedad:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \forall a \in A. \quad (3.93)$$

Este axioma de unidad se puede expresar en términos de los siguientes diagramas conmutativos:



Equivalentemente, $m \circ (id \otimes i) = id = m \circ (i \otimes id)$. Donde $i : F \rightarrow A$ es un mapeo lineal (mapeo inclusion) definido mediante $i(\alpha) = \alpha 1, \forall \alpha \in F$. Las aplicaciones denotadas por \cong , representan isomorfismos naturales entre $F \otimes A, A \otimes F$ y A , de tal forma que: $\alpha \otimes a = a \otimes \alpha = \alpha a$.

Con los tres diagramas anteriores es posible demostrar que realmente m define una multiplicación asociativa en A y que $i(1)$ es la unidad de A con

respecto a esa multiplicación. En efecto, denotando $m(a \otimes b)$ por $a \cdot b$, vemos inmediatamente que la linealidad de m equivale a los axiomas usuales de la bilinealidad de la multiplicación, asociatividad y existencia de la unidad 1_A .

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= (m \circ (m \otimes id))(a \otimes b \otimes c) \\ &= (m \circ (id \otimes m))(a \otimes b \otimes c) = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in A. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Mientras que:

$$\begin{aligned} a \cdot i(1) &= m \circ [(id \otimes i)(a \otimes 1)] \\ &= m \circ [(a \otimes i(1))] = a \cdot i(1) \equiv a, \quad \forall a \in A. \end{aligned} \quad (3.95)$$

3.10.1. Homeomorfismo entre K -algebras

Un homeomorfismo entre las K -algebras A y B es una aplicación lineal $\varphi : A \rightarrow B$, expresado en términos de los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} & B \otimes B \\ m_A \downarrow & & \downarrow m_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{id} & F \\ i_A \downarrow & & \downarrow i_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Equivalentemente, $\varphi \circ m_A = m_B \circ (\varphi \otimes \varphi)$ y por otro lado, $\varphi \circ i_A = i_B$. Esto quiere decir simplemente: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, $\forall a, b \in A$ y que además $\varphi(1_A) = 1_B$.

Definición 20. Una \mathbb{C} -álgebra es una álgebra con unidad en donde el campo F es \mathbb{C} .

Ejemplo 10. El espacio vectorial \mathbb{R}^n , con la operación multiplicación $\mu : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por:

$$\mu((x_1, \dots, x_2) \otimes (y_1, \dots, y_n)) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n), \quad (3.96)$$

con aplicación unidad $\eta : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como:

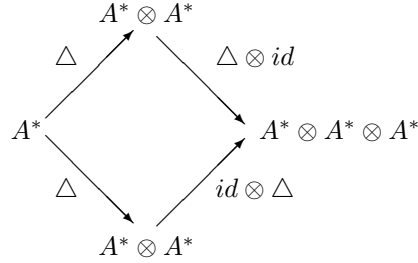
$$\eta(\alpha) = (\alpha, \dots, \alpha) \quad (3.97)$$

satisface los tres diagramas conmutativos anteriores, por lo tanto es una álgebra asociativa con unidad sobre \mathbb{R} .

3.11. Coalgebra

Una coalgebra es un triplete $(A^*, \Delta, \varepsilon)$, constituido por un espacio vectorial A^* sobre \mathbb{C} (en este caso, en general puede ser para cualquier campo F), en donde los mapeos, $\Delta : A^* \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ y $\varepsilon : A^* \rightarrow \mathbb{C}$, satisfacen las siguientes propiedades:

1. El mapeo comultiplicación $\Delta : A^* \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$, satisface el axioma de coasociatividad, expresado en términos del siguiente diagrama conmutativo:

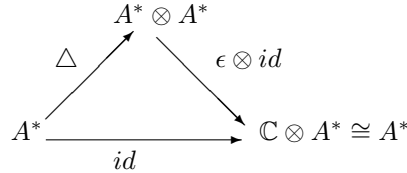
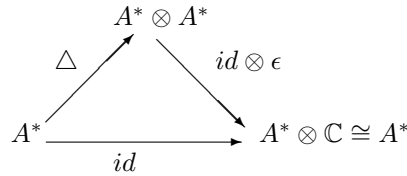


Equivalentemente, $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$.

2. Existe un elemento unidad $1 \in A^*$ que satisface la propiedad:

$$a^* \cdot 1 = 1 \cdot a^* = a^*, \quad \forall a^* \in A^*. \quad (3.98)$$

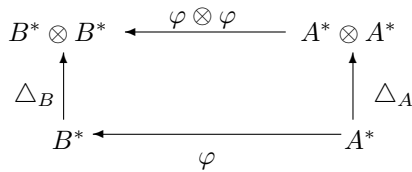
Este axioma de counidad se puede expresar en términos de los siguientes diagramas conmutativos:



Equivalentemente, $(id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id = (\epsilon \otimes id) \circ \Delta$.

3.11.1. Homeomorfismos entre coalgebras

Un homeomorfismo entre dos coalgebras A^* y B^* es una aplicación lineal $\varphi : A^* \rightarrow B^*$ expresado en los siguientes diagramas conmutativos:



$$\begin{array}{ccc}
F & \xleftarrow{id} & F \\
\varepsilon_B \uparrow & & \uparrow \varepsilon_A \\
B & \xleftarrow{\varphi} & A
\end{array}$$

Equivalentemente tenemos las siguientes condiciones, $(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_A = \Delta_B \circ \varphi$ y además, $\varepsilon_B \circ \varphi = \varepsilon_A$.

Ejemplo 11. Si $C = \mathbb{C}[t]$, denota el conjunto de polinomios de una variable sobre \mathbb{C} , entonces la comultiplicación y counidad, vienen dados respectivamente por:

$$\Delta(t^n) = \sum_{p+q=n} t^p \otimes t^q, \quad (3.99)$$

$$\varepsilon(t^n) = \delta_{n0}. \quad (3.100)$$

Para la coasociatividad (para $n = 2$),

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \Delta(t^2) &= (id \otimes \Delta)(t^2 \otimes 1 + t \otimes t + 1 \otimes t^2) \\
&= t^2 \otimes 1 \otimes 1 + t \otimes 1 \otimes t + t \otimes t \otimes 1 \\
&\quad + 1 \otimes t^2 \otimes 1 + 1 \otimes t \otimes t + 1 \otimes 1 \otimes t^2 \\
&= (\Delta \otimes id)(t^2 \otimes 1 + t \otimes t + 1 \otimes t^2) \\
&= (\Delta \otimes id) \circ \Delta(t^2).
\end{aligned} \quad (3.101)$$

Para mostrar que $\varepsilon(t^n) = \delta_{n0}$, define el mapeo counidad se comprueba que: $(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(t^n) = t^n \otimes 1$ y además $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(t^n) = 1 \otimes t^n$. Para el primer caso tenemos:

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon) &= (id \otimes \varepsilon) \left(\sum_{p+q=n} t^p + t^q \right) \\
&= t^n \otimes 1.
\end{aligned}$$

$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(t^n) = 1 \otimes t^n$, se demuestra de la misma manera.

3.12. Relación entre K-algebras y coalgebras

Si A es un espacio vectorial y $A^* = Hom(A, \mathbb{C})$ es su respectivo espacio dual, i.e. el espacio vectorial de las funciones lineales en A . De esta manera $\ell : A \rightarrow \mathbb{C}$ debe estar en A^* si:

$$\ell(\alpha a + \beta b) = \alpha \ell(a) + \beta \ell(b), \quad \forall a, b \in A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (3.102)$$

Al asumir que A es una \mathbb{C} -algebra, entonces el triplete (A, m, i) (en donde los mapeos $m : A \otimes A \rightarrow A$ e $i : \mathbb{C} \rightarrow A$ satisfacen las propiedades de asociatividad y unidad). Entonces la multiplicación en A induce una estructura en A^* definida mediante el mapeo $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$, llamada comultiplicación o coproducto:

$$\Delta(\ell)(a \otimes b) = \ell(a \cdot b), \quad (3.103)$$

donde $\ell \in A^*$, y asigna a toda función lineal en A una función lineal en $A \otimes A$. De la misma manera el mapeo inclusión $i : \mathbb{C} \rightarrow A$ induce el mapeo counidad $\epsilon : A^* \rightarrow \mathbb{C}$, tal que:

$$\epsilon(\ell) = \ell(\epsilon), \quad \ell \in A^*. \quad (3.104)$$

Por lo anterior los diagramas de coasociatividad y counidad, son los respectivos duales de asociatividad y unidad. Mientras que los de los homeomorfismos son equivalentes. Para obtener unos a partir de otros, solo hay que reemplazar A por A^* , i por ϵ y m por Δ , e invertir las direcciones de las flechas.

3.13. Bialgebra

Definición 21. Una bialgebra B es una quinteta $(A, m, i, \Delta, \epsilon)$, donde A es un espacio vectorial sobre un campo F dotado de las aplicaciones lineales m, i, Δ, ϵ , tal que

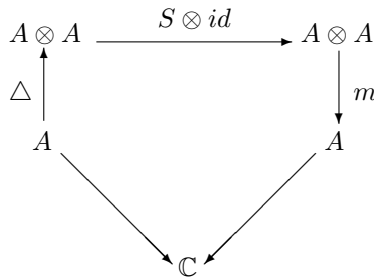
1. (B, m, i) define una algebra.
2. (B, Δ, ϵ) define una coalgebra.
3. La multiplicación m y la unidad i son homeomorfismos de la coalgebra.
4. La comultiplicación Δ y la counidad ϵ son homeomorfismos del algebra.

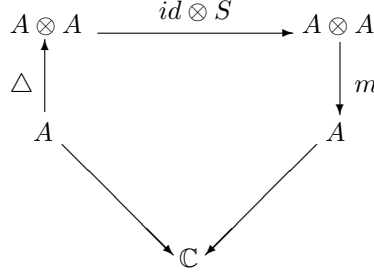
3.14. Algebra de Hopf

Definición 22. Una bialgebra B es llamada algebra de Hopf si existe un mapeo biyectivo $S : B \rightarrow B$, llamado antipoda, con la propiedad que es una \mathbb{C} -algebra antihomeomorfismo, i.e.

$$S(a \cdot b) = S(b) \cdot S(a), \quad (3.105)$$

$\forall a, b \in A$, y satisface el axioma de la antipoda: $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = i \circ \epsilon$, o en forma de diagramas:





En resumen una algebra de Hopf es una sexteta $(A, m, i, \Delta, \epsilon, S)$, donde los mapeos satisfacen los axiomas enumerados anteriormente, el espacio dual A^* de un algebra de Hopf A , tiene una estructura natural de algebra de Hopf. En efecto, esto al definir la antipoda $S^* : A^* \rightarrow A^*$ de la siguiente manera:

$$S^*(\ell)(a) = \ell(S(a)), \quad (3.106)$$

donde $a \in A$ y $\ell \in A^*$.

Ejemplo 12. Si A es una algebra compleja con generadores (x, g) , que satisfacen las relaciones $g^2 = 1$, $x^2 = 0$, $gxg = -x$. Los elementos $1, g, x, gx$ forman un espacio vectorial de A . Lo anterior aunado a las relaciones $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x$, $\epsilon(g) = 1$, $\epsilon(x) = 0$, $S(g) = g = g^{-1}$ y $S(x) = -x$ definen una estructura de Hopf sobre A . Esta algebra es no-conmutativa (Sweedler).

Propiedades 3. Toda algebra universal envolvente $U(g)$ es una algebra de Hopf con los mapeos Δ y S :

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = \sum_{k=0}^n \sum_{p \in P_{nk}} v_{p(1)} \cdots v_{p(k)} \otimes v_{p(k+1)} \cdots v_{p(n)}, \quad (3.107)$$

$$S(v_1 v_2 \cdots v_n) = (-1)^n v_n \cdots v_2 v_1, \quad (3.108)$$

con $x_1, \dots, x_n \in g$ y en donde P_{nk} denota el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

3.14.1. Álgebra de Hopf $U(sl(2))$.

El algebra de Lie $U(sl(2))$ contiene una estructura natural de algebra de Hopf. Para los generadores E, F, H y el elemento unidad I , se definen:

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + 1 \otimes E, \quad (3.109)$$

$$\Delta(F) = F \otimes 1 + 1 \otimes F, \quad (3.110)$$

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad (3.111)$$

$$\Delta(I) = 1 \otimes 1, \quad (3.112)$$

$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = \epsilon(H) = 0, \quad \epsilon(I) = 1, \quad (3.113)$$

$$S(E) = -E, \quad S(F) = -F, \quad S(H) = -H, \quad S(I) = I. \quad (3.114)$$

(a) Para corroborar la coasociatividad primeramente se tiene que revisar que Δ define un morfismo del algebra U en el algebra $U \otimes U$, es decir Δ debe preservar

las relaciones (3.27),(3.28) y (3.29)

$$[\Delta(E), \Delta(F)] = \Delta(H), \quad (3.115)$$

$$[\Delta(H), \Delta(E)] = 2\Delta(E), \quad (3.116)$$

$$[\Delta(H), \Delta(F)] = -2\Delta(F). \quad (3.117)$$

Para (3.115),

$$\begin{aligned} [\Delta(E), \Delta(F)] &= (E \otimes 1 + 1 \otimes E)(F \otimes 1 + 1 \otimes F) \\ &\quad - (F \otimes 1 + 1 \otimes F)(E \otimes 1 + 1 \otimes E) \\ &= EF \otimes 1 + 1 \otimes EF - FE \otimes 1 - 1 \otimes FE \\ &= \Delta([E, F]) = \Delta(H). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Para (3.116) y (3.117) el procedimiento es analogo. Una vez satisfecho lo anterior es posible mostrar que se satisface el axioma de coasociatividad. Por un lado para E ,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(E) &= (\Delta \otimes id)(E \otimes 1 + 1 \otimes E) \\ &= \Delta(E) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes E \\ &= E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E, \end{aligned} \quad (3.119)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\Delta(E) &= (id \otimes \Delta)(E \otimes 1 + 1 \otimes E) \\ &= E \otimes \Delta(1) + 1 \otimes \Delta(E) \\ &= E \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E. \end{aligned} \quad (3.120)$$

De (3.119) y (3.120) se concluye,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(E) = (id \otimes \Delta)\Delta(E). \quad (3.121)$$

La coasociatividad para F y H se prueban de forma similar.

(b) Para corroborar el axioma e counidad se tiene que revisar que ε define un morfismo del algebra U en el algebra $U \otimes U$, es decir que ε satisface las relaciones,

$$[\varepsilon(E), \varepsilon(F)] = \varepsilon(H), \quad (3.122)$$

$$[\varepsilon(H), \varepsilon(E)] = 2\varepsilon(E), \quad (3.123)$$

$$[\varepsilon(H), \varepsilon(F)] = -2\varepsilon(F). \quad (3.124)$$

Para (3.122),

$$[\varepsilon(E), \varepsilon(F)] = 0 = \varepsilon(H). \quad (3.125)$$

Las relaciones (3.123) y (3.124), se corroboran de la misma forma. De esta manera es posible comprobar el axioma de counidad para cada uno de los generadores, en particular para F ,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)\Delta(F) &= (\varepsilon \otimes id)(F \otimes 1 + 1 \otimes F) \\ &= \varepsilon(F) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes F \\ &= 1 \otimes F, \end{aligned} \quad (3.126)$$

mientras,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)\Delta(F) &= (id \otimes \varepsilon)(F \otimes 1 + 1 \otimes F) \\ &= F \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(F) \\ &= F \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.127)$$

De las relaciones (3.126) y (3.127) se satisface el axioma de counidad para F . Para revisar la counidad de E y H se procede de la misma manera.

(c) De la misma forma que en el caso del coproducto y la counidad, antes de comprobar el axioma de counidad es necesario revisar que S define un morfismo del algebra U en el algebra $U \otimes U$, es decir,

$$[S(E), S(F)] = S(H), \quad (3.128)$$

$$[S(H), S(E)] = 2S(E), \quad (3.129)$$

$$[S(H), S(F)] = -2S(F). \quad (3.130)$$

Para (3.130),

$$\begin{aligned} [S(H), S(F)] &= S(H)S(F) - S(F)S(H) \\ &= HF - FH \\ &= -2F = -2S(F). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Para (3.128) y (3.129) el proceder es el mismo. Satisfaciéndose lo anterior es posible comprobar el axioma de la antipoda, en particular para H por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(H) &= \mu(S \otimes id)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\ &= \mu(S(H) \otimes 1 + S(1) \otimes H) \\ &= S(H) + S(1)H = -H + H = 0, \end{aligned} \quad (3.132)$$

mientras por otro lado,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(H) &= \mu(id \otimes S)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\ &= \mu(H \otimes S(1) + 1 \otimes S(H)) \\ &= HS(1) + S(H) = H - H = 0. \end{aligned} \quad (3.133)$$

De (3.132) y (3.133) se sigue,

$$\mu(S \otimes id)\Delta(H) = \mu(id \otimes S)\Delta(H) = \varepsilon(H). \quad (3.134)$$

Por lo tanto se satisface el axioma de la antipoda para H . Para los otros generadores la comprobación es similar.

3.14.2. Algebra de Hopf $U\Xi$.

El espacio lineal de campos vectoriales definidos sobre una variedad diferencial M , que adquiere una estructura de algebra de Lie por medio del siguiente mapeo:

$$\begin{aligned} [\] : \Xi \times \Xi &\rightarrow \Xi, \\ (u, v) &\mapsto [u \ v] \end{aligned} \quad (3.135)$$

donde el elemento $[u, v] \in g$, es definido por el corchete de Lie.

$$[u, v](h) = u(v(h)) - v(u(h)). \quad (3.136)$$

Aquí u, v y z son los campos vectoriales, mientras que f, g y h son las funciones en M . El algebra de Lie de campos vectoriales, es el algebra infinitesimal de difeomorfismos. Los elementos del algebra universal envolvente $U(g)$ se denotan por: ξ, ζ y η , y de la definición estos son construidos a través del producto tensorial de los elementos de g modulo la relación (3.87). Esta algebra $U(g)$ contiene una estructura natural de algebra de Hopf. Para los generadores $u \in g$ y el elemento unidad 1, se definen:

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= u \otimes 1 + 1 \otimes u, & \Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\ \epsilon(u) &= 0, & \epsilon(1) &= 1, \\ S(u) &= -u, & S(1) &= 1, \end{aligned} \quad (3.137)$$

donde los mapeos Δ , ϵ y S satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} \Delta(u)\Delta(v) - \Delta(v)\Delta(u) &= [u v] \otimes 1 + 1 \otimes [u v] = \Delta([u v]), \\ \epsilon(u)\epsilon(v) - \epsilon(v)\epsilon(u) &= \epsilon([u v]), \\ S(v)S(u) - S(u)S(v) &= vu - uv = S([u v]). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Lo anterior permite extender Δ y ϵ como un algebra de homomorfismos y a S como una antialgebra de homomorfismos para el algebra envolvente, $\Delta : U(g) \rightarrow U(g) \otimes U(g)$, $\epsilon : U(g) \rightarrow \mathbb{C}$ y $S : U(g) \rightarrow U(g)$,

$$\begin{aligned} \Delta(\xi\zeta) &:= \Delta(\xi)\Delta(\zeta), \\ \epsilon(\xi\zeta) &:= \epsilon(\xi)\epsilon(\zeta), \\ S(\xi\zeta) &:= S(\zeta)S(\xi). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Para demostrar que $U(g)$ se trata de un algebra de Hopf, es necesario satisfacer las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(\xi) &= (id \otimes \Delta)\Delta(\xi), \\ (\epsilon \otimes id)\Delta(\xi) &= (id \otimes \epsilon)\Delta(\xi) = \xi, \\ \mu(S \otimes id)\Delta(\xi) &= \mu(id \otimes S)\Delta(\xi) = \epsilon(\xi)1. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Para probar la primera de las condiciones se utiliza la notación $\Delta(u) = u_1 \otimes u_2$, esto explícitamente corresponde $\Delta(u) = u_1 \otimes u_2 = u \otimes 1 + 1 \otimes u$, de tal forma:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(u) &= \Delta(u_1) \otimes u_2 \\ &= u_{1_1} \otimes u_{1_2} \otimes u_2 \\ &= (u \otimes 1 + 1 \otimes u) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes u. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\Delta(u) &= u_1 \otimes \Delta(u_2) \\ &= u_1 \otimes u_{2_1} \otimes u_{2_2} \\ &= u \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (u \otimes 1 + 1 \otimes u). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Al comparar (3.141) y (3.142) se obtiene la condición deseada. Las otras dos propiedades se demuestran de la misma manera.

3.14.3. Algebra de Hopf $\delta_\xi(U\Xi)$.

Un caso particular de campo vectorial es el campo vectorial de difeomorfismos. Los difeomorfismos son generados por campos vectoriales ξ . Actuando sobre funciones, los campos vectoriales son representados por los operadores lineales $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$. Como fue mencionado en la sección anterior, los campos vectoriales forman el algebra de Lie Ξ sobre el campo \mathbb{C} mediante el conmutador,

$$[\xi, \eta] = \xi \times \eta, \quad (3.143)$$

donde,

$$\xi \times \eta = (\eta^\mu (\partial_\mu \xi^\rho) - \xi^\mu (\partial_\mu \eta^\rho)) \partial_\rho. \quad (3.144)$$

De la regla de Leibniz para derivadas, se sigue la regla para estos campos vectoriales,

$$(\xi(f \cdot g)) = (\xi f) \cdot g + f \cdot (\xi g). \quad (3.145)$$

Esta regla implica el producto tensorial comultiplicación,

$$\Delta(\xi) = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi. \quad (3.146)$$

Se puede verificar que este mapeo comultiplicación es compatible con el algebra. Esto significa,

$$[\Delta(\xi), \Delta(\eta)] = \Delta(\xi \times \eta). \quad (3.147)$$

Por lo cual queda definida una bialgebra. Si se añaden a esta estructura los mapeos counidad y antipoda,

$$\varepsilon(\xi) = 0, \quad S(\xi) = -\xi, \quad (3.148)$$

se obtiene una algebra de Hopf. Los difeomorfismos están íntimamente relacionados con transformaciones generales de coordenadas de la siguiente manera,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (3.149)$$

donde ξ^μ es infinitesimal.

En la física muchas veces los campos escalares son definidos invariantes ante transformaciones generales de coordenadas,

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (3.150)$$

Para transformaciones infinitesimales (3.149) esto significa,

$$\delta_\xi \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -\xi^\mu (\partial_\mu \phi(x)) = -(\xi \phi(x)). \quad (3.151)$$

De forma similar se define para campos vectores covariantes,

$$\delta_\xi V_\mu = -\xi^\rho (\partial_\rho V_\mu) - (\partial_\mu \xi^\rho) V_\rho, \quad (3.152)$$

y campos vectoriales contravariantes,

$$\delta_\xi V^\mu = -\xi^\rho (\partial_\rho V^\mu) + (\partial_\rho \xi^\mu) V^\rho. \quad (3.153)$$

De esta manera es fácil generalizar para cualquier campo tensorial con arbitrario numero de indices covariantes y contravariantes.

Estas transformaciones representan el algebra de difeomorfismos (3.143),

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] = \delta_{\xi \times \eta}, \quad (3.154)$$

con coproducto,

$$\Delta \delta_\xi = \delta_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\xi. \quad (3.155)$$

Como consecuencia de (3.155) el producto de dos campos vectoriales de primer rango se transforman como un tensor de segundo rango,

$$\begin{aligned} \delta_\xi(V_\mu V_\nu) &= \mu\{\Delta(\delta_\xi)V_\mu \otimes V_\nu\} = \mu\{(\delta_\xi V_\mu) \otimes V_\nu + V_\mu \otimes (\delta_\xi V_\nu)\} \\ &= -\xi^\rho \partial_\rho(V_\mu V_\nu) - (\partial_\mu \xi^\rho)(V_\rho V_\nu) - (\partial_\nu \xi^\rho)(V_\mu V_\rho). \end{aligned} \quad (3.156)$$

Este resultado es fácil de extender para el producto de arbitrarios campos tensoriales,

$$\begin{aligned} \delta_\xi T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= -\xi^\mu (\partial_\mu T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}) + (\partial_\mu \xi^{\mu_1}) T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu \dots \mu_n} + \dots + (\partial_\mu \xi^{\mu_n}) T_{\nu_1 \dots \nu}^{\mu_1 \dots \mu} \\ &\quad - (\partial_{\nu_1} \xi^\nu) T_{\nu \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - (\partial_{\nu_n} \xi^\nu) T_{\nu_1 \dots \nu}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

En resumen las estructuras,

$$\begin{aligned} [\delta_\xi, \delta_\eta] &= \delta_{\xi \times \eta}, \quad \varepsilon(\delta_\xi) = 0, \quad S(\delta_\xi) = -\delta_\xi, \\ \Delta \delta_\xi &= \delta_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\xi, \quad [\Delta(\delta_\xi), \Delta(\delta_\eta)] = \Delta(\delta_{\xi \times \eta}), \end{aligned} \quad (3.159)$$

forman el algebra de Hopf de difeomorfismos $\delta_\xi(U\Xi)$. Cabe mencionar que el operador de transformación δ_ξ depende explícitamente de la presentación en consideración. En el caso del campo escalar este operador resulta $-\xi^\mu \partial_\mu$.

3.14.4. Algebra de Hopf $U(H(3, 1))$.

El algebra de Lie $U(H(3, 1))$ tiene una estructura de algebra de Hopf, al definir para los generadores X^μ , P_ν y el elemento unidad,

$$\Delta(X^\mu) = X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu, \quad (3.160)$$

$$\Delta(P_\nu) = P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu, \quad (3.161)$$

$$\Delta(\delta_\nu^\mu) = \delta_\nu^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\nu^\mu, \quad (3.162)$$

$$\Delta(I) = 1 \otimes 1, \quad (3.163)$$

$$\varepsilon(X^\mu) = \varepsilon(P_\nu) = \varepsilon(\delta_\nu^\mu) = 0, \quad \varepsilon(I) = 1, \quad (3.164)$$

$$S(X^\mu) = -X^\mu, \quad S(P_\nu) = -P_\nu, \quad S(\delta_\nu^\mu) = \delta_\nu^\mu, \quad S(I) = I. \quad (3.165)$$

a) Para mostrar que Δ define un morfismo tienen que satisfacerse las relaciones,

$$[\Delta(X^\mu), \Delta(X^\nu)] = \Delta(0), \quad (3.166)$$

$$[\Delta(P_\mu), \Delta(P_\nu)] = \Delta(0), \quad (3.167)$$

$$[\Delta(X^\mu), \Delta(P_\nu)] = i\Delta(\delta_\nu^\mu). \quad (3.168)$$

Para (3.168),

$$\begin{aligned} [\Delta(X^\mu), \Delta(P_\nu)] &= (X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &\quad - (P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= X^\mu P_\nu \otimes 1 + X^\mu \otimes P_\nu + P_\nu \otimes X^\mu + 1 \otimes X^\mu P_\nu \\ &\quad - P_\nu X^\mu \otimes 1 - P_\nu \otimes X^\mu - X^\mu \otimes P_\nu - 1 \otimes P_\nu X^\mu \\ &= [X^\mu, P_\nu] \otimes 1 + 1 \otimes [X^\mu, P_\nu] \\ &= i\Delta(\delta_\nu^\mu). \end{aligned} \quad (3.169)$$

Las relaciones (3.166) y (3.167) se corroboran de forma análoga.

Primeramente se mostrara que se satisface el axioma de coasociatividad para X^μ . Por un lado,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(X^\mu) &= (\Delta \otimes id)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= X^\mu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X^\mu, \end{aligned} \quad (3.170)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\Delta(X^\mu) &= (id \otimes \Delta)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= X^\mu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X^\mu. \end{aligned} \quad (3.171)$$

De (3.170) y (3.171) se satisface el axioma para X^μ .

Para P_ν por un lado,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(P_\nu) &= (\Delta \otimes id)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &= P_\nu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes P_\nu, \end{aligned} \quad (3.172)$$

en tanto,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\Delta(P_\nu) &= (id \otimes \Delta)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &= P_\nu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes P_\nu. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Por lo tanto también se satisface el axioma de coasociatividad para el caso de P_ν .

b) Para mostrar que ε define un morfismo se tienen que satisfacer,

$$\begin{aligned} [\varepsilon(X^\mu), \varepsilon(X^\nu)] &= \varepsilon(0), \\ [\varepsilon(P_\mu), \varepsilon(P_\nu)] &= \varepsilon(0), \\ [\varepsilon(X^\mu), \varepsilon(P_\nu)] &= i\varepsilon(\delta_\nu^\mu). \end{aligned} \quad (3.174)$$

Las relaciones (3.174), (3.174) y (3.174) se satisfacen trivialmente ya que $\varepsilon(X^\mu) = \varepsilon(P_\nu) = \varepsilon(\delta_\nu^\mu) = 0$.

Para el axioma de counidad para X^μ por un lado,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)\Delta(X^\mu) &= (\varepsilon \otimes id)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= \varepsilon(X^\mu) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes X^\mu \\ &= 1 \otimes X^\mu, \end{aligned} \quad (3.175)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)\Delta(X^\mu) &= (id \otimes \varepsilon)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= X^\mu \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(X^\mu) \\ &= X^\mu \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.176)$$

De las relaciones (3.175) y (3.176) se satisface este axioma para el generador X^μ .

Para P_ν por un lado,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)\Delta(P_\nu) &= (\varepsilon \otimes id)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &= \varepsilon(P_\nu) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes P_\nu \\ &= 1 \otimes P_\nu, \end{aligned} \quad (3.177)$$

en tanto,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)\Delta(P_\nu) &= (id \otimes \varepsilon)(P_\nu \otimes 1 + 1 \otimes P_\nu) \\ &= P_\nu \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(P_\nu) \\ &= P_\nu \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.178)$$

De (3.177) y (3.178) también se satisface el axioma de counidad para P_ν .

c) Si S define un morfismo se tienen que satisfacer las relaciones,

$$[S(X^\mu), S(X^\nu)] = S(0), \quad (3.179)$$

$$[S(P_\mu), S(P_\nu)] = S(0), \quad (3.180)$$

$$[S(X^\mu), S(P_\nu)] = iS(\delta_\nu^\mu). \quad (3.181)$$

Estas relaciones se satisfacen directamente teniendo en cuenta que $S(X^\mu) = -X^\mu$ y $S(P_\nu) = -P_\nu$.

Para mostrar que X^μ satisface el axioma de la antipoda por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(X^\mu) &= \mu(S \otimes id)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= \mu(S(X^\mu) \otimes 1 + S(1) \otimes X^\mu) \\ &= \mu(-X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= -X^\mu + X^\mu = 0, \end{aligned} \quad (3.182)$$

Por otro,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(X^\mu) &= \mu(id \otimes S)(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) \\ &= \mu(X^\mu \otimes S(1) + 1 \otimes S(X^\mu)) \\ &= \mu(X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes (-X^\mu)) \\ &= X^\mu - X^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.183)$$

De (3.182) y (3.183) se satisface el axioma de la antipoda para el generador X^μ . De forma análoga se puede mostrar que P_ν también satisface este axioma.

3.14.5. Algebra de Hopf $U(iso(3, 1))$.

El algebra de Lie $U(iso(3, 1))$ tiene una estructura de algebra de Hopf. Para los generadores P_ρ , $M_{\alpha\beta}$ y el elemento unidad se definen,

$$\Delta(P_\rho) = P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho, \quad (3.184)$$

$$\Delta(M_{\alpha\beta}) = M_{\alpha\beta} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\alpha\beta}, \quad (3.185)$$

$$\Delta(I) = 1 \otimes 1, \quad (3.186)$$

$$\varepsilon(P_\rho) = \varepsilon(M_{\alpha\beta}) = 0, \quad \varepsilon(I) = 1, \quad (3.187)$$

$$S(P_\rho) = -P_\rho, \quad S(M_{\alpha\beta}) = -M_{\alpha\beta}, \quad S(I) = I. \quad (3.188)$$

(a) Para mostrar que Δ define un morfismo se tienen que satisfacer las relaciones,

$$[\Delta(P_\mu), \Delta(P_\nu)] = 0, \quad (3.189)$$

$$[\Delta(M_{\mu\nu}), \Delta(P_\rho)] = \eta_{\nu\rho}\Delta(P_\mu) - \eta_{\mu\rho}\Delta(P_\nu), \quad (3.190)$$

$$[\Delta(M_{\mu\nu}), \Delta(M_{\alpha\beta})] = \eta_{\nu\alpha}\Delta(M_{\mu\beta}) - \eta_{\mu\alpha}\Delta(M_{\nu\beta}) + \eta_{\mu\beta}\Delta(M_{\nu\alpha}) - \eta_{\nu\beta}\Delta(M_{\mu\alpha}). \quad (3.191)$$

Para (3.190),

$$\begin{aligned}
[\Delta(M_{\mu\nu}), \Delta(P_\rho)] &= (M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu})(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\
&\quad - (P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\
&= [M_{\mu\nu}, P_\rho] \otimes 1 + 1 \otimes [M_{\mu\nu}, P_\rho] \\
&= (\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu) \otimes 1 + 1 \otimes (\eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu) \\
&= \eta_{\nu\rho}\Delta(P_\mu) - \eta_{\mu\rho}\Delta(P_\nu). \tag{3.192}
\end{aligned}$$

Las relaciones (3.189) y (3.191) se comprueban de la misma manera.

Ahora ya es posible mostrar que se satisface el axioma de coasociatividad para los generadoras. Para P_ρ por un lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(P_\rho) &= (\Delta \otimes id)(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\
&= P_\rho \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes P_\rho, \tag{3.193}
\end{aligned}$$

mientras,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(P_\rho) &= (id \otimes \Delta)(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\
&= P_\rho \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes P_\rho. \tag{3.194}
\end{aligned}$$

De (3.193) y (3.194) se satisface la coasociatividad para P_ρ .

Para $M_{\mu\nu}$ por un lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(M_{\mu\nu}) &= (\Delta \otimes id)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\
&= M_{\mu\nu} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes M_{\mu\nu}, \tag{3.195}
\end{aligned}$$

por otro,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(M_{\mu\nu}) &= (id \otimes \Delta)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\
&= M_{\mu\nu} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes M_{\mu\nu}. \tag{3.196}
\end{aligned}$$

De (3.195) y (3.196) se comprueba que también se satisface la coasociatividad para $M_{\mu\nu}$.

b) Para mostrar que ε define un morfismo se tienen que satisfacer,

$$[\varepsilon(P_\mu), \varepsilon(P_\nu)] = 0, \tag{3.197}$$

$$[\varepsilon(M_{\mu\nu}), \varepsilon(P_\rho)] = \eta_{\nu\rho}\varepsilon(P_\mu) - \eta_{\mu\rho}\varepsilon(P_\nu), \tag{3.198}$$

$$[\varepsilon(M_{\mu\nu}), \varepsilon(M_{\alpha\beta})] = \eta_{\nu\alpha}\varepsilon(M_{\mu\beta}) - \eta_{\mu\alpha}\varepsilon(M_{\nu\beta}) + \eta_{\mu\beta}\varepsilon(M_{\nu\alpha}) - \eta_{\nu\beta}\varepsilon(M_{\mu\alpha}). \tag{3.199}$$

Las relaciones (3.197), (3.198) y (3.199) se satisfacen trivialmente ya que los generadores, $\varepsilon(P_\rho) = \varepsilon(M_{\mu\nu}) = 0$.

Para corroborar que se satisface el axioma de counidad para P_ρ por un lado,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)\Delta(P_\rho) &= (\varepsilon \otimes id)(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\
&= \varepsilon(P_\rho) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes P_\rho = 1 \otimes P_\rho, \tag{3.200}
\end{aligned}$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon)\Delta(P_\rho) &= (id \otimes \varepsilon)(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\
&= P_\rho \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(P_\rho) = P_\rho \otimes 1. \tag{3.201}
\end{aligned}$$

De (3.200) y (3.201) se satisface la condición de counidad para el generador P_ρ .

Para M_ν por una parte,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)\Delta(M_{\mu\nu}) &= (\varepsilon \otimes id)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\ &= \varepsilon(M_{\mu\nu}) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes M_{\mu\nu} = 1 \otimes M_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.202)$$

por otra,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)\Delta(M_{\mu\nu}) &= (id \otimes \varepsilon)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\ &= M_{\mu\nu} \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(M_{\mu\nu}) = M_{\mu\nu} \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.203)$$

De (3.202) y (3.203) se comprueba que se satisface el axioma de counidad para $M_{\mu\nu}$.

c) Para mostrar que S define un morfismo se tienen que satisfacer,

$$[S(P_\mu), S(P_\nu)] = 0, \quad (3.204)$$

$$[S(M_{\mu\nu}), S(P_\rho)] = \eta_{\nu\rho}S(P_\mu) - \eta_{\mu\rho}S(P_\nu), \quad (3.205)$$

$$[S(M_{\mu\nu}), S(M_{\alpha\beta})] = \eta_{\nu\alpha}S(M_{\mu\beta}) - \eta_{\mu\alpha}S(M_{\nu\beta}) + \eta_{\mu\beta}S(M_{\nu\alpha}) - \eta_{\nu\beta}S(M_{\mu\alpha}). \quad (3.206)$$

Para (3.206),

$$\begin{aligned} [S(M_{\mu\nu}), S(M_{\alpha\beta})] &= [M_{\nu\mu}, M_{\beta\alpha}] \\ &= \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} + \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} \\ &= \eta_{\nu\alpha}S(M_{\mu\beta}) - \eta_{\mu\alpha}S(M_{\nu\beta}) + \eta_{\mu\beta}S(M_{\nu\alpha}) - \eta_{\nu\beta}S(M_{\mu\alpha}). \end{aligned} \quad (3.207)$$

Las relaciones (3.204) y (3.205) se corroboran de forma análoga.

Para mostrar que se satisface el axioma de la antipoda para P_ρ por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(P_\rho) &= \mu(S \otimes id)(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\ &= \mu(S(P_\rho) \otimes 1 + S(1) \otimes P_\rho) \\ &= \mu(-P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\ &= -P_\rho + P_\rho = 0, \end{aligned} \quad (3.208)$$

Por otro,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(P_\rho) &= \mu(id \otimes S)(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes P_\rho) \\ &= \mu(P_\rho \otimes S(1) + 1 \otimes S(P_\rho)) \\ &= \mu(P_\rho \otimes 1 + 1 \otimes (-P_\rho)) \\ &= P_\rho - P_\rho = 0. \end{aligned} \quad (3.209)$$

De (3.208) y (3.209) se sigue,

$$\mu(S \otimes id)\Delta(P_\rho) = \mu(id \otimes S)\Delta(P_\rho). \quad (3.210)$$

Para $M_{\mu\nu}$ por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(M_{\mu\nu}) &= \mu(S \otimes id)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\ &= \mu(S(M_{\mu\nu}) \otimes 1 + S(1) \otimes M_{\mu\nu}) \\ &= \mu(-M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\ &= -M_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (3.211)$$

mientras,

$$\begin{aligned}\mu(id \otimes S)\Delta(M_{\mu\nu}) &= \mu(id \otimes S)(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) \\ &= \mu(M_{\mu\nu} \otimes S(1) + 1 \otimes S(M_{\mu\nu})) \\ &= \mu(M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes (-M_{\mu\nu})) \\ &= M_{\mu\nu} - M_{\mu\nu} = 0.\end{aligned}\tag{3.212}$$

De (3.211) y (3.212) se concluye,

$$\mu(S \otimes id)\Delta(M_{\mu\nu}) = \mu(id \otimes S)\Delta(M_{\mu\nu}).\tag{3.213}$$

Capítulo 4

Cuantización por deformación y Producto de Moyal-Weyl.

4.1. Motivación

Cuantización por deformación es un modelo matemático que surge a partir del principio de correspondencia entre la física clásica y la cuántica, constituyendo un método para desarrollar la mecánica cuántica a partir del álgebra de observables clásica, en la dirección del álgebra de Poisson. El ejemplo fundamental es el producto de Moyal-Weyl en el espacio de fases euclídeo, usado por Moyal para estudiar mecánica cuántica estadística desde el punto de vista del espacio de fases clásico.

4.1.1. Mecánica lagrangiana y hamiltoniana

En un sistema mecánico, la posición de una partícula puede ser especificada dando sus coordenadas (x_1, x_2, x_3) con respecto a un sistema coordenado cartesiano O , fijo en un marco inercial, el movimiento de la partícula puede ser determinado por las leyes de Newton para cada coordenada. La configuración de un sistema de N partículas puede ser especificada por el conjunto de coordenadas $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$, donde $x_i(n)$ es la i -ésima coordenada de la n -ésima partícula, $1 \leq i \leq 3$ y $1 \leq n \leq N$, el movimiento del sistema puede ser determinado por el conjunto de ecuaciones de Newton para cada coordenada de cada partícula.

Si existe un conjunto de $3N$ coordenadas g_1, \dots, g_n que especifican la configuración del sistema de forma única, entonces las coordenadas g_1, \dots, g_n son llamadas coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo, $\dot{g}_1, \dots, \dot{g}_n$ son llamadas velocidades generalizadas.

Un sistema mecánico de N partículas puede tener ligaduras, las ligaduras son constricciones de tipo geométrico (holónomas) y cinemáticas (no holónomas), y determinan los grados de libertad del sistema, que son el número de variables necesarias para plantear y resolver el problema dinámico asociado. Para un sistema con n grados de libertad se escogen n coordenadas generalizadas que usualmente se denotan (q_1, \dots, q_n) , con lo cual el espacio de configuración es denotado por Q y puede ser una n -variedad o el espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Un

estado del sistema es determinado por los valores de su posición en el espacio de configuración y por los valores de las velocidades generalizadas correspondientes. El espacio de estados en la teoría lagrangiana para la mecánica clásica es el espacio tangente $T(Q)$ a la variedad de configuración Q .

Cuando las fuerzas que actúan sobre el sistema provienen de una energía potencial que solo depende de las coordenadas generalizadas, esto es, cuando existe una función $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada fuerza generalizada Q_k , se tiene que $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$, entonces se define el lagrangiano del sistema como

$$L = T - V, \quad (4.1)$$

donde T es la energía cinética del sistema, el movimiento del sistema esta gobernado por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \text{para } 1 \leq k \leq n. \quad (4.2)$$

Con el formalismo lagrangiano se obtiene un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo grado, el cual se puede reemplazar por un sistema equivalente de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer grado, que es el que se obtiene a partir del formalismo hamiltoniano; la física contenida en los dos formalismos es la misma, solo cambia el modo de aproximarse a ella. Para pasar del formalismo lagrangiano al hamiltoniano, (que significa pasar del espacio de posiciones y velocidades generalizadas, $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, al espacio de momentos y posiciones generalizados, (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , que es lo mismo que pasar del espacio tangente $T(Q)$, con base $\{\frac{\partial}{\partial q_1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial q_N}|_q\}$ al espacio dual cotangente $T^*(Q)$, con base $\{dq_1|_q, \dots, dq_N|_q\}$ via una transformada de Legendre que preserva la información física del sistema), se utiliza la transformada de Legendre. Para esto se definen las nuevas variables, respecto al conjunto de variables $\dot{\mathbf{q}}$,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = f_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \text{para } 1 \leq k \leq n, \quad (4.3)$$

lo cual es posible siempre que, $\dot{q}_k = f_k^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, esto si,

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{1 \leq i \leq j \leq n} \neq 0. \quad (4.4)$$

Al cumplirse lo anterior, es posible definir la función hamiltoniana,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{l=1}^n p_l f_l^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - L(\mathbf{q}, f_l^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t), \quad (4.5)$$

y así, las ecuaciones de Euler-Lagrange, son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2. Variedades simplécticas y de Poisson

No existen muchas estructuras tensoriales locales que definan una conexión única. Las variedades simplécticas son objetos cuya estructura local es "blanda", es decir no hay una noción de curvatura para una variedad simpléctica que pudiera servir para distinguir localmente una variedad simpléctica de otra. Si se tienen dos de estas variedades reales y de la misma dimensión, entonces son idénticas localmente, es decir para cualquier punto p en una variedad y en cualquier punto q en la otra, existen conjuntos abiertos de p y q que son idénticos. Esto en contraste con el caso de las variedades riemannianas, en las que para especificar una de otra, tan solo es suficiente especificar una conexión. En tales casos el tensor de curvatura define una estructura característica local para cada variedad. Estas variedades juegan un papel central en el estudio de la mecánica clásica. A continuación se presentaran varias definiciones, propiedades y teoremas sin demostración que nos serán útiles en este trabajo. Para una realizar un estudio mas detallado se pueden consultar [55,56,57].

Definición 23. Se dice que un tensor $w \in \wedge^2(E)$, $(0,2)$ -antisimétrico sobre un campo E , es no degenerado si, $w(e_1, e_2) = 0$, para todo $e_2 \in E$, implica $e_1 = 0$.

Definición 24. El $(0,2)$ -tensor antisimétrico w^t definido mediante la ecuación $w^t(e_1, e_2) = w(e_2, e_1)$, para toda pareja $e_1, e_2 \in E$ es llamado el traspuesto del $(0,2)$ -tensor antisimétrico w .

Propiedades 4. Un $(0,2)$ -tensor w es simétrico, (antisimétrico), si satisface $w^t = w$, ($w^t = -w$), respectivamente.

Definición 25. Si E es un espacio vectorial, E^* su espacio dual y $w \in \wedge^2(E)$ no degenerado, se definen las funciones,

1. $w^b : E \rightarrow E^*$, $e \mapsto w^b(e)$, donde $w^b(e) : E \rightarrow \mathbb{R}$, $w^b(e)x = w(x, e)$.
2. $w^\sharp : E^* \rightarrow E$, $\alpha \mapsto w^\sharp(\alpha) = e_\alpha$, donde e_α es tal que $\alpha(x) = w^b(e_\alpha)x = w(x, e_\alpha)$.

Definición 26. Si $\{e_i : 1 \leq i \leq p\}$ una base de E con base dual $\{\alpha^i\}$, la matriz $(w_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq p} = (w(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq j \leq p}$ es la matriz del $(0,2)$ -tensor w en esta base, y w se puede escribir como $w = \sum_{i,j} w_{ij} \alpha^i \otimes \alpha^j$.

Definición 27. El rango de un $(0,2)$ -tensor se define como el rango de su matriz asociada.

Propiedades 5. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. w es no degenerada.
2. w^t es no degenerada.
3. La matriz de w es invertible.
4. w^b es un isomorfismo entre E y E^* .

Propiedades 6. Si E es un espacio vectorial real de dimension l y w un $(0, 2)$ -tensor antisimétrico de rango r , se tiene que $r = 2n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, $2n \leq l$, y además existe una base $\{e_i\}$ de E , con base dual $\{\alpha^i\}$ tal que,

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha^i \wedge \alpha^{i+n}. \quad (4.7)$$

Definición 28. Si E es un espacio vectorial de dimension $2n$, una forma simpléctica sobre E es un $(0, 2)$ -tensor w no degenerado y antisimétrico, esto es, $w \in \wedge^2(E)$. La pareja (E, w) es llamada espacio vectorial simpléctico.

Teorema 1. (Teorema de Darboux) Si $w \in \wedge^2(M)$ es una dos forma no degenerada definida sobre una variedad diferencial M de dimension $2n$, se tiene entonces que $dw = 0$ si, y solo si, para todo $p \in M$, existe una vecindad coordinada (U, φ) , con $p \in U$ y $\varphi(p) = 0$, tal que, si $\varphi(u) = (x^1(u), \dots, x^n(u), y^1(u), \dots, y^n(u))$ entonces $w|_U = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$.

Definición 29. Una r -forma, $\gamma \in \wedge^2(M)$, es cerrada si su derivada exterior se anula, esto es, si $d\gamma = 0$.

Definición 30. Una forma simpléctica, o estructura simpléctica, sobre una variedad M es una dos forma, $\Omega \in \wedge^2(M)$, no degenerada y cerrada.

Definición 31. Una variedad simpléctica (M, Ω) es una $2n$ -variedad junto con una forma simpléctica definida sobre M , el elemento de volumen en M es la forma $v_\Omega = (-1)^{n/2} \frac{1}{n!} \Omega^n$. Las cartas garantizadas por el Teorema de Darboux son llamadas las cartas simpléctica y las funciones componentes x^i , y^i son llamadas las coordenadas canónicas. En cartas simpléctica se tiene que $\Omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$, y, $v_\Omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dy^n$.

Definición 32. Dada $\varphi : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades diferenciales, para $P \in M$ se tiene la función entre espacios vectoriales

$$(d\varphi)_P : T_P(M) \rightarrow T_{\varphi(P)}(N), \quad (4.8)$$

donde

$$((d\varphi)_P(X_P))(h) = (X_P)(h \circ \varphi), \quad (4.9)$$

para $h \in C^\infty(N)$ y $X_P \in T_P(M)$. La función dual de $(d\varphi)_P$ es,

$$(d\varphi)_P^* : T_{\varphi(P)}^*(N) \rightarrow T_P^*(M), \quad (4.10)$$

donde,

$$((d\varphi)_P^*(w_{\varphi(P)}))(X) = (w_{\varphi(P)})((d\varphi)_P X), \quad (4.11)$$

para $X \in T_P(M)$ y $w_{\varphi(P)} \in T_{\varphi(P)}^*(N)$.

Definición 33. Sea M una variedad y $w \in \wedge^2(M)$ no degenerada. Entonces se definen las funciones:

1. $w^\flat : T(M) \rightarrow T^*(M)$ con $w^\flat(X_P) = w_P^\flat(X_P)$,
2. $w^\sharp : T^*(M) \rightarrow T(M)$ con $w^\sharp(\alpha_P) = w_P^\sharp(\alpha_P)$,

donde w_p^\flat y w_p^\sharp son como en la definición 27, con $E = T_p(M)$, para todo $p \in M$. Así, para $p \in M$ las funciones w^\flat y w^\sharp , de la definición anterior, se escriben explícitamente como:

$$w_p^\flat : T_p(M) \rightarrow T_p^*(M), \quad X_p \mapsto w(\cdot, X_p), \quad (4.12)$$

$$w_p^\sharp : T_p^* \rightarrow T_p(M), \quad \alpha_p \mapsto X_{\alpha_p}, \quad \text{con } \alpha_p = w(\cdot, X_{\alpha_p}). \quad (4.13)$$

Definición 34. Sean (M, w) una variedad simpléctica, se puede definir entonces $w^{-1} \in T_0^2(M)$ en la siguiente manera:

$$w_p^{-1} : T_p^* \times T_p^*(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_p, \beta_p) \mapsto w(X_{\beta_p}, X_{\alpha_p}), \quad (4.14)$$

donde $X_{\alpha_p} = w^\sharp(\alpha_p)$ y $X_{\beta_p} = w^\sharp(\beta_p)$.

Definición 35. Una variedad de Poisson $(M, \{, \})$ es una variedad M dotada de un bracket $\{, \}$ que forma un algebra de Lie.

Toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson. Sin embargo, no toda variedad de Poisson posee una estructura simpléctica.

4.3. Espacio fase

Al considerar un sistema dinámico cuyo espacio de configuración Q es una variedad M , el formalismo hamiltoniano para este sistema utiliza el haz fibrado cotangente $T^*(M)$ de dimension $2n$, en el siguiente sentido: un estado del sistema es representado por un punto en M ; un observable es representado por una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, y la evolución dinámica del sistema esta dada por una familia de transformaciones canónicas sobre M generadas por una función Hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$. Sobre este espacio cotangente $T^*(M)$ existe una dos forma simpléctica w que en coordenadas canónicas puede escribirse,

$$w = \sum_{\mu=1}^n dp_\mu \wedge dq_\mu, \quad (4.15)$$

la cual, por el teorema de Darboux, es una forma cerrada, con lo que (M, w) es una variedad simpléctica.

En (M, w) se tienen las funciones w^\flat , w^\sharp y el tensor w^{-1} definidos explícitamente por (4.12), (4.13) y (4.115) respectivamente.

Definición 36. En $C^\infty(M)$ se define la siguiente operación

$$\{f, g\} = w^{-1}(df, dg), \quad (4.16)$$

la cual se denomina paréntesis de Poisson.

Propiedades 7. Si se consideran coordenadas x^1, \dots, x^n ,

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= w^{-1}(df, dg) = (w^{ij})^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} (w^{ij})^{-1} (dx^i, dx^j) = \sum_{i,j=1}^n (w^{ij})^{-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para que $\{f, g\}$ sea una algebra de Lie (paréntesis de Poisson), es necesario que w^{-1} , satisfaga las propiedades (3.10), (3.11), (3.12). La regla de Leibniz se satisface automáticamente. La condición de anticonmutatividad se satisface si,

$$w^{ij} = -w^{ji}. \quad (4.18)$$

Mientras que para satisfacer la identidad de Jacobi, resulta necesario,

$$\sum_{k=1}^n \left(w^{jk} \frac{\partial w^{lm}}{\partial x^k} + w^{lk} \frac{\partial w^{mj}}{\partial x^k} + w^{mk} \frac{\partial w^{jl}}{\partial x^k} \right) = 0. \quad (4.19)$$

A las propiedades (4.18) y (4.19), se les denomina condiciones de Poisson.

Definición 37. El espacio $C^\infty(M)$ dotado con la estructura dada por el paréntesis de Poisson definido en (4.16) forma un algebra, llamada el algebra de Poisson.

Propiedades 8. Si (M, w) es una variedad simpléctica con w definida por (4.15), entonces se tiene las ecuaciones,

$$w^\sharp(dp_\mu) = \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (4.20)$$

$$w^\sharp(dq_\mu) = \frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad (4.21)$$

para $1 \leq \mu \leq n$, ya que:

$$\Omega \left(\frac{\partial}{\partial q_\sigma} \right) = \sum_{\mu} dp_\mu dq_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q_\sigma} \right) - dp_\mu \left(\frac{\partial}{\partial q_\sigma} \right) dq_\mu = dp_\sigma, \quad (4.22)$$

$$\Omega \left(\frac{\partial}{\partial p_\sigma} \right) = \sum_{\mu} dp_\mu dq_\mu \left(\frac{\partial}{\partial p_\sigma} \right) - dp_\mu \left(\frac{\partial}{\partial p_\sigma} \right) dq_\mu = -dq_\sigma. \quad (4.23)$$

Definición 38. Si (M, w) es una variedad simpléctica M junto con H una función hamiltoniana, se define el campo vectorial hamiltoniano h como:

$$h = w^\sharp(dH) = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (4.24)$$

donde,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_\mu} dq_\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} dp_\mu. \quad (4.25)$$

Propiedades 9. Si γ denota una curva en M , la ecuación $\frac{d\gamma}{dt} = h(\gamma(t))$ conduce a las ecuaciones de Hamilton (4.6) y las soluciones de dichas ecuaciones, $y(t) = (q_\mu(t), p_\mu(t))$, son las curvas integrales del campo vectorial hamiltoniano h , las cuales corresponden a los posibles movimientos dinámicos del sistema.

4.3.1. Cuantización por deformación

Dada una variedad simpléctica (M, Ω) cuya estructura modela la dinámica clásica de un sistema físico, el proceso de cuantización consiste en encontrar un espacio de Hilbert \mathbb{H} y una representación de dicha algebra en el algebra de

operadores autoadjuntos (con el corchete de Lie) actuando sobre \mathbb{H} . Una vez identificados el espacio de Hilbert y la representación del algebra de observables, la dinámica cuántica del sistema puede llevarse a cabo de multiples maneras, ya sea mediante funciones de onda que evolucionan en el tiempo o con evolución temporal de operadores. Según Dirac, una teoría cuántica admisible debe asociar -no unívocamente- a cada observable clásico f un observable cuántico \hat{f} , actuando sobre \mathbb{H} y perteneciente al algebra correspondiente con el conmutador de Lie $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$, verificando:

1. La aplicación $f \rightarrow \hat{f}$ es lineal.
2. Si f es constante entonces \hat{f} debe ser el operador de multiplicación (por la constante f).
3. Debe haber una correspondencia entre la dinámica clásica y cuántica en el siguiente sentido: Si $\{f, g\} = k$, entonces

$$[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\hat{k}. \quad (4.26)$$

Estas tres condiciones, llamadas condiciones de Dirac, brindan las propiedades fundamentales que debe tener la representación del algebra de observables clásicos sobre M en el algebra observables cuánticos sobre \mathbb{H} . La dinámica cuántica se describe en términos de funciones de onda ψ 's. Estas son funciones definidas sobre el espacio de configuraciones del sistema, en términos de las cuales toda la información probabilística del sistema queda determinada. En esta caso $\langle \psi | \psi \rangle$ corresponde a la amplitud de probabilidad.¹

La idea principal en la teoría de cuantización por deformación es construir una familia de algebras parametrizadas de tal forma que el algebra inicial sea el algebra conmutativa \mathcal{A}_0 de observables clásicos de un sistema físico y el algebra final sea un algebra no-conmutativa \mathcal{A}_\hbar satisfaciendo, entre otras cosas, el principio de correspondencia: $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \mathcal{A}_\hbar = \mathcal{A}_0$ (la idea original de la teoría remonta a finales de los años setenta, y la formulación matemática correspondiente a los ochenta y noventa). Como algebra cuántica se escoge un algebra formal sobre \mathcal{A}_0 , i.e. un algebra cuyos elementos son sumas de potencias formales arbitrarias con coeficientes en $\mathcal{A}_0 = C^\infty(M)$, donde M denota una variedad de Poisson que modela la dinámica clásica de un sistema físico.

Una vez definida la deformación del algebra, el paso importante es la definición de una buena operación sobre ella con las propiedades necesarias para obtener una buena cuantización. El parámetro fundamental en la descripción cuántica es la constante de Planck \hbar y juega el papel de parámetro de deformación del algebra de observables clásicos, de esta manera se tiene la siguiente definición de cuantización:

Definición 39. Sea M una variedad de Poisson y $\mathcal{A}_0 = C^\infty(M)$ su algebra de Poisson asociada. Una cuantización por deformación de \mathcal{A}_0 es generada por un producto asociativo,

$$\star_\hbar = \mathcal{A}_\hbar \otimes \mathcal{A}_\hbar \rightarrow \mathcal{A}_\hbar, \quad (4.27)$$

sobre el algebra de deformación $\mathcal{A}_\hbar = C^\infty(M)[\hbar]$ tal que:

¹Cuando uno habla de funciones de onda, de algún modo ya se ha supuesto alguna representación: ej. $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$, relativa a un estado base. Mas general se trataría de un estado físico $|\psi\rangle$ (ket).

1. El producto $f \star_{\hbar} g$ tiene una expansión de la forma,

$$f \star_{\hbar} g = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(f, g) \hbar^k \quad (4.28)$$

donde los B_k son operadores bidiferenciales.

2. A primer orden $(\mathcal{A}_0, \star_0) = \mathcal{A}_0$ es decir,

$$B_0(f, g) = f \cdot g. \quad (4.29)$$

3. Sea $\{, \}$ el corchete de Poisson sobre \mathcal{A}_0 , entonces:

$$[f, g]_{\star} = f \star_{\hbar} g - g \star_{\hbar} f = i\hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (4.30)$$

donde $\mathcal{O}(\hbar^2)$ denota términos de orden cuadrático o superior en \hbar . Esto implica que $B_1(f, g) - B_1(g, f) = i\hbar\{f, g\}$.

El producto- \star_{\hbar} es llamado, producto estrella. La primera condición en la definición implica que cada término en la expansión de $a \star b$ tiene como coeficiente un polinomio en $a \cdot b$ y sus derivadas parciales con respecto a las coordenadas locales, la segunda condición implica que el producto- \star es una deformación de la estructura conmutativa del algebra de funciones y la última es el principio de correspondencia. Aunque no esta mencionado explícitamente, se requiere también la existencia de un elemento unidad 1_{\hbar} con respecto al producto- \star . Un caso particular es el de una estructura de Poisson proveniente de una forma simpléctica (M, Ω) .

4.4. Producto de Moyal-Weyl

A continuación se desarrolla de forma explícita lo anterior para el caso de la variedad simpléctica $(\mathbb{R}^{2n}, dq_{\mu} \wedge dp_{\mu})$.

4.4.1. Transformada de Fourier

Definición 40. Para toda función $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se define la transformada de Fourier, como

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} d^d x =: \mathfrak{F}[f](p), \quad (4.31)$$

con

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} d^d p := \mathfrak{F}^{-1}[\tilde{f}](x), \quad (4.32)$$

su transformación inversa.

Esta transformada tiene la propiedad que al ser aplicada a la n -ésima derivada de una función $f \in L^1 \mathbb{R}^d$, esta se transforma como un múltiplo (de potencias) de la variable de Fourier transformada,

$$\mathfrak{F} \left[\frac{\partial^n f}{\partial x_j \dots \partial x_k} \right] (p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^n f}{\partial x_j \dots \partial x_k} (x) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} d^d x = \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n p_j \dots p_k \tilde{f}(p). \quad (4.33)$$

Por otro lado al aplicar subsecuentemente la transformación directa e inversa,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(p) e^{\frac{i}{\hbar} px} d^d p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{\frac{i}{\hbar} (px - py)} d^d y d^d p, \quad (4.34)$$

se obtiene la representación de Fourier de la función δ ,

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} px} d^d p. \quad (4.35)$$

Esta funcion- δ tiene la propiedad,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta(x - y) d^d x = f(y). \quad (4.36)$$

4.4.2. Cuantización de Weyl.

Como ya se menciona en este capítulo, el espacio fase de observables clásicos $f(x, p) \in C^\infty(M)$ constituye una variedad simpléctica (M, Ω) , respecto al paréntesis de Poisson $\{, \}$. Si se considera un observable clásico $f(x)$ que depende solo de x , acorde a las reglas de cuantización de la mecánica cuántica este se transforma en un operador,

$$\Omega : f(x) \rightarrow \hat{f}(x), \quad (4.37)$$

$$Fun \mapsto Op. \quad (4.38)$$

Teniendo en mente la propiedad (4.36) se puede construir el operador ²

²Nótese aquí, que estamos interesados en $\delta(x - \hat{x})$ y no en $\delta(x - x')$. Si se desea ser formal en este punto, es necesario tener en cuenta que la dinámica cuántica de un sistema físico asociado a por los operadores $\{\hat{q}, \hat{p}, \mathbf{1}\}$ esta determinada por las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = [\hat{q}, \mathbf{1}] = [\hat{p}, \mathbf{1}] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \mathbf{1}. \quad (4.39)$$

Dichos operadores obedecen un algebra de Weyl-Heisenberg, siendo los vectores propios correspondientes los definidos por las ecuaciones de valores propios

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad \hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \mathbf{1}|q\rangle = |q\rangle, \quad \mathbf{1}|p\rangle = |p\rangle. \quad (4.40)$$

Las bases de los vectores propios $\{|q\rangle\}$ y $\{|p\rangle\}$ satisfacen las relaciones de completos y ortonormalidad que son definidas respectivamente como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| = \mathbf{1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| = \mathbf{1}, \quad (4.41)$$

y

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad \langle q|p'\rangle = (2\pi\hbar)^{1/2} \exp(iqp/\hbar). \quad (4.42)$$

Por otro lado también se conoce el producto escalar

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} qp\right), \quad (4.43)$$

el cual permite conectar los diferentes espacios de autovectores $|q\rangle$ y $|p\rangle$ mediante una transformación de Fourier

$$|p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} qp\right) |q\rangle. \quad (4.44)$$

Un operador arbitrario \hat{F} siempre es posible expresarlo a través de la identidad

$$\begin{aligned} \hat{F} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp' dp'' dq' dq'' |q''\rangle\langle q''| p'' \langle p''| \hat{F} |p'\rangle \langle p'| q'\rangle \langle q'| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp' dp'' dq' dq''}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} (p'' q'' - p' q')\right] \langle p''| \hat{F} |p'\rangle |q''\rangle \langle q'|, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta(x - \hat{x}) d^d x, \quad (4.55)$$

que se puede escribir con ayuda de (4.35) de la siguiente manera,

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{\frac{i}{\hbar} \xi(x - \hat{x})} d^d \xi d^d x. \quad (4.56)$$

Para el caso general de una función $f(x, p)$, la transformación anterior se generaliza de forma natural,

$$\hat{f}(x, p) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(p, x) \delta(x - \hat{x}) \delta(p - \hat{p}) d^d p d^d x, \quad (4.57)$$

donde se uso la relación de completes (4.41) y el producto escalar (4.43). Introduciendo unas nuevas variables

$$2p = p' + p'', \quad 2q = q' + q'', \quad u = p'' - p', \quad v = q'' - q', \quad (4.46)$$

con el jacobiano sea igual a 1,

$$dp' dp'' dq' dq'' = \underbrace{J \begin{bmatrix} p' & p'' \\ p & u \end{bmatrix}}_{=1} \underbrace{J \begin{bmatrix} q' & q'' \\ q & v \end{bmatrix}}_{=1} dp dq du dv = dp dq du dv, \quad (4.47)$$

entonces la identidad (4.45) puede ser escrita como la representación integral del operador \hat{F}

$$\hat{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp dq}{2\pi\hbar} f(p, q) \Delta(p, q). \quad (4.48)$$

Una función $f(p, q)$ es denominada transformada de Weyl del operador \hat{F}

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar} qu\right) \langle p + u/2 | \hat{F} | p - u/2 \rangle. \quad (4.49)$$

Es importante hacer notar que si \hat{F} es un operador hermitiano, entonces $f(p, q)$ es una función rea. Por otra parte, $\Delta(p, q)$ representa una base de operadores es un espacio fase, cuya expresión tiene la siguiente forma

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) |q + v/2\rangle \langle q - v/2|. \quad (4.50)$$

La expresión (4.48) puede ser interpretada como la descomposición del operador \hat{F} en una base de operadores, siendo las componentes $\Delta(p, q)$ los elementos de esta base. Este procedimiento para mapear un operador \hat{F} no es único. Al modificar la relación de completes (4.41) y ortonormalidad (4.42) es posible obtener una representación equivalente a (4.48). Un caso particular de una transformación de Weyl $f(p, q)$ en una base de operadores $\Delta(p, q)$ sería el siguiente

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp\left(\frac{i}{\hbar} pv\right) \langle q - v/2 | \hat{F} | q + v/2 \rangle, \quad (4.51)$$

$$\Delta(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp\left(\frac{i}{\hbar} qu\right) |p - u/2\rangle \langle p + u/2|. \quad (4.52)$$

Estas dos expresiones en conjunto con (4.49) y (4.50) permiten demostrar que los proyectores de posición y momento pueden ser escritos respectivamente como

$$|q\rangle \langle q| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} u(q - \hat{q})\right] = \delta(q - \hat{q}), \quad (4.53)$$

$$|p\rangle \langle p| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} v(p - \hat{p})\right] = \delta(p - \hat{p}). \quad (4.54)$$

con

$$\delta(x - \hat{x})\delta(p - \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} d^d\xi d^dy. \quad (4.58)$$

Al aplicar (4.57) al caso particular de $f(x, p) = px$,

$$\Omega(px) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} px e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} d\xi dy dp dx. \quad (4.59)$$

Teniendo en cuenta la formula de Baker-Campbell-Hausdorff, es posible descomponer la suma de operadores de un exponencial en el producto de estos operadores,

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}. \quad (4.60)$$

Esta formula solo es aplicable si $[A, B]$ es un escalar. Recordando que en nuestro caso \hat{x}, \hat{p} son operadores que satisfacen la relación de conmutación $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, mientras que x, p son funciones (i.e. conmutan tanto entre ellas como con \hat{x} o \hat{p}). En este caso,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[\frac{i}{\hbar} \xi(x - \hat{x}), \frac{i}{\hbar} y(p - \hat{p}) \right] &= \frac{\xi y}{2\hbar^2} \left([x, p] - [x, \hat{p}] - [\hat{x}, p] + [\hat{x}, \hat{p}] \right) \\ &= \frac{\xi y}{2\hbar^2} (i\hbar) \\ &= \frac{i}{\hbar} \frac{\xi y}{2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

De esta manera (4.59), puede escribirse de la forma,

$$\Omega(px) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} px e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})]} e^{\frac{i}{\hbar}[y(p-\hat{p})]} e^{\frac{i}{\hbar}[\frac{\xi y}{2}]} d\xi dy dp dx. \quad (4.62)$$

Dado que el tercer exponencial de esta ultima ecuación tiene como argumento una función, este conmuta con los otros dos que en sus argumentos contienen un operador, es decir,

$$\Omega(px) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} px e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x+\frac{y}{2}-\hat{x})]} e^{\frac{i}{\hbar}[y(p-\hat{p})]} d\xi dy dp dx. \quad (4.63)$$

Tras realizar el cambio de variables de x a $x' = x + \frac{y}{2}$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \Omega(px) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p \left(x' - \frac{y}{2} \right) e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} d\xi dy dp dx' \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} px' e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} d\xi dy dp dx' \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{y}{2} e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} d\xi dy dp dx'. \end{aligned} \quad (4.64)$$

El primer termino de esta ultima ecuación por (4.57) es $\hat{x}\hat{p}$. Integrando respecto a ξ el segundo termino, al tener en cuenta: $\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x'-\hat{x})} d\xi = \delta(x' - \hat{x})$, se obtiene

$$\Omega(px) = \hat{x}\hat{p} - \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{y}{2} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} \delta(x' - \hat{x}) dy dp dx'. \quad (4.65)$$

Integrando respecto a x' , tenemos,

$$\begin{aligned}\Omega(px) &= \hat{x}\hat{p} - \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{y}{2} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy dp \\ &= \hat{x}\hat{p} - \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy dp.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Al identificar,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})} dy \right) = \delta'(p - \hat{p}), \quad (4.67)$$

se puede escribir (4.66) de la forma,

$$\Omega(px) = \hat{x}\hat{p} - \int_{-\infty}^{\infty} p \frac{\hbar}{2i} \delta'(p - \hat{p}) dp. \quad (4.68)$$

Al hacer uso de la propiedad,

$$f(x)\delta'(x) = -f'(x)\delta(x), \quad (4.69)$$

al caso particular,

$$p \delta'(p - \hat{p}) = -\delta(p - \hat{p}), \quad (4.70)$$

Permite escribir (4.68) de la siguiente manera,

$$\Omega(px) = \hat{x}\hat{p} + \left(\frac{\hbar}{2i} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p - \hat{p}) dp. \quad (4.71)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Omega(px) &= \hat{x}\hat{p} + \frac{\hbar}{2i} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}),\end{aligned}\quad (4.72)$$

dado que,

$$\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{x}\hat{p} - [\hat{x}, \hat{p}]) = \hat{x}\hat{p} + \frac{\hbar}{2i}. \quad (4.73)$$

De (4.72) se sigue que este procedimiento incorpora una simetrización de productos, denominada *ordenamiento de Weyl*. Este ordenamiento es necesario en cualquier descripción cuántica. Esto último se traduce en que los operadores $\Omega(f(x, p))$ son consistentes con las reglas de cuantización de la mecánica cuántica.

Por lo anterior se puede concluir que un observable clásico $f(p, x)$ se transforma en un cuántico $\hat{f}(\hat{p}, \hat{x})$ mediante la prescripción,

$$\begin{aligned}\hat{f} \equiv \Omega(f) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(p, x) \\ &\quad \times e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} d^d \xi d^d y d^d p d^d x.\end{aligned}\quad (4.74)$$

Como se mostró anteriormente, via la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, es posible escribir el exponencial de esta expresión como,

$$e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} = e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2}-\hat{x})} e^{\frac{i}{\hbar}y(p-\hat{p})}. \quad (4.75)$$

Cada uno de estos exponenciales contiene en su argumento un solo operador que conmuta con los otros términos, por lo cual es posible desarrollar ambas exponenciales, sin añadir términos adicionales (conmutadores),

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} &= e^{\frac{i}{\hbar}\xi x} e^{\frac{i}{\hbar}\xi \frac{y}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}} e^{\frac{i}{\hbar}y p} e^{-\frac{i}{\hbar}y \hat{p}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}(\xi x + y p + \frac{\xi y}{2})} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}} e^{-\frac{i}{\hbar}y \hat{p}} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2})} e^{\frac{i}{\hbar}y p} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}} e^{-\frac{i}{\hbar}y \hat{p}}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

En la representación de coordenadas sabemos que,

$$\left(e^{-\frac{\hbar}{i}\xi \hat{x}} \psi \right) (z) = e^{-\frac{\hbar}{i}\xi z} \psi(z), \quad (4.77)$$

$$\left(e^{-\frac{\hbar}{i}y \hat{p}} \psi \right) (z) = \psi(z - y). \quad (4.78)$$

Aplicando $\psi(z)$ en (4.76) se obtiene,

$$\left(e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} \psi \right) (z) = \left(e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2})} e^{\frac{i}{\hbar}y p} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}} e^{-\frac{i}{\hbar}y \hat{p}} \psi \right) (z). \quad (4.79)$$

Teniendo en cuenta (4.78) esta ecuación se simplifica de la forma,

$$\left(e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} \psi \right) (z) = \left(e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2})} e^{\frac{i}{\hbar}y p} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \hat{x}} \psi \right) (z - y). \quad (4.80)$$

Mientras que al aplicar (4.77) se tiene,

$$\left(e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} \psi \right) (z) = \left(e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2})} e^{\frac{i}{\hbar}y p} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi z} \psi \right) (z - y). \quad (4.81)$$

Debido a que ya no existe dependencia de los operadores en la parte exponencial, esta expresión se puede escribir finalmente de la forma,

$$\left(e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(x-\hat{x})+y(p-\hat{p})]} \psi \right) (z) = \left(e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2}-z)} e^{\frac{i}{\hbar}y p} \psi \right) (z - y). \quad (4.82)$$

Esto ultimo es importante para calcular $(\hat{f}\psi)(z)$ en la representación de Schrödinger. De (4.74) y (4.82) se sigue,

$$\begin{aligned} (\hat{f}\psi)(z) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(p, x) \\ &\quad \times e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2}-z)} e^{\frac{i}{\hbar}y p} \psi(z - y) d^d \xi d^d y d^d p d^d x. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Integrando respecto a ξ , teniendo en cuenta,

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x+\frac{y}{2}-z)} d\xi = \delta\left(x - \left(z - \frac{y}{2}\right)\right), \quad (4.84)$$

se obtiene,

$$(\hat{f}\psi)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(p, x) \delta\left(x - \left(z - \frac{y}{2}\right)\right) e^{\frac{i}{\hbar}y p} \psi(z - y) d^d y d^d p d^d x. \quad (4.85)$$

Debido a que,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(p, x) \delta\left(x - \left(z - \frac{y}{2}\right)\right) dx = f\left(p, z - \frac{y}{2}\right), \quad (4.86)$$

resulta,

$$(\hat{f}\psi)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(p, z - \frac{y}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}yp} \psi(z - y) d^d y d^d p. \quad (4.87)$$

En esta expresión es posible eliminar la dependencia de y mediante el cambio de variable $x = z - y$,

$$(\hat{f}\psi)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(p, \frac{z+x}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(z-x)} \psi(x) d^d p d^d x. \quad (4.88)$$

A esto ultimo se le conoce en la literatura como la definición de la cuantización de Weyl. Tomando en cuenta que \hat{f} tiene una representación con el kernel integral $K_{\hat{f}}(x, y)$, i.e.

$$(\hat{f}\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{\hat{f}}(x, y) \psi(y) d^d y, \quad (4.89)$$

con

$$K_{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(p, \frac{y+x}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}p(x-y)} d^d p. \quad (4.90)$$

Al introducir las variables $X = \frac{x+y}{2}$ y $z = x - y$, se obtiene la relación inversa del kernel integral $K_{\hat{f}}(x, y)$,

$$K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(p, X) e^{\frac{i}{\hbar}pz} d^d p. \quad (4.91)$$

Esto ultimo resulta útil para encontrar la transformación inversa,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}) \equiv f(P, X) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d z, \quad (4.92)$$

con la cual se obtienen observables clásicos $f(P, X)$ asociados a operadores cuánticos $\hat{f}(x, p)$ conocidos.

4.4.3. Función de Wigner

Una vez obtenida una representación de observables cuánticos en un espacio fase, el siguiente paso es obtener un equivalente de función de onda en este espacio. Para este fin se considera el operador \hat{P}_ψ como proyector de los estados ψ ,

$$(\hat{P}_\psi\phi)(x) := \psi(x) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi(y)} \phi(y) d^d y, \quad (4.93)$$

en notación de Dirac $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Por (4.89) este operador puede ser representado de la forma,

$$(\hat{P}_\psi\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{\hat{f}}(x, y) \phi(y) dy. \quad (4.94)$$

De aquí,

$$K_{\hat{f}}(x, y) = \psi(x)\overline{\psi(y)}. \quad (4.95)$$

A partir de (4.91) se obtiene la relación inversa de este kernel integral,

$$K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) = \psi\left(X + \frac{z}{2}\right)\overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)}. \quad (4.96)$$

De (4.96) y (4.92) se obtiene el observable clásico $P_\psi(X, P)$ asociado al proyector $\hat{P}_\psi(x, p)$,

$$\Omega^{-1}(\hat{P}_\psi) \equiv P_\psi(P, X) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right)\overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d z. \quad (4.97)$$

A este observable clásico $P_\psi(X, P)$ se le denomina función de Wigner, y se le denota como:

$$W[\psi](P, X) = P_\psi(P, X). \quad (4.98)$$

La función de Wigner es una densidad de quasi-probabilidad (no es densidad de probabilidad porque su evaluación puede arrojar resultados negativos o incluso complejos). Al considerar,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} W[\psi](P, X) d^d P \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right)\overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d P d^d z. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Teniendo en cuenta: $\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d P = \delta(-z)$, se obtiene

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} W[\psi](P, X) d^d P = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right)\overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} \delta(-z) d^d z. \quad (4.100)$$

Esto ultimo puede simplificarse teniendo en cuenta la propiedad,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(X, z) \delta(-z) d^d z = f(X, z = 0). \quad (4.101)$$

De aquí,

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} W[\psi](P, X) d^d P = \psi(X)\overline{\psi(X)} = \rho(X, X). \quad (4.102)$$

Por lo tanto se ha obtenido la densidad de probabilidad para la posición. La representación en el espacio de momentos de esta densidad se puede obtener al aplicar la transformada de Fourier,

$$\rho(P, P') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(Y, Y') e^{-\frac{i}{\hbar}(PY - P'Y')} dY dY'. \quad (4.103)$$

Para el caso particular en que $P' = P$, $Y = X + \frac{z}{2}$, $Y' = X - \frac{z}{2}$, se obtiene,

$$\rho(P, P) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right)\overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d X d^d z. \quad (4.104)$$

Finalmente identificando con (4.97) se concluye,

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} W[\psi](P, X) d^d X = \rho(P, P). \quad (4.105)$$

Por lo tanto la densidad de probabilidad para el momento.

Por otro lado a partir de (4.92) y (4.97) se puede escribir,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} W[\psi](P, X) f(P, X) d^d P d^d X \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right) \overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} e^{-\frac{i}{\hbar} P z} dz \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^d} K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z'}{2}, X - \frac{z'}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar} P z'} d^d z' d^d P d^d X. \end{aligned} \quad (4.106)$$

En esta ecuación, la dependencia de P solo esta presente en las exponenciales, por lo cual es posible reescribir (4.106) en la forma,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right) \overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} \\ & \quad \times K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z'}{2}, X - \frac{z'}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar} P(z+z')} d^d P d^d z' d^d z d^d X. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Teniendo en cuenta,

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{\hbar} P(z+z')} d^d P = \delta(-z - z'), \quad (4.108)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right) \overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} \\ & \quad \times K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z'}{2}, X - \frac{z'}{2}\right) \delta(-z - z') d^d z' d^d z d^d X. \end{aligned} \quad (4.109)$$

De la propiedad,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(X, z') \delta(-z - z') d^d z' = f(X, z' = -z), \quad (4.110)$$

la ecuación anterior se escribe de la siguiente manera,

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(X + \frac{z}{2}\right) \overline{\psi\left(X - \frac{z}{2}\right)} K_{\hat{f}}\left(X - \frac{z}{2}, X + \frac{z}{2}\right) d^d z d^d X. \quad (4.111)$$

Después de realizar el cambio de variables $Y = X - \frac{z}{2}$, $Y' = X + \frac{z}{2}$ se obtiene,

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi(Y)} K_{\hat{f}}(Y, Y') \psi(Y') d^d Y d^d Y'. \quad (4.112)$$

Identificando términos con (4.89) esto ultimo se puede escribir de la forma,

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi(Y)} (\hat{f}\psi)(Y) d^d Y. \quad (4.113)$$

De aquí y utilizando notación de Dirac se concluye,

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} W[\psi](p, x) f(p, x) d^d p d^d x = \langle \psi, \hat{f}\psi \rangle \quad (4.114)$$

De esta manera los valores de expectación pueden ser calculados mediante la función de Wigner y los símbolos de Weyl.

4.4.4. Producto de Moyal

Ya que la formulación cuántica es no-conmutativa, resulta interesante analizar como se relaciona $\Omega(\hat{f}\hat{g})$ con $\Omega(\hat{f})$ y $\Omega(\hat{g})$. Para esto se introduce la transformada \tilde{f} de $f = \Omega^{-1}(\hat{f})$,

$$f(p, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\alpha, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}(p\alpha + x\beta)} d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.115)$$

De aquí,

$$f\left(p, \frac{y+x}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\alpha, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}[p\alpha + (\frac{y+x}{2})\beta]} d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.116)$$

Sustituyendo (4.116) en (4.90) se obtiene,

$$K_{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\alpha, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}[p(x-y+\alpha)]} e^{\frac{i}{\hbar}[(\frac{x+y}{2})\beta]} d^d p d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.117)$$

Teniendo en cuenta: $\delta(\alpha - k) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}p(\alpha - k)} d^d p$, con $k = y - x$, la ecuación (4.117) se simplifica de la siguiente manera,

$$K_{\hat{f}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\alpha, \beta) \delta(\alpha - k) e^{\frac{i}{\hbar}[(\frac{x+y}{2})\beta]} d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.118)$$

Al aplicar la propiedad,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\alpha, \beta) \delta(\alpha - k) d^d \alpha = \tilde{f}(k, \beta), \quad (4.119)$$

se obtiene,

$$K_{\hat{f}}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(y - x, \beta) e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{x+y}{2})\beta} d^d \beta. \quad (4.120)$$

De esta manera se ha obtenido una relación entre kernels integrales y transformadas de Fourier.

Una propiedad de kernels integrales es la siguiente,

$$K_{\hat{f}\hat{g}}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{\hat{f}}(x, z) K_{\hat{g}}(z, y) d^d z. \quad (4.121)$$

De aquí y tomando en cuenta (4.91) se obtiene la transformación inversa de $K_{\hat{f}\hat{g}}(x, y)$,

$$K_{\hat{f}\hat{g}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{\hat{f}}\left(X + \frac{z}{2}, y\right) K_{\hat{g}}\left(y, X - \frac{z}{2}\right) d^d y. \quad (4.122)$$

Considerando (4.120) esto ultimo, puede escribirse de la forma,

$$K_{\hat{f}\hat{g}}\left(X + \frac{z}{2}, X - \frac{z}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}\left(y - X - \frac{z}{2}, \beta\right) e^{\frac{i}{\hbar}\alpha \frac{X+y+z/2}{2}} \\ \times \tilde{g}\left(y - X + \frac{z}{2}, \beta\right) e^{\frac{i}{\hbar}\beta \frac{X+y+z/2}{2}} d^d y d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.123)$$

Introduciendo (4.123) en (4.92) se obtiene,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})(P, X) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}\left(y - X - \frac{z}{2}, \beta\right) e^{\frac{i}{\hbar}\alpha \frac{X+y+z/2}{2}} \\ \times \tilde{g}\left(y - X + \frac{z}{2}, \beta\right) e^{\frac{i}{\hbar}\beta \frac{X+y+z/2}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}Pz} d^d z d^d y d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.124)$$

Al escribir y, z en términos de las nuevas variables, $k = y - X - \frac{z}{2}$, $l = y - X + \frac{z}{2}$, i.e. $z = l - k$ se obtiene,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})(P, X) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(k, \alpha) \tilde{g}(l, \beta) \\ \times e^{\frac{i}{\hbar}\alpha \frac{2X+l}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}\beta \frac{2X+k}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}P(k-l)} d^d k d^d l d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.125)$$

Reagrupando términos,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})(P, X) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(k, \alpha) \tilde{g}(l, \beta) \\ \times e^{\frac{i}{\hbar}[X(\alpha+\beta)+P(k-l)]} e^{\frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2}\alpha k + \frac{1}{2}\beta l]} d^d k d^d l d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.126)$$

Al desarrollar por Taylor la segunda exponencial se tiene,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})(P, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}[X(\alpha+\beta)+P(k-l)]} \\ \times \tilde{f}(k, \alpha) \left[\frac{i}{2\hbar}(\alpha k + \beta l) \right]^n \tilde{g}(l, \beta) d^d k d^d l d^d \alpha d^d \beta. \quad (4.127)$$

Al identificar términos, teniendo en cuenta (4.33) y (4.115) se encuentra,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})(P, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f(p, x) \left[\frac{i}{2\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} \overleftarrow{\nabla}_p \frac{\hbar}{i} \overrightarrow{\nabla}_x - \frac{\hbar}{i} \overleftarrow{\nabla}_x \frac{\hbar}{i} \overrightarrow{\nabla}_p \right) \right]^n g(p, x), \quad (4.128)$$

donde las flechas indican que las derivadas actúan solamente en las funciones que están ya sea a la derecha o a la izquierda del operador diferencial correspondiente. Al reordenar esta expresión se obtiene,

$$\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})(P, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f(p, x) \left[\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\nabla}_p \overrightarrow{\nabla}_x - \overleftarrow{\nabla}_x \overrightarrow{\nabla}_p \right) \right]^n g(p, x). \quad (4.129)$$

Al producto $\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})$ se le denomina producto de Moyal-Weyl y en la literatura se le designa como $f \star g$, de esta manera,

$$f(P, X) \star g(P, X) = f(p, x) e^{-\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\nabla}_p \overrightarrow{\nabla}_x - \overleftarrow{\nabla}_x \overrightarrow{\nabla}_p)} g(p, x). \quad (4.130)$$

A primer orden esta expresión se escribe,

$$f(P, X) \star g(P, X) = f(p, x)g(p, x) + \frac{\hbar}{2i}\{f, g\}(p, x) + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (4.131)$$

con,

$$\{f, g\} = \nabla_p f \nabla_x g - \nabla_x f \nabla_p g. \quad (4.132)$$

Este producto satisface las propiedades (4.28), (4.29) y (4.30), por lo tanto define una buena cuantización. Los operadores bidiferenciales $B_i(f, g)$ para este caso en particular vienen dados por,

$$B_i(f, g) = \{f, g\}^i. \quad (4.133)$$

De la expresión (4.130) es posible mostrar,

$$[[f \star g]_\star, h]_\star = f \star [g, h]_\star + [f, h]_\star \star g. \quad (4.134)$$

Esto a primer orden significa que la parte antisimétrica de B_1 es la derivación con respecto a las funciones f y g . Adicionalmente la identidad de Jacobi se satisface a través de estas relaciones de conmutación,

$$[f, [g, h]_\star]_\star + [h, [f, g]_\star]_\star + [g, [h, f]_\star]_\star = 0. \quad (4.135)$$

A segundo orden esto implica que B_1 es una estructura de Poisson,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0, \quad (4.136)$$

donde $\{f, g\} = B_1(f, g)$. Este paréntesis de Moyal dota al espacio fase $f(x, p) \in C^\infty$ de una estructura simpléctica (M, Ω_\star) .

4.5. Dinámica cuántica Moyal-Weyl

A continuación se presenta una comparación entre la dinámica que surge a través de este formalismo respecto a la mecánica clásica y la cuántica (Heisenberg).

1. Si $f \in C^\infty(M)$ es un observable clásico de un sistema dinámico, definido por un hamiltoniano H , se satisface:

$$\frac{d}{dt}(f \circ F_t) = F_t^*(L_{X_H} f) = F_t^*({H, f}) = \{H, f \circ F_t\}, \quad (4.137)$$

siendo $F_t : U \subset M \rightarrow M$ el flujo local de X_H y $F_t^* : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(M)$ la aplicación definida por $F_t^*(f) = f \circ F_t$. Así pues, la evolución temporal $t \rightarrow f(t)$ del observable $f(0) = f$ es una solución de la ecuación,

$$\frac{df(t)}{dt} = \{H, f(t)\}. \quad (4.138)$$

La descripción de la mecánica clásica se puede realizar a partir de las dos leyes de composición sobre $C^\infty(M)$: el producto ordinario de funciones y el paréntesis de Poisson.

2. En la representación de Heisenberg, el sistema correspondiente con hamiltoniano \hat{H} , tiene como ecuación dinámica,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}], \quad (4.139)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ indica el conmutador de operadores en el espacio de Hilbert.

3. En el caso de la descripción de la mecánica cuántica de Moyal-Weyl-Wigner, la correspondiente ecuación dinámica es:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, f(t)]_{\star}. \quad (4.140)$$

Aquí la descripción de la mecánica cuántica se puede realizar a partir también de dos leyes de composición sobre $C^{\infty}(M)$: el producto- \star y el conmutador $[\cdot, \cdot]_{\star}$.

Capítulo 5

Simetrías, productos- \star y espacios no-conmutativos

Como ya fue mencionado anteriormente, básicamente una simetría es un conjunto de transformaciones que dejan invariante a un sistema. Este conjunto de transformaciones forma un grupo. A partir de este grupo es posible predecir los elementos estructurales que conforman dicho sistema. Las estructuras matemáticas que modelan a nivel local estas simetrías son las álgebras de Lie. Los generadores de estas álgebras, resultan campos tensoriales definidos sobre la variedad que define el sistema. Estos campos permiten definir estructuras simplecticas no triviales compatibles con el álgebra. A partir de estas estructuras es posible obtener productos- \star (en general no únicos), que al actuar sobre coordenadas espaciales definen espacios en general no-conmutativos. Estos espacios a nivel local resultan extensiones del espacio ordinario conmutativo.

En este capítulo se presentarán las ideas generales para la construcción de productos- \star , a partir de los generadores de un álgebra de Lie. En particular se construirán productos deformados (que definirán espacios no-conmutativos) a partir de los generadores P_α y $M_{\alpha\beta}$ del álgebra de Poincaré $U(iso(3, 1))$.

5.1. Simetrías y productos deformados.

A partir de un grupo de Lie G , cuyos generadores E_a satisfacen el álgebra de Lie \mathcal{G} ,

$$[E_a, E_b]_{\mathcal{G}} = C^c{}_{ab} E_c, \quad (5.1)$$

donde $C^c{}_{ab}$ son constantes por tratarse de una álgebra de Lie. Por otro lado, es posible definir el producto- \star ,

$$\mu_\star(f(x) \otimes g(x)) = \mu \circ \left(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)) \right), \quad (5.2)$$

donde,

$$\mathcal{F} = e^{r^{ab} E_a \otimes E_b}, \quad (5.3)$$

es un elemento del álgebra universal envolvente de \mathcal{G} (expresando esta exponencial en su expansión polinómica). Este producto- \star a su vez define el siguiente

conmutador,

$$\begin{aligned} [f(x), g(x)]_\star &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\ &= f(x)g(x) - g(x)f(x) - \{f(x), g(x)\}_\star + \mathcal{O}(r^2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

aquí,

$$\{f(x), g(x)\}_\star = \mu \circ \left(-r^{ab} E_a \otimes E_b \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)) \right). \quad (5.5)$$

De (5.4) se sigue que las propiedades de algebra de Lie determinadas por el conmutador $[\cdot, \cdot]_\star$ dependen directamente de la estructura simplecta de $\{\cdot, \cdot\}_\star$. En particular para que (5.5) cumpla la identidad de Jacobi, es necesario que la r -matriz $r = r^{ab} E_a \otimes E_b$ satisfaga la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE),

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0, \quad (5.6)$$

donde,

$$\begin{aligned} r_{12} &= r^{ab} E_a \otimes E_b \otimes 1, \\ r_{13} &= r^{ab} E_a \otimes 1 \otimes E_b, \\ r_{23} &= r^{ab} 1 \otimes E_a \otimes E_b. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las propiedades de linealidad y antisimetrías suelen satisfacerse automáticamente y su comprobación se realiza de forma directa.

5.2. Productos deformados a partir de $U(iso(3, 1))$.

Para definir espacios no-conmutativos, a partir de campos vectoriales que forman una algebra de Lie, solo es necesario proponer r -matrices dependientes de los campos, que satisfagan la ecuación de Yang-Baxter. Esta condición es bastante fuerte y reduce de forma significativa el número de espacios deformados que en principio correspondía a el número de combinaciones entre los generadores. A continuación se presentan las deformaciones que se obtienen a partir de los generadores $P_\alpha, M_{\alpha\beta}$ del algebra de Poincaré $U(iso(3, 1))$.

5.2.1. Producto- \star_θ .

A partir del elemento $\mathcal{F}_\theta \in U(iso(3, 1)) \otimes U(iso(3, 1))$ definido como,

$$\mathcal{F}_\theta = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta}, \quad (5.8)$$

se obtiene el siguiente producto- \star_θ ,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_\theta}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_\theta g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_\theta^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Con este producto queda determinado el siguiente conmutador,

$$\begin{aligned} [f(x), g(x)]_{\star_\theta} &= f(x) \star_\theta g(x) - g(x) \star_\theta f(x) \\ &= \mu \circ \mathcal{F}_\theta^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)) \\ &= \mu \circ e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para mostrar que el algebra deformada (5.10) queda bien definida, es necesario comprobar que la $r_\theta \in U(\text{iso}(3,1)) \otimes U(\text{iso}(3,1))$ definida como,

$$r_\theta = \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta, \quad (5.11)$$

satisface la ecuación de Yang-Baxter (5.6). Al identificar,

$$r_\theta^{12} = \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta \otimes 1, \quad (5.12)$$

$$r_\theta^{13} = \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta, \quad (5.13)$$

$$r_\theta^{23} = \frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} 1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta, \quad (5.14)$$

se obtienen las relaciones de conmutación,

$$[r_\theta^{12}, r_\theta^{13}] = 0, \quad (5.15)$$

$$[r_\theta^{12}, r_\theta^{23}] = \left(\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta}\right)^2 P_\alpha \otimes [P_\beta, P_\alpha] \otimes P_\beta = 0, \quad (5.16)$$

$$[r_\theta^{13}, r_\theta^{23}] = 0. \quad (5.17)$$

Por lo tanto r_θ satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE),

$$[r_\theta^{12}, r_\theta^{13}] + [r_\theta^{12}, r_\theta^{23}] + [r_\theta^{13}, r_\theta^{23}] = 0. \quad (5.18)$$

Las relaciones de conmutación para las coordenadas de este espacio se obtienen considerando $f(x) = x^\mu$ y $g(x) = x^\nu$ en (5.10) obteniéndose,

$$[x^\mu, x^\nu]_{\star_\theta} = -i\theta^{\mu\nu}. \quad (5.19)$$

5.2.2. Producto- $\star_{\theta^{kl}}$.

Partiendo del elemento $\mathcal{F}_\theta \in U(\text{iso}(3,1)) \otimes U(\text{iso}(3,1))$ definido como,

$$\mathcal{F}_{\theta^{kl}} = e^{-i\theta^{kl} P_k \wedge P_l}; \quad [k, l - \text{fijos}]; \quad (\theta^{kl} = -\theta^{lk}); \quad a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a, \quad (5.20)$$

donde la r -matriz,

$$r_{\theta^{kl}} = i\theta^{kl} P_k \wedge P_l, \quad (5.21)$$

satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE), se puede definir el siguiente producto- $\star_{\theta^{kl}}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\theta^{kl}}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\theta^{kl}} g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_{\theta^{kl}}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Mediante este producto se puede definir el siguiente conmutador,

$$[f(x), g(x)]_{\star_{\theta^{kl}}} = \mu \circ e^{i\theta^{kl} P_k \wedge P_l} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)). \quad (5.23)$$

Las relaciones de conmutación para este espacio deformado, son las siguientes:

$$[x^0, x^i]_{\star_{\theta^{kl}}} = x^0 \star_{\theta^{kl}} x^i - x^i \star_{\theta^{kl}} x^0 = 0, \quad (5.24)$$

$$[x^i, x^j]_{\star_{\theta^{kl}}} = -2i\theta^{kl} (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j) = -4i\theta^{ij}. \quad (5.25)$$

5.2.3. Producto- $\star_{\theta^{0i}}$.

A partir del elemento $\mathcal{F}_{\theta^{0i}} \in U(\mathit{iso}(3,1)) \otimes U(\mathit{iso}(3,1))$ definido de la forma,

$$\mathcal{F}_{\theta^{0i}} = e^{-i\theta^{0i}P_0 \wedge P_i}; \quad [i - f i j o]; \quad (\theta^{0i} = -\theta^{i0}). \quad (5.26)$$

cuya r -matriz,

$$r_{\theta^{0i}} = i\theta^{0i}P_0 \wedge P_i, \quad (5.27)$$

satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE), se puede definir el siguiente producto- $\star_{\theta^{kl}}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\theta^{0i}}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\theta^{0i}} g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_{\theta^{0i}}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Este producto induce el conmutador,

$$[f(x), g(x)]_{\star_{\theta^{0i}}} = \mu \circ e^{i\theta^{0i}P_0 \wedge P_i} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)). \quad (5.29)$$

De aquí las relaciones de conmutación para esta espacio deformado son,

$$[x^0, x^i]_{\star_{\theta^{0i}}} = -2i\theta^{0i}, \quad (5.30)$$

$$[x^i, x^j]_{\star_{\theta^{0i}}} = 0. \quad (5.31)$$

5.2.4. Producto- \star_{κ} .

Partiendo del elemento $\mathcal{F}_{\kappa} \in U(\mathit{iso}(3,1)) \otimes U(\mathit{iso}(3,1))$ definido de la forma,

$$\mathcal{F}_{\kappa} = e^{-\frac{i}{2\kappa}P_k \wedge M_{i0}}; \quad [i, k - f i j o s, i \neq k], \quad (5.32)$$

donde la r -matriz satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter, se puede definir el producto- \star_{κ} ,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\kappa}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\kappa} g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_{\kappa}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)), \end{aligned} \quad (5.33)$$

que a su vez define el conmutador,

$$[f(x), g(x)]_{\star_{\kappa}} = \mu \circ e^{\frac{i}{2\kappa}P_k \wedge M_{i0}} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)). \quad (5.34)$$

Las relaciones de conmutación para las coordenadas de este espacio deformado son,

$$[x^0, x^j]_{\star_{\kappa}} = \frac{i}{\kappa} x^i \delta_k^j, \quad (5.35)$$

$$[x^i, x^j]_{\star_{\kappa}} = -\frac{i}{\kappa} x^0 \delta_k^j. \quad (5.36)$$

5.2.5. Producto- $\star_{\hat{\kappa}}$.

El elemento $\mathcal{F}_{\hat{\kappa}} \in U(\mathfrak{iso}(3, 1)) \otimes U(\mathfrak{iso}(3, 1))$,

$$\mathcal{F}_{\hat{\kappa}} = e^{-\frac{i}{2\hat{\kappa}} P_0 \wedge M_{kl}}; \quad [k, l - \text{fijos}, k \neq l], \quad (5.37)$$

cuya r -matriz,

$$r_{\hat{\kappa}} = \frac{i}{2\hat{\kappa}} P_0 \wedge M_{kl}, \quad (5.38)$$

satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter, define el producto,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\hat{\kappa}}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\hat{\kappa}} g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_{\hat{\kappa}}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Este producto induce el siguiente conmutador,

$$[f(x), g(x)]_{\star_{\hat{\kappa}}} = \mu \circ e^{\frac{i}{2\hat{\kappa}} P_0 \wedge M_{kl}} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)). \quad (5.40)$$

A partir de este resultado, las relaciones de conmutación para las coordenadas de este espacio son,

$$[x^0, x^i]_{\star_{\hat{\kappa}}} = -\frac{i}{\hat{\kappa}} (\delta_l^i x^k - \delta_k^i x^l), \quad (5.41)$$

$$[x^i, x^j]_{\star_{\hat{\kappa}}} = 0. \quad (5.42)$$

5.2.6. Producto- $\star_{\bar{\kappa}}$.

Partiendo del elemento $\mathcal{F}_{\bar{\kappa}} \in U(\mathfrak{iso}(3, 1)) \otimes U(\mathfrak{iso}(3, 1))$,

$$\mathcal{F}_{\bar{\kappa}} = e^{-\frac{i}{2\bar{\kappa}} P_i \wedge M_{kl}}; \quad [i, k, l - \text{fijos}, i \neq k, l], \quad (5.43)$$

cuya r -matriz,

$$r_{\bar{\kappa}} = \frac{i}{2\bar{\kappa}} P_i \wedge M_{kl}, \quad (5.44)$$

satisface la ecuación clásica de Yang-Baxter, es posible definir el producto,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\bar{\kappa}}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\bar{\kappa}} g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_{\bar{\kappa}}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Este producto induce el siguiente conmutador,

$$[f(x), g(x)]_{\star_{\bar{\kappa}}} = \mu \circ e^{\frac{i}{2\bar{\kappa}} P_i \wedge M_{kl}} \triangleright (f(x) \otimes g(x) - g(x) \otimes f(x)). \quad (5.46)$$

De aquí las relaciones de conmutación para este espacio resultan,

$$[x^i, x^j]_{\star_{\bar{\kappa}}} = -\frac{i}{\bar{\kappa}} (\delta_l^j x^k - \delta_k^j x^l), \quad (5.47)$$

$$[x^0, x^i]_{\star_{\bar{\kappa}}} = 0. \quad (5.48)$$

5.2.7. Composición de productos- \star .

A partir de la composición de los elementos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(\text{iso}(3, 1)) \otimes U(\text{iso}(3, 1))$ definidos por,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= e^{r^{AB}A \wedge B}, \\ \mathcal{F}_2 &= e^{r^{CD}C \wedge D},\end{aligned}\tag{5.49}$$

se obtiene el siguiente producto- \star ,

$$\begin{aligned}\mu_{\star_{1,2}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{1,2} g(x) \\ &:= \mu \circ \mathcal{F}_2^{-1} \circ \mathcal{F}_1^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)) \\ &= \mu \circ e^{r_2} \circ e^{r_1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)) \\ &= \mu \circ e^{r_1+r_2} e^{[r_1, r_2]/2} \triangleright (f(x) \otimes g(x)).\end{aligned}\tag{5.50}$$

Si se desea que el conmutador en esta expresión,

$$\begin{aligned}[r_1, r_2] &= r^{AB}r^{CD}(AC \otimes BD - CA \otimes DB - AD \otimes BC + DA \otimes CB \\ &\quad - BC \otimes AD + CB \otimes DA + BD \otimes AC - DB \otimes CA),\end{aligned}\tag{5.51}$$

sea nulo, y al mismo tiempo la r -matriz,

$$r = r_1 + r_2 = r^{AB}A \wedge B - r^{CD}C \wedge D,\tag{5.52}$$

que identifica,

$$r_{12} = r^{AB}(A \otimes B \otimes 1 - B \otimes A \otimes 1) + r^{CD}(C \otimes D \otimes 1 - D \otimes C \otimes 1),\tag{5.53}$$

$$r_{13} = r^{AB}(A \otimes 1 \otimes B - B \otimes 1 \otimes A) + r^{CD}(C \otimes 1 \otimes D - D \otimes 1 \otimes C),\tag{5.54}$$

$$r_{23} = r^{AB}(1 \otimes A \otimes B - 1 \otimes B \otimes A) + r^{CD}(1 \otimes C \otimes D - 1 \otimes D \otimes C),\tag{5.55}$$

satisfaga la ecuación clásica de Yang-Baxter (CYBE),

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0,\tag{5.56}$$

con,

$$\begin{aligned}[r_{12}, r_{13}] &= [A, B] \otimes (A \wedge B) + [A, C] \otimes (B \wedge D) + [A, D] \otimes (C \wedge B) \\ &\quad + [B, C] \otimes (D \wedge A) + [B, D] \otimes (A \wedge C) + [C, D] \otimes (C \wedge D),\end{aligned}\tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}[r_{12}, r_{23}] &= A \otimes [B, A] \otimes B + A \otimes [B, C] \otimes D - A \otimes [B, D] \otimes C \\ &\quad + B \otimes [A, B] \otimes A - B \otimes [A, C] \otimes D + B \otimes [A, D] \otimes C \\ &\quad + C \otimes [D, A] \otimes B - C \otimes [D, B] \otimes A - C \otimes [D, C] \otimes D \\ &\quad - D \otimes [C, A] \otimes B + D \otimes [C, B] \otimes A - D \otimes [C, D] \otimes C,\end{aligned}\tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}[r_{13}, r_{23}] &= (A \wedge B) \otimes [A, B] + (A \wedge C) \otimes [B, D] + (A \wedge D) \otimes [C, B] \\ &\quad + (B \wedge C) \otimes [D, A] + (B \wedge D) \otimes [A, C] + (C \wedge D) \otimes [C, D].\end{aligned}\tag{5.59}$$

Una condición suficiente para satisfacer estos dos requerimientos, consiste en que los generadores A, B, C y D conmuten entre sí,

$$[A, B] = [A, C] = [A, D] = [B, C] = [B, D] = [C, D] = 0.\tag{5.60}$$

Producto- $\star_{\theta^{kl}, \kappa}$.

Dado que los generadores de las r -matrices $r_{\theta^{kl}}, r_{\kappa} \in U(\mathfrak{iso}(3, 1)) \otimes U(\mathfrak{iso}(3, 1))$,

$$r_{\theta^{kl}} = i\theta^{kl} P_k \otimes P_l, \quad (5.61)$$

$$r_{\kappa} = \frac{i}{2\kappa} P_k \wedge M_{i0}, \quad (5.62)$$

conmutan entre sí,

$$[P_k, M_{i0}] = [P_l, P_k] = [P_l, M_{i0}] = 0. \quad (5.63)$$

Entonces es posible definir el producto- $\star_{\theta^{kl}, \kappa}$, como la composición de los elementos $\mathcal{F}_{\theta^{kl}}$ y \mathcal{F}_{κ} ,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\theta^{kl}, \kappa}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\theta^{kl}, \kappa} g(x) \\ &:= \mu \circ e^{\frac{i}{2\kappa} P_k \wedge M_{i0} + i\theta^{kl} P_k \wedge P_l} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Las relaciones de conmutación para las coordenadas de este espacio deformado son las siguientes,

$$\begin{aligned} [x^0, x^a]_{\star_{\theta^{kl}, \kappa}} &= \frac{i}{\kappa} x^i \delta_k^a, \\ [x^a, x^b]_{\star_{\theta^{kl}, \kappa}} &= 2i\theta^{kl} (\delta_k^a \delta_l^b - \delta_l^a \delta_k^b) + \frac{i}{\kappa} x^0 (\delta_i^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_i^b). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Producto- $\star_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}$.

Los generadores de las r -matrices $r_{\theta^{0i}}, r_{\hat{\kappa}} \in U(\mathfrak{iso}(3, 1)) \otimes U(\mathfrak{iso}(3, 1))$,

$$r_{\theta^{0i}} = i\theta^{0i} P_0 \wedge P_i, \quad (5.66)$$

$$r_{\hat{\kappa}} = \frac{i}{2\hat{\kappa}} P_0 \wedge M_{kl}, \quad (5.67)$$

conmutan entre sí,

$$[P_0, M_{kl}] = [P_i, P_0] = [P_i, M_{kl}] = 0. \quad (5.68)$$

De aquí es posible definir el producto- $\star_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}} g(x) \\ &:= e^{\frac{i}{2\hat{\kappa}} P_0 \wedge M_{kl} + i\theta^{0i} P_0 \wedge P_i} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.69)$$

En el espacio deformado que induce este producto, se satisfacen las relaciones de conmutación,

$$[x^0, x^a]_{\star_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}} = \frac{i}{\hat{\kappa}} (\delta_l^a x^k - \delta_k^a x^l) + 2i\theta^{0i} \delta_i^a, \quad (5.70)$$

$$[x_a, x_b]_{\star_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}} = 0. \quad (5.71)$$

Producto- $\star_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}$.

Ya que los generadores de las matrices $r_{\theta^{0i}}, r_{\bar{\kappa}} \in U(\mathit{iso}(3, 1)) \otimes U(\mathit{iso}(3, 1))$,

$$r_{\theta^{0i}} = i\theta^{0i} P_0 \wedge P_i, \quad (5.72)$$

$$r_{\bar{\kappa}} = \frac{i}{2\bar{\kappa}} P_i \wedge M_{kl}, \quad (5.73)$$

conmutan entre sí, entonces es posible definir el producto- $\star_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}$ como composición de $\mathcal{F}_{\theta^{0i}}$ y $\mathcal{F}_{\bar{\kappa}}$,

$$\begin{aligned} \mu_{\star_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}}(f(x) \otimes g(x)) &= f(x) \star_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}} g(x) \\ &:= e^{\frac{i}{2\bar{\kappa}} P_i \wedge M_{kl} + i\theta^{0i} P_0 \wedge P_i} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Las relaciones de conmutación para las coordenadas de este espacio deformado, son las siguientes,

$$[x^0, x^a]_{\star_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}} = 2i\theta^{0i} \delta_i^a, \quad (5.75)$$

$$[x^a, x^b]_{\star_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}} = \frac{i}{\bar{\kappa}} \delta_i^b (\delta_k^a x^l - \delta_l^a x^k) + \frac{i}{\bar{\kappa}} \delta_i^a (\delta_l^b x^k - \delta_k^b x^l). \quad (5.76)$$

Como se puede ver a partir de este capítulo, el modificar el espacio donde se define una teoría, implica modificar el producto de la teoría. Pero el modificar este producto, trae como consecuencia que el álgebra de Hopf que describía la teoría conmutativa deje de ser compatible con dicha descripción. Es claro por lo anterior que una álgebra de Hopf, que describa la nueva teoría sobre un espacio no-conmutativo tiene que ser compatible con el nuevo producto. Obtener una descripción (álgebra de Hopf) no-conmutativa (producto deformado) a partir de una conmutativa (producto ordinario) no pareciera ser algo natural, sin embargo Drinfeld en 1986 demostró que esto era posible mediante un elemento denominado twist que satisficiera ciertas condiciones. En el siguiente capítulo se mostrara que este twist resultara ser el elemento \mathcal{F} , a partir del cual se construyeron los productos deformados de este capítulo. Para una descripción más detallada sobre este capítulo se recomienda revisar [120]-[122].

Capítulo 6

Grupos cuánticos.

Las álgebras universales envolventes cuánticas, aparecieron como resultado de investigaciones en los aspectos algebraicos de sistemas cuánticos integrables, específicamente en el marco del problema inverso de dispersión cuántica. El primer ejemplo fue hallado por Kulish y Reshetikhin y se denotó $U_q(sl(2))$ (q -deformación del álgebra $sl(s)$), pues estaba estrechamente ligado al álgebra universal envolvente del álgebra de Lie $sl(2)$. Rápidamente su construcción se generalizó y se encontraron nuevas estructuras algebraicas vistas como deformación de las álgebras universales envolventes de álgebras de Lie. Además se logró establecer que el lenguaje apropiado para describir estas nuevas estructuras era el de las álgebras de Hopf, que habían sido introducidas por Heinz Hopf en 1941 en sus trabajos sobre homología y cohomología de grupos topológicos. Al estudiar algebraicamente estas nuevas construcciones se encontró una estructura de álgebra de Hopf para $U_q(sl(2))$ que no es conmutativa. Este hecho generó un gran interés dentro de los algebraistas, quienes llevaban varios decenios estudiando este tipo de estructuras. En una conferencia en Berkeley (1986), Drinfel se refirió a estas estructuras como *grupos cuánticos* y el término se difundió rápidamente de manera informal. Aunque puede causar confusión por el hecho de que estas estructuras no son grupos sino un cierto tipo de álgebras de Hopf, las cuales son deformaciones no triviales de las álgebras Hopf envolventes de álgebras de Lie semisimples, o las álgebras de funciones regulares de los correspondientes grupos algebraicos.

Fue el mismo Drinfeld, quien demostró que se podían construir representaciones cuánticas a partir de álgebras universales envolventes conmutativas. Este procedimiento resultó sumamente poderoso, ya que para esto solo se requiere la existencia de un elemento invertible en el álgebra no deformada que satisfaga las propiedades de coasociatividad y counidad. Este elemento invertible se le denomina *twist* y al álgebra cuántica que surge de este procedimiento se le denomina, *deformación de Jordan*.

En este capítulo se presentarán diferentes técnicas de deformación algebraicas. Estas deformaciones recaerán sobre las álgebras $U(sl(2))$, $U(H(3,1))$ y $U(iso(3,1))$ que ya fueron estudiadas ampliamente en capítulos anteriores.

6.1. q -Deformación y \hbar -adic álgebra.

En esta sección se presentara primeramente el algebra de Hopf $U_q(sl(2))$. Esta algebra es la deformación por medio de un parámetro "q" del algebra $U(sl(2))$. Posteriormente se introducirá el algebra $U_{\hbar}(sl(2))$. Esta deformación en la literatura se denomina \hbar -adic, ya que las relaciones de conmutación para esta algebra vienen descritas en términos del desarrollo exponencial de uno de los generadores. Al final de la sección se mostrará que estas dos algebras son isomorfas y que tienden en el limite cuando sus parámetros se anulan, al algebra $U(sl(2))$.

Estas algebras fueron las primeras deformaciones que fueron reportadas en la literatura. La razón de incluirlas en este trabajo (además de la razón histórica) es que estas brindan una forma natural de introducir la noción de grupos cuánticos. Si se desea ahondar mas en el tema se recomiendan los trabajos [126]-[129].

6.1.1. Algebra de Hopf $U_q(sl(2))$.

Si q es un número complejo tal que $q \neq 0$ y $q^2 \neq 1$. Se denota por $U_q(sl_2)$ el algebra asociativa con unidad sobre \mathbb{C} con generadores E, F, K, K^{-1} que satisfacen las relaciones,

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad (6.1)$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (6.2)$$

Esta algebra con las relaciones,

$$\Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \quad \Delta(K) = K \otimes K, \quad (6.3)$$

$$S(K) = K^{-1}, \quad S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad (6.4)$$

$$\varepsilon(K) = 1, \quad \varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \quad (6.5)$$

forma un algebra de Hopf. La forma de mostrar esto es idéntico que en el caso anterior.

(a) Para mostrar que Δ define un morfismo,

$$\Delta(K)\Delta(K^{-1}) = \Delta(K^{-1})\Delta(K) = 1 \otimes 1, \quad (6.6)$$

$$\Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) = q^2\Delta(E), \quad (6.7)$$

$$\Delta(K)\Delta(F)\Delta(K^{-1}) = q^{-2}\Delta(F), \quad (6.8)$$

$$[\Delta(E), \Delta(F)] = \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}}. \quad (6.9)$$

Para (6.6),

$$\begin{aligned} \Delta(K)\Delta(K^{-1}) &= (K \otimes K)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\ &= KK^{-1} \otimes KK^{-1} \\ &= 1 \otimes 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Mientras que para (6.7),

$$\begin{aligned}
\Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) &= (K \otimes K)(1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\
&= 1 \otimes KEK^{-1} + KEK^{-1} \otimes K \\
&= q^2(1 \otimes E + E \otimes K) \\
&= q^2\Delta(E).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

La relación (6.8) se prueba de manera análoga a (6.7). Para (6.9),

$$\begin{aligned}
[\Delta(E), \Delta(F)] &= (1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes F + F \otimes 1) \\
&\quad - (K^{-1} \otimes F + F \otimes 1)(1 \otimes E + E \otimes K) \\
&= K^{-1} \otimes EF + F \otimes E + EK^{-1} \otimes KF + EF \otimes K \\
&\quad - K^{-1} \otimes FE - K^{-1}E \otimes FK - F \otimes E - FE \otimes K \\
&= K^{-1} \otimes [E, F] + [E, F] \otimes K \\
&= \frac{K^{-1} \otimes (K - K^{-1}) + (K - K^{-1}) \otimes K}{q - q^{-1}} \\
&= \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Ahora es posible probar el axioma de coasociatividad para cada uno de los generadores. Por un lado tenemos para K ,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(K) = (\Delta \otimes id)(K \otimes K) = \Delta(K) \otimes K = K \otimes K \otimes K, \tag{6.13}$$

mientras por otro,

$$(id \otimes \Delta)\Delta(K) = (id \otimes \Delta)(K \otimes K) = K \otimes \Delta(K) = K \otimes K \otimes K. \tag{6.14}$$

De (6.13) y (6.14) se tiene,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(K) = (id \otimes \Delta)\Delta(K). \tag{6.15}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para E por un lado,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(E) = (\Delta \otimes id)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes 1 \otimes E + 1 \otimes E \otimes K + E \otimes K \otimes K, \tag{6.16}$$

en tanto,

$$(id \otimes \Delta)\Delta(E) = (id \otimes \Delta)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes 1 \otimes E + 1 \otimes E \otimes K + E \otimes K \otimes K. \tag{6.17}$$

Por lo tanto de (6.16) y (6.17) se obtiene,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(E) = (id \otimes \Delta)\Delta(E). \tag{6.18}$$

La coasociatividad para K^{-1} y F se prueban de manera análoga a las de K y E respectivamente.

(b) Para probar que ε define un morfismo,

$$\varepsilon(K)\varepsilon(K^{-1}) = \varepsilon(K^{-1})\varepsilon(K) = 1, \tag{6.19}$$

$$\varepsilon(K)\varepsilon(E)\varepsilon(K^{-1}) = q^2\varepsilon(E), \tag{6.20}$$

$$\varepsilon(K)\varepsilon(F)\varepsilon(K^{-1}) = q^{-2}\varepsilon(F), \tag{6.21}$$

$$[\varepsilon(E), \varepsilon(F)] = \frac{\varepsilon(K) - \varepsilon(K^{-1})}{q - q^{-1}}. \tag{6.22}$$

Estas relaciones se prueban de forma muy sencilla teniendo en cuenta (6.5). Ahora es posible probar el axioma de counidad para cada uno de los generadores, en particular para E por una parte,

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta(E) = (\varepsilon \otimes id)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes E + \varepsilon(E) \otimes K = 1 \otimes E, \quad (6.23)$$

mientras por otra,

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta(E) = (id \otimes \varepsilon)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes \varepsilon(E) + E \otimes \varepsilon(K) = E \otimes 1. \quad (6.24)$$

De las relaciones (6.23) y (6.24) se satisface el axioma de counidad para E . La prueba para los otros generadores se realiza de forma similar.

(c) para revisar que S define un morfismo del algebra U_q en el algebra $U_q \otimes U_q$,

$$S(K^{-1})S(K) = S(K)S(K^{-1}) = 1, \quad (6.25)$$

$$S(K^{-1})S(E)S(K) = q^2S(E), \quad (6.26)$$

$$S(K^{-1})S(F)S(K) = q^{-2}S(F), \quad (6.27)$$

$$[S(E), S(F)] = \frac{S(K) - S(K^{-1})}{q - q^{-1}}. \quad (6.28)$$

Para (6.26) se tiene,

$$S(K^{-1})S(E)S(K) = -K(EK^{-1})K^{-1} = -q^2EK^{-1} = q^2S(E). \quad (6.29)$$

Mientras para (6.28),

$$\begin{aligned} [S(F), S(E)] &= KFEK^{-1} - EK^{-1}KF = [F, E] \\ &= \frac{K^{-1} - K}{q - q^{-1}} = \frac{S(K) - S(K^{-1})}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Las relaciones (6.25) y (6.27) se comprueban de forma análoga. Satisfaciendo lo anterior es posible comprobar el axioma de la antipoda. En particular para E se tiene por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(E) &= \mu(S \otimes id)(1 \otimes E + E \otimes K) \\ &= \mu(S(1) \otimes E + S(E) \otimes K) \\ &= \mu(1 \otimes E - EK^{-1} \otimes K) \\ &= E - EK^{-1}K = 0, \end{aligned} \quad (6.31)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(E) &= \mu(id \otimes S)(1 \otimes E + E \otimes K) \\ &= \mu(1 \otimes S(E) + E \otimes S(K)) \\ &= \mu(1 \otimes (-EK^{-1}) + E \otimes K^{-1}) \\ &= -EK^{-1} + EK^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

De (6.31) y (6.32) se sigue,

$$\mu(S \otimes id)\Delta(E) = \mu(id \otimes S)\Delta(E) = \varepsilon(E). \quad (6.33)$$

Por lo tanto se satisface el axioma de la antipoda para E . Para los otros generadores la comprobación es análoga. El algebra de Hopf obtenida a partir de lo anterior se denomina algebra cuántica q -deformada.

6.1.2. Algebra de Hopf $U_{\hbar}(sl(2))$.

Se denota por $U_{\hbar}(sl(2))$ el algebra \hbar -adic (algebra descrita en termino de desarrollo de potencias de \hbar) con generadores E, F y H que satisfacen las siguientes relaciones,

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad (6.34)$$

$$[E, F] = \frac{e^{\hbar H} - e^{-\hbar H}}{e^{\hbar} - e^{-\hbar}} = \frac{\sinh(\hbar H)}{\sinh(\hbar)}, \quad (6.35)$$

donde $e^{\hbar H}$ es la serie,

$$e^{\hbar H} = 1 + \hbar H + \frac{(\hbar H)^2}{2!} + \dots \quad (6.36)$$

Esta algebra universal envolvente contiene una estructura natural de algebra de Hopf, con los mapeos comultiplicación Δ , counidad ε y antipoda S definidos de la siguiente manera,

$$\Delta(E) = E \otimes e^{\hbar H} + 1 \otimes E, \quad (6.37)$$

$$\Delta(F) = F \otimes 1 + e^{-\hbar H} \otimes F, \quad (6.38)$$

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad (6.39)$$

$$\varepsilon(H) = \varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \quad (6.40)$$

$$S(H) = -H, \quad S(E) = -Ee^{-\hbar H}, \quad S(F) = -e^{\hbar H}F. \quad (6.41)$$

El \hbar -adic algebra de Hopf obtenida a partir de lo anterior se denomina algebra cuántica \hbar -adic.

6.1.3. Relación $U_q(sl(2))$ y $U_{\hbar}(sl(2))$ y limite clásico.

Las algebras deformadas $U_q(sl(2))$ y $U_{\hbar}(sl(2))$ no son independientes ya que las relaciones de una, implican las relaciones de la otra. De igualar $[E, F]$ para ambas algebras se sigue,

$$\frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} = \frac{e^{\hbar H} - e^{-\hbar H}}{e^{\hbar} - e^{-\hbar}} \Leftrightarrow K = e^{\hbar H}, q = e^{\hbar}. \quad (6.42)$$

teniendo esto en cuenta,

$$KEK^{-1} = e^{\hbar H} E e^{-\hbar H}. \quad (6.43)$$

Esta expresión puede desarrollarse a partir de la formula de Hadamar,

$$\begin{aligned} e^X Y e^{-X} &= e^{adX}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad(X)^n(Y) \\ &= Y + \frac{1}{1!}[X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3}[X, [X, [X, Y]]] + \dots \end{aligned} \quad (6.44)$$

Por lo tanto para (6.43),

$$KEK^{-1} = E + \frac{1}{1!}[\hbar H, E] + \frac{1}{2!}[\hbar H, [\hbar H, E]] + \frac{1}{3}[\hbar H, [\hbar H, [\hbar H, E]]] + \dots \quad (6.45)$$

De aquí,

$$KEK^{-1} = q^2E \Leftrightarrow [H, E] = 2E. \quad (6.46)$$

De la misma forma se puede mostrar que,

$$KFK^{-1} = q^{-2}F \Leftrightarrow [H, F] = -2F. \quad (6.47)$$

De las relaciones (6.42), (6.46) y (6.47) se sigue la equivalencia entre las algebras $U_q(sl(2))$ y $U_{\hbar}(sl(2))$, por lo cual comprobar que realmente $U_{\hbar}(sl(2))$ satisface las propiedades de algebra de Hopf se sigue de la sección anterior.

6.2. Deformación por medio de transformación de coordenadas.

En esta sección se presentaran las algebras deformadas de Heisenberg y Poincaré denotadas por $U_{\Theta}^{\Theta}(H(3, 1))$ y $U_{\Theta}^{\Theta}(iso(3, 1))$ respectivamente. Estas algebras se construirán a partir de representar los generadores X^{μ} y P_{ν} que satisfacen las relaciones de conmutación: $[X^{\mu}, X^{\nu}] = 0$, $[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$ y $[X^{\mu}, P_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}$ en términos de \hat{X}^{μ} y \hat{P}_{ν} cuyas relaciones son: $[\hat{X}^{\mu}, \hat{X}^{\nu}] = i\Theta^{\mu\nu}$, $[\hat{P}_{\mu}, \hat{P}_{\nu}] = i\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ y $[\hat{X}^{\mu}, \hat{P}_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}$. Aquí los parámetros de no-conmutatividad $\Theta^{\mu\nu}$ y $\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ están relacionados con la longitud de Plank l_p . El mapeo que permite pasar de una representación a otra se presenta explícitamente también aquí. Todo el desarrollo de esta sección es una propuesta original de este trabajo.

6.2.1. Algebra de Hopf $U_{\Theta}^{\Theta}(H(3, 1))$.

Si Θ es un tensor constante y antisimétrico, se denota por $U_{\Theta}^{\Theta}(H(3, 1))$ al algebra cuyos generadores \hat{X}^{μ} y \hat{P}_{ν} satisfacen las relaciones,

$$[\hat{X}^{\mu}, \hat{X}^{\nu}] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (6.48)$$

$$[\hat{P}_{\mu}, \hat{P}_{\nu}] = i\bar{\Theta}_{\mu\nu}, \quad (6.49)$$

$$[\hat{X}^{\mu}, \hat{P}_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}. \quad (6.50)$$

Esta algebra con las relaciones,

$$\Delta(\hat{X}^{\mu}) = \hat{X}^{\mu} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^{\mu}, \quad (6.51)$$

$$\Delta(\hat{P}_{\nu}) = \hat{P}_{\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{P}_{\nu}, \quad (6.52)$$

$$\Delta(\Theta^{\mu\nu}) = \Theta^{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \Theta^{\mu\nu}, \quad (6.53)$$

$$\Delta(\bar{\Theta}_{\mu\nu}) = \bar{\Theta}_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{\Theta}_{\mu\nu}, \quad (6.54)$$

$$\Delta(\delta^{\mu}_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu} \otimes 1 + 1 \otimes \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (6.55)$$

$$\Delta(I) = 1 \otimes 1, \quad (6.56)$$

$$\varepsilon(\hat{X}^{\mu}) = \varepsilon(\hat{P}_{\nu}) = \varepsilon(\Theta^{\mu\nu}) = \varepsilon(\bar{\Theta}_{\mu\nu}) = \varepsilon(\delta^{\mu}_{\nu}) = 0, \quad (6.57)$$

$$S(\hat{X}^{\mu}) = -\hat{X}^{\mu}, S(\hat{P}_{\nu}) = -\hat{P}_{\nu}, S(\Theta^{\mu\nu}) = \Theta^{\mu\nu}, S(\bar{\Theta}_{\mu\nu}) = \bar{\Theta}_{\mu\nu}, S(\delta^{\mu}_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (6.58)$$

forma un algebra de Hopf.

a) Para mostrar que Δ define un morfismo se tienen que satisfacer las relaciones,

$$[\Delta(\hat{X}^\mu), \Delta(\hat{X}^\nu)] = i\Delta(\Theta^{\mu\nu}), \quad (6.59)$$

$$[\Delta(\hat{P}_\mu), \Delta(\hat{P}_\nu)] = i\Delta(\bar{\Theta}_{\mu\nu}), \quad (6.60)$$

$$[\Delta(\hat{X}^\mu), \Delta(\hat{P}_\nu)] = i\Delta(\delta_\nu^\mu). \quad (6.61)$$

Para (6.59),

$$\begin{aligned} [\Delta(\hat{X}^\mu), \Delta(\hat{X}^\nu)] &= (\hat{X}^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\mu)(\hat{X}^\nu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\nu) \\ &\quad - (\hat{X}^\nu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\nu)(\hat{X}^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\mu) \\ &= \hat{X}^\mu \hat{X}^\nu \otimes 1 + \hat{X}^\mu \otimes \hat{X}^\nu + \hat{X}^\nu \otimes \hat{X}^\mu + 1 \otimes \hat{X}^\mu \hat{X}^\nu \\ &\quad - \hat{X}^\nu \hat{X}^\mu \otimes 1 - \hat{X}^\nu \otimes \hat{X}^\mu - \hat{X}^\mu \otimes \hat{X}^\nu - 1 \otimes \hat{X}^\nu \hat{X}^\mu \\ &= [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] \otimes 1 + 1 \otimes [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = i\Delta(\Theta^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Las relaciones (6.60) y (6.61) se muestran de forma análoga.

Para mostrar que el generador \hat{P}_ν satisface el axioma de coasociatividad, primeramente por un lado,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(\hat{P}_\nu) &= (\Delta \otimes id)(\hat{P}_\nu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{P}_\nu) \\ &= \hat{P}_\nu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \hat{P}_\nu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \hat{P}_\nu, \end{aligned} \quad (6.63)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\Delta(\hat{P}_\nu) &= (id \otimes \Delta)(\hat{P}_\nu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{P}_\nu) \\ &= \hat{P}_\nu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \hat{P}_\nu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \hat{P}_\nu. \end{aligned} \quad (6.64)$$

De (6.63) y (6.64) se satisface la condición de coasociatividad para \hat{P}_ν . Para mostrar la coasociatividad de \hat{X}^μ el procedimiento es el mismo.

b) para mostrar que ε define un morfismo se tiene que satisfacer,

$$[\varepsilon(\hat{X}^\mu), \varepsilon(\hat{X}^\nu)] = i\varepsilon(\Theta^{\mu\nu}), \quad (6.65)$$

$$[\varepsilon(\hat{P}_\mu), \varepsilon(\hat{P}_\nu)] = i\varepsilon(\bar{\Theta}_{\mu\nu}), \quad (6.66)$$

$$[\varepsilon(\hat{X}^\mu), \varepsilon(\hat{P}_\nu)] = i\varepsilon(\delta_\nu^\mu). \quad (6.67)$$

Estas relaciones se satisfacen trivialmente ya que la counidad de los generadores son idénticamente cero.

Para mostrar el axioma de counidad para \hat{X}^μ por un lado,

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta(\hat{X}_\mu) = (\varepsilon \otimes id)(\hat{X}_\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}_\mu) = \varepsilon(\hat{X}_\mu) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes \hat{X}_\mu = 1 \otimes \hat{X}_\mu, \quad (6.68)$$

por otro lado,

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta(\hat{X}_\mu) = (id \otimes \varepsilon)(\hat{X}_\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}_\mu) = \hat{X}_\mu \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(\hat{X}_\mu) = \hat{X}_\mu \otimes 1. \quad (6.69)$$

A partir de (6.68) y (6.69) queda satisfecho el axioma de counidad para \hat{X}_μ . El procedimiento para mostrar este axioma para \hat{P}_ν es análogo.

c) Antes de mostrar que esta algebra satisface el axioma de la antipoda es necesario mostrar que S define un morfismo,

$$[S(\hat{X}^\mu), S(\hat{X}^\nu)] = iS(\Theta^{\mu\nu}), \quad (6.70)$$

$$[S(\hat{P}_\mu), S(\hat{P}_\nu)] = iS(\bar{\Theta}_{\mu\nu}), \quad (6.71)$$

$$[S(\hat{X}^\mu), S(\hat{P}_\nu)] = iS(\delta_\nu^\mu). \quad (6.72)$$

Para (6.71),

$$[S(\hat{P}_\mu), S(\hat{P}_\nu)] = [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = \bar{\Theta}_{\mu\nu} = \Delta(\bar{\Theta}_{\mu\nu}). \quad (6.73)$$

Las relaciones (6.70) y (6.72) se muestran de forma análoga.

Para mostrar el axioma de counidad para \hat{X}^μ por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(\hat{X}^\mu) &= \mu((S \otimes id)(\hat{X}^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\mu)) \\ &= \mu(S(\hat{X}^\mu) \otimes 1 + S(1) \otimes \hat{X}^\mu) \\ &= -\hat{X}^\mu + \hat{X}^\mu = 0 \end{aligned} \quad (6.74)$$

en tanto,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(\hat{X}^\mu) &= \mu((id \otimes S)(\hat{X}^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\mu)) \\ &= \mu(\hat{X}^\mu \otimes S(1) + 1 \otimes S(\hat{X}^\mu)) \\ &= \hat{X}^\mu - \hat{X}^\mu = 0. \end{aligned} \quad (6.75)$$

De (6.74) y (6.75) se satisface el axioma de la antipoda para \hat{X}^μ . Este axioma demuestra de forma análoga para \hat{P}_ν .

En particular cuando $\bar{\Theta}_{\mu\nu} = 0$ se obtiene el algebra de Hopf $U^\Theta(H(3,1))$, mientras que cuando $\Theta^{\mu\nu} = 0$ se obtiene el algebra de Hopf $U_{\bar{\Theta}}(H(3,1))$.

6.2.2. Relación entre $U(H(3,1))$ y $U_{\bar{\Theta}}(H(3,1))$.

En el espacio fase n -dimensional las coordenadas y los momentos en mecánica cuántica, satisfacen las relaciones de conmutación,

$$\begin{aligned} [X^\mu, X^\nu] &= 0, \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [X^\mu, P_\nu] &= i\hbar\delta^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (6.76)$$

A escalas de longitud de Plank l_p se espera que estas relaciones se modifiquen. Si se denotan los operadores de coordenadas y momentos en un espacio no-conmutativo como \hat{X} y \hat{P} respectivamente, entonces \hat{X}^μ y \hat{P}_μ estarán sujetas a satisfacer,

$$\begin{aligned} [\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] &= i\hbar\Theta^{\mu\nu}, \\ [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] &= i\hbar\bar{\Theta}_{\mu\nu}, \\ [\hat{X}^\mu, \hat{P}_\nu] &= i\hbar\delta^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (6.77)$$

donde $\{\Theta^{\mu\nu}\}$ y $\{\bar{\Theta}_{\mu\nu}\}$ son matrices totalmente antisimétricas y sus coeficientes tendrán dependencia de l_p . De (6.76) y (6.77) es posible estudiar la representación no-conmutativa \hat{X} y \hat{P} en términos de X y P , partiendo que las primeras tienen la forma,

$$\begin{aligned} \hat{X}^\mu &= a_\nu^\mu X^\nu + b^{\mu\nu} P_\nu, \\ \hat{P}_\mu &= c_{\mu\nu} X^\nu + d_\mu^\nu P_\nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Esto en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, \quad (6.79)$$

donde M es la transformación de cambio de base. Esta transformación tiene como entradas: $A = \{a_\nu^\mu\}$, $B = \{b^{\mu\nu}\}$, $C = \{c_{\mu\nu}\}$ y $D = \{d_\mu^\nu\}$ que son matrices de $n \times n$. Al introducir (6.78) en (6.77) y usando las relaciones (6.76) se obtiene,

$$\begin{aligned} AB^T - BA^T &= \Theta, \\ CD^T - DC^T &= \bar{\Theta}, \\ AD^T - BC^T &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad y el superíndice "T" denota la transposición de la matriz. Si se exige que las matrices A y D , sea proporcionales a la identidad. Al denotar con α y β a estos escalamiento, entonces se obtienen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \alpha(B^T - B) &= \Theta, \\ \beta(C - C^T) &= \bar{\Theta}, \\ BC^T &= (\alpha\beta - 1)\mathbf{1}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

De las dos primeras ecuaciones se puede ver que si B y C son antisimétricas, entonces el sistema tiene solución explícita, en efecto si se asume que B y C^T conmutan, entonces la tercera ecuación se satisface para el caso en que B y C sean antisimétricas o simétricas. Para el caso de que ambas sean simétricas, $\Theta = \bar{\Theta} = 0$, es decir el espacio es conmutativo (caso trivial). Para el caso en que B y C sean antisimétricas se obtiene,

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2\alpha}\Theta, \\ C &= \frac{1}{2\beta}\bar{\Theta}, \end{aligned} \quad (6.82)$$

donde α y β son constantes diferentes de cero. De (6.81) y (6.82) se obtiene la relación,

$$\Theta\bar{\Theta} = 4\alpha\beta(\alpha\beta - 1) \cdot \mathbf{1}. \quad (6.83)$$

Por lo tanto la representación matricial de (\hat{X}, \hat{P}) , en el espacio conmutativo,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \mathbf{1} & -\frac{1}{2\alpha}\Theta \\ \frac{1}{2\beta}\bar{\Theta} & \beta \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (6.84)$$

De las relaciones (6.78) y (6.84) se obtiene finalmente,

$$\hat{X}^\mu = \alpha X^\mu - \frac{i}{2\alpha}\Theta^{\mu\nu} P_\nu, \quad (6.85)$$

$$\hat{P}_\mu = \beta P_\mu + \frac{i}{2\beta}\bar{\Theta}_{\mu\nu} x^\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (6.86)$$

Por otro lado, para el caso de que $\alpha = \beta = 1$, corresponde $\bar{\Theta} = 0$, es decir el caso en que solo las coordenadas no-conmutan. La matriz de transformación inversa M^{-1} es un objeto que satisface la relación,

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot \mathbf{1} & -\frac{1}{2\alpha}\Theta \\ \frac{1}{2\beta}\bar{\Theta} & \beta \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (6.87)$$

De este sistema y teniendo en cuenta (6.83), se obtiene la representación matricial para (X, P) , en el espacio no-conmutativo,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\alpha\beta-1}\mathbf{1} & \frac{\Theta}{2\alpha(2\alpha\beta-1)} \\ -\frac{\bar{\Theta}}{2\beta(2\alpha\beta-1)} & \frac{\alpha}{2\alpha\beta-1}\mathbf{1} \end{pmatrix}_{2n \times 2n}. \quad (6.88)$$

De aquí,

$$X^\mu = \frac{\beta}{\vartheta} \hat{X}^\mu + \frac{i\Theta^{\mu\nu}}{2\alpha\vartheta} \hat{P}_\nu \quad (6.89)$$

$$P_\mu = \frac{\alpha}{\vartheta} \hat{P}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\nu}}{2\beta\vartheta} \hat{X}^\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n \quad (6.90)$$

con

$$\vartheta = 2\alpha\beta - 1. \quad (6.91)$$

6.2.3. Algebra de Hopf $U_{\bar{\Theta}}^{\Theta}(iso(3, 1))$.

A partir de (6.89) y (6.90) es posible referir los generadores (3.47) y (3.48) a un espacio un espacio no-conmutativo (\hat{X}, \hat{P}) . De aquí,

$$\mathfrak{P}_\mu = \frac{\alpha}{\vartheta} \hat{P}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\nu}}{2\beta\vartheta} \hat{X}^\nu, \quad (6.92)$$

en tanto,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\tau\mu} &= i \left\{ \eta_{\tau\nu} \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\nu - \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\rho \right) \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\sigma \right) \right\} - i \left\{ \tau \leftrightarrow \mu \right\} \\ &= \frac{i\alpha\beta}{\vartheta^2} \hat{M}_{\tau\mu} - \frac{\Theta^{\nu\rho}}{2\vartheta^2} \left(\eta_{\tau\nu} \hat{P}_\rho \hat{P}_\mu - \eta_{\mu\nu} \hat{P}_\rho \hat{P}_\tau \right) + \left(\frac{\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\nu} - \frac{\bar{\Theta}_{\tau\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\mu\nu} \right) \hat{X}^\nu \hat{X}^\sigma, \end{aligned} \quad (6.93)$$

donde se ha definido,

$$\hat{M}_{\tau\mu} := i(\hat{X}_\tau \hat{P}_\mu - \hat{X}_\mu \hat{P}_\tau). \quad (6.94)$$

Estos generadores satisfacen las mismas relaciones de conmutación que en el caso no-deformado $U(iso(3, 1))$,

$$[\mathfrak{P}_\tau, \mathfrak{P}_\mu] = 0, \quad (6.95)$$

$$[\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{P}_\alpha] = \eta_{\tau\alpha} \mathfrak{P}_\mu - \eta_{\mu\alpha} \mathfrak{P}_\tau, \quad (6.96)$$

$$[\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{M}_{\kappa\xi}] = -\eta_{\tau\xi} \mathfrak{M}_{\mu\kappa} + \eta_{\mu\kappa} \mathfrak{M}_{\tau\xi} + \eta_{\tau\kappa} \mathfrak{M}_{\mu\xi} - \eta_{\mu\xi} \mathfrak{M}_{\tau\kappa}. \quad (6.97)$$

Para la relación (6.97),

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{M}_{\kappa\xi}] &= - \left[\eta_{\tau\nu} \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\nu - \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\rho \right) \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\sigma \right), \right. \\ &\quad \left. \eta_{\kappa\phi} \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\phi - \frac{i\Theta^{\phi\varphi}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\varphi \right) \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\xi - \frac{i\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\eta \right) \right] \\ &\quad + \left[\cdot, \kappa \leftrightarrow \xi \right] + \left[\tau \leftrightarrow \mu, \cdot \right] - \left[\tau \leftrightarrow \mu, \kappa \leftrightarrow \xi \right]. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Este conmutador se puede escribir de la forma,

$$[\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{M}_{\kappa\xi}] = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + (\kappa \leftrightarrow \xi) + (\tau \leftrightarrow \mu) - (\kappa, \tau \rightarrow \xi, \mu), \quad (6.99)$$

con,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\phi} \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\nu - \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\rho \right) \left[\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\sigma, \frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\phi - \frac{i\Theta^{\phi\varphi}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\varphi \right] \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\xi - \frac{i\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\eta \right), \\
A_2 &= -\eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\phi} \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\nu - \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\rho \right) \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\phi - \frac{i\Theta^{\phi\varphi}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\varphi \right) \left[\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\xi - \frac{i\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\eta, \frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\sigma \right], \\
A_3 &= -\eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\phi} \left(\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\phi - \frac{i\Theta^{\phi\varphi}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\varphi \right) \left[\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\xi - \frac{i\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\eta, \frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\nu - \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\rho \right] \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\sigma \right), \\
A_4 &= \eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\phi} \left[\frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\nu - \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\rho, \frac{\beta}{\vartheta} \hat{x}^\phi - \frac{i\Theta^{\phi\varphi}}{2\alpha\vartheta} \hat{\partial}_\varphi \right] \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\xi - \frac{i\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\eta \right) \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\partial}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\beta\vartheta} \hat{x}^\sigma \right).
\end{aligned}$$

De las relaciones de conmutación (6.77) y de reducir términos, tanto A_2 como A_4 se anulan, mientras que para A_1 y A_3 ,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\alpha\beta}{\vartheta^2} \eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\mu} \hat{X}^\nu \hat{P}_\xi + \frac{i\Theta^{\nu\rho}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\mu} \hat{P}_\rho \hat{P}_\xi \\
&\quad - \frac{i\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\mu} \hat{X}^\nu \hat{X}^\eta + \frac{\Theta^{\nu\rho}\bar{\Theta}_{\xi\eta}}{4\alpha\beta\vartheta^2} \eta_{\tau\nu}\eta_{\kappa\mu} \hat{P}_\rho \hat{X}^\eta, \quad (6.100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\frac{\alpha\beta}{\vartheta^2} \eta_{\tau\xi}\eta_{\kappa\phi} \hat{X}^\phi \hat{P}_\mu - \frac{i\Theta^{\phi\varphi}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\xi}\eta_{\kappa\phi} \hat{P}_\varphi \hat{P}_\mu \\
&\quad + \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\xi}\eta_{\kappa\phi} \hat{X}^\phi \hat{X}^\sigma - \frac{\Theta^{\phi\varphi}\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{4\alpha\beta\vartheta^2} \eta_{\tau\xi}\eta_{\kappa\phi} \hat{P}_\varphi \hat{X}^\sigma. \quad (6.101)
\end{aligned}$$

Insertando (6.100) y (6.101) en (6.99) se obtiene,

$$[\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{M}_{\kappa\xi}] = -\eta_{\tau\xi}\mathfrak{M}_{\mu\kappa} + \eta_{\mu\kappa}\mathfrak{M}_{\tau\xi} + \eta_{\tau\kappa}\mathfrak{M}_{\mu\xi} - \eta_{\mu\xi}\mathfrak{M}_{\tau\kappa}. \quad (6.102)$$

Tanto (6.95) como (6.96), se comprueban siguiendo el mismo procedimiento. Dado que se satisfacen las relaciones (6.95), (6.96) y (6.97) los generadores \mathfrak{P}_μ y $\mathfrak{M}_{\tau\mu}$ forman un algebra de Lie y por consiguiente tienen asociados coproductos simétricos. Para \mathfrak{P}_μ ,

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathfrak{P}_\mu) &= \mathfrak{P}_\mu \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{P}_\mu \\
&= \frac{\alpha}{\vartheta} (\hat{P}_\mu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{P}_\mu) - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\nu}}{2\beta\vartheta} (\hat{X}^\nu \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\nu), \quad (6.103)
\end{aligned}$$

mientras que para $\mathfrak{M}_{\tau\mu}$,

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) &= \mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu} \\
&= \frac{\alpha\beta}{\vartheta^2} (\hat{M}_{\tau\mu} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{M}_{\tau\mu}) \\
&\quad - \frac{\Theta^{\nu\rho}}{2\vartheta^2} \left((\eta_{\tau\nu}\hat{P}_\rho\hat{P}_\mu - \eta_{\mu\nu}\hat{P}_\rho\hat{P}_\tau) \otimes 1 + 1 \otimes (\eta_{\tau\nu}\hat{P}_\rho\hat{P}_\mu - \eta_{\mu\nu}\hat{P}_\rho\hat{P}_\tau) \right) \\
&\quad + \left(\frac{\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\nu} - \frac{\bar{\Theta}_{\tau\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\mu\nu} \right) (\hat{X}^\nu \hat{X}^\sigma \otimes 1 + 1 \otimes \hat{X}^\nu \hat{X}^\sigma). \quad (6.104)
\end{aligned}$$

Al definir las counidades para esta algebra como,

$$\varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) = \varepsilon(\mathfrak{P}_\tau) = 0, \quad \varepsilon(1) = 1, \quad (6.105)$$

En tanto las antipodas,

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{P}_\mu) &= -\mathfrak{P}_\mu \\ &= -\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{P}_\mu + \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\nu}}{2\beta\vartheta} \hat{X}^\nu, \end{aligned} \quad (6.106)$$

y

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) &= -\mathfrak{M}_{\tau\mu} \\ &= -\frac{i\alpha\beta}{\vartheta^2} \hat{M}_{\tau\mu} + \frac{\Theta^{\nu\rho}}{2\vartheta^2} (\eta_{\tau\nu} \hat{P}_\rho \hat{P}_\mu - \eta_{\mu\nu} \hat{P}_\rho \hat{P}_\tau) \\ &\quad - \left(\frac{\bar{\Theta}_{\mu\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\tau\nu} - \frac{\bar{\Theta}_{\tau\sigma}}{2\vartheta^2} \eta_{\mu\nu} \right) \hat{X}^\nu \hat{X}^\sigma, \end{aligned} \quad (6.107)$$

entonces con esta estructura el algebra $U_{\bar{\Theta}}^{\Theta}(iso(3,1))$ adquiere una estructura de Hopf.

a) El coproducto Δ define un morfismo, es decir:

$$[\Delta(\mathfrak{P}_\tau), \Delta(\mathfrak{P}_\mu)] = 0, \quad (6.108)$$

$$[\Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), \Delta(\mathfrak{P}_\alpha)] = \eta_{\tau\alpha} \Delta(\mathfrak{P}_\mu) - \eta_{\mu\alpha} \Delta(\mathfrak{P}_\tau), \quad (6.109)$$

$$[\Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), \Delta(\mathfrak{M}_{\kappa\xi})] = -\eta_{\tau\xi} \Delta(\mathfrak{M}_{\mu\kappa}) + \eta_{\mu\kappa} \Delta(\mathfrak{M}_{\tau\xi}) + \eta_{\tau\kappa} \Delta(\mathfrak{M}_{\mu\xi}) - \eta_{\mu\xi} \Delta(\mathfrak{M}_{\tau\kappa}) \quad (6.110)$$

Para (6.110),

$$\begin{aligned} [\Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), \Delta(\mathfrak{M}_{\kappa\xi})] &= (\mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu})(\mathfrak{M}_{\kappa\xi} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\kappa\xi}) \\ &\quad - (\mathfrak{M}_{\kappa\xi} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\kappa\xi})(\mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu}) \\ &= [\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{M}_{\kappa\xi}] \otimes 1 + 1 \otimes [\mathfrak{M}_{\tau\mu}, \mathfrak{M}_{\kappa\xi}] \\ &= -\eta_{\tau\xi} \Delta(\mathfrak{M}_{\mu\kappa}) + \eta_{\mu\kappa} \Delta(\mathfrak{M}_{\tau\xi}) + \eta_{\tau\kappa} \Delta(\mathfrak{M}_{\mu\xi}) - \eta_{\mu\xi} \Delta(\mathfrak{M}_{\tau\kappa}) \quad (6.111) \end{aligned}$$

Las relaciones (6.108) y (6.109) se comprueban de forma análoga.

Para el axioma de coasociatividad de $\mathfrak{M}_{\tau\mu}$ por un lado,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id)\Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) &= \Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu} \\ &= \mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu}, \end{aligned} \quad (6.112)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)\Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) &= \mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes \Delta(1) + 1 \otimes \Delta(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) \\ &= \mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathfrak{M}_{\tau\mu}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

De (6.112) y (6.113) se satisface la coasociatividad para $\mathfrak{M}_{\tau\mu}$. De forma análoga se puede mostrar este axioma para \mathfrak{P}_μ .

b) El mapeo ε define un morfismo,

$$[\varepsilon(\mathfrak{P}_\tau), \varepsilon(\mathfrak{P}_\mu)] = 0, \quad (6.114)$$

$$[\varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), \varepsilon(\mathfrak{P}_\alpha)] = \eta_{\tau\alpha} \varepsilon(\mathfrak{P}_\mu) - \eta_{\mu\alpha} \varepsilon(\mathfrak{P}_\tau), \quad (6.115)$$

$$[\varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), \varepsilon(\mathfrak{M}_{\kappa\xi})] = -\eta_{\tau\xi} \varepsilon(\mathfrak{M}_{\mu\kappa}) + \eta_{\mu\kappa} \varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\xi}) + \eta_{\tau\kappa} \varepsilon(\mathfrak{M}_{\mu\xi}) - \eta_{\mu\xi} \varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\kappa}) \quad (6.116)$$

Las relaciones (6.114), (6.115) y (6.116) se satisfacen trivialmente ya que para esta algebra $\varepsilon(\mathfrak{P}_\tau) = \varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\mu}) = 0$.

Para revisar que se satisface el axioma de coasociatividad para \mathfrak{P}_τ primero por un lado,

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta(\mathfrak{P}_\tau) = \varepsilon(\mathfrak{P}_\tau) \otimes 1 + \varepsilon(1) \otimes \mathfrak{P}_\tau = 1 \otimes \mathfrak{P}_\tau, \quad (6.117)$$

mientras,

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta(\mathfrak{P}_\tau) = \mathfrak{P}_\tau \otimes \varepsilon(1) + 1 \otimes \varepsilon(\mathfrak{P}_\tau) = \mathfrak{P}_\tau \otimes 1. \quad (6.118)$$

De las relaciones (6.117) y (6.118) se satisface este axioma para \mathfrak{P}_τ . El procedimiento para mostrar que $\varepsilon(\mathfrak{M}_{\tau\mu})$ también satisface la coasociatividad es análoga.

c) Si S define un morfismo se tienen que satisfacer,

$$[S(\mathfrak{P}_\tau), S(\mathfrak{P}_\mu)] = 0, \quad (6.119)$$

$$[S(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), S(\mathfrak{P}_\alpha)] = \eta_{\tau\alpha} S(\mathfrak{P}_\mu) - \eta_{\mu\alpha} S(\mathfrak{P}_\tau), \quad (6.120)$$

$$[S(\mathfrak{M}_{\tau\mu}), S(\mathfrak{M}_{\kappa\xi})] = -\eta_{\tau\xi} S(\mathfrak{M}_{\mu\kappa}) + \eta_{\mu\kappa} S(\mathfrak{M}_{\tau\xi}) + \eta_{\tau\kappa} S(\mathfrak{M}_{\mu\xi}) - \eta_{\mu\xi} S(\mathfrak{M}_{\tau\kappa}) \quad (6.121)$$

Para (6.121),

$$\begin{aligned} [S(\mathfrak{M}_{\mu\nu}), S(\mathfrak{M}_{\alpha\beta})] &= [\mathfrak{M}_{\nu\mu}, \mathfrak{M}_{\beta\alpha}] \\ &= \eta_{\mu\beta} \mathfrak{M}_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta} \mathfrak{M}_{\mu\alpha} + \eta_{\nu\alpha} \mathfrak{M}_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha} \mathfrak{M}_{\nu\beta} \\ &= \eta_{\nu\alpha} S(\mathfrak{M}_{\mu\beta}) - \eta_{\mu\alpha} S(\mathfrak{M}_{\nu\beta}) + \eta_{\mu\beta} S(\mathfrak{M}_{\nu\alpha}) - \eta_{\nu\beta} S(\mathfrak{M}_{\mu\alpha}) \end{aligned} \quad (6.122)$$

Las relaciones (6.119) y (6.120) se corroboran de forma análoga.

Para mostrar que se satisface el axioma de la antipoda para \mathfrak{P}_ρ por un lado,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(\mathfrak{P}_\rho) &= \mu(S \otimes id)(\mathfrak{P}_\rho \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{P}_\rho) \\ &= \mu(S(\mathfrak{P}_\rho) \otimes 1 + S(1) \otimes \mathfrak{P}_\rho) \\ &= \mu(-\mathfrak{P}_\rho \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{P}_\rho) \\ &= -\mathfrak{P}_\rho + \mathfrak{P}_\rho = 0, \end{aligned} \quad (6.123)$$

Por otro,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(\mathfrak{P}_\rho) &= \mu(id \otimes S)(\mathfrak{P}_\rho \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{P}_\rho) \\ &= \mu(\mathfrak{P}_\rho \otimes S(1) + 1 \otimes S(\mathfrak{P}_\rho)) \\ &= \mu(\mathfrak{P}_\rho \otimes 1 + 1 \otimes (-\mathfrak{P}_\rho)) \\ &= \mathfrak{P}_\rho - \mathfrak{P}_\rho = 0. \end{aligned} \quad (6.124)$$

De (6.123) y (6.124) se sigue,

$$\mu(S \otimes id)\Delta(\mathfrak{P}_\rho) = \mu(id \otimes S)\Delta(\mathfrak{P}_\rho). \quad (6.125)$$

Para mostrar que $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ el proceder es similar.

De lo anterior es claro que los generadores \mathfrak{P}_ρ y $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ forman un algebra de Hopf denominada $U_{\ominus}^{\ominus}(iso(3,1))$

En particular cuando $\ominus_{\mu\nu} = 0$ se obtiene el algebra de Hopf $U^{\ominus}(isu(3,1))$, mientras que cuando $\ominus^{\mu\nu} = 0$ se obtiene el algebra de Hopf $U_{\ominus}(iso(3,1))$.

6.3. Deformación por medio de mapeos de Weyl.

En esta sección se presentara el algebra $U_\kappa(iso(3,1))$. Esta algebra es la representación de $U(iso(3,1))$ sobre un espacio no-conmutativo muy particular. En este estudio se asume que el espacio (campo escalar de funciones) es el mismo que en el caso usual (conmutativo), y la no-conmutatividad se introduce aquí por medio de un producto- \star muy particular. Esta representación permite introducir una longitud característica minima a diferencia de la representación no deformada.

6.3.1. Doble relatividad especial.

Doble relatividad especial (DSR) es una teoría relativista en donde las transformaciones entre observadores inerciales están caracterizadas por dos escalas independientes, la velocidad de la luz y la longitud de Planck. Hay muchos argumentos para pensar que la longitud de Planck l_p juega un papel crucial en el entendimiento de la gravedad cuántica. En diferentes escenarios, como por ejemplo gravedad cuántica de lazos se sugiere que la longitud de Planck actúa como umbral de los efectos cuánticos en el espacio-tiempo, mas allá de la cual la descripción del espacio tiempo pierde sentido. Así parece que el valor de l_p debe ser el mismo en todos los marcos de referencia inerciales. Esto entra en conflicto con la relatividad general de Einstein. DSR, es una alternativa para resolver este problema. Hay muchos modelos para DSR, en esta sección solo se estudiara el trabajo de Amelino-Camelia, quien fue el pionero en estos estudios. Su planteamiento para evitar la violación de la relatividad especial consiste en modificar los postulados de Einstein, de la siguiente manera:

1. Las leyes de la física involucran dos cantidades fundamentales, la velocidad de la luz c y la longitud de planck l_p .
2. Cada observador puede establecer el valor de l_p (el mismo para todos los observadores inerciales) y esta determinado por la relación de dispersion del fotón, que toma la forma $E^2 - c^2p^2 + f(E, p, l_p) = 0$, donde f es la misma para todos los observadores inerciales y además $f(E, p, l_p) \simeq l_p c p^2 E$.

En este escenario y partiendo de evidencia experimental para la relación de dispersion del fotón,

$$2E^2 \left[\cosh\left(\frac{E}{E_p}\right) - \cosh\left(\frac{m}{E_p}\right) \right] = \bar{p}^2 e^{E/E_p}, \quad (6.126)$$

la estructura del espacio-tiempo sufre modificaciones. Ahora las coordenadas espaciales de la partícula (entiéndase las variables del espacio fase), satisfacen las siguientes relaciones de conmutación,

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0, \hat{x}_i] &= -\frac{1}{\kappa} \hat{x}_i, \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Mientras el espacio de momentos deja de ser una variedad plana \mathbb{R}^3 , ahora es un espacio máximamente simétrico de curvatura constante $-\kappa$ (anti de Sitter).

Este espacio no-conmutativo es denominado κ -Minkowski. En este marco los generadores del grupo de Poincaré deben ser modificados acorde a las anteriores restricciones.

6.3.2. Espacio κ -Minkowski

Para modificar la estructura de los generadores del algebra de Poincaré en el espacio κ -Minkowski, se postula que estos tienen la misma forma y se averigua como estos actúan sobre funciones restringidas a las relaciones (6.127). El punto de partida será escribir las funciones de este espacio en forma exponencial y donde las coordenadas de las funciones del argumento satisfagan las relaciones mencionadas a través del producto- \star . Esto último se logra a partir de la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH). Esta fórmula establece el producto de exponenciales cuyos argumentos son funciones que satisfacen la relación,

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i c_{\mu\nu}^\rho \hat{x}_\rho. \quad (6.128)$$

De esta manera,

$$e^{ik^\mu \hat{x}_\mu} e^{ip^\nu \hat{x}_\nu} = e^{i\gamma^\nu(k,p)\hat{x}_\nu}, \quad (6.129)$$

con,

$$\gamma(k,p)^\mu = k^\mu + p^\mu + \frac{1}{2} c_{\delta\nu}^\mu k^\delta p^\nu + \dots \quad (6.130)$$

Esta fórmula CBH está escrita en términos de funciones exponenciales $e^{ik\hat{x}}$, que representan extensiones de las funciones exponenciales conmutativas e^{ikx} para un espacio no-conmutativo.

La relación (6.129) genera un producto asociativo- $\star_{c_{\mu\nu}^\rho}$ al asumir que el mapeo de Weyl de una función $f(x)$ puede ser escrito en términos de exponenciales $e^{ik\hat{x}}$,

$$\Omega_{c_{\mu\nu}^\rho}(f) = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int \tilde{f}(k) e^{ik\hat{x}} d^n k. \quad (6.131)$$

De esta definición la función exponencial conmutativa e^{ikx} es mapeada en la exponencial no-conmutativa $e^{ik\hat{x}}$,

$$\Omega_{c_{\mu\nu}^\rho}(e^{ikx}) = \int \tilde{\delta}(k) e^{ik\hat{x}} d^n k = e^{ik\hat{x}}. \quad (6.132)$$

Por lo tanto se tiene definido el producto- $\star_{c_{\mu\nu}^\rho}$ correspondiente al mapeo $\Omega_{c_{\mu\nu}^\rho}$,

$$f \star_{c_{\mu\nu}^\rho} g(x) = \Omega_{c_{\mu\nu}^\rho}^{-1} \left(\Omega_{c_{\mu\nu}^\rho}(f) \Omega_{c_{\mu\nu}^\rho}(g) \right). \quad (6.133)$$

Para el caso particular que (6.128) sean las relaciones (6.127) de κ -Minkowski, se obtiene para (6.129),

$$e^{ik^\mu \hat{x}_\mu} e^{il^\nu \hat{x}_\nu} = e^{ir(k,l)^\mu \hat{x}_\mu}, \quad (6.134)$$

con,

$$r^0 = k^0 + l^0 \quad (6.135)$$

$$r^i = \frac{\phi(k^0) e^{\lambda l^0} k^i + \phi(l^0) l^i}{\phi(k^0 + l^0)}, \quad (6.136)$$

donde la función $\phi(a)$ es definida por,

$$\phi(a) = \frac{1}{a\lambda}(1 - e^{-a\lambda}). \quad (6.137)$$

De aquí, aplicando al caso de dos exponenciales se obtiene,

$$\begin{aligned} e^{ik^\mu x_\mu} \star_\kappa e^{il^\nu x_\nu} &= \Omega_\kappa^{-1} \left(\Omega_\kappa(e^{ik^\mu x_\mu}) \Omega_\kappa(e^{il^\nu x_\nu}) \right) \\ &= \Omega_\kappa^{-1}(e^{ik\hat{x}} e^{ilp\hat{x}}) \\ &= \Omega_\kappa^{-1}(e^{ir(k,l)\hat{x}_\mu}) = e^{ir(k,l)^\mu x_\mu}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Para el caso particular en que $k = l = 0$, se obtienen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} x_0 \star_\kappa x_0 &= x_0^2, \\ x_0 \star_\kappa x_i &= x_0 x_i + \frac{i\lambda}{2} x_i, \\ x_i \star_\kappa x_0 &= x_0 x_i - \frac{i\lambda}{2} x_i, \\ x_i \star_\kappa x_i &= x_i^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto se reproducen las relaciones de conmutación del espacio-tiempo κ -Minkowski.

6.3.3. Algebra de Hopf $U_\kappa(iso(3, 1))$

Teniendo en cuenta lo anterior, se procederá a obtener la representación del algebra de Poincaré $U(iso(3, 1))$, referida a un espacio κ -Minkowski.

Traslaciones

Para el caso conmutativo en un espacio-tiempo de Minkowski los generadores de las traslaciones actúan sobre funciones exponenciales de la siguiente manera,

$$P_\mu(e^{ikx}) = k_\mu e^{ikx}. \quad (6.139)$$

De (6.132) una función $\hat{\varphi}$ en un espacio κ -Minkowski esta definida via el mapeo de Weyl,

$$\hat{\varphi} = \int d^4p \tilde{f}(p) \Omega_\kappa(e^{ipx}). \quad (6.140)$$

Por lo tanto de (6.139) y (6.140), resulta natural definir las traslaciones en el espacio κ -Minkowski por los operadores P_μ^κ que satisfacen,

$$P_\mu^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) \equiv k_\mu \Omega_\kappa(e^{ikx}). \quad (6.141)$$

El coproducto ΔP_j^κ se obtiene al observar que de acuerdo a (6.138),

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa(e^{ipx}) \Omega_\kappa(e^{iqx}) &= \Omega_\kappa(e^{ik^\mu x_\mu} \star e^{il^\nu x_\nu}) \\ &= \Omega_\kappa(e^{i(\vec{p} + \vec{q} e^{-\lambda p_0}) \vec{x} - i(p_0 + q_0)x_0}). \end{aligned} \quad (6.142)$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}
P_j^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) \Omega_\kappa(e^{ipx}) &= -i \Omega_\kappa(\partial_j e^{i(k+p)x}) \\
&= -i \Omega_\kappa((k+p)_j e^{i(k+p)x}) \\
&= [P_j^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx})][\Omega_\kappa(e^{ipx})] \\
&\quad + [e^{-\lambda P_0^\kappa} \Omega_\kappa(e^{ikx})][P_j^\kappa \Omega_\kappa(e^{ipx})], \tag{6.143}
\end{aligned}$$

donde,

$$p \dot{+} q \equiv (p_0 + q_0, p_1 + q_1 e^{-\lambda p_0}, p_2 + q_2 e^{-\lambda p_0}, p_3 + q_3 e^{-\lambda p_0}). \tag{6.144}$$

Por lo tanto,

$$\Delta(P_j^\kappa) = P_j^\kappa \otimes 1 + e^{-\lambda P_0^\kappa} \otimes P_j^\kappa. \tag{6.145}$$

Siguiendo un procedimiento análogo se puede mostrar,

$$\Delta(P_0^\kappa) = P_0^\kappa \otimes 1 + 1 \otimes P_0^\kappa. \tag{6.146}$$

De lo anterior es claro que los generadores (6.141) tienen diferente coproducto respecto al caso conmutativo (2.35), sin embargo preservan el algebra de Lie (2.36),

$$\begin{aligned}
[P_\mu^\kappa, P_\nu^\kappa] \Omega_\kappa(e^{ikx}) &= P_\mu^\kappa P_\nu^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) - P_\nu^\kappa P_\mu^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) \\
&= -\Omega_\kappa(\partial_\mu \partial_\nu e^{ikx}) + \Omega_\kappa(\partial_\nu \partial_\mu e^{ikx}) \\
&= 0. \tag{6.147}
\end{aligned}$$

El hecho que el coproducto (6.145) sea distinto del usual representa un gran inconveniente, ya que nos dice que las traslaciones son coconmutativas.

Rotaciones

De la misma manera que en el caso anterior, resulta natural definir los operadores de rotación para el espacio κ -Minkowski, de la siguiente manera,

$$M_j^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) \equiv -i \epsilon_{jkl} \Omega_\kappa(x_k \partial_l e^{ikx}). \tag{6.148}$$

Al hacer actuar este operador sobre el producto de dos funciones definidas en el espacio κ -Minkowski, se obtiene el siguiente coproducto,

$$\Delta(M_j^\kappa) = M_j^\kappa \otimes 1 + 1 \otimes M_j^\kappa. \tag{6.149}$$

Bajo la prescripción (6.148), se obtienen las relaciones de conmutación para los generadores de este espacio,

$$\begin{aligned}
[M_j^\kappa, P_\mu^\kappa] \Omega_\kappa(e^{ikx}) &= \epsilon_{jkl} \Omega_\kappa([-x_k \partial_\mu + \partial_\mu x_k] \partial_l e^{ikx}) \\
&= \delta_{\mu k} \epsilon_{jkl} \Omega_\kappa(\partial_l e^{ikx}), \tag{6.150}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[M_i^\kappa, P_j^\kappa] \Omega_\kappa(e^{ikx}) &= i \epsilon_{ijk} P_k^\kappa \\
[M_i^\kappa, P_0^\kappa] \Omega_\kappa(e^{ikx}) &= 0. \tag{6.151}
\end{aligned}$$

De forma análoga se puede mostrar,

$$[M_j^\kappa, M_k^\kappa] \Omega_\kappa(e^{ikx}) = i\varepsilon_{jkl} M_l^R. \quad (6.152)$$

De aquí los generadores de las rotaciones en este espacio (6.148), preservan la forma del coproducto (2.44) y las álgebras de Lie (2.29) y (2.37) del caso conmutativo.

Boosts

Al igual que en el caso de las traslaciones y rotaciones, los generadores de los boosts en un espacio κ -Minkowski, se definen de forma natural,

$$N_j^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) \equiv \Omega_\kappa\{i(x_j \partial_0 - x_0 \partial_j)(e^{ikx})\}. \quad (6.153)$$

De aquí para el coproducto ΔN_j^R ,

$$\begin{aligned} N_j^\kappa \Omega_\kappa(e^{ikx}) \Omega_\kappa(e^{ipx}) &= \Omega_\kappa(N_j e^{i(k+p)x}) \\ &= -\Omega_\kappa[(x_0(k+p)_j - x_j(k+p)_0) e^{i(k+p)x}] \\ &= -[\Omega_\kappa([k_j x_0 - k_0 x_j] e^{ikx}) \Omega_\kappa(e^{ipx}) \\ &\quad + \Omega_\kappa(e^{-\lambda k_0} e^{ikx}) \Omega_\kappa([p_j x_0 - p_0 x_j] e^{ipx}) \\ &\quad - \lambda \Omega_\kappa(k_j e^{ikx}) \Omega_\kappa(p_l x_l e^{ipx}) \\ &\quad + 2\Omega_\kappa(\sinh(\lambda k_0) e^{ikx}) \Omega_\kappa(p_0 x_j e^{ipx})], \end{aligned} \quad (6.154)$$

donde se han usado las relaciones,

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa(x_0 e^{i(k+p)x}) &= \Omega_\kappa(e^{i(k+p)x}) \hat{x}_0 \\ &= \Omega_\kappa(e^{ikx}) \hat{x}_0 \Omega_\kappa(e^{ipx}) - \lambda p \Omega_\kappa(e^{ikx}) \hat{x}_0 \Omega_\kappa(e^{ipx}) \\ &= \Omega_\kappa(x_0 e^{ikx}) \Omega_\kappa(e^{ipx}) - \lambda \Omega_\kappa(e^{ikx}) \Omega_\kappa(p_l x_l e^{ipx}), \end{aligned} \quad (6.155)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\kappa(x_j e^{i(k+p)x}) &= \hat{x}_j \Omega_\kappa(e^{i(k+p)x}) \\ &= e^{\lambda k_0} \Omega_\kappa(e^{ikx}) \hat{x}_j \Omega_\kappa(e^{ipx}) \\ &= e^{\lambda k_0} \Omega_\kappa(e^{ikx}) \Omega_\kappa(x_j e^{ipx}). \end{aligned} \quad (6.156)$$

Por lo tanto de (6.154) se sigue,

$$\begin{aligned} \Delta(N_j^\kappa) &= N_j^\kappa \otimes 1 + e^{-\lambda P_0^\kappa} \otimes N_j^\kappa + \\ &\quad + 2 \sinh \lambda P_0^\kappa \otimes \hat{x}_j P_0^\kappa - \lambda P_j^\kappa \otimes \hat{x} \vec{P}^\kappa. \end{aligned} \quad (6.157)$$

El haber asumido que N_j^κ tendría la forma (6.153), trae como consecuencia que que $\Delta(N_j^\kappa)$, no sea un elemento del producto tensorial algebraico, i.e. no es una función solamente de los elementos $M^\kappa, N^\kappa, P^\kappa$. Por lo cual es necesario encontrar un nuevo operador \mathcal{N}_j^κ , tal que $\Delta(\mathcal{N}_j^\kappa)$ sea un elemento de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, donde \mathcal{A} es el álgebra generada por $(P_\nu^\kappa, M_j^\kappa, \mathcal{N}_j^\kappa)$.

Este problema de consistencia, así como una serie amplia complicaciones, aparecen cuando se quiere deformar álgebras siguiendo procedimientos análogos al anterior. Un método más poderoso que libra en general, un mayor número de obstáculos, es deformación mediante twist.

6.4. Deformación por medio de Twist.

Una forma natural de deformar una algebra universal envolvente, consiste en sustituir el producto ordinario conmutativo que actúa sobre las funciones definidas sobre la variedad diferencial del grupo correspondiente, por un producto no-conmutativo compatible con dicha algebra. Al realizar este procedimiento, claramente se obtiene una algebra no-conmutativa, la cual ya no es dual de la coalgebra compatible original. Para mantener la consistencia, resulta necesario encontrar una coalgebra compatible con el algebra deformada. Esto significa encontrar los mapeos coproducto, counidad y antipoda que inducen los respectivos mapeos deformados.

Drinfeld demostró que a partir de una algebra deformada, era posible construir una coalgebra dual y compatible, tal que ambas estructuras formaran también una algebra de Hopf. Esta algebra en la literatura se le denomina deformación de Jordan.

6.4.1. Estructuras coalgebraicas compatibles con algebras deformadas.

Si \mathcal{A} es el algebra de funciones, para $f, g \in \mathcal{A}$ existe el mapeo multiplicación μ tal que,

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ \mu(f \otimes g) &\mapsto fg. \end{aligned} \quad (6.158)$$

Si \mathcal{G} es el algebra del Lie, asociada al grupo de simetrías G que actúan sobre \mathcal{A} , los elementos $a \in \mathcal{G}$ actúan como derivaciones sobre los elementos de \mathcal{A} ,

$$a \triangleright (xy) = (a \triangleright x)y + x(a \triangleright y). \quad (6.159)$$

Esta expresión puede reescribirse en términos del mapeo coproducto Δ que induce el algebra universal envolvente $U(a)$,

$$\begin{aligned} \Delta : U(a) &\rightarrow U(a) \otimes U(a) \\ \Delta(a) &\mapsto a \otimes 1 + 1 \otimes a, \end{aligned} \quad (6.160)$$

de la forma,

$$a \triangleright \mu(f \otimes g) = \mu(\Delta(a) \triangleright (f \otimes g)). \quad (6.161)$$

Esta expresión representa la covarianza del producto μ respecto a la acción de $U(g)$. Para un producto μ_* , esta condición implicaría necesariamente la existencia de un coproducto compatible $\Delta^{\mathcal{F}}$,

$$a \triangleright \mu_*(f \otimes g) = \mu_*(\Delta^{\mathcal{F}}(a) \triangleright (f \otimes g)). \quad (6.162)$$

La deformación del producto μ en μ_* evidentemente requiere la deformación del coproducto Δ en $\Delta^{\mathcal{F}}$,

$$\begin{aligned} a \triangleright \mu_*(f \otimes g) &= a \triangleright \mu(\mathcal{F}^{-1}(f \otimes g)) \\ &= \mu(\Delta(a \triangleright) \mathcal{F}^{-1}(f \otimes g)) \\ &= \mu(\mathcal{F}^{-1} \Delta^{\mathcal{F}}(a \triangleright)(f \otimes g)), \end{aligned} \quad (6.163)$$

donde,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(a \triangleright) = \mathcal{F}\Delta(a \triangleright)\mathcal{F}^{-1}. \quad (6.164)$$

Este coproducto satisface la condición de compatibilidad (6.162) por definición. Así, de esta manera es posible encontrar mapeos coproductos duales que inducen productos deformados. Por ejemplo para el caso del producto- \star_{θ} definido en el capítulo anterior,

$$\mu_{\star_{\theta}}(f(x) \otimes g(x)) = \mu \circ \mathcal{F}_{\theta}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)), \quad (6.165)$$

donde,

$$\mathcal{F}_{\theta} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_{\alpha} \otimes P_{\beta}}, \quad (6.166)$$

se obtiene el siguiente coproducto compatible,

$$\Delta^{\mathcal{F}_{\theta}}(a \triangleright) = \mathcal{F}_{\theta}\Delta(a \triangleright)\mathcal{F}_{\theta}^{-1}. \quad (6.167)$$

Mediante un análisis análogo de pueden mostrar que los mapeos duales deformados para la counidad y la antipoda resultan,

$$\varepsilon^{\mathcal{F}}(g) = \varepsilon(g), \quad S^{\mathcal{F}}(g) = uS(g)u^{-1}, \quad (6.168)$$

donde,

$$u = m(id \otimes S)\mathcal{F}; \quad u^{-1} = m(S \otimes id)\mathcal{F}. \quad (6.169)$$

A este nivel tenemos un procedimiento que permite encontrar estructuras coalgebraicas compatibles con un algebras deformadas, sin embargo esto no garantiza que estas dos estructuras formen una algebra de Hopf. En la siguiente sección se mostraran los requisitos que debe satisfacer \mathcal{F} para que esto ultimo se satisfaga.

6.4.2. Twist.

Suponiendo que se tiene una algebra de Hopf $(\mathcal{A}, m, i, \Delta, \varepsilon, S)$ y un elemento invertible $\mathcal{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ que genera los mapeos,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}, \quad \varepsilon^{\mathcal{F}}(a) = \varepsilon(a), \quad S^{\mathcal{F}}(a) = uS(a)u^{-1}, \quad (6.170)$$

Para que $(\mathcal{A}, m, i, \Delta^{\mathcal{F}}, \varepsilon^{\mathcal{F}}, S^{\mathcal{F}})$ también forme una algebra de Hopf es necesario que se satisfagan los axiomas de coasociatividad, counidad, y antipoda,

$$(\Delta^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) = (id \otimes \Delta^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a), \quad (6.171)$$

$$(\varepsilon^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) = (id \otimes \varepsilon^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a) = a, \quad (6.172)$$

$$\mu(S^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) = \mu(id \otimes S^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a). \quad (6.173)$$

Para (6.171) por un lado,

$$\begin{aligned} (\Delta^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) &= (\mathcal{F} \otimes 1)[(\Delta \otimes id)(\mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1})](\mathcal{F}^{-1} \otimes 1) \\ &= \mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F}(\Delta \otimes id)\Delta(a)(\Delta \otimes id)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_{12}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.174)$$

mientras por otro,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a) &= (1 \otimes \mathcal{F})(id \otimes \Delta)(\mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1})(1 \otimes \mathcal{F}^{-1}) \\ &= \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}(id \otimes \Delta)\Delta(a)(id \otimes \Delta)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}_{23}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.175)$$

De (6.174) y (6.175) se sigue que la condición para que se satisfaga la coasociatividad es,

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}, \quad (6.176)$$

donde $\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F} \otimes 1$ y $\mathcal{F}_{23} = 1 \otimes \mathcal{F}$.

De la misma forma para (6.172) por un lado,

$$(\varepsilon^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) = (\varepsilon \otimes id)\mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}, \quad (6.177)$$

mientras,

$$(id \otimes \varepsilon^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a) = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}. \quad (6.178)$$

De las ecuaciones (6.177) y (6.178) se sigue que la condición de counidad queda satisfecha con,

$$(\varepsilon \otimes id)\mathcal{F} = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{F} = 1. \quad (6.179)$$

De forma análoga se puede mostrar que el axioma de la antipoda (6.173) se satisface de forma directa sin exigir ninguna condición adicional sobre \mathcal{F} .

Si $\mathcal{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ satisface las condiciones (6.176) y (6.179) se le denomina twist de Drinfeld, mientras que a las deformaciones que fijan la estructura algebraica (\mathcal{A}, m, i) y modifican solo la estructura coalgebraica $(\Delta^{\mathcal{F}}, \varepsilon^{\mathcal{F}}, S^{\mathcal{F}})$ se les denomina deformaciones de Jordan.

6.4.3. Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}}(sl(2))$.

Se denota con $U^{\mathcal{F}}(sl(2))$ al algebra de Jordan cuyos generadores satisfacen las relaciones de conmutación,

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H. \quad (6.180)$$

Con los mapeos,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(E) = \mathcal{F}\Delta(E)\mathcal{F}^{-1}, \quad \Delta^{\mathcal{F}}(F) = \mathcal{F}\Delta(F)\mathcal{F}^{-1}, \quad \Delta^{\mathcal{F}}(H) = \mathcal{F}\Delta(H)\mathcal{F}^{-1}, \quad (6.181)$$

$$\varepsilon^{\mathcal{F}}(E) = \varepsilon(E) = \varepsilon^{\mathcal{F}}(F) = \varepsilon(F) = \varepsilon^{\mathcal{F}}(H) = \varepsilon(H) = 0, \quad (6.182)$$

$$S^{\mathcal{F}}(E) = uS(E)u^{-1}, \quad S^{\mathcal{F}}(F) = uS(F)u^{-1}, \quad S^{\mathcal{F}}(H) = uS(H)u^{-1}, \quad (6.183)$$

definidos a partir del twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{1}{2}H \otimes \sigma}, \quad \sigma = -\ln(1 - 2\hbar E). \quad (6.184)$$

Esta algebra $U^{\mathcal{F}}(sl(2))$ forma un algebra de Hopf. Para probar esto primeramente se tiene que mostrar que \mathcal{F} satisface las condiciones de coasociatividad (6.176) y counidad (6.179). Primeramente para la coasociatividad por un lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F} &= \mathcal{F}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\Delta \otimes id)(H^n \otimes \sigma^n) \\ &= \mathcal{F}_{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\Delta(H)^n \otimes \sigma^n) \\ &= \mathcal{F}_{12} e^{-\frac{1}{2}(H \otimes 1 \otimes \sigma + 1 \otimes H \otimes \sigma)} \\ &= (\mathcal{F} \otimes 1) e^{-\frac{1}{2}(H \otimes 1 \otimes \sigma + 1 \otimes H \otimes \sigma)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(H \otimes \sigma \otimes 1)} e^{-\frac{1}{2}(H \otimes 1 \otimes \sigma + 1 \otimes H \otimes \sigma)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(H \otimes \sigma \otimes 1 + H \otimes 1 \otimes \sigma + 1 \otimes H \otimes \sigma)} e^{([\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma])/2}, \end{aligned} \quad (6.185)$$

donde $\alpha = -\frac{1}{2}(H \otimes \sigma \otimes 1)$, $\beta = -\frac{1}{2}(H \otimes 1 \otimes \sigma)$ y $\gamma = -\frac{1}{2}(1 \otimes H \otimes \sigma)$. por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F} &= e^{-\frac{1}{2}(1 \otimes H \otimes \sigma)} e^{-\frac{1}{2}(H \otimes \sigma \otimes 1 + H \otimes 1 \otimes \sigma)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(1 \otimes H \otimes \sigma + H \otimes \sigma \otimes 1 + H \otimes 1 \otimes \sigma)} e^{([\gamma, \alpha,] + [\gamma, \beta]) / 2}. \end{aligned} \quad (6.186)$$

Teniendo en cuenta que,

$$[\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma] = [\gamma, \alpha,] + [\gamma, \beta] = H \otimes [\sigma, H] \otimes \sigma, \quad (6.187)$$

de (6.185) y (6.186) se satisface la condición,

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}. \quad (6.188)$$

Para la counidad por una parte,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)(\mathcal{F}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\varepsilon \otimes id)(H^n \otimes \sigma^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\varepsilon(H)^n \otimes \sigma^n) = e^0 = 1. \end{aligned} \quad (6.189)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (id \otimes \varepsilon)(H^n \otimes \sigma^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (H^n \otimes \varepsilon(\sigma^n)) = e^0 = 1. \end{aligned} \quad (6.190)$$

De (6.189) y (6.190) queda satisfecha la condición,

$$(\varepsilon \otimes id)(\mathcal{F}) = (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}). \quad (6.191)$$

Ahora se procederá a calcular explícitamente los coproducto. Primeramente para $\Delta^{\mathcal{F}}(E)$,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(E) = \mathcal{F}\Delta(E)\mathcal{F}^{-1} = e^{-\frac{H}{2} \otimes \sigma} (E \otimes 1 + 1 \otimes E) e^{\frac{H}{2} \otimes \sigma}. \quad (6.192)$$

Esta expresión puede desarrollarse teniendo en cuenta la relación de Hadamar,

$$\begin{aligned} e^{\Lambda} \Psi e^{-\Lambda} &= e^{ad\Lambda}(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ad(\Lambda)^n(\Psi) \\ &= \Psi + \frac{1}{1!} [\Lambda, \Psi] + \frac{1}{2!} [\Lambda, [\Lambda, \Psi]] + \frac{1}{3!} [\Lambda, [\Lambda, [\Lambda, \Psi]]] + \dots, \end{aligned} \quad (6.193)$$

Identificando los términos,

$$\Psi = E \otimes 1 + 1 \otimes E, \quad (6.194)$$

$$\Lambda = -\frac{1}{2} H \otimes \sigma. \quad (6.195)$$

Para el primer conmutador,

$$\begin{aligned}
[\Lambda, \Psi] &= \left[-\frac{1}{2}H \otimes \sigma, E \otimes 1 \right] + \left[-\frac{1}{2}H \otimes \sigma, 1 \otimes E \right] \\
&= -\frac{1}{2}HE \otimes \sigma + \frac{1}{2}EH \otimes \sigma - \frac{1}{2}H \otimes \sigma E + \frac{1}{2}H \otimes E\sigma \\
&= -\frac{1}{2}[H, E] \otimes \sigma - \frac{1}{2}H \otimes [\sigma, E].
\end{aligned} \tag{6.196}$$

Por lo cual,

$$\frac{1}{1!}[\Lambda, \Psi] = -\frac{1}{1!}E \otimes \sigma. \tag{6.197}$$

Mientras que para el segundo,

$$\begin{aligned}
[\Lambda, [\Lambda, \Psi]] &= \left[-\frac{1}{2}H \otimes \sigma, -E \otimes \sigma \right] \\
&= \frac{1}{2}HE \otimes \sigma^2 - \frac{1}{2}EH \otimes \sigma^2 \\
&= \frac{1}{2}[H, E] \otimes \sigma^2.
\end{aligned} \tag{6.198}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2!}[\Lambda, [\Lambda, \Psi]] = \frac{1}{2!}E \otimes \sigma^2 \tag{6.199}$$

De aquí para el n -simo termino,

$$\frac{1}{n!}[\Lambda, [\Lambda, \dots, \Psi] \dots] = \frac{(-1)^n}{n!}E \otimes \sigma^n. \tag{6.200}$$

Por lo tanto para (6.192) se obtiene,

$$\begin{aligned}
e^\Lambda \Psi e^{-\Lambda} &= E \otimes 1 + 1 \otimes E + E \otimes \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sigma)^n}{n!} \\
&= E \otimes 1 + 1 \otimes E + (E \otimes e^{-\sigma} - E \otimes 1).
\end{aligned} \tag{6.201}$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(E) = E \otimes e^{-\sigma} + 1 \otimes E \tag{6.202}$$

De forma análoga se calculan $\Delta^{\mathcal{F}}(F)$ y $\Delta^{\mathcal{F}}(H)$ obteniéndose,

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(F) &= e^\sigma \otimes F + F \otimes 1 - e^\sigma H \otimes \hbar H - e^\sigma(e^\sigma - 1) \otimes \frac{\hbar}{2}H(H + 2), \\
\Delta^{\mathcal{F}}(H) &= e^\sigma \otimes H + H \otimes 1.
\end{aligned} \tag{6.203}$$

Para facilitar los cálculos para la obtención de las antipodas es importante antes demostrar lo siguiente:

Si \mathcal{A} es una algebra sobre \mathbb{C} , si $A, B, C \in \mathcal{A}$. Si se asume que A conmuta con C y $[A, B] = BC$, entonces,

$$e^{\hbar A} B e^{-\hbar A} = B e^{\hbar C}. \tag{6.204}$$

Para mostrar esto se tiene que $AB = B(A + C)$, y entonces por inducción $A^n B = B(A + C)^n$, de aquí,

$$\begin{aligned} e^{\hbar A} B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} A^n B \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} B(A + C)^n \\ &= B e^{\hbar(A+C)} = B e^{\hbar C} e^{\hbar A}. \end{aligned} \quad (6.205)$$

Multiplicando por la derecha ambos lados de la ecuación por $e^{\hbar A}$ se obtiene el resultado deseado. Una vez obtenido este resultado se procede a calcular la antipoda $S^{\mathcal{F}}(E)$,

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{F}}(E) &= u S(E) u^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n H^n S(\sigma^n) \right] S(E) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n S(H^n) \sigma^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n H^n (-\sigma^n) \right] (-E) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (-H^n) \sigma^n \right] \\ &= -e^{\frac{1}{2}H\sigma} E e^{-\frac{1}{2}H\sigma}. \end{aligned} \quad (6.206)$$

Teniendo en cuenta que,

$$\frac{1}{2}[H\sigma, E] = \frac{1}{2} \left(H[\sigma, E] + [H, E]\sigma \right) = E\sigma. \quad (6.207)$$

Teniendo en cuenta (6.207) y (6.204) se obtiene finalmente para (6.331),

$$S^{\mathcal{F}}(E) = -E e^{\sigma}. \quad (6.208)$$

Siguiendo un procedimiento similar se pueden encontrar,

$$S^{\mathcal{F}}(H) = -H e^{-\sigma}, \quad (6.209)$$

$$S^{\mathcal{F}}(F) = -F e^{-\sigma} - \frac{\hbar}{2} H^2 (e^{-\sigma} + 1) e^{-\sigma} + \hbar H (e^{-\sigma} - 1) e^{-\sigma}. \quad (6.210)$$

Las counidades en esta algebra $U^{\mathcal{F}}(sl(2))$ son las mismas de $U(sl(2))$.

6.4.4. Deformación de Jordan $U^{\Xi\mathcal{F}}$

Para el caso particular en que g sea el algebra de Lie de los campos vectoriales en el espacio-tiempo $M = \mathbb{R}^4$, se considera el twist,

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}}, \quad (6.211)$$

donde $\theta^{\mu\nu}$ es una matriz antisimetrica. Esta constante esta relacionada con la longitud de Plank l_p y se considera fundamental en el mismo sentido que la velocidad de la luz (c) y la constante de plank (\hbar). Las simetrías de los sistemas físicos tendrían a $(\theta^{\mu\nu}, c$ y \hbar) invariantes. El elemento \mathcal{F} tiene como inverso,

$$\mathcal{F}^{-1} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}}. \quad (6.212)$$

Este twist satisface las condiciones (6.176) y (6.179), ya que el algebra de Lie de derivadas parciales es abeliano. El producto- \star entre funciones es obtenido a partir del producto ordinario, via la acción del operador twist,

$$f \star g := \mu \circ \mathcal{F}^{-1}(f \otimes g), \quad (6.213)$$

donde μ es el producto usual entre dos funciones, $\mu(f \otimes g) = fg$. Frecuentemente se utiliza la siguiente notación (suma sobre α),

$$\mathcal{F} = f^\alpha \otimes f_\alpha, \quad (6.214)$$

$$\mathcal{F}^{-1} = \bar{f}^\alpha \otimes \bar{f}_\alpha. \quad (6.215)$$

De esta manera,

$$f \star g := \bar{f}^\alpha(f) \bar{f}_\alpha(g). \quad (6.216)$$

Esto ultimo de forma explícita resulta,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu}} = \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \otimes \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \\ &= \bar{f}^\alpha \otimes \bar{f}_\alpha. \end{aligned} \quad (6.217)$$

A partir de (6.170) es posible deformar el algebra de Hopf de los campos vectoriales via la acción de twist, teniendo en cuenta que $U\Xi = U\Xi^{\mathcal{F}}$. De esta manera se tienen los mapeos coproducto, counidad y antipoda definidos de la siguiente manera,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\xi) = \mathcal{F}\Delta(\xi)\mathcal{F}^{-1}, \quad (6.218)$$

$$S^{\mathcal{F}}(\xi) = uS(\xi)u^{-1}, \quad (6.219)$$

$$\varepsilon^{\mathcal{F}}(\xi) = \varepsilon(\xi). \quad (6.220)$$

El uso de la notación "suma sobre" tiene muchas ventajas, ya que simplifica de sobremanera los desarrollos. Por ejemplo, para (6.169) teniendo en cuenta (6.214) se obtiene,

$$\begin{aligned} u &= m(S \otimes id)(\mathcal{F}) \\ &= m(S \otimes id)(f^\alpha \otimes f_\alpha) \\ &= m(f^\alpha S \otimes f_\alpha) \\ &= f^\alpha S(f_\alpha). \end{aligned} \quad (6.221)$$

Mientras que de (6.169) y (6.215),

$$u^{-1} = S(\bar{f}^\alpha) \bar{f}_\alpha. \quad (6.222)$$

Por otro lado para demostrar que $(U\Xi^{\mathcal{F}}, \cdot, i, \Delta^{\mathcal{F}}, S^{\mathcal{F}}, \varepsilon^{\mathcal{F}})$, forma una algebra de Hopf, es necesario hacer ver que los mapeos cumplen los axiomas de coasociatividad, counidad y de la antipoda. Para el axioma de la counidad es necesario mostrar,

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(\xi) = \xi = (id \otimes \varepsilon)\Delta^{\mathcal{F}}(\xi). \quad (6.223)$$

Para el lado derecho de la ecuación,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(\xi) &= (\varepsilon \otimes id)(f^\alpha \xi_1 \bar{f}^\beta \otimes f_\alpha \xi_2 \bar{f}_\beta) \\ &= \varepsilon(f^\alpha \xi_1 \bar{f}^\beta) f_\alpha \xi_2 \bar{f}_\beta \\ &= \varepsilon(f^\alpha) \varepsilon(\xi_1) \varepsilon(\bar{f}^\beta) f_\alpha \xi_2 \bar{f}_\beta. \end{aligned} \quad (6.224)$$

Al considerar la identidad,

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = 1 \otimes 1, \quad (6.225)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} 1 &= (\varepsilon \otimes id)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = (\varepsilon \otimes id)(f^\alpha \bar{f}^\beta \otimes f_\alpha \bar{f}_\beta) \\ &= \varepsilon(f^\alpha)\varepsilon(\bar{f}^\beta)f_\alpha \bar{f}_\beta. \end{aligned} \quad (6.226)$$

De (6.224) y (6.226), se obtiene finalmente,

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(\xi) = \varepsilon(\xi_1)\xi_2 = \xi. \quad (6.227)$$

Por otro lado, para el lado izquierdo,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)\Delta^{\mathcal{F}}(\xi) &= (id \otimes \varepsilon)(f^\alpha \xi_1 \bar{f}^\beta \otimes f_\alpha \xi_2 \bar{f}_\beta) \\ &= f^\alpha \xi_1 \bar{f}^\beta \varepsilon(f_\alpha \xi_2 \bar{f}_\beta) \\ &= f^\alpha \xi_1 \bar{f}^\beta \varepsilon(f_\alpha)\varepsilon(\xi_2)\varepsilon(\bar{f}_\beta). \end{aligned} \quad (6.228)$$

Al aplicar (6.226) a esto anterior se obtiene finalmente,

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta^{\mathcal{F}}(\xi) = \xi_1 \varepsilon(\xi_2) = \xi. \quad (6.229)$$

De (6.227) y (6.229), queda demostrado esta propiedad. Tanto el axioma de coasociatividad y la antipoda se muestran de una forma similar.

6.4.5. Deformación de Jordan $\delta_\xi(U\Xi)^{\mathcal{F}}$.

Se denota con $\delta_\xi(U\Xi)^{\mathcal{F}}$ al algebra de Jordan de difeomorfismos, cuyos generadores satisfacen las relaciones de conmutación,

$$[\delta_\xi, \delta_\eta] = \delta_{\xi \times \eta}. \quad (6.230)$$

con los mapeos,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) = \mathcal{F}\Delta(\delta_\xi)\mathcal{F}^{-1}, \quad \varepsilon^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) = \varepsilon(\delta_\xi) = 0, \quad S^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) = uS(\delta_\xi)u^{-1}, \quad (6.231)$$

definidos a partir del twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu}, \quad (6.232)$$

Como se menciono en la sección anterior, este twist satisface las condiciones (6.176) y (6.179), ya que el algebra de Lie de derivadas parciales es abeliano.

Calculando explícitamente el coproducto $\Delta^{\mathcal{F}}(\delta_\xi)$,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) &= \mathcal{F}\Delta(\delta_\xi)\mathcal{F}^{-1} \\ &= e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu}(\delta_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\xi)e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu}. \end{aligned} \quad (6.233)$$

Esta expresión puede desarrollarse teniendo en cuenta la relación de Hadamar (6.193) al identificar,

$$\Psi = \delta_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\xi, \quad (6.234)$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu, \quad (6.235)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= \frac{-i\theta^{\mu\nu}}{2} \left([\partial_\mu \otimes \partial_\nu, \delta_\xi \otimes 1] + [\partial_\mu \otimes \partial_\nu, 1 \otimes \delta_\xi] \right) \\ &= \frac{-i\theta^{\mu\nu}}{2} \left(\delta_{(\partial_\mu \xi)} \otimes \partial_\nu + \partial_\mu \otimes \delta_{(\partial_\nu \xi)} \right), \end{aligned} \quad (6.236)$$

donde se ha definido,

$$[\partial_\rho, \delta_\xi] := \delta_{(\partial_\rho \xi)}. \quad (6.237)$$

Por lo cual, a primer orden se tiene,

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) = \delta_\xi \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\xi - \frac{i\theta^{\mu\nu}}{2} \left(\delta_{(\partial_\mu \xi)} \otimes \partial_\nu + \partial_\mu \otimes \delta_{(\partial_\nu \xi)} \right) + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (6.238)$$

En tanto para la antipoda $S^{\mathcal{F}}(\delta_\xi)$,

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) &= uS(\delta_\xi)u^{-1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\mu\nu}}{2} \right)^n \partial_\mu^n S(\partial_\nu^n) \right] S(\delta_\xi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\theta^{\mu\nu}}{2} \right)^n S(\partial_\mu^n) \partial_\nu^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\mu\nu}}{2} \right)^n \partial_\mu^n (-\partial_\nu^n) \right] (-\delta_\xi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\theta^{\mu\nu}}{2} \right)^n (-\partial_\mu^n) \partial_\nu^n \right] \\ &= -e^{-\frac{i\theta^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \partial_\nu} \delta_\xi e^{\frac{i\theta^{\mu\nu}}{2} \partial_\mu \partial_\nu}. \end{aligned} \quad (6.239)$$

Identificando términos,

$$\Psi = \delta_\xi, \quad (6.240)$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (6.241)$$

De aquí,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= -\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} [\partial_\mu \partial_\nu, \delta_\xi] \\ &= -\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \left(\partial_\mu [\partial_\nu, \delta_\xi] + [\partial_\mu, \delta_\xi] \partial_\nu \right) \\ &= -\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \delta_{(\partial_\nu \xi)} + \delta_{(\partial_\mu \xi)} \partial_\nu \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.242)$$

Por lo tanto de la relación de Hadamar (6.193) se obtiene finalmente $S^{\mathcal{F}}(\delta_\xi)$,

$$S^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) = -\delta_\xi. \quad (6.243)$$

La counidad de esta algebra es la misma que para el caso no deformado,

$$\varepsilon^{\mathcal{F}}(\delta_\xi) = \varepsilon(\delta_\xi) = 0. \quad (6.244)$$

6.4.6. Deformaciones de Jordan para $U(H(3,1))$.

En esta sección se presentaran dos deformaciones del algebra $U(H(3,1))$. Estas deformaciones se obtendrán por medio de los twist's,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta &= e^{\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta}, \\ \mathcal{F}_{\bar{\theta}} &= e^{\frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta}. \end{aligned} \quad (6.245)$$

Estos elementos pertenecen al algebra universal envolvente $\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}_{\bar{\theta}} \in U(H(3,1)) \otimes U(H(3,1))$, ya que los elementos polinomiales que se obtienen de expandir la exponencial pertenecen a esta algebra. Para la primera representación se usara $P_\alpha \triangleright X^\mu = \delta_\alpha^\mu$, Mientras que para la segunda se considerara $X^\alpha \triangleright P_\mu = \delta_\mu^\alpha$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_\theta}(H(3,1))$.

Los generadores del algebra de Jordan $U^{\mathcal{F}_\theta}(H(3,1))$ satisfacen las relaciones conmutación,

$$[X^\mu, X^\nu] = 0, \quad (6.246)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (6.247)$$

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta_\nu^\mu. \quad (6.248)$$

Con los mapeos,

$$\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu) = \mathcal{F}_\theta \Delta(X^\mu) \mathcal{F}_\theta^{-1}, \quad \Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\sigma) = \mathcal{F}_\theta \Delta(P_\sigma) \mathcal{F}_\theta^{-1}, \quad (6.249)$$

$$\varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu) = \varepsilon(X^\mu) = \varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}(P_\sigma) = \varepsilon(P_\sigma) = 0, \quad (6.250)$$

$$S^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu) = uS(X^\mu)u^{-1}, \quad S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\sigma) = uS(P_\sigma)u^{-1}, \quad (6.251)$$

definidos con del twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F}_\theta = e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta}; \quad \theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}. \quad (6.252)$$

Con estas estructuras $U^{\mathcal{F}_\theta}(H(3,1))$ forma una algebra de Hopf. Antes de mostrar esto ultimo se mostrara que \mathcal{F}_θ es un buen twist, es decir satisface las condiciones de coasociatividad (6.176) y counidad (6.179). Primeramente para la coasociatividad por un lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta^{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F}_\theta &= \mathcal{F}_\theta^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2}\right)^n (\Delta \otimes id)(P_\alpha^n \otimes P_\beta^n) \\ &= \mathcal{F}_\theta^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2}\right)^n (\Delta(P_\alpha)^n \otimes P_\beta^n) \\ &= \mathcal{F}_\theta^{12} e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta + 1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta)} \\ &= (\mathcal{F}_\theta \otimes 1) e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta + 1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta)} \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(P_\alpha \otimes P_\beta \otimes 1)} e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta + 1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta)} \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(P_\alpha \otimes P_\beta \otimes 1 + P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta + 1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta)}, \end{aligned} \quad (6.253)$$

mientras que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta^{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}_\theta &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta)} e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(P_\alpha \otimes P_\beta \otimes 1 + P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta)} \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(1 \otimes P_\alpha \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes P_\beta \otimes 1 + P_\alpha \otimes 1 \otimes P_\beta)}, \end{aligned} \quad (6.254)$$

De (6.253) y (6.254) se satisface la condición,

$$\mathcal{F}_\theta^{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F}_\theta = \mathcal{F}_\theta^{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}_\theta. \quad (6.255)$$

Para la counidad por una parte,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)(\mathcal{F}_\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (\varepsilon \otimes id)(P_\alpha^n \otimes P_\beta^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (\varepsilon(P_\alpha)^n \otimes P_\beta^n) = e^0 = 1, \end{aligned} \quad (6.256)$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}_\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (id \otimes \varepsilon)(P_\alpha^n \otimes P_\beta^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (P_\alpha^n \otimes \varepsilon(P_\beta)^n) = e^0 = 1. \end{aligned} \quad (6.257)$$

De (6.256) y (6.257) queda satisfecha la condición,

$$(\varepsilon \otimes id)(\mathcal{F}_\theta) = (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}_\theta). \quad (6.258)$$

Ahora se procederá a calcular explícitamente los coproductos. Primeramente para $\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu)$,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu) &= \mathcal{F}_\theta \Delta(X^\mu) \mathcal{F}_\theta^{-1} \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta} (X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta}. \end{aligned} \quad (6.259)$$

Esta expresión puede desarrollarse teniendo en cuenta la relación de Hadamar (6.193) al identificar,

$$\Psi = X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu, \quad (6.260)$$

$$\Lambda = \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta. \quad (6.261)$$

Dado que,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} [P_\alpha \otimes P_\beta, X^\mu \otimes 1] + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} [P_\alpha \otimes P_\beta, 1 \otimes X^\mu] \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} ([P_\alpha, X^\mu] \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes [P_\beta, X^\mu]) \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\mu\beta} (1 \otimes P_\beta) + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\mu} (P_\alpha \otimes 1). \end{aligned} \quad (6.262)$$

En tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} [\Lambda, [\Lambda, \Psi]] &= \left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\beta} \right) [P_\alpha \otimes P_\beta, 1 \otimes P_\beta] \\ &\quad + \left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\mu} \right) [P_\alpha \otimes P_\beta, P_\alpha \otimes 1] \\ &= \left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\beta} \right) P_\alpha \otimes [P_\beta \otimes P_\beta] \\ &\quad + \left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{i}{2}\theta^{\alpha\mu} \right) [P_\alpha, P_\alpha] \otimes P_\beta = 0. \end{aligned} \quad (6.263)$$

Por lo tanto se obtiene,

$$\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu) = X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\beta}(1 \otimes P_\beta) + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\mu}(P_\alpha \otimes 1). \quad (6.264)$$

Mientras que para $\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu)$,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) &= \mathcal{F}_\theta \Delta(P_\mu) \mathcal{F}_\theta^{-1} \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta} (P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta}. \end{aligned} \quad (6.265)$$

Identificando,

$$\Psi = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu, \quad (6.266)$$

$$\Lambda = \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta. \quad (6.267)$$

Dado que,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} [P_\alpha \otimes P_\beta, P_\mu \otimes 1] + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} [P_\alpha \otimes P_\beta, 1 \otimes P_\mu] \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} ([P_\alpha, P_\mu] \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes [P_\beta, P_\mu]) = 0. \end{aligned} \quad (6.268)$$

se obtiene para $\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu)$,

$$\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu. \quad (6.269)$$

Para la antipoda $S^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu)$,

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{F}_\theta}(X^\mu) &= u S(X^\mu) u^{-1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n P_\alpha^n S(P_\beta^n) \right] S(X^\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n S(P_\alpha^n) P_\beta^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n P_\alpha^n (-P_\beta^n) \right] (-X^\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (-P_\alpha^n) P_\beta^n \right] \\ &= -e^{-\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} P_\alpha P_\beta} X^\mu e^{\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} P_\alpha P_\beta}. \end{aligned} \quad (6.270)$$

Identificando términos,

$$\Psi = X^\mu, \quad (6.271)$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta. \quad (6.272)$$

De aquí,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= -\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} [P_\alpha P_\beta, X^\mu] \\ &= -\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} (P_\alpha [P_\beta, X^\mu] + [P_\alpha, X^\mu] P_\beta) \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\mu\alpha} P_\alpha - \frac{i}{2}\theta^{\mu\beta} P_\beta = 0. \end{aligned} \quad (6.273)$$

Por lo tanto de la relación de Hadamar (6.193) se obtiene para $S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu)$,

$$S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) = -P_\mu. \quad (6.274)$$

Para la antipoda $S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu)$,

$$\begin{aligned}
S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) &= uS(P_\mu)u^{-1} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n P_\alpha^n S(P_\beta^n) \right] S(P_\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n S(P_\alpha^n) P_\beta^n \right] \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n P_\alpha^n (-P_\beta^n) \right] (-P_\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (-P_\alpha^n) P_\beta^n \right] \\
&= -e^{-\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} P_\alpha P_\beta} P_\mu e^{\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} P_\alpha P_\beta}.
\end{aligned} \tag{6.275}$$

Al identificar,

$$\Psi = P_\mu, \tag{6.276}$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta, \tag{6.277}$$

se obtiene,

$$[\Lambda, \Psi] = 0. \tag{6.278}$$

Por lo tanto de la relación (6.193) se obtiene finalmente,

$$S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) = -P_\mu. \tag{6.279}$$

Las counidades de esta algebra $U^{\mathcal{F}_\theta}(H(3, 1))$ son las mismas que las del algebra no deformada $U(H(3, 1))$,

$$\varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}(X^\nu) = \varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) = 0. \tag{6.280}$$

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3, 1))$.

El algebra de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3, 1))$ se define a partir de las relaciones conmutación,

$$[X^\mu, X^\nu] = 0, \tag{6.281}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{6.282}$$

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta_{\nu}^{\mu}. \tag{6.283}$$

Con los mapeos,

$$\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu) = \mathcal{F}_{\bar{\theta}} \Delta(X^\mu) \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{-1}, \quad \Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\sigma) = \mathcal{F}_{\bar{\theta}} \Delta(P_\sigma) \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{-1}, \tag{6.284}$$

$$\varepsilon^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu) = \varepsilon(X^\mu) = \varepsilon^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\sigma) = \varepsilon(P_\sigma) = 0, \tag{6.285}$$

$$S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu) = uS(X^\mu)u^{-1}, \quad S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\sigma) = uS(P_\sigma)u^{-1}, \tag{6.286}$$

definidos a partir del twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F}_{\bar{\theta}} = e^{\frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta}; \quad \bar{\theta}_{\mu\nu} = -\bar{\theta}_{\nu\mu}. \tag{6.287}$$

Con estas estructuras $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3, 1))$ forma una algebra de Hopf.

El elemento $\mathcal{F}_{\bar{\theta}}$ es un buen twist, es decir satisface las condiciones de coasociatividad (6.176) y counidad (6.179). Primeramente para la coasociatividad por un lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F}_{\bar{\theta}} &= \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (\Delta \otimes id)((X^\alpha)^n \otimes (X^\beta)^n) \\
&= \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (\Delta(X^\alpha)^n \otimes (X^\beta)^n) \\
&= \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{12} e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(X^\alpha \otimes 1 \otimes X^\beta + 1 \otimes X^\alpha \otimes X^\beta)} \\
&= (\mathcal{F}_{\bar{\theta}} \otimes 1) e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(X^\alpha \otimes 1 \otimes X^\beta + 1 \otimes X^\alpha \otimes X^\beta)} \\
&= e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(X^\alpha \otimes X^\beta \otimes 1)} e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(X_\alpha \otimes 1 \otimes X_\beta + 1 \otimes X^\alpha \otimes X^\beta)} \\
&= e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(X^\alpha \otimes X^\beta \otimes 1 + X^\alpha \otimes 1 \otimes X^\beta + 1 \otimes X^\alpha \otimes X^\beta)}, \tag{6.288}
\end{aligned}$$

mientras que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}_{\bar{\theta}} &= e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(1 \otimes X_\alpha \otimes X_\beta)} e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(X^\alpha \otimes X^\beta \otimes 1 + X^\alpha \otimes 1 \otimes X^\beta)} \\
&= e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}(1 \otimes X^\alpha \otimes X^\beta + X^\alpha \otimes X^\beta \otimes 1 + X^\alpha \otimes 1 \otimes X^\beta)}, \tag{6.289}
\end{aligned}$$

De (6.288) y (6.289) se satisface la condición,

$$\mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F}_{\bar{\theta}} = \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}_{\bar{\theta}}. \tag{6.290}$$

Para la counidad por una parte,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)(\mathcal{F}_{\bar{\theta}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (\varepsilon \otimes id)((X^\alpha)^n \otimes (X^\beta)^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (\varepsilon(X^\alpha)^n \otimes (X^\beta)^n) = e^0 = 1, \tag{6.291}
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}_{\bar{\theta}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (id \otimes \varepsilon)((X^\alpha)^n \otimes (X^\beta)^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n ((X^\alpha)^n \otimes \varepsilon(X^\beta)^n) = e^0 = 1. \tag{6.292}
\end{aligned}$$

De (6.291) y (6.292) queda satisfecha la condición,

$$(\varepsilon \otimes id)(\mathcal{F}_{\bar{\theta}}) = (id \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}_{\bar{\theta}}). \tag{6.293}$$

Para $\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu)$,

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu) &= \mathcal{F}_{\bar{\theta}} \Delta(X^\mu) \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{-1} \\
&= e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta} (X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu) e^{-\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta}. \tag{6.294}
\end{aligned}$$

Esta expresión se desarrolla con la ayuda de la relación de Hadamar (6.193) teniendo en cuenta la identificación,

$$\Psi = X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu, \tag{6.295}$$

$$\Lambda = \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta. \tag{6.296}$$

Dado que,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} [X^\alpha \otimes X^\beta, X^\mu \otimes 1] + \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} [X^\alpha \otimes X^\beta, 1 \otimes X^\mu] \\ &= \frac{i}{2} \bar{\theta}^{\alpha\beta} ([X^\alpha, X^\mu] \otimes X^\beta + X^\alpha \otimes [X^\beta, X^\mu]) = 0. \end{aligned} \quad (6.297)$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu) = X^\mu \otimes 1 + 1 \otimes X^\mu. \quad (6.298)$$

Por otro lado para $\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu)$,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu) &= \mathcal{F}_{\bar{\theta}} \Delta(P_\mu) \mathcal{F}_{\bar{\theta}}^{-1} \\ &= e^{\frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta} (P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu) e^{-\frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta}. \end{aligned} \quad (6.299)$$

Identificando,

$$\Psi = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu, \quad (6.300)$$

$$\Lambda = \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha \otimes X^\beta, \quad (6.301)$$

se obtiene para el primer conmutador,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} [X^\alpha \otimes X^\beta, P_\mu \otimes 1] + \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} [X^\alpha \otimes X^\beta, 1 \otimes P_\mu] \\ &= \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} ([X^\alpha, P_\mu] \otimes X^\beta + X^\alpha \otimes [X^\beta, P_\mu]) \\ &= \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\mu\beta} (1 \otimes X^\beta) + \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\mu} (X^\alpha \otimes 1). \end{aligned} \quad (6.302)$$

En tanto,

$$\frac{1}{2!} [\Lambda, [\Lambda, \Psi]] = 0. \quad (6.303)$$

Por lo cual,

$$\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu) = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu + \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\mu\beta} (1 \otimes X^\beta) + \frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\mu} (X^\alpha \otimes 1). \quad (6.304)$$

Para la antipoda $S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu)$,

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\mu) &= u S(X^\mu) u^{-1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (X^\alpha)^n S(X^\beta)^n \right] S(X^\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n S(X^\alpha)^n (X^\beta)^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (X^\alpha)^n (-X^\beta)^n \right] (-X^\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (-X^\alpha)^n (X^\beta)^n \right] \\ &= -e^{-\frac{i \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} X^\alpha X^\beta} X^\mu e^{\frac{i \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} X^\alpha X^\beta}. \end{aligned} \quad (6.305)$$

Identificando términos,

$$\Psi = X^\mu, \quad (6.306)$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2} \bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta. \quad (6.307)$$

De aquí,

$$[\Lambda, \Psi] = -\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}[X^\alpha X^\beta, X^\mu] = 0. \quad (6.308)$$

Por lo cual de la relación de Hadamar (6.193) se obtiene,

$$S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu) = -P_\mu. \quad (6.309)$$

Por otro lado para la antipoda $S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu)$,

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu) &= uS(P_\mu)u^{-1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (X^\alpha)^n S(X^\beta)^n \right] S(P_\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n S(X^\alpha)^n (X^\beta)^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (X^\alpha)^n (-X^\beta)^n \right] (-P_\mu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} \right)^n (-X^\alpha)^n (P^\beta)^n \right] \\ &= -e^{-\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} X^\alpha X^\beta} P_\mu e^{\frac{i\bar{\theta}_{\alpha\beta}}{2} X^\alpha X^\beta}. \end{aligned} \quad (6.310)$$

Al identificar términos,

$$\Psi = P_\mu, \quad (6.311)$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta, \quad (6.312)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= -\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}[X^\alpha X^\beta, P_\mu] \\ &= -\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta} X^\alpha [X^\beta, P_\mu] - \frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta} [X^\alpha, P_\mu] X^\beta \\ &= \frac{i}{2}\bar{\theta}_{\mu\alpha} X^\alpha - \frac{i}{2}\bar{\theta}_{\mu\beta} X^\beta = 0. \end{aligned} \quad (6.313)$$

Por lo tanto finalmente se tiene,

$$S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu) = -P_\mu. \quad (6.314)$$

Las counidades de esta algebra $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3, 1))$ son las mismas que las del algebra no deformada $U(H(3, 1))$,

$$\varepsilon^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(X^\nu) = \varepsilon^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(P_\mu) = 0. \quad (6.315)$$

6.4.7. Deformaciones de Jordan para $U(iso(3, 1))$.

Por ultimo en esta sección se presentaran diferentes deformaciones para el álgebra universal envolvente $U(iso(3, 1))$. Estas deformaciones serán compatibles con las algebras deformadas que se obtienen a partir de los productos- \star encontrados en el capitulo anterior.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_\theta}(iso(3, 1))$.

En el álgebra de jordan $U^{\mathcal{F}_\theta}(iso(3, 1))$ los generadores satisfacen el algebra,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (6.316)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu, \quad (6.317)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha}. \quad (6.318)$$

Con las relaciones,

$$\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(M_{\mu\nu}) = \mathcal{F}_\theta \Delta(M_{\mu\nu}) \mathcal{F}_\theta^{-1}, \quad \Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\sigma) = \mathcal{F}_\theta \Delta(P_\sigma) \mathcal{F}_\theta^{-1}, \quad (6.319)$$

$$\varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}(M_{\mu\nu}) = \varepsilon(M_{\mu\nu}) = \varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}(P_\sigma) = \varepsilon(P_\sigma) = 0, \quad (6.320)$$

$$S^{\mathcal{F}_\theta}(M_{\mu\nu}) = uS(M_{\mu\nu})u^{-1}, \quad S^{\mathcal{F}_\theta}(P_\sigma) = uS(P_\sigma)u^{-1}, \quad (6.321)$$

definidas a partir del twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F}_\theta = e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta}; \quad \theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}. \quad (6.322)$$

Con estas estructuras el algebra $U^{\mathcal{F}_\theta}(iso(3, 1))$ forma un algebra de Hopf. En la sección anterior se mostró que \mathcal{F}_θ satisface las condiciones de coasociatividad y counidad (6.255) y (6.258).

El coproducto $\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu)$ es el mismo que el del algebra deformada $U^{\mathcal{F}_\theta}H(3, 1)$,

$$\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(P_\mu) = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu. \quad (6.323)$$

Para el caso de $\Delta^{\mathcal{F}_\theta}(M_\mu)$,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}_\theta}(M_{\mu\nu}) &= \mathcal{F}_\theta \Delta(M_{\mu\nu}) \mathcal{F}_\theta^{-1} \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta} (M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta}. \end{aligned} \quad (6.324)$$

Identificando,

$$\Psi = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}, \quad (6.325)$$

$$\Lambda = \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_\alpha \otimes P_\beta. \quad (6.326)$$

Para el conmutador,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}([P_\alpha, M_{\mu\nu}] \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes [P_\beta, M_{\mu\nu}]) \\ &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \left[(\eta_{\mu\alpha}P_\nu - \eta_{\nu\alpha}P_\mu) \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes (\eta_{\mu\beta}P_\nu - \eta_{\nu\beta}P_\mu) \right]. \end{aligned} \quad (6.327)$$

Dado que este ultimo conmutador solo tiene dependencia de P' s que conmutan entre si, se tiene,

$$\frac{i}{2!}[\Lambda, [\Lambda, \Psi]] = 0. \quad (6.328)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{F}_\theta}(M_{\mu\nu}) &= M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} \\ &+ \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \left[(\eta_{\mu\alpha}P_\nu - \eta_{\nu\alpha}P_\mu) \otimes P_\beta + P_\alpha \otimes (\eta_{\mu\beta}P_\nu - \eta_{\nu\beta}P_\mu) \right] \end{aligned} \quad (6.329)$$

La antipoda $S^{\mathcal{F}\theta}(P_\mu)$ es la misma que la del algebra deformada $U^{\mathcal{F}\theta}H(3,1)$,

$$S^{\mathcal{F}\theta}(P_\mu) = -P_\mu. \quad (6.330)$$

Para $S^{\mathcal{F}\theta}(M_{\mu\nu})$,

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{F}\theta}(M_{\mu\nu}) &= uS(M_{\mu\nu})u^{-1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n P_\alpha^n S(P_\beta^n) \right] S(M_{\mu\nu}) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n S(P_\alpha^n) P_\beta^n \right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n P_\alpha^n (-P_\beta^n) \right] (-M_{\mu\nu}) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} \right)^n (-P_\alpha^n) P_\beta^n \right] \\ &= -e^{-\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} P_\alpha P_\beta} M_{\mu\nu} e^{\frac{i\theta^{\alpha\beta}}{2} P_\alpha P_\beta}. \end{aligned} \quad (6.331)$$

Identificando términos,

$$\Psi = M_{\mu\nu}, \quad (6.332)$$

$$\Lambda = -\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta, \quad (6.333)$$

se obtiene,

$$\begin{aligned} [\Lambda, \Psi] &= -\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} (P_\alpha [P_\beta, M_{\mu\nu}] + [P_\alpha, M_{\mu\nu}] P_\beta) \\ &= -\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} (\eta_{\mu\beta} P_\alpha P_\nu - \eta_{\nu\beta} P_\alpha P_\mu + \eta_{\mu\alpha} P_\nu P_\beta - \eta_{\nu\alpha} P_\mu P_\beta) = 0 \end{aligned} \quad (6.334)$$

Por lo tanto de la relación de Hadamar (6.193) se obtiene finalmente,

$$S^{\mathcal{F}\theta}(M_{\mu\nu}) = -M_{\mu\nu}. \quad (6.335)$$

Las counidades para $U^{\mathcal{F}\theta}(iso(3,1))$ son las mismas que las de $U(iso(3,1))$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}\theta^{kl}}(iso(3,1))$.

En el caso del algebra deformada $U^{\mathcal{F}\theta^{kl}}(iso(3,1))$ el twist de Drinfeld es el siguiente,

$$\mathcal{F}_{\theta^{kl}} = e^{i\theta^{kl} P_k \wedge P_l}; \quad [k, l - \text{fijos}]; \quad (\theta^{kl} = -\theta^{lk}); \quad a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a. \quad (6.336)$$

Los coproductos que se obtienen para esta algebra, a partir de (6.170) son los siguientes,

$$\Delta_{\theta^{kl}}(P_\mu) = \Delta_0(P_\mu), \quad (6.337)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta^{kl}}(M_{\mu\nu}) &= \Delta_0(M_{\mu\nu}) - \theta^{kl} [(\eta_{k\mu} P_\nu - \eta_{k\nu} P_\mu) \otimes P_l + P_k \otimes (\eta_{l\mu} P_\nu - \eta_{l\nu} P_\mu)] \\ &\quad + \theta^{kl} [(\eta_{l\mu} P_\nu - \eta_{l\nu} P_\mu) \otimes P_k + P_l \otimes (\eta_{k\mu} P_\nu - \eta_{k\nu} P_\mu)]. \end{aligned} \quad (6.338)$$

De (6.170) se puede demostrar que tanto las counidades como las antipodas del algebra $U^{\mathcal{F}\theta^{kl}}(iso(3,1))$, son las mismas que las de $U(iso(3,1))$,

$$S_0(P_\mu) = -P_\mu; \quad S_0(M_{\mu\nu}) = -M_{\mu\nu}; \quad \epsilon(M_{\mu\nu}) = \epsilon(P_\mu) = 0. \quad (6.339)$$

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\theta^{0i}}}(iso(3, 1))$.

Para obtener el algebra $U^{\mathcal{F}_{\theta^{0i}}}(iso(3, 1))$ se considera el twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F}_{\theta^{0i}} = e^{i\theta^{0i}P_0 \wedge P_i}; \quad [i - \text{fijo}]; \quad (\theta^{0i} = -\theta^{i0}). \quad (6.340)$$

Los coproductos que se obtienen a partir de (6.170) para esta algebra son,

$$\Delta_{\theta^{0i}}(P_\mu) = \Delta_0(P_\mu), \quad (6.341)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta^{0i}}(M_{\mu\nu}) = & \Delta_0(M_{\mu\nu}) - \theta^{0i}[(\eta_{0\mu}P_\nu - \eta_{0\nu}P_\mu) \otimes P_i + P_0 \otimes (\eta_{i\mu}P_\nu - \eta_{i\nu}P_\mu)] \\ & + \theta^{0i}[(\eta_{i\mu}P_\nu - \eta_{i\nu}P_\mu) \otimes P_0 + P_i \otimes (\eta_{0\mu}P_\nu - \eta_{0\nu}P_\mu)]. \end{aligned} \quad (6.342)$$

Las counidades y antipodas son las mismas que en el caso de $U(iso(3, 1))$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_\kappa}(iso(3, 1))$.

Para el caso de $U^{\mathcal{F}_\kappa}(iso(3, 1))$ el twist de Drinfeld es,

$$\mathcal{F}_\kappa = e^{\frac{i}{2\kappa}P_k \wedge M_{i0}}; \quad [i, k - \text{fijo}, \quad i \neq k], \quad (6.343)$$

Teniendo en cuenta (6.170) se obtiene,

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(P_\mu) = & \Delta_0(P_\mu) + \sinh\left(\frac{1}{2\kappa}P_k\right) \wedge (\eta_{i\mu}P_0 - \eta_{0\mu}P_i) \\ & + (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa}P_k\right) - 1) \perp (\eta_{i\mu}P_i - \eta_{0\mu}P_0), \end{aligned} \quad (6.344)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_\kappa(M_{\mu\nu}) = & \Delta_0(M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\kappa}M_{i0} \wedge (\eta_{\mu k}P_\nu - \eta_{\nu k}P_\mu) \\ & + i[M_{\mu\nu}, M_{i0}] \wedge \sinh\left(\frac{1}{2\kappa}P_k\right) \\ & - [[M_{\mu\nu}, M_{i0}], M_{i0}] \perp (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa}P_k\right) - 1) \\ & + \frac{1}{2\kappa}M_{i0} \sinh\left(\frac{1}{2\kappa}P_k\right) \perp (\psi_k P_i - \chi_k P_0) \\ & - \frac{1}{2\kappa}(\psi_k P_0 - \chi_k P_i) \wedge M_{i0} (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa}P_k\right) - 1), \end{aligned} \quad (6.345)$$

donde,

$$\psi_k = \delta_{\nu k} \delta_{0\mu} - \delta_{\mu k} \delta_{0\nu}; \quad \chi_k = \delta_{\nu k} \delta_{i\mu} - \delta_{\mu k} \delta_{i\nu}; \quad a \perp b = a \otimes b + b \otimes a. \quad (6.346)$$

Las counidades y antipodas son las mismas que en el caso de $U(iso(3, 1))$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\hat{\kappa}}}(iso(3, 1))$.

El twist de Drinfeld para generar el algebra $U^{\mathcal{F}_{\hat{\kappa}}}(iso(3, 1))$ es,

$$\mathcal{F}_{\hat{\kappa}} = e^{\frac{i}{2\hat{\kappa}}P_0 \wedge M_{kl}}; \quad [k, l - \text{fijos}]. \quad (6.347)$$

A partir de (6.170) se obtiene,

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{\kappa}}(P_\mu) = & \Delta_0(P_\mu) + \sinh\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}}P_0\right) \wedge (\eta_{k\mu}P_l - \eta_{l\mu}P_k) \\ & + (\cosh\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}}P_0\right) - 1) \perp (\eta_{k\mu}P_k + \eta_{l\mu}P_l), \end{aligned} \quad (6.348)$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta_{\hat{\kappa}}(M_{\mu\nu}) &= \Delta_0(M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\hat{\kappa}} M_{kl} \wedge (\eta_{\mu 0} P_\nu - \eta_{\nu 0} P_\mu) \\
&\quad + i [M_{\mu\nu}, M_{kl}] \wedge \sin\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_0\right) \\
&\quad + [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}] \perp (\cos\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_0\right) - 1) \\
&\quad + \frac{1}{2\hat{\kappa}} M_{kl} \sin\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_0\right) \perp (\psi_0 P_k - \chi_0 P_l) \\
&\quad + \frac{1}{2\hat{\kappa}} (\psi_0 P_l + \chi_0 P_k) \wedge M_{kl} (\cos\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_0\right) - 1),
\end{aligned} \tag{6.349}$$

con,

$$\psi_\lambda = \eta_{\nu\lambda} \eta_{l\mu} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{l\nu}; \quad \chi_\lambda = \eta_{\nu\lambda} \eta_{k\mu} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{k\nu}. \tag{6.350}$$

Tanto las counidades como las antipodas de esta algebra son las mismas que las de $U(iso(3, 1))$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\hat{\kappa}}}(iso(3, 1))$.

De forma análoga se construye el algebra $U^{\mathcal{F}_{\hat{\kappa}}}(iso(3, 1))$ a partir del twist,

$$\mathcal{F}_{\hat{\kappa}} = e^{\frac{i}{2\hat{\kappa}} P_i \wedge M_{kl}}; \quad [i, k, l - \text{fijos}, i \neq k, l]. \tag{6.351}$$

Con (6.170) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\hat{\kappa}}(P_\mu) &= \Delta_0(P_\mu) + \sin\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_i\right) \wedge (\eta_{k\mu} P_l - \eta_{l\mu} P_k) \\
&\quad + (\cos\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_i\right) - 1) \perp (\eta_{k\mu} P_k + \eta_{l\mu} P_l),
\end{aligned} \tag{6.352}$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta_{\hat{\kappa}}(M_{\mu\nu}) &= \Delta_0(M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\hat{\kappa}} M_{kl} \wedge (\eta_{\mu i} P_\nu - \eta_{\nu i} P_\mu) \\
&\quad + i [M_{\mu\nu}, M_{kl}] \wedge \sin\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_i\right) \\
&\quad + [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}] \perp (\cos\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_i\right) - 1) \\
&\quad + \frac{1}{2\hat{\kappa}} M_{kl} \sin\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_i\right) \perp (\psi_i P_k - \chi_i P_l) \\
&\quad + \frac{1}{2\hat{\kappa}} (\psi_i P_l + \chi_i P_k) \wedge M_{kl} (\cos\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_i\right) - 1),
\end{aligned} \tag{6.353}$$

Las counidades y las antipodas de esta algebra son las mismas que para el caso de $U(iso(3, 1))$.

6.4.8. Composición de twist's.

Si $\mathcal{J}, \mathcal{G} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ son dos elementos twist's, entonces estos satisfacen las relaciones,

$$\mathcal{J}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{J} = \mathcal{J}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{J}, \tag{6.354}$$

$$(\varepsilon \otimes id)\mathcal{J} = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{J} = 1, \tag{6.355}$$

y

$$\mathcal{G}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{G} = \mathcal{G}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{G}, \quad (6.356)$$

$$(\varepsilon \otimes id)\mathcal{G} = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{G} = 1. \quad (6.357)$$

El elemento que surge como composición de estos elementos,

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} \circ \mathcal{J} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad (6.358)$$

también es un twist, es decir, este también satisface las propiedades,

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}, \quad (6.359)$$

$$(\varepsilon \otimes id)\mathcal{F} = (id \otimes \varepsilon)\mathcal{F} = 1. \quad (6.360)$$

A continuación se demostraran estas propiedades. Para (6.360),

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id)\mathcal{F} &= (\varepsilon \otimes id)\mathcal{G}\mathcal{J} \\ &= (id \otimes \varepsilon)\mathcal{G}\mathcal{J} \\ &= (id \otimes \varepsilon)\mathcal{F} = 1. \end{aligned} \quad (6.361)$$

Mientras que para (6.359),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{F} &= \mathcal{G}_{12}\mathcal{J}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{G}\mathcal{J} \\ &= \mathcal{G}_{12}\mathcal{J}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{G}(\Delta \otimes id)\mathcal{J} \\ &= \mathcal{G}_{12}\mathcal{J}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{G}\mathcal{J}_{12}^{-1}\mathcal{J}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{J} \\ &= \mathcal{G}_{23}\mathcal{J}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{G}\mathcal{J}_{23}^{-1}\mathcal{J}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{J} \\ &= \mathcal{G}_{23}\mathcal{J}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{G}(id \otimes \Delta)\mathcal{J} \\ &= \mathcal{F}_{23}(id \otimes \Delta)\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (6.362)$$

Esta propiedad resulta bastante útil, ya que permite encontrar nuevas deformaciones a partir de unas ya conocidas.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\theta^{kl}, \kappa}}(iso(3, 1))$.

El algebra $U^{\mathcal{F}_{\theta^{kl}, \kappa}}(iso(3, 1))$ se obtiene con el twist de Drinfeld,

$$\mathcal{F}_{\theta^{kl}, \kappa} = \mathcal{F}_{\theta^{kl}} \cdot \mathcal{F}_{\kappa} = \mathcal{F}_{\kappa} \cdot \mathcal{F}_{\theta^{kl}} = e^{\frac{i}{2\kappa} P_k \wedge M_{i0} + i\theta^{kl} P_k \wedge P_l}, \quad i \neq k, l - \text{ hijos.} \quad (6.363)$$

Haciendo uso de (6.170) se obtiene,

$$\Delta_{\theta^{kl}, \kappa}(P_{\mu}) = \Delta_0(P_{\mu}) + \sinh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) \wedge (\eta_{i\mu} P_0 - \eta_{0\mu} P_i) \quad (6.364)$$

$$+ (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) - 1) \perp (\eta_{i\mu} P_i - \eta_{0\mu} P_0), \quad (6.365)$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta^{kl}, \kappa}(M_{\mu\nu}) &= \Delta_0(M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\kappa} M_{i0} \wedge (\eta_{\mu k} P_\nu - \eta_{\nu k} P_\mu) \\
&+ i [M_{\mu\nu}, M_{i0}] \wedge \sinh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) \\
&- [[M_{\mu\nu}, M_{i0}], M_{i0}] \perp (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) - 1) \\
&+ \frac{1}{2\kappa} M_{i0} \sinh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) \perp (\psi_k P_i - \chi_k P_0) \quad (6.366) \\
&- \frac{1}{2\kappa} (\psi_k P_0 - \chi_k P_i) \wedge M_{i0} (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) - 1) \\
&- \theta^{kl} [(\eta_{k\mu} P_\nu - \eta_{k\nu} P_\mu) \otimes P_l + P_k \otimes (\eta_{l\mu} P_\nu - \eta_{l\nu} P_\mu)] \\
&+ \theta^{kl} [(\eta_{l\mu} P_\nu - \eta_{l\nu} P_\mu) \otimes P_k + P_l \otimes (\eta_{k\mu} P_\nu - \eta_{k\nu} P_\mu)] \\
&+ \theta^{kl} [[M_{\mu\nu}, M_{i0}], P_k] \perp \sinh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) P_l \\
&- \theta^{kl} [[M_{\mu\nu}, M_{i0}], P_l] \perp \sinh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) P_k \\
&+ i\theta^{kl} [[[M_{\mu\nu}, M_{i0}], M_{i0}], P_k] \wedge (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) - 1) P_l \\
&- i\theta^{kl} [[[M_{\mu\nu}, M_{i0}], M_{i0}], P_l] \wedge (\cosh\left(\frac{1}{2\kappa} P_k\right) - 1) P_k \quad (6.367)
\end{aligned}$$

Al igual que en los casos anteriores las counidades y las antipodas son las mismas que para $U(\mathfrak{iso}(3, 1))$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}}(\mathfrak{iso}(3, 1))$.

El algebra $U^{\mathcal{F}_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}}(\mathfrak{iso}(3, 1))$ se obtiene a partir del twist,

$$\mathcal{F}_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}} = e^{\frac{i}{2\hat{\kappa}} P_0 \wedge M_{kl} + i\theta^{0i} P_0 \wedge P_i}; \quad i \neq k, l, 0 - \text{fijos}. \quad (6.368)$$

A través de (6.170) se encuentran los coproductos,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta^{0i}, \hat{\kappa}}(P_\mu) &= \Delta_0(P_\mu) + \sin\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_0\right) \wedge (\eta_{k\mu} P_l - \eta_{l\mu} P_k) \quad (6.369) \\
&+ (\cos\left(\frac{1}{2\hat{\kappa}} P_0\right) - 1) \perp (\eta_{k\mu} P_k + \eta_{l\mu} P_l),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}(M_{\mu\nu}) &= \Delta_0(M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\bar{\kappa}} M_{kl} \wedge (\eta_{\mu 0} P_\nu - \eta_{\nu 0} P_\mu) \\
&+ i [M_{\mu\nu}, M_{kl}] \wedge \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) \\
&+ [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}] \perp (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) - 1) \\
&+ \frac{1}{2\bar{\kappa}} M_{kl} \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) \perp (\psi_0 P_k - \chi_0 P_l) \\
&+ \frac{1}{2\bar{\kappa}} (\psi_0 P_l + \chi_0 P_k) \wedge M_{kl} (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) - 1) \\
&- \theta^{0i} [(\eta_{0\mu} P_\nu - \eta_{0\nu} P_\mu) \otimes P_i + P_0 \otimes (\eta_{i\mu} P_\nu - \eta_{i\nu} P_\mu)] \\
&+ \theta^{0i} [(\eta_{i\mu} P_\nu - \eta_{i\nu} P_\mu) \otimes P_0 + P_i \otimes (\eta_{0\mu} P_\nu - \eta_{0\nu} P_\mu)] \\
&+ \theta^{0i} [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], P_0] \perp \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) P_i \\
&- \theta^{0i} [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], P_i] \perp \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) P_0 \\
&- i\theta^{0i} [[[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}], P_0] \wedge (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) - 1) P_i \\
&+ i\theta^{0i} [[[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}], P_i] \wedge (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_0\right) - 1) P_0.
\end{aligned} \tag{6.370}$$

Las counidades y las antipodas son las mismas que para $U(iso(3, 1))$.

Deformación de Jordan $U^{\mathcal{F}_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}}(iso(3, 1))$.

El algebra $U^{\mathcal{F}_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}}(iso(3, 1))$ se obtiene a partir del twist,

$$\mathcal{F}_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}} = e^{\frac{i}{2\bar{\kappa}} P_i \wedge M_{kl} + i\theta^{0i} P_0 \wedge P_i}; \quad i \neq k, l, 0 - \text{fijos}. \tag{6.371}$$

A través de (6.170) se encuentran los coproductos,

$$\Delta_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}(P_\mu) = \Delta_0(P_\mu) + \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) \wedge (\eta_{k\mu} P_l - \eta_{l\mu} P_k) \tag{6.372}$$

$$+ (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) - 1) \perp (\eta_{k\mu} P_k + \eta_{l\mu} P_l), \tag{6.373}$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta^{0i}, \bar{\kappa}}(M_{\mu\nu}) &= \Delta_0(M_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\bar{\kappa}} M_{kl} \wedge (\eta_{\mu i} P_\nu - \eta_{\nu i} P_\mu) \\
&+ i [M_{\mu\nu}, M_{kl}] \wedge \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) \\
&+ [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}] \perp (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) - 1) \quad (6.374) \\
&+ \frac{1}{2\bar{\kappa}} M_{kl} \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) \perp (\psi_i P_k - \chi_i P_l) \\
&+ \frac{1}{2\bar{\kappa}} (\psi_i P_l + \chi_i P_k) \wedge M_{kl} (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) - 1) \\
&- \theta^{0i} [(\eta_{0\mu} P_\nu - \eta_{0\nu} P_\mu) \otimes P_i + P_0 \otimes (\eta_{i\mu} P_\nu - \eta_{i\nu} P_\mu)] \\
&+ \theta^{0i} [(\eta_{i\mu} P_\nu - \eta_{i\nu} P_\mu) \otimes P_0 + P_i \otimes (\eta_{0\mu} P_\nu - \eta_{0\nu} P_\mu)] \\
&+ \theta^{0i} [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], P_0] \perp \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) P_i \\
&- \theta^{0i} [[M_{\mu\nu}, M_{kl}], P_i] \perp \sin\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) P_0 \\
&- i\theta^{0i} [[[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}], P_0] \wedge (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) - 1) P_i \\
&+ i\theta^{0i} [[[M_{\mu\nu}, M_{kl}], M_{kl}], P_i] \wedge (\cos\left(\frac{1}{2\bar{\kappa}} P_i\right) - 1) P_0. \quad (6.375)
\end{aligned}$$

Al igual que en los casos anteriores, las counidades y las antipodas son las mismas que para $U(iso(3, 1))$.

De esta manera mediante la técnica de deformación de Drinfeld, es posible un algebra deformada solo en el sector coalgebraico, manteniendo las mismas relaciones del sector algebraico. En el siguiente capítulo se aplicaran estas técnicas con la finalidad de obtener una geometría no-conmutativa.

Capítulo 7

Cosmología.

7.1. Introducción

Los universos cíclicos no son un tema nuevo en la literatura. En 1922 Friedmann [152] presentó el primer modelo oscilante que era consistente con la teoría general de Einstein. Este universo surgió de forma muy natural en medio del debate; si el universo debía ser abierto o cerrado. Este modelo se formuló bajo las condiciones ($K > 0$ y $\Lambda = 0$). La gráfica que representa el radio de la 3-esfera que describe el universo espacial en función del tiempo, tiene la forma de una cicloide. Este modelo traía consigo dos serios problemas. El primero de ellos fue que entre cada uno de estos ciclos existen *rebotes* que tienen lugar en cada etapa en la cual el radio espacial se hace cero. En cada uno de esos puntos se genera una singularidad espacio-temporal (donde la curvatura espacio-tiempo se hace infinita). Esto último hace que las ecuaciones de Einstein pierdan validez en esa vecindad. Esto último llamó la atención del propio Einstein en 1930 [153]. El segundo problema que presentaba este modelo fue su descripción termodinámica. Específicamente este modelo no podía abordar la segunda ley de la termodinámica, ya que aquí no existe un constante incremento de la entropía debido a que en el modelo el término de materia se trata de un fluido perfecto, cuya entropía es constante. Por lo tanto la expansión es reversible, aunque a una velocidad finita. En modelos más realistas, la generación de entropía es inevitable y surge de varias fuentes como el efecto de viscosidad en la creación de partículas. El incremento en la entropía conduce a la no reversibilidad que prohíbe idénticas oscilaciones. Fue Richard Tolman en 1934 [154, 155] el primero en presentar una modificación al modelo de Friedmann que resolvía de forma satisfactoria este segundo problema. Tolman sabía que si los ciclos eran cada vez más largos, entonces el problema de la entropía estaba solucionado. En este punto él era consciente que para fluidos perfectos, las ecuaciones de movimiento eran reversibles, por lo cual cada ciclo necesariamente tendría que ser idéntico al anterior. Para construir un universo en donde el ciclo posterior tiene una duración mayor al anterior, Tolman postuló la presencia de un fluido viscoso. La viscosidad conduce a la asimetría en la presión durante la expansión y la contracción, que a su vez se traduce en una progresión de ciclos cada vez más largos y los radios máximos de expansión son cada vez mayores. Este modelo no pudo abordar el problema de las singularidades entre ciclos, por lo tanto

tuvo que asumir esto a priori. Mas tarde con la teoría de la inflación cósmica fue posible describir la evolución instantes posteriores al Big Bang.

Los modelos cíclicos quedaron prácticamente olvidados por mucho tiempo. Esto en gran medida se debió a que la justificación de un rebote en modelos cíclicos necesariamente implica hacer uso de los efectos de la gravedad cuántica. Hasta hace apenas a fechas recientes han surgido cálculos detallados que han dado luz sobre el tema. En gravedad cuántica de lazos las ecuaciones de Friedmann semiclásicas han tenido correcciones que producen rebotes [156, 157]. El modelo ekpyrotic en teoría de cuerdas es otro ejemplo que incorpora los rebotes de forma natural [158]. En este modelo la transición de un ciclo al siguiente tiene lugar mediante una colisión de D-branas [148]. Desde este punto de vista, la frontera del choque de branas correspondería a la teoría efectiva 4D [149]. Al aproximarse dos branas entre si ocurriría una contracción que convertiría energía gravitacional en energía cinética de branas [149]. Al momento de la colisión habría una conversión de energía cinética de branas en materia y radiación lo cual sería el combustible del big bang [149, 151]. La colisión y el rebote en la frontera de intersección de las branas correspondería a la transición desde un big crunch y un big bang [150]. Estos resultados fueron motivados en esta área de investigación dando lugar al surgimiento muchos nuevos resultados. Partiendo del hecho que la entropía del universo hoy es finita, e introduciendo la hipótesis que el incremento de la entropía a través de cada rebote conserva esta propiedad, Zeldovich y Novikov [159] han estimado el número de ciclos anteriores a un estado inicial, el cual se postula no debe ser singular. Por otro lado en [160] se analizó el comportamiento de modelos con diferentes combinaciones de materia, radiación y constante cosmológica para valores tanto positivos como negativos de Λ . El estudio mostró la existencia de una Λ_c tal que para $\Lambda > \Lambda_c$ se interrumpen las oscilaciones una vez alcanzado el punto máximo del ciclo e inicia un régimen de Sitter. En este mismo trabajo se mostró que después de un gran número de oscilaciones ciertos modelos cíclicos anisotropicos sufren una transición isotrópica como consecuencia del incremento de la entropía.

Un concepto importante para los universos cíclicos es el de histéresis. En [189] se muestra que la histéresis cosmológica es causada por una asimetría en las ecuaciones de estado, durante los procesos de expansión y contracción. Esta asimetría es la responsable de la producción de un *loop de histéresis*, el cual se define como $\oint PdV$ para cada ciclo. En este trabajo se muestra que valores negativos en $\oint PdV$, se traducen en incrementos en la amplitud máxima (i.e expansión) de ciclos consecutivos. Este tipo de universos tendrían como características que reducirían su densidad isotrópica a lo largo del tiempo y además estarían provistos de una flecha del tiempo.

En este campo de investigación uno de los enigmas mas importantes es la fuente responsable de generación de entropía. En [161] se considera que la transferencia de energía irreversible desde el campo gravitacional hasta la generación de partículas sería esta fuente, mientras que en [162, 163, 164] se plantea que la evaporación de agujeros negros sería la responsable.

El modelo estándar de la cosmología está basado en un universo propuesto por Friedmann, Robertson y Walker (FRW), adicionado con un principio de inflación propuesto por Guth [171]. Este modelo predice un universo maximalmente simétrico con simetría radial y en expansión. La hipótesis fundamental de este modelo lo constituye el principio cosmológico, el cual establece que a gran escala el universo es homogéneo e isotrópico. Esto significa que el universo

observado es el mismo para cualquier observador, sin importar el punto desde el cual este observando o la dirección desde la que se haga; es decir a gran escala la distribución de materia en el universo es independiente de la dirección y el lugar desde donde se haga la observación. La hipótesis cosmológica esta basada en la distribución de galaxias y la radiación cósmica de fondo. Este modelos es sumamente efectivo para predecir la evolución del universo actual, sin embargo tienen serios problemas cuando se trata de abarcar la evolución en las primeras etapas del universo. A partir de las observaciones hechas sobre el fondo cósmico de microondas (CMB) se sabe que el universo en una etapa temprana fue sumamente inhomogeneo y anisotrópico [172]. También se sabe por evidencias observacionales que la transición entre un estado y otro debió ocurrir de forma sumamente drástica. Por lo anterior, para realizar el estudio de este periodo de transición es necesario estudiar modelos cosmológicos inhomogeneos y anisotropicos en el regimen de Plank.

La no-conmutatividad recientemente ha sido considerada como uno de los rangos fundamental del espacio-tiempo a nivel escala de Plank [180]. Por lo tanto se espera que de esta característica del espacio-tiempo emerjan algunos de los principales efectos de gravedad cuántica [181, 182]. En [177] es interpretado como un campo magnético en una escala de horizontes. En [178, 179] se plantea que la no-conmutatividad afecta campos materiales o de norma jugando un roll importante en la producción de inflación. En el contexto de teoría de cuerdas, la no-conmutatividad aparece cuando las D-branas son colocadas sobre un campo tensorial constante antisimétrico Neveu-Schwartz $B_{\mu\nu}$ [180]. Bajo estas condiciones sobre la D-brana existen ciertas coordenadas \hat{x}^μ , tal que se satisface la relación no-conmutativa:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

donde $\theta^{\mu\nu}$ es un tensor constante antisimétrico real, cuyas entradas son del orden de longitudes de Plank l_p . Por lo tanto, esto conduce a la relación de incertidumbre a nivel espacio-tiempo

$$\Delta\hat{x}^\mu \Delta\hat{x}^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|. \quad (7.2)$$

A raíz de este y otros resultados [181] ha existido un gran interés por describir teorías físicas sobre espacios no-conmutativos.

En la sección (§5.2.1) se mostró como a partir del elemento twist $\mathcal{F} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}P_\rho \otimes P_\sigma}$ era posible construir el producto no-conmutativo,

$$f \star g = \mu \{ e^{-\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \otimes \partial_\sigma} f \otimes g \}. \quad (7.3)$$

Aquí se considero $P_\kappa = -i\partial_\kappa$. A partir de (7.3) es fácil mostrar que a primer orden el conmutador- \star coincide con el paréntesis de Poisson:

$$\begin{aligned} [f, g]_\star &= f \star g - g \star f \\ &= \mu \left\{ \left(1 \otimes 1 + \frac{i}{2} \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \otimes \partial_\sigma + \mathcal{O}(\theta^2) \right) f \otimes g \right\} \\ &\quad - \mu \left\{ \left(1 \otimes 1 + \frac{i}{2} \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \otimes \partial_\sigma + \mathcal{O}(\theta^2) \right) g \otimes f \right\} \\ &= \frac{i}{2} \theta^{\rho\sigma} \{f, g\}_P + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \quad (7.4)$$

En este trabajo realizaremos un análisis no-conmutativo a primer orden sobre el universo de Kantowsky-Sachs. La no-conmutatividad se introducirá sobre las ecuaciones de movimiento de las variables dinámicas $\Omega(t), P_\Omega(t), \beta(t), P_\beta(t)$ de este universo. Esto se logrará fijando la algebra de Poisson (7.32). A partir de estas ecuaciones de movimiento se encontrara la evolución del volumen característico $l^3(t)$ para este universo. Posteriormente se realizara una breve discusión sobre los resultados obtenidos.

Antes de iniciar este estudio, es importante adelantar que los resultados que se obtendrán al final de este capitulo, tal vez puedan resultarle al lector en cierto sentido alentadores y tal vez ambiciosos sin embargo es importará aclarar aquí, dos cosas muy importantes: a) la no-conmutatividad que se introduce es solo a primer orden, b) este es un modelo de juguete que permite explorar algunas ideas muy básicas sobre la introducción de no-conmutatividad sobre un espacio fase.

7.2. Universo Kantowski-Sach

Han habido muchos intentos por implementar modelos que describan universos inhomogeneos y anisotropicos, sin embargo la primera condición lleva a problemas de estabilidad que aun no se ha resuelto. Uno de los modelos anisotropicos mas utilizados en la cosmología es el de Kantowski-Sach [183]. Por otro lado este universo (a diferencia por ejemplo de Friedmann-Roberson-Walker) esta caracterizado por medio de dos parámetros (coordenadas), por lo tanto brinda una excelente oportunidad (simplicidad) para abordar los efectos de no-conmutatividad en espacio fase.

El modelo de universo de Kantowski-Sach, es el único modelo que no tiene un subgrupo transitivo tridimensional. Tiene secciones espaciales $S^2 \times \mathbb{R}$, con un grupo de simetría cuatro dimensional. El elemento de linea para este universo se escribe como,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)dr^2 + b^2(t)d\theta^2 + b^2(t)\sin^2(\theta)d\varphi^2 \quad (7.5)$$

En la teoría general de la relatividad, las transformaciones de simetría son las transformaciones de difeomorfismos. El grupo de Poincaré constituye un caso particular de estas transformaciones. Por lo tanto para construirle una lagrangiana a la teoría general de la relatividad es necesario tener un escalar que sea invariante ante transformaciones de coordenadas, que dependa solamente de las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (este será el campo dinámico), y de sus derivadas que en principio pueden ser de cualquier orden. El caso mas simple y no trivial de un escalar que satisface esta propiedad es el escalar R de Ricci, que solo depende de $g_{\mu\nu}$ y de sus primeras y segundas derivadas. De hecho R es el único escalar que se puede construir que no depende de derivadas superiores a orden dos.

Partiendo del conocimiento, que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio tiempo, adicionado a la condicionante que $\sqrt{-\det g}d^4x$ es un invariante de volumen ante difeomorfismos es como se construye la acción para la gravedad (ver §2.3),

$$S_{[EH]} = \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-\det g} R + \mathcal{L}_{materia} \right). \quad (7.6)$$

Es a partir de esta acción como en esta sección encontramos el Hamiltoniano asociado a (7.5).

Primeramente se procederá a eliminar la dependencia espacial en (7.6). Debido a que $\sqrt{-det \bar{g}} = a(t)b^2(t)N(t)\sin(\theta)$ y que R solo tiene dependencia temporal (esto se mostrara explícitamente mas adelante), la única contribución temporal dentro de la $S_{[EH]}$ la aporta $\sin(\theta)$. Definiendo $V_0 = \int \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ y restringiendo este estudio para el caso de $\mathcal{L}_{materia} = 0$, entonces se tiene

$$S_{[EH]} = \frac{V_0}{16\pi G} \int \left(a(t)b^2(t)N(t) R \right) dt. \quad (7.7)$$

De aquí fácilmente se puede identificar el lagrangiano $L = a(t)b^2(t)N(t)R$, esto debido a que $S = K \int L dt$. Ahora procederemos a calcular explícitamente R .

A partir de (7.5) sabemos que,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2(t)\sin^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Por lo tanto, $g_{11} = -N^2(t)$, $g_{22} = a^2(t)$, $g_{33} = b^2(t)$, $g_{44} = b^2(t)\sin^2(\theta)$ son las únicas componentes no-nulas de este tensor métrico. De aquí es posible encontrar los símbolos de Christoffel de segundo orden mediante

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}), \quad (7.9)$$

obteniéndose los siguientes que son diferentes de cero

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}; & \Gamma_{11}^0 &= \frac{a(t)\dot{a}(t)}{N^2(t)}; & \Gamma_{22}^0 &= \frac{b(t)\dot{b}(t)}{N^2(t)}; \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{b(t)\dot{b}(t)\sin^2(\theta)}{N^2(t)}; & \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}; & \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}; \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta)\cos(\theta); & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}; & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Ahora se procederá a obtener los tensores de Ricci mediante,

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} - \partial_{\mu}\Gamma_{\kappa\nu}^{\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda}, \quad (7.11)$$

encontrado como resultado,

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{a(t)b(t)N(t)} \left(b(t)\ddot{a}(t)N(t) - b(t)\dot{N}(t)\dot{a}(t) + 2a(t)\ddot{b}(t)N(t) \right. \\ &\quad \left. - 2a(t)\dot{N}(t)\dot{b}(t) \right), \\ R_{11} &= -\frac{a(t)}{N^3(t)b(t)} \left(b(t)\ddot{a}(t)N(t) - b(t)\dot{N}(t)\dot{a}(t) + 2\dot{b}(t)\dot{a}(t)N(t) \right), \\ R_{22} &= -\frac{1}{a(t)N^3(t)} \left(b(t)a(t)\ddot{b}(t)N(t) + b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t)N(t) + a(t)N^3(t) \right. \\ &\quad \left. - b(t)a(t)\dot{N}(t)\dot{b}(t) + a(t)N(t)\dot{b}^2(t) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} = \frac{1}{N^3(t)a(t)} & \left(-b(t)a(t)\ddot{b}(t)N(t) + b(t)a(t)\dot{\ddot{b}}(t)N(t)\cos^2(\theta) \right. \\
& + b(t)a(t)\dot{N}(t)\dot{b}(t) - b(t)a(t)\dot{N}(t)\dot{b}(t)\cos^2(\theta) - a(t)N^3(t) \\
& - b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t)N(t) + b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t)N(t)\cos^2(\theta) + a(t)N^3(t)\cos^2(\theta) \\
& \left. - a(t)N(t)\dot{b}^2(t) + a(t)N(t)\dot{b}^2(t)\cos^2(\theta) \right). \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Es a partir de estos tensores de Ricci como se obtiene el escalar de curvatura mediante la contracción de índices

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (7.13)$$

dando por resultado

$$\begin{aligned}
R = -\frac{2}{b^2(t)a(t)N^3(t)} & \left(b^2(t)N(t)\ddot{a}(t) + 2a(t)b(t)N(t)\ddot{b}(t) - b^2(t)\dot{N}(t)\dot{a}(t) \right. \\
& \left. - 2a(t)b(t)\dot{N}(t)\dot{b} + 2b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t)N(t) + a(t)N^3(t) + a(t)N(t)\dot{b}^2(t) \right). \quad (7.14)
\end{aligned}$$

Es importante destacar como se menciona anteriormente que este escalar solo tiene dependencia temporal. Por otro lado al introducir este escalar de curvatura en (7.7), puede verse que las dos primeras integrales contienen términos con segundas derivadas temporales. Estas integrales pueden ser sustituidas por integrales que solo contengan términos con primeras derivadas temporales. Esto se logra mediante la formula de integración por partes: $\int f(a, b, N)\ddot{r} dt = f(a, b, N)\dot{r} - \int \dot{f}(a, b, N)\dot{r} dt$. Esto ultimo no solo simplifica la expresión sino que además el hecho que solo existan a lo sumo términos con derivadas temporales de primer orden en el lagrangiano sera importante para obtener, mas adelante los momentos asociados. Teniendo en cuenta esto ultimo obtenemos finalmente para (7.7),

$$S_{[EH]} = -\frac{V_0}{4\pi G} \int \left(-\frac{a(t)\dot{b}^2(t) + 2b(t)\dot{a}(t)\dot{b}(t)}{2N(t)} + \frac{N(t)a(t)}{2} \right) dt. \quad (7.15)$$

De aquí se desprende el lagrangiano

$$L(a, b, N, \dot{a}, \dot{b}) = -\frac{a(t)\dot{b}^2(t) + 2b(t)\dot{a}(t)\dot{b}(t)}{2N(t)} + \frac{N(t)a(t)}{2}, \quad (7.16)$$

donde el subíndice es una etiqueta que especifica las variables con las que hasta ahora se ha trabajado. Ahora bien, debido a que mas adelante requeriremos obtener las ecuaciones de movimiento asociadas a nuestras variables dinámicas via paréntesis de Poisson, es necesario introducir una parametrización de nuestras variables que nos permitan evitar lidiar con paréntesis de Poisson de funciones inversas. En la parametrización de Misner [193],

$$a(t) = \exp(\sqrt{3}\beta(t)), \quad b(t) = \exp(-2\sqrt{3}(\beta(t) + \Omega(t))). \quad (7.17)$$

A partir de esta parametrización se construye el siguiente Lagrangiano

$$\tilde{L}(a, b, N, \dot{\beta}, \dot{\Omega}) = \frac{3a(t)b^2(t)}{2N(t)} \left(\dot{\beta}^2(t) - \dot{\Omega}^2(t) \right) + \frac{N(t)a(t)}{2}. \quad (7.18)$$

Para esto ultimo, solo fue necesario tener en cuenta en (7.16) que a partir de (7.17) se tiene $\dot{a}(t) = \sqrt{3}a(t)\dot{\beta}(t)$ y $\dot{b}(t) = -\sqrt{3}b(t)(\dot{\beta}(t) + \dot{\Omega}(t))$. Ahora se procede a encontrar los momentos asociados a las variables dinámicas. Esto se logra mediante $\Pi_\xi(t) = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\xi}(t)$. De aquí,

$$\Pi_\beta(t) = \frac{3a(t)b^2(t)}{N(t)}\dot{\beta}(t), \quad \Pi_\Omega(t) = -\frac{3a(t)b^2(t)}{N(t)}\dot{\Omega}(t), \quad \Pi_N = 0. \quad (7.19)$$

A partir de los momentos asociados a las variables dinámicas y el lagrangiano es posible construir el hamiltoniano mediante la siguiente transformación de Legendre

$$H = \Pi_\beta\dot{\beta}(t) + \Pi_\Omega\dot{\Omega}(t) + \Pi_N\dot{N}(t) - \tilde{L}. \quad (7.20)$$

De aquí, teniendo en cuenta (7.16) y (7.18) se tiene

$$H(a, b, N, \dot{\beta}, \dot{\Omega}) = \frac{3a(t)b^2(t)}{2N}(\dot{\beta}^2(t) - \dot{\Omega}^2(t)) - \frac{N(t)a(t)}{2}. \quad (7.21)$$

Esta expresión se puede escribir en términos de los momentos asociados con ayuda de (7.19), obteniéndose

$$H(a, b, N, \Pi_\beta, \Pi_\Omega) = \frac{N(t)}{6a(t)b^2(t)}(\Pi_\beta^2(t) - \Pi_\Omega^2(t)) - \frac{N(t)a(t)}{2}. \quad (7.22)$$

Finalmente se aplican la transformación: $a(t) \rightarrow \beta(t)$ y $b(t) \rightarrow \Omega(t)$ con ayuda de (7.16),

$$\tilde{H}(\beta, \Omega, N, \Pi_\beta, \Pi_\Omega) = \frac{N(t)}{6} \exp(\sqrt{3}\beta(t) + 2\sqrt{3}\Omega(t)) (\Pi_\beta^2(t) - \Pi_\Omega^2(t) - 6 \exp(-2\sqrt{3}\Omega(t))). \quad (7.23)$$

Este es el hamiltoniano que se buscaba. Ahora se procederá a encontrar las constricciones del sistema. El Hamiltoniano (7.23) se puede expresar como $\tilde{H} = N(t)\Upsilon(t)$ con

$$\Upsilon(t) = \frac{1}{6} \exp(\sqrt{3}\beta(t) + 2\sqrt{3}\Omega(t)) (\Pi_\beta^2(t) - \Pi_\Omega^2(t) - 6 \exp(-2\sqrt{3}\Omega(t))). \quad (7.24)$$

De la tercera ecuación en (7.19) surge la primera constricción del sistema $\Pi_N \approx 0$. Esta constricción trae consigo una segunda constricción,

$$\dot{\Pi}_N \equiv \{\Pi_N(t), \tilde{H}(t)\} = \{\Pi_N(t), N(t)\Upsilon(t)\} = -\Upsilon(t) \approx 0. \quad (7.25)$$

A partir de (7.24) se puede observar fácilmente que

$$\{\Upsilon(t), \Pi_N(t)\} = 0. \quad (7.26)$$

El hecho de que se satisfaga la relación

$$\{\Upsilon(t), \tilde{H}(t)\} + u(t)\{\Upsilon(t), \Pi_N(t)\} = 0, \quad (7.27)$$

con $u(t)$ un multiplicador de Lagrange arbitrario en el espacio fase, implica que no existen mas constricciones en el sistema y en virtud de (7.26) se deduce que tanto $\Pi_N(t)$ como $\Upsilon(t)$ son constricciones de primera clase. Por lo tanto el Hamiltoniano total del sistema se puede expresar de la forma

$$H_T = \tilde{H} + u(t)\Pi_N(t). \quad (7.28)$$

Es a partir de esto ultimo como se obtienen los siguientes paréntesis de Poisson,

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &\approx \{\beta(t), H_T(t)\}, & \dot{\Omega}(t) &\approx \{\Omega(t), H_T(t)\}, & \dot{N}(t) &\approx \{N(t), H_T(t)\}, \\ \dot{\Pi}_\beta(t) &\approx \{\Pi_\beta(t), H_T(t)\}, & \dot{\Pi}_\Omega(t) &\approx \{\Pi_\Omega(t), H_T(t)\}, & \dot{\Pi}_N(t) &\approx \{\Pi_N(t), H_T(t)\}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Las ecuaciones *I, II, IV, V* constituyen el conjunto usual de ecuaciones de Euler-Lagrange para los grados de libertad $\beta(t)$ y $\Omega(t)$. La ecuación *VI* se satisface trivialmente de (7.25). La ecuación *III* define la libertad de norma definida sobre $N(t)$. Como consecuencia de esta ecuación $u(t) = \dot{N}(t)$ (i.e. una función arbitraria dependiente del tiempo). El hecho que $\Upsilon(t) \approx 0$, permite su descomposición de forma arbitraria. Una elección valida es $\Upsilon(t) = \wp(t)\Im(t) \approx 0$ con $\wp(t) = (1/6)\exp(\sqrt{3}\beta + 2\sqrt{3}\Omega)$ y $\Im(t) = \Pi_\beta^2 - \Pi_\Omega^2 - 6\exp(-2\sqrt{3}\Omega) \approx 0$. Al considerar esto ultimo y fijando la norma $N(t) = \wp^{-1}$, se obtiene el siguiente hamiltoniano restringido a la norma mencionada

$$\tilde{H}_T^\wp = \Pi_\beta^2(t) - \Pi_\Omega^2(t) - 6\exp(-2\sqrt{3}\Omega(t)). \quad (7.30)$$

7.2.1. Ecs. de movimiento y no-conmutatividad

Ahora se procederá a encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema. Para una variable dinámica arbitraria $\varphi(t)$, sabemos que la ecuación de movimiento asociada esta dada por: $\dot{\varphi}(t) = \{\varphi(t), \tilde{H}_T^\wp\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= -2\Pi_\beta(t)\{\Pi_\beta(t), \varphi(t)\} + 2\Pi_\Omega(t)\{\Pi_\Omega(t), \varphi(t)\} \\ &\quad - 12\sqrt{3}\exp(-2\sqrt{3}\Omega(t))\{\Omega(t), \varphi(t)\}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Para esto ultimo se usaron las propiedades del paréntesis de Poisson $\{\alpha, \beta\} = -\{\beta, \alpha\}$, $\{\alpha\beta, \gamma\} = \alpha\{\beta, \gamma\} + \beta\{\alpha, \gamma\}$ y $\{e^{a\alpha}, \beta\} = ae^{a\alpha}\{\alpha, \beta\}$. Ahora introduciremos la no-conmutatividad por medio de Θ y $\bar{\Theta}$ fijando los siguientes paréntesis de Poisson

$$\{\Omega(t), \Pi_\Omega(t)\} = 1, \quad \{\beta(t), \Pi_\beta(t)\} = 1, \quad \{\Omega(t), \beta(t)\} = \Theta, \quad \{\Pi_\Omega(t), \Pi_\beta(t)\} = \bar{\Theta}, \quad (7.32)$$

donde se ha considerado que Θ y $\bar{\Theta}$ tienen unidades de longitud de Planck. Por lo tanto a partir de (7.31) y (7.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}(t) &= -2\Pi_\Omega(t), \\ \dot{\Pi}_\Omega(t) &= 2\bar{\Theta}\Pi_\beta(t) - 12\sqrt{3}e^{-2\sqrt{3}\Omega(t)}, \\ \dot{\beta}(t) &= 2\Pi_\beta(t) - 12\sqrt{3}\Theta e^{-2\sqrt{3}\Omega(t)}, \\ \dot{\Pi}_\beta(t) &= 2\bar{\Theta}\Pi_\Omega(t). \end{aligned} \quad (7.33)$$

El volumen característico de este universo se puede expresar en términos de las variables dinámicas mediante [187]

$$l^3(t) = a(t)b^2(t) = \exp(-\sqrt{3}\beta(t) - 2\sqrt{3}\Omega(t)). \quad (7.34)$$

Debido a que el sistema (7.33) es no-lineal y las ecuaciones están acopladas, este no admite soluciones analíticas. Aquí se ha obtenido el comportamiento de $l^3(t)$ resolviendo (7.33) e introduciendo en (7.34) de forma numérica. La dinámica de este sistema se presenta a continuación de forma gráfica En to-

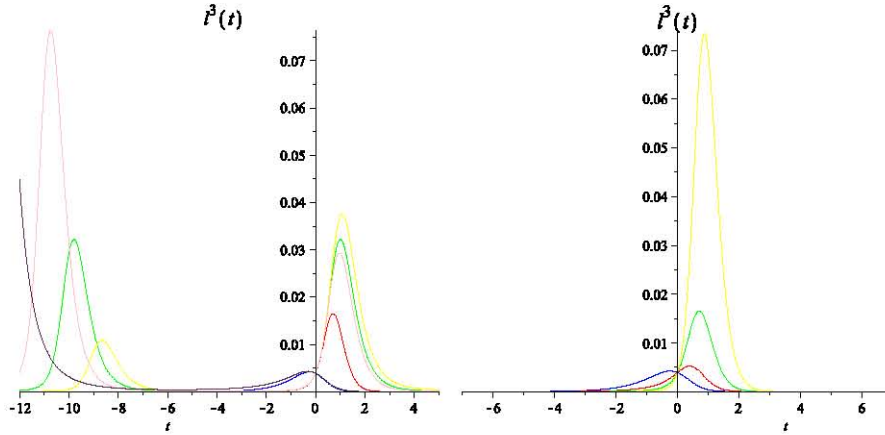


Figura 7.1: Evolución de $l^3(t)$ para un universo de Kantowski-Sach. A) Universo conmutativo-azul ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0$), universo no-conmutativo solo en coordenadas-rojo ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0$), universo no-conmutativo solo en momentos-negro ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,12$), universo cíclico amplitud maxima constante-verde ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,12$), universo cíclico amplitud maxima en contracción-rosa ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,18$), universo cíclico amplitud maxima en expansión-amarilla ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,23$). B) Universos no-conmutativos solo en coordenadas. Azul ($\Theta = 0,1, \bar{\Theta} = 0$), rojo ($\Theta = 2,5, \bar{\Theta} = 0$), verde ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0$), amarillo ($\Theta = 7,5, \bar{\Theta} = 0$).

do este estudio se tomaron las condiciones iniciales, $\Omega(0) = 1,1$, $\beta(0) = 1$, $\Pi_\Omega(0) = 0,1$, $\Pi_\beta(0) = 0,4$. En la Fig. 7.1A se muestran las posibles evoluciones de este universo según sus valores de $(\Theta, \bar{\Theta})$. Se trata de seis familias de evolución: conmutativa (línea azul), no-conmutativa solo en coordenadas (línea roja), no-conmutativa solo en momentos (línea violeta), cíclica con amplitud máxima constante (línea verde), cíclica con amplitud máxima en contracción (línea rosa) y cíclica con amplitud máxima en expansión (línea amarilla). Todas las propiedades que se mencionaran a continuación serán únicamente referidas a $(\Theta, \bar{\Theta})$. Es importante tener presente que algunas de estas propiedades pueden modificarse de forma cualitativa a partir de un cambio en las condiciones iniciales $(\Omega(0), \beta(0), \Pi_\Omega(0), \Pi_\beta(0))$.

7.2.2. Análisis de resultados

Los universos conmutativos ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0$) son una familia de universos que solo presenta un ciclo a lo largo del tiempo. Nacen en $-\infty$, se expanden hasta alcanzar una longitud máxima y luego se contraen asintóticamente por cero hacia ∞ . Tanto la longitud máxima como su periodo depende exclusivamente de las condiciones iniciales.

Los universos no-conmutativos solo en coordenadas ($\Theta \neq 0, \bar{\Theta} = 0$) son una familia de universos los cuales comparten todas las características de los universos conmutativos adicionados con que ahora no solo las condiciones iniciales tienen control sobre la amplitud máxima sino que ahora también Θ . Como se puede ver en la Fig. 7.1B un incremento en el valor de Θ se traduce en un incremento en la amplitud máxima.

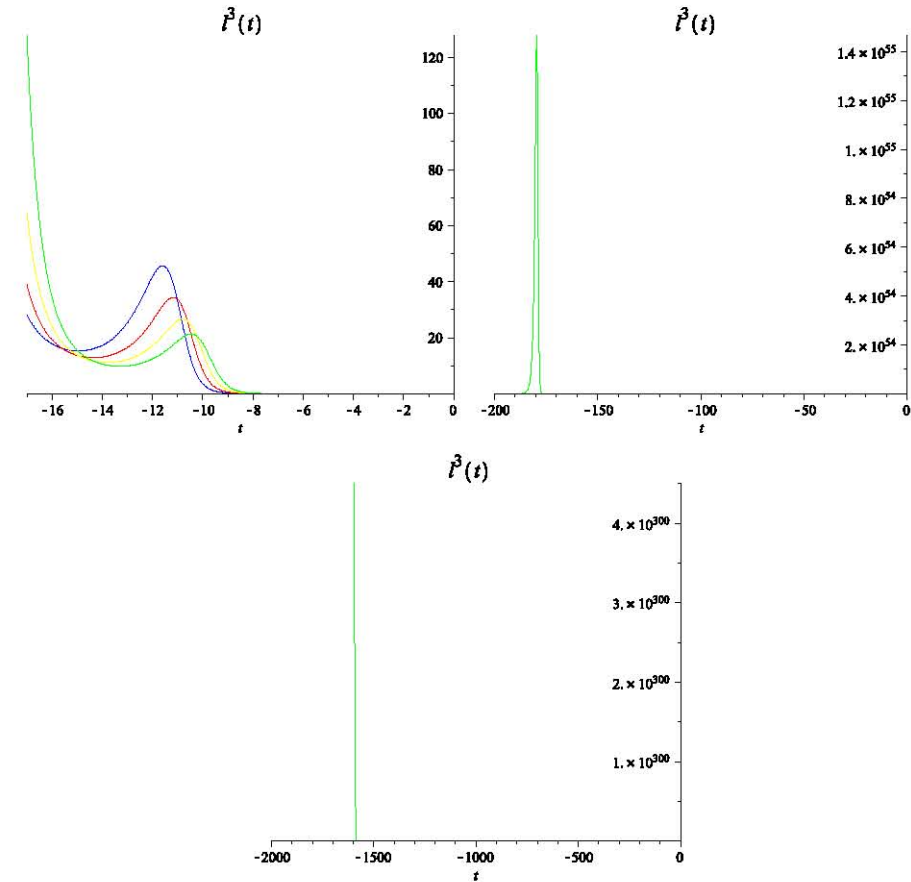


Figura 7.2: Evolución de $l^3(t)$ para un universo de Kantowski-Sach. A) Universos no-conmutativos solo en momentos. Azul ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,19$), rojo ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,2$), amarillo ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,21$), verde ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,22$). B) Universo no-conmutativos solo en momentos-verde ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,01$). C) Universo no-conmutativos solo en momentos-verde ($\Theta = 0, \bar{\Theta} = 0,001$).

Los universos no-conmutativos solo en momentos ($\Theta = 0, \bar{\Theta} \neq 0$) son una familia de universos que presentan al menos dos ciclos a lo largo de su existencia. La cantidad de esos ciclos depende del valor de $\bar{\Theta}$, entre mas grande sea el valor de $\bar{\Theta}$ mayor sera la cantidad de ciclos presentes. En la Fig. 7.2A se puede observar claramente un segundo ciclo (por problemas de escala no aparece el primer ciclo el cual es prácticamente simétrico en el origen ver Fig. 7.1A línea color violeta) y advertirse el nacimiento de un tercer ciclo. Una característica importante aquí es la ubicación del segundo ciclo. Entre mas pequeño sea el valor de $\bar{\Theta}$ mas alejado del origen se encontrara este segundo ciclo (ver Fig. 7.2A). En la Fig. 7.2B se puede observar que el segundo ciclo no aparecerá hasta $t \approx -180$ para un valor de $\bar{\Theta} = 0,01$, mientras que no sera hasta $t \approx -1580$ que aparecerá el segundo ciclo para $\bar{\Theta} = 0,001$ en la Fig. 7.2C. Para estos dos universos puede verse que ya no existe un tercer ciclo. También de Fig. 7.2A,B,C puede verse que al reducir el valor $\bar{\Theta}$ el valor máximo de la amplitud del segundo ciclo se incrementa de forma

sumamente notable. De aquí $\bar{\Theta} = 0,2 \rightarrow A \sim 40$, $\bar{\Theta} = 0,01 \rightarrow A \sim 1,4 \times 10^{55}$ y $\bar{\Theta} = 0,001 \rightarrow A \sim 4 \times 10^{300}$. Extrapolando estas dos características podemos pensar que para $\bar{\Theta} = 0$ existirá un (único) segundo ciclo en $t = -\infty$, con una $A \sim \infty$. Los ciclos para este universo son de tipo contracción, es decir la amplitud máxima de un ciclo sera menor que la del ciclo antecesor.

Los ciclos de tipo expansion, son aquellos para los que la amplitud máxima de un ciclo es siempre mayor que el del ciclo antecesor. Ahora se procederá a realizar el análisis para universos con $(\Theta \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0)$.

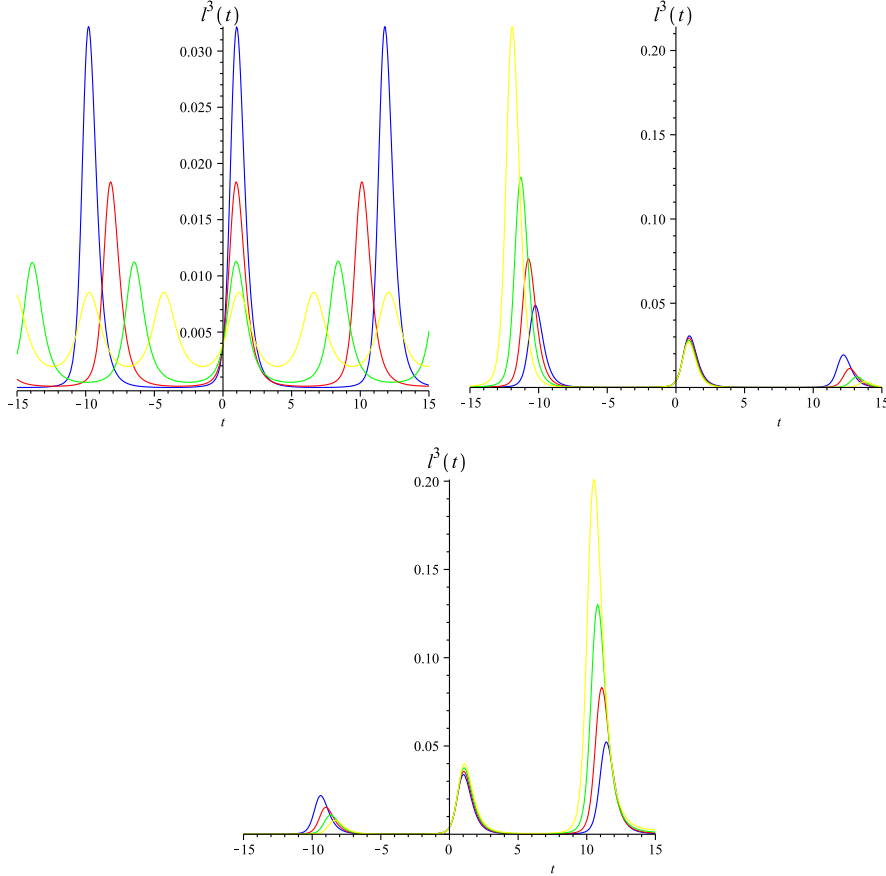


Figura 7.3: Evolución de $l^3(t)$ para un universo de Kantowski-Sach. A) Universos cíclicos amplitud máxima constante: amarillo ($\Theta = 2, \bar{\Theta} = 0,5$), verde ($\Theta = 3, \bar{\Theta} = 0,3335$), rojo ($\Theta = 4, \bar{\Theta} = 0,25$), azul ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,2$). B) Universos cíclicos amplitud máxima en contracción: amarillo ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,16$), verde ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,17$), rojo ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,18$), azul ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,19$). C) Universos cíclicos amplitud máxima en expansión: azul ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,21$), rojo ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,22$), verde ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,23$), amarillo ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,24$).

Dado un valor $\Theta_\xi \neq 0$ siempre existe un cierto $\bar{\Theta}_\xi \neq 0$ tal que el universo resultante $(\Theta_\xi, \bar{\Theta}_\xi)$ es de amplitud máxima constante. En la Fig. 7.3A se muestran cuatro de estos universos. Así por ejemplo, para $\Theta = 2$ fijo existe un $\bar{\Theta}$ en esto caso 0.5, que hace que la pareja $(\Theta_\xi = 2, \bar{\Theta}_\xi = 0,5)$ genere un universo

cíclico de amplitud máxima constante (línea amarilla).

Si valor elegido $\bar{\Theta}_s < \bar{\Theta}_\xi$ entonces el universo resultante $(\Theta_\xi, \bar{\Theta}_s)$ será de amplitud máxima en contracción. En la Fig. 7.3B se muestra una familia de universos cíclicos de amplitud máxima en contracción los cuales tienen $(\Theta_\xi = 5)$ y $\bar{\Theta}_s = 0,16, 0,17, 0,18, 0,19 < \bar{\Theta}_\xi = 0,20$. Como se puede ver en esta figura al incrementar el valor de $\bar{\Theta}$ se reduce la amplitud de los ciclos.

Si valor elegido $\bar{\Theta}_s > \bar{\Theta}_\xi$ entonces el universo resultante $(\Theta_\xi, \bar{\Theta}_s)$ será de amplitud máxima en expansión. En la Fig. 7.3C se muestra una familia de universos cíclicos de amplitud máxima en expansión los cuales tienen $(\Theta_\xi = 5)$ y $\bar{\Theta}_s = 0,21, 0,22, 0,23, 0,24 > \bar{\Theta}_\xi = 0,20$. Como se puede ver en esta figura al incrementar el valor de $\bar{\Theta}$ se aumenta la amplitud de los ciclos.

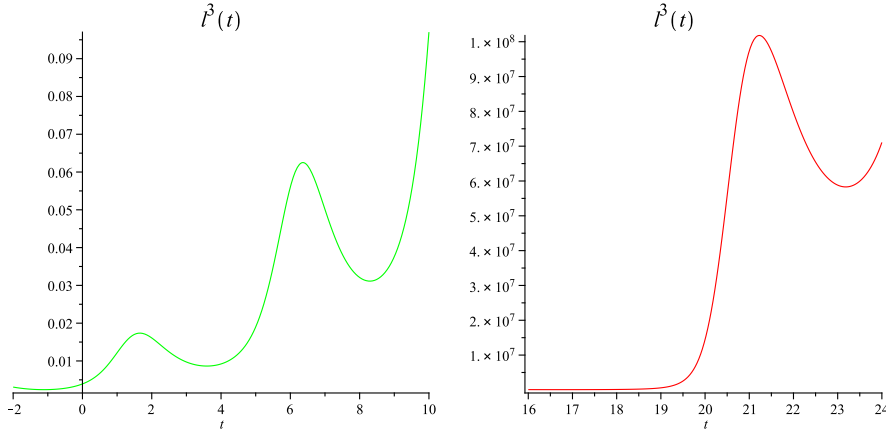


Figura 7.4: Evolución de $l^3(t)$ para un universo de Kantowski-Sachs. A) Universo cíclico amplitud máxima en expansión-verde ($\Theta = 2, \bar{\Theta} = 0,6$). B) Universo cíclico amplitud máxima en expansión-rojo ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,40$).

Una propiedad importante de estos universos cíclicos ($\Theta \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$) es que la frecuencia/periodo solo depende del valor de $\bar{\Theta}$. Así pues una vez fijado Θ_ξ independientemente del valor $\bar{\Theta}$ el universo resultante $(\Theta_\xi, \bar{\Theta})$ tendrá el mismo periodo/frecuencia independientemente que se trate de un universo cíclico de amplitud constante, contracción o expansión. Esto se puede ver a través de Fig. 7.3A,B,C. El universo de amplitud constante-azul ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,2$) de la Fig. 7.3A tiene el mismo periodo/frecuencia que toda la familia de universos cíclicos de amplitud en contracción de la Fig. 7.3B ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,16, 0,17, 0,18, 0,19$) y de toda la familia de universos cíclicos en expansión de la Fig. 7.3C ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,21, 0,22, 0,23, 0,24$).

Los universos cíclicos de amplitud en expansión tienen la propiedad que sus ciclos no son simétricos. En la Fig. 7.4A puede advertirse muy bien esto último. Este hecho implica la existencia de una asimetría entre las presiones de expansión y contracción en cada ciclo. Aquí específicamente, $P_{exp} < P_{cont}$. También estos universos tienen la característica que son muy susceptibles a variaciones de $\bar{\Theta}$. En la Fig. 7.4B puede verse que para ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,40$) el universo adquiere una $A \sim 1 \times 10^8$. Este ciclo correspondería al tercer ciclo positivo (no se muestra) de Fig. 3C ($\Theta = 5, \bar{\Theta} = 0,21$)-azul el cual tendría apenas una $A \sim 0,08$.

7.3. Universo de K-S cuántico no-conmutativo.

En la sección (§2.6.3) se mostró que la ecuación de Wheeler-Dewitt para un universo de Kantowski-Sach viene dada por

$$\left[\Pi_\beta^2 - \Pi_\Omega^2 - 6 \exp(-2\sqrt{3}\Omega) \right] \psi(\Omega, \beta) = 0, \quad (7.35)$$

donde $\Omega = \hat{\Omega}, \Pi_\beta = -i\partial/\partial\beta, \Pi_\Omega = -i\partial/\partial\Omega$ son operadores que satisfacen el algebra conmutativa: $[\Omega, \beta] = 0, [\Pi_\Omega, \Pi_\beta] = 0, [\Omega, \Pi_\Omega] = [\beta, \Pi_\beta] = i\hbar$. Esto ultimo por construcción. Por otro lado en la sección (§6.2.2) se presento una técnica de deformación algebraica. Esta técnica consiste en el mapeo de una algebra conmutativa cuyos generadores X^μ, Π_ν , satisfacen el álgebra: $[X^\mu, X^\nu] = 0, [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = 0, [X^\mu, \Pi_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu$, en una algebra no-conmutativa en coordenadas y momentos, i.e los generadores $\hat{X}^\mu, \hat{\Pi}_\nu$ satisfacen el algebra: $[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu] = i\hbar\Theta^{\mu\nu}, [\hat{\Pi}_\mu, \hat{\Pi}_\nu] = i\hbar\bar{\Theta}_{\mu\nu}, [\hat{X}^\mu, \hat{\Pi}_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu$. Explícitamente se mostró que este mapeo venia dado por

$$\begin{aligned} X^\mu &= \frac{\varsigma}{\vartheta} \hat{X}^\mu + \frac{i\Theta^{\mu\nu}}{2\alpha\vartheta} \hat{\Pi}_\nu, \\ \Pi_\mu &= \frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\Pi}_\mu - \frac{i\bar{\Theta}_{\mu\nu}}{2\varsigma\vartheta} \hat{X}^\nu, \end{aligned} \quad (7.36)$$

donde $\vartheta = 2\alpha\varsigma - 1$. Teniendo en cuenta esto, se procederá a construir la ecuación de Wheeler-DeWitt no-conmutativa tanto en coordenadas como en momentos. Primeramente al mapear el conjunto $(\Omega, \beta, \Pi_\Omega, \Pi_\beta)$ en el conjunto $(\hat{\Omega}, \hat{\beta}, \hat{\Pi}_\Omega, \hat{\Pi}_\beta)$ via (7.36) y sustituir en (7.35) se obtiene

$$\left[\left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\Pi}_\Omega - \frac{i\bar{\Theta}}{2\varsigma\vartheta} \hat{\beta} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\vartheta} \hat{\Pi}_\beta - \frac{i\bar{\Theta}}{2\varsigma\vartheta} \hat{\Omega} \right)^2 - 6 \exp \left[-2\sqrt{3} \left(\frac{\varsigma}{\vartheta} \hat{\Omega} + \frac{i\Theta}{2\alpha\vartheta} \hat{\Pi}_\beta \right) \right] \right] \psi(\hat{\Omega}, \hat{\beta}) = 0. \quad (7.37)$$

Al desarrollar esto ultimo

$$\left[\xi^2 (\hat{\Pi}_\beta^2 - \hat{\Pi}_\Omega^2) + 2\xi\gamma (\hat{\Pi}_\Omega \hat{\beta} - \hat{\Pi}_\beta \hat{\Omega}) + \gamma^2 (\hat{\Omega}^2 - \hat{\beta}^2) - 6 \exp \left[-2\sqrt{3} (\chi \hat{\Omega} + \eta \hat{\Pi}_\beta) \right] \right] \psi(\Omega, \beta) = 0. \quad (7.38)$$

donde $\xi = \frac{\alpha}{\vartheta}$, $\chi = \frac{\varsigma}{\vartheta}$, $\eta = \frac{i\Theta}{2\alpha\vartheta}$ y $\gamma = \frac{i\bar{\Theta}}{2\varsigma\vartheta}$. Siguiendo el procedimiento de cuantización de Dirac, se promueven las variables dinámicas a operadores,

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \hat{\Omega} = \Omega; \quad \beta \rightarrow \hat{\beta} = \beta, \\ \Pi_\Omega &\rightarrow \hat{\Pi}_\Omega = -i\frac{\partial}{\partial\Omega}; \quad \Pi_\beta \rightarrow \hat{\Pi}_\beta = -i\frac{\partial}{\partial\beta}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Teniendo en cuenta que $\partial\beta/\partial\Omega = \partial\Omega/\partial\beta = 0$. La ecuación (7.38) finalmente toma la forma

$$\left[\xi^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\Omega^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \right) + \gamma^2 (\Omega^2 - \beta^2) - 6 \exp \left[-2\sqrt{3} \left(\chi\Omega - i\eta\frac{\partial}{\partial\beta} \right) \right] \right] \psi(\Omega, \beta). \quad (7.40)$$

Esta es la ecuación de Wheeler-DeWitt para un universo de Kantowski-Sach no-conmutativo en coordenadas y momentos (espacio face). Esta ecuación no admite solución analítica y en su solución numérica aun estamos trabajando.

Para el caso particular en que solo las coordenadas no-conmuten ($\Theta \neq 0, \bar{\Theta} = 0$). El hecho de considerar $\bar{\Theta} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$. Eligiendo $\alpha = \varsigma = 1 \Rightarrow \vartheta = 1 \Rightarrow \xi = \chi = 1, \eta = 1/2$.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 6 \exp \left[-2\sqrt{3} \left(\Omega - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \right] \psi(\Omega, \beta). \quad (7.41)$$

La solución de esta ecuación se obtuvo a partir del método de separación de variables [80],

$$\psi_\nu(\Omega, \beta) = e^{(i\sqrt{3}\nu\beta)} K_{i\nu} \left[4e^{-\sqrt{3}(\Omega - \sqrt{3}\nu\Theta/2)} \right]. \quad (7.42)$$

Por lo tanto un estado cuántico en este universo viene dado por una superposición de estados ,

$$\psi(\Omega, \beta) = \sum_\nu C_\nu e^{(i\sqrt{3}\nu\beta)} K_{i\nu} \left[4e^{-\sqrt{3}(\Omega - \sqrt{3}\nu\Theta/2)} \right]. \quad (7.43)$$

La amplitud de probabilidad está representada en la Fig. 7.5. Para $\Theta = 4$, se tiene un drástico cambio en comparación con el modelo conmutativo (ver Fig. 2.1). Ahora aparecen nuevos picos en la distribución, que buscan ser el estado mas probable del universo. El pico original ha cambiado en la coordenada Ω . En esta figura puede verse la existencia de túneles entre diferentes estados. De esta manera al introducir la no-conmutatividad en este minisuperuniverso se crean nuevos estados accesibles.

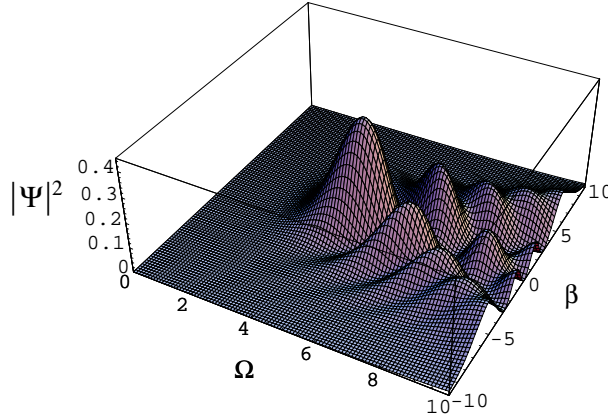


Figura 7.5: Variación de $|\psi|^2$ con respecto a Ω y β , con $\theta=4$.

7.4. Direcciones en gravedad no-conmutativa.

El interés por el estudio de teorías no-conmutativas desde el punto de vista presentado en el presente capítulo, tuvo un auge bastante importante a partir del trabajo [194].

En [196] se estudia la posibilidad de obtener una teoría de la gravedad no-conmutativa a partir de la teoría de cuerdas. El procedimiento que se usó para lograr este fin, fue el mapeo de Seiberg-Witten. Los autores esperaban con este mapeo en el límite de bajas energías obtener la teoría no-conmutativa presentada en el presente capítulo. Los resultados fueron negativos ya que el mapeo de la teoría de cuerdas obtenido contiene más términos de interacción a la teoría deformada. En [195] se presentó por primera vez una solución no trivial de la teoría no-conmutativa de la gravedad (presentada en este capítulo). La solución fue para una simetría esférica (Schwarzschild). Los resultados obtenidos presentan un comportamiento holográfico; fuera del horizonte se obtiene una estructura fuzzy, mientras que dentro de este se tiene una geometría no-conmutativa de Sitter.

En [197] se estudia la no-conmutatividad para un universo FRW con un campo escalar. Este estudio se realiza tanto para un escenario clásico como para uno cuántico. Aquí se muestra que para este universo las soluciones obtenidas son exactas. Por último en este trabajo se realiza un análisis detallado sobre los efectos de la no-conmutatividad en la evolución temprana de este universo. En [198] se presenta un universo de K-S no-conmutativo mediante un mapeo de Seiberg-Witten. En [199] usando una aproximación factorial cuántica, se obtiene una familia de potenciales escalares iso-espectrales para una cosmología cuántica Wheeler-DeWitt no-conmutativa con un potencial $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}$. En este trabajo se presenta un análisis sobre los resultados obtenidos y la relación de estos con energía oscura. En [200] se encuentran explícitamente las ecuaciones de Einstein no-conmutativas, mediante la aplicación de un twist abeliano. También aquí se presentan las soluciones no-conmutativas para un universo FRW y Schwarzschild. Por último se muestra algunas de estas soluciones son compatibles con la fenomenología conocida para bajas energías. En [201] se presenta una investigación sobre los efectos causados por la no-conmutatividad en un espacio fase generado por dos campos escalares conformes con una curvatura de fondo tipo FRW. En este trabajo se muestra que el parámetro de deformación introducido en el sector de momentos, es el único responsable sobre los efectos no-conmutativos sobre universos planos. También aquí se muestra que las soluciones no-conmutativas para campos escalares pueden ser simuladas por medio de osciladores armónicos. Por último en este artículo se emplea el teorema de Noether para explorar los efectos de la no-conmutatividad sobre las simetrías subyacentes.

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo Futuro.

El objetivo principal de esta tesis fue el estudio de diferentes técnicas de introducir no-conmutatividad en teorías físicas, específicamente en el estudio de simetrías y modelos cosmológicos. Los trabajos originales que aporta este trabajo son: se presenta un algebra de Poincaré descrita sobre un espacio fase no-conmutativo tanto en coordenadas como en momentos, también se presentan dos álgebras Heisenberg deformadas por dos diferentes twists de Drinfeld, por ultimo se presenta el estudio clásico de un universo de Kantowski-Sachs descrito sobre un espacio fase no-conmutativo tanto en coordenadas como en momentos.

Mediante la técnica de transformación de coordenadas se construyeron las álgebras deformadas tanto de Heisenberg y Poincaré denotadas por $U_{\Theta}^{\Theta}(H(3, 1))$ y $U_{\Theta}^{\Theta}(iso(3, 1))$ respectivamente. Estas álgebras se obtuvieron a partir de representar los generadores X^{μ} y P_{ν} que satisfacen las relaciones de conmutación: $[X^{\mu}, X^{\nu}] = 0$, $[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$ y $[X^{\mu}, P_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}$ en términos de \hat{X}^{μ} y \hat{P}_{ν} cuyas relaciones son: $[\hat{X}^{\mu}, \hat{X}^{\nu}] = i\Theta^{\mu\nu}$, $[\hat{P}_{\mu}, \hat{P}_{\nu}] = i\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ y $[\hat{X}^{\mu}, \hat{P}_{\nu}] = i\delta^{\mu}_{\nu}$. Aquí los parámetros de no-conmutatividad $\Theta^{\mu\nu}$ y $\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ están relacionados con la longitud de Plank l_p . Se demostró que estas álgebras deformadas realmente forman un algebra de Hopf. Se presento explícitamente el mapeo que permite pasar de una representación a la otra.

Mediante la técnica de Drinfeld, se presentaron dos deformaciones correspondientes a dos twists para el algebra de Heisenberg. Los operadores X^{μ} y P_{ν} son los generadores del grupo i.e. vectores tangentes que actúan sobre un espacio fase conmutativo de funciones. Los generadores de este espacio satisfacen las relaciones: $[x^{\mu}, x^{\nu}] = 0$ y $[p_{\mu}, p_{\nu}] = 0$. Mediante la aplicación de los twists: $\mathcal{F}_{\theta} = e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}P_{\alpha}\otimes P_{\beta}}$ y $\mathcal{F}_{\bar{\theta}} = e^{\frac{i}{2}\bar{\theta}_{\alpha\beta}X_{\alpha}\otimes X_{\beta}}$ fue posible obtener las álgebras $U^{\mathcal{F}_{\theta}}(H(3, 1))$ y $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3, 1))$. Ahora los generadores de estas álgebras deformadas actúan sobre espacios no-conmutativos. Las relaciones de conmutación para los generadores de este espacio compatible con \mathcal{F}_{θ} son: $[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}$ y $[\hat{p}_{\mu}, \hat{p}_{\nu}] = 0$, mientras que: $[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = 0$ y $[\hat{p}_{\mu}, \hat{p}_{\nu}] = i\bar{\theta}_{\mu\nu}$ para los generadores del espacio compatible con $\mathcal{F}_{\bar{\theta}}$. En este trabajo mostramos que tanto \mathcal{F}_{θ} como $\mathcal{F}_{\bar{\theta}}$ satisfacen las propiedades de un twist. Mostramos que tanto $U^{\mathcal{F}_{\theta}}(H(3, 1))$ como $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3, 1))$ realmente son álgebras de Hopf. Esta técnica de deformación tiene como característica principal que preserva el sector algebraico y solo modifica

el sector coalgebraico en este caso de $U(H(3,1))$. Presentamos explícitamente los sectores coalgebraicos: $(\Delta^{\mathcal{F}_\theta}, \varepsilon^{\mathcal{F}_\theta}, S^{\mathcal{F}_\theta})$ para $U^{\mathcal{F}_\theta}(H(3,1))$ y $(\Delta^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}, \varepsilon^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}, S^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}})$ para $U^{\mathcal{F}_{\bar{\theta}}}(H(3,1))$.

Realizamos una descripción clásica de un universo de Kantowski-Sachs sobre un espacio fase no-conmutativo tanto en coordenadas como en momentos. En este estudio no-conmutativo obtuvimos el volumen característico $l^3(t)$. A partir de los resultados de este estudio, hemos encontrado algunos puntos que nos han resultado interesantes y que consideramos merecen ser analizados con mayor profundidad:

A partir del análisis anterior se puede observar que el parámetro $\bar{\Theta}$, es fundamental en la evolución cíclica de este universo. De la Fig. 7.3A, se puede ver que estos ciclos son periódicos. Esto ultimo resulta muy interesante, ya que es fácil advertir una similitud entre este resultado y los reportados por R. Penrose [142, 143] a partir de WMAP.

De la Fig. 7.4A es posible observar la existencia de una asimetría entre las presiones de expansión y contracción. Aquí específicamente, $P_{exp} < P_{cont}$. Esta asimetría conduce a la creación de un *loop de histéresis* negativo ($\oint PdV < 0$). En [189] se demostró que para modelos anisotropicos, un valor negativo en un *loop de histéresis* conduce a un decrecimiento en la densidad de la isotropia.

Uno de los mayores atractivos de los universos cíclicos es que los problemas de *horizonte* y *planitud* son gradualmente aminorados conforme se incrementan los ciclos y el universo se hace mas viejo y mas extenso. En la Fig. 7.3a, se muestra como la amplitud de la longitud característica $l(t)$, entre un ciclo y su sucesor sufre incremento, lo que se traduce en un *loop de histéresis* negativo. Esto ultimo es una característica no única pero si importante de los potenciales inflacionarios [189]. En este caso en particular la tasa de este incremento exponencial depende directamente de los valores de Θ y $\bar{\Theta}$. Los intentos por explicar los mecanismos de inflación como consecuencia de un principio de no-conmutatividad no son nuevos. Una de las ideas centrales de la cosmología moderna es que las inhomogeneidades observadas en el universo en su etapa temprana tienen su origen en las fluctuaciones cuánticas de los campos presentes durante el periodo de inflación [173, 174]. En estos esquemas, estas perturbaciones primordiales crecieron a lo largo del tiempo debido a la inestabilidad gravitacional y eventualmente se transformaron en las estructuras observadas del universo. Aquí la forma precisa de estas fluctuaciones depende de la cinemática y dinámica del campo inflacionario empleado. Por ejemplo en los modelos inflacionarios más simples, las fluctuaciones cuánticas tienen distribuciones gaussianas [175] y son producidos mediante campos libres. En estudios más sofisticados se introducen campos más complejos que dan lugar a fluctuaciones que siguen distribuciones no gaussianas [176]. En [179] se plantea que una teoría cosmológica no-conmutativa introduce términos similares a los empleados en [176].

A partir de Fig. 7.4A, se puede ver que los *rebotes* de este universo son suaves y continuos por lo cual la evolución de este, carece de situaciones dramáticas exceptuando el punto $t = -\infty$, que es cuando la amplitud del volumen característico $l^3(t)$ de este universo se anula.

El trabajo a futuro que surge de esta investigación consiste en el análisis fenomenológico y las interpretaciones físicas que surgen de las algebras deformadas propuestas en este trabajo. Por otro lado la realización del estudio cuántico no-conmutativo tanto en coordenadas y momentos para el universo de Kantowski-Sach. Esto ultimo implica trabajar en la solución de (7.40).

Bibliografía

Capítulo 1

- [1] C. J. Isham, R. Penrose and D. W. Sciama, *Quantum Gravity*, Clarendon Press, 1975
- [2] A. Zepeda, *Física de Partículas Elementales*, Avance y Perspectiva, 2004
- [3] D. Ivanenko, *Gravitation*, Ed. URSS, 2005
- [4] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, 1995
- [5] V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994
- [6] S. Majid, *Foundations of Quantum Groups Theory*, Cambridge University Press, 2000
- [7] R. Penrose, *The Road to Reality*, Jonathan Cape, 2004
- [8] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *D-branes in String Theory I*, hep-th/9912161
- [9] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press, 1998
- [10] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *D-branes in String Theory I*, hep-th/9912161
- [11] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, *In Recent Developments in General Relativity*, ed. L. Witten, Wiley, London-New York, 1962
- [12] B. DeWitt, *Physical Review*, 160, 1963
- [13] C. M. DeWitt and J. Wheeler, *Battelle Rencontres*, Benjamin, Inc, 1968
- [14] P. A. M. Dirac, *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics*, Proc. Roy. Soc., 1926
- [15] A. Ashtekar, *Mathematical Physics towards the 21-st century*, R. Sen and A. Gersten eds., Ben Gurion University of the Negev Press, 1994
- [16] C. Rovelli, *Nucl. Physics B* 405, 1993

- [17] R. Kerner, *Noncommutative Extension of Classical Theories in Physics* (2000), math-ph/0004033 v1
- [18] B. Kostant, *Quantization and Unitary Representations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1970
- [19] P. M. Crichigno, *Espacios Maximales en teorías de Relatividad Especial Deformada*, tesis, 2005
- [20] I. M. Gelfand, and M. A. Naimark, *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sbornik 12 (1943), 197- 213.
- [21] A. Connes, *Non-Commutative Geometry*, Acad. Press., New York, 1994
- [22] M. Dubois-Violette, C.R.Acad.Sci. 307, 1989
- [23] D. Kastler and T. Schucker, *The Standard Model a a Connes-Lott*, Center de Physique Theorique CNRS, 1994
- [24] W. Heisenberg, *Über quantentheoretische Umdeutung Kinematischer und Mechanischer*, Z. Phys. 33, 879-893 (1925)
- [25] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955
- [26] A. Cardona, *Cuantización y Deformación*, Vol. I, No.(2004)
- [27] M. Martin Bordemann, *Deformation Quantization a Mini Lecture*, 2003
- [28] G. Karaali, *Deformation Quantization- a Brief Survey*, 2002
- [29] B. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, , Journal Differential Geom. 40 (1994), 213-238. J.
- [30] C. Zachos, *Deformation Quantization: Quantum Mechanics Lives and Works in Phase-Space (2002)*, hep-th/0110114 v3
- [31] S. Keppeler, *Introduction to Wigner-Weyl Calculus*, 2004
- [32] E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 1949, V.45, 99-124
- [33] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys., 2003, V.66, 157-216
- [34] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin Press, 1969
- [35] M. Chaichian, *Introduction to Quantum Groups*, World Scientific, 1996
- [36] V. G. Drinfeld, *Quantum groups* , Proc. Intern. Congress Mathematicians, Berkeley 1966 , 1 , Amer. Math. Soc. (1987) pp. 798-820

- [37] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer and J. Wess, *Noncommutative geometry and gravity*, *Classical Quantum Gravity*, 2006, V.23, 1883-1912
- [38] P. Aschieri, Ch. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp and J. Wess, *A gravity theory on noncommutative spaces*, *Classical Quantum Gravity*, 2005, V.22, 3511-3522
- [39] P. Aschieri, *Noncommutative Symetries and Gravity (2006)*, hep-th/0608172 v2

Capítulo 2

- [40] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer (Frontiers in Physics Series, Vol 74)*, Perseus Books Group, 1997
- [41] D. V. Galtsov, Lu. V. Grats and V. Ch. Zhukovski, *Campos Clásicos*, Mir, 1991
- [42] Y. S. Kim and M. E. Noz, *Theory and Applications of the Poincaré Group*, Springer, 1986
- [43] J. E. Marsden, *Lectures on Mechanics*, Springer-Verlag, 1997
- [44] D. Quillen, *Topology* **24**, 1985
- [45] D. Simms, *Differential Geometrical Methods in Math. Physics*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 1970
- [46] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko And S. P. Novikov, *Modern Geometry: Methods and Applications*, Springer , 1985
- [47] H. A. Falomir, *Notas del curso de Métodos de la Física-Matemática*, 2003
- [48] A. Montesdeoca, *Apuntes de Introducción a las Variedades Diferenciales*, La Laguna, 1997
- [49] A. Tejero and M. Balbas, *Variedades, Tensores y Física*, alqua, 2002
- [50] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko And S. P. Novikov, *Modern Geometry: Methods and Applications*, Springer , 1985
- [51] M. Spivak, *Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Volume 1)*, Peril, 1975
- [52] T. Eguchi, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, North-Holland, 1980
- [53] C. L. Aldana, *Estudio del Espacio de Fock Asociado a un Oscilador Armónico Cuántico y su Generalización a un Número Finito de Osciladores*, Tesis, 2000
- [54] A. T. Fomenko and R. S. Wadhwa, *Symplectic Geometry*, CRC Press, 1995

- [55] C. L. Siegel, *Symplectic Geometry*, Academic Press, 1964
- [56] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*, Cambridge University Press, 2004
- [57] D. Ivanenko, *Gravitation*, Ed. URSS, 2005
- [58] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, 1972
- [59] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, 2003
- [60] M. P. Hobson, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006
- [61] M. Carmeli, *Classical Field General Relativity And Gauge Theory*, Wiley-Interscience, 1982
- [62] E. Schrödinger, *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1985
- [63] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, 1975
- [64] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner, *In Recent Developments in General Relativity*, ed. L. Witten, Wiley, London-New York, 1962
- [65] M. Salgado, *Relatividad Numerica*, Memorias del III taller de la DGFMSMF, 2000
- [66] M. Alcubierre, *Relatividad*, VII Escuela Relatividad, Campos y Astrofísica, 2001
- [67] B. DeWitt, *Physical Review*, 160, 1963
- [68] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Field with Constraints*, Springer-Verlag, 1990
- [69] D. Sforza, *Cuantización de Sistemas con Covarianza General*, Tesis, 2000
- [70] J. Norbury, *General Relativity and Cosmology*, 1997
- [71] T. Thiemann, *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity (2001)*, gr-qc/0110034 v1
- [72] C. M. DeWitt and J. Wheeler, *Battelle Rencontres*, Benjamin, Inc, 1968
- [73] A. O. Barvinsky, *Unitarity Approach to quantum cosmology*, Review Section of Physics Letters 230, no 5&6 (1993) 237-267
- [74] D. L. Wiltshire, *An introduction to Quantum Cosmology (2003)*, gr-qc/0101003 v2
- [75] S. Carlip, *Quantum Gravity: a Progress Report (2001)*, gr-qc/0108040 v1

- [76] J. Halliwell, *Introduction Lectures on Quantum Cosmology*, Center for Theoretical Physics, 1990
- [77] J. N. Islam, *An Introduction to Mathematical Cosmology*, Cambridge university Press, 1992
- [78] G. F. R. Ellis, *Cosmological Models*, Cargese Lectures, 1998
- [79] G. Chaparro, *Descomposición de Dirac en la Ecuación de Wheller DeWitt para Cosmología Cuántica Canónica*, Tesis, 2003
- [80] H. Garcia-Compean, O. Obregon and C. Ramirez, Phys. Rev. Lett. 88, 161301 (2002)
- [81] G. D. Barbosa and N. Pinto-Neto, *Noncommutative Geometry and Cosmology (2004)*, gr-qc/0407111 v2
- [82] M. Parisi, *Propagación de Fotones en Gravedad Cuántica*, Tesis, 2007
- [83] T. Thiemann, *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity (2001)*, gr-qc/0110034 v1
- [84] A. Ashtekar, *An Introduction to Loop Quantum Gravity Through Cosmology (2007)*, gr-qc/0702030 v2
- [85] J. C. Lopez-Dominguez, O. Obregon, M. Sabido and C. Ramirez, *Towards Noncommutative Quantum Black Holes (2006)*, gr-qc/0607002 v2
- [86] M. Cavaglia, *Wormhole Solutions in the Kantowski-Sachs Spacetime (1994)*, gr-qc/9407929 v1
- [87] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347, 1981.

Capítulo 3

- [88] H. A. Rincon, *Algebra Lineal*, Prensa de Ciencias, 2003
- [89] L. A. Takhtajan, *Mathematica Aspects of Conformal And Topological Field Theories and Quantum Groups*, AMS Bookstore, 1992
- [90] W. B. Kandasamy, F. Smarandache and K. Llanthenral, *Introduction To Linear Bialgebra*, 2005
- [91] W. Schutzer, *Algebras de Lie, Algebras de Hopf e Grupos Quanticos*, thesis, 1996
- [92] D. J. Simms, *Lie Groups and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1968
- [93] K. Erdmann and M. J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, 2006
- [94] S. Caenepell, *Hopf Algebras and Quantum Groups*, Marcel Dekker, inc, 2000

- [95] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin Press, 1969
- [96] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, 1995
- [97] R. Aldrovani and J. C. Pereira, *An introduction to Geometrical Physics*, State University of Sao Paulo, 2003
- [98] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable System*, Cambridge University Press, 2003
- [99] P. Aschieri, Noncommutative Symetries and Gravity (2006), hep-th/0608172 v2
- [100] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer and J. Wess, *Noncommutative geometry and gravity*, *Classical Quantum Gravity*, 2006, V.23, 1883-1912

Capítulo 4

- [101] C. L. Aldana, *Estudio del Espacio de Fock Asociado a un Oscilador Armónico Cuántico y su Generalización a un Número Finito de Osciladores*, Tesis, 2000
- [102] J. E. Marsden, *Lectures on Mechanics*, Springer-Verlag, 1997
- [103] A. Cardona, *Cuantización y Deformación*, Vol. I, No,(2004)
- [104] A. Eftekharzadeh and B. L. Hu, *The Classic and Commutative Limits of noncommutative Quantum Mechanics: A Superstar \star Wigner-Moyal Equation*, *Brazilian Journal of Physics*, vol. 35. no. 2A, June, 2005
- [105] S. Gutt, *Deformation Quantization: an Introduction*, 2001
- [106] C. Zachos, *Deformation Quantization: Quantum Mechanics Lives and Works in Phase-Space (2002)*, hep-th/0110114 v3
- [107] M. Martin Bordemann, *Deformation Quantization a Mini Lecture*, 2003
- [108] G. Karaali, *Deformation Quantization- a Brief Survey*, 2002
- [109] A. Zampini, *Aplication of the Weyl-Wigner Formalism to Noncommutative Geometry (2004)*, hep-th/0505271 v1
- [110] S. Keppeler, *Introduction to Wigner-Weyl Calculus*, 2004
- [111] A. Kokado, T. Okamura and T. Saito, *Wigner's Formulation of Noncommutative Quantum Mechanics (2004)*, hep-th/0208040 v2
- [112] J. E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1949, V.45, 99–124.
- [113] A. Cardona, *Cuantización y Deformación*, Vol. I, No,(2004)

- [114] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, *Lett. Math. Phys.*, 2003, V.66, 157-216.
- [115] P. Aschieri, Ch. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp and J. Wess, *A gravity theory on noncommutative spaces*, *Classical Quantum Gravity*, 2005, V.22, 3511-3522
- [116] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer and J. Wess, *Noncommutative geometry and gravity*, *Classical Quantum Gravity*, 2006, V.23, 1883-1912
- [117] Marcelo A. Marchioli, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase: I. Formulação de Weyl-Wigner*, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 24, no. 4, Dezembro, 2002.

Capítulo 5

- [118] R. Aldrovani and J. C. Pereira, *An introduction to Geometrical Physics*, State University of Sao Paulo, 2003
- [119] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable System*, Cambridge University Press, 2003
- [120] M. Daszkiewicz, M. Daszkiewicz, *Generalized Twist Deformation of Poincaré and Galilei Hopf Algebras*, arXiv:08121613
- [121] M. Daszkiewicz, *Mod. Phys. Lett. A* 23, 7 (2008), IFT-UWR-LV-420; arXiv: 0801.1206 [hep-th]
- [122] J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg and V.N. Tolstoy, *Phys. Lett. B* 264, 331 (1991); J. Lukierski, A. Nowicki and H. Ruegg, *Phys. Lett. B* 293, 344 (1992)
- [123] J. Lukierski and M. Woronowicz, *Phys. Lett. B* 633, 116 (2006); hep-th/0508083
- [124] J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg and V.N. Tolstoy, *J. Phys. A* 27, 2389 (1994)
- [125] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, *Int. J. Mod. Phys. D* 12 (2003) 299

Capítulo 6

- [126] M. Chaichian, *Introduction to Quantum Groups*, World Scientific, 1996
- [127] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, 1995
- [128] V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994

- [129] S. Majid, *Foundations of Quantum Groups Theory*, Cambridge University Press, 2000
- [130] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer and J. Wess, *Noncommutative geometry and gravity*, *Classical Quantum Gravity*, 2006, V.23, 1883-1912
- [131] F. Koch, *Vector Field Twisting of Lie-Algebras (2006)*, gr-qc/0607063 v2
- [132] K. Li, J. Wang and Ch. Chen, *Representation of Noncommutative Phase-Space*, *Modern Physics Letters A*, Vol. 20, No 28 (2005) 2165-2174
- [133] R. Banerjee and K. Kumar, *Deformed Relativistic and Nonrelativistic Symmetries on Canonical Noncommutative Spaces (2006)*, hep-th/0604162 v1
- [134] M. Chaichian, P.P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, *On a Lorentz-Invariant interpretation of noncommutative space time and its implications on noncommutative QFT*, *Phys. Lett. B* 604 (2004)
- [135] M. Chaichian, P. Prešnajder and A. Tureanu, *New Concept of Relativistic invariance in noncommutative spacetime: Twisted Poincaré Symetry and its implications*, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005)
- [136] A. Agostini, G. Amelino-Camelia and F. D'Andrea, *Hopf-algebra description of noncommutative-spacetime symmetries (2003)*, hep-th/0306013.
- [137] F. Koch and E. Tsouchnika, *Construction of θ -Poincaré algebras and their invariants on M_θ* , *Nucl. Phys. B* 717 (2005) 387
- [138] D. Benedetti, *Deformazioni dell'algebra di Poincaré alla Scala di Planck*, thesis, 2001
- [139] S. Majid and H. Ruegg, *Phys. Lett. B*334 (1994) 348.
- [140] A. Agostini, F. Lizzi and A. Zampini, *Mod. Phys. Lett. A*17 (2002) 2105.
- [141] A. Agostini, G. Amelino-Camelia and F. D'Andrea, *Hopf-Algebra description of noncommutative-spacetime symmetries (2003)*, hep-th/0306013

Capítulo 7

- [142] V. G. Gurzadyan, R. Penrose, *CCC-Predicted Low-Variance Circles in CMB Sky and LCDM*, astro-ph/1104.5675, 2011.
- [143] V. G. Gurzadyan, R. Penrose, *Concentric Circles in WMAP Data may Provide Evidence of Violent pre-Big-Bang Activity*, astro-ph/1011.3706, 2010.

- [144] R. Penrose, *Cycles of Time: An Extraordinary New View of the Universe*, Bloodey Head London, 2010.
- [145] R. Penrose, *The Basic Ideas of Conformal Cyclic Cosmology, in Death And Ati-Death, Volumen 6: Thirity Years Afther Kurt Gödel (1906-1978), Chapter 7, pp. 223-242.*, (Ed. Charles Tandy, Tia University Press, Stanford, Palo Alto, Calif.), 2009.
- [146] R. Penrose, *Causality, Quantum Theory and Cosmology. In On Space and Time*, Ed. Shahn Majid (Cambridge University Press, Cambridge) pp. 141-195, 2008.
- [147] G. Veneziano, *The Myth of the Beginning of Time*, Scientific American, 2004.
- [148] P. J. Steinhardt, N. Turok, *Enless Universe: Beyond The Big-Bang*, Random House, 2007.
- [149] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok, hep-th/0103239, Phys. Rev. D, in press.
- [150] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt, N. Turok, hep-th/0108187.
- [151] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, N. Turok, hep-th/0109050.
- [152] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377, 1922.
- [153] A. Pais, *Subtle is The lord: The Science and Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, 1982.
- [154] R. C. Tolman, Phys. Rev. **38**, 1758, 1931.
- [155] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford University Press, 1934.
- [156] P. Sing, A. Toporensky, *Big Crunch Avoidance in $k = 1$ Semi-Classical Loop Quantum Cosmology*, gr-qc/0312110, 2004.
- [157] J. E. Lidsey, David J. Mulryne, N. J. Nunes, Reza Tavakol *Oscillatory Universes in Loop Quantum Cosmology and Initial Conditions for Inflation*, gr-qc/0406042, 2004.
- [158] J. Khoury, Phys. Rev. D **64** 123522.
- [159] Ya. B. Zeldovic, I. D. Novikov, *The structure and Evolution of the Universe*, U. of Chicago, 1983.
- [160] J. Barrow, M. Dąbrowski, R. Astron. Soc. , 1995.
- [161] I. Prigogine, Int. J. Theor. Phys. **9**, 927, 1989.
- [162] E. Gunzig, A. Saa, L. Breinig, V. Faraoni, T. M. Rocha Filho, A. Figuereiro, Phys. Rev. D **63**, 067301, 2001.
- [163] A. Saa, E. Gunzig, L. Breinig, V. Faraoni, T. M. Rocha Filho, A. Figuereiro, Int. J. Theor. Phys. **40**, 2295, 2001.

- [164] S. De, *Int. J. Theor. Phys.* **32**, 1603, 1993.
- [165] L. Smolin, *The Fate of Black Hole singularities and the Parameters of Standar Models of Particle Physics and Cosmology*, gr-qc/9404011.
- [166] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, W. H. Freeman, *Gravitation*, 1973.
- [167] J. Barrow, D. Kimberly, J. Magueijo, *Class. Quant. Grav.* **21**, 4289, 2004.
- [168] H. Sandvik, J. Barrow, J. Magueijo, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 0311202, 2002.
- [169] J. Magueijo, *Rep. Prog. Phys.* **66**, 2025, 2003, astro-ph/0305457.
- [170] J. Barrow, M. Dąbrowski, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **275**, 850, 1995.
- [171] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347, 1981.
- [172] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolta, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, S. S. Meyer, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, astro-ph/0803.0547, 2008.
- [173] M. F. Mukhanov, G. V. Chibisov, *JETP Lett.* 33 (1981) 532; *Sov. Phys. JETP* 56 (1982) 258; S.W. Hawking, *Phys. Lett.* B115 (1982) 295; A.A. Starobinsky, *ibid*, B117 (1982) 175; A.H. Guth, S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1110; J. Bardeen, P.J. Steinhardt, M. Turner, *Phys. Rev.D*28 (1983) 679; M.F. Mukhanov, *JETP Lett.* 41 (1985) 493.
- [174] D. H. Lyth, *Phys. Rev. D*31 (1985) 1792.
- [175] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley 1990; A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic, 1990.
- [176] T. J. Allen, B. Grinstein, M. B. Wise, *Phys. Lett.* B197 (1987) 66.
- [177] A. Mazumdar and M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Rev. Lett.* 87, 011301 (2001).
- [178] F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele and G. Sparano, *Int. J. Mod. Phys. A* 11, 2907 (1996).
- [179] Chong-Sun Chu, B. R. Greene and G. Shiu, *Mod. Phys. Lett. A* 16, 2231 (2001).
- [180] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, *JHEP* 9802 (1998) 003; N. Seiberg and E. Witten, *JHEP* 9909 (1999) 032.
- [181] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

- [182] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Cambridge University Press (2002).
- [183] R. Kantowski and R. K. Sachs, *J. Math. Phys.* 7 (1966) 443.
- [184] P. Aschieri, Ch. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp and J. Wess, *A gravity theory on noncommutative spaces*, *Classical Quantum Gravity*, 2005, V.22, 3511-3522
- [185] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer and J. Wess, *Noncommutative geometry and gravity*, *Classical Quantum Gravity*, 2006, V.23, 1883-1912
- [186] E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1949, V.45, 99-124
- [187] G. D. Barbosa, N. Pinto-Neto, *Noncommutative Geometry and Cosmology*, hep-th/0407111, 2004.
- [188] H. Garcia-Compean, O. Obregon, C. Ramirez, *Noncommutative Quantum Cosmology*, hep-th/0107250, 2002.
- [189] V. Sahnia and A. Toporensky, *Cosmological Hysteresis and the Cyclic Universe*, gr-qc/1203.0395, 2012.
- [190] N. Kanekar, V. Sahni and Yu. Shtanov, *Phys. Rev. D* **63** 083520, astro-ph/0101448, 2001.
- [191] Yu. Shtanov and V. Sahni, *Phys. Lett. B* 557 1, gr-qc/0208047, 2003.
- [192] A. Ashtekar, T. Pawłowski and P. Singh, *Phys. Rev. D* 73, 124038, gr-qc/0604013, 2006.
- [193] C. Misner, *Minisuperspace in Magic without magic: John Archibald Wheeler*, Freeman, 1972.
- [194] P. Ashieri, Ch. Blohmann, M. Dimitrijevic, F. Meyer, P. Schupp and J. Wess, *A gravity Theory on Noncommutative Spaces*, *Class. Quantum Grav.* 22 (2005) 3511-3532
- [195] P. Schupp and N. Solodukhin, *Exact Black Hole Solution in Noncommutative Gravity (2009)*, gr-qc/09062724 v1
- [196] L. Alvarez-Gaume, F. Meyer and M. Vazquez-Mozo, *Comments on Noncommutative Gravity (2006)*, gr-qc/0605113 v3
- [197] W. Guzman, M. Sabido and J. Socorro, *Noncommutativity and Scalar Field Cosmology (2007)*, gr-qc/07121520 v1
- [198] C. Bastos, O. Bertolami, N. Dias and J. Prata, *Noncommutative Quantum Cosmology (2008)*, gr-qc/08123488 v1
- [199] W. Guzman, M. Sabido and J. Socorro, *Towards Noncommutative Supersymmetric Quantum Cosmology (2008)*, gr-qc/08124999 v1

-
- [200] T. Ohl and A. Schenkel, *Cosmological and Black Hole Spacetime in Twisted Noncommutative Gravity (2009)*, gr-qc/09062730 v1
- [201] B. Behrooz Malekolkalami and M. Farhoudi, *Noncommutative Double Scalar Fields In FRW Cosmology as Cosmical Oscillators (2010)*, gr-qc/10072499 v2