UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE DIGRÁFICAS 4-TRANSITIVAS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
PATRICIO RICARDO GRACÍA VÁZQUEZ

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ,
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÉXICO, D. F. 21 DE NOVIEMBRE DEL 2013

Algunos resultados sobre digráficas 4-transitivas

Patricio Ricardo García Vázquez

Resumen

Sea D una digáfica con conjunto de vértices $V(D)$ y conjunto de flechas $A(D)$. Considérese $k \in \mathbb{N}$, una digráfica es k-transitiva si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$ tales que existe una uv-trayectoria dirigida de longitud k, se tiene que $(u, v) \in A(D)$. Si $k = 2$ entonces simplemente se dice que la digráfica es transitiva. Anteriormente se han estudiado varios resultados relacionados con digráficas transitivas y 3-transitivas. En este trabajo abordaremos algunas de las propiedades que conciernen a las digráficas 4-transitivas, cuya caracterización, en el caso fuertemente conexo, fue dada por Hernández-Cruz [17].

Un k-núcleo de una digráfica D se define como un subconjunto de vértices $N \subseteq V(D)$ tal que es k-independiente y $(k-1)$-absorbente. En este trabajo se caracteriza a las digráficas 4-transitivas que contienen un 3-núcleo y a las que tienen un 2-núcleo (o simplemente núcleo). Además, utilizando este último resultado se da una prueba de la conjetura de Laborde-Payan-Xuong para digráficas 4-transitivas, la cual establece que para cualquier digráfica D se puede encontrar un subconjunto de vértices independiente que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima en D.

1 Introducción

En este trabajo denotaremos como $D = (V(D), A(D))$ a una digráfica finita sin lazos y sin felchas múltiples en la misma dirección con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de flechas $A(D)$. Consideremos $U, V \subseteq V(D)$. Decimos que $(u, v) \in A(D)$ es una UV-flecha si $u \in U$ y $v \in V$. Si suponemos que $U \cap V = \varnothing$, escribiremos $U \to V$ si para todo $u \in U$ y $v \in V$ se tiene que $u, v \in A(D)$. En el caso de que U sea un conjunto unitario, digamos $U = \{u\}$, entonces simplemente escribiremos uV-flecha en lugar de $\{u\}V$-flecha, del mismo modo escribiremos $u \to V$ en lugar de $\{u\} \to V$.

Un *camino dirigido* de una digráfica D es una sucesión alternada de vertices y flechas $C = v_1a_1v_2a_2, ...a_{n-1}v_n$ tal que cada vértice de la sucesión es la cabeza de la flecha anterior a él y la cola de la flecha posterior a él. Un *camino dirigido cerrado* es aquel que comienza y termina con el mismo vértice, si estos son los únicos vértices que se repiten en el camino dirigido cerrado C, entonces decimos que C es un *ciclo dirigido* y lo denotamos por $C = (v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n = v_1)$. La longitud de un ciclo dirigido C esta dado por el número de flechas que hay en C. Para referirnos a un ciclo dirigido de longitud k simplemente escribiremos *k-ciclo*. La *circunferencia* de una digráfica D es el mayor entero k tal que D contiene un k-ciclo.

Una *trayectoria dirigida* es un camino dirigido que no repite vértices. Si $u, v \in V(D)$ denotamos a una *uv-trayectoria dirigida* T como $T = (u = v_1, v_2, v_3, ..., v_{k-1}, v_k = v)$, la *longitud* de una trayectoria dirigida T es la cantidad de flechas que hay en la trayectoria. En ocaciones para referirnos a una trayectoria dirigida de longitud k simplemente escribiremos *k-trayectoria*. Denotaremos por $V(T)$ los vértices que están en la trayectoria dirigida T. Si S es un subconjunto de $V(D)$, abusaremos de la notación y escribiremos $S \cap T$ para referirnos a $S \cap V(T)$, de igual forma para un vértice $v \in V(D)$ escribiremos $v \in T$ en lugar de $v \in V(T)$.

La *distancia* entre dos vértices u y v, denotada por $d(u,v)$, es el mínimo entero k tal que existe una uv-trayectoria dirigida de longitud k, si $u = v$ entonces $d(u,v) = 0$ y si no existen uv-trayectorias dirigidas, entonces escribimos $d(u,v) = \infty$. Si $x \in V(D)$ y $U \subset V(D)$ es un subconjunto de los vértices de D, denotaremos por $d(x,U) = min\{d(x,u)|u \in U\}$.

Dado un vértice $v \in V(D)$ definimos la *invecindad* del vertice v como

$$N_D^-(v) = \{u \in V(D)|(u,v) \in A(D)\}$$

Analogamente definimos la *exvecindad* de v como

$$N_D^+(v) = \{u \in V(D)|(v,u) \in A(D)\}$$

y la *vecindad* de v como $N_D(v) = N_D^-(v) \cup N_D^+(v)$. A los elementos de $N_D^+(v)$ y $N_D^-(v)$ se le llama *invecinos* y *exvecinos* de v, respectivamente. En caso de que no exista ambiguedad obviaremos el subíndice D.

Definimos también el *ingrado* (*exgrado*) de un vértice $v \in V(D)$ como el número de invecinos (exvecinos) de v, y lo denotamos como $d_D^-(v)$ ($d_D^+(v)$). De igual forma se omitirá el subíndice D cuando sea posible.

Una digráfica D es *fuertemente conexa* si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ existe una uv-trayectoria dirigida y una vu-trayectoria dirigida. Decimos que H es una *componente fuertemente conexa* de D si H es una subdigráfica de D fuertemente conexa máxima por contención con esta propiedad. La *condensación* de una digráfica D es la digráfica D^* tal que $V(D^*)$ consta de todas las componentes fuertemente conexas de D y $(D_1, D_2) \in A(D^*)$ si y sólo si existe una D_1D_2-flecha en D. Notamos que D^* es una digráfica acíclica, pues de contener un ciclo $C = (D_1, D_2, ..., D_k = D_1)$ implicaría que para cualesquiera $u, v \in D$ existe una uv-trayectoria dirigida y una vu-trayectoria dirigida, por lo que la digráfica inducida por $V(C)$ sería fuertemente conexa y por lo tanto constaría de una única componente fuerte.

Dado que D^* es acíclica, entonces contiene vertices iniciales y vértices terminales, es decir, vertices de ingrado y exgrado cero, respectivamente. Si H es una componente fuertemente conexa de D tal que $d_{D^*}^-(H) = 0$ entonces decimos que H es una *componente inicial* de D. Analogamente si $d_{D^*}^+(H) = 0$ entonces decimos que H es una *componente terminal* de D.

Es posible definir digráficas a partir de gráficas, algunas formas de hacerlo son la siguientes. Una *biorentación* de una grafica G es una digráfica D obtenida al sustituir cada arista $\{x,y\} \in E(G)$ por la flecha (x,y) o la flecha (y,x) o por el par de flechas simétricas $(x,y),(y,x)$. Una digráfica *semicompleta* es una biorentación de una gráfica completa. Una *orientación* de una gráfica G es una biorentación asimétrica D de G, es decir, en D no hay flechas simétricas. Un *torneo* es una orientación de una gráfica completa. Observamos que toda digráfica semicompleta contiene un torneo.

También es posible obtener una gráfica a partir de una digráfica. Definimos la *gráfica subyacente* de una digráfica D, como la gráfica obtenida al sustituir cada flecha (x,y), o (y,x), o el par de flechas simétricas $(x,y),(y,x)$ por la arista $\{x,y\}$. La denotamos por $UG(D)$.

Sean $D = (V(D), A(D))$ una digráfica donde $V(D) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $H_1, H_2, ., , H_n$ digráficas. Definimos la *composición* $D[H_1, H_2, ..., H_n]$ como la digráfica cuyo conjunto de vértices esta dado por $\cup_{i=1}^n V(H_i)$ y conjunto de flechas por $\cup_{i=1}^n A(H_i) \cup \{(u,v)|u \in V(H_i), v \in (H_j)$ y $(v_i, v_j) \in$

$V(D)\}$. En particular si $D = H[S_1, S_2, ..., S_n]$ y S_i es una digráfica sin flechas para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces decimos que D es una *extensión* de H.

Sea D una digráfica, un subconjunto N de $V(D)$ es *k-independiente* si para cualesquiera $u, v \in N$ tenemos que $d(u, v), d(v, u) \geq k$, y decimos que N es *l-absorbente* si para todo $u \in V(D) \backslash N$ existe $v \in N$ tal que $d(u, v) \leq l$, en cuyo caso decimos que v l-absorbe a u o que u es l-absorbido por v. Definimos un (k, l)-núcleo de una digráfica D como un subconjunto $N \subseteq V(D)$ que es k-independiente y l-absorbente. Un $(k, k-1)$-núcleo es un k-núcleo y un 2-núcleo es simplemente un núcleo. El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgenstern en [21].

Una digráfica D es 4-transitiva si la existencia de una 4-trayectoria $T = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ implica que la flecha $(v_1, v_5) \in A(D)$. En general una digráfica D es k-transitiva si la existencia de una uv-trayectoria dirigida de longitud k implica que $(u, v) \in A(D)$. Dicha familia de digráficas, así como la de digráficas *k-cuasi-transitivas* se introdujeron en [13]. Una digráfica D es k-cuasi-transitiva si la existencia de una uv-trayectoria dirigida implica que $(u, v) \in A(D)$ o que $(v, u) \in A(D)$.

En [1] Bang Jensen y Huang dan una caracterización recursiva de familia de digráficas cuasi-transitivas (2-cuasi-transitivas) con lo cual se pudo caracterizar las digráficas cuasi-transitivas hamiltonianas, digráficas cuasi-transitivas con 3-reyes (un *k-rey* de una digráfica D es un vértice que puede alcanzar a cualquier otro vértice de D con una trayectoria de longitud a lo más k) y la conjetura de Laborde-Payan-Xuong para digráficas cuasi-transitivas.

En [6], Galeana-Sánchez, Goldfeder y Urrutia dan una caracterización de las digráficas 3-cuasi-transitivas fuertemente conexas y en [16] Hernández-Cruz caracteriza a las digráficas 3-transitivas fuertemente conexas, y aquellas digráficas 3-transitivas que contienen un núcleo, estas resultan ser aquellas digráficas en las que ninguna componente fuertemente conexa terminal es isomorfa a C_3. En la sección 2 se demuestra un resultado similar, en donde se caracterizan las digráficas 4-transitivas que contienen un 3-núcleo.

En la sección 3 demostramos algunos lemas para determinar cuales digráficas 4-transitivas fuertemente conexas contienen un núcleo, y después generalizamos este resultado a digráficas 4-transitivas en general.

Finalmente en la sección 4 probamos que la conjetura de Laborde-Payan-Xuong es cierta para cualquier digráfica 4-transitiva D. Para esto encontramos un conjunto S de vértices en las componentes terminales de D de tal forma que $D \backslash S$ contenga un núcleo y analizamos que ocurre con las trayectorias de longitud máxima al regresar este conjunto a la digráfica D.

2 3-Núcleos en digráficas 4-transitivas

En esta sección buscaremos caracterizar las digráficas 4-transitivas que contengan un 3-núcleo, es decir un conjunto 3-independiente y 2-absorbente. Utilizaremos el siguiente lema sobre digráficas que tienen como subgráfica una extensión de un 3-ciclo.

Lema 1. *Sea D una digráfica 4-transitiva que tiene como subrgáfica H una extensión de un 3-ciclo con patrición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$, si existe $(v_0, v) \in A(D)$, donde $v_0 \in V_0$ y $v \in V(D) \backslash V(H)$, entonces $V_0 \rightarrow v$.*

Demostración. Sea $(v_0, v) \in A(D)$ con $v_0 \in V_0$ y $v \in V(D) \backslash V(H)$. Si $V_0 = \{v_0\}$, trivialmente obtenemos que $V_0 \rightarrow v$. Supongamos que $|V_0| \geq 2$. Consideramos un vértice arbitrario $y \in V_0$,

$y \neq v_0$. Como H es una extensión de un 3-ciclo, entonces podemos encontrar $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ tales que (y, v_1, v_2, v_0) es una 3-trayectoria en H, lo que implica que (y, v_1, v_2, v_o, v) es una 4-trayectoria en D. Por ser D 4-transitiva, obtenemos que $(y, v) \in A(D)$ para todo $y \in V_0$, es decir $V_0 \to v$. ■

También haremos uso de los siguientes lema y corolarios que están demostrados en [17].

Lema 2. *Sea $k \geq 2$ un entero, D una gráfica k-transitiva y $C = (v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_0)$ un ciclo dirigido de longitud n, con $n \geq k$. Si $v \in V(D) \backslash V(C)$, tal que $(v, v_0) \in A(D)$, entonces $v \to S = \{v_i | i \in (k-1)\mathbb{Z}_n\}$.*

Del hecho de que si $(k-1, n) = 1$, entonces $(k-1)\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. *Sea $k \geq 2$ un entero, D una gráfica k-transitiva y C un n-ciclo, con $n \geq k$ y $(k-1, n) = 1$. Si $v \in V(D) \backslash V(C)$ es tal que existe una vC-flecha en D, entonces $v \to C$.*

Dualmente podemos concluir que si v es tal que existe una Cv-flecha, entonces $C \to v$.

Corolario 4. *Sea $k \geq 2$ un entero, D una gráfica k-transitiva y $C = (v_0, v_1, ..., v_{n-1}, v_0)$ un ciclo dirigido de longitud n, con $n \geq k$. Si $v \in V(D) \backslash V(C)$, tal que existe una vv_0-trayectoria dirigida en D, entonces $v \to S = \{v_i | i \in (k-1)\mathbb{Z}_n\}$.*

Corolario 5. *Sea $k \geq 2$ un entero, D una gráfica k-transitiva y C un n-ciclo, con $n \geq k$ y $(k-1, n) = 1$. Si $v \in V(D) \backslash V(C)$ es tal que existe una vC-trayectoria dirigida en D, entonces $v \to C$.*

Dualmente podemos concluir que si v es tal que existe una Cv-trayectoria dirigida, entonces $C \to v$.

Observamos que los Corolario 3 y 5 se cumplen para $k = 4$ y para $n = 4$ ó 5, lo cual nos será de mucha utilidad en nuestro estudio de digráficas 4-transitivas que contengan ciclos de longitud 4 ó 5.

El siguiente lema, también demostrado en [17], nos dice que sólo hay dos posibilidades para una digráfica 4-transitiva fuertemente conexa con circunferencia 2.

Lema 6. *Sea D una digráfica 4-transitiva, fuertemente conexa y con circunferencia 2. Entonces D es una biorentación completa de la estrella $K_{1,n}$, $n \geq 1$ o es una biorentación de la estrella doble $D_{n,m}$.*

En la Figura 1, extraída del artículo [17], se puede observar la doble estrella $D_{5,4}$.

La siguiente caracterización de las digráficas 4-transitivas fuertemente conexas fue demostrada por C. Hernández-Cruz en [17].

Teorema 7. *Sea D una digráfica fuertemente conexa, entonces se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones.*

(1) D es una digráfica completa.

(2) D es una extensión de un 3-ciclo.

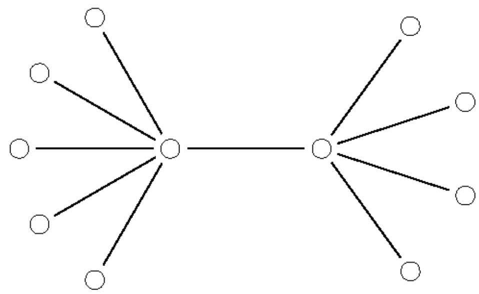

Figura 1: Estrella doble $D_{5,4}$.

(3) D tiene circunferencia 3, contiene una extensión de un 3-ciclo como subgráfica generadora con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$, existe al menos una flecha simétrica en D y para cada flecha simétrica $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$, donde $v_j \in V_j$ para $j \in \{i, i+1\}$ (mód 3) se tiene que $|V_i| = 1$ o $|V_{i+1}| = 1$.

(4) D tiene circunferencia 3, $UG(D)$ no es 2-conexa por aristas, consideramos $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ los conjuntos de vértices de las componentes máximas por contención 2-conexas por aristas, entonces $S_i = \{u_i\}$ para toda $2 \leq i \leq n$, $D[S_1]$ contiene una extensión de un 3-ciclo como subgráfica inducida con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$. Existe un vértice $v_0 \in V_0$ (sin perdida de generalidad), tal que $(v_0, u_j), (u_j, v_0) \in A(D)$ para todo $2 \leq j \leq n$. Además $|V_0| = 1$ y $D[S_1]$ tiene la estructura descrita en (2) o (3), dependiendo de la existencia de flechas simétricas.

(5) D es un 5-ciclo simétrico.

(6) D es una biorentación completa de la estrella $K_{1,n}$, $n \geq 3$.

(7) D es una biorentación completa de la estrella doble $D_{n,m}$.

(8) D es una digráfica fuertemente conexa de orden menor o igual a 4 no incluida en las familias descritas anteriormente.

En la Figura 2, extraída de [17], se pueden observar digráficas de las familias (3) y (4) descritas en el Teorema 7.

En el siguiente lema veremos que las únicas digráficas sin 3-núcleo pertenecientes a la familia (8) y que tienen orden 4 son aquellas que son isomorfas a un ciclo dirigido de longitud 4.

Proposición 8. *Sea D un digráfica 4-transitiva, fuertemente conexa y de orden 4 tal que $D \neq C_4$. Entonces D tiene 3-núcleo.*

Demostración. Como D tiene orden 4, entonces D puede tener circunferencia 2, 3 ó 4. Si D tiene circunferencia 2, entonces por el Lema 1 tenemos que D es una estrella $K_{n,1}$ o una doble estrella $D_{n,m}$. Si $D = K_{n,1}$ entonces el vértice central es un 3-núcelo para D. Si $D = D_{n,m}$ entonces cualquiera de los dos vértices centrales es un 3-núcleo para D.

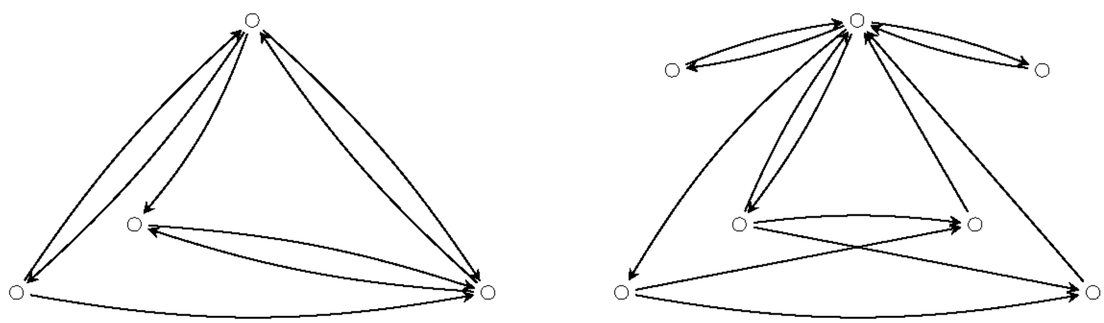

Figura 2: Digráficas de las familias (3) y (4) del Teorema 7.

Si D tiene circunferencia 3, entonces contiene un 3-ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$, sea v_4 el vértice que no pertence al C. Como D es fuertemente conexa, entonces existe una v_4C-flecha, por lo que $(v_4, v_i) \in A(D)$ para alguna $i \in \{1, 2, 3\}$, de esta forma $\{v_i\}$ es un 3-núcleo para D.

Finalmente, si D tiene circunferencia 4, entonces contiene un 4-ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$, como $D \neq C_4$, entonces existe una flecha en $A(D)\backslash A(C)$, hay dos posibilidades, que D tenga una flecha simétrica $(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_i) \in A(D)$ (mód 3) para alguna $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, en cuyo caso $\{v_i\}$ es un 3-núcleo para D, o que D tenga una diagonal del ciclo C, es decir $(v_i, v_{i+2}) \in A(D)$ (mód 3) para alguna $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, en este caso $\{v_{i+2}\}$ (mód 3) es un 3-núcleo para D. ■

A continuación damos la caracterización de las digráficas 4-transitivas que contienen un 3-núcleo. Empezamos con las digráficas 4-transitivas fuertemente conexas.

Lema 9. *Si D es una digráfica 4-transitiva fuertemente conexa que no es isomorfa a C_4, entonces D tiene un 3-núcleo.*

Demostración. Consideraremos la notación utilizada en el Teorema 7.

Si D es como en (1), (5) o (6), entonces cualquier vértice es un 3-núcleo para D.

Si D es como en (2) o (3), entonces D contiene una extensión de un 3-ciclo como subgráfica generadora con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$, por lo que cualquier clase V_i de la partición es un 3-núcleo para D.

Si D es como en (4) entonces $v_0 \in V_0$ (el vértice que cumple que (v_0, u_j), $(u_j, v_0) \in A(D)$ para todo $2 \leq j \leq n$) es un 3-núcleo para D. Si D es como en (7), entonces es una estrella doble y por lo tanto cualquiera de sus centros es un 3-núcleo para D.

Finalmente, si D es como en (8) y D tiene orden menor o igual a 3, entonces trivialmente cualquier vértice de D es un 3-núcleo. Si el orden de D es 4, como supusimos D no es isomorfa a C_4, entonces por la Proposición 8 concluimos que D tiene 3-núcleo. ■

Teorema 10. *Sea D una digráfica 4-transitiva con componentes fuertes D_1, D_2, ..., D_k. Entonces D tiene 3-núcleo si y sólo si ninguna componente terminal es isomorfa a C_4.*

Demostración. Supongamos que ninguna componente terminal de D es isomorfa a C_4. Probaremos que D tiene 3-núcleo por inducción sobre el número de componentes conexas. El Lema 9 comprende el caso $k = 1$.

Ahora, supongamos que para toda digráfica D con $k-1$ componentes fuertemente conexas podemos encontrar un 3-núcleo N para D. Sea D una digráfica con k componenetes fuertemente conexas D_1,D_2,...,D_k y supongamos sin perdida de generalidad que D_1 es una componente inicial de D. Por la hipótesis inductiva sabemos que $D\backslash D_1$ tiene un 3-núcleo N.

Si N es tal que 2-absorbe a todo vértice de D_1, entonces N es un 3-núcleo para D. Supongamos que existe un vértice $x \in V(D_1)$ que no es 2-absorbido por N, entonces $d(x, N) \geq 3$. Observamos que como D_1 es una componente inicial de D entonces ningún vértice en $D\backslash D_1$ alcanza a x por lo que $d(N, x) = \infty$ y por lo tanto $N \cup \{x\}$ es un conjunto 3-independiente de D.

Si D_1 es como (1), (5) o (6), entonces, por la observación anterior $N \cup \{x\}$ es un 3-núcleo para D.

Si D_1 es como en (2) o (3), entonces D contiene a una extensión de un 3-ciclo como subgráfica inducida con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$, supongamos sin perdida de generalidad que $x \in V_0$. Sea $y \in V_0$ con $y \neq x$. Veamos que $d(y, N) \geq 3$.

Si $d(y, N) = 1$, entonces $(y, n_1) \in A(D)$ para algún $n_1 \in N$, por el Lema 1 $V_0 \to n_1$, lo que contradice que N no 2-absorbe a x.

Si $d(y, N) = 2$, entonces existe una trayectoria (y, z, n_1) para algún $n_1 \in N$, lo que implica que podemos encontrar $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ tales que (x, v_1, v_2, y, z) es una 4-trayectoria en D, por lo que $(x, z) \in A(D)$ y entonces (x, z, n_1) es una 2-trayectoria en D lo que contradice que $d(x, N) \geq 3$.

Entonces $d(y, N) \geq 3$ para cualquier vértice $y \in V_0$ por lo que $N \cup V_0$ es un conjunto 3-independiente y por lo tanto un 3-núcleo para D.

Si D_1 es como en (4) y $x = v_0$, entonces $N \cup \{x\}$ es un 3-núcleo para D.

Si $x \in V_1$, entonces, con un argumento análogo al utilizado en el caso anterior tenemos que $d(y, N) \geq 3$ para todo $y \in V_1$, por lo tanto $N \cup V_1$ es un núcleo para D.

Entonces podemos suponer que v_0 y V_1 están 2-absorbidos por N (pues de lo contrario ya encontramos un 3-núcleo para D). De esta forma si u_i es 2-absorbido por N para toda $i \in \{2, 3..., n\}$ y existe $x \in V_2$ que no es absorbido por N, al igual que en el argumento anterior tenemos que $d(y, N) \geq 3$ para toda $y \in V_2$ y así $N \cup V_2$ es un 3-núcleo para D.

Si existe u_j que no es 2-absorbido por N para alguna $j \in \{2, 3..., n\}$ entonces $\{u_j\}$ 2-absorbe a toda u_i y al conjunto V_2, dado que supusimos que v_0 y V_1 ya eran 2-absorbidos por N, entonces $N \cup \{u_j\}$ es un núcleo para D.

En el caso que D_1 sea como en (7), $D_1 = D_{n,m}$ es una doble estrella, denotemos al centro como $\{u, v\}$. Si $x = u$ o $x = v$ entonces $N \cup \{x\}$ es un 3-núcleo para D.

Entonces podemos suponer que u y v son 2-absorbidos por N. Sea S el subconjunto de vértices que no son 2-absorbidos por N. Como supusimos que existe un vértice no absorbido por N en D_1, entonces $N(u) \cap S \neq \varnothing$ o $N(v) \cap S \neq \varnothing$. Si ambos conjuntos son no vacíos, basta elegir un vértice en cada conjunto, digamos y y z, y así $N \cup \{y, z\}$ es un 3-núcleo para D (pues $\{y, z\}$ 2-absorbe a todo vértice de D_1 y $d(z, y) = d(y, z) = 3$, por lo que es 3-independiente). En el caso de que alguno de los conjuntos $N(u) \cap S$, $N(v) \cap S$ sea vacío, basta elegir un vértice y en el que no lo sea y así $N \cup \{y\}$ es un 3-núcleo para D.

Finalmente, si D_1 es como en (8) y es de orden menor o igual a 3, entonces $N \cup \{x\}$ es un 3-núcleo para D.

Supongamos que D_1 tiene orden 4. Si tiene circunferencia 2, entonces D_1 es como en el caso (6) o (7) y si D_1 tiene circunferencia 3, tenemos que D_1 es como en (2), (3) o (4).

Supongamos que D_1 tiene circunferencia 4, entonces D_1 contiene a C_4 como subgráfica, además sabemos que D_1 alcanza a alguna componente terminal D_j, por ser D_j terminal sabemos que existe $n_1 \in D_j \cap N$ y dado que D_1 alcanza a D_j, entonces existe $v \in D_1$ tal que existe una vn_1-trayectoria dirigida en D, por el dual del Corolario 5 tenemos que $D_1 \to n_1$, lo que contradice que existe un vértice en D_1 que no es absorbido por N.

Como para todos los casos posibles tenemos que D tiene 3-núcleo, el resultado se sigue por el Principio de Inducción Matemática. ■

3 Núcleos en digráficas 4-transitivas

La busqueda de familias de digráficas que contengan k-núcleos ha sido un problema en el que se han hecho importantes avances recientemente. Un resultado clásico respecto a la existencia de núcleos es el teorema de Richardson, este dice que si D es una digráfica que no contiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D tiene núcleo. Notamos que este teorema implica que toda digráfica acíclica tiene núcleo.

Una digráfica D es *unilateral* si para todo par de vértices $u, v \in V(D)$ se tiene que existe una uv-trayectoria dirigida o una vu-trayectoria dirigida. En [12] se demuestra que toda digráfica unilateral ciclicamente k-partita (equivalentemente, una extensión de un k-ciclo) posee un k-núcleo.

En [10] se prueba la existencia de k-núcleos, con $k \geq 3$, para algunas familias de generalizaciones de digráficas transitivas, a saber, digráficas pretransitivas derechas (izquierdas) fuertemente conexas en las que todo 3-ciclo es simétrico.

En [9] se propone una conjetura que dice que toda digráfica D con circunferencia l tiene l-núcleo. En el artículo se prueba esta conjetura para digráficas $(l-1)$-fuertes con circunferencia l y para digráficas ex-semicompletas con circunferencia l. Para la prueba de estos resultados se demuestra que una digráfica D ex(in)-semicompleta tal que para un entero fijo $l \geq 1$ la existencia de la flecha $(u, v) \in A(D)$ implica que $d(u, v) \leq l$, entonces D contiene un (k, l)-núcleo para toda $k \geq 2$.

Encontrar (k, l)-núcleos se puede extender a digráficas infinitas, en [11] se estudia la existencia de (k, l)-núcleos en diversas familias de digráficas infinitas, e.g. digráficas transitivas, digráficas cuasi-transitivas, digráficas transitivas derechas (izquierdas), digráficas ciclicamente k-partitas, por mencionar algunas.

En [16] se da una caracterización de las digráficas 3-transitivas fuertemente conexas, las cuales resultan ser digráficas completas, digráficas bipartitas completas o un ciclo dirigido de longitud 3 con ninguna, una o dos flechas simétricas. Con este resultado se caracterizan también aquellas digráficas 3-transitivas que contienen un núcleo, y en [13], Galeana-Sánchez y Hernández-Cruz demuestran que una digráfica k-transitiva D tiene n-núcleo para toda $n \geq k$, por lo que el estudio de k-núcleos en digráficas 3-transitivas se ha completado. Buscando lo mismo para digráficas 4-transitivas, caracterizamos en la sección anterior aquellas digráficas 4-transitivas que contienen un 3-núcleo, en esta sección se da una caracterización de las digráficas 4-transitivas que contienen un núcleo. Con este resultado se tendran caracterizadas las digráficas 4-transitivas que tienen k-núcleo para los casos $k = 2, 3$ y por lo tanto se completa el estudio de k-núcleos para digráficas 4-transitivas.

Al igual que en la sección anterior, primero caracterizamos a las digráficas 4-transitivas fuertemente conexas que contienen un núcleo, para después generalizarlo a digráficas que tienen mas de una componente fuertemente conexa.

Lema 11. *Sea D una digráfica 4-transitiva fuertemente conexa. Entonces D tiene núcleo si y sólo si D no es isomorfa a una de las siguientes familias de gráficas:*

i) Extensiones de un 3-ciclo

ii) Digráficas semicompletas fuertemente conexas de orden 4 sin vertices de ingrado 3.

iii) Digráficas de la familia (3) descritas en en el Teorema 7 que no tengan núcleo, es decir, aquellas en el que el número de flechas simétricas de V_i a V_{i+1} (mod 3) sea menor a $|V_{i+1}|$ para toda clase V_i donde ocurran flechas simétricas.

Demostración. De nuevo consideramos la notación utilizada en el Teorema 7 y analizamos las diferentes posibilidades para D. Supongamos que D no es isomorfa a ninguna de las familias descritas en *i*), *ii*) e *iii*).

Si D es como en (1), cualquier vértice en $V(D)$ es un núcleo para D.

Dado que D no es isomorfa a una extensión de un 3-ciclo, entonces D no es como en (2).

En el caso de que D sea como en (3), entonces D contiene una extensión de un 3-ciclo con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$ además como D no es isomorfa a la familia descrita en *iii*), tenemos que existen clases V_i, V_{i+1} (mod 3) tales que hay el mismo número de flechas simétricas de V_i a V_{i+1} que vértices en V_{i+1} por lo que V_i absorbe a V_{i-1} y a V_{i+1} (mod 3) y por lo tanto es núcleo para D. Si D es como en (4), entonces con la notación del Teorema 7, el conjunto $\{u_2, u_3, ...u_n\} \cup V_2$ es un núcleo para D. Para el caso (5), D es un 5-ciclo simétrico, y por lo tanto contiene un 5-ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$, así $\{v_1, v_3\}$ es un núcleo para D. Si D es como en (6), entonces es una estrella simétrica, por lo que el centro de D es un núcleo para D.

En el caso (7) D es una dobre estrella, denotamos como $\{u, v\}$ al centro de D. Notamos que $N(u)$ es un conjunto independiente que absorbe a todo vertice de D y por lo tanto es un núcleo.

Para el caso (8), si D tiene circuenferencia 2, entonces es como en (6) o (7). Si tiene circunferencia 3, por hipótesis tenemos que D no es como en (2) y por lo tanto es como en (3) o (4). Finalmente si D tiene circunferencia 4, entonces D tiene orden 4 y contiene un 4-ciclo $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$. Si suponemos que D no es una digráfica semicompleta, entonces existen v_i y v_j tales que $(v_i, v_j), (v_j, v_i) \notin A(D)$, por lo que $\{v_i, v_j\}$ es un conjunto independiente que absorbe a los 2 vertices restantes.

Si D es una digráfica semicompleta, entonces por hipótesis existe un vértice v tal que $d^-(v) = 3$ y por lo tanto $\{v\}$ es un núcleo para D. Agotados los casos, el teorema se sigue.

■

Diremos que una componente terminal es del tipo *i*), *ii*) o *iii*) si dicha componente es isomorfa a una digráfica de la familia *i*), *ii*) o *iii*) respectivamente. Pasemos a la caracterización de las digráficas 4-transitivas que contienen un núcleo. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de una digráfica de la familia *iii*).

Teorema 12. *Sea D una digráfica 4-transitiva con componentes fuertemente conexas D_1, D_2,..., D_k, entonces D tiene núcleo si y sólo si D no contiene componentes terminales isomorfas a las familias descritas en el Lema 11.*

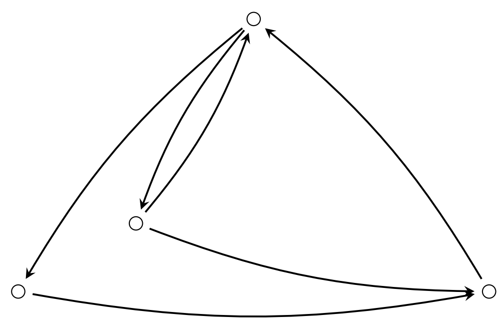

Figura 3: Digráfica de la familia *iii*) descrita en el Lema 11.

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre k. Si $k = 1$ entonces D es fuertemente conexa y el resultado se sigue por el Lema 11.

Supongamos que el resultado se cumple para digráficas con $k - 1$ componentes fuertemente conexas y supongamos que D es una digráfica con $k > 1$ componentes fuertemente conexas D_1, D_2,..., D_k. Sin pérdida de generalidad supongamos que D_1 es una componente inicial de D, por la hipótesis inductiva tenemos que existe un núcleo N para $D - D_1$.

Si N es tal que absorbe a todo vértice de D_1, entonces N es un núcleo para D. Entonces podemos suponer que existe un vértice $x \in V(D_1)$ que no es absorbido por N, lo que implica que $d(x, N) \geq 2$. Como D_1 es una componente inicial de D ningún vértice en $D - D_1$ alcanza a x, por lo que $d(N, x) = \infty$ y por lo tanto $N \cup \{x\}$ es un conjunto independiente de D. Con la notación del Teorema 7 consideremos las diferentes posibilidades para D_1. Si D_1 es como en (1) entonces $N \cup \{x\}$ es un núcleo para D.

En el caso de que D_1 sea como en (2) o (3) sabemos que D_1 contiene a una extensión de un 3-ciclo como subgráfica generadora con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$. Observamos que si algún vértice $v_i \in V_i$ es absorbido por N, entonces por el Lema 1 tenemos que todo el conjunto V_i es absorbido por N. Observamos también que como D_1 es una componente inicial y $k > 1$ entonces alguna flecha sale de D_1 hacia alguna otra componente D_j, sin perdida de generalidad supongamos que $(v_0, z) \in A(D)$ con $v_0 \in V_0$ y $z \in D_j$, veamos dos casos, dependiendo si z está o no en núcleo.

Si $z \in N$ entonces V_0 es absorbido por N. Como supusimos que D_1 no está completamente absorbido por N, entonces existe alguna otra clase de la partición que no esta absorbida por N. Si V_2 no es absorbido por N entonces $N \cup V_2$ es un núcleo de D.

Si V_2 si es absorbido, entonces V_1 no lo está y por lo tanto, $N \cup V_1$ es un núcleo para D.

Ahora, si $z \notin N$, existe un vértice $n_1 \in N$ tal que $(z, n_1) \in A(D)$ (pues N absorbe a todo vértice en $D - D_1$). Podemos encontrar $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ tales que (v_1, v_2, v_0, z, n_1) es una 4-trayectoria en D y, así, V_1 es absorbido por N, haciendo un análisis análogo al anterior, tenemos que $N \cup V_0$ o $N \cup V_2$ es un núcleo para D, dependiendo de si V_0 es o no absorbido por N.

En el caso de que D_1 sea como en (4), consideramos $S \subseteq \{u_2, u_3, ..., u_n\}$ el subconjunto de los u_i's tales que no son absorbidos por N. Supongamos que $S \neq \varnothing$. Notamos que S absorbe a V_0. Si V_2 no es absorbido por N, entonces $N \cup S \cup V_2$ es un núcleo para D. Si V_2 es absorbido por N pero V_1 no, entonces $N \cup S \cup V_1$ es un núcleo para D. Y si ambos, V_1 y V_2 son absorbidos por N, entonces $N \cup S$ es un núcleo para D.

Supongamos ahora que $S = \varnothing$. Entonces u_i esta absorbido para todo $i \in \{2, 3, ..., n\}$ por lo que $(u_j, n_1) \in A(D)$ para alguna j y para algún $n_1 \in N$, lo que implica que podemos encontrar $v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ tales que $(v_1, v_2, v_0, u_j, n_1)$ es una 4-trayectoria dirigida y por lo tanto $(v_1, n_1) \in A(D)$, el Lema 1 nos dice que $V_1 \to n_1$ y así V_1 está absorbido por N. Ahora, si V_0 no está absorbido por N entonces $N \cup V_0$ es un núcleo para D y si V_0 esta absorbido por N, entonces V_2 no lo está (de lo contrario N absorbería a todo D_1), así $N \cup V_2$ es un núcleo para D.

Si suponemos que D_1 es como en (5), entonces D contiene un 5-ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ y dado que de D_1 alcanza a una componente terminal D_j, entonces existe $n_1 \in D_j \cap N$ tal que hay una Cn_1-trayectoria dirigida. Por el dual del Lema 5 se tiene que $C \to n_1$, contradiciendo la suposición de que D_1 no es absorbido por N.

Si D_1 es como en (6), entonces D_1 es una estrella, sea $\{u\}$ el centro de D_1, si u no es absorbido por N entonces $N \cup \{u\}$ es un núcleo para D. Si u es absorbido por N, entonces consideramos a $S \subseteq V(D_1)$ el conjunto de vertices no absorbidos por N, de esta forma $d(s, N) \geq 2$ para todo $s \in S$ y entonces $N \cup S$ es un conjunto independiente y absorbente para D.

Ahora, para el caso de que D_1 sea como en (7), tenemos que D_1 es una doble estrella con centro $\{u, v\}$, consideramos $S \subseteq V(D_1)$ el subconjunto de vértices de D_1 no absorbidos por N. Si $u, v \notin S$ entonces S es un conjunto independiente y así $N \cup S$ es un núcleo para D_1. Si $u \in S$, entonces $u \in N(v) \cap S$, que es un conjunto independiente que absorbe a todo vértice de D_1 y por lo tanto $N \cup (N(v) \cap S)$ es un núcleo para D. Analogamente si $v \in S$, tenemos que $N \cup (N(u) \cap S)$ es un núcleo para D.

Finalmente, si D_1 es como en (8) entonces D_1 puede tener circunferencia 2, 3 o 4. Si D_1 tiene circunferencia 2, entonces D_1 es como en (6) o (7), y si tiene circunferencia 3, entonces D_1 es como en (2), (3) o (4).

Supongamos que D_1 tiene circunferencia 4. Entonces D_1 tiene orden 4 y un 4-ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$. Sabemos que D_1 alcanza a una componente terminal D_j y por lo tanto podemos encontrar $n_1 \in D_j \cap N$ tal que existe una Cn_1-trayectoria dirigida. Por el dual del Lema 5 tenemos que $C \to n_1$, contradiciendo la suposición de que N no absorbe a D_1.

Dado que estos son todos los casos posibles, obtenemos el resultado por Inducción Matemática.

■

4 La conjetura de Laborde-Payan-Xuong para digráficas 4-transitivas

El teorema de Gallai-Roy-Vitaver dice que el número cromático de una digráfica D es a lo más el orden de la trayectoria de longitud máxima en D (Ver [14],[19] y [20]). En [18] Laborde, Payan y Xuong generalizan este resultado planteando la siguiente pregunta ¿Para toda digráfica D existe un conjunto independiente de vértices I, tal que para cualquier trayectoria dirigida de longintud máxima T en D, se tiene que $T \cap I \neq \varnothing$? A dicha conjetura se le conoce como la conjetura de Laborde-Payan-Xuong, la cual sigue abierta para digráficas en general, sin embargo su veracidad se ha probado para varias familias de digráficas,

Como veremos en esta sección un núcleo es un conjunto independiente que intersecta a toda trayectoria de longiud máxima y por lo tanto la conjetura es cierta para digráficas que tienen núcleo.

También en [18] se demuestra que para digráficas simétricas existe un conjunto independiente que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima, más aún, se demuestra que cada vértice de dicho conjunto independiente es el vértice inicial de una trayectoria de longitud máxima (resultado que también se conjetura para toda digráfica).

A continuación mencionaremos algunas de las familias de digráficas para las cuales se ha probado la conjetura de Laborde-Payan-Xuong.

Como ya se mencionó, en [1] se carcaterizan las digráficas cuasi-transitivas, este resultado se utilizó para resolver, entre otros problemas, la conjetura de Laborde-Payan-Xuong para digráficas cuasi-transitivas.

En [22] Wang y Wang describen completamente la interacción entre componentes fuertemente conexas de digráficas 3-cuasi-transitivas (caracterizadas en [6]) con lo cual se demuestra esta conjetura para digráficas 3-cuasi-transitivas.

En [8] Galeana-Sanchez, R. Gómez y Montellano-Ballesteros demuestran la conjetura de Laborde-Payan-Xuong para digráficas localmente semicompletas, localmente transitivas y digráficas que poseen trayectorias dirigidas de longitud máxima a lo más 4.

En [7] también se se prueba esta conjetura para digráficas de lineas y para varias generalizaciones de torneos, como torneos locales por flechas, digráficas cuasi-transitivas, digráficas con trayectorias fusionables, digráficas in-semicompletas, ex-semicompletas y digráficas semicompletas k-partitas.

En esta sección confirmaremos este resultado para digráficas 4-transitivas. Para esto veamos los siguientes resultados.

Lema 13. *Sea D una digráfica con núcleo N. Entonces para cualquier trayectoria dirigida de longitud máxima T en D, tenemos que $N \cap T \neq \varnothing$*

Demostración. Sea N un núcleo de D y $T = (u_1, u_2, ..., u_k)$ una trayectoria de longitud máxima. Supongamos que $T \cap N = \varnothing$, entonces $u_i \notin N$ para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$, en particular $u_k \notin N$. Como N es un núcleo, sabemos que existe $n_1 \in N$ tal que $(u_k, n_1) \in A(D)$ lo que es una contradicción ya que $T' = (u_1, u_2, ..., u_k, n_1)$ es una trayectoria de mayor longitud que T. ∎

Lema 14. *Sea D una digráfica 4-transitiva, entonces existe un subconjunto S de los vértices de las componentes fuertemente conexas terminales de D tal que $D \backslash S$ tiene núcleo.*

Demostración. Sean $D_1, D_2, ..., D_r$ las componentes terminales de D. Notamos que si ninguna componente terminal es isomorfa a digráficas de las familias descritas en el Lema 11, entonces por el Teorema 12 tenemos que D tiene núcleo y así $S = \varnothing$.

Observamos que si alguna componente terminal D_j es del tipo i) o iii), entonces D_j tiene una extensión de un 3-ciclo como subgráfica generadora con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$. Y que en particular $D_j \backslash V_0$ tiene núcleo $N_j = V_2$.

Por otro lado si alguna componente terminal D_j es del tipo ii) entonces D_j es una digráfica semicompleta de orden 4, tal que $d^-(v) < 3$ para toda $v \in V(D_j)$. Sin embargo sabemos que existe algún vértice v_1 en D_j tal que $d^-(v_1) = 2$, sean $\{v_2, v_3\}$ los invecinos de v_1. De esta forma sólo hay un vértice v_4 que no esta absorbido por v_1, por lo que $D_j \backslash \{v_4\}$ tiene núcleo $N_j = \{v_1\}$.

Tomando en cuenta estas observaciones definimos para cada componente terminal D_i de D el conjunto S_i de la siguiente forma:

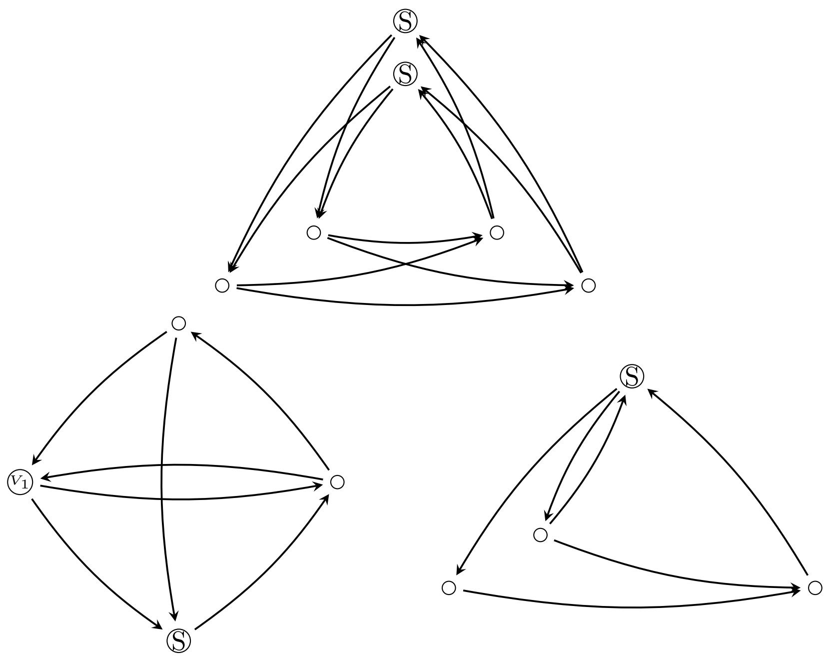

Figura 4: Elección de los vértices del conjunto S para componentes terminales fuertemente conexas del tipo i), ii) y iii) en la prueba del Lema 14.

$$S_i = \begin{cases} V_0 \text{ si } D_i \text{ es del tipo } i) \text{ o } iii) \text{ y tiene patrición cíclica } \{V_0, V_1, V_2\} \\ \{v_4\} \text{ si } D_i \text{ es del tipo } ii) \text{ y } v_4 \in V(D_i) \text{ no es absorbido por } v_1, \text{ donde } d^-(v_1) = 2 \\ \varnothing \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definamos $S = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ que es un subconjunto de los vértices de las componentes terminales de D y que además $D \backslash S$ ya no tiene componentes teminales del tipo i), ii), o iii). Por el Teorema 12, $D \backslash S$ tiene núcleo.

Mas aún, si N es un núcleo de $D \backslash S$ y D_j es una componente terminal de D del tipo i) o iii) con partición $\{V_0, V_1, V_2\}$, entonces $V_2 \subseteq N$ (pues es el único conjunto independiente que puede absorber a V_1 en $D_j \backslash V_0$). Análogamente, si D_j es una componente terminal de D del tipo ii) y v_4 es el vértice no absorbido por v_1, donde $d^-(v_1) = 2$, entonces $v_1 \in N$. ■

Observamos que por el Lema 13 el núcleo de una digráfica es un conjunto independiente que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima, hecho que utilizaremos para demostrar la conjetura de Laborde-Payan-Xuong para digráficas 4-transitivas.

Teorema 15. *Sea D una digráfica 4-transitiva, entonces existe un conjunto independiente de vértices I tal que para cualquier trayectoria dirigida de longuitud máxima T, se tiene $T \cap I \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea D una digráfica 4-transitiva, por el Lema 14 podemos encontrar un subconjunto S de los vértices de las componentes terminales de D tal que $D \backslash S$ tiene núcleo N. Afirmamos que $N = I$ es el conjunto independiente que buscamos.

Sea T una trayectoria de longitud máxima en D. Si $T \cap S = \varnothing$, entonces T es una trayectoria de longitud máxima en $D \backslash S$, por el Lema 13 tenemos que $N \cap T \neq \varnothing$.

Ahora, supongamos que $T \cap S \neq \varnothing$ y escribamos $T = (u_1, u_2, ..., u_m)$. Observamos que como $T \cap S \neq \varnothing$ y S es un subconjunto de las componentes terminales de D, tenemos que T alcanza a una y sólo una componente terminal D_j, mas aún, el vértice terminal u_m de T esta contenido en $V(D_j)$ (pues de lo contrario implicaría que hay alguna flecha que sale de D_j).

Supongamos que D_j es del tipo $i)$ o $iii)$, entonces D_j tiene como subgráfica generadora una extensión de un 3-ciclo con partición cíclica $\{V_0, V_1, V_2\}$ y por la construcción de S en la prueba del Lema 14 tenemos que $S \cap D_j = V_0$ y que $V_2 \subseteq N$, por lo que $T \cap S \subseteq V_0$. Supongamos ahora que T no pasa por V_2, es decir que $T \cap V_2 = \varnothing$. Además $u_m \in V(D_j)$, por lo que $u_m \in V_0$ o $u_m \in V_1$.

Si $u_m \in V_1$, como T no pasa por V_2 entonces existe $v_2 \in V_2$ tal que $T' = (u_1, u_2, ..., u_m, v_2)$ es una trayectoria dirigida en D de longitud mayor a la de T, contradiciendo la elección de T.

En el caso de que $u_m \in V_0$ y D_j sea del tipo $i)$, entonces T no pasa por V_1, pues toda V_1V_0-trayectoria dirigida pasa por V_2 lo que implica que podemos encontrar $v_1 \in V_1$ tal que $T' = (u_1, u_2, ..., u_m, v_1)$ es una trayectoria dirigida en D de longitud mayor a la de T, lo que es una contradicción.

Si $u_m \in V_0$, D_j es del tipo $iii)$ y no existen flechas simétricas de V_0 a V_1 , entonces toda V_1V_0-trayectoria dirigida pasa por V_2, al igual que en el caso anterior podemos encontrar una trayectoria T' de longitud mayor a la de T.

Si $u_m \in V_0$, D_j es del tipo $iii)$ y existe al menos una flecha simétrica de V_0 a V_1, entonces $|V_0| = 1$ o $|V_1| = 1$. Si $|V_0| = 1$ entonces $u_{m-1} \in V_1$ pues de lo contrario tendríamos que T no pasa por V_1 y por un argumento igual al de los casos anteriores podríamos encontrar una trayectoria de mayor longitud. Pero como $u_{m-1} \in V_1$, entonces podemos encontrar $v_2 \in V_2$ tal que $T' = (u_1, u_2, ..., u_{m-1}, v_2, u_m)$ es una trayectoria en D de longitud mayor que la de T, lo cual no es posible.

Ahora si $|V_1| = 1$, entonces T puede contener lo más dos vértices de V_0, en cuyo caso tenemos que $u_{m-2}, u_m \in V_0$ y $u_{m-1} \in V_1$, pero entonces existe $v_2 \in V_2$ tal que $T' = (u_1, u_2, ..., u_{m-2}, u_{m-1}, v_2, u_m)$ es una trayectoria de longitud mayor a la de T lo que es una contradicción.

Concluimos que $T \cap V_2 \neq \varnothing$ y por lo tanto $T \cap N \neq \varnothing$.

Si D_j es del tipo $ii)$ entonces por la construcción de S en la prueba del Lema 14 tenemos que $S \cap D_j = \{v_4\}$ en donde v_4 es el vertice no absorbido por v_1, con $d^-(v_1) = 2$ y sabemos también que $v_1 \in N$. Notamos que como D_j es una digráfica semicompleta fuertemente conexa, en particular contiene un torneo fuertemente conexo, lo que implica que D_j contiene un ciclo hamiltoniano $C = (v_4, v_3, v_2, v_1, v_4)$, por lo que toda trayectoria de longitud máxima que alcance a D_j debe pasar por sus 4 vertices, en particular $T \cap v_1 \neq \varnothing$, lo que implica que $T \cap N \neq \varnothing$.

Como S solo contiene vértices de componentes del tipo $i)$, $ii)$ o $iii)$, hemos agotado los casos posibles.

■

Es importante mencionar que la conjetura de Laborde-Payan-Xuong es un caso particular de la «directed path partition conjeture (DPPC)», esta dice que para cualquier digráfica D y para cualesquiera enteros positivos λ_1 y λ_2 tales que $\lambda(D) = \lambda_1 + \lambda_2$, donde $\lambda(D)$ denota el orden de la trayectoria de longitud máxima de la digráfica D, entonces existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $\lambda(D[V_i]) \leq \lambda_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

Existe también una versión mas fuerte de esta conjetura planteada por Bondy en [2] en la que se pide que se de la igualdad $\lambda(D[V_i]) = \lambda_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

Esta conjetura tiene una versión análoga para gráficas (no dirigidas) llamada simplemente «path partition conjeture(PPC)», en [5] J. E. Dunbar y M. Frick muestran que la «path partition conjeture» es cierta para la familia de gráficas sin garras, es decir gráficas que no contienen a la bipartita completa $K_{1,3}$ como subgráfica inducida.

5 Conclusiones

En la última sección de este trabajo se prueba que la conjetura de Laborde-Payan-Xuong es cierta para digráficas 4-transitivas. Es natural preguntarse que ocurre con otras conjeturas para esta familia de digráficas, como por ejemplo la conjetura de Seymour de la segunda ex-vecindad que establece que toda digráfica D asimétrica sin lazos contiene un vertice v, tal que $|N^{++}(v)| \geq |N^{+}(v)|$ en donde

$$N^{++}(v) = \bigcup_{u \in N^{+}(v)} N^{+}(u) \backslash N^{+}(v)$$

Llamamos a $N^{+}(v)$ la (primera) ex-vecindad de v y a $N^{++}(v)$ la segunda ex-vecindad de v. Proponemos dicha conjetura para digráficas 4-transitivas.

Conjetura 16. *Sea D una digráfica 4-transitiva sin lazos ni flechas simétricas, entonces existe $v \in V(D)$ tal que $|N^{++}(v)| \geq |N^{+}(v)|$.*

La búsqueda de algoritmos con los cuales se puedan encontrar núcleos y otras estructuras en familias de digráficas es otro de los problemas que se han estudiado en el pasado. En [4], V. Chvátal demuestra que el problema de determinar si una digráfica dada tiene núcleo es NP-completo. Recientemente Hell y Hernández-Cruz demostraron en [15] que el problema de encontrar 3-núcleos en digráficas es también un problema NP-completo.

Por otro lado, sabemos que existen varios algoritmos que resueleven el problema de encontrar componentes fuertemente conexas en tiempo lineal, uno de ellos se puede encontrar en [3] (pag. 320-325) , aquí también se encuentra la prueba de que la complejidad de dicho algoritmo es $O(p + q)$, donde p es el orden de la digráfica y q su tamaño.

Además, el verificar que componentes fuertemente conexas terminales no son isomorfas a ninguna de las familias del tipo i), ii) o iii) se puede resolver en tiempo polinomial, por lo que el problema de encontrar núcleos en las familia de digráficas 4-transitivas se puede resolver en tiempo polinomial, del mismo modo podemos concluir que el problema de encontrar un 3-núcleo para digráficas 4-transitivas se resuelve en tiempo polinomial.

Como cada vez que se encuentra una familia “bien portada” de digráficas, resulta pertinente preguntarse que otros problemas que usualmente son difíciles se simplifican para la familia de digráficas 4-transitivas, como por ejemplo, el problema de determinar si una digráfica 4-transitiva es hamiltoniana, si cumple «la path partition condition» o la conjetura de la segunda ex-vecindad. Esta es una línea de trabajo que puede resultar fructífera y nos puede acercar un pequeño paso a la verificación en general de las conjeturas antes mencionadas.

Agradecimentos

Agradezco a César Hernández Cruz por el apoyo y dedicación para asesorarme en el desarrollo de este proyecto, mejorando gran parte de lo aquí expuesto.

Referencias

[1] J. Bang-Jensen y J. Huang, *Quasi-transitive digraphs*, J. Graph Theory 20(1995) 141-161.

[2] J. A. Bondy, Basic graph theory: Paths and circuits, Handbook of Combinatorics, (R.L. Graham, M. Grotschel, and L. Lovasz), The MIT Press, 1, p. 49, Cambridge, MA, 1995.

[3] G. Chartrand y O. R. Oellermann, "Applied and Algorithmic Graph Theory" (McGraw-Hill, 1993).

[4] V. Chvátal, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report No. CRM-300, 1973, Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal.

[5] J. E. Dunbar y M. Frick *The Path Partition Conjecture is true for claw-free graphs*, Discrete Math. 307(2007) 1285-1290.

[6] H. Galeana-Sánchez, I.A. Goldfeder e I. Urrutia, *On the structure of 3-quasi-transitive digraphs*, Discrete Math. 310(2010) 2495-2498.

[7] H. Galeana-Sánchez y R. Gómez, *Independent sets and non-augmentable paths in generalizations of tournaments*, Discrete Math. 308(2008) 2460-2472.

[8] H. Galeana-Sánchez, R. Gómez y Montellano-Ballesteros, *Independent transversals of longest paths in locally semicomplete and locally transitive digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 29(3) 2009, 469-480.

[9] H. Galeana-Sánchez y C. Hernández-Cruz. *On the existence of (k, l)-kernels in digraphs with a given circumference*. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 10(1), 2013, 15–28.

[10] H. Galeana-Sánchez y C. Hernández-Cruz, *k-kernels in generalizations of transitive digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 31(2) 2011 293-312.

[11] H. Galeana-Sánchez y C. Hernández-Cruz. *On the existence of (k, l)-kernels in infinite digraphs: A survey* (2011), Aceptado.

[12] H. Galeana-Sánchez, C. Hernández-Cruz *Cyclically k-partite digraphs and k-kernels*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 31(1) 2011 63-79

[13] H. Galeana-Sánchez y C. Hernández-Cruz, *k-kernels in k-transitive and k-quasi-transitive digraphs*, Discrete Math. 312(2012) 2522-2530.

[14] T. Gallai *On directed path and circuits*, Theory of Graphs (Proceedings of the Colloquium Tihany 1966), New York: Academic Press, 115-118.

[15] P. Hell y C. Hernández-Cruz, *On the Complexity of the 3-Kernel Problem in Some Classes of Digraphs* Discussiones Mathematicae Graph Theory, In Press.

[16] C. Hernández Cruz, 3-*transitive digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 32(2) 2013, 205-219.

[17] C. Hernández Cruz, *4-transitive digraphs I: The structure of strong 4-transitive digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 33(2) 2013, 247-260.

[18] J.M. Laborde, C.Payan y N.H. Xuong, *Independent sets and longest paths in digraphs*, Graphs and other combinatorial topics. Proceedings of the third Czechoslovak Symposium of Graph Theory. (1982) 173-177.

[19] B. Roy, *Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe* Rev. Francaise Informat. Recherche Operátionnelle, 1(5) 1967 129-132.

[20] L.M. Vitaver, *Determination of minimal coloring of vertices of a graph by means of Boolean powers of the incidence matrix* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 147(1962) 758-758.

[21] J. Von Neumann y O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior (Princeton University Press, Princeton, 1953).

[22] S. Wang y R. Wang, *Independent sets and non-augmentable paths in arc-locally in-semicomplete digraphs and quasi-arc- transitive digraphs*, Discrete Math. 311(2010) 282-288.