

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ACATLÁN

INTERPOLACIÓN FRACTAL Y SU USO ALTERNATIVO EN  
LA INFERENCIA DE DATOS DE LA FORMA POLINOMIAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y  
COMPUTACIÓN

PRESENTA

**EDGAR CORTEZ MACHORRO**

Asesor: MAESTRA. JEANETT LÓPEZ GARCÍA

Febrero de 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



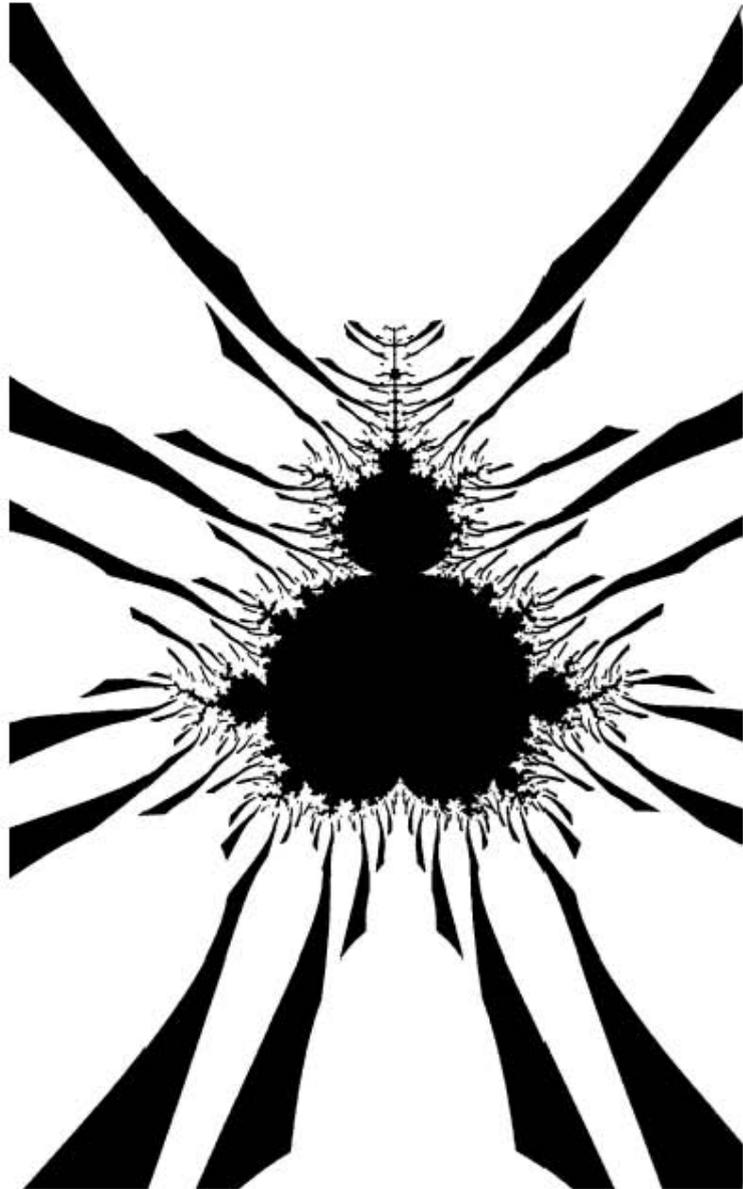
**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.







*Dedicado a mi madre,  
cuyas canas muestran el trabajo y esfuerzo por sus hijos.*

*Dedicated to my mother,  
which gray hairs show the work and effort for her children.*

*Gewidmet meiner Mutter,  
deren graue Haare ihre Arbeit und Mühe für ihre Kinder zeigen.*

*Dédié à ma mère,  
dont les cheveux gris démontrent le travail et l'effort pour leurs enfants.*

私たちへの献身的な世話と努力で  
白髪が増えた母へ捧ぐ。



*A Pedro Raúl.  
¿Por qué? Por todo.*

*To Pedro Raúl.  
Why? For everything.*

*Zu Pedro Raúl.  
Warum? Für alles.*

*Á Pedro Raúl.  
Pourquoi? Pour tout.*

ペドロ・ラウルにこのを捧げる。  
どうしてですか。すべての理由。



# Agradecimientos

Agardezco a mi madre por sacrificar tantas cosas y por nunca decirme “NO” cuando se trataba de mis metas y por todo el apoyo que recibí y recibiré. Por enseñarme a caminar solo y no atarme las alas. Porque los valores que me inculcó me han permitido llegar hasta aquí.

El agradecimiento especial es para la maestra Jeanett quien aparte de ser una excelente asesora, es un gran ser humano. Y a todos aquellos profesores que saben que impartir conocimiento va más allá de estar en un salón de clases.

Obviamente agradezco a mis amigos, por pasar momentos inolvidables con todos ellos.

Desde luego agradezco a la universidad, porque estar aquí fue una de las metas más importantes de mi vida. Y por ser mi cobijo todo este tiempo, porque se convirtió en mi casa, porque pasaba más tiempo aquí que en cualquier otro lugar.

Agradezco a todos aquéllos que directa o indirectamente tuvieron que ver para que yo llegara hasta este instante, especialmente a mi familia que siempre me ha apoyado en este camino.

GRACIAS.



# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Fractales</b>	<b>1</b>
1.1. El espacio donde viven los Fractales . . . . .	2
1.1.1. Espacios . . . . .	2
1.1.2. Espacios Métricos . . . . .	2
1.1.3. Secuencias de Cauchy . . . . .	3
1.1.4. Conjuntos . . . . .	5
1.1.5. El Espacio Métrico $\mathcal{H}(X)$ : El espacio donde viven los Fractales . . . . .	6
1.2. Definición y ejemplos . . . . .	7
1.2.1. El conjunto de Cantor . . . . .	7
1.2.2. El triángulo de Sierpinski . . . . .	12
1.2.3. La curva de Koch . . . . .	15
1.2.4. Fractales como objetos matemáticos . . . . .	17
1.3. Dimensión fractal . . . . .	20
1.3.1. Medida de Hausdorff . . . . .	20
1.3.2. Dimensión de Hausdorff-Besicovich . . . . .	23
1.3.3. Dimensión y medida fractal . . . . .	25
1.3.4. Otras propiedades . . . . .	29
1.4. Sistema de Funciones Iteradas para la construcción de fractales . . . . .	32
1.4.1. IFS . . . . .	32
1.4.2. Funciones de Conjunto Valuado . . . . .	34
<b>2. Interpolación clásica</b>	<b>43</b>
2.1. Interpolación polinomial . . . . .	43
2.2. Interpolación de Lagrange . . . . .	46
2.3. Diferencias divididas . . . . .	48
2.4. Interpolación con Splines cúbicos . . . . .	52
2.5. Error de polinomio de interpolación . . . . .	57
2.5.1. Error en el cómputo numérico . . . . .	58

<b>3. Interpolación fractal</b>	<b>61</b>
3.1. Funciones de Interpolación fractal . . . . .	62
3.2. Interpolantes con FIF's Polinomiales (con $C^n$ FIF's) . . . . .	67
3.3. FIF's lineales . . . . .	68
3.4. Dimensión fractal de una función de interpolación fractal . . . . .	72
<b>4. Análisis de los métodos propuestos</b>	<b>75</b>
4.1. Construcciones preliminares . . . . .	75
4.2. Caso de aplicación y resultados . . . . .	76
4.3. Interpolación . . . . .	85
4.4. Generalidades (observaciones) . . . . .	91
4.4.1. Lagrange . . . . .	91
4.4.2. Newton . . . . .	93
4.4.3. Splines . . . . .	95
4.4.4. Interpolación fractal . . . . .	96
4.5. Error . . . . .	100
<b>5. Conclusiones</b>	<b>105</b>
<b>A. Programas de Interpolación fractal</b>	<b>109</b>
A.1. Programa 1 . . . . .	109
A.2. Programa 2 . . . . .	110
A.3. Programa 3 . . . . .	111
<b>B. Programas de interpolación clásica</b>	<b>113</b>
B.1. Programa de interpolación por el método de Lagrange . . . . .	113
B.2. Programa de interpolación por el método de Newton Diferencias Divididas . . . . .	114
B.3. Programa interpolación por el método de Splines cúbicos . . . . .	115
<b>Referencias</b>	<b>117</b>

---

**Abstract:** In this thesis the investigations center around mechanisms for interpolating data and the implications and attributes of assessing computational techniques for the efficient construction of approximations to functions which are known only at a discrete, fixed number of points. While the properties of standar approximation methods have been well cataloged, approximations based on fractal methods using iterative techniques present new challenges. In constructing polynomial approximations , it is well known that there are a significant number of standar measures of quality which must be considered, and that problems can develop in attempting to utilize polynomial approximations methods. Issues which affect polynomial interpolation, such as data sampling, convergences rates and error estimate, are well established for standard polynomial interpolation methods. In contrast, fractal interpolation method and the possible advantages of using iterative methods are less well established. If the graphs of the approximation becomes extremely oscillatory, other methods such as splines interpolation or piecewise interpolation are used. Thus, it is important to consider the design of algoritms which can be used to construct fractal interpolation as well. There are many other tecniques for finding approximations to data other than interpolation. In interpolation the approximation  $p$  which is constructed has the property that  $p(x_i) = F_i$  for every point  $(x_i, F_i)$ . Alternative methods for fitting data include least aquares approximation and other best-fit methods. While these are important, they are beyond the scope of this work and the objetive is to compare and contrast classical tecniques using polynomial interpolation with the fractal interpolation method.

**Keywords:** fractal interpolation, polinomial interpolation, fitting data, fractal, fractal dimension.

---



---

**Resumen:** En esta tesis las investigaciones se centran en los mecanismos para la interpolación de datos y las implicaciones y los atributos de la evaluación de técnicas computacionales para la construcción eficiente de aproximaciones a las funciones que se conocen sólo en forma discreta, es decir, en un número fijo de puntos. Mientras que las propiedades de los métodos de aproximación estándar han sido bien catalogadas, aproximaciones basadas en métodos fractales usando técnicas iterativas presentan nuevos retos. En la construcción de aproximaciones polinómicas, es bien sabido que hay un número significativo de medidas estándar de calidad que debe ser considerado, y que se pueden desarrollar problemas en el intento de utilizar métodos de aproximaciones polinómicas. Problemas que afectan a la interpolación polinómica, como el muestreo de datos, las tasas de convergencias y estimaciones de error, están bien establecidos para los métodos estándar de interpolación por polinomios. En contraste, el método de interpolación fractal y las posibles ventajas del uso de métodos iterativos no están bien establecidas. Si los gráficos de la aproximación se vuelven extremadamente oscilatorios, se utilizan otros métodos, tales como interpolación por splines o interpolación a trozos. Por lo tanto, es importante tener en cuenta el diseño de algoritmos que pueden ser utilizados para construir, también, la interpolación fractal. En la interpolación la aproximación  $p$ , que se construye, tiene la propiedad de que  $P(x_i) = F_i$  para cada punto  $(x_i, F_i)$ . Métodos alternativos para los datos de ajuste incluyen aproximación por mínimos cuadrados y otros métodos de ajuste. Si bien estas son importantes, están más allá del alcance de este trabajo y el objetivo es comparar y contrastar técnicas clásicas mediante la interpolación polinómica con el método de interpolación fractal.

**Palabras clave:** interpolación fractal, interpolación polinomial, ajuste de datos, fractal, dimensión fractal.

---



# Introducción

---

SON muchas y muy distintas las situaciones en las que, en el quehacer científico, aparecen series de datos que representan los resultados de mediciones experimentales. De estos datos únicamente se conoce su comportamiento en una cantidad finita de elementos, entonces se necesita encontrar una ley general que pueda describirnos su posible comportamiento a lo largo de todo el intervalo en el que se encuentran los datos o mediciones originales. A esa ley general a la que se adaptan esos datos no es más que una función que tome los valores predeterminados y con ella hallar aproximaciones de otros valores desconocidos para la función con una precisión deseable fijada, siendo precisamente el objetivo de la interpolación.

En otras palabras, dada una tabla de datos se trata de encontrar una función que tome los valores requeridos en los puntos dados. Dicha función de interpolación o interpoladora sustituirá a una función (si es que esta existe) y tal función de interpolación nos describirá el comportamiento de los datos.

Las propiedades de los métodos tradicionales de aproximación (métodos de aproximación polinomial) han sido bien catalogados, definidos y usados para diferentes cometidos, las aproximaciones basadas en los métodos usando técnicas iterativas son, ahora, el centro de estudio de este trabajo. En contraste, el método de interpolación fractal y las ventajas de usar un método iterativo no están bien establecidos.

La forma de proceder usualmente en los métodos tradicionales de aproximación para analizar datos que se obtienen de la observación del fenómeno es representar los datos gráficamente en un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  y después los datos son analizados geoméricamente a través de una curva.

Por ejemplo, uno podría decir que una línea recta es una buena aproximación al comportamiento de los datos. O incluso, se podría construir un polinomio de grado mayor a uno que sea un buen ajuste para los datos en el intervalo definidos por los propios datos.

Es así que la geometría euclidiana, la trigonometría y el cálculo nos han enseñado a pensar en el modelado de las formas que vemos en el mundo real en términos de líneas rectas, círculos, parábolas y otras curvas simples. ¿Podrían ser estos buenos modelos? En una modelación más realista, la mayoría de los fenómenos no podrían modelarse mediante curvas suaves o bien comportadas. He aquí, que se propone a la interpolación fractal como una alternativa a otro tipo de análisis con modelos de curvas suaves a trozos.

Para el estudio de la interpolación fractal se introduce un concepto llamado función de interpolación fractal que es la base de la interpolación propuesta por Michael Barnsley, creador de dicha técnica. Es así que con dicha técnica se pueden aproximar componentes de alguna imagen tales como los picos de una montaña, los bordes de las nubes, etc. Pero en esta tesis se replantea el uso de la técnica de interpolación fractal mediante los factores de escala para generalizar el comportamiento de datos mediante funciones de interpolación fractal que nos ayuden a saber u aproximar el valor de un punto desconocido. Es entonces que la interpolación fractal provee una forma alternativa, a la interpolación polinomial, para tratar datos experimentales.

A diferencia de los polinomios usados en los métodos tradicionales de interpolación, las funciones de interpolación fractal poseen características fractales. Por ejemplo, la gráfica de dicha función de interpolación fractal no tiene dimensión entera. Para generar la función de interpolación fractal se usan transformaciones afines llamadas Sistemas de Funciones Iteradas (IFS por sus siglas en inglés).

Ahora, al hablar de interpolar (en métodos numéricos) nos viene a la mente, rápidamente, la palabra error. Desafortunadamente esto es inevitable, en este caso se propone, además de la implementación del método para interpolar, la forma de tratar su respectivo error de interpolación.

El algoritmo permite graficar una cantidad finita de puntos, tales puntos construyen la gráfica de la interpolación fractal. Los puntos se grafican de forma iterativa, es por eso que al ser un método iterativo no se puede saber con exactitud el valor que toma dicho punto a interpolar. Ergo, se propone una modificación al algoritmo original propuesto por Barnsley para hallar el valor de algún punto desconocido. Adicionalmente se establece la complejidad de dicho algoritmo con el objetivo de lograr una comparación con los métodos tradicionales.

En este trabajo, el algoritmo de interpolación fractal ha sido modificado para saber el valor que toma un punto desconocido. Y de esta manera interpolar.

En general esta tesis está compuesta de 4 capítulos. En el primero de ellos se describe lo necesario para entender a los fractales así como su bagaje

histórico, cómo se generan y lo más importante, se presenta una propuesta de su definición más precisa mediante sus propiedades. Dado que la técnica de interpolación fractal requiere de un conocimiento acerca de fractales, se describe el espacio en donde viven los fractales, su definición, sus características y algunos ejemplos como es el conjunto de Cantor, uno de los más famosos, y base de muchos otros fractales. Además se aborda, la forma de generar fractales por medio de los IFS, mismos que son los fundamentos de la interpolación fractal y conlleva todas las propiedades de los fractales. De ahí la importancia del capítulo.

En el capítulo dos se desarrollan las técnicas de interpolación polinomial (Lagrange, Newton y Splines cúbicos) como métodos numéricos, describiendo las propiedades, características y deducción de cada uno de ellos. También se mostrarán algunos teoremas y propiedades indispensables para saber cómo es que la interpolación polinomial es una de las más usadas en diversos campos de aplicación. De igual forma al verse como métodos numéricos, estos son computables y en consecuencia presentan un error que también es abordado. Usando estos métodos se hará una comparación, abordada en el capítulo 4, con la interpolación fractal.

En el capítulo tres se encuentra la teoría necesaria para entender la interpolación fractal, de dónde se deriva y cómo es que se utiliza así como sus propiedades y su principal uso. Se tratan las funciones de interpolación fractal, las cuales son usadas para interpolar de forma fractal. Es aquí donde se hace uso de los IFS, se hace énfasis en las transformaciones afines y en los factores de escalamiento, pues se usan para construir los IFS lineales que en este caso son necesarios para hacer la interpolación fractal. Se elaborarán los algoritmos y ejemplos para la implantación numérica.

Finalmente, en el capítulo cuatro se presenta un caso mediante un problema de aplicación en la biología en el que se hace uso de la interpolación, para que con cada uno de los métodos de interpolación propuestos se haga un análisis. De este comparativo se determina el por qué la interpolación fractal es una de las alternativas para el tratamiento de datos y de esta forma poder inferir acerca de ellos. De igual forma, se presentan las características y observaciones propias de cada uno de los métodos. Se hace un énfasis en la interpolación de la forma fractal.

Tomando en cuenta que esta forma de analizar datos es pertinente si los datos presentan una alta dispersión, es decir: que no se pueda intuir una tendencia o algún comportamiento descrito por funciones continuas. Sin dejar atrás la homogeneidad de los intervalos definidos por cada par consecutivo de datos (puntos de interpolación).



# Capítulo 1

## Fractales

---

En geometría fractal nos preocupamos de las estructuras de subconjuntos de varios y muy simples espacios **geométricos**. Tal espacio se denota como  $X$ . Este es el espacio sobre el cual se piensa dibujar un fractal; este es el plano donde viven los fractales. Entonces, ¿Qué son los fractales? Para nosotros, por el momento, es sólo un subconjunto de un espacio.

El análisis de lo que se denomina un **monstruo matemático** apareció hace mucho tiempo, con la composición de figuras a través de la geometría y a través de la experimentación. He aquí donde se cuestiona la noción de *dimensión*. Fue en la década de los 20's que Hausdorff propone una forma de medir la complejidad de los objetos construidos y que se adapta mucho mejor a esta clase de construcciones geométricas. La construcción de estos objetos, llamados objetos fractales, se remonta a la construcción de funciones continuas sin derivada. Esta idea puede sonar descabellada si la abordamos desde el cálculo clásico.

El campo de los fractales es fascinante. Principalmente, los fractales aparecen en la naturaleza, un ejemplo es cuando se ve una rama de un árbol, el cual es similar a otro árbol, entonces los árboles son un claro ejemplo de un fractal. Otros ejemplos incluyen montañas, flores, ríos, bordes de costas, conchas de mar, etc.

## 1.1. El espacio donde viven los Fractales

### 1.1.1. Espacios

**Definición 1.** Un espacio  $X$  es un conjunto. Los puntos del espacio son los elementos del conjunto.

Aunque esta definición no lo dice, la nomenclatura de *espacio* implica que hay alguna estructura en el conjunto, en el sentido que de tales puntos son cercanos uno al otro.

**Ejemplo 1.**  $X = \mathbb{R}$ . Cada punto que pertenece a  $X$  es un número real. Es decir; es un punto en una línea.

**Ejemplo 2.** El plano complejo  $X = \mathbb{C}$ , donde cualquier punto  $x \in X$  se representa por

$$x = x_1 + ix_2, \quad \text{donde } i = \sqrt{-1},$$

para cualquier par de números  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Cualquier par de números  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  determinan un punto de  $\mathbb{C}$ .

**Ejemplo 3.**  $X = \square$ , el espacio codificado sobre  $N$  símbolos.  $N$  es un entero positivo. Los símbolos son los enteros  $\{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ . Hay una infinidad de símbolos en esta secuencia. En general, para un elemento dado  $x \in X$ , podemos escribir

$$x = x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6\dots$$

donde cada  $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ .

### 1.1.2. Espacios Métricos

**Definición 2.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es un espacio  $X$  con una función real valuada  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  la cual mide la distancia entre pares de puntos  $x$  y  $y$  en  $X$ . Se requiere que  $d$  obedezca a los siguientes axiomas:

- (i) Simétrica  $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$
- (ii) Definida positiva  $0 < d(x, y) < \infty, \quad \forall x, y \in X, x \neq y$
- (iii) Que  $d(x, x) = 0, \quad \forall x \in X$
- (iv) Desigualdad de triángulo  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$

Entonces  $d$  es llamada una *métrica* o *distancia* sobre  $X$ , y  $X$  junto con  $d$  es llamado un **Espacio Métrico**  $(X, d)$  [1].

**Definición 3.** Dos métricas  $d_1$  y  $d_2$  en un espacio  $X$  son equivalentes si existen constantes  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tal que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X.$$

Una noción fundamental de el concepto de equivalencia métrica es que ningún par de métricas equivalentes dan la misma noción de que dichos puntos están juntos, y los cuales están separadamente lejos. Es como si hubiera una forma estándar para que, limitadamente, se deforme el espacio por medio del cual las distancias se determinan antes y después de la deformación.

**Definición 4.** Dos espacios métricos  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son equivalentes si existe una función  $h : X_1 \rightarrow X_2$  la cual es uno a uno y sobre (i.e., es invertible), de tal manera que la métrica  $\tilde{d}_1$  sobre  $X_1$  definida por

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)) \quad \forall x, y \in X_1$$

es equivalente a  $d_1$ .

### 1.1.3. Secuencias de Cauchy

[2] La geometría fractal tiene que ver con la descripción, clasificación, análisis y observación de subconjuntos de espacios métricos  $(X, d)$ . Los espacios métricos son usualmente, pero no siempre, de carácter geométrico intrínsecamente simple. Hay un gran número de propiedades de subconjuntos de espacios métricos que son muy básicas y que forman parte de un vocabulario para describir conjuntos fractales y otros subconjuntos de espacios métricos. Algunas de estas propiedades son de carácter topológico. Es decir, que son invariantes bajo Homeomorfismo. Lo que es importante, sin embargo, es que hay otra clase de propiedades que son invariantes bajo equivalencia de espacios métricos.

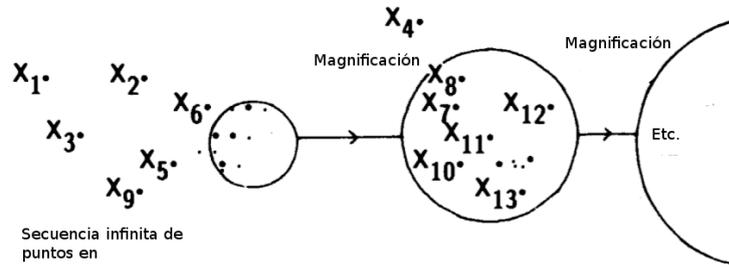
**Definición 5.** Una secuencia  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(X, d)$  es llamada una *secuencia de Cauchy* si, para algún número dado  $\epsilon > 0$ , existe un entero  $N > 0$  tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall m, n > N.$$

En otras palabras, cuanto más lejanos sean los puntos de la secuencia, estos se van y cuanto más cercanos se encuentren estos se convertirán en los puntos de la secuencia. Figura 1.1.

Sin embargo, justo porque una secuencia de puntos se mueve muy cerca de otro que va a lo largo de la secuencia, es decir se van acercando a un punto.

**Definición 6.** Una secuencia  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos en un espacio métrico  $(X, d)$  se dice que converge a un punto  $x \in X$  si, para algún número dado  $\epsilon > 0$ ,



**Figura 1.1:** Sucesivas magnificaciones de una secuencia de Cauchy, una secuencia infinita de  $X$ . Los puntos están cada vez más cerca como se muestra en las magnificaciones.

existe un entero  $N > 0$  tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n > N. \quad (1.1)$$

En este caso el punto  $x \in X$ , al cual converge la secuencia, es llamado el límite de la secuencia, y se denota como

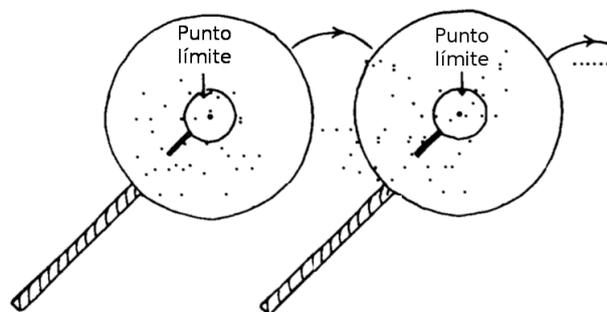
$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (1.2)$$

El límite  $x$  de una secuencia convergente  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiene la siguiente propiedad: sea

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\} \quad (1.3)$$

que denota una bola cerrada de radio  $\epsilon > 0$  centrado en  $x$ .

Cualquier bola centrada en  $x$  contiene todos los puntos  $x_n$  después de algunos índices  $N$ , donde  $N$  típicamente llega a ser más grande y más grande como  $\epsilon$  llega a ser más y más pequeño. Figura 1.2.



**Figura 1.2:** Aumentos para ver el punto límite. Más puntos del conjunto son visibles al seguir aumentando

**Teorema 1.** Si una secuencia de puntos  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en un espacio métrico  $(X, d)$  converge a un punto  $x \in X$ , entonces  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una *secuencia de Cauchy*.

**Definición 7.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es *completo* si cada secuencia de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $X$  tiene un límite  $x \in X$ .

En otras palabras, actualmente existe, en el espacio, un punto  $x$  al cual es convergente la secuencia de Cauchy. Este punto  $x$  es, por supuesto, el límite de la secuencia. Si  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy de puntos en  $X$  y si  $X$  es completo, entonces este es un punto  $x \in X$  tal que, para cada  $\epsilon > 0$ ,  $B(x, \epsilon)$  contiene  $x_n$  para infinitamente muchos enteros  $n$ .

**Definición 8.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $x \in X$  es llamado un *punto límite* de  $S$  si hay una secuencia  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de puntos  $x_n \in S$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

**Definición 9.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . La cerradura de  $S$  denotada por  $\bar{S}$  es definida como  $\bar{S} = S \cup$  Puntos límite de  $S$ .  $S$  es cerrado si este contiene todos sus puntos límite, esto es  $S = \bar{S}$ .  $S$  es *perfecto* si este es igual al conjunto de sus puntos límite.

### 1.1.4. Conjuntos

Continuamos la descripción de las propiedades básicas que se usan para describir conjuntos y subconjuntos de espacios métricos. Ahora tenemos dos preguntas muy importantes: ¿Dónde están los fractales? y ¿Qué son los fractales?

**Definición 10.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es *compacto* si cada secuencia infinita  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $S$  contiene una subsecuencia que tenga un límite en  $S$ .

**Definición 11.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es *límite* si existe un punto  $a \in X$  y un número  $R > 0$  tal que

$$d(a, x) < R \quad \forall x \in S.$$

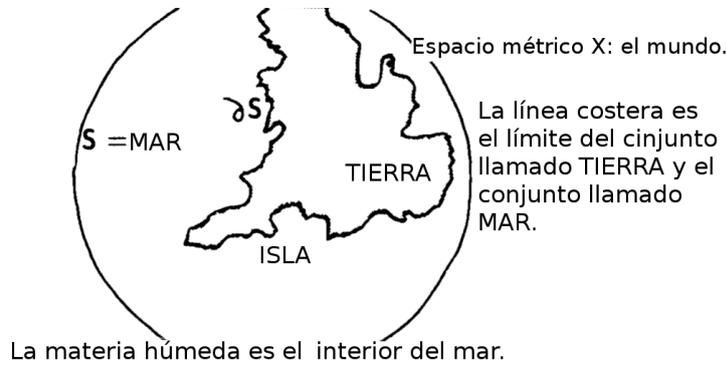
**Definición 12.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es *totalmente limitado* si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un número finito de puntos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset S$  tal que cuando  $x \in S$ ,  $d(x, y_i) < \epsilon$  para algún  $y_i \in \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Este conjunto de puntos  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  es llamada una  $\epsilon$ -red.

**Teorema 2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $S \subset X$ . Entonces  $S$  es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente limitado.

**Definición 13.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ .  $S$  es *abierto* si para cada  $x \in S$  existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\} \subset S$ .

**Definición 14.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $x \in X$  es un *punto límite* de  $S$  si para número  $\epsilon > 0$ ,  $B(x, \epsilon)$  contiene un punto en  $X \setminus S$  y un punto en  $S$ . El conjunto de todos los puntos límite de  $S$  es llamado el *límite* de  $S$ , y es denotado  $\partial S$ .

**Definición 15.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $x \in S$  es llamado un *punto interior* de  $S$  si existe un número  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subset S$ . El conjunto de puntos interiores de  $S$  es llamado el interior de  $S$ , y es denotado  $S^0$ .



**Figura 1.3:** Ejemplo para ilustrar las definiciones anteriores

### 1.1.5. El Espacio Métrico $\mathcal{H}(X)$ : El espacio donde viven los Fractales

**Definición 16.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces  $\mathcal{H}(X)$  denota el espacio cuyos puntos son el subconjunto compacto de  $X$ , que no sea el conjunto vacío.

**Definición 17.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo,  $x \in X$ , y  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Se define

$$d(x, B) = \text{Mín}\{d(x, y) : y \in B\}. \quad (1.4)$$

Entonces  $d(x, B)$  es la distancia desde el punto  $x$  al conjunto  $B$ .

**Definición 18.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ . Se define

$$d(A, B) = \text{Max}\{d(x, B) : x \in A\}. \quad (1.5)$$

donde  $d(A, B)$  es la distancia desde el conjunto  $A \in \mathcal{H}(X)$  al conjunto  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Es decir, hay puntos  $\hat{x} \in A$  y  $\hat{y} \in B$  tal que  $d(A, B) = d(\hat{x}, \hat{y})$ .

**Definición 19.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces la distancia de Hausdorff entre dos puntos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{H}(X)$  está definida como

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A). \quad (1.6)$$

*Demostración:* Sean  $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ .

$$h(A, A) = d(A, A) = d(A, A) \vee d(A, A) = d(A, A) = \max\{d(x, A) : x \in A\} = 0.$$

$h(A, B) = d(a, b)$  para algún  $a \in A$  y  $b \in B$ , usando la compacidad de  $A$  y  $B$ . Por consiguiente  $0 \leq h(A, B) < \infty$ .

Si  $A \neq B$  podemos asumir que hay un  $a \in A$  tal que  $a \notin B$ . Entonces  $h(A, B) \geq d(a, B) > 0$ .

Para mostrar que  $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$  primero mostramos que  $d(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ . Tenemos, para cada  $a \in A$

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b) : b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} \quad \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b) : b \in B\} \quad \forall c \in C, \text{ entonces} \\ d(a, B) &\leq \min\{d(a, c) : c \in C\} + \max\{\min\{d(c, b) : b \in B\} : c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B), \text{ entonces} \\ d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

De igual forma

$$\begin{aligned} d(B, A) &\leq d(B, C) + d(C, A), \text{ por lo tanto} \\ h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \leq d(B, C) \vee d(C, B) + d(A, C) \vee d(C, A) \\ &= h(B, C) + h(A, C). \end{aligned}$$

## 1.2. Definición y ejemplos

### 1.2.1. El conjunto de Cantor

Cantor (1845-1918) fue un matemático alemán de la Universidad de Halle, donde llevó a cabo un trabajo fundamental que es conocido como teoría de conjuntos. El conjunto de Cantor fue, el primero, publicado en 1883 y surgió como un ejemplo excepcional de conjuntos. Es justo decir que dentro del reino de los monstruos matemáticos (fractales) el conjunto de Cantor es por mucho el más importante, aunque es menos visualmente atractivo y más distante a una interpretación inmediata natural que algunos de los otros. El conjunto de Cantor juega un papel importante en muchas ramas de las matemáticas, y

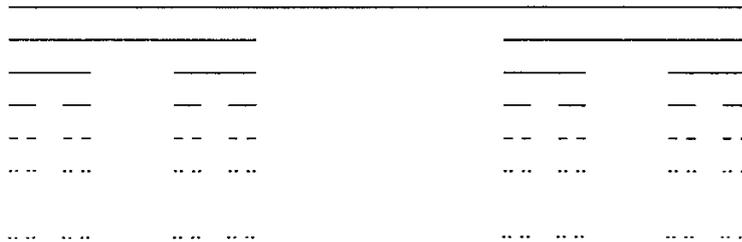
de hecho, en un sentido muy profundo es, de alguna manera oculta, como el esqueleto esencial o modelo por detrás de muchos otros fractales.

El conjunto de Cantor [3] es un conjunto infinito de puntos en el intervalo de la unidad  $[0, 1]$ . Es decir, se puede interpretar como un conjunto de números determinados, como por ejemplo  $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \dots$ . Trazados estos y todos los demás puntos (suponiendo que pudiéramos saber lo que son) no tendría mucho de una imagen en absoluto. Entonces vamos a usar un truco poco común.

Para su construcción comencemos con el intervalo  $[0, 1]$ . Ahora quitar el intervalo (abierto)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , es decir, remueva el tercio medio de  $[0, 1]$ , pero no los números  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3}$ . Esto deja dos intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$  de longitud de  $\frac{1}{3}$  cada uno y se completa un paso de construcción de base. Ahora repetimos, nos fijamos en los demás intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$  y retire sus tercios medios respectivos, quedan cuatro intervalos de longitud  $\frac{1}{9}$ . Continuar con este procedimiento. En otras palabras, hay un proceso de retroalimentación en el que se genera una secuencia de intervalos cerrados, una después de la primera etapa, dos después de la etapa segunda, cuatro después de la tercera etapa, ocho después de la cuarta etapa, etc. (es decir:  $2^n$  intervalos de longitud  $(\frac{1}{3})^n$  después del  $n$ -ésimo paso). Si denotamos por  $c_n$  a la unión de todos los subintervalos cerrados que permanecen hasta el paso  $n$  (o  $n$ -ésima iteración), el conjunto de Cantor es

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

La Figura 1.4 muestra la construcción.



**Figura 1.4: Conjunto de Cantor.**

El conjunto de Cantor es el conjunto de puntos que quedan si llevamos a cabo los pasos de extracción infinitas veces. Un punto, se dice que está en el conjunto de Cantor si podemos garantizar que no importa cuántas veces nos dedicamos a realizar el proceso de eliminación, el punto no será sacado. Obviamente  $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \dots$  son ejemplos de tales puntos, ya que son los puntos extremos de los intervalos que se crean en los pasos. Todos estos puntos tienen una cosa en común; se relacionan con potencias de 3 o mejor dicho, con potencias de  $\frac{1}{3}$ . Uno está tentado a creer que cualquier punto en el conjunto de Cantor es de este tipo, es decir, un punto final de uno de los intervalos pequeños generados en el proceso. Esta conclusión es categóricamente errónea.

Si el conjunto de Cantor eran sólo los puntos extremos de los intervalos del proceso de generación, fácilmente podríamos enumerarlos. Esto significa que el conjunto de Cantor sería un conjunto contable sin embargo, se sabe que es incontable. Así que no hay manera de enumerar los puntos en el conjunto de Cantor. Por lo tanto, tiene que haber muchos más puntos que no son puntos extremos.

Podemos construir el conjunto de Cantor por medio de “Números triádicos”. Los números triádicos son números que son representados con respecto a la base 3. Esto quiere decir que solamente podemos usar los dígitos 0, 1 y 2. La siguiente tabla muestra como.

Decimal	In Powers of 3	Triadic
4	$1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$	11
17	$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$	122
0.333...	$1 \cdot 3^{-1}$	0.1
0.5	$1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + \dots$	0.111...

Figura 1.5: Representación triádica.

Recalquemos la esencia de nuestro sistema decimal y su representación. Cuando escribimos 0.32573 queremos decir

$$3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5}$$

En otras palabras, podemos escribir cualquier número  $x$  en  $[0, 1]$  de la siguiente forma

$$x = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \dots \tag{1.7}$$

Donde  $a_1, a_2, a_3, \dots$  son números que pueden tomar los valores  $\{0, 1, 2\}$  y entonces, para utilizar una representación triádica, podemos expandirla en base 3 como sigue:

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \dots \tag{1.8}$$

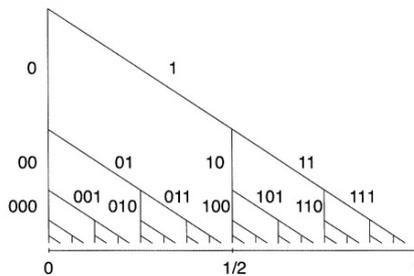
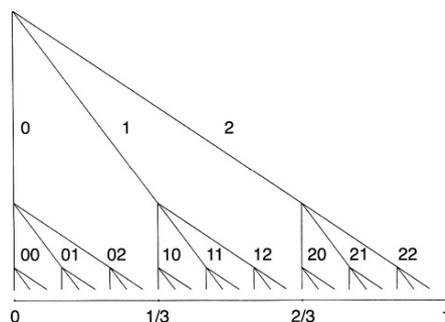


Figura 1.6: Expansión binaria mediante dos ramas. Cualquier número en el intervalo  $[0,1]$  se puede localizar usando la raíz del árbol para la siguiente dirección.



**Figura 1.7: Expansión binaria mediante tres ramas.**

Cualquier número en el intervalo  $[0,1]$  se puede localizar usando la raíz del árbol para la siguiente dirección.

Entonces, si queremos escribir algunos puntos del conjunto de Cantor como un número tríadico:  $\frac{1}{3}$  es 0.1,  $\frac{2}{3}$  es 0.2,  $\frac{1}{9}$  es 0.01,  $\frac{2}{9}$  es 0.02. En general, podemos escribir cualquier punto del conjunto de Cantor de la siguiente forma:

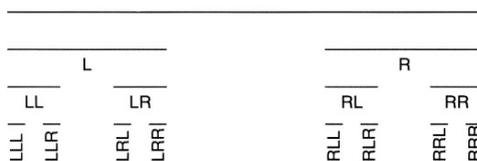
*El conjunto de Cantor  $C$  es el conjunto de puntos en  $[0,1]$  para los cuales existe una expansión tríadica que no contiene el dígito '1'.*

Esto se debe a que para construir el conjunto de Cantor eliminamos el tercio central en cada iteración y, es precisamente, la parte central la que contiene al dígito '1' en cada una de la iteraciones.

### Direccionamiento y el conjunto de Cantor.

Volvamos por un momento a la construcción intuitiva geométrica del conjunto de Cantor, eliminando tercios medios en cada paso de la unidad de intervalo  $[0,1]$ . Después del primer paso, tenemos dos partes, una a la izquierda y la otra a la derecha. Después de la segunda etapa, cada uno de estos a su vez se divide en dos partes, una izquierda y una derecha, y así sucesivamente. Ahora diseñamos un procedimiento de etiquetado eficiente para cada pieza creada en los pasos. Las dos partes después de la primera etapa están etiquetadas L y R para izquierda y derecha respectivamente. Las cuatro partes después de la segunda etapa se etiquetan LL, LR, RL, RR, es decir, la parte L del paso uno se divide en una L y una parte R, lo que hace LL y LR, y del mismo modo con la parte R. La Figura 1.8 resume los primeros tres pasos.

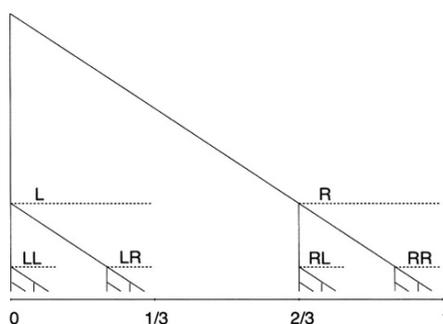
Para identificar los puntos en el conjunto de Cantor, tales direcciones, obviamente, no son suficientes, ya que en cada intervalo, no importa lo pequeño que sea, todavía hay infinitos puntos del conjunto de Cantor. Por lo tanto necesitamos cadenas de dirección infinitamente largas para describir con precisión la ubicación de un punto de ajuste de Cantor.



**Figura 1.8:** Conjunto de Cantor a través de direccionamiento.

Vamos a dar dos ejemplos. El primero es el punto de  $\frac{1}{3}$ . Este está en el intervalo izquierdo de la primera etapa, que tiene la dirección L. Dentro de este está el intervalo segunda etapa. Esto es  $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$  con dirección LR. Dentro este está otra vez el subintervalo derecho con dirección LRR, y así sucesivamente. Por lo tanto, para identificar la posición exacta del punto escribimos la secuencia de intervalos de etapas consecutivas a la que pertenece el punto: LR, LRR, LRRR, LRRRR, y así sucesivamente. En otras palabras, se puede escribir la dirección de los puntos con la cadena infinita LRRRR..., o utilizando una barra para indicar la repetición periódica. El punto  $\frac{2}{3}$  se encuentra en el intervalo derecho de la primera etapa. Dentro de esa y todas las etapas posteriores, es siempre en el subintervalo izquierdo. Por lo tanto, la dirección de  $\frac{2}{3}$  es RLLLL ...

Otra forma interesante de ver la situación que se establece en este etiquetado sistemático se muestra en la Figura 1.9, donde vemos un árbol binario infinito cuyas ramas se divide en dos ramas de arriba a abajo. Ahora bien, el árbol se compone de nodos y ramas. Cada nivel del árbol corresponde a un cierto paso en la construcción de conjunto de Cantor, si queremos saber en qué parte del conjunto de Cantor se encuentra un cierto número (hasta un cierto grado de precisión) sólo tenemos que mirar su expansión triádica y luego interpretar cada dígito 0 como L y cada dígito 2 como R.



**Figura 1.9:** Conjunto de Cantor. Representación mediante árbol de direcciones.

### La cardinalidad del conjunto de Cantor

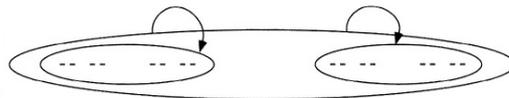
Ahora podemos ver que la cardinalidad del conjunto de Cantor debe ser la misma que la cardinalidad del intervalo de la unidad  $[0, 1]$ . Comenzamos con

el intervalo  $[0, 1]$  y a continuación mostraremos como cada punto corresponde a un punto en el conjunto de Cantor.

- (i) Cada punto en el intervalo tiene una expansión binaria.
- (ii) Cada expansión binaria corresponde a un camino en el árbol binario de los números binarios.
- (ii) Cada camino tiene una ruta correspondiente en el árbol triádico para el conjunto de Cantor.
- (iv) Cada ruta en el árbol triádico del conjunto de Cantor identifica un punto único en el conjunto de Cantor por una dirección en expansión triádica.

Por lo tanto, para cada número en el intervalo, hay un punto correspondiente en el conjunto de Cantor. Para números diferentes hay diferentes puntos. Por lo tanto, la cardinalidad del conjunto de Cantor debe ser al menos tan grande como la cardinalidad del intervalo. Por otra parte, no puede exceder esta cardinalidad, porque el conjunto de Cantor es un subconjunto del intervalo. Por lo tanto, ambas cardinalidades deben ser la misma.

Así, tomando la autosimilitud como una propiedad intuitiva, tenemos que tomar en cuenta que la propiedad de escalado del conjunto de Cantor corresponde a la propiedad de invariancia siguiente. Tomemos un punto de  $C$  y se multiplica por  $\frac{1}{3}$ . El resultado será un  $C$  de nuevo. Lo mismo ocurre si primero se multiplica por  $\frac{1}{3}$  y luego agregue  $\frac{2}{3}$ . Esto es evidente a partir de la caracterización triádica.



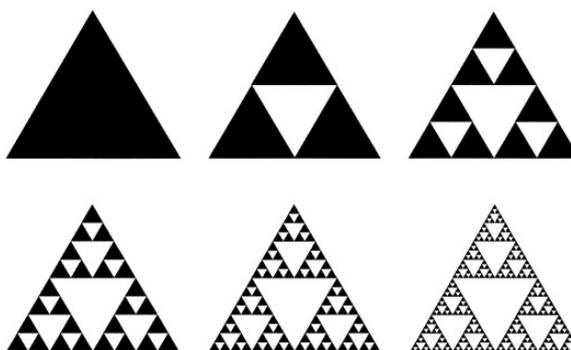
**Figura 1.10:** El Conjunto de Cantor es una colección de dos copias exactas del conjunto entero de Cantor escalado por el factor  $\frac{1}{3}$ .

### 1.2.2. El triángulo de Sierpinski

El siguiente fractal clásico a tratar es unos 40 años más joven que el conjunto de Cantor. Fue introducido por el gran matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) en 1916. Sierpinski fue profesor en Lvov y Varsovia. Fue uno de los matemáticos más influyentes de su tiempo en Polonia y tenía una reputación en todo el mundo. De hecho, uno de los cráteres de la Luna lleva su nombre.

Ahora, la construcción básica geométrica del triángulo de Sierpinski es como sigue. Comenzamos con un triángulo en el plano y luego aplicar un esquema

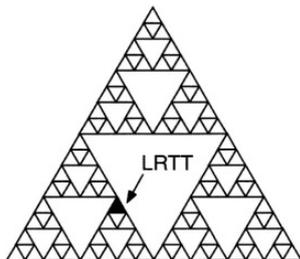
repetitivo de las operaciones a la misma (cuando decimos triángulo aquí, nos referimos a un entorno oscuro, triángulo ‘relleno’). Elija los puntos medios de sus tres lados. Junto con los vértices del triángulo original, estos puntos medios definen cuatro triángulos congruentes de los que se quita el triángulo central. Esto completa la etapa de construcción de la base. En otras palabras, después de la etapa primera tenemos tres triángulos congruentes cuyos lados tienen exactamente la mitad del tamaño del triángulo original y que toquen en tres puntos que son vértices comunes de dos triángulos contiguos. Ahora seguimos el mismo procedimiento con los tres triángulos restantes y repita el paso básico con la frecuencia que desee. Es decir, se comienza con un triángulo y luego producir 3, 9, 27, 81, 243, ... triángulos, cada uno de los cuales es una versión exacta reducida de los triángulos en la etapa precedente. La Figura 1.11 muestra algunos pasos del proceso. El triángulo de Sierpinski es el conjunto de puntos en el plano que permanecen si se lleva a cabo este proceso infinitamente. Es fácil hacer una lista algunos puntos que sin duda pertenecen al triángulo o triángulo de Sierpinski, a saber, los lados de cada uno de los triángulos en el proceso.



**Figura 1.11:** Pasos para la construcción del triángulo de Sierpinsky.

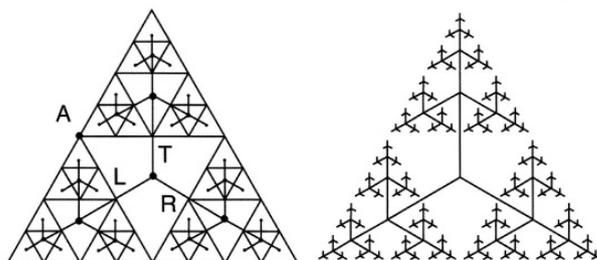
En este caso la característica de autosimilitud es evidente. Está integrado en el proceso de construcción, es decir, cada una de las tres partes en el paso es una versión escalada en un factor de  $\frac{1}{2}$  de toda la estructura en el paso anterior. Autosimilitud o autosimilaridad, sin embargo, es una propiedad de los límites del proceso de construcción geométrica. Similar a nuestra discusión anterior del conjunto de Cantor podemos introducir un sistema de direccionamiento para los subtriángulos (o puntos) del triángulo de Sierpinski. Aquí hay que usar tres símbolos para establecer un sistema de direcciones. Si tomamos, por ejemplo, L (izquierdo), R (derecha) y T (arriba) obtenemos secuencias como LRTT o TRLLLTLR y leer de izquierda a derecha para identificar subtriángulos en la etapa de construcción respectiva del triángulo de Sierpinski. Por ejemplo, LRTT se refiere a un triángulo en la generación de la cual se obtiene de la siguiente manera. Recoger el triángulo de la izquierda en la primera generación, a continuación, el de la derecha en el mismo, entonces la parte superior en el

mismo, y finalmente de nuevo la superior en el mismo. (Véase la Figura 1.12).



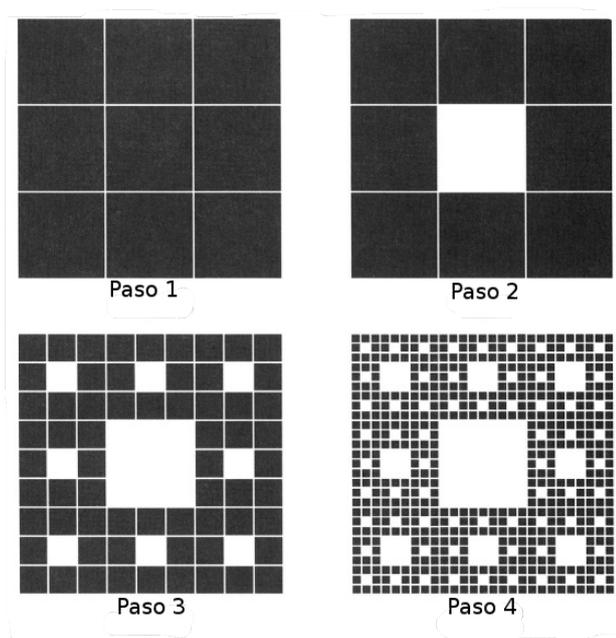
**Figura 1.12:** LRTT denota un subtriángulo dentro del triángulo de Sierpinsky el cual puede ser encontrado siguiendo la izquierda, derecha, arriba, arriba.

Sin embargo, no hay que confundir nuestras direcciones simbólicas con los números tríadicos. Hay varias maneras de asociar árboles con direcciones simbólicas. Una construcción particular se basa en los triángulos que se han suprimido en el proceso de construcción. Los nodos del árbol son los centros de estos triángulos. Las ramas del árbol crecen iteración por iteración, como se muestra en la Figura 1.13. Observe que algunas de las ramas se tocan cuando vamos al límite. Por ejemplo, las ramas correspondientes a LTTT... y TLLL... se tocan en el punto A.



**Figura 1.13:** Este árbol representa no solamente la estructura del triángulo de Sierpinsky sino también su geometría.

Sierpinski ha añadido otro objeto a la galería de los fractales clásicos, la alfombra de Sierpinski, que a primera vista sólo parece una variación del tema conocido (véase Figura 1.14). Comenzamos con un cuadrado (relleno) en el plano. Subdividir en nueve cuadrados pequeños congruentes de los cuales se quita el del centro, y así sucesivamente. El objeto resultante que queda si se lleva a cabo este proceso infinitamente a menudo puede ser visto como una generalización del conjunto de Cantor. De hecho, si nos fijamos en la intersección de una línea que es paralela a la base del cuadrado original y que pasa por el centro se observa precisamente la construcción del conjunto de Cantor.



**Figura 1.14:** Construcción de la alfombra de Sierpinsky.

### 1.2.3. La curva de Koch

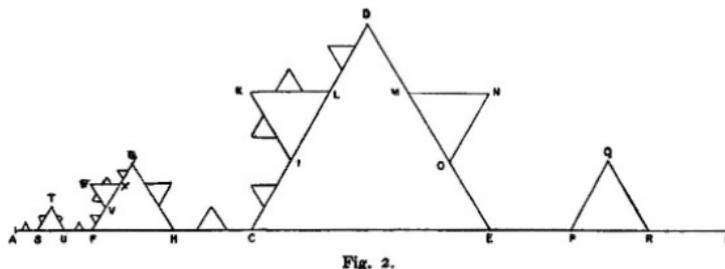
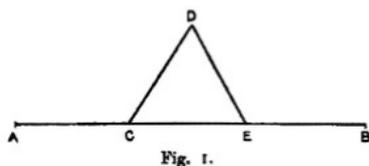
Helge von Koch fue un matemático sueco que, en 1904, introdujo lo que ahora se llama la *curva de Koch* uniendo tres copias debidamente giradas de la curva de Koch se produce una figura, que por razones obvias se llama copo de nieve o la isla de Koch (véase la Figura 1.15).

Poco se sabe acerca de von Koch, cuyas contribuciones matemáticas no eran en la misma categoría que los de las estrellas como Cantor, Peano, Hilbert, Sierpinski o Hausdorff. Pero en este capítulo de los fractales clásicos, la construcción de Koch debe tener su lugar simplemente porque lleva a muchas generalizaciones interesantes.

La curva de Koch es tan difícil de entender como el conjunto de Cantor o el triángulo de Sierpinski. Sin embargo, los problemas con los que nos encontramos son de una naturaleza diferente. En primer lugar, como el nombre ya expresa, es una curva, pero esto no es inmediatamente evidente a partir de la construcción. En segundo lugar, esta curva no contiene líneas o segmentos que son suaves en el sentido de que podríamos ver una línea cuidadosamente doblada [4]. Más bien, esta curva tiene gran parte de la complejidad con la que se vería en una costa natural, los pliegues dentro de pliegues en los pliegues, y así sucesivamente. Aquí está la construcción geométrica simple de la curva de Koch.

Comienza con una línea recta. Este objeto inicial también se conoce como el iniciador. Después se parte en tres partes iguales. Luego reemplazar el tercio medio de un triángulo equilátero y quitar la base. Esto completa la

sidérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par  $\mathcal{Q}$  cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne  $AB$  à la ligne polygonale  $ACDEB$  déviant de  $AB$  vers le côté positif.



2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée  $AB$ , le sens de  $A$  vers  $B$  étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération  $\mathcal{Q}$ ,  $AB$  est remplacée par la ligne brisée  $ACDEB$ , les segments  $AC, CD, DE, EB$  étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de  $A$  vers  $C$ , de  $C$  vers  $D$ , de  $D$  vers  $E$ , de  $E$  vers  $B$ .

Effectuons l'opération  $\mathcal{Q}$  sur chacun de ces segments; la ligne  $ACDEB$  sera remplacée par la ligne brisée  $AFGHCIKLDMNOEPQRB$  composée de 16 segments égaux  $AF, FG$  etc.

**Figura 1.15:** Construcción de la curva de Koch, detallada en su artículo de 1906.

etapa de construcción de base. Una reducción de esta figura, hecha de cuatro partes, se volverá a utilizar en las siguientes etapas. A dicha reducción se le llama generador. Si hacemos esto sucesivamente para cada una de las líneas resultantes se va construyendo, paso a paso, la curva de Koch. La Figura 1.15 ilustra los primeros pasos. La autosimilitud está integrada en el proceso de construcción, es decir, cada una de las cuatro partes en el paso  $k$ -ésimo es de nuevo una versión a escala (por un factor de 3) de toda la curva en el paso anterior ( $k - 1$ ).

En realidad, Koch quería dar otro ejemplo para un primer descubrimiento realizado por el matemático alemán Karl Weierstrass, quien en 1872 había precipitado una crisis menor en matemáticas. Se había descrito una curva que no pudiera ser diferenciada, es decir, una curva que no admite una tangente en cualquiera de sus puntos. La capacidad de distinguir (es decir, para calcular la pendiente de una curva de punto a punto) una característica central de cálculo, que fue inventado independientemente por Newton y Leibniz unos 200 años antes de Weierstrass. La idea de la pendiente es bastante intuitiva y va de la mano con la idea de una tangente.

Si una curva tiene una esquina, entonces hay un problema. No hay manera para adaptarse a una tangente única. La curva de Koch es un ejemplo de una

curva en un sentido que está hecha de esquinas en todas partes, es decir, no hay manera para adaptarse a una tangente a cualquiera de sus puntos.

Es casi obvio cómo se puede generalizar la construcción para obtener un universo de estructuras autosimilares. Una construcción de Koch se define por un iniciador, que puede ser una colección de segmentos de línea, y un generador, que es una línea poligonal, compuesta de una serie de segmentos de línea conectados. Comenzando con el iniciador, se reemplaza cada segmento de línea de una copia debidamente reducida de la curva del generador. Aquí es necesario hacer coincidir cuidadosamente los puntos finales del segmento de línea y el generador. Este procedimiento se repite ad infinitum.

### Longitud de la curva de Koch

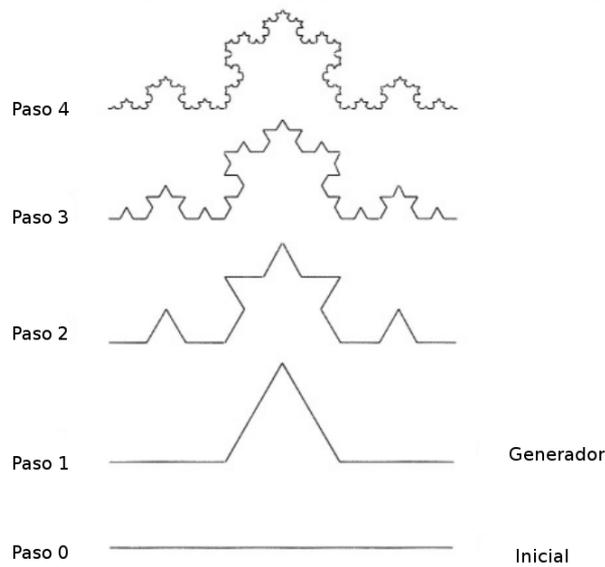
En cada etapa se obtiene una curva. Después de la primera, se nos deja con una curva que se compone de cuatro segmentos de línea de la misma longitud, después del segundo paso tenemos  $4 \times 4$ , y luego  $4 \times 4 \times 4$  segmentos de línea después de la etapa tercera, y así sucesivamente. Si la línea original tenía longitud  $L$ , a continuación, después del primer paso un segmento de línea tiene una longitud  $L \times 1/3$ , después de la segunda etapa que tenemos  $L \times \frac{1}{3^2}$ , después  $L \times \frac{1}{3^3}$  y así sucesivamente.

Puesto que cada uno de los pasos produce una curva de segmentos de línea, no hay ningún problema en la medición de sus longitudes respectivas. Después de la primera etapa es  $4 \times L \times 1/3$ , y luego  $4^2 \times L \times 1/3^2$  y así sucesivamente. Después del  $k$ -ésimo paso  $L \times 4^k/3^k$ . Observamos que, paso a paso la longitud de las curvas crece en un factor de  $\frac{4}{3}$ . Ahora hay varios problemas. En primer lugar, la curva de Koch es el objeto que se obtiene si uno repite la construcción de los pasos infinitamente.

Tras unir 3 curvas de Koch, debidamente giradas, se obtiene el llamado ‘*copo de nieve*’ o ‘*copo de Koch*’ (Figura 1.17).

### 1.2.4. Fractales como objetos matemáticos

Los fractales [5] como objetos matemáticos son conjuntos de puntos en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . En el espacio  $\mathbb{R}^n$  es posible definir una geometría, es decir una métrica entre cualesquiera dos de sus elementos, lo que nos permite, entre otras cosas, obtener una representación gráfica de dicho conjunto. En particular, para los objetos fractales, estamos hablando de **geometría fractal**. Como vimos en los ejemplos, una de las características más comunes de estos objetos es la autosimilaridad. Esto es: si tomamos una parte del conjunto, es decir, tomamos una vecindad y excluimos el resto del conjunto y lo amplificamos, el objeto resultante luce igual que el original.



**Figura 1.16:** Construcción de la curva de Koch. En cada nivel el número de segmentos de recta se incrementa por un factor de 4.

El término “fractal” fue introducido en 1975 por Benoît Mandelbrot. El término proviene de la palabra en latín *fractus* que quiere decir roto o fragmentado. Este término fue usado para describir a los objetos que no pueden ser fácilmente explicados mediante los elementos de la geometría tradicional [6]. Por lo general, los fractales son construidos mediante el uso de algoritmos recursivos.

Hay un gran número de aplicaciones de los fractales, estas incluyen: el arte fractal, en los modelos de predicción del clima, crecimiento poblacional, en modelos que describen el flujo de fluidos, etc. Como vemos, el principal objetivo del uso de los fractales yace en la gran utilidad para representar el cómo diversos fenómenos ocurren en la naturaleza.

Los fractales que no poseen la propiedad de autosimilaridad o que tienen diferentes escalas de autosimilitud son más comunes de encontrar en la naturaleza. Para hacer la comparación entre fractales se usan varias medidas que son llamadas “Dimensión fractal”. La dimensión fractal provee de una medida que nos dice cuán denso es un espacio métrico (este espacio métrico es el conjunto llamado fractal). Así, un plano es un fractal de dimensión 2 y una línea es un fractal de dimensión 1, mientras que si un conjunto (fractal) tiene una dimensión fraccionaria, este puede considerarse un fractal exacto [7].

Desafortunadamente, los términos dimensión y similitud son aplicables sólo para una clase relativamente pequeña de conjuntos autosimilares.

En su ensayo original, Mandelbrot define un fractal como un conjunto de dimensión de Hausdorff estrictamente mayor que su dimensión topológica. (La

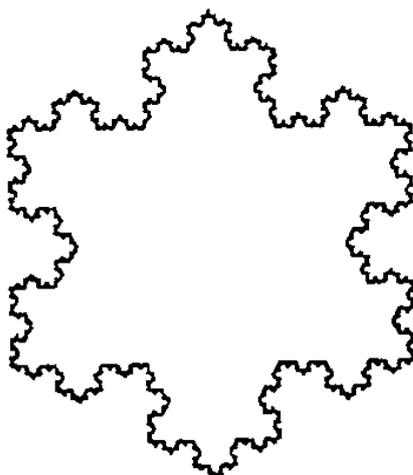


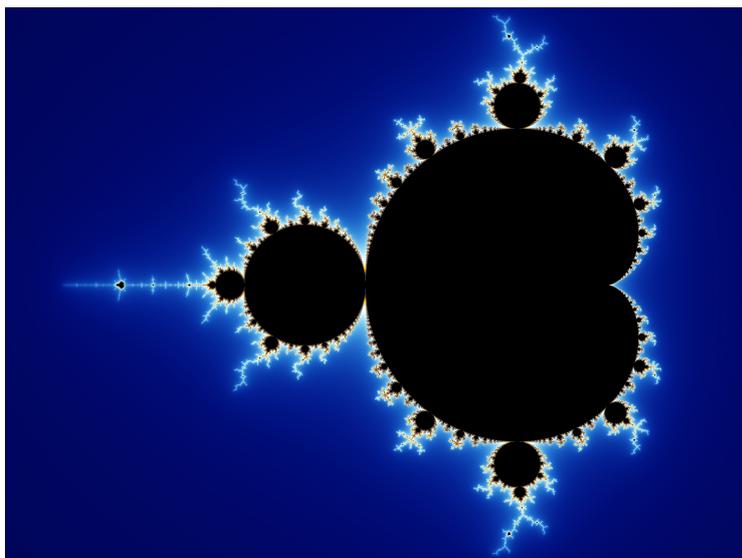
Figura 1.17: Copo de Koch.

dimensión topológica de un conjunto es siempre un número entero y es 0 si se encuentra desconectado, 1 si cada punto tiene vecindades arbitrariamente pequeñas, con límites de dimensión 0, y así sucesivamente). Esta definición demostró ser insatisfactoria ya que se excluye un número de conjuntos que claramente debe ser considerado como fractales. Muchos han propuesto diversas definiciones, pero todas ellas parecen tener este mismo inconveniente [6].

Así, parece ser mejor considerar un fractal como un conjunto que tiene propiedades tales como las enumeradas a continuación, en lugar de buscar una definición precisa. Desde el punto de vista matemático, este enfoque no es malo.

Cuando nos referimos a un conjunto  $F$  como un fractal se suele tener en cuenta lo siguiente:

- (i)  $F$  tiene una estructura fina, es decir detalle en escalas arbitrariamente pequeñas.
- (ii)  $F$  es demasiado irregular para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, tanto a nivel local como global.
- (iii) A menudo  $F$  tiene alguna forma de autosimilitud, tal vez aproximada o estadística.
- (iv) Por lo general, la “dimensión fractal” de  $F$  es mayor que su dimensión topológica.
- (v) En la mayoría de casos de interés  $F$  se define de una manera muy simple, quizás de forma recursiva.



**Figura 1.18: El conjunto de Mandelbrot.** Se conoce así en honor al matemático Benoît Mandelbrot, quien investigó sobre él y popularizó en la década de los setenta del siglo XX.

## 1.3. Dimensión fractal

### 1.3.1. Medida de Hausdorff

¿Cuán grande es un fractal? ¿Cómo se mide un fractal? Existen varias medidas asociadas a los fractales. En general, nos referimos a ellas como *dimensión fractal*. Uno de los conceptos más ampliamente utilizados para caracterizar los objetos fractales es la dimensión fractal, que fue popularizada por Mandelbrot.

[8] Una de las características principales de cualquier objeto fractal es su *dimensión fractal* (normalmente se denota por  $D$ ) y mide su grado de irregularidad e interrupción. No obstante, al contrario de las dimensiones habituales, la dimensión fractal puede bien ser una fracción simple, como  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{5}{3}$ , e incluso un número irracional, como  $\frac{\log 4}{\log 3} \sim 1,2618\dots$  ó  $\pi$ . Así, resulta útil decir que para ciertas curvas planas muy irregulares la dimensión fractal está entre 1 y 2, o decir que para ciertas superficies muy hojaldradas y llenas de convoluciones la dimensión fractal es intermedia entre 2 y 3, y finalmente definir polvos sobre la recta cuya dimensión fractal está entre 0 y 1.

Muy a grandes rasgos, una dimensión proporciona una descripción de cuánto espacio llena un conjunto. Es una medida de la prominencia de las irregularidades de un conjunto cuando se ve a escalas muy pequeñas. Una dimensión contiene mucha información acerca de las propiedades geométricas de un conjunto. Una palabra de advertencia es apropiada en este punto. Es posible definir la dimensión de un conjunto de muchas maneras, algunas satisfactorias y otras menos.



**Figura 1.19:** Col. Un ejemplo de fractal encontrado en la naturaleza.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Y sea  $F \in \mathcal{H}(\mathbf{X})$  un subconjunto no vacío de  $\mathbf{X}$ . También definimos a  $U$  como un conjunto no vacío de  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ .

El diámetro [6] de un conjunto  $U$  que es un subconjunto de  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ , se define como:

$$|U| = \sup \{ |x - y| : x, y \in U \} \quad (1.9)$$

es decir; la distancia más grande a partir de un par de puntos en  $U$ .

Donde  $U$  es una cubierta formada por conjuntos acotados completamente arbitrarios.



**Figura 1.20:** Diferentes cubiertas para el conjunto

Entonces, si  $U_i$  es una colección numerable de conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$  que cubre a todo el conjunto  $F$ , es decir;

$$F \subset \bigcup_i U_i \quad \text{con} \quad 0 < |U_i| \leq \delta, \quad \forall i. \quad (1.10)$$

Se dice que  $U_i$  es una **cubierta**  $\delta$  de  $F$ .

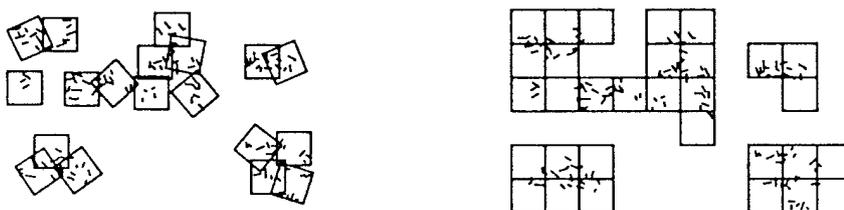
Para algún  $s > 0$  se define

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una cubierta } \delta \text{ de } F \right\} \quad (1.11)$$

Nos fijamos en todas las cubiertas de  $F$  que son conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$ . Si tratamos de minimizar la suma de la  $s$ -ésima potencia de los diámetros, es decir; hacemos  $\delta \rightarrow 0$  entonces podemos escribir la siguiente ecuación

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (1.12)$$

Llamamos a  $H^s(F)$  la  $s$ -dimensional medida de Hausdorff de  $F$ .



**Figura 1.21: Cubiertas por cajas.** Las cubiertas pueden ser de tal forma que todo el conjunto quede contenido en ellas.

Ahora, supongamos que los conjuntos  $U_i$  son bolas, se sigue que:  $U_i = B_i$  [5]. De manera que tenemos lo siguiente:

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Y sea  $F \in \mathcal{H}(X)$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Sea  $\epsilon > 0$ .  $B(x, \epsilon)$  denota la bola cerrada de radio  $\epsilon$  y centro en un punto  $x \in X$ . Ahora definamos a  $N(F, \epsilon)$  como el número mínimo de bolas cerradas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir a todo el conjunto  $F$ . Es decir;

$$F \subset \bigcup_{n=1}^M B(x_n, \epsilon), \quad (1.13)$$

para el conjunto de puntos  $\{x_n, n = 1, 2, \dots, M\} \subset X$ .

La medida de Hausdorff-Besicovich por bolas [9] se define de la siguiente forma:

para un número real no negativo  $s$  y cualquier  $\delta > 0$

$$B_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum |B_i|^s : \{B_i\} \text{ es una cubierta de } \delta \text{ de } F \text{ por bolas} \right\} \quad (1.14)$$

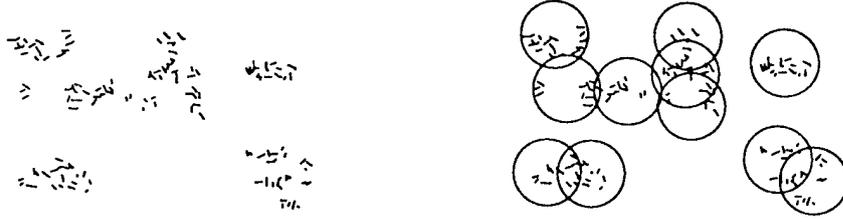


Figura 1.22: Cubiertas por bolas.

con lo que se obtiene la medida

$$B^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta^s(F). \quad (1.15)$$

Un caso particular es cuando  $|B_i| = \epsilon \quad \forall i$ , entonces nos queda

$$\sum |B_i|^s = N(\epsilon)\epsilon^s \quad (1.16)$$

Entonces redefiniendo

$$B^s(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon^D \quad (1.17)$$

como una medida nos queda:

$$M_D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon^D \quad (1.18)$$

donde:

$M_D$  = Es la medida del fractal.

$N(\epsilon)$  = Número de bolas de diámetro  $\epsilon$  necesarias para cubrir todo  $A$ .

$\epsilon$  = Diámetro de la bola.

$D$  = Dimensión.

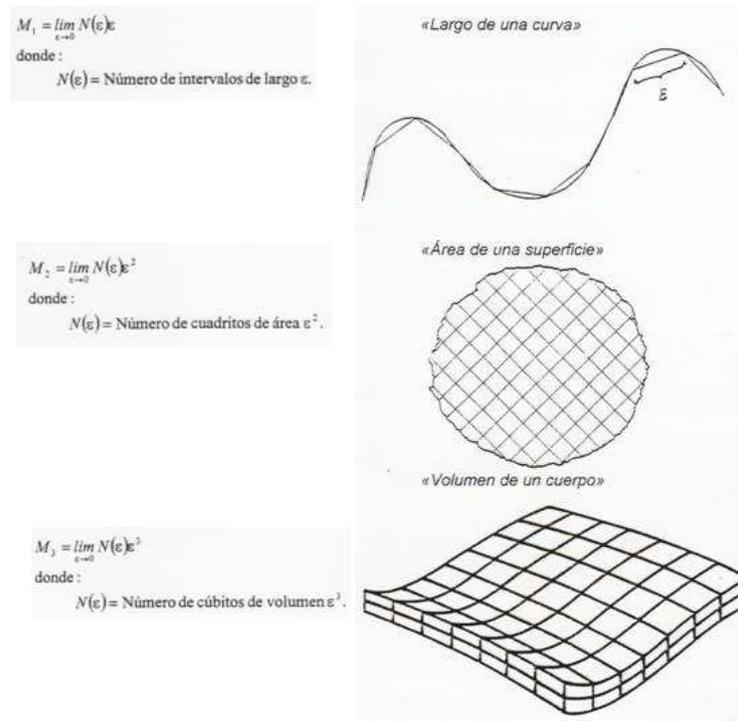
La medida de Hausdorff generaliza las ideas familiares de longitud, área y volumen.

Se puede mostrar que para conjuntos de  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$ , la medida de Hausdorff es proporcional a la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional [2]. La medida de Hausdorff se define no sólo para números enteros, sino que esta medida también se puede definir para cualquier  $s \in \mathbb{R}$ .

### 1.3.2. Dimensión de Hausdorff-Besicovich

Para un conjunto cualquiera  $F$  y  $0 \leq \delta < 1$ ,  $B_\delta^s(F)$  es una función no creciente de  $s$  y de la ecuación  $B^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta^s(F)$  se sigue también que  $B^s(F)$  es no creciente. De hecho si tomamos un  $t \neq s$  y  $\{B_i\}$  es una  $\delta$ -cubierta de bolas de  $F$ , entonces:

$$\sum |B_i|^t = \sum |B_i|^{t-s} |B_i|^s \leq \sum \delta^{t-s} |B_i|^s = \delta^{t-s} \sum |B_i|^s \quad (1.19)$$



**Figura 1.23: Dimensiones.** Principales dimensiones usadas para el volumen de un conjunto  $F$

Dado que  $|B_i| \leq \delta$ , tomando el ínfimo de esta ecuación y usando la definición dada por la ecuación (1.14) se tiene que  $B_\delta^s(F) \leq \delta^{t-s} B_\delta^s(F)$ .

Tomando el límite cuando  $\delta$  tiende a cero y usando la ecuación (1.15) se llega a

$$B^t(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta^t \delta(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} B_\delta^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta^s \delta(F) \quad (1.20)$$

Para aquellos valores de  $s$  en los que la medida de Hausdorff de un conjunto  $F$  sea cero o infinita, se dice que la medida  $B^s(F)$  del conjunto es degenerada.

Seleccionamos aquel valor de  $s$  para el cual  $B^s(F)$  es no degenerada [5], de manera que:

si  $t - s > 0$  entonces  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} = 0$ , por lo tanto  $B^t(F) = 0$  en tanto que si  $t - s < 0$  entonces  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} = \infty$ , por lo tanto  $B^t(F) = \infty$ , por lo tanto si  $t \neq s$ , entonces la medida de  $B^s(F)$  es degenerada.

Concluimos que sólo existe un valor de  $s$  para el cual la medida de Hausdorff es no degenerada, puesto que tal medida brinca de infinito a cero en el valor de  $s$ .

El valor de  $s$  para el cual la medida de Hausdorff de  $F$  es finita y diferente de cero es llamada la **dimensión de Hausdorff** del objeto  $F$  y se denota como

$D_H(F)$ . Dicha dimensión de Hausdorff satisface que

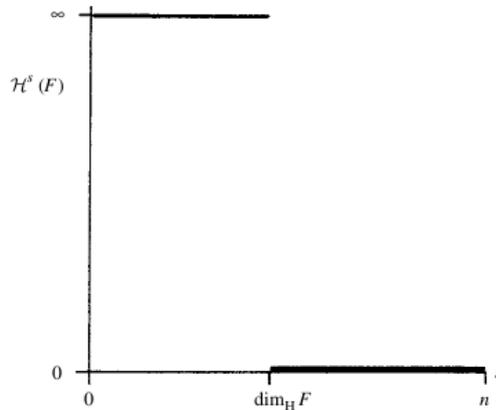
$$B^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D_H(F) \\ 0 & \text{si } s > D_H(F) \end{cases} \quad (1.21)$$

Es decir [6]:  $D_H(F) = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}$ .

De manera que si  $s = D_H(F)$ , entonces  $H^s(F)$  puede ser cero o infinito, o satisface

$$0 < H^s(F) < \infty. \quad (1.22)$$

Ver Figura 1.24.



**Figura 1.24:** Gráfica de  $H^s(F)$  contra  $s$  para el conjunto  $F$

### 1.3.3. Dimensión y medida fractal

La idea fundamental de la dimensión fractal es el concepto de “medida de una escala  $\delta$ ” donde esto significa medir un conjunto de tal manera que se ignoren las irregularidades del mismo en un tamaño menor que  $\delta$  y se estudia el comportamiento de dicha medida cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

La medida fractal se define en términos del número de veces que cabe una regla de longitud  $\delta$  en el objeto  $F$ , lo que será proporcional a  $\delta^{-1}$ , o alternativamente el número de cuadros de lado  $\delta$  que caben en  $F$ , lo que es proporcional a  $\delta^{-2}$ , de manera que nos damos cuenta que si denotamos a  $N_\delta(F)$  como esta cantidad, entonces se obedece la siguiente ley de potencia cuando  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$N_\delta(F) \approx c\delta^{-s} \quad (1.23)$$

donde  $c$  y  $s$  son constantes y donde la dimensión fractal es  $s$  que se puede calcular a partir de esta relación en la siguiente forma:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \right\} \quad (1.24)$$

**Definición 20.** Sea  $A \in \mathcal{H}(X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico. Para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $N(A, \varepsilon)$  denota el número mínimo de bolas cerradas de radio  $\varepsilon > 0$  necesarias para cubrir  $A$ . Si

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right\} \quad (1.25)$$

existe, entonces  $D$  es llamada la *dimensión fractal* de  $A$ .

Es importante observar como se escala la cantidad  $N_\delta(F)$ . Si ampliamos  $F$  a una escala  $nF$ , y al mismo tiempo cambiamos a  $\delta$  por  $n\delta$ , es claro que el número de lados de la polygonal no cambia y por tanto

$$N_\delta(F) = N_{n\delta}(nF). \quad (1.26)$$

El concepto de medida hasta aquí queda muy vago puesto que por lo regular se le da toda la importancia a la dimensión fractal. Para definirla recurrimos a analizar sus propiedades, como mencionamos anteriormente la intención de definir una medida es para generalizar el concepto de longitud, área, volumen, etc. Lo importante es ver como se escalan estas cantidades con la dimensión, por ejemplo si una longitud escala de  $L$  a  $nL$ , el área escala de  $A$  a  $n^2A$ , el volumen de  $V$  a  $n^3V$ , etc. de manera que la medida de dimensión  $s$  debe de escalar de la siguiente manera:

$$M_{n\delta}(nF) = n^s M_\delta(F).$$

Una posible definición que satisface esta propiedad es la siguiente:

$$M_{n\delta}(nF) = \delta^s N_\delta(F) \quad (1.27)$$

que permite definir la **Medida fractal** de  $F$  en **dimensión  $s$** , como:

$$M^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^s N_\delta(F) \quad (1.28)$$

Sea  $F$  un conjunto acotado no vacío de  $\mathcal{H}(X)$  y sea  $N_\delta(F)$  el número mínimo de conjuntos de diámetro a lo más  $\delta$  de tal manera que cubren a  $F$ . La dimensión fractal de  $F$  se define como:

$$D_{frac}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \right\}. \quad (1.29)$$

Con respecto a esta medida se puede mostrar [10] la siguiente propiedad

$$M^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D_{frac}(F) \\ 0 & \text{si } s > D_{frac}(F) \end{cases} \quad (1.30)$$

**Dimensión del fractal más importante. El conjunto de Cantor  $C$ .**

**Propiedades del conjunto de Cantor.**

- (1)  $C$  mide cero.
- (2)  $C$  es un conjunto infinito no numerable.
- (3) La medida de  $C$  es diferente a la medida del conjunto donde se encuentra  $([0,1])$ .  $\mu(C) = 0 \neq \mu([0,1]) = 1$  ! Paradoja.

Para probar las propiedades, primero vamos a sumar lo que le quitamos al conjunto inicial  $[0,1]$  para obtener el conjunto de Cantor denotándolo como  $\mu(\bar{C})$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Paso 1:} & \quad \frac{1}{3} \\
 \text{Paso 2:} & \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} \\
 \text{Paso 3:} & \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} \\
 & \quad \vdots \\
 \text{Paso k:} & \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{3^k}
 \end{aligned}$$

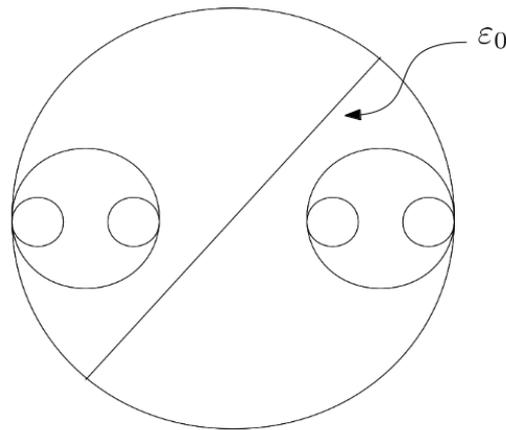
¿A cuánto equivale lo que le quitamos?

$$\begin{aligned}
 \mu(\bar{C}) &= \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \cdots \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\frac{1}{3}} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ahora,  $\mu(C \cup \bar{C}) = 1 = \mu(C) + \mu(\bar{C}) \quad \therefore \mu(C) = 0$ . Esto enuncia la primera propiedad.

La segunda propiedad tiene que ver con que cada elemento de  $C$  puede ponerse en correspondencia con cada elemento del intervalo  $[0,1]$ , es decir; tienen la misma medida o cardinalidad. Es entonces que llegamos a la tercera propiedad que resulta ser una paradoja. Debido a tal propiedad es necesario calcular la medida-dimensión de Hausdorff-Bessicovich para  $C$ .

Tomando la ecuación 1.18 tenemos lo siguiente:



$$M_D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^D$$

**Figura 1.25:** Medida del Hausdorff de  $C$

Sea  $\varepsilon_n = \frac{1}{3}\varepsilon_{n-1}$  con  $\varepsilon_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} N(\varepsilon_0) &= 1 \\ N(\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\varepsilon_0) &= 2 \\ N(\varepsilon_2 = \frac{1}{3^2}\varepsilon_0) &= 2^2 \\ &\vdots \\ N(\varepsilon_n = \frac{1}{3^n}\varepsilon_0) &= 2^n \end{aligned}$$

Entonces, en vez de hacer tender  $\varepsilon$  a cero, hacemos lo equivalente; hacer tender  $n$  a infinito.

Así la medida de Hausdorff queda de la siguiente manera:

$$M_D = \lim_{n \rightarrow \infty} N(\varepsilon_n) \varepsilon_n^D = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\varepsilon_0\right)^D = \varepsilon_0^D \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{2}{3^D} > 1 &\implies M_D = \infty && \text{y } D < \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ \text{si } \frac{2}{3^D} < 1 &\implies M_D = 0 && \text{y } D > \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ \text{si } \frac{2}{3^D} = 1 &\implies M_D = \varepsilon_0^D && \text{y } D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309\dots \end{aligned}$$

Siendo  $D$  la dimensión del conjunto de Cantor.

### 1.3.4. Otras propiedades

#### Transformación de autosimilaridad

En el espacio donde se encuentra nuestro objeto, un real  $r$  positivo determina la transformación de autosimilaridad cuando un punto  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se transforma como  $r(\vec{x}) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n) \in \mathbb{R}^n$ . Así esta transformación aplicada al subconjunto  $F$  de  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  define un nuevo conjunto  $r(F)$  como  $r(F) = \{r(\vec{x}) : \vec{x} \in F\}$ .

#### Congruencia entre dos conjuntos

Se dice que dos conjuntos son congruentes, si son idénticos, excepto por desplazamiento o rotaciones, la congruencia se denota por  $F \sim G$ .

#### Conjunto autosimilar

Se dice que un conjunto  $F$  en  $\mathbb{R}^n$  es autosimilar en las razones  $\{r_1, r_2, \dots, r_q\}$  cuando

$$F = \bigcup_{i=1}^q F_i \quad (1.31)$$

donde  $F_i \sim r_i(F)$  y además  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ .

En otras palabras, se dice que un conjunto  $F$  en  $\mathbb{R}^n$  es autosimilar cuando  $F$  está formado por copias idénticas a él pero, a la vez, cada copia escalada, siendo  $\{r_1, r_2, \dots, r_q\}$  los factores de escala. Cuando  $r_1 = r_2 = \dots = r_q = r$  se dice que  $F$  es autosimilar con respecto a la razón  $r$  y al entero  $q$ .

La ecuación de dimensión de autosimilaridad puede solamente ser aplicada cuando todas las piezas son escaladas por la misma cantidad, es decir: razones iguales  $r_1 = r_2 = \dots = r_q = r$ .

Sin embargo, muchos fractales autosimilares están hechos de piezas escaladas por diferentes cantidades (razones diferentes). Mediante el uso de la ecuación de Moran, se calcula la dimensión de autosimilaridad de estos objetos fractales autosimilares más generales [11].

Tenemos que reescribir la fórmula

$$d_s = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Dado que los factores de escala pueden ser separados uno del otro, se cambian los valores individuales de  $r$  en diferentes valores  $r_i$ . Haciendo

$$d = d_s \implies d = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Reescribiendo como:

$$d \log\left(\frac{1}{r}\right) = \log(N) \implies \log\left(\left(\frac{1}{r}\right)^d\right) = \log(N).$$

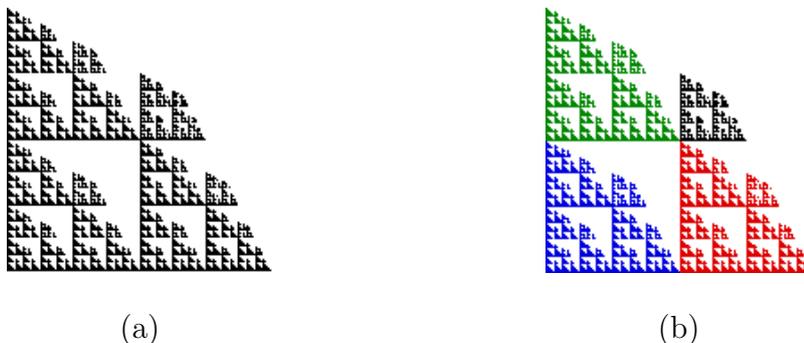
Elevamos exponencialmente de ambos lados  $\left(\frac{1}{r}\right)^d = N$ . Es decir,  $1 = Nr^d$ . Y así,  $1 = r^d + \dots + r^d$ . Donde tenemos una  $r$  para cada una de las  $N$  copias del fractal en la descomposición.

Reemplazando cada copia de  $r$  con  $r_i$ , vemos que la dimensión de similitud  $d$  debe satisfacer

$$1 = r_1^d + \dots + r_N^d. \quad (1.32)$$

Esta es la ecuación de Moran. Mientras que cada uno de los  $r_i$  satisface  $0 < r_i < 1$ , la ecuación de Moran tiene una solución única, y esa solución es la dimensión de autosimilaridad  $d = d_s$ .

Vamos a ilustrar un ejemplo



**Figura 1.26:** Fractal autosimilar (a) y su descomposición en copias de sí mismo con diferentes razones (b).

Para algunos valores de la  $r_i$ , la ecuación de Moran se puede resolver exactamente, pero a menudo hay que resolverla numéricamente.

Para la figura anterior la ecuación de Moran queda de la siguiente forma:

$$(0.5)^d + (0.5)^d + (0.5)^d + (0.25)^d = 1$$

Ya que el fractal está compuesto de tres copias de él mismo escaladas por un factor de  $\frac{1}{2}$  y una copia escalada  $\frac{1}{4}$ .

Para nuestro ejemplo, la ecuación de Moran se puede resolver analíticamente, ya que  $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ . Entonces la ecuación Moran

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{4}\right)^d = 1$$

puede escribirse como

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^d = 1$$

El intercambio de exponentes de la segunda parte de la izquierda obtenemos

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^d\right)^2 = 1$$

Haciendo  $\left(\frac{1}{2}\right)^d = x$ , la ecuación de Moran se convierte en la ecuación de segundo grado  $3x + x^2$ .

La ecuación de segundo grado da como resultado  $x = \frac{(-3 \pm \sqrt{13})}{2}$ .

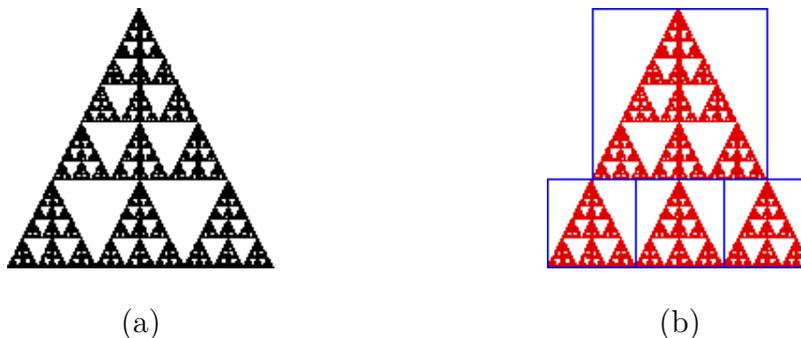
Recordando  $x = \left(\frac{1}{2}\right)^d$ , lo cual es positivo, hacemos  $x = \frac{(-3 + \sqrt{13})}{2}$  y así la solución de la ecuación Moran es

$$d = \frac{\log(-3 + \sqrt{13})}{2 \log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

finalmente:

$$d = 1,72368.$$

Un ejemplo más es la Figura 1.27.



**Figura 1.27:** Este fractal (a) puede ser descompuesto en tres piezas (b) con  $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{3}$ , y una con  $r_4 = \frac{2}{3}$ . Así, la ecuación de Moran es  $3(0,333)^d + (0,667)^d = 1$ .

Usando los métodos para resolver la ecuación Moran, vemos que  $d = 1,65196$ .

## 1.4. Sistema de Funciones Iteradas para la construcción de fractales

### 1.4.1. IFS

La terminología de Sistema de Funciones Iteradas (IFS en inglés Iterated Functions System), fue introducida por Barnsley y Demko [12] en 1985, que pretendía describir un nuevo esquema para entender la geometría fractal desde un punto de vista completamente diferente al habitual. Este esquema posee muchas propiedades en común con los sistemas dinámicos, que son susceptibles de aplicarse fácilmente a la generación gráfica de objetos de estructura compleja, por medio de los algoritmos simples, aún en situaciones en las cuales los objetos no presentan la autosimilaridad, cualidad primordial de los objetos fractales, los cuales también pueden generarse globalmente dentro del sistema de Barnsley y Demko.

[13] Sea  $M$  un espacio métrico compacto y  $H$  el conjunto no cerrado de subconjuntos de  $M$ . Entonces  $H$  es una métrica compacta con la métrica de Hausdorff.

Sea  $w_n = M \rightarrow M$  para  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  continuo.

$$\{M, w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$$

Es llamado un sistema de funciones iteradas (IFS).

Considere  $w_n(A) = \{w_n(x) : x \in A\}$ . Definimos  $W : H \rightarrow H$  por

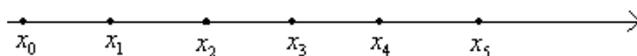
$$W_n(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A) = \bigcup_n w_n(A), \quad A \in H$$

Sea  $G \subset H$  tal que  $W(G) = G$  es llamado un *atractor* para el sistema de funciones iteradas.

De acuerdo con Barnsley [2] las IFS siempre admiten como mínimo un atractor. Así una IFS es llamada hiperbólica si, para algún  $s, 0 \leq s < 1$  y  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,

$$d(w_n(x), w_n(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Dado un conjunto de puntos  $\{(x_i, y_i) \in I \times R : i = 1, 2, \dots, N\}$ , donde  $I = [x_0, x_N] \subset R$  es un intervalo cerrado.

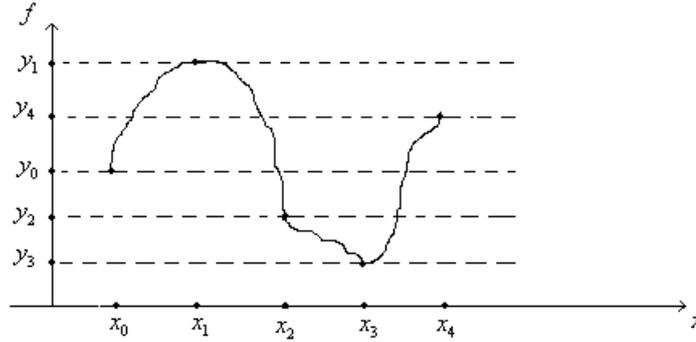


**Figura 1.28:**  $I = [x_0, x_N] \subset R$ .

Las funciones que nos ocupan son funciones  $f : I \rightarrow R$  las cuales interpolan los datos  $\{y_i : i = 0, 1, 2, \dots, N\}$  tal que

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

como se ve en la siguiente figura.



**Figura 1.29:**  $f : I \rightarrow R$ .

Las gráficas de tales funciones  $G = \{x, f(x) : x \in I\}$  son atractores de los sistemas de funciones iteradas (IFS). En otras palabras existe un subconjunto compacto  $M$  de  $I \times R$ , y una colección de mapeos continuos  $w_n : M \rightarrow M$  tal que el único atractor de las IFS es  $G$ .

Aquí trabajaremos con un espacio métrico compacto  $M = I \times [a, b]$  para algún  $-\infty < a < b < \infty$ , con la métrica Euclidiana o una métrica equivalente.

$$d((c_1, d_1), (c_2, d_2)) = \{|c_1 - c_2|, |d_1 - d_2|\}.$$

Asignando  $I_n = [x_{n+1}, x_n]$  y sea  $L_n : I \rightarrow I_n$  para  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  un homeomorfismo contractivo tal que

$$L_n(x_0) = x_{n-1}, L_n(x_N) = x_n,$$

$$|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \leq l|c_1 - c_2| \quad \forall c_1, c_2 \in I,$$

para algún  $l, 0 \leq l < 1$ . También el mapeo  $F_n : M \rightarrow [a, b]$  es continuo para algún  $0 \leq q \leq 1$  que satisface

$$F_n(x_0, y_0) = y_{n-1}, \quad F_n(x_N, y_N) = y_n,$$

$$|F_n(c, d_1) - F_n(c, d_2)| \leq q|d_1 - d_2|,$$

para todo  $c \in I, d_1, d_2 \in [a, b]$ , y  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Ahora definimos funciones  $w_n : M \rightarrow M$  para  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  por

$$w_n(x, y) = (L_n(x), F_n(x, y)), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

**Teorema 3.** Los sistemas de funciones iteradas (IFS)  $\{M, w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  admiten un único atractor  $G$ , el cual es la gráfica de una función continua

$f : I \rightarrow [a, b]$ , y esta función satisface  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

El tipo de transformaciones que analizamos son llamadas afines, las cuales tienen la propiedad de transformar las rectas en rectas, de manera que son de la forma:

$$W(r) = A \cdot r + b, \quad (1.33)$$

en donde  $r$  es el vector de posición de un punto en el plano,  $A$  es una matriz de  $2 \times 2$  con elementos  $a_{ij}$  y  $b$  es un vector constante con componentes  $b_i$ , la transformación afín puede verse como un sistema dinámico en el plano definido por:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{11}x_n + a_{12}y_n + b_1 \\ y_{n+1} &= a_{21}x_n + a_{22}y_n + b_2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

por lo que la transformación afín es un mapeo que transforma a un punto  $(x_n, y_n)$  del plano en otro punto  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ . En general la distancia entre dos puntos  $P$  y  $Q$  cambia cuando se les aplica la transformación (1.33), así:

$$\|W(P) - W(Q)\| \leq s \cdot \|P - Q\|, \quad (1.35)$$

en donde  $s$  es un número no negativo, el número menor  $s$  para el cual se satisface la desigualdad 1.35 se conoce como la *constante de Lipschitz* para  $W$ . Las transformaciones afines se clasifican en contractivas cuando  $s < 1$ , de simetría cuando  $s = 1$  y expansivas para  $s > 1$ .

La constante de Lipschitz para dichas transformaciones está dada por:

$$s = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1.36)$$

### 1.4.2. Funciones de Conjunto Valuado

Ahora en lugar de considerar una transformación afín contractiva, consideremos dos de tales transformaciones, así consideraremos la función de conjunto valuado (FCV) definida como:

$$W(r) = \{w_1(r), w_2(r)\} = w_1(r) \cup w_2(r), \quad (1.37)$$

se dice que es una función de conjunto valuado, porque a cada punto  $r$ , se le asocia dos puntos, que se obtiene al aplicar  $w_1$  y  $w_2$  al vector  $r$ . Por lo que ahora al aplicar iterativamente la función se obtiene en general un conjunto de puntos:

$$\begin{aligned} W^2(r) &= W(W(r)) \\ &= W(w_1(r), w_2(r)) \\ &= \{w_1(w_1(r)), w_1(w_2(r)), w_2(w_1(r)), w_2(w_2(r))\} \end{aligned} \quad (1.38)$$

de manera que  $W^m(r)$  estará formada por un conjunto de  $2^m$  puntos.

Se define el conjunto atractor de la función  $W(r)$ , como el conjunto de puntos  $A(r_0)$  resultante de aplicar iterativamente la función  $W$  al punto  $r_0$ , es decir:

$$A(r_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} W^m(r_0). \quad (1.39)$$

Si el conjunto atractor es el mismo para todos los puntos en una región  $C$ , se dice que  $C$  es la cuenca de atracción del atractor  $A$ , o sea:

$$C = \left\{ r : A = \lim_{m \rightarrow \infty} W^m(r) \right\} \quad (1.40)$$

de manera que al aplicarle  $W$  a un punto  $x \in A$  encontramos el conjunto de puntos  $Y = \{w_1(x), w_2(x)\}$ , tal que, por lo que  $A$  es un punto invariante de la transformación  $W$ , esto no significa que los puntos que forman  $A$  sean invariantes ante la transformación. Claramente el conjunto atractor  $A$  es un subconjunto de la cuenca de atracción  $C$ .

Otra propiedad importante del conjunto atractor  $A$ , es que está formado por la unión de los conjuntos  $w_1(A)$  y  $w_2(A)$ , ya que por la ec. (1.37):

$$W(A) = \{w_1(A), w_2(A)\} = w_1(A) \cup w_2(A).$$

#### Ejemplo 4.

Ahora ilustremos esta teoría, consideremos la transformación de conjunto valuado formada por las funciones.

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{x}{3} \\ w_2(x) &= \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (1.41)$$

que están definidas en el intervalo  $[0, 1]$ .  $w_1(x)$  atrae todos los puntos del eje real al punto  $a_1 = 0$ , en tanto que  $w_2(x)$  los atrae al punto  $a_2 = 1$ . Para analizar el comportamiento de la función conjunto valuado  $W = \{w_1, w_2\}$  expresaremos todos los números de ese intervalo en base 3, de forma que para  $x \in [0, 1]$  tenemos:

$$x_{base3} = 0.b_1b_2b_3 \cdots = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{3^i}$$

donde  $b_i$  solo puede tomar los valores 0, 1 y 2.

Al dividir el número  $x$  entre 3, se obtiene:

$$\left(\frac{x}{3}\right)_{base3} = 0.0b_1b_2b_3 \cdots$$

y al sumarse  $\frac{2}{3}$ , se tiene:

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)_{base3} = 0.2b_1b_2b_3 \cdots$$

de manera que al aplicarle la función  $w_1$  a un número en el intervalo  $[0, 1]$ , se le agrega un cero después del punto, en tanto que cuando se le aplica  $w_2$  se le

agrega un 2 después del punto, corriéndose todas las demás cifras significativas un lugar a la derecha. Utilizando estos resultados tenemos que las primeras cuatro iteraciones de la función  $W$  son:

$$\begin{aligned} W(x) &= \{0.0b_1b_2b_3\dots, 0.2b_1b_2b_3\dots\} \\ W^2(x) &= \{0.00b_1b_2b_3\dots, 0.02b_1b_2b_3\dots, 0.20b_1b_2b_3\dots, 0.22b_1b_2b_3\dots\} \\ W^3(x) &= \{0.000b_1b_2b_3\dots, 0.002b_1b_2b_3\dots, 0.020b_1b_2b_3\dots, 0.022b_1b_2b_3\dots, \\ &\quad 0.200b_1b_2b_3\dots, 0.202b_1b_2b_3\dots, 0.220b_1b_2b_3\dots, 0.222b_1b_2b_3\dots\} \\ W^4(x) &= \{0.0000b_1b_2b_3\dots, 0.0002b_1b_2b_3\dots, 0.0020b_1b_2b_3\dots, 0.0022b_1b_2b_3\dots, \\ &\quad 0.0200b_1b_2b_3\dots, 0.0202b_1b_2b_3\dots, 0.0220b_1b_2b_3\dots, 0.0222b_1b_2b_3\dots, \\ &\quad 0.2000b_1b_2b_3\dots, 0.2002b_1b_2b_3\dots, 0.2020b_1b_2b_3\dots, 0.2022b_1b_2b_3\dots, \\ &\quad 0.2200b_1b_2b_3\dots, 0.2202b_1b_2b_3\dots, 0.2220b_1b_2b_3\dots, 0.2222b_1b_2b_3\dots, \} \end{aligned}$$

Se trata de un conjunto con  $2^n$  elementos, los cuales se obtienen al considerar todos los posibles arreglos de los primeros  $n$  dígitos significativos donde cada cifra significativa puede ser 0 ó 2.

Estamos ahora en posibilidad de encontrar el conjunto atractor de  $W$  usando su definición dada por la ec. (1.40), ya que el conjunto  $A$  será el formado por todos aquellos números tales que en ternario sólo tienen ceros o dos como cifras significativas, es decir [14]:

$$A = \left\{ x : x = 0.a_1a_2a_3\dots = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \text{ con } a_i = 0, 2 \right\} \quad (1.42)$$

pero esta es precisamente la definición del célebre conjunto de Cantor que definimos en el primer capítulo.

De manera que al aplicar dos funciones lineales, cada una de ellas con un atractor muy simple, al momento que entran en competencia estos atractores se obtiene un conjunto atractor  $A$ , de estructura muy compleja, de hecho el conjunto de Cantor es un objeto fractal con una dimensión de Hausdorff  $D=0.6309\dots$

Otra propiedad del conjunto atractor que se ha obtenido es que es independiente del punto inicial seleccionado, así que podemos comenzar por un número al azar en el intervalo y al aplicarle la función  $W$  repetidamente, obtenemos el conjunto de Cantor.

Vamos a ilustrarlo:

Para desarrollar una intuición geométrica sobre nuestro resultado haremos un análisis gráfico sobre la aplicación repetida de la función de conjunto valuado  $W$ , pero ahora en lugar de aplicársela a un punto  $x$ , se la aplicaremos a un conjunto de puntos, por ejemplo a todo el dominio de definición de  $W$ . Para tal objetivo consideraremos el intervalo  $L_0$ .  $w_1(L_0)$  contrae el intervalo en  $\frac{1}{3}$  y

lo coloca en el origen,  $w_2(L_0)$  también contrae el intervalo en  $\frac{1}{3}$  pero lo coloca en  $\frac{2}{3}$ . De manera que el efecto que ejerce  $W(L_0) = w_1(L_0) \cup w_2(L_0)$  es dividir  $L_0$  en tres partes iguales y borrar la parte central.

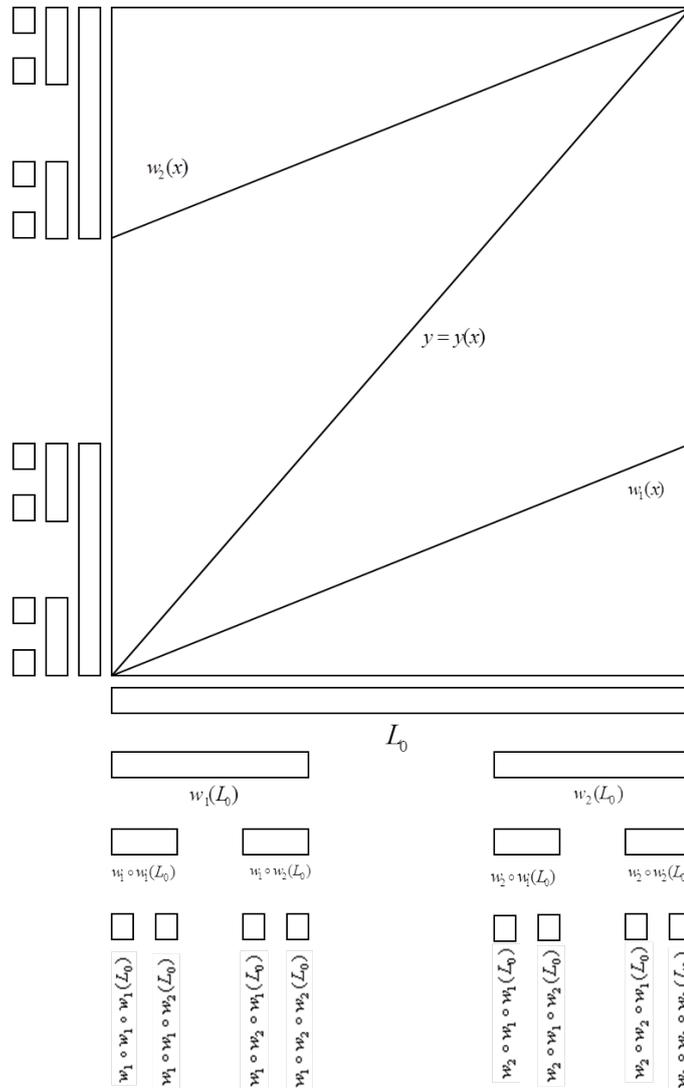


Figura 1.30: Conjunto de Cantor.

$w_2(L_0)$  toma el intervalo con su agujero medio, hace dos copias reducidas por un factor de  $\frac{1}{3}$ , coloca una en el origen y otra en  $\frac{2}{3}$ , siendo la longitud de los pequeños segmentos igual a  $L_2 = \frac{L_0}{3^2}$ , claramente aplicaciones sucesivas de  $W$  repiten este proceso. (Ver Figura 1.30), como en cada paso se reduce la longitud de cada segmento por un factor de  $\frac{1}{3}$ , en la aplicación  $n$ -ésima, la longitud de cada pequeño segmento es de  $L_n = \frac{L_0}{3^n}$ .

Generalizando todo lo anterior, podemos definir una función de conjunto valuado (FCV) como un conjunto de  $q$  mapeos contractivos cuyo dominio de definición es el plano  $\mathbb{R}^2$ , así:

$$W(r) = \{w_1(r), w_2(r), \dots, w_q(r)\} \tag{1.43}$$

de manera que una FCV asocia a cada punto en el plano un conjunto de  $q$  puntos en  $\mathbb{R}^2$ . El conjunto atractor  $A$  de una FCV, se define como:

$$A = \lim_{m \rightarrow \infty} W^m(r_0). \quad (1.44)$$

Cuando los mapeos son contractivos satisfacen la llamada condición de contractividad promedio de Elton, la cual entre otras cosas garantiza que el atractor es independiente del punto inicial  $r_0$ . Como los mapeos son contractivos al conjunto atractor no depende del punto inicial, siendo denotados solamente por  $A$ , y todos los puntos del dominio de definición de forman la cuenca de atracción del atractor  $A$ .

Las propiedades que posee el conjunto atractor son:

(a) El conjunto atractor es un conjunto Fijo de la FCV  $W(r)$  o sea:

$$W(A) = A \quad (1.45)$$

(b) El conjunto atractor es la unión de todos los conjuntos  $\{w_1(A), w_2(A), \dots, w_q(A)\}$  ya que de la ec. (1.43) se sigue:

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_q(A) \quad (1.46)$$

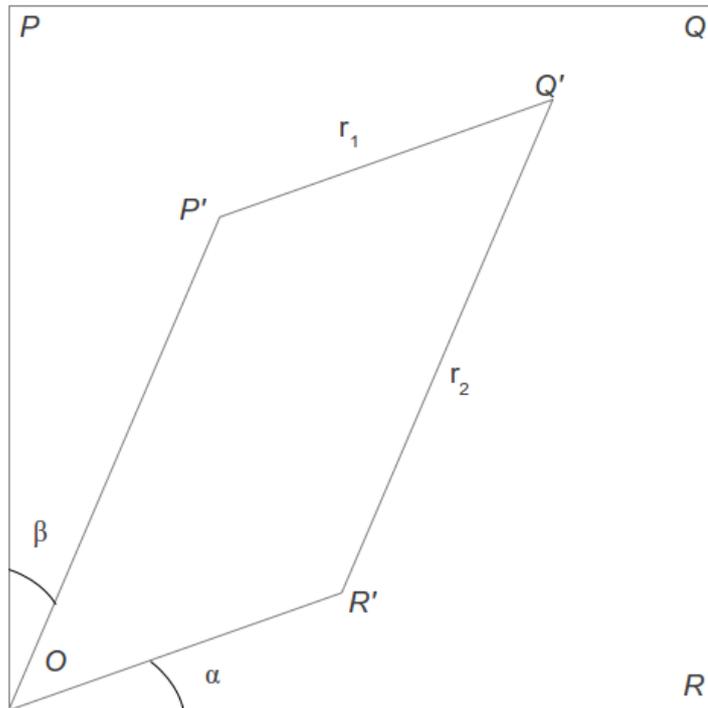
y por el conjunto invariante se sigue de la ec. (1.45)

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_q(A). \quad (1.47)$$

Esta ecuación nos dice que el atractor es la unión de sus transformaciones ante  $W$ , si las  $w_i$  son mapeos afines, entonces cada  $w_i$  es una copia reducida y deformada linealmente del conjunto  $A$ , por lo que en este caso la ecuación anterior nos dice que  $A$  está formada por la unión de copias reducidas y linealmente deformadas de sí mismo, esto se parece mucho a las propiedades de autosimilaridad de los conjuntos fractales, sin embargo, es más general.

Un fractal exactamente autosimilar pueden generarse por medio de un sistema de funciones iteradas, ya que un fractal de este tipo está compuesto por la unión de copias reducidas de sí mismo, por lo que si consideramos el caso particular en que las transformaciones afines  $w_i$  corresponden a compresiones por un determinado factor  $r$ , y además que todas las regiones  $w_i(A)$  no tengan puntos en común con cada  $w_k(A)$  entonces el atractor de la transformación  $W$  es un fractal autosimilar.

Para analizar lo anterior consideremos una transformación que nos lleve del cuadro  $OPQR$  al paralelogramo  $OP'Q'R'$ , en donde  $OP'$  forman un ángulo  $\beta$  con  $OP$ , y  $|OP'| = r_2|OP|$ , en tanto que  $OR$  forman un ángulo  $\alpha$  con  $OR$  y la longitud de ambos segmentos está relacionada por  $|OR'| = r_1|OR|$ , donde



**Figura 1.31: Paralelogramo resultante de la transformación.**

tanto  $r_1$  como  $r_2$  son cantidades menores que la unidad, (ver Fig. 1.31).

La forma explícita de  $w$  que “deforma linealmente” a la región  $OPQR$  en  $OP'Q'R'$  está dada por:

$$W(r) = \begin{pmatrix} r_1 \cos \alpha & r_2 \sin \alpha \\ r_1 \sin \alpha & r_2 \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la constante de Lipschitz es:

$$s = \sqrt{r_1 r_2 \cos(\alpha + \beta)}$$

Para lo cual tenemos los casos especiales de deformaciones lineales (transformaciones afines) son:

- a) Las compresiones, con diferentes razones, en cuyo caso  $\alpha = \beta = 0$ :

$$W(r) = C(r) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- b) Las compresiones, con iguales razones, en cuyo caso  $\alpha = \beta = 0$ ,  $r_1 = r_2 = r$ :

$$W(r) = C(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Rotaciones alrededor del origen por un ángulo  $\alpha$ , en cuyo caso  $\beta = -\alpha$ :

$$W(r) = R(r) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d) Reflexiones:

$$(r) = I(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e) Las translaciones también son transformaciones afines de la forma:

$$W(r) = T(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Recordando la definición de Conjunto autosimilar:

Se dice que un conjunto acotado  $S$ , es autosimilar con respecto a la razón  $r$  y a un entero  $N$  cuando:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_N$$

con  $S_i \cap S_k = \emptyset$ .

En donde  $S_k$  es congruente con el conjunto  $r(S)$ , el cual se obtiene al aplicarle a  $S$  una comprensión por un factor  $r$ . O sea  $r(S) = \{C(x)|x \in S\}$ .

Dando un conjunto  $S$ , podemos encontrar un conjunto congruente a  $r(S)$  al aplicarle sucesivamente al conjunto  $S$  una operación de reducción, por un factor  $r$ , con lo que se obtiene  $r(S)$ , y como dos conjuntos son congruentes cuando ambos son idénticos excepto por rotaciones y translaciones, la aplicación de una de rotación seguida de una traslación, nos permite construir cualquier conjuntos congruente con  $r(S)$  de manera que los conjuntos  $S_k$  se pueden construir de las siguiente manera:

$$S_k = R \cdot R \cdot C(S) = w_k(S) = A(S) + b$$

En donde la matriz  $A$  es el producto de las matrices de comprensión por la matriz de rotación, y el vector  $b$  se obtiene de la matriz de traslación, esto nos permite obtener la transformación afín  $w_k$  asociada con el subconjunto  $S_k$ .

### Ejemplo 5.

Consideremos la determinación de las transformaciones afines que nos permiten determinar la conocida curva de Koch o conjunto  $K$ , que está formada por cuatro partes autosimilares, cada una de ellas siendo una reducción de la original por un factor de  $\frac{1}{3}$  y colocadas cada una de la siguiente forma: la primera con vértice en  $(0, 0)$ , la segunda en  $(\frac{1}{3}, 0)$  y rotada por 60 grados, la tercera con vértice en  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  y rotada por 60 grados y la cuarta con el vértice en

$(\frac{2}{3}, 0)$ . Así las transformaciones afines que generan el conjunto  $K$  están dadas por:

$$\begin{aligned} w_1(r) &= C \cdot r \\ w_2(r) &= R_1 \cdot C \cdot r + b_2 \\ w_3(r) &= R_2 \cdot C \cdot r + b_3 \\ w_4(r) &= C \cdot r + b_4 \end{aligned}$$

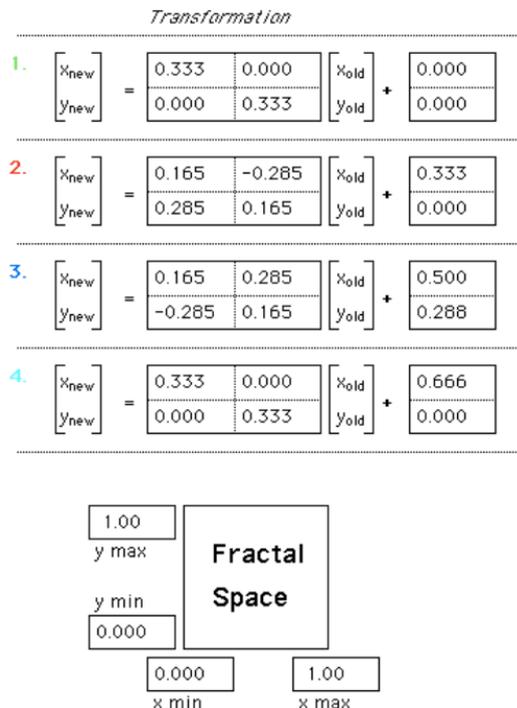
en donde:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R_1 = \begin{pmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos 60 & \sin 60 \\ -\sin 60 & \cos 60 \end{pmatrix}$$

y los vectores  $b$  son:

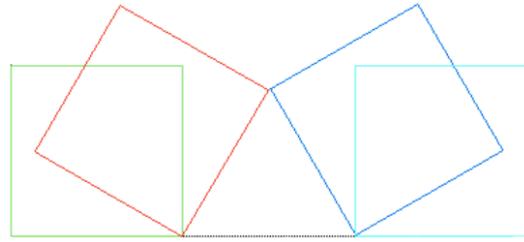
$$b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este procedimiento es justamente el que construye al fractal de Koch. <sup>1</sup>

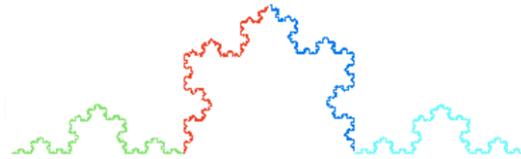


**Figura 1.32:** Los 4 sistemas de funciones iteradas para construir la curva de Koch.

<sup>1</sup>Gráficas obtenidas con el software: Fractal Attraction<sup>TM</sup> 1.2, by Kevin D. Lee and Yosef Cohen. Corre bajo plataforma iOS.



**Figura 1.33:** Polígonos iniciales correspondientes a los 4 IFS's.



**Figura 1.34:** Resultado de las iteraciones: Curva de Koch.

El proceso antes descrito puede aplicarse siempre que el conjunto fractal sea autosimilar, pero claramente las transformaciones afines son más generales por lo que podemos generar objetos fractales mucho más sofisticados, por ejemplo que no sean autosimilares y a pesar de ello tengan una estructura que no se simplifique ante ampliaciones sucesivas. Este tipo de fractales se generan cuando se quita la restricción de que los conjuntos  $S_k$  sean ajenos. El ejemplo clásico encontrado por Barnsley de un fractal no autosimilar es una hoja de helecho, la cual se convirtió en el logotipo de su empresa “Iterated Functions Systems”.



**Figura 1.35:** Hoja de helecho de Barnsley.  
Logotipo de “Iterated Functions system”.

# Interpolación clásica

---

La interpolación polinomial clásica es la más utilizada en las aplicaciones. El objetivo es la obtención del polinomio de interpolación, que es el polinomio de grado menor o igual que  $n$  que pasa por  $n + 1$  puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , también llamados nodos de interpolación. Planteando directamente las condiciones anteriores se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con solución única, pero generalmente mal condicionado. Los polinomios de Lagrange permiten obtener una expresión explícita del polinomio de interpolación. Numéricamente es mucho más útil la forma de Newton del polinomio de interpolación. Su evaluación no presenta los inconvenientes de los polinomios de Lagrange, y sobre todo, se puede actualizar fácilmente si se añaden nuevos nodos de interpolación.

Hoy en día, el uso de la computadora nos hace más fácil realizar cálculos, sin embargo esto nos obliga a trabajar con una matemática discreta a pesar de que los modelos y resultados tengan naturaleza continua.

## 2.1. Interpolación polinomial

En el análisis numérico el concepto de aproximación es de vital importancia, es por ello que, a diferencia del análisis diferencial, el análisis numérico opera con vectores y matrices[15] (operadores discretos). Tomando en cuenta el significado de la palabra **aproximación** debemos de pensar en la **no exactitud**, dicha inexactitud nos lleva a un error que es llamado **error de**

**aproximación.** Es por lo que, en la práctica, no se logra hallar una solución exacta del problema planteado.

Esto ocurre principalmente porque la solución no se expresa en funciones elementales o en otras funciones conocidas. Por eso adquirieron gran importancia los métodos numéricos. Los métodos numéricos reducen el procedimiento de la solución de un problema a operaciones aritméticas y lógicas sobre los números, que pueden ser realizadas por una computadora. Según el grado de complejidad del problema, la exactitud establecida, el método aplicado, etc.; puede ser necesario cumplir desde varias decenas hasta muchos miles de millones de operaciones.

La solución obtenida por un método numérico es aproximada, es decir, hay cierta diferencia no nula entre la solución exacta y la solución numérica. Las causas principales de la diferencia son las siguientes:

- 1) Falta de correspondencia entre el problema (modelo) matemático y el fenómeno físico real.
- 2) Errores en los datos iniciales (parámetros de entrada);
- 3) Errores de un método numérico usado para resolver el problema;
- 4) Errores de redondeo en operaciones aritméticas.

Los primeros dos errores son inevitables. En la mayoría de los casos supongamos que las operaciones aritméticas se realizan idealmente e ignoramos errores de redondeo.

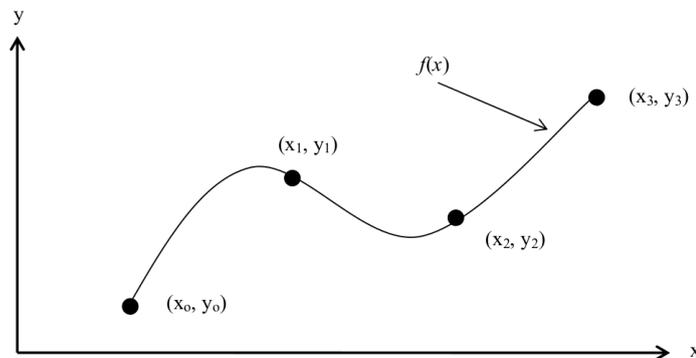
Ahora se describen tres conceptos principales [15] relacionados con modelos y algoritmos numéricos (en este caso la interpolación):

1. **La aproximación:** La proximidad de un modelo numérico al modelo original, o el grado de aproximación, caracteriza el error que se introduce al hacer discreto el modelo continuo. El grado de aproximación  $n$  se estima mediante un factor que tiene el error entre dos modelos. Así, el grado de aproximación caracteriza la rapidez de reducción del error entre dos modelos cuando el número de truncamiento  $N$  tiende al infinito.
2. **La estabilidad:** Es una característica muy importante de la calidad de cada método. La estabilidad caracteriza la manera de propagación de los errores iniciales dentro del algoritmo en el proceso de cálculo. Si el incremento de errores iniciales es considerable y sin ningún control, entonces el método numérico se llama inestable. Al contrario, si errores de cálculos dependen continuamente de los errores iniciales, entonces el método se llama estable.

3. **La convergencia:** La convergencia significa que la solución numérica converge hacia la solución exacta cuando el número de truncación  $N$  tiende al infinito.

¿Qué es la interpolación?

Muchas veces, una función  $y = f(x)$  se da sólo en puntos discretos [16], tales como  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . ¿Cómo se puede encontrar el valor de  $y$  en cualquier otro valor de  $x$ ? Así, una función continua  $f(x)$  puede ser utilizado para representar los valores de  $n + 1$  datos con  $f(x)$  pasando por los  $n + 1$  puntos. Entonces uno puede encontrar el valor de  $y$  en cualquier otro valor de  $x$ . Esto se llama interpolación (Figura: 2.1).



**Figura 2.1: Interpolación de ciertos puntos.**

Entonces, ¿Qué tipo de función  $f(x)$  debe elegir uno? Un polinomio es una elección común de una función de interpolación porque son fáciles de (A) evaluar, (B) diferenciar, e (C) integrar en relación con otras opciones como una serie trigonométrica y exponencial.

La interpolación polinómica implica encontrar un polinomio de orden  $n$  que pasa a través de los  $n + 1$  puntos.

Una de las clases de funciones más útiles, y por demás conocidas, en el conjunto de los números reales es la de los polinomios algebraicos, es decir; el conjunto de funciones de la forma

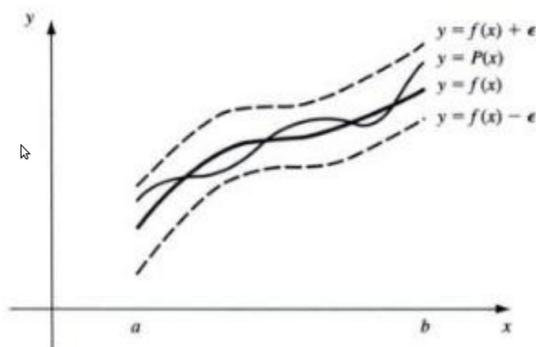
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n^n$$

donde  $n$  es un entero no negativo y  $a_0, \dots, a_n$  son constantes reales. Dichos polinomios son de vital importancia ya que se aproximan de manera uniforme a las funciones continuas. Dada una función cualquiera, definida y continua en un intervalo cerrado, existe un polinomio que está muy cercano a la función tanto como se desee.

**Teorema 4.** (Teorema de aproximación de Weierstrass) [17]

Suponga que  $f$  está definida y es continua en  $[a, b]$ . Para cada  $\epsilon > 0$ , existe un polinomio  $p(x)$ , con la propiedad de que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \text{para toda } x \text{ en } [a, b].$$



**Figura 2.2:** Aproximación  $|f(x) - p(x)| < \epsilon$

Otra razón (quizás la más importante) por la cual se considera a la clase de polinomios en la aproximación de funciones, es que la derivada y la integral indefinida de un polinomio son fáciles de determinar y también sus polinomios. Por estas razones, con frecuencia se usan los polinomios para aproximar a las funciones continuas.

Los polinomios de Taylor son una de las bases fundamentales del análisis numérico. Los polinomios de Taylor coinciden en lo posible con determinada función en un punto específico, pero concentran su actitud únicamente cerca de él. Sin embargo, una buena interpolación polinómica debe ofrecer una aproximación “relativamente” exacta sobre todo un intervalo, y los polinomios de Taylor no lo hacen de esa forma. Este tipo de dificultad es muy común, ya que los polinomios de Taylor tienen la propiedad de que toda la información que se usa en la aproximación se concentra solamente en un punto.

## 2.2. Interpolación de Lagrange

Supongamos que  $x_0, x_1, \dots, x_n = \{x_i\}_{i=0}^n$  son  $n+1$  puntos distintos del eje real y que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida sobre  $I = [a, b]$  con  $\{x_i\}_{i=0}^n \subseteq [a, b]$ . Tenemos entonces :

**Teorema 5.** Existe un único polinomio  $P(x)$  de grado no mayor que  $n$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

*Unicidad.* Sea  $Q(x)$  otro polinomio de grado menor o igual que  $n$  que interpola a  $f$  en  $\{x_i\}_{i=0}^n$ . Entonces:

$$h(x) = P(x) - Q(x)$$

es un polinomio de grado menor o igual que  $n$  que cumple

$$h(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

o sea,  $h(x)$  tiene al menos  $n + 1$  ceros distintos  $\implies h(x) = 0$  (idénticamente nulo).  $\implies P(x) = Q(x), \quad \forall x$ .

*Existencia.* Dicho polinomio debe de cumplir que

$$f(x_k) = y_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

En primer lugar construiremos un polinomio de grado  $n$  que sea nulo en todos los puntos  $x_i$  salvo en uno  $x_k$  en el cual valga 1. Tiene que ser de la forma:

$$L_k(x) = a \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Para satisfacer la condición de que  $L_k(x_i) = 0$  se requiere que el numerador de  $L_k(x)$  contenga el término  $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$  y para satisfacer  $L_k(x_k) = 1$ , el denominador de  $L_k(x)$  debe de coincidir con este término cuando se evalúe en  $x = x_k$ . Entonces, como su valor para  $x = x_k$  debe ser 1 tenemos:

$$a = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)}$$

con lo que queda

$$\begin{aligned} L_k &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Verificándose entonces que

$$L_k(x_i) = \delta_{k,i} \quad (\text{Delta de Kronecker}) \quad = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \\ 0, & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad (2.2)$$

y esto para  $i = 0, 1, \dots, n$ , dentro de cada  $k = 0, 1, \dots, n$ . Por tanto, si se desea un polinomio de grado  $n$  que tome respectivamente los valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  basta tomar:

$$\begin{aligned}
p(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^n y_k L_k \\
&= \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \\
&= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \\
&\quad + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} + \\
&\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n)} + \cdots + \\
&\quad + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

que se denomina **fórmula de Lagrange** del polinomio de interpolación.

## 2.3. Diferencias divididas

Supongamos que  $p_k(x)$  es un polinomio que se ajusta a una serie de datos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  que concuerdan con una función  $f$ .

Sea  $p_k(x)$  el polinomio de interpolación en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  (grado máximo =  $k$ ). Considerando  $p_k(x)$ ,  $p_{k-1}(x)$  y su diferencia:

$$q_k(x) = p_k(x) - p_{k-1}(x)$$

vemos que para los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  tenemos que:

$$p_{k-1}(x_i) = y_i = p_k(x_i) \quad 0 \leq i \leq k-1$$

y también para el siguiente punto  $x_k$  tenemos que  $p_k(x_k) = y_k$ , sin conocerse el valor a priori que pueda tener  $p_{k-1}(x_k)$ . Por tanto, el polinomio  $q_k(x)$  verifica :

$$q_k(x_i) = p_k(x_i) - p_{k-1}(x_i) = y_i - y_i = 0, \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

Ahora bien,  $q_k(x)$  es un polinomio de grado máximo  $k$  ya que es la resta de dos polinomios,  $p_k(x)$  de grado  $k$  y  $p_{k-1}(x)$  de grado  $k-1$  y según se acaba de ver se anula en los  $k$  puntos anteriores de tal forma que se puede expresar de la siguiente forma:

$$q_k(x) = a_k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) = a_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i). \quad (2.3)$$

Por otra parte, en el punto  $x_k$  se cumple:

$$q_k(x_k) = p_k(x_k) - p_{k-1}(x_k) = a_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})$$

y despejando entonces  $a_k$  de esta última identidad tenemos [18]

$$a_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})}$$

con lo cual podemos poner:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x)$$

donde lo que parece complicado es calcular el  $a_k$ , que es el coeficiente de  $x^k$  en el polinomio  $p_k(x)$  pero para esto se pueden utilizar las diferencias divididas.

Las diferencias divididas de  $f$  respecto a  $x_0, x_1, \dots, x_k$  se usan para expresar  $p_k(x)$  de la forma

$$p_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_k)$$

para las constantes apropiadas  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Es decir; para determinar la primera constante  $a_0$  escribimos  $p_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$  y al evaluar  $p_k(x_0)$  únicamente queda la constante  $a_0$  y podemos afirmar que  $a_0 = p_k(x_0) = f(x_0)$ .

De forma similar, al evaluar  $p(x)$  en  $x_1$ , los únicos términos diferentes de cero son los términos constante y lineal. Así:

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = p_k(x_1) = f(x_1).$$

Despejando  $a_1$  tenemos:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Entonces denotamos las diferencias divididas como  $f[x_i] = f(x_i)$ , esta ecuación es la llamada diferencia dividida cero.

La primera diferencia dividida de  $f$  respecto a  $x_i$  y  $x_{i+1}$  se denota  $f[x_i, x_{i+1}]$  y se define

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.4)$$

La segunda diferencia dividida  $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$  se define como:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad (2.5)$$

Y así la  $k$ -ésima diferencia dividida está dada por

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (2.6)$$

Ahora, tras evaluar la primera constante  $a_i$ , podemos evaluar la constante  $a_{i+1}$ , así sucesivamente hasta la constante  $a_k$  que está definida como:

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

**Definición 21.** Dada la función  $f$  de la cual se conoce su valor en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , se llama diferencia dividida de  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , al valor  $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  y se calcula recursivamente como sigue:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) = y_i \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \\ &\vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

**Lema.**

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (2.8)$$

*Demostración.* Sea  $p_j(x)$  el polinomio de grado  $\leq j$  que coincide con  $f(x)$  en los puntos  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}$  y sea  $q_{k-1}(x)$  el polinomio de grado  $\leq k-1$  que coincide con  $f(x)$  en los puntos  $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$ . Entonces:

$$p(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} q_{k-1}(x) + \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_i} p_{k-1}(x)$$

es un polinomio de grado  $\leq k$  que verifica:

$$p(x_j) = f(x_j), \quad \text{para } j = i, i+1, \dots, i+k.$$

ya que:

$$\text{Para } i : \quad p(x_i) = \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_i} p_{k-1}(x) = y_i = f(x_i)$$

$$\text{Para } i+k : \quad p(x_{i+k}) = \frac{x_{i+k} - x}{x_{i+k} - x_i} q_{k-1}(x_{i+k}) = y_{i+k} = f(x_{i+k})$$

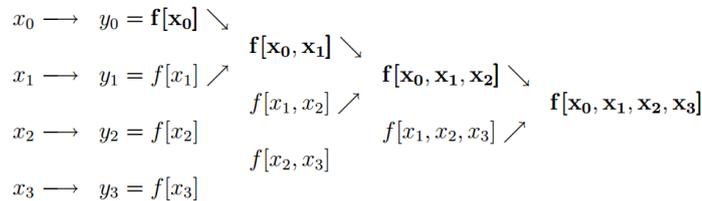
$$\text{y para cada } j = i+1, \dots, i+k-1 : \quad p(x_j) = \frac{x_j - x_i}{x_{i+k} - x_i} q_{k-1}(x_j) + \frac{x_{i+k} - x_j}{x_{i+k} - x_i} p_{k-1}(x_j) =$$

$$= \left[ \frac{x_j - x_i}{x_{i+k} - x_i} + \frac{x_{i+k} - x_j}{x_{i+k} - x_i} \right] y_i = \frac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i} = y_i$$

Por tanto, por la unicidad del polinomio de interpolación, tendremos que  $p(x) = p_k(x)$  y entonces

$$\begin{aligned}
 f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \text{coeficiente término principal de } p_k(x) = \\
 &= \frac{\text{coef. término principal de } q_{k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} - \frac{\text{coef. término principal de } p_{k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} \\
 &= f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}
 \end{aligned}$$

Enseguida mostramos una pequeña tabla que muestra la forma de obtener las diferencias divididas.



**Figura 2.3:** Primeras diferencia divididas.

Ahora, tras evaluar la primera constante  $a_i$ , podemos evaluar la constante  $a_{i+1}$ , así sucesivamente hasta la constante  $a_k$  que está definida como:

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{2.9}$$

Por lo tanto podemos escribir el polinomio interpolador de  $f$  como:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \tag{2.10}$$

Ahora procedemos al cálculo del polinomio de interpolación en los puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= a_0 = f[x_0] = f(x_0) = y_0 \\
p_1(x) &= p_0(x) + a_1(x - x_0) = f[x_0] + a_1(x - x_0) \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&= f[x_0] + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\vdots \\
p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\
p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
&\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

O también de forma más concisa:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \quad (2.11)$$

Que se denomina **fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas**.

De la misma forma podemos escribir el polinomio interpolador de  $f$  como:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \quad (2.12)$$

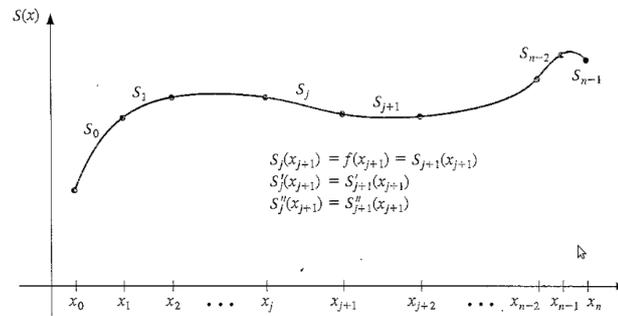
## 2.4. Interpolación con Splines cúbicos

La interpolación polinomial tiene el inconveniente de que el polinomio interpolador puede oscilar fuertemente entre los puntos interpolados. Para muchas aplicaciones prácticas interesa un algoritmo que proporcione una función interpoladora que se comporte suavemente. El modelo más sencillo es una interpolación lineal a trozos, constituida por rectas que unen los puntos interpolados. Sin embargo, este tipo de aproximación tiene una derivada discontinua en los puntos de interpolación. Para muchas aplicaciones prácticas, en las que se incluyen la resolución de ecuaciones diferenciales en las que intervienen funciones medidas experimentalmente, interesa una función aproximadora que tenga derivadas continuas hasta un orden dado, aparte de ser continua.

El método de splines se basa en encontrar funciones que cumplan estas características.

**Definición 22.** [17] Dada una función  $f$  definida en  $[a, b]$  y un conjunto de puntos (nodos)  $a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  un interpolante de **spline cúbico**  $s$  para  $f$  es una función que cumple con las condiciones siguientes (Figura: 2.4):

- a.  $s(x)$  es un polinomio cúbico, denotado  $s_j(x)$ , en el subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$
- b.  $s(x_j) = f(x_j)$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$
- c.  $s(x_{j+1}) = s_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$
- d.  $s'(x_{j+1}) = s'_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$
- e.  $s''(x_{j+1}) = s''_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$



**Figura 2.4: Propiedades de un spline cúbico.**

Se define un spline de orden  $m$  en una serie de  $n + 1$  puntos de interpolación  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  como un conjunto de  $n$  funciones  $s_k(x)$ .

Supongamos que tenemos los  $n + 1$  puntos:  $P_k(x_k, y_k)$ , donde  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  en los cuales se quiere interpolar la función  $f$ . En esta sección trataremos la interpolación polinómica a trozos. La idea es encontrar polinomios cúbicos  $q_k(x)$  que interpolen la función  $f$  en el subintervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . (Frecuentemente polinomios de orden  $m$ ) definidos en el intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , que satisfacen

$$\begin{aligned}
 s_k(x_k) &= s_{k+1}(x_k) \\
 s'_k(x_k) &= s'_{k+1}(x_k) \\
 s''_k(x_k) &= s''_{k+1}(x_k) \\
 &\vdots \\
 s_k^{(n-1)}(x_k) &= s_{k+1}^{(n-1)}(x_k)
 \end{aligned}$$

Los splines más utilizados son los cúbicos, debido a que son los más sencillos con segunda derivada continua, y por lo tanto son adecuados para aproximar

funciones que intervienen en ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si escribimos

$$\begin{aligned} s_k &= a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \\ s'_k &= b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2 \\ s''_k &= 2c_k + 6d_k(x - x_k) \end{aligned}$$

**Definición 23.** La función  $s(x)$  se llama cúbica a trozos en  $[x_0, x_n]$  si existen polinomios cúbicos  $q_0(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$  tales que :

$$s(x) = q_k(x) \text{ en } [x_k, x_{k+1}], \text{ para } k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

dicha condición es llamada de interpolación.

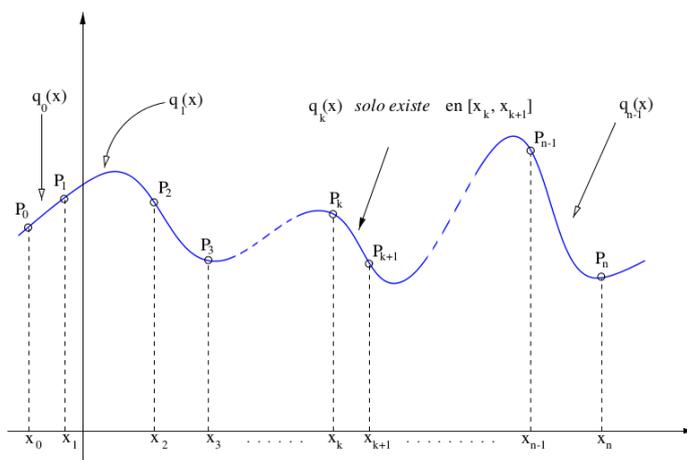
Para que  $s(x)$  interpole en los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  los  $q_k(x)$  han de verificar:

$$\begin{cases} q_k(x_k) = y_k \\ q_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \end{cases} \quad (2.13)$$

lo cual supone  $2n$  condiciones. Llamaremos a  $s(x)$  spline cúbico, o simplemente spline [19] , si los polinomios  $q_k(x)$  tienen la misma pendiente y la misma concavidad en los nodos que las unen, o sea :

$$\begin{cases} q'_{k-1}(x_k) = q'_k(x_k) \\ q''_{k-1}(x_k) = q''_k(x_k). \end{cases} \quad (2.14)$$

lo cual supone  $2(n - 1)$  condiciones a cumplir. Al tener que verificar las condiciones (2.13) y (2.14) se asegura que  $s(x)$  tiene su primera y segunda derivadas continuas en  $[x_0, x_n]$ . En este caso se dice que  $s(x)$  es un spline interpolador para  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .



**Figura 2.5:** Interpolación polinómica a trozos.

Si  $s(x)$  es cúbica a trozos en el intervalo  $[x_0, x_n]$ , su derivada segunda  $s''(x)$  es lineal en el mismo intervalo e interpola en los puntos  $(x_k, s''(x_k))$  y

$(x_{k+1}, s''(x_{k+1}))$  en  $[x_k, x_{k+1}]$ . Por tanto,  $q_k(x)$  es un polinomio de grado uno que interpola en los puntos  $(x_k, s''(x_k))$  y  $(x_{k+1}, s''(x_{k+1}))$ :

$$q_k''(x) = s''(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + s''(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Denotando como:

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

y

$$\sigma_k = s''(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

tenemos

$$q_k''(x) = \frac{\sigma_k}{h_k} (x_{k+1} - x) + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} (x - x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.15)$$

Donde  $h_k$  y  $\sigma_k$  son constantes (todavía falta determinar  $\sigma_k$ ).

Integrando dos veces

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k} \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} \frac{(x - x_k)^3}{6} + C_k + D_k x \quad (2.16)$$

donde el término lineal lo podemos escribir como:

$$C_k + D_k x = A_k (x - x_k) + B_k (x_{k+1} - x)$$

siendo  $A_k$  y  $B_k$  constantes arbitrarias, quedando entonces:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{h_k} \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} \frac{(x - x_k)^3}{6} + A_k (x - x_k) + B_k (x_{k+1} - x) \quad (2.17)$$

Aplicando a (2.17) las condiciones (2.13):

$$y_k = \frac{\sigma_k}{h_k} \frac{h_k^3}{6} + \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} \cdot 0 + A_k \cdot 0 + B_k h_k = \frac{\sigma_k}{6} h_k^2 + B_k h_k \quad (2.18)$$

$$y_{k+1} = \frac{\sigma_{k+1}}{h_k} \frac{h_k^3}{6} + A_k h_k = \frac{\sigma_{k+1}}{6} h_k^2 + A_k h_k \quad (2.19)$$

y despejando de aquí  $A_k$  y  $B_k$  y sustituyendo en (2.17) resulta

$$\begin{aligned} q_k(x) &= \frac{\sigma_k}{6} \left[ \frac{(x_{k+1} - x)^3}{h_k} - h_k (x_{k+1} - x) \right] \\ &+ \frac{\sigma_{k+1}}{6} \left[ \frac{(x - x_k)^3}{h_k} - h_k (x - x_k) \right] \\ &+ y_k \left[ \frac{x_{k+1} - x}{h_k} \right] + y_{k+1} \left[ \frac{x - x_k}{h_k} \right], \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

que es la ecuación del **Spline**  $q_k(x)$ .

Nos falta aún conocer los valores  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$  ( $n + 1$  incógnitas) para lo cual usamos (2.14); derivando en (2.20) tenemos:

$$q'_k(x) = \frac{\sigma_k}{6} \left[ \frac{-3(x_{k+1} - x)^2}{h_k} + h_k \right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \left[ \frac{3(x_k - x)^2}{h_k} - h_k \right] + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$$

por tanto

$$q'_k(x) = \frac{\sigma_k}{6}(-2h_k) + \frac{\sigma_{k+1}}{6}(-h_k) + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \quad (2.21)$$

$$q'_{k+1}(x) = \frac{\sigma_k}{6}(h_k) + \frac{\sigma_{k+1}}{6}(2h_k) + \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \quad (2.22)$$

Reemplazando  $k$  por  $k - 1$  en (2.22) para obtener  $q_{k-1}(x_k)$  e igualando a (2.21) nos da:

$$h_{k-1}\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\sigma_k + h_k\sigma_{k+1} = 6 \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \right) \quad (2.23)$$

o también

$$h_{k-1}\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\sigma_k + h_k\sigma_{k+1} = 6 \left( \frac{\Delta y_k}{h_k} - \frac{\Delta y_{k-1}}{h_{k-1}} \right) \quad (2.24)$$

o incluso

$$h_{k-1}\sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)\sigma_k + h_k\sigma_{k+1} = 6(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) \quad (2.25)$$

Para  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Como el índice  $k$  varía de 1 a  $n - 1$ , se producen  $n - 1$  ecuaciones lineales con  $n + 1$  incógnitas  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ , lo cual produce un sistema subdeterminado que tiene infinitas soluciones. Existen varias estrategias para eliminar  $\sigma_0$  de la primera ecuación y  $\sigma_n$  de la  $(n - 1)$ -ésima produciendo un sistema tridiagonal de orden  $(n - 1)$  en las variables  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ .

La alternativa más fácil es especificar el valor de  $s(x)$  en los puntos extremos:  $\sigma_0 = s(x_0)$  y  $\sigma_n = s(x_n)$ . Si se pone  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_n = 0$  se denomina *spline cúbico natural*.

En forma matricial, el sistema tridiagonal que resulta es:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= 6 \begin{bmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-1}, x_{n-2}] \end{bmatrix}$$

que es un sistema de  $n - 1$  ecuaciones con  $n - 1$  incógnitas. Este sistema se puede resolver fácilmente por eliminación de Gauss. Cada paso de eliminación se aplica solamente a la fila inmediatamente inferior, ya que los elementos inferiores de la columna son nulos.

O también puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \frac{\Delta y_1}{h_1} - \frac{\Delta y_0}{h_0} \\ \frac{\Delta y_2}{h_2} - \frac{\Delta y_1}{h_1} \\ \frac{\Delta y_3}{h_3} - \frac{\Delta y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{\Delta y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

## 2.5. Error de polinomio de interpolación

**Teorema 6.** (Error) Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x_i\}_{i=0}^n \subseteq I$ ,  $x_i \neq x_j$ ; para  $i \neq j$  y supongamos que  $f$  es derivable  $n + 1$  veces en  $I$  con derivada continua  $\implies \forall x \in I$ ,  $\exists \xi_x \in$  menor de los intervalos que contiene a los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tal que:

$$E = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

donde  $p(x)$  es el polinomio que interpola a  $f$  en  $\{x_i\}_{i=0}^n$ .

*Demostración.* Si  $x$  es uno de los puntos  $x_k$  no hay nada que probar ya que ambos miembros se anulan para cualquier  $\xi$ .

Si  $x$  es un valor fijo diferente de los  $x_k$ , consideramos la función auxiliar  $F = F(t)$  definida por:

$$F(t) = f(t) - p(t) - cL(t), \quad \text{donde } c = \frac{f(x) - p(x)}{L(x)}. \quad (2.26)$$

y donde estamos llamando

$$L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (2.27)$$

Tenemos  $F(x_k) = f(x_k) - p(x_k) - cL(x_k) = y_k - y_k - 0 = 0$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  y también  $F(x) = f(x) - p(x) - cL(x) = 0$ , por definición de  $c$ .

La función  $F$  tiene entonces al menos  $n + 2$  ceros distintos en el intervalo  $I$ . Por el teorema de Rolle,  $F$  debe tener por lo menos  $n + 1$  ceros en el menor de los intervalos que contiene a  $x$  y los  $x_k$ , la segunda derivada de  $F$  debe tener no menos de  $n$  ceros,  $\dots$ , la  $(n + 1)$ -ésima derivada debe tener por lo menos un cero. Sea  $\xi_x$  tal cero. Derivando  $(n + 1)$  veces la ecuación (2.26) y haciendo  $t = \xi_x$ :

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)! \quad (2.28)$$

ya que la derivada  $(n + 1)$ -ésima de  $p(x)$  es cero. Por tanto, usando (2.28) tenemos:

$$cL(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) L(x).$$

De esta manera  $cL(x)$  es el error de interpolación que se comete al tratar de ajustar ciertos datos mediante un polinomio  $p(x)$ .

### 2.5.1. Error en el cómputo numérico

Las dos formas de solucionar un problema matemático son: analítico y numérico. Las soluciones analíticas están libres de error. Por el otro lado, los métodos numéricos son una división de las matemáticas [20] la cual nos ayuda a resolver los problemas usando máquinas que computen. Sin embargo el cómputo numérico está plagado de errores, errores que son inevitables. Para un mejor tratamiento del error es necesario entender la fuente, la propagación, la magnitud y el grado de crecimiento de dichos errores.

Hoy en día, las computadoras juegan un papel muy importante, ya que problemas largos y complicados se pueden resolver en un tiempo significativamente menor.

## Fuentes de error

En los métodos numéricos ocurren 3 tipos de errores:

- i)* **Error de procedencia:** Este tipo de error se presenta en la declaración del problema mismo, antes de determinar la solución. Los errores de procedencia ocurren cuando se genera el modelo. Este se debe a como se obtienen los datos, por ejemplo; si se obtienen de mediciones físicas de los parámetros del problema.
  
- ii)* **Error de redondeo:** Generalmente los métodos numéricos se trabajan usando una computadora o una calculadora. Para el cómputo numérico todos los números son representados mediante una fracción decimal. Así, números como  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{7}$  no se pueden representar con un número finito de dígitos. Entonces, para obtener el resultado, el número debe ser redondeado en un número finito de dígitos.
  
- iii)* **Errores de truncamiento:** Estos errores ocurren al representar un proceso infinito. Un claro ejemplo es cuando se usa la serie de Taylor para aproximar el valor de una función en un punto específico. No se puede calcular el infinito de términos de la serie, así que se toman sólo unos cuantos y se trabaja con ellos. El error de truncamiento también depende de la computadora.

Por ejemplo: Al resolver un problema, matemático, se usan dos tipos de números: los exactos y los aproximados. Los números exactos dan el valor real de un resultado y un número aproximado da un valor cercano al valor real.

Se sabe que no hay instrumentos de medición absolutamente exactos; cada uno de ellos tiene su propia precisión.

Independientemente, los números como  $1, 2, \sqrt{2}, \pi, e$ , escritos de esta manera son exactos, sin embargo una aproximación del número  $\pi$  es 3.1416, una mejor aproximación es 3.14159265, pero no se puede escribir el valor exacto de  $\pi$ .

Otro claro ejemplo es el redondeo, en el cual se reemplaza un número con muchos dígitos decimales por otro con menos dígitos decimales.



## Capítulo 3

# Interpolación fractal

---

Hasta hace poco, la interpolación y aproximaciones han sido talladas con la ayuda de funciones suaves. Estas funciones son a veces infinitamente diferenciables.

Por desgracia, en el mundo real nos ocupamos de señales que no poseen tales cualidades de suavidad. Las funciones de interpolación fractal (FIF) son considerados como un importante avance en este campo, porque los interpolantes de la FIF no son necesariamente diferenciables en un conjunto y en ciertos casos ni siquiera son diferenciables punto a punto. Es por eso que parecen ideales para la aproximación de las funciones naturales que presentan algún tipo de autosimilaridad.

Es aquí que se retoma el marco teórico del capítulo 1 para entender los conceptos de los que se habla.

En los ejemplos presentados se hace uso de los programas 1 y 2 (Anexo A.1. y A.2.) para realizar la interpolación fractal de ciertos datos. Algunos de los ejemplos aparecen en el libro “Fractals Everywhere” y fueron reproducidos exitosamente mediante la adaptación del algoritmo que Barnsley propone. Para programar los algoritmos usé MATLAB.

### 3.1. Funciones de Interpolación fractal

Sea un conjunto de puntos  $\{(x_i, y_i) \in I \times R : i = 0, 1, \dots, N\}$ , donde  $I = [x_0, x_N] \subset R$  es un intervalo cerrado y  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Nos interesan las funciones continuas  $f : I \rightarrow R$  que interpolan los datos de acuerdo a

$$f(x_i) = y_i, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

ver Figura:3.1.

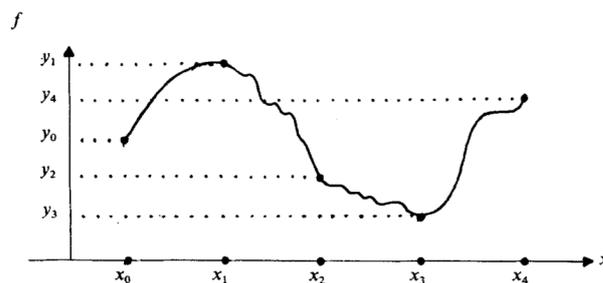


Figura 3.1:  $f(x_i) = y_i$

Así que  $f$  es llamada una **función de interpolación fractal** (FIF Fractal Interpolation Function en inglés).

Los puntos  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  se llaman puntos de interpolación. Decimos que la función  $f$  interpola los datos y que la gráfica de  $f$  pasa a través de los puntos de interpolación.

Nos centramos en la existencia, la construcción y las propiedades de tales funciones  $f : I \rightarrow R$  cuyas gráficas

$$G = \{(x, f(x)) : x \in I\}$$

son atractores de una IFS. Es decir, es un subconjunto compacto  $K$  de  $I \times R$ , y una colección de aplicaciones continuas  $w_n : K \rightarrow K$  tal que el único atractor del IFS  $\{K, w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  es  $G$ . Nos referiremos a las funciones  $f$  como **funciones de interpolación fractal**: a menudo la dimensión Hausdorff-Besicovitch de  $G$  será no entera, entonces  $f$  puede ser Hölder continua pero no diferenciable.

Vamos a trabajar en el espacio métrico compacto  $K = I \times [a, b]$  para  $-\infty < a < b < \infty$ , con la métrica euclidiana

$$d((c_1, d_1), (c_2, d_2)) = \max\{|c_1 - c_2|, |d_1 - d_2|\} \quad \text{para } (c_1, d_1), (c_2, d_2) \in K$$

Establecemos  $I_n = [x_{n-1}, x_n]$  y sea  $L_n : I \rightarrow I_n$  para  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  un homeomorfismo contractivo tal que

$$L_n(x_0) = x_{n-1}, \quad L_n(x_N) = x_n,$$

$$|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \leq l \cdot |c_1 - c_2| \quad \text{siempre que } c_1, c_2 \in I,$$

para algún  $0 \leq l < 1$ .

Ahora se definen funciones  $w_n : K \rightarrow K$  para  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  como

$$w_n(x, y) = (L_n(x), F_n(x, y)).$$

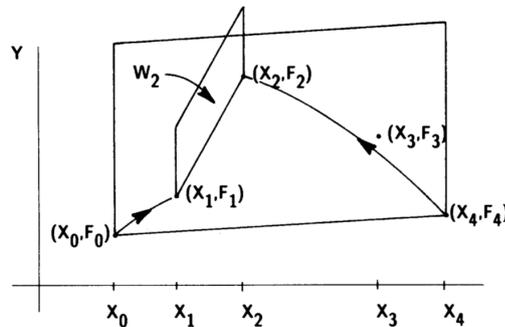
En este caso los IFS son de la forma  $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  donde los mapeos son transformaciones afines de una estructura especial

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

Las transformaciones están limitadas por los datos de acuerdo a

$$w_n = \begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w_n = \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, N.$$

Esto se resume en la siguiente figura (Figura: 3.2).



**Figura 3.2:** Como una IFS es usada para construir una función de interpolación fractal.

Sea  $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ . La transformación  $w_n$  se especifica por 5 números reales  $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n$  los cuales obedecen a 4 ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_n x_0 + e_n &= x_{n-1} \\ a_n x_N + e_n &= x_n \\ c_n x_0 + d_n F_0 + f_n &= F_{n-1} \\ c_n x_N + d_n F_N + f_n &= F_n \end{aligned}$$

en cada transformación hay un parámetro libre  $d_n$ .  $d_n$  es el factor de escalamiento vertical en la transformación  $w_n$ .

Sea  $d_n$  un número real, resolviendo el sistema de ecuaciones de arriba para  $a_n, c_n, e_n$  y  $f_n$  en términos de los datos y de  $d_n$ .

Tenemos el primer sistema de ecuaciones. Restando la segunda de la primera tenemos

$$a_n(x_0 - x_N) = (x_{n-1} - x_n)$$

despejando  $a_n$  tenemos

$$a_n = \frac{(x_{n-1} - x_n)}{(x_0 - x_N)} = \frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_N - x_0)}$$

sustituyendo en la segunda ecuación;

$$\frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_N - x_0)}x_N + e_n = x_n$$

$$\begin{aligned} e_n &= x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_N - x_0)}x_N \\ &= \frac{(x_N - x_0)x_n - (x_n - x_{n-1})x_N}{x_N - x_0} \\ &= \frac{\cancel{x_N x_n} - x_0 x_n - \cancel{x_n x_N} + x_N x_{n-1}}{x_N - x_0} \\ e_n &= \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \end{aligned}$$

El siguiente sistema de ecuaciones está dado por las tercera y cuarta ecuaciones. Restando la cuarta de la tercera

$$c_n x_N - c_n x_0 + d_n F_N - d_n F_0 = F_n - F_{n-1}$$

$$c_n (x_N - x_0) + d_n (F_n - F_0) = F_n - F_{n-1}$$

$$c_n (x_N - x_0) = (F_n - F_{n-1}) - d_n (F_n - F_0)$$

$$c_n = \frac{(F_n - F_{n-1})}{(x_N - x_0)} - d_n \frac{(F_n - F_0)}{(x_N - x_0)}$$

sustituyendo esta última ecuación en la cuarta ecuación

$$\begin{aligned}
f_n &= F_n - d_n F_N - \left[ \frac{(F_n - F_{n-1})}{(x_N - x_0)} - d_n \frac{(F_n - F_0)}{(x_N - x_0)} \right] x_N \\
&= F_n - d_n F_N - \frac{(F_n - F_{n-1})}{(x_N - x_0)} x_N - d_n \frac{(F_n - F_0)}{(x_N - x_0)} x_N \\
&= F_n - \frac{(F_n - F_{n-1})}{(x_N - x_0)} x_N - d_n \left[ \frac{(F_n - F_0)}{(x_N - x_0)} x_N + F_N \right] \\
&= \frac{\cancel{F_n x_N} - F_n x_0 - \cancel{F_n x_N} + F_{n-1} x_N}{x_N - x_0} - d_n \frac{\cancel{F_n x_N} - F_0 x_N - \cancel{F_n x_N} + F_N x_0}{x_N - x_0} \\
&= \frac{F_{n-1} x_N - F_n x_0}{x_N - x_0} - d_n \frac{F_N x_0 - F_0 x_N}{x_N - x_0}
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos las 4 siguientes ecuaciones.

$$a_n = \frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_N - x_0)} \quad (3.1)$$

$$e_n = \frac{(x_N x_{n-1} - x_0 x_n)}{(x_N - x_0)} \quad (3.2)$$

$$c_n = \frac{(F_n - F_{n-1})}{(x_N - x_0)} - d_n \frac{(F_n - F_0)}{(x_N - x_0)} \quad (3.3)$$

$$f_n = \frac{(x_N F_{n-1} - x_0 F_n)}{(x_N - x_0)} - d_n \frac{(x_N F_0 - x_0 F_N)}{(x_N - x_0)} \quad (3.4)$$

**Teorema 7.** Sea  $N$  un número entero positivo mayor que 1. Sea  $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  denotan los IFS definido anteriormente, asociados con el conjunto de datos  $\{(x_n, F_n) : n = 1, 2, \dots, N\}$ . En particular, hay un único conjunto compacto no vacío  $G \subset \mathbb{R}^2$  tal que

$$G = \bigcup_{n=1}^N w_n(G).$$

*Demostración:* Se define una métrica  $d$  sobre  $\mathbb{R}^2$  por

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \theta |y_1 - y_2|$$

donde  $\theta$  es un número real positivo. Sea  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Sean los números  $a_n, c_n, e_n, f_n$  entonces tenemos

$$\begin{aligned}
d(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) &= d((a_n x_1 + e_n, c_n x_1 + d_n y_1 + f_n), \\
&\quad (a_n x_2 + e_n, c_n x_2 + d_n y_2 + f_n)) \\
&= a_n |x_1 - x_2| + \theta |c_n (x_1 - x_2) + d_n (y_1 - y_2)| \\
&\leq (|a_n| + \theta |c_n|) |x_1 - x_2| + \theta |d_n| |y_1 - y_2|
\end{aligned}$$

Nótese que  $|a_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_N - x_0|} < 1$  porque  $N \geq 2$ . Si  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  entonces elegimos  $\theta = 1$ . De otra manera elegimos

$$\theta = \frac{\min\{1 - |a_n| : n = 1, 2, \dots, N\}}{\{2|c_n| : n = 1, 2, \dots, N\}}.$$

Entonces se sigue que

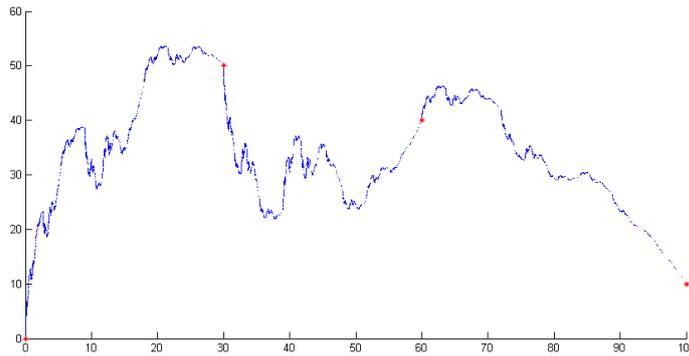
$$\begin{aligned} d(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) &\leq (|a_n| + \theta|c_n|)|x_1 - x_2| + \theta|d_n||y_1 - y_2| \\ &\leq a|x_1 - x_2| + \theta\delta|y_1 - y_2| \\ &\leq \max\{a, \delta\}d((x_1 - y_1), (x_2 - y_2)), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \left( \frac{1}{2} + \frac{\max\{|a_n| : n = 1, 2, \dots, N\}}{2} \right) < 1 \\ \delta &= \max\{|d_n| : n = 1, 2, \dots, N\} < 1. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6.** Consideremos los puntos  $(0, 0)$ ,  $(30, 50)$ ,  $(60, 40)$ ,  $(100, 100)$  y los factores de escalamiento vertical  $0.5$ ,  $-0.5$ , y  $0.23$ . El resultado de correr el programa 1 es la gráfica de la Figura 3.3<sup>1</sup>. Dicha gráfica corresponde a la IFS que pasa a través de los puntos<sup>2</sup> y es el único atractor admitido para los datos para los factores de escalamiento vertical mencionados (siguiente teorema).



**Figura 3.3:** Gráfica de interpolación fractal para los puntos  $(0,0)$ ,  $(30,50)$ ,  $(60,40)$ ,  $(100,100)$

**Teorema 8. (Único atractor)** Sea  $N$  un número entero positivo mayor que 1. Sea  $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  denotan los IFS definido anteriormente, asociados

<sup>1</sup>Ejemplo que muestra Barnsley para mostrar la funcionalidad de su algoritmo. Este ejemplo fue reproducido exitosamente usando el programa del Anexo A.1.

<sup>2</sup>Gráfica obtenida con el programa 1. Anexo .1.1

con el conjunto de datos  $\{(x_n, F_n) : n = 1, 2, \dots, N\}$ . Sea el factor de escala vertical  $d_n$  que obedece  $0 \leq d_n < 1$  para  $n = 1, 2, \dots, N$ , de modo que la IFS es hiperbólica. Sea  $G$  que denota el atractor de la IFS. Entonces  $G$  es la gráfica de una función continua  $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  que interpola los datos  $\{(x_i, F_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ . Esto es,

$$G = \{(x, f(x)) : x \in [x_0, x_N]\},$$

donde

$$f(x_i) = F_i \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N.$$

*Demostración:* Véase [2]

**Definición 24.** La función  $f(x)$ , cuya gráfica es el atractor de un IFS se llama una función de interpolación fractal correspondiente a los datos  $\{(x_i, F_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ .

Una consecuencia del hecho de que la IFS  $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  asociada a un conjunto de datos  $\{(x_n, F_n) : n = 1, 2, \dots, N\}$  es hiperbólica es que cualquier conjunto  $A_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  conduce a una secuencia de Cauchy de conjuntos  $\{A_n\}$  que converge a  $G$  en la métrica de Hausdorff. En la forma usual definimos  $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  por  $W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$ ,  $\forall B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ .

Entonces  $\{A_n = W^n(A_0)\}$  es una sucesión de Cauchy converge a  $G$  en la medida de Hausdorff. Esto se muestra en la Figura 3.4. (Figura tomada de [2]).

### 3.2. Interpolantes con FIF's Polinomiales (con $C^n$ FIF's)

[21] En la práctica, es menos probable que se quiera reconocer una  $C^n$  FIF para la construcción de una interpolación través de determinados puntos  $(x_j, y_j)$ . Las más simples  $C^n$  FIF's se construye a partir de polinomios de grado  $n + 1$ . Con todos los  $\alpha_j$  puestos como 0, el resultado es un spline clásico, pero el caso general ofrece algunos nuevos giros algebraicos.

**Teorema 9.** [21] Dados un entero positivo  $n$ , puntos de interpolación  $(x_j, y_j)$  con  $j = 1, 2, \dots, N$ , factores de contracción horizontal  $a_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_N - x_0}$  y factores de contracción vertical  $\alpha_j$  con  $|\alpha_j| < a_j^n$ . Suponga que  $f$  es una  $C^n$  FIF asociada con estos parámetros donde las  $q_j$ 's son polinomios de grado a lo más  $n + 1$ .

Sea  $\mathbf{r}_j$  el vector  $n$ -dimensional dado por  $(\mathbf{r}_j)_k = f^{(k)}(x_j)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Sea  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ . Hay  $n \times n$  matrices  $C_N$  y  $D_N$  y una  $n \times (N + 1)$  matrices  $E_N$  dependiendo solamente de  $a_j$ ,  $\alpha_j$  tal que

$$C_N \mathbf{r}_0 + (D_N - I) \mathbf{r}_N + E_N \mathbf{y} = 0$$



**Figura 3.4:** Los ejemplos de la convergencia de una sucesión de conjuntos  $\{A_n\}$  en la métrica de Hausdorff, a la gráfica de una función de interpolación fractal.

donde  $I$  es la matriz identidad. Cualquiera de las dos  $C_N$  o  $(D_N - I)$  o ambas pueden ser singulares. Ambas son no singulares si, para los  $a_j$  dados, los  $\alpha_j$  son lo suficientemente cercanos a 0.

*Demostración:* Para continuar con la demostración véase [21].

Finalmente (de la demostración) obtenemos las fórmulas recursivas

$$\begin{aligned} C_j &= T_1(C_{j-1} - \beta_j) \\ D_j &= T_j D_{j-1} + \beta_j \quad j = 1, 2, \dots, N \\ E_j &= T_j E_{j-1} + P_j \end{aligned}$$

### 3.3. FIF's lineales

Como un caso particular de los interpolantes con FIF's polinomiales tenemos los FIF's lineales, que suelen ser más fácil de usar.

Definimos una *Función de Interpolación Fractal Lineal* que se obtienen a partir de mapeos afines

$$L_n(x) = x_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) \frac{x - x_0}{(x_N - x_0)} = a_n \cdot x + e_n$$

$$F_n(x, y) = c_n \cdot x + d_n \cdot y + f_n$$

donde las constantes reales  $c_n$  y  $f_n$ , dependiendo del parámetro ajustable  $d_n$ , son elegidos para asegurar

$$F_n(x_0, y_0) = y_{n-1} \quad \text{y} \quad F_n(x_N, y_N) = y_n.$$

Esto es;  $d_n \in (-1, 1)$  es elegido y entonces

$$b_n = \frac{(y_n - y_{n-1} - d_n \cdot (y_N - y_0))}{(x_N - x_0)}$$

$$f_n = y_{n-1} - d_n \cdot y_0 - b_n \cdot x_0 \quad \text{para } n \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Entonces  $w_n$  mapea el paralelogramo  $P$  sobre el paralelogramo  $P_n$  (Figura 3.5).

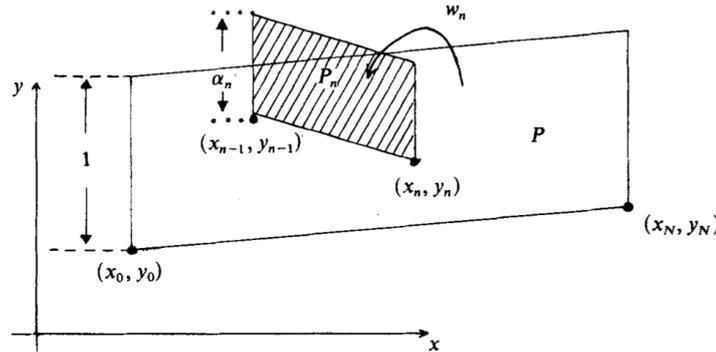


Figura 3.5: Paralelogramo de  $w_n$

Encontrar una IFS hiperbólica de la forma  $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2\}$  donde  $w_1$  y  $w_2$  son transformaciones afines en  $\mathbb{R}^2$  cuyo atractor es la función cuadrática que interpola los datos  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, 4)$ .

Solución:

Se pide encontrar una IFS cuyo atractor sea una parábola que pase por los puntos. La forma de la parábola está definida por  $Ax^2 + Bx + C$ , entonces definimos  $f(x) = x^2$  y las IFS de la forma

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

sustituyendo en los sistemas de ecuaciones

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + e_1 \\ c_1 x + d_1 f(x) + f_1 \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 x + e_2 \\ c_2 x + d_2 f(x) + f_2 \end{pmatrix}$$

así que en para ambos casos tenemos que

$$(a_i x + e_i)^2 = c_i x + d_i x^2 + f_i$$

entonces calculamos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2} & e_1 &= \frac{0-0}{2-0} = 0 \\ a_2 &= \frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2} & e_1 &= \frac{2-0}{2-0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1-0}{2-0} - d_1 \frac{0-0}{2-0} = \frac{1}{2} - 2d_1 & f_1 &= \frac{0-0}{2-0} - d_1 \frac{0-0}{2-0} = 0 \\ c_2 &= \frac{4-1}{2-0} - d_2 \frac{4-0}{2-0} = \frac{3}{2} - 2d_2 & f_2 &= \frac{2-0}{2-0} - d_2 \frac{0-0}{2-0} = 1 \end{aligned}$$

de esto se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} - 2d_1\right)x + d_1x^2 \\ \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 &= (1 - 2d_2)x + d_2x^2 + 1 \end{aligned}$$

al resolver la ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= d_1 \\ \frac{1}{2} - 2d_1 &= 0 \\ d_1 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

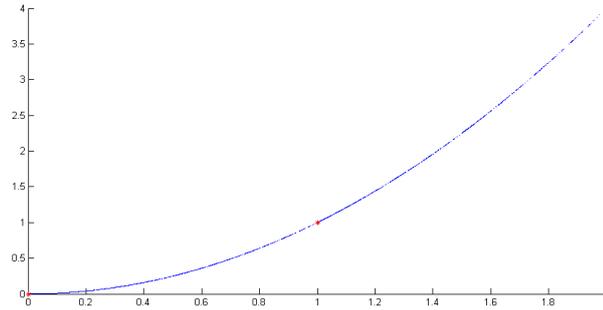
ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 + x + 1 &= \frac{3}{2}x - 2d_2x + d_2x^2 + 1 \\ \frac{1}{4} &= d_2 \\ 1 &= \frac{3}{2} - 2d_2 \\ d_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

también tenemos  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 1$  y finalmente

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La gráfica es la siguiente: (figura 3.6)



**Figura 3.6: Interpolación fractal** de los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(2,4)$  con  $d_1 = d_2 = \frac{1}{4}$  Obtenida con el programa 2 (Anexo A.2.) .

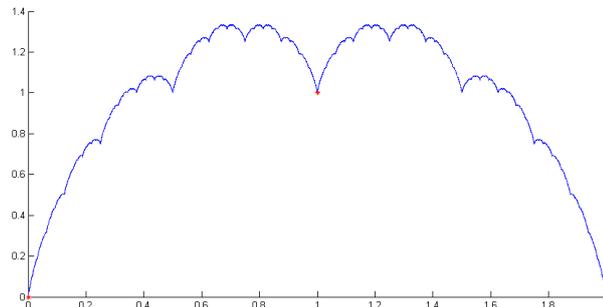
[22] **Ejemplo 7.** Consideremos la función de interpolación lineal para los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(2,0)$  con los factores de escalamiento vertical  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$ , encontramos que

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

corresponde a

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{2}x, & F_1(x,y) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}x + 1, & F_2(x,y) &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{aligned}$$

cuya gráfica es la siguiente <sup>3</sup> (Figura: 3.7 ).



**Figura 3.7: Interpolación fractal** de los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(2,0)$  con  $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$  Obtenida con el programa 2 (Anexo A.2.) .

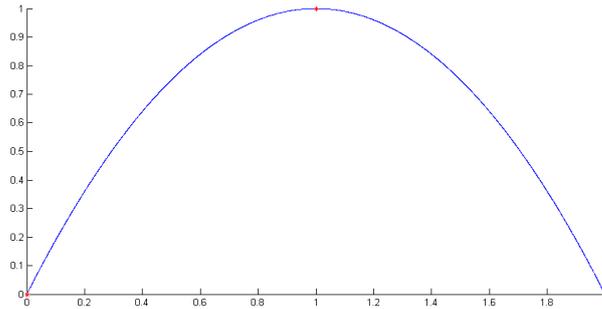
Sin embargo, para los mismos puntos podemos definir otra función de interpolación fractal. Una buena interpolación para los datos es la función

<sup>3</sup>Las gráficas fueron obtenidas con los programas del Anexo A.1.

$f(x) = 2x - x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ . Entonces pedimos que  $G$  sea el atractor de la IFS hiperbólica  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2\}$ , donde

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El atractor  $G = w_1(G) \cup w_2(G)$  es la siguiente gráfica <sup>4</sup> (Figura 3.8):



**Figura 3.8: Atractor**  $G = w_1(G) \cup w_2(G)$

Las FIF correspondientes son:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{2}x, & F_1(x, y) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}x + 1, & F_2(x, y) &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 1 \end{aligned}$$

**Ejemplo 8.** Sea  $f$  la FIF que pasa a través de los puntos  $(0, 0), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{3}{4}, -1), (1, 0)$  con

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{2}x & F_1(x, y) &= \frac{3}{4}y + x \\ L_2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & F_2(x, y) &= \frac{3}{4}y + 1 - 2x \\ L_3(x) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x & F_3(x, y) &= \frac{3}{4}y - 1 + x \end{aligned}$$

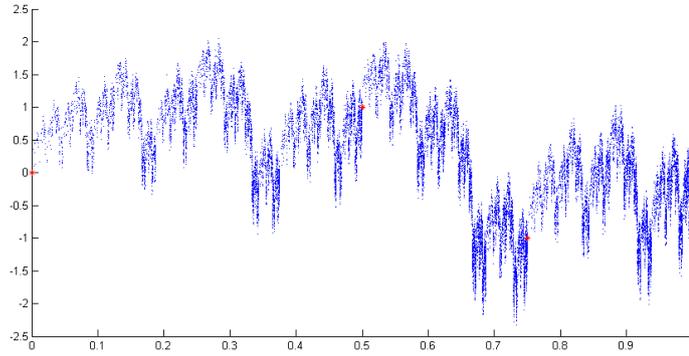
La gráfica de dichas FIF's es la siguiente <sup>5</sup> (Figura 3.9):

### 3.4. Dimensión fractal de una función de interpolación fractal

**Teorema 10.** Sea  $N$  un entero positivo más grande que 1. Sea  $\{(x_n, f_n) \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \dots, N\}$  un conjunto de datos. Sea  $\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$  una IFS

<sup>4</sup>Gráfica obtenida con el programa 2. Anexo A.2.

<sup>5</sup>Gráfica obtenida con el programa 1. Anexo A.1.



**Figura 3.9:** Interpolación fractal de los puntos  $(0, 0), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{3}{4}, -1), (1, 0)$ .

asociada a dichos datos.

El factor de escalamiento vertical  $d_n$  obedece que  $0 \leq d_n < 1$ . Sea  $G$  que denota el atractor de la IFS, de modo que  $G$  es la gráfica de una función de interpolación fractal asociada a los datos. Sí

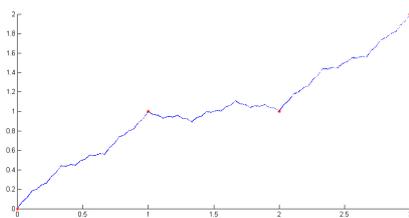
$$\sum_{n=1}^N |d_n| > 1,$$

y no todos los puntos de interpolación se encuentran en una sola línea recta, entonces la dimensión fractal de  $G$  es la única solución real  $D$  de

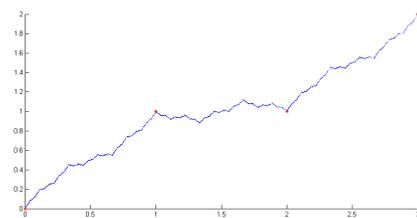
$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1.$$

De lo contrario, la dimensión fractal de  $G$  es uno.

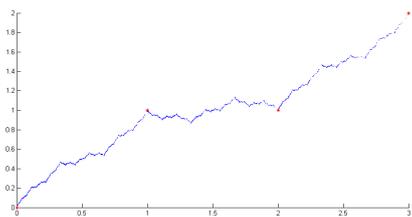
**Ejemplo 9.** Sea el conjunto de datos  $\{(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$ . Vamos a construir la interpolación fractal con diferentes dimensiones  $D$ . con los factores de escalamiento vertical  $d_1 = -d_2 = d_3 = 3^{D-2}$  para  $D = 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6$  y  $1.7$ .  $D$  es la dimensión fractal de la función de interpolación fractal.



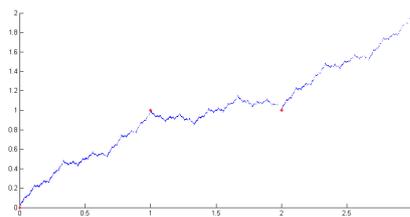
(a)  
 $D = 1, d_1 = 3^{-1} = 0.33$



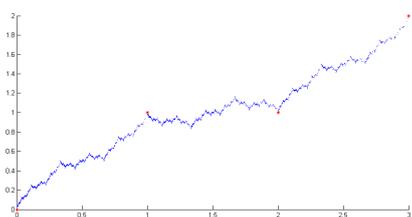
(b)  
 $D = 1.1, d_1 = 3^{-0.9} = 0.37$



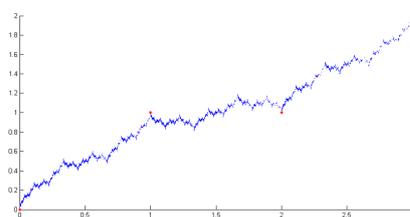
(c)  
 $D = 1.2, d_1 = 3^{-0.8} = 0.41$



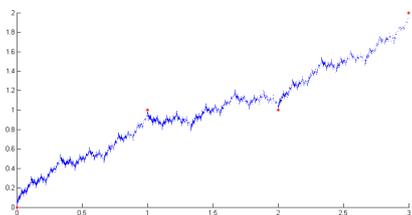
(d)  
 $D = 1.3, d_1 = 3^{-0.7} = 0.46$



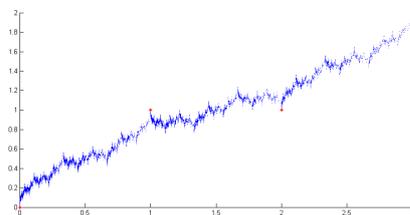
(e)  
 $D = 1.4, d_1 = 3^{-0.6} = 0.51$



(f)  
 $D = 1.5, d_1 = 3^{-0.5} = 0.57$



(g)  
 $D = 1.6, d_1 = 3^{-0.4} = 0.64$



(h)  
 $D = 1.7, d_1 = 3^{-0.3} = 0.72$

**Figura 3.10:** Miembros de la familia de funciones de interpolación fractal correspondientes a las diferentes dimensiones fractales  $D$ . Gráficas obtenidas con el programa 1. Anexo A.1

# Análisis de los métodos propuestos

---

La interpolación polinómica consiste en obligar a que la función interpoladora sea un polinomio. Este tipo de interpolación posee la ventaja de que los polinomios son funciones muy fáciles de tratar y además son sencillas de derivar e integrar. No obstante, la interpolación polinómica no es adecuada para aproximar funciones que son acotadas ya que los polinomios no tienen esta propiedad. El caso más sencillo de interpolación será intentar hallar una función (polinómica) que pase por dos puntos. En este caso, sabemos que por dos puntos diferentes pasa una única recta (polinomio de grado 1). Lo mismo sucede con tres puntos distintos por los que pasa una única parábola (polinomio de grado 2).

### 4.1. Construcciones preliminares

Ahora se aborda el problema de construir un polinomio que coincida en un número específico de puntos. Dados  $n + 1$  puntos distintos  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  y los valores de  $y_i$  para el respectivo  $x_i$ , el polinomio de menor grado  $n$  que coincida con  $y(x_i)$  es el polinomio de interpolación en los puntos  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Así es como llamamos  $p(x)$  a este polinomio <sup>1</sup> de grado  $n$  tal que  $p(x_i) = f(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Notamos que el polinomio  $p$  es único, pero admite diferentes representaciones, diferentes formas de implementación, atendiendo a la base elegida en la construcción. Respecto a esto, se tiene varias consideraciones:

1. El orden de los datos no influye en el polinomio, aunque si posiblemente en su representación.
2. La elección de la base de los polinomios de grado  $n$ , esto es, la elección del método de construcción, no influye (salvo errores de redondeo) en el polinomio, pero si en su representación.
3. Desde el punto de vista numérico es de gran importancia la fórmula elegida para implementar dicho polinomio.

En una primera aproximación se escribe:

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n.$$

En términos de la base  $\{1, x, \dots, x^n\}$ . Con las condiciones de interpolación se obtiene:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n, \quad i = 0, \dots, n$$

Los procedimientos tratados en este trabajo (capítulo 2) son procedimientos diferentes para obtener directamente el polinomio de interpolación.

## 4.2. Caso de aplicación y resultados

Para empezar a analizar los métodos tradicionales de interpolación necesitamos datos para trabajar con ellos y hacer una comparación. Intencionalmente, los datos fueron elegidos de tal forma que al graficarlos en el plano no pudiese intuir un comportamiento. Los datos presentan una dispersión considerable, es por ello que parecen ser útiles para el tratamiento y análisis que se les dará.

Se eligió el caso del análisis de los chirridos de los grillos, los cuales se piensa que están relacionados con la temperatura del ambiente.

Se mide la frecuencia (el número de vibraciones por segundo de un ala) de chirridos (o pulsos de sonido) realizados en un terreno de grillos sometido a diferentes temperaturas. Dado que los grillos son ectotermos (de sangre fría), la tasa de sus procesos fisiológicos y su metabolismo en general se ven influidos por la temperatura. Por lo tanto, hay razón suficiente para creer que la temperatura

---

<sup>1</sup>En general, la interpolación es el proceso matemático de calcular nuevos datos a partir de los disponibles, procurando que compartan la misma "forma".

tiene un efecto realmente profundo en los aspectos de su comportamiento: como la frecuencia del chirrido emitido por ellos.



La siguiente tabla muestra la relación entre chirridos por segundo de un campo de grillos y la temperatura del suelo correspondiente. <sup>2</sup>

Temperatura( $^{\circ}F$ )	69.4	71.6	75.2	76.3	79.6	80.6	83.5	84.3
Chirridos/seg.	15.4	16	15.5	14.4	15	17.1	17	18.4

**Tabla 4.1:** Chirridos de un grillo en diferentes temperaturas

Para comenzar con el análisis se tratan primero las formas polinomiales. Es así que por el método de Lagrange, el polinomio interpolador es de la siguiente forma:

---

<sup>2</sup>Datos tomados de *The songs of insects*, George W. Pierce, 1948, Harvard University Press in Cambridge, Mass .

$$\begin{aligned}
P(x) = & - 7.2 \times 10^{-6} (x - 71.6) (x - 75.2) (x - 76.3) (x - 79.6) (x - 80.6) \\
& (x - 83.5) (x - 84.3) \\
& + 3.9 \times 10^{-5} (x - 69.4) (x - 75.2) (x - 76.3) (x - 79.6) (x - 80.6) \\
& (x - 83.5) (x - 84.3) \\
& - 3.7 \times 10^{-4} (x - 69.4) (x - 71.6) (x - 76.3) (x - 79.6) (x - 80.6) \\
& (x - 83.5) (x - 84.3) \\
& + 4.9 \times 10^{-4} (x - 69.4) (x - 71.6) (x - 75.2) (x - 79.6) (x - 80.6) \\
& (x - 83.5) (x - 84.3) \\
& - 6.9 \times 10^{-4} (x - 69.4) (x - 71.6) (x - 75.2) (x - 76.3) (x - 80.6) \\
& (x - 83.5) (x - 84.3) \\
& + 6.8 \times 10^{-4} (x - 69.4) (x - 71.6) (x - 75.2) (x - 76.3) (x - 79.6) \\
& (x - 83.5) (x - 84.3) \\
& - 1.8 \times 10^{-4} (x - 69.4) (x - 71.6) (x - 75.2) (x - 76.3) (x - 79.6) \\
& (x - 80.6) (x - 84.3) \\
& + 9.6 \times 10^{-5} (x - 69.4) (x - 71.6) (x - 75.2) (x - 76.3) (x - 79.6) \\
& (x - 80.6) (x - 83.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x) = & - 7.5 \times 10^8 + 6.9 \times 10^7 x - 2.7 \times 10^6 x^2 + 5.9 \times 10^4 x^3 - 771.1 x^4 + 6.039 x^5 \\
& - 2.6 \times 10^{-2} x^6 + 4.8 \times 10^{-5} x^7
\end{aligned}$$

Para la representación del polinomio de Lagrange es notable la presencia del truncamiento<sup>3</sup>, pues se hace uso de la notación científica para simplificar el manejo del polinomio interpolador.

Ahora, la gráfica de dicho polinomio es la Figura 4.1.

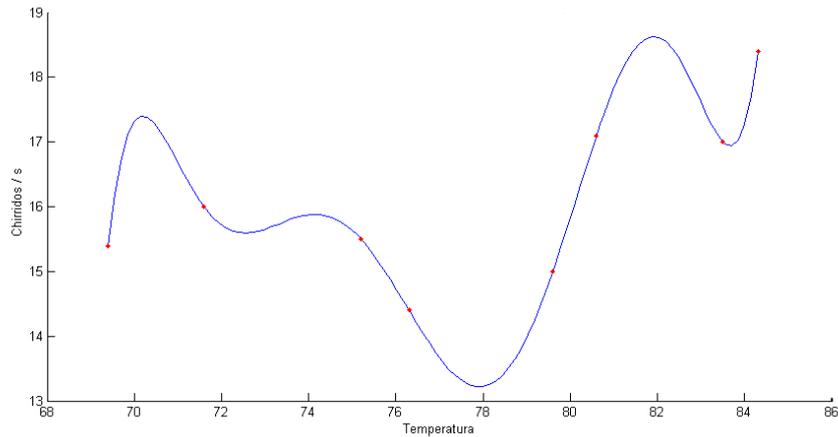
El siguiente método es el de Newton Diferencias Divididas.

La tabla de diferencias divididas es:

0.0000						
0.0007	-0.0000					
0.0072	-0.0015	-0.0009				
0.0446	-0.0206	-0.0026	0.0071			
0.2191	-0.1380	0.0329	0.0565	-0.0163		
0.4823	-0.5473	0.4461	0.2686	-0.1832	-0.0710	
1.7500	-0.0345	2.1000	0.1818	-1.0000	-0.1389	0.2727

**Tabla 4.2:** Tabla de diferencias divididas para el ejemplo.

<sup>3</sup>Factor importante en el manejo de los datos y los resultados obtenidos (pues usando un método numérico es muy difícil obtener exactitud.)



**Figura 4.1:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por Lagrange

El polinomio de interpolación resultante de usar el método de Newton es el siguiente<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 15.4 + 0.27273(x - 69.4) \\
 & -0.070968(x - 69.4)(x - 71.6) \\
 & -0.016268(x - 69.4)(x - 71.6)(x - 75.2) \\
 & +0.0071318(x - 69.4)(x - 71.6)(x - 75.2)(x - 76.3) \\
 & -0.00087096(x - 69.4)(x - 71.6)(x - 75.2)(x - 76.3)(x - 79.6) \\
 & +4.5269(10^{-5})(x - 69.4)(x - 71.6)(x - 75.2)(x - 76.3) \\
 & (x - 79.6)(x - 80.6) \\
 & +4.8884(10^{-5})(x - 69.4)(x - 71.6)(x - 75.2)(x - 76.3) \\
 & (x - 79.6)(x - 80.6)(x - 83.5)
 \end{aligned}$$

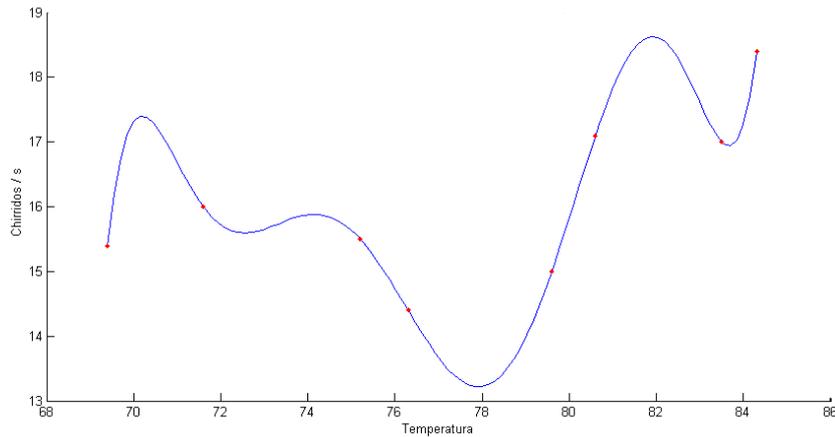
Y simplificando el polinomio tenemos:

$$\begin{aligned}
 P(x) = & 0.000048x^7 - 0.026x^6 + 6.039x^5 - 771.108x^4 + 59025.36x^3 \\
 & -2708717.89x^2 + 69003066.65x - 752748282.3
 \end{aligned}$$

Cuya gráfica es la Figura 4.2.

Se hace notar que se obtuvo el mismo polinomio para los métodos de Newton y Lagrange debido a que la forma de Newton es una alternativa a la forma de Lagrange sin embargo, forma de Lagrange presenta una desventaja esencial (esto se comenta en la siguiente sección). Estos métodos dan lugar al mismo polinomio interpolador porque este es único. La diferencia radica en la forma en la que se obtiene (Véase primer teorema del capítulo 2).

<sup>4</sup>Este es el polinomio que arroja el programa de interpolación de la forma de Newton, Anexo B.2.

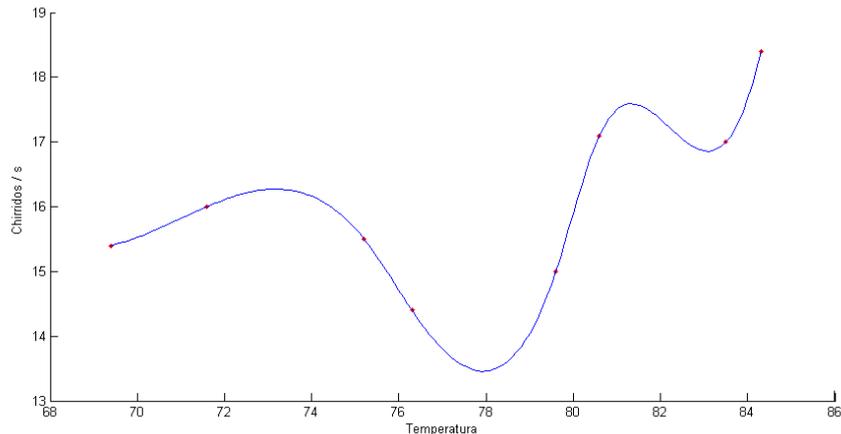


**Figura 4.2:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por Newton

El tercer método es por el método de Splines cúbicos. La particularidad de este método es que se pueden elegir intervalos a conveniencia. Para este caso los intervalos se definen con cada par consecutivo de puntos, es decir; se tienen 8 puntos interpoladores y en consecuencia estos 8 puntos definen 7 intervalos. Dado lo anterior, se obtienen 7 polinomios interpoladores (uno por cada intervalo). Obteniendo la siguiente función interpoladora:

$$P(x) = \begin{cases} 902.4 - 38.91x + 0.56x^2 - 0.0027x^3 & 69.4 \leq x \leq 71.6 \\ 8995.06 - 377.99x + 5.30x^2 - 0.0247x^3 & 71.6 \leq x \leq 75.2 \\ -57409.10 + 2271.11x - 29.92x^2 + 0.1313x^3 & 75.2 \leq x \leq 76.3 \\ -27126.15 + 1080.43x - 14.32x^2 + 0.0632x^3 & 76.3 \leq x \leq 79.6 \\ 368917.59 - 13845.84x + 173.19x^2 - 0.7220x^3 & 79.6 \leq x \leq 80.6 \\ -169288.39 + 6186.63x - 75.34x^2 + 0.3058x^3 & 80.6 \leq x \leq 83.5 \\ 316591.15 - 11270.11x + 133.71x^2 - 0.5287x^3 & 83.5 \leq x \leq 84.3 \end{cases}$$

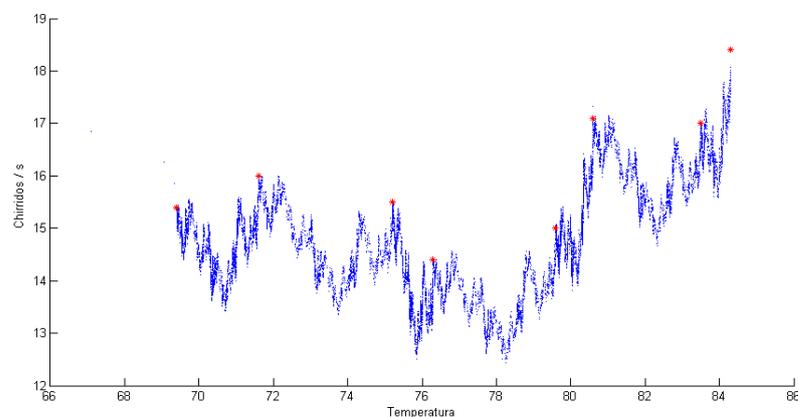
La correspondiente gráfica es la Figura 4.3.



**Figura 4.3:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por Splines cúbicos

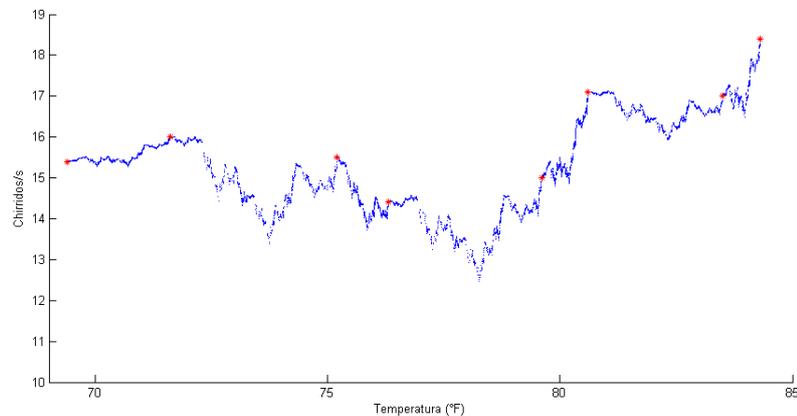
Finalmente, la forma de la interpolación fractal, diferente (en todos los aspectos) a las formas polinomiales es una alternativa para el mismo fin: interpolar y de esta forma inferir acerca del comportamiento de los datos.

Por medio de la interpolación fractal podemos obtener diferentes gráficas ya que los factores de escalamiento son arbitrarios y la forma de la gráfica depende en gran medida de estos factores. La Figura 4.4 es la gráfica de interpolación fractal para estos puntos. Podemos observar que, aunque no es una función continua hay valores suficientes en cada subintervalo definido por cada par de puntos consecutivos como para construir una gráfica. Obsérvese la mayoría de los puntos están por debajo de cada par consecutivo de puntos. Este hecho se debe a que los factores de escalamiento son todos iguales y es así que dichos factores podrían no servirnos para una buena interpolación.



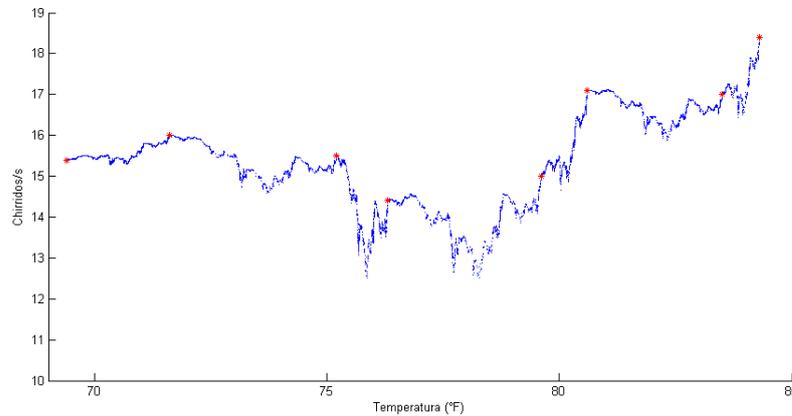
**Figura 4.4:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por medio de interpolación fractal. Los factores de escalamiento correspondientes son:  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = 0.5$

Podemos manipular los factores de escalamiento de manera que la gráfica resultante se parezca a una función continua. Aunque, si se hace tender el número de iteraciones a infinito (en la interpolación fractal) la gráfica resulta ser una función continua. La Figura 4.5 resulta de nuevos factores de escalamiento. Esta es, quizás, una mejor aproximación ya que no hay tantas variaciones entre puntos muy cercanos.



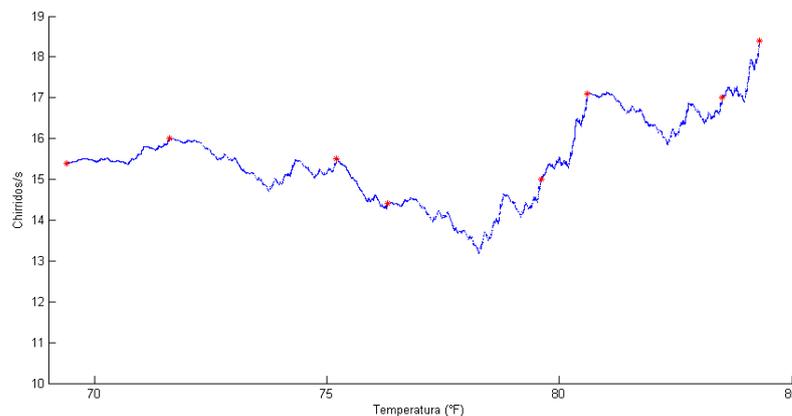
**Figura 4.5:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por medio de interpolación fractal. Los factores de escalamiento correspondientes son:  $d_1 = 0.5$   $d_2 = 0.25$   $d_3 = 0.5$   $d_4 = 0.35$   $d_5 = 0.25$   $d_6 = 0.30$   $d_7 = 0.52$

Sin embargo, para mostrar una de las ventajas de la interpolación fractal, se proponen nuevos factores de escalamiento, de tal manera que la gráfica de parezca lo más posible a las gráficas de los métodos anteriores cuya característica principal, por ser polinomios, es la continuidad y la suavidad. Al variar dichos factores de escalamiento se obtienen muchas gráficas. Un ejemplo, una más es la Figura 4.6, aunque se puede notar que aún presenta variaciones muy grandes en dos subintervalos; el tercero y séptimo.



**Figura 4.6:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por medio de interpolación fractal. Los factores de escalamiento correspondientes son:  $d_1 = 0.1$   $d_2 = 0.25$   $d_3 = 0.5$   $d_4 = 0.35$   $d_5 = 0.25$   $d_6 = 0.30$   $d_7 = 0.25$

Finalmente, al usar nuevos factores de escalamiento podemos obtener una gráfica que se parece más a una función continua (aunque en iteraciones infinitas esta también lo es), es decir; no presenta tantas variaciones como las anteriores. Es por eso que, esta gráfica, será tomada para seguir con la interpolación (Figura 4.7).



**Figura 4.7:** Interpolación con los datos de chirridos de grillos y temperatura por medio de interpolación fractal. Los factores de escalamiento correspondientes son:  $d_1 = 0.1$   $d_2 = 0.25$   $d_3 = 0.09$   $d_4 = 0.35$   $d_5 = 0.25$   $d_6 = 0.30$   $d_7 = 0.25$

Es entonces que se tienen 7 Sistemas de ecuaciones que conforman el IFS, los sistemas son los siguientes: <sup>5</sup>

<sup>5</sup>Resultados obtenidos de correr el programa 1 de Interpolación fractal.

$$\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.1477 & 0 \\ 0.0201 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 59.1530 \\ 12.4627 \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.2416 & 0 \\ -0.0839 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54.8322 \\ 17.9721 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.0738 & 0 \\ -0.0940 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70.0765 \\ 20.4808 \end{pmatrix} \\
w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.2215 & 0 \\ -0.0403 & 0.35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60.9295 \\ 11.0346 \end{pmatrix} \\
w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.0671 & 0 \\ 0.0906 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 74.9423 \\ 4.8621 \end{pmatrix} \\
w_6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.1946 & 0 \\ -0.0671 & 0.30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 67.0926 \\ 17.1377 \end{pmatrix} \\
w_7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.0537 & 0 \\ 0.0436 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 79.7738 \\ 10.1225 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Las funciones de interpolación fractal correspondientes a cada IFS son las siguientes:

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= 0.1477x + 59.1530 & F_1(x, y) &= 0.0201x + 0.1y + 12.4627 \\
L_2(x) &= 0.2416x + 54.8322 & F_2(x, y) &= 0.0168x + 0.25y + 18.6856 \\
L_3(x) &= 0.0738x + 70.0765 & F_3(x, y) &= -0.0919x + 0.09y + 20.4951 \\
L_4(x) &= 0.2215x + 60.9295 & F_4(x, y) &= -0.0302x + 0.35y + 11.106 \\
L_5(x) &= 0.0671x + 74.9423 & F_5(x, y) &= 0.0906x + 0.25y + 4.8621 \\
L_6(x) &= 0.1946x + 67.9423 & F_6(x, y) &= -0.0671x + 0.3y + 17.1377 \\
L_7(x) &= 0.0537x + 79.7738 & F_7(x, y) &= 0.0436x + 0.25y + 10.1225
\end{aligned}$$

Podemos seguir intentando con otros factores de escalamiento, pero obtendríamos gráficas cuyas variaciones serán más notorias debido a que el número de puntos y la distribución de estos si afecta seriamente a la gráfica de la interpolación fractal. Ciertamente, se debe tratar con varios factores de escalamiento, primero con uno y dependiendo de la gráfica que genera se elige el segundo y así sucesivamente. Sin embargo, pueden ser elegidos al azar y seguir probando con otros aleatoriamente.

Es esta, quizás, una de las grandes desventajas de usar la interpolación fractal. Las gráficas son muy manipulables y se pueden adaptar a lo que queremos encontrar. Este hecho es, de igual forma, una gran ventaja si lo que queremos

es que los datos sigan un comportamiento que nosotros queremos.

Desde luego que el lector es libre de tomar a su conveniencia dicha técnica para manipular comportamientos de datos.

### 4.3. Interpolación

Ya que tenemos las funciones que nos describen el comportamiento de los datos en el intervalo de los puntos de interpolación, entonces, corresponde hacer una pregunta. ¿Cuál es la frecuencia de chirridos a una temperatura, por ejemplo, de  $78.5^\circ F$ .

Lo primero que debemos hacer es sustituir el valor de  $78.5^\circ$  en los polinomios interpoladores de Lagrange, Newton, Splines, más adelante explicaré cual es el procedimiento que propongo para la interpolación fractal.

Se decidió tomar este valor a conveniencia, pues, para hacer un buen análisis de los métodos, se eligió un intervalo en el que se presentara una variación relativamente considerable.

Para identificar claramente que método estamos utilizando, a partir de ahora llamaremos al polinomio interpolador de Lagrange como  $L(x)$ , al polinomio interpolador de Newton como  $N(x)$ , al polinomio interpolador de la forma de Splines  $S_i(x)$ .

Ahora bien, para conocer cuál es la frecuencia de chirridos que hacen los grillos a una temperatura de  $78.5^\circ$  sustituimos dicho valor, primero en el polinomio interpolador de Lagrange, de la temperatura en la función

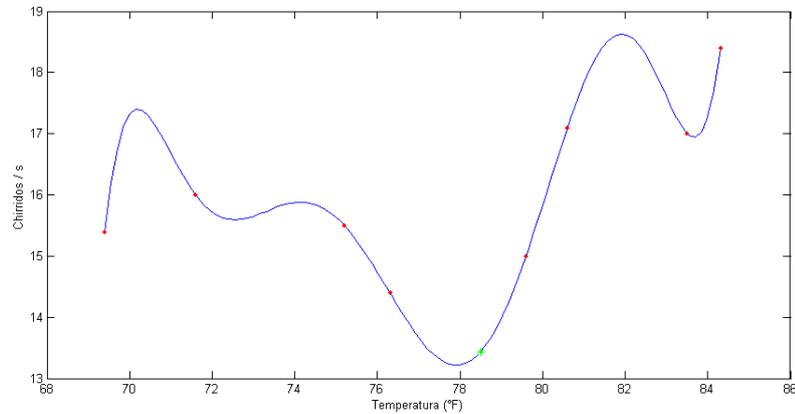
$$L(x) = -7.5 \times 10^8 + 6.9 \times 10^7 x - 2.7 \times 10^6 x^2 + 5.9 \times 10^4 x^3 - 771.1 x^4 \\ + 6.039 x^5 - 2.6 \times 10^{-2} x^6 + 4.8 \times 10^{-5} x^7$$

es decir;  $x = 78.5$ , entonces

$$L(78.5) = -7.5 \times 10^8 + 6.9 \times 10^7 (78.5) - 2.7 \times 10^6 (78.5)^2 \\ + 5.9 \times 10^4 (78.5)^3 - 771.1 (78.5)^4 + 6.039 (78.5)^5 \\ - 2.6 \times 10^{-2} (78.5)^6 + 4.8 \times 10^{-5} (78.5)^7 \\ L(78.5) = 13.4377$$

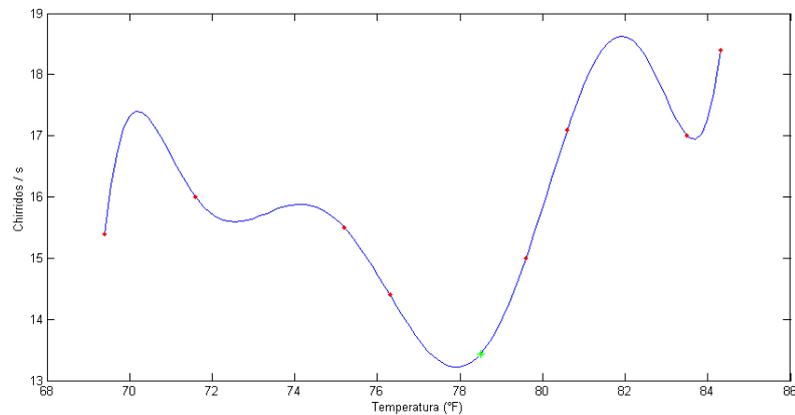
Esto es; para una temperatura de  $78.5^\circ$  se obtiene una frecuencia de chirridos de 13.4377.

La gráfica que muestra el resultado es la Figura 4.8. El punto interpolado está marcado con un \* verde.



**Figura 4.8:** Interpolación de Lagrange para el punto 78. 5

Lo mismo ocurre para la forma de Newton. Ya que el polinomio interpolador  $N(x)$  es el mismo que  $L(x)$ , en consecuencia también la gráfica, saltaremos el paso de la sustitución en el polinomio interpolador. La gráfica es la Figura 4.9.



**Figura 4.9:** Interpolación de Newton para el punto 78. 5

Ahora es turno de la forma de Splines cúbicos. La función asociada a esta forma es:

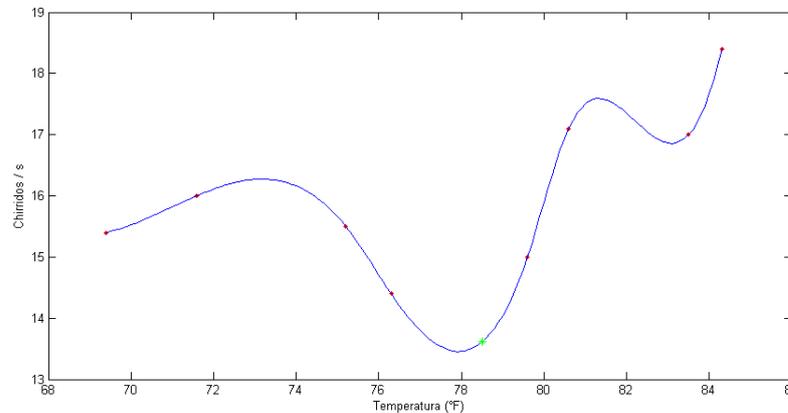
$$P(x) = \begin{cases} 902.4 - 38.91x + 0.56x^2 - 0.0027x^3 & 69.4 \leq x \leq 71.6 \\ 8995.06 - 377.99x + 5.30x^2 - 0.0247x^3 & 71.6 \leq x \leq 75.2 \\ -57409.10 + 2271.11x - 29.92x^2 + 0.1313x^3 & 75.2 \leq x \leq 76.3 \\ -27126.15 + 1080.43x - 14.32x^2 + 0.0632x^3 & 76.3 \leq x \leq 79.6 \\ 368917.59 - 13845.84x + 173.19x^2 - 0.7220x^3 & 79.6 \leq x \leq 80.6 \\ -169288.39 + 6186.63x - 75.34x^2 + 0.3058x^3 & 80.6 \leq x \leq 83.5 \\ 316591.15 - 11270.11x + 133.71x^2 - 0.5287x^3 & 83.5 \leq x \leq 84.3 \end{cases}$$

El punto 78.5 cae en el cuarto polinomio  $S_4(x) = -27126.15 + 1080.43x - 14.32x^2 + 0.0632x^3$  así que en este se sustituirá el valor de la temperatura para la cual queremos conocer la frecuencia de chirridos. Entonces

$$S_4(x) = -27126.15 + 1080.43(78.5) - 14.32(78.5)^2 + 0.0632(78.5)^3$$

cuyo resultado es:  $S(78.5) = 13.6109$

Es decir; a una temperatura de  $78.5^\circ$  los grillos dan una frecuencia de 13.6109 chirridos por segundo. La gráfica es la Figura 4.10.



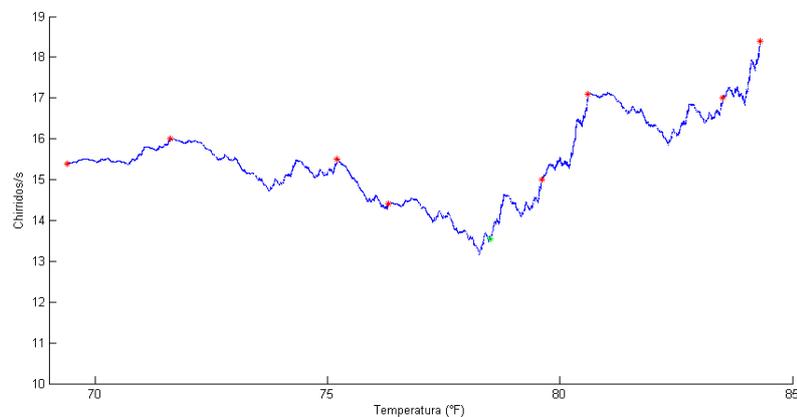
**Figura 4.10:** Interpolación de Lagrange para el punto 78. 5

Finalmente el método principal de este trabajo; la interpolación fractal. La gráfica de la interpolación fractal está dada por las  $N - 1$  transformaciones afines descritas en el capítulo 3 que son usadas para que, recursivamente, el algoritmo programado dé los puntos que forman la gráfica correspondiente, por lo que no hay una función tal en la que podamos sustituir y encontrar el respectivo valor para la incógnita. Ahora bien, esto no impide que podamos conocer el valor buscado, o por lo menos una aproximación. Como sabemos, un polinomio es continuo en todo  $\mathbb{R}$  y es por eso que hay un infinito de puntos entre cada dos de ellos. El algoritmo de interpolación fractal grafica puntos, teóricamente si se grafican un infinito de puntos entonces se tiene una gráfica continua, dichos puntos son apenas suficientes para que a la vista parezca ser una función continua. Desde luego que la computadora no podría, jamás, graficar una infinidad de puntos, es por eso que al programa, cuyo resultado es la gráfica de la interpolación fractal, se le ha indicado que grafique únicamente 15000 puntos. Debido a esto es muy difícil que en alguna de las iteraciones salga exactamente el punto del cual queremos saber su valor en la gráfica resultante. Es por esto que se ha modificado el algoritmo para que con un margen de error de 0.0001 pueda calcular el punto que buscamos. Es así como se tiene el programa 3 localizado en el anexo A.3.

El hecho es que al tratarse de un sistema dinámico discreto, se necesita de una semilla para empezar a iterar y, sin importar cual sea, al final se puede tener una *aproximación* muy buena.

Es así como para un valor de la temperatura de  $78.5^{\circ}F$  se tiene lo siguiente:

el programa arrojó una aproximación para  $x$  de 78.4997 y para  $y$  de 13.5519. En la siguiente gráfica (Figura 4.11 ) se muestra dicho resultado. Esto quiere decir que al estar los grillos en una temperatura de  $78.5^{\circ}$  estos dan 13.5519 chirridos por segundo.



**Figura 4.11:** Interpolación fractal para el punto 78.5

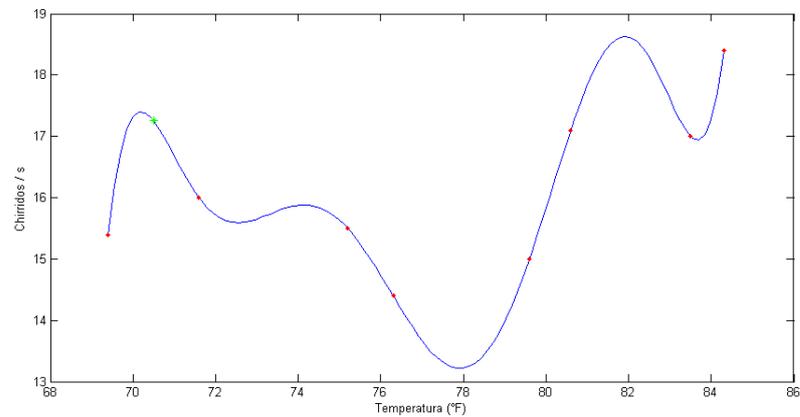
Ahora, analizamos los resultados mediante una tabla.

Forma (método)	Temperatura( $^{\circ}F$ )	Chirridos / s
Lagrange	78.5	13.4377
Newton DD	78.5	13.4377
Spline cúbico	78.5	13.6109
Interpolación fractal	78.4997	13.5519

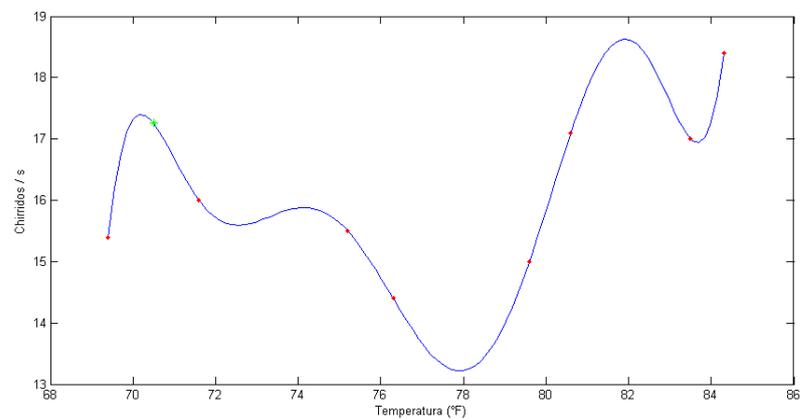
**Tabla 4.3:** Resultados de la interpolación para el punto 78.5

No hay mucha diferencia entre los resultados obtenidos por los diferentes métodos (tomando en cuenta que entre los métodos de Lagrange y Newton comparados con la interpolación fractal la diferencia es de más de una décima). En el caso de la interpolación fractal se pueden generar otros resultados, sin embargo hicimos que la gráfica de la interpolación fractal se parezca a las otras que se habían obtenido. Debido a esto se obtienen resultados parecidos. Es natural comparar cosas que se parecen mucho, para poder decidir cuál es la que nos conviene más o, en caso dado, cual es la más fácil de usar e incluso cual es la de más agrado.

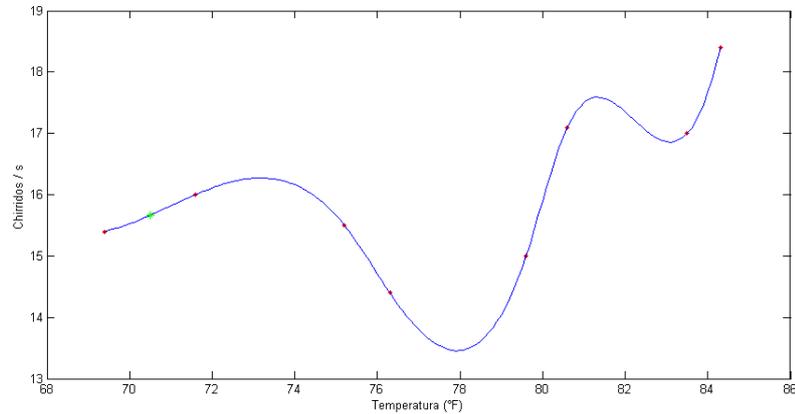
Ahora bien, un intervalo en el que las gráficas de las funciones no se parecen es el comprendido entre los dos primeros puntos  $[69.4, 71.6]$ . Para analizar el comportamiento de los polinomios interpoladores y de la interpolación fractal elegimos el punto 70.5. Consecuentemente se tiene las siguientes gráficas para cada uno de los métodos analizados.



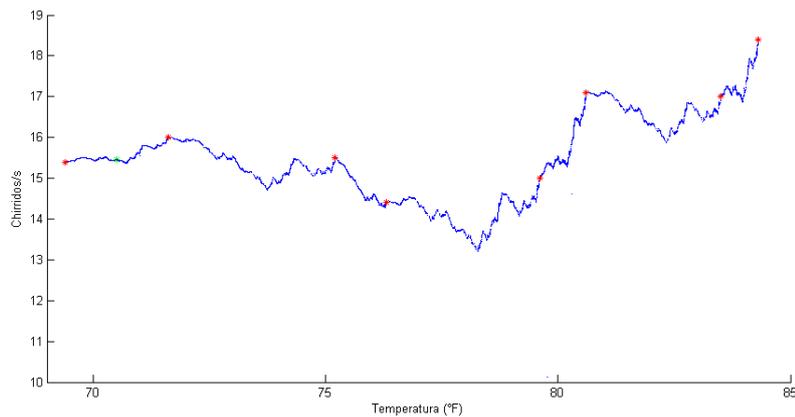
**Figura 4.12:** Interpolación de Lagrange para el punto 70.5



**Figura 4.13:** Interpolación de Newton para el punto 70.5



**Figura 4.14:** Interpolación por splin cúbico para el punto 70.5



**Figura 4.15:** Interpolación fractal para el punto 70.5

La tabla que muestra los resultados obtenidos es la siguiente:

Forma (método)	Temperatura( $^{\circ}F$ )	Chirridos / s
Lagrange	70.5	17.2605
Newton DD	70.5	17.2605
Spline cúbico	70.5	15.6612
Interpolación fractal	70.4999	15.4603

**Tabla 4.4:** Resultados de la interpolación para el punto 70.5

Esta vez es evidente una gran diferencia entre los dos primeros métodos (Lagrange y Newton) y los dos siguientes pues, entre estos, existe una diferencia de casi 2 unidades (he considerado que la diferencia de más de 5 décimas es parámetro suficiente para decir que la diferencia es muy grande). Para las formas de splines cúbicos e interpolación fractal no hay mucha diferencia. Se puede pensar que tal vez los mejores métodos que se pueden usar para este fin

son splines cúbicos y la interpolación fractal. Desde luego que esta es sólo una propuesta. De tal forma que propongo a la interpolación fractal como un buen método para interpolar.

Dado que los resultados de las formas de Lagrange y Newton son los mismos (debido a la propiedad de unicidad, entonces sólo cambia la forma de obtenerlos) Podría dar los mismo elegir cualquiera, sin embargo la forma de Newton requiere de menos operaciones y en cuestiones de cómputo eso genera menos costos. Además de las ventajas que la forma de Newton representa.

Es bien sabido que la interpolación por Splines (cúbicos) es muy usada por la enormes ventajas que estos representan. Observamos que los resultados que arrojan la interpolación por splines y la interpolación fractal son muy parecidos, de forma que si decidimos tomar a la interpolación fractal para describir el comportamiento de nuestros datos sería una buena opción. De hecho, la mayoría de los fenómenos en la naturaleza no se aproximan a lo descrito por una curva suave, para tener un mejor modelo propongo a la interpolación fractal porque esta representa de mejor manera un fenómeno. Por ejemplo, un fenómeno que tiene que ver con señales o pulsaciones como los chirridos que producen los grillos a una determinada temperatura.

Por otra parte, Barnsley [2] usa, principalmente, las funciones de interpolación fractal para aproximar componentes de una imagen, tales como; perfiles de montañas, nubes, etc. Y para construir una imagen se hace un montaje de varios de estos elementos, pero cada componente es modelado de manera independiente. Debido a la complejidad de dichos elementos, no es posible construirlos con funciones elementales o gráficas de funciones euclidianas.

De tal forma que la interpolación fractal provee de un medio **alternativo** para el ajuste de datos experimentales, que debido a su naturaleza (comportamiento atípico) resultaría no factible usar un modelo con funciones elementales. Por ejemplo, la geometría clásica no sería una buena herramienta para el análisis de de voltajes, en el cerebro humano, tal como lo muestra un electroencefalograma. Es así que las funciones de interpolación fractal pueden ser usadas para ajustar dichos datos experimentales.

Y de igual forma, las funciones de interpolación fractal comparten con las funciones elementales el carácter geométrico, es decir; se pueden representar por fórmulas y se pueden computar. Sin embargo, la principal característica y diferencia es su carácter fractal.

## 4.4. Generalidades (observaciones)

### 4.4.1. Lagrange

Recordemos el polinomio de interpolación de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (4.1)$$

con

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

El cálculo del polinomio de interpolación a partir de la fórmula mencionada requiere de muchas operaciones. Además una vez determinado el polinomio de interpolación en los puntos  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ . Si añadimos un nuevo punto  $x_{n+1}$  distinto a los anteriores y queremos hallar el polinomio de interpolación de los nuevos puntos  $\{x_0, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  debemos repetir todo el proceso, dado que cambian todos los polinomios básicos  $\{L_0(x), \dots, L_n(x)\}$ .

### Observaciones

- a) Uno de los métodos fundamentales para encontrar una función que pase a través de datos es el de usar un polinomio.
- b) Se emplea generalmente para interpolar funciones complejas e implementar fácilmente en la computadora.
- c) Las funciones  $L_i(x)$  son independientes de los datos  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  dados.
- d) La fórmula 4.1 representa de forma explícita la solución en términos de los datos. Una vez calculadas las funciones  $L_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  se puede escribir inmediatamente el polinomio de interpolación de cualquier función en los puntos  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  incorporando los datos  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  correspondientes.
- e) Esta fórmula es de mayor interés teórico que práctico, aunque existen algoritmos para calcular de manera eficiente la fórmula de Lagrange.<sup>6</sup>
- f) Esta fórmula tiene el inconveniente de que si se añade otro punto de interpolación, el nuevo polinomio de interpolación no se puede calcular a partir del anterior, habría que repetir todo el proceso.
- g) No siempre funciona correctamente con cantidades mayores de seis puntos.

---

<sup>6</sup>Tal algoritmo se encuentra programado en el anexo B.1.

- h) Es complicado para cálculos manuales.
- i) Al existir una creciente variación entre puntos de control consecutivos, genera que la aproximación entre estos dos puntos sea muy distinta a lo esperado.

### Número total de operaciones aritméticas que se requieren para interpolar por medio de la forma de Lagrange

Para computar  $(n + 1)$  factores  $(x - x_0), (x - x_1), \dots, (x - x_n)$ .

Para computar  $L_i(x)$   $n$  sustracciones para el denominador,  $(2n - 2)$  multiplicaciones para el numerador y el denominador y una división para ambos.

Ahora, computar todos los  $L_i(x)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$   $(n + 1)n$  restas,  $(n + 1)(2n - 1)$  multiplicaciones y divisiones.

Luego,  $(n + 1)$  multiplicaciones de  $L_i(x)$  por  $y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Finalmente  $n$  adiciones para  $\sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$ .

Haciendo un recapitulado, se necesitan:

$(n + 1) + (n + 1)n = (n + 1)^2$  restas.

$(n + 1)(2n - 1) + (n + 1) = (n + 1)2n$  multiplicaciones y divisiones.

$n$  adiciones en  $\sum y_i L_i(x)$ .

En total, el número de operaciones aritméticas para la interpolación de Lagrange son

$$(n + 1)^2 + (n + 1)2n + n = 3n^2 + 5n + 1,$$

donde  $n$  es el número de puntos a interpolar.

#### 4.4.2. Newton

El método de Newton es un tanto más eficiente para la construcción de un polinomio de interpolación.

Para empezar, supongamos que, una vez calculado dicho polinomio necesitamos incluir otro punto de interpolación. Puede haber diversas razones; se han obtenido nuevos datos experimentales, etc. o queremos obtener los polinomios de los distintos grados para saber cual nos interesa más.

Dado que la fórmula de Lagrange no es óptima para esto, entonces necesitamos una fórmula que permita encontrar un nuevo polinomio de interpolación a partir del que ya teníamos, de forma que el trabajo realizado pueda aprovecharse.

**Observaciones**

- a) Es un método de interpolación muy preciso. <sup>7</sup>
- b) Es un método muy algorítmico por lo que resulta cómodo en algunos casos.
- c) Es un método perfecto para los casos de polinomios de grados elevados.
- d) Es un poco más complicado que el método de Lagrange.
- e) Es complicado para cálculos manuales.

**Operaciones aritméticas usadas en la forma de Newton diferencias divididas**

$n$  restas para computar  $(x - x_i)$ .

$n$  multiplicaciones por  $(x - x_i)$ .

$n$  adiciones de  $(x - x_i)$ .

para  $i = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$

Las operaciones aritméticas totales usadas para la evaluación del polinomio son  $3n$ .

Ahora, las operaciones aritméticas para preparar la tabla de diferencias divididas de la forma de Newton son:

Para computar la primera columna se requiere de  $2n$  restas y  $n$  divisiones.

Para computar la segunda columna se requiere de  $2(n + 1)$  restas y  $(n - 1)$  divisiones.

Para las  $n$  columnas  $n(n + 1)$  restas y  $\frac{n}{2}(n + 1)$  divisiones son necesarias.

Entonces, el número total de restas y divisiones para preparar la tabla son:

$$n(n + 1) + \frac{n}{2}(n + 1) = \frac{3n}{2}(n + 1).$$

Finalmente, el número total de operaciones aritméticas para calcular la tabla y el polinomio son:

$$3n + \frac{3n}{2}(n + 1) = \frac{3n}{2}(n + 3).$$

---

<sup>7</sup>Dicho algoritmo ha sido programado y se encuentra en el Anexo B.2.

En conclusión, notamos que el número de operaciones aritméticas para construir la tabla y evaluar en el polinomio interpolador es menos que  $(3n^2 + 5n + 1)$  el número de operaciones aritméticas que se requieren en la forma de Lagrange.

$$3n + \frac{3n}{2}(n + 1) \leq 3n^2 + 5n + 1$$

#### 4.4.3. Splines

La interpolación polinomial se usa para interpolar datos mediante curvas suaves, pero la interpolación de Lagrange o Newton de un orden muy grande ya no es usable para este propósito ya que mientras más grande sea el orden del polinomio interpolador, en los métodos anteriores, se produce un problema de oscilaciones muy grandes. Para ello, los splines cúbicos presentan continuidad  $C^0$ ,  $C^1$  y  $C^2$ , por lo tanto su trazado es más suave que en los casos antes mencionados.

Los splines cúbicos naturales se definen mediante una serie de puntos de control y polinomios cúbicos que interpolan dichos puntos de control (el spline se dibuja sobre los puntos de control). Si definimos un spline con  $n$  puntos de control, los coeficientes de los polinomios dependen de todos los puntos de control.

#### Observaciones

- a) Los splines cúbicos interpolan entre dos puntos utilizando un polinomio de grado 3.
- b) Los polinomios de grado 3 son los de menor grado que permiten la existencia de un punto de inflexión.
- c) Intentan evitar oscilaciones y complejidad de interpolación polinómica, al aumentar el número de puntos.<sup>8</sup>
- d) Si el polinomio es de grado  $m$ , 3 en este caso, se puede imponer que la curva global sea continua hasta el orden  $m - 1$  ( $C^{m-1}$ ), en este caso: grado 2. Es decir, podemos imponer que sea continua la curva, la primera y la segunda derivada, es decir, curvas suaves.

Muy frecuentemente se dispone de una gran cantidad de datos relativos a una función, conocida o no, que se desea aproximar. Las técnicas de interpolación polinómica dan lugar en general a interpolantes que presentan grandes oscilaciones. La interpolación spline desempeña un papel fundamental en el tratamiento de este tipo de problemas.

---

<sup>8</sup>El programa de este algoritmo se encuentra en el anexo B.3.

#### 4.4.4. Interpolación fractal

Hemos visto como los métodos de interpolación tradicionales no brindan grandes beneficios y al mismo tiempo poseen ciertas desventajas.

Ahora es turno de la interpolación fractal. El tema principal de este trabajo está relacionado con la interpolación fractal cuyos beneficios y para lo que fue hecha tiene que ver con las gráficas por computadora. Desde hace tiempo se ha tratado de crear imágenes complejas, esto requería de un cómputo muy pesado y laborioso, hoy en día ese no es quizá el problema ya que las computadoras modernas pueden trabajar con un gran número de datos.

La palabra interpolación nos remite a que, por medio de una función, podemos saber el comportamiento de datos a partir de sólo un conjunto de estos. Es por eso que la técnica de interpolación fractal, en este trabajo, se usará precisamente para eso, para conocer el comportamiento de algunos datos, aunque el propósito de la interpolación fractal no sea precisamente el de interpolar. En los métodos analizados anteriormente aparece una función que nos describe los datos a lo largo de un intervalo. No es el caso de la interpolación fractal. No podemos obtener una función tal. A pesar de que la gráfica, que se obtiene por medio de los programas del Anexo1, describe a los datos, esta es generada por medio de iteraciones. Estas iteraciones se deben a que se cuenta con  $n$  transformaciones lineales de la forma

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es una función de conjunto valuado, porque cada punto  $r$ , se le asocia  $n$  puntos, que se obtiene al aplicar  $w_1, w_2, \dots, w_n$  al vector  $r$ . Por lo que ahora al aplicar iterativamente la función se obtiene un conjunto de puntos: la gráfica.

El programa grafica 15000 puntos, todos ellos distribuidos de igual manera entre cada uno de los intervalos definidos por cada dos puntos consecutivos. Es decir, para los datos de los chirridos de los grillos y la temperatura se tienen 7 intervalos cada uno de ellos con 2142 puntos. Esto se debe a que en el programa interviene la aleatoriedad ( $k=\text{round}((N-1)*\text{rand}());$ ), y al ser una distribución uniforme, entonces tenemos la misma probabilidad de que un punto caiga en todos los casos para todas las transformaciones lineales.

En el caso en el que el número de puntos se haga tender a infinito dicho conjunto de puntos nos genera una gráfica continua, sin embargo debido a que ninguna computadora puede graficar un número infinito de puntos, tenemos que tomar una cantidad considerable de ellos para construir una gráfica. Y es así como 15000 puntos son necesarios para que a la vista esto parezca un función continua (aunque no lo sea).

### Observaciones

- a) La interpolación fractal requiere de muchas operaciones.
- b) Este método no da una función que describa el comportamiento de los datos.
- c) Se tienen que introducir factores de escalamiento. Dichos factores son aleatorios y son a conveniencia del usuario.
- d) Presenta oscilaciones que varían dependiendo de los factores de escalamiento que se introduzcan para que la gráfica resulte como se quiere.
- e) Para calcular el valor de un nuevo punto se tiene que tomar en cuenta un error que depende del número de puntos que conformarán la gráfica.
- f) Se pueden tener infinidad de gráficas que se pueden usar para el fin de inferir sobre el comportamiento de los datos (pues estas dependen de los factores de escalamiento), sin embargo el usuario tiene que elegir la que mejor le convenga.

En este trabajo se propone que los factores de escalamiento se elijan de tal forma que la gráfica resultante se parezca lo más posible a una gráfica suave. Una forma de lograrlo es poniendo factores de escalamiento negativos si se quiere que los puntos que conforman la gráfica queden por encima de los dos puntos correspondientes y positivos si se quiere que los puntos queden por debajo de los dos puntos en cuestión. Estos factores varían en  $0 \leq d_n \leq 1$ . Si se tienen  $n$  puntos entonces se tienen  $n - 1$  factores de escalamiento cuyos valores, mientras más pequeños sean menos oscilaciones se presentarán a lo largo de la gráfica, esto es muy importante porque el factor de escalamiento no sólo influye en el intervalo correspondiente sino que también hace presencia a lo largo de toda la gráfica debido a la principal propiedad que tiene los fractales, autosimilaridad. Y también a la forma en la que se construyen, por medio de IFS's

Hablando de la autosimilaridad, se ve a simple vista, en las gráficas generadas con la técnica de interpolación fractal, que la misma forma prevalece a lo largo de cada subintervalo definido por cada par de puntos consecutivos. Es decir; la gráfica de la interpolación fractal se compone de  $n - 1$  copias de sí mismo, solo que en cada una de ellas es afectada por los factores de escalamiento correspondientes.

### Operaciones aritméticas usadas para la interpolación fractal

Para computar  $b = x(N) - x(1)$  se requiere de una resta.<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Sólo en este caso usaremos a  $n = N - 1$  donde  $N$  es el número de puntos interpoladores.

Para los elementos de la matriz de la transformación afín asociada a la IFS:

para  $a(n) = (x(n+1) - x(n))/b$  se requiere de una resta y una división,  
 para  $e(n) = (x(N) * x(n) - x(1) * x(n+1))/b$  se necesitan 2 multiplicaciones,  
 1 resta y 1 división,  
 para  $c(n) = (F(n+1) - F(n) - d(n) * (F(N) - F(1)))/b$  hacen falta 1  
 multiplicación, 3 restas y 1 división,  
 para  $f(n) = (x(N) * F(n) - x(1) * F(n+1) - d(n) * (x(N) * F(1) - x(1) * F(N)))/b$   
 finalmente 5 multiplicaciones, 3 restas y 1 división.

Esto por  $n$ , ya que se deben tener  $n$  transformaciones afines.

Para calcular los puntos de la gráfica:

1 multiplicación y 1 suma para:  $\text{newx} = a(k) * \text{xx} + e(k)$ ;  
 y 2 multiplicaciones y 3 adiciones para:  $\text{newy} = c(k) * \text{xx} + d(k) * \text{yy} + f(k)$ ;

Se calculan 15000 puntos.

finalmente se tienen 1 operación para  $b$ ,  $18n$  para las transformaciones afines  
 y  $z * 7$  para graficar los puntos.

Se requieren de  $1 + 18n + 7 * z$  operaciones aritméticas. En este caso  $z = 15000$   
 y se obtiene un total de  $15001 + 18n$  donde  $n = N - 1$  y  $N$  es el número de  
 puntos iniciales.

Si no se consideran las operaciones necesarias para generar la gráfica de la  
 interpolación fractal (ya que en los demás métodos no se toma en cuenta)  
 entonces podemos decir que es un algoritmo, computacionalmente hablando,  
 rápido.

En este caso de aplicación se usaron 8 puntos interpoladores y las operaciones  
 necesarias para cada uno de los algoritmos (excepto para splines cúbicos) se  
 muestran en la siguiente tabla.

Método	Newton	Lagrange	Fractal
No. Operaciones	131	233	144

**Tabla 4.5:** Operaciones aritméticas necesarias para tres  
 métodos de interpolación

### Dimensión fractal

Ya que la gráfica resultante posee propiedades fractales, al ser construida por  
 medio de IFS's, entonces la dimensión de tal gráfica es no entera. Vamos a  
 usar la ecuación de Moran para obtener la dimensión de la gráfica resultante.

Se tienen los factores de escalamiento 0.1, 0.25, 0.1, 0.4, 0.25, 0.3 y 0.25. Entonces la ecuación de Moran queda de la siguiente forma:

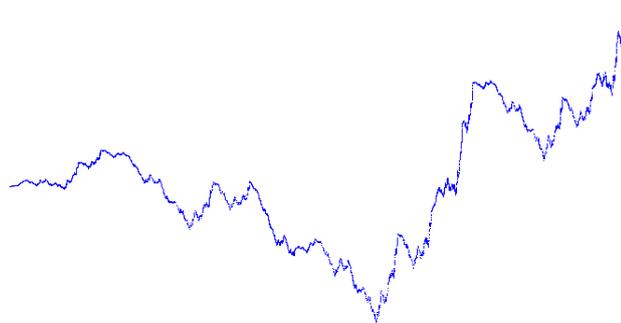
$$\left(\frac{1}{10}\right)^d + \left(\frac{1}{4}\right)^d + \left(\frac{1}{10}\right)^d + \left(\frac{2}{5}\right)^d + \left(\frac{1}{4}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{4}\right)^d = 1$$

Para resolver la ecuación vamos a usar el paquete Mathematica<sup>10</sup> usando la siguiente instrucción:

```
FindRoot[.1^d+.25^d+.1^d+.4^d+.25^d+.3^d+.25^d==1,{d,1}]
```

el resultado es:  $D = 1.37883$ .

Ahora, para probar esto vamos a usar un paquete llamado Fractal Analysis. que usa el algoritmo de conteo de cajas para calcular la dimensión de una imagen. Se tiene la gráfica de la interpolación fractal<sup>11</sup> y es usada para el análisis en dicho paquete, Figura: 4.16.

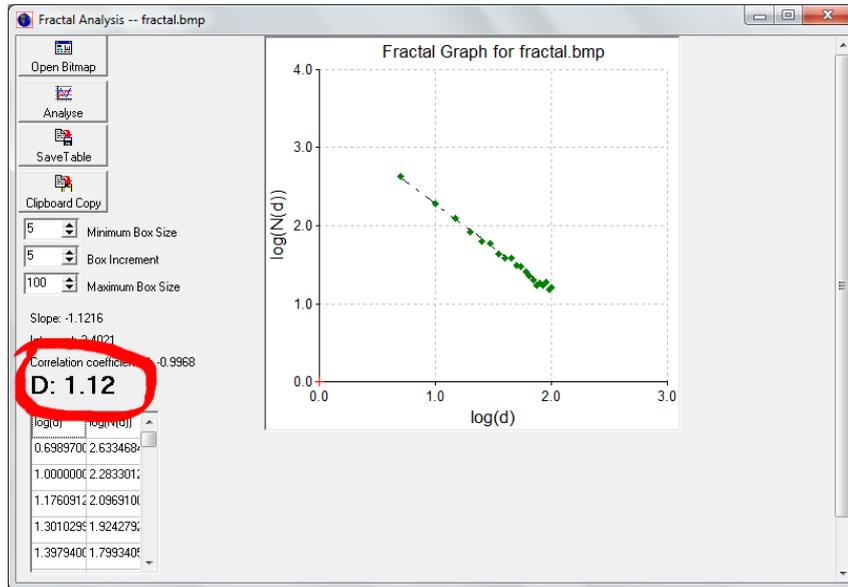


**Figura 4.16:** Gráfica de la interpolación fractal únicamente con los puntos, lo necesario para su análisis de dimensión.

Una vez abierta en el paquete, este nos arroja un resultado esperado, dimensión no entera como muestra la Figura: 4.20.

<sup>10</sup>Se usó Wolframalpha, una aplicación de Mathematica para la Web. la dirección es: <http://www.wolframalpha.com/>

<sup>11</sup>Tiene que ser en formato .bmp. Matlab permite guardar la gráfica en formato de imagen con esta extensión



**Figura 4.17:** Resultado del paquete: Dimensión fractal. Encerrada en rojo.

El resultado es una dimensión fractal de 1.12. Comprobamos así que la gráfica de la interpolación fractal cumple con una de las propiedades más importantes de los fractales.

## 4.5. Error

Como deseamos utilizar el polinomio de interpolación para sustituir la función  $f$  en puntos que no pertenecen al conjunto de puntos de interpolación  $\{x_0, \dots, x_n, x_{n+1}\}$  estamos interesados en estimar el error

$$E_n(n) = f(x) - P_n(x), \quad x \in [a, b]$$

Sin hipótesis adicionales, no podemos decir nada acerca de esa cantidad pues podemos cambiar la función  $f$  en puntos que no sean los de interpolación. Además si la función  $f$  está tabulada y no se conoce su expresión analítica, entonces, estrictamente hablando, es imposible estimar el error correspondiente al polinomio de interpolación.

Para la interpolación fractal tampoco existe una función con la cual se pueda comparar para estimar un error. A pesar de esto, no quiere decir que no exista un error. Debido a que la cantidad de puntos es finita, es muy difícil que en alguna de las iteraciones el punto en cuestión sea exactamente el buscado.

En el caso de la interpolación polinomial nos hay problema a la hora de querer conocer el valor de un punto que se encuentra en el intervalo, por ejemplo; en la sección anterior se hizo una interpolación para el punto 78.5, basta solamente

sustituir dicho valor en el polinomio interpolador y el resultado es inmediato.

Para la interpolación fractal se ha modificado el programa 1 (Anexo A.1.) de tal forma que cuando el punto a interpolar sea muy cercano, con una diferencia a lo más de  $\pm 0.001$  (el error tiene que estar entre  $\pm 0.0001$  y  $\pm 0.001$ ), entonces se tome ese punto y que el programa arroje el valor. Es así que se tiene lo siguiente:

#### Modificación al algoritmo original

```

if xx>=70.499 y xx<=70.501  (error permitido)
plot(xx,yy,'g*')           (grafica el punto buscado)
xx                          (valor de la coordenada en x)
yy                          (valor de la coordenada en y)
end

```

Con esto se obtienen los resultados de la interpolación para los puntos 78.5 y 70.5 que se muestran en las tablas 4.3 y 4.4 correspondientes.

Así es como estos dos resultados cumplen con las características deseables de error (Tabla 4.6).

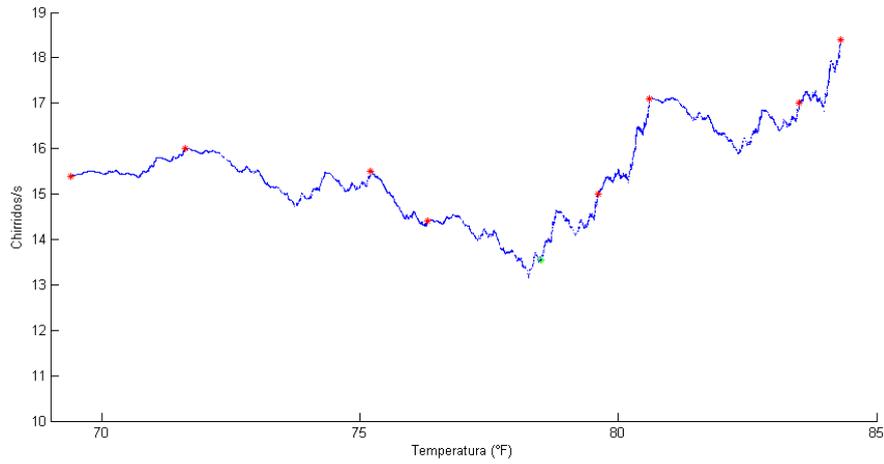
Interpolación fractal	78.4997	13.5519
Interpolación fractal	70.4999	15.4603

**Tabla 4.6:** Resultados de la interpolación para los puntos 78.5 y 70.5

Para ser más precisos podríamos graficar una cantidad muy grande de puntos y así minimizar el error. Entonces la probabilidad de que, incluso durante las iteraciones se llegue a presentar el punto exacto para el cual queremos saber la interpolación correspondiente, es más alta y quizás en vez de graficar 15000 puntos se puedan graficar 100000. El problema es que esto toma mucho tiempo (relativamente) pues depende de la computadora con la que se esté trabajando.

Actualmente, creo que la cantidad de operaciones ya no es un problema, pues los equipos de cómputo son más robustos y soportan y realizan una gran cantidad de operaciones tan rápido que esto deja de ser un problema a tomar en cuenta.

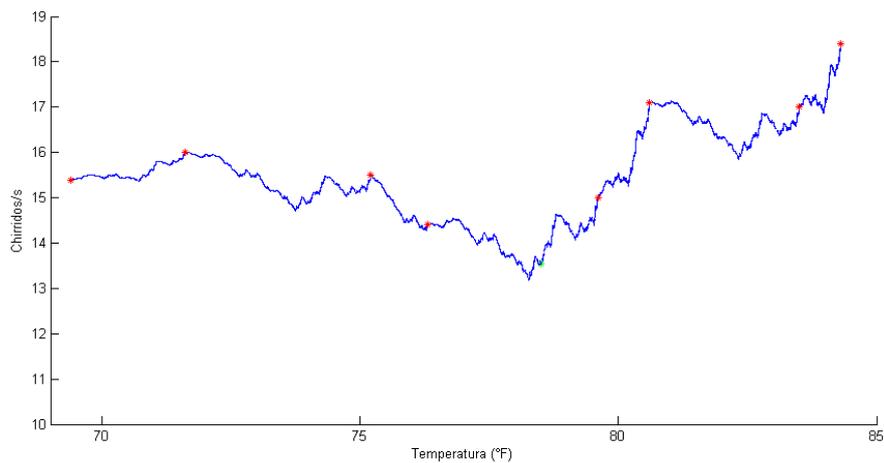
La siguiente figura es la gráfica de la interpolación fractal con un total de 50000 puntos cuyo programa arrojó tres resultados diferentes. (Los resultados son para el punto 78.5).



**Figura 4.18:** Resultado para 10000 iteraciones

$x=78.5004$       $y=13.5331$

$x=78.5004$       $y=13.5331$

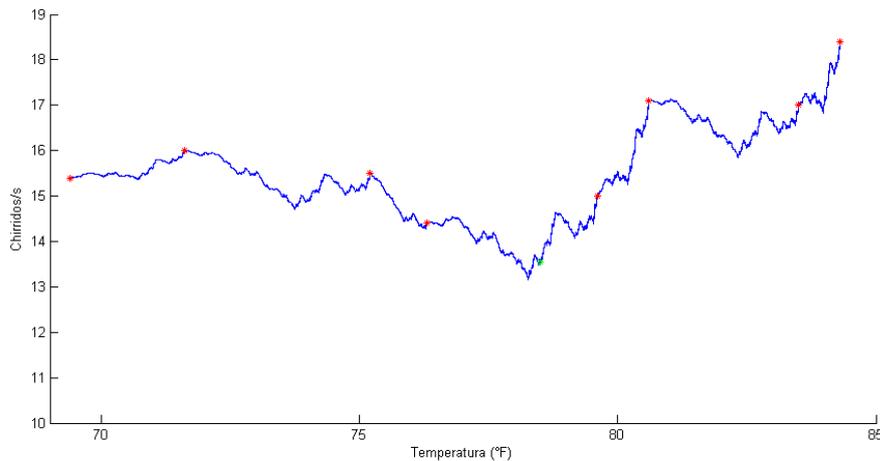


**Figura 4.19:** Resultado para 50000 iteraciones

$x=78.4999$       $y=13.5463$

$x=78.5007$       $y=13.5396$

$x=78.5003$       $y=13.5434$



**Figura 4.20:** Resultado para 100000 iteraciones

$$\begin{array}{ll} x=78.5009 & y=13.5357 \\ x=78.5001 & y=13.5445 \end{array}$$

Si bien el error depende del número de puntos que se grafiquen, la distribución de los puntos es equitativa en cada uno de los intervalos. Es decir; si se grafican 1000 puntos, hay (aproximadamente) 142 puntos en cada intervalo.

Mientras más puntos se grafiquen la gráfica parece, a la vista, ser una curva continua. Para una última prueba, se trató con 1000000 de puntos. Afortunadamente, el programa arrojó el valor exacto buscado, 78.5000. Pero antes se incrementó la exactitud, se le pidió al programa que nos arrojase un valor entre 78.4999 y 78.5001.

Para 1000000 puntos el programa arrojó dos resultados:

$$\begin{array}{ll} x = 78.4999 & y = 13.5463 \\ x = 75.0000 & y = 13.5452 \end{array}$$

Es notable que mientras más puntos tenga la gráfica, la probabilidad de que se encuentre el valor exacto es mayor.



# Conclusiones

---

Con la técnica de interpolación polinomial clásica al aumentar el número de puntos de interpolación, aumenta el grado del polinomio. Como se sabe, los polinomios de grado alto plantean problemas de estabilidad debido a su carácter oscilatorio. Además su cálculo requiere de un número de operaciones relativamente grande, con el consiguiente aumento de los errores de redondeo.

La elección del tipo de función y la forma de aproximarla se aborda matemáticamente desde diferentes puntos de vista según la naturaleza del problema y el conocimiento que se tenga de la función original.

Los resultados obtenidos muestran que la interpolación fractal es una buena herramienta cuando las características del problema, tales como una dispersión notablemente grande o que el problema obedezca a un comportamiento no tratable por funciones elementales, permiten su uso.

El algoritmo de la interpolación fractal propuesto por Barnsley genera la gráfica de las funciones de interpolación fractal. Sin embargo, sólo hace eso. El objetivo es interpolar y para eso, después de haber obtenido las FIFs, necesitamos saber los valores que toman valores desconocidos mediante un tratamiento no encontrado en la literatura. La modificación que hice al algoritmo me permitió hacer esto, sin dejar atrás el respectivo error; consecuencia de tratarse de un método iterativo.

En cuanto a los factores de escalamiento, su manipulación presenta un inconveniente si no se cuenta con tiempo para tratar con varios de ellos.

Estos factores de escalamiento plasman la autosimilaridad a diferentes escalas, característica esencial de los fractales. De hecho, los sistemas de funciones iteradas, que son a su vez mapeos afines, definen las características fractales que se presentan en el primer capítulo. Es por eso que, como resultado natural, la gráfica de la interpolación fractal presentó dimensión no entera.

Elegir los factores de escalamiento de tal forma que la gráfica resultante se parezca lo más posible a una función continua, es para establecer el puente entre un sistema dinámico discreto y las funciones polinomiales que también son mencionadas en el capítulo 2.

Los métodos clásicos de interpolación fueron usados para mostrar que la interpolación fractal es una herramienta por demás aceptable para el ajuste de datos experimentales. Para lograrlo, el problema de biología fue una buena opción debido a la su naturaleza. Y, tomando en cuenta las características de cada uno de los métodos presentados, se pudo establecer una comparación entre lo tradicional y la nueva propuesta; objetivo de este trabajo, mostrando así los inconvenientes y la factibilidad de uso de esta técnica.

Es por eso que para el desarrollo de esta tesis recurrí a la mención del error como algo inherente al tratarse de un ajuste y una aproximación. Cuya teoría tradicional está bien establecida para las formas polinomiales pero no para el caso de la interpolación fractal.

Es conveniente decir que al tratarse de un sistema dinámico discreto, se toman conceptos como; atractor, que es la gráfica resultante de iterar con las funciones de interpolación fractal. Siendo las funciones de interpolación fractal lineales la base de este procedimiento. Y cuyas características fractales hacen de este método la diferencia frente a lo polinomial (a lo clásico).

Por otra parte, la mayoría de los métodos propuestos fue computado para mostrar que el número de operaciones necesarias para cada método es importante si nos interesa el factor tiempo. Hoy en día los equipos de cómputo son tan sofisticados que esto podría dejarse atrás, pues los costos computacionales no presentan un problema tratándose de una cantidad de operaciones relativamente pequeña.

El hecho de que en la ciencia se trate de hacer modelos más realistas nos obliga a crear y experimentar con nuevos métodos. Los más simples son continuos, sin embargo, en otros dominios, la realidad de revela tan irregular que el modelo continuo fracasa y puede no servir como aproximación al fenómeno.

Es por eso que debo señalar el hecho, y objetivo de esta tesis, de proponer la técnica de interpolación fractal como un método viable y bastante aceptable para ajustar datos. Así mismo me atrevo a proponer la inclusión de dicha técnica en el temario de alguna de las materias como métodos numéricos o

sistemas dinámicos.

Adicionalmente de cumplir con el objetivo principal, creo que aún hay muchas cosas por hacer. Pero considero que esto es suficiente para mi cometido. Sin embargo, todavía se puede seguir contribuyendo al desarrollo de esta técnica usando, por ejemplo, IFSs no hiperbólicas o llegar a tratar la técnica con conceptos propios de caos y obtener resultados colaterales y/o derivados de este trabajo que pueden ser considerados como trabajos futuros.



# Programas de Interpolación fractal

---

Los siguientes programas fueron hechos en MATLAB v7.12.

## A.1. Programa 1

Programa para interpolación fractal en el cual se calculan las constantes  $a_n, c_n, e_n$  y  $f_n$ .

El programa es una adaptación del algoritmo de Barnsley para interpolación fractal que aparece en su libro *Fractals Everywhere* [2].

```
hold on

%Coordenadas de los puntos a interpolar
x=[x(1) x(2) ... x(N)];
F=[F(1) f(2) ... F(N)];

%Factores de escalamiento
d=[d(1) d(2) ... d(N-1)];

N=length(x);

a=zeros(1,N-1);
e=zeros(1,N-1);
c=zeros(1,N-1);
f=zeros(1,N-1);

for n=1:N-1

    b=x(N)-x(1);

    a(n)=(x(n+1)-x(n))/b;
```

```

e(n)=(x(N)*x(n)-x(1)*x(n+1))/b;
c(n)=(F(n+1)-F(n)-d(n)*(F(N)-F(1)))/b;
f(n)=(x(N)*F(n)-x(1)*F(n+1)-d(n)*(x(N)*F(1)-x(1)*F(N)))/b;

end

xx=x(1);
yy=F(1);

for i=1:15000

    k=round((N-1)*rand());
    if k<1
        k=k+1;
    end

    %transformación afín
    newx=a(k)*xx+e(k);
    newy=c(k)*xx+d(k)*yy+f(k);
    xx=newx;
    yy=newy;

    plot(xx,yy,'.', 'Markersize',2)

end

```

## A.2. Programa 2

En este programa se tienen que ingresar los valores de las constantes  $a_n, c_n, e_n$  y  $f_n$ .

```

hold on

%Coordenadas de los puntos a interpolar
x=[x(1) x(2) ... x(N)];
F=[F(1) f(2) ... F(N)];

%Factores de escalamiento
d=[d(1) d(2) ... d(N-1)];

N=length(x);

a=[a(1) a(2) ... a(N-1)];
e=[e(1) e(2) ... e(N-1)];
c=[c(1) c(2) ... c(N-1)];
f=[f(1) f(2) ... f(N-1)];

xx=x(1);
yy=F(1);

for i=1:5000

    k=round((N-1)*rand());
    if k<1
        k=k+1;
    end

    %transformación afín
    newx=a(k)*xx+e(k);
    newy=c(k)*xx+d(k)*yy+f(k);
    xx=newx;
    yy=newy;

    plot(xx,yy,'.', 'Markersize',2)

end

```

### A.3. Programa 3

Programa modificado para poder encontrar el valor correspondiente del dato que se quiere.

```
%Programa de interpolación fractal
axis([69 85 10 19])
clear;
clc

hold on

x=[69.4 71.6 75.2 76.3 79.6 80.6 83.5 84.3];
F=[15.4 16.0 15.5 14.4 15.0 17.1 17.0 18.4];
d=[0.1 -0.25 0.09 0.35 0.25 0.3 0.25];

N=length(x);

a=zeros(1,N-1);
e=zeros(1,N-1);
c=zeros(1,N-1);
f=zeros(1,N-1);

for n=1:N-1

    b=x(N)-x(1);
    a(n)=(x(n+1)-x(n))/b;
    e(n)=(x(N)*x(n)-x(1)*x(n+1))/b;
    c(n)=(F(n+1)-F(n)-d(n)*(F(N)-F(1)))/b;
    f(n)=(x(N)*F(n)-x(1)*F(n+1)-d(n)*(x(N)*F(1)-x(1)*F(N)))/b;

end

xx=x(1);
yy=F(1);

for i=1:15000

    k=round((N-1)*rand());
    if k<1
        k=k+1;
    end
    newx=a(k)*xx+e(k);
    newy=c(k)*xx+d(k)*yy+f(k);
    xx=newx;
    yy=newy;

    %modificación al algoritmo original

    if xx>=70.4999 && xx<=70.5001 %error permitido
        plot(xx,yy,'g*')
        xx %valor de la coordenada en x
        yy %valor de la coordenada en y
    end

    plot(xx,yy,'.', 'Markersize',2)
end

plot(x,F,'r*','Markersize',5)
xlabel('Temperatura');
ylabel('Chirridos')
```



# Programas de interpolación clásica

---

## B.1. Programa de interpolación por el método de Lagrange

```
clc
clear

xi=[69.4 71.6 75.2 76.3 79.6 80.6 83.5 84.3];
yi=[15.4 16.0 15.5 14.4 15.0 17.1 17.0 18.4]; % entrada de datos.

n=length(xi);

x=sym('x'); %esta función nos permite dejar la variable 'x' como simbólica y así poder trabajar con ella, sin tener que usar eval
for j=1:n
    producto=1;
    for i=1:j-1
        producto=producto*(x-xi(i)); % cálculo del producto 1 superior de L
    end
    producto2=1;
    for i=j+1:n
        producto2=producto2*(x-xi(i)); % cálculo del producto 2 superior de L
    end
    producto3=1;
    for i=1:j-1
        producto3=producto3*(xi(j)-xi(i)); % cálculo del producto 3 inferior de L
    end
    producto4=1;
    for i=j+1:n
        producto4=producto4*(xi(j)-xi(i)); %calculo del producto 4 inferior de L
    end
    L(j)=(producto*producto2)/(producto3*producto4); %cálculos de las L para
    fprintf('\n L%d:\n',j-1) %poder hallar el polinomio
    disp(L(j)) %la función disp nos permite visualizar variables o texto
```

```

    % en el workspace
end
pn=0;
for j=1:n
    pn=pn+L(j)*yi(j); %cálculo del polinomio interpolante
end
fprintf('\n POLINOMIO INTERPOLADOR: \n')
%disp(pn) % esta ejecución la podemos utilizar cuando no necesitamos
% simplificar la expresión
pn = simple(pn); %este comando nos permite simplificar toda la expresión
disp(pn)

opc=input('\n Desea aproximar un valor (si/no): ','s');
%este comando nos permite saber si el usuario quiere obtener una
%aproximación de un punto dado, en el polinomio que se acaba de obtener
if opc=='si'
x=input('\n Ingrese el punto a aproximar: ');
y=eval(pn); %evaluar el punto en el polinomio
disp('\n La aproximación a f(x) es:')
disp(y)
end

```

## B.2. Programa de interpolación por el método de Newton Diferencias Divididas

```

clear;
clc
x=[69.4 71.6 75.2 76.3 79.6 80.6 83.5 84.3];
y=[15.4 16.0 15.5 14.4 15.0 17.1 17.0 18.4]; % entrada de datos.

xa=x;
ya=y;

% Formación de las diferencias divididas
d=zeros(length(y));
d(:,1)=y';
for k=2:length(x)
    for j=1:length(x)+1-k
        d(j,k)=(d(j+1,k-1)-d(j,k-1))/(x(j+k-1)-x(j));
    end
end

% Formación del polinomio
for w=1:length(x)
    ds=num2str(abs(d(1,w)));
    if w>1
        if x(w-1)<0
            sg1='+';
        else
            sg1='-';
        end
    end
    if d(1,w)<0
        sg2='-';
    else
        sg2='+';
    end
    if w==1
        acum=num2str(d(1,1));
    elseif w==2
        polact=['(x' sg1 num2str(abs(x(w-1))) ') '];
        actual=[ds '*' polact];
        acum=[acum sg2 actual];
    else
        polact=[polact '.*' '(x' sg1 num2str(abs(x(w-1))) ') '];
        actual=[ds '*' polact];
    end
end

```

```

        acum=[acum sg2 actual];
    end
end

% Presentación de resultados
fprintf('x = ');
disp(xa);
fprintf('y = ');
disp(ya);
fprintf('Polinomio interpolador de Newton : %s ',acum);
x=input('\n Punto a interpolar x = ');
if x>max(xa)|x<min(xa)
    fprintf('\n Punto fuera de rango. El resultado puede ser equivocado');
end
xinterp=x;
yinterp=eval(acum);
fprintf(' Y(%g) = %g ',x,yinterp);

% Grafica de los puntos
fprintf('\n Pulse cualquier tecla para ver la grafica de los puntos');
pause
xg=linspace(min(xa),max(xa));
x=xg;yg=eval(acum);
plot(xg,yg,xa,ya,'.r',xinterp,yinterp,'or');

```

### B.3. Programa interpolación por el método de Splines cúbicos

```

clear;
clc
X=[69.4 71.6 75.2 76.3 79.6 80.6 83.5 84.3; 15.4 16.0 15.5 14.4 15.0 17.1 17.0 18.4]; % entrada de datos.

n=length(X(1,:));

for i=1:n;
    a(i)=X(2,i);
end

for i=1:n-1;
    h(i)=X(1,i+1)-X(1,i);
end

for i=2:n-1;
    alfa(i)=3/h(i)*(a(i+1)-a(i))-3/h(i-1)*(a(i)-a(i-1)));
end

l(1)=1;
mu(1)=0;
z(1)=0;

for i=2:n-1;
    l(i)=2*(X(1,i+1)-X(1,i-1))-h(i-1)*mu(i-1);
    mu(i)=h(i)/l(i);
    z(i)=(alfa(i)-h(i-1)*z(i-1))/l(i);
end

l(n)=1;
z(n)=0;
c(n)=0;

for i=n-1:-1:1;
    c(i)=z(i)-mu(i)*c(i+1);
    b(i)=(a(i+1)-a(i))/h(i)-h(i)*(c(i+1)+2*c(i))/3;
    d(i)=(c(i+1)-c(i))/(3*h(i));
end

```

```
for i=1:n-1;
    x=X(1,i):0.1:X(1,i+1);
    y=a(i)+b(i)*(x-X(1,i))+c(i)*(x-X(1,i)).^2+d(i)*(x-X(1,i)).^3;
    hold on;
    plot(x,y,'b');
end

for i=1:n;
    hold on;
    plot (X(1,i),X(2,i),'.r');
    xlabel('Temperatura')
    ylabel('Chirridos')
end
```

# Referencias

---

- [1] B. Victor, *Metric Spaces Iterations and Applications*, New York: Cambridge University Press, 1987.
- [2] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Second Edition, Atlanta, Georgia: Iterated Systems, Inc. 1993.
- [3] H. Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Second Edition, New York: Springer-Verlag, 2004.
- [4] Jean-Luc Charlbart, *Medio siglo de fractales: 1870-1920*.
- [5] E. I. de la Cruz, “Un punto de vista mecánico estadístico sobre multifractales”, Tesis de maestría en ciencias con especialidad en física, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., 2001.
- [6] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Second Edition, UK: University of St. Andrews, 2003.
- [7] S. R. Moore, “Fractal Interpolation Techniques”, Bachelor thesis, The University of Southern Mississippi, 1999.
- [8] B. Mandelbrot, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*, Quatrième édition, France: Flammarion, 1995.
- [9] Sistemas dinámicos II, Notas de clase, Matemáticas aplicadas y computación, UNAM, semestre 2013-1.
- [10] del R. J. Luis y J. L. García, Dimensión de Autosimilaridad y la Dimensión de Hausdorff-Besicovich, UAM-I.
- [11] Fractal Geometry, Yale University, M. Frame, B. Mandelbrot (1924-2010), N. Neger, August 2013, [Online]. Available: <http://classes.yale.edu/fractals/>
- [12] M.F. Barnsley and S. Demko, *Iterated function systems and the global construction of fractals*, London: Proc. Roy. Soc., 1985.

- 
- [13] G. Ramesh, “Fractal Interpolation”, M.S. thesis, Department of Mathematics, University of Central Florida: Collage of Sciencies, 2008.
- [14] del Río C. J. Luis, Generación de fractales por computadora usando un sistema de funciones iteradas, presentado en el II Taller internacional de procesamiento de imágenes y visión, Departamento de Física, UAM-Iztapalapa, 1990.
- [15] Y. N. Skiba, *Introducción a los métodos numéricos*, UNAM, Dirección general de publicaciones y fomento editorial, 2001.
- [16] Holistic Numerical Methods, Transforming Numerical Methods Education for the STEM Undergraduate, University of South Florida, Tampa, Febrero 2013. [Online]. Available: <http://nm.mathforcollege.com>
- [17] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, U.S.A. Boston: PWS Publishing Company, 2002.
- [18] S. C. Chapra and R. P. Canale *Métodos numéricos para ingenieros*, México, D.F. : McGraw-Hill Interamericana, 2003
- [19] B. S. Pablo, H. M. Victoria, D. S. Claudia, *El ABC de los Splines*, México, D.F.: Sociedad Matemática Mexicana, 1996.
- [20] Mudhumangal Pal, *Numerical Analysis for sciences and engineers*, Oxford, U.K.: Alpha International Ltd., 2007.
- [21] M. F. Barnsley and A. N. Harrington, “The Calculus of Fractal Interpolation Functions”, *Journal of approximation theory*, vol. 57, pp. 14-34, 1989.
- [22] M. F. Barnsley, “Fractal Functions and Interpolation”, *Constructive Approximation* 2, pp. 303-329, 1986.