



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio sobre la no localidad cuántica en
sistemas de una y dos partículas.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

EDUARDO OCAMPO LÓPEZ ESCALERA

DIRECTORA DE TESIS:

ANDREA VALDÉS HERNÁNDEZ

2014





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	IV
Introducción	IV
1. Las primeras manifestaciones de la no localidad	1
1.1. El trabajo de EPR	1
1.1.1. Realidad y completitud, condiciones relevantes.	2
1.1.2. Los elementos de realidad asociados a dos variables que no conmutan.	2
1.1.3. El ejemplo de EPR	3
1.1.4. Hipótesis implícitas: la localidad y la separabilidad.	5
1.2. El enredamiento	6
1.2.1. ¿Qué es el enredamiento?	6
1.2.2. La observación de EPR es la regla, no la excepción	7
1.3. El Teorema de Bell	8
1.3.1. Derivación Matemática	10
1.4. Algunas críticas a las conclusiones de Bell	12
1.5. Comentarios finales	13
2. No localidad en sistemas de una partícula	15
2.1. La no localidad en la descripción cuántica	16
2.1.1. La formulación tipo Hamilton-Jacobi de la teoría cuántica	16
2.1.2. Una diferencia esencial entre el potencial clásico y el potencial efectivo.	18
2.1.3. Propiedades del potencial cuántico derivadas de perturbaciones dependientes del tiempo	21
2.1.4. Un ejemplo con tratamiento relativista, la velocidad de propagación de una perturbación es c	23
2.2. Rastreando el origen de la no localidad a partir de la EDEL	26
2.2.1. El campo de punto cero	26
2.2.2. La dinámica en el espacio fase.	29
2.2.3. La aproximación no radiativa	31
2.2.4. Iniciando la transición al espacio de configuración	32

2.2.5. La ecuación de Schrödinger a partir de la ecuación de Fokker Planck del problema	34
2.2.6. El origen del potencial cuántico de Bohm	36
2.3. Conclusiones	37
3. El enredamiento visto desde la EDEL	40
3.1. La mecánica cuántica en términos de fuerzas	41
3.2. Sistemas de dos partículas en la EDEL	43
3.2.1. La aproximación no radiativa para el sistema de dos partículas.	45
3.2.2. Llevando la descripción al espacio de configuración	47
3.2.3. Un breve paréntesis; la estructura de la solución y sus implicaciones en la forma de las variables Γ , $\sigma_{p_i}^2$ y $\langle p_i \rangle_x$	50
3.2.4. La ecuación de Schrödinger en un sistema de dos partículas	51
3.2.5. El potencial cuántico en sistemas de dos partículas	53
3.3. El enredamiento como un efecto radiativo	54
4. Recapitulación	57
4.1. Sobre la localidad en la teoría cuántica	57
4.2. El aparato no local de la teoría cuántica	58
4.2.1. Los sistemas de una partícula	60
4.3. El aparato no local de la teoría cuántica desde la EDEL	61
4.3.1. El enredamiento visto desde la EDEL	62
4.4. Perspectivas a futuro	64
4.5. ¿Por qué la EDEL?	64
Apéndices	67
A. Cálculo de las correlaciones $\langle \sigma_a \sigma_b \rangle$	68
B. Cálculo de la solución a la ecuación del doble pozo.	69
C. El método de perturbaciones dependiente del tiempo.	71
D. Reducción de la descripción al espacio de la partícula	74

Introducción

La física cuántica es una teoría indudablemente exitosa. Fue capaz de introducir dentro de un mismo marco teórico autoconsistente, la predicción de los espectros atómicos (con resultados sumamente precisos), la descripción del efecto túnel, un modelo de transistor excelente y también de los materiales que son superconductores a baja temperatura; sus ideas y sus métodos se han extendido también al mundo subatómico con resultados excelentes. Su impacto en la sociedad es notable. Según la revista Science [1], para junio de 2009, el 30 % del producto interno bruto de los Estados Unidos de Norteamérica era debido a tecnologías derivadas de la cuántica. Y es que esta teoría se ha extendido a otras ramas de la ciencia en donde sus modelos han sido de gran utilidad. En el caso de la química, la cuántica ha sentado las bases que definen las propiedades electrónicas de los compuestos y también ha permitido estudiar procesos tan complejos como la fotosíntesis.

La teoría cuántica, que constituye el modelo más exitoso de la física del mundo microscópico, ha estado siempre acompañada de un debate relevante para la epistemología, y esencial para la física. Lo que genera el debate es la falta de consenso en el significado de los elementos que conforman la teoría cuántica, aunque usualmente esto lo precibimos en otras discusiones como la planteada por Einstein, Podolsky y Rosen: ¿es completa la descripción que hace la teoría cuántica de la realidad?, o una que ha tomado particular importancia actualmente, sobre todo por sus consecuencias cosmológicas ¿qué produce (qué significa) el colapso de la función de onda? Este debate es actual y esto se puede constatar en la realización de reuniones como la que se sostuvo en Minnessota (2004) [2]¹ y en una encuesta (2013) [3]² donde se muestra que no hay concenso entre la comunidad científica cuando se trata de los fundamentos de la teoría.

Puesto que los esfuerzos en investigación han sido dirigidos hacia extender los alcances de la teoría cuántica y no tanto a esclarecer el significado de los elementos que conforman la teoría, la situación actual sobre muchos de los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica permanece prácticamente en el mismo estado que hace aproximadamente cien años, cuando los fundadores

¹En este artículo, se relata una reunión a la manera del Congreso Solvay de 1927 (aquella reunión donde los fundadores de la cuántica discutieron la interpretación de los conceptos fundamentales de la teoría) que fue realizada en Minnesota en 2004, para discutir lo que significa realizar una medición. El debate giró en torno al colapso de la función de onda y el artículo evidencia que sigue siendo controversial.

²Este artículo fue noticia de la revista Nature y enfatiza que las respuestas a la pregunta *¿tienen los objetos físicos sus propiedades bien definidas antes (y de forma independiente) del experimento?* están prácticamente divididas igualmente entre sí y no.

de la teoría cuántica escribieron artículos, ensayos y libros sobre la forma en que deben interpretarse las ecuaciones de la teoría cuántica y los elementos de las mismas. La intención de esta tesis es aportar al entendimiento del significado de algunas propiedades características de la mecánica cuántica, en particular la no localidad. Esto se hará en una primera instancia estudiando ejemplos en donde la cuántica predice soluciones incompatibles con el resto de la física. Posteriormente, a través de la electrodinámica estocástica (una teoría a partir de la cual se obtiene la mecánica cuántica como un fenómeno emergente, resultado de un cierto proceso estocástico, la partícula está sometida a un campo electromagnético ”de fondo estas ideas se desarrollan más en el cuerpo de la tesis) se muestra que la no localidad aparece en la descripción cuando esta última se restringe al espacio de configuración y se elimina la fuente de estocasticidad. Contrario a lo que comentan científicos como Holland [4] y a las interpretaciones del Teorema de Bell que he escuchado a lo largo de mi carrera por parte de profesores y colegas, este resultado debería mostrar que la naturaleza no tiene por qué ser no local, si bien la descripción cuántica que hacemos de ella en efecto lo es.

El presente trabajo analiza la no localidad cuántica, planteada como un problema fundamental de la teoría. Dividido en cuatro capítulos, el estudio inicia con el artículo que dio origen a la discusión sobre la no localidad, el famoso artículo de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR). Como el estado de muchos conceptos no ha cambiado mucho en alrededor de 100 años, este análisis permanece relevante y necesario para introducir la discusión. Posteriormente, se estudia brevemente la aparición el término *enredamiento* que Schrödinger añadió al lenguaje de la teoría, inspirado en el artículo de EPR y se revisa resumidamente el Teorema de Bell. Al final del capítulo se examinan someramente algunos trabajos que critican las conclusiones que comúnmente se extraen de este teorema y también se analiza qué papel jugaría la interpretación de la función de onda en la localidad de la teoría cuántica para la obtención de los resultados de los trabajos estudiados.

En un segundo capítulo, se analizan sistemas de una partícula y se muestra que la teoría cuántica predice resultados que son contrarios al resto de las teorías físicas. A este resultado se le asocia un tipo de no localidad en donde no pueden existir “acciones fantasmales a distancia”, pues el sistema está compuesto de *una* partícula. Este capítulo resulta relevante porque usualmente la localidad es considerada una característica propia de sistemas de dos o más partículas. Pero un análisis relativamente sencillo muestra que la teoría cuántica es no local en su esencia; la propia descripción de la realidad a través de la función de onda es no local. Interesante resulta que este hecho no cambia aún cuando se describe a la naturaleza con la teoría cuántica relativista. Se analizan los sistemas de una partícula a través de la interpretación determinista y causal de la cuántica (de De Broglie - Bohm); se estudia el elemento de la teoría al que se le atribuye la no localidad [4], el llamado potencial cuántico. Se muestra qué efecto tienen las perturbaciones del potencial clásico del problema sobre el potencial cuántico y se evidencian los mecanismos no locales con los que la teoría cuántica describe a la naturaleza. La necesidad de mecanismos no locales es revisada a través del marco teórico de la electrodinámica estocástica lineal (EDEL). En esta teoría fundamental de la mecánica cuántica, la descripción se vuelve no local cuando se transita de la descripción en el espacio fase de un proceso estocástico a una en el de configuración sin considerar la fuente de estocasticidad; ésta última resulta ser la descripción cuántica de la

naturaleza, la ecuación de Schrödinger.

En la tercera parte de este trabajo, se estudia un sistema de dos partículas inmerso en un campo electromagnético estocástico común desde la perspectiva de la EDEL. La descripción con la que se inicia el estudio es completamente local, pues la ecuación propuesta para modelar la dinámica del sistema es la ecuación de Newton para un sistema de dos partículas inmersas en el campo estocástico de punto cero. Tras una serie de aproximaciones, se muestra que la descripción del mismo sistema se realiza mediante una ecuación tipo Hamilton Jacobi y una ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad³ las cuales resultan ser equivalentes a la ecuación de Schrödinger para sistemas bipartitas. A partir de estos resultados se analiza la no localidad en sistemas cuánticos de dos partículas, así como su relación con el enredamiento, desde una perspectiva novedosa.

En el último capítulo se sintetizan y se discuten los resultados obtenidos en los capítulos 2 y 3 en torno al significado y alcance del calificativo no local que se le aplica a la teoría cuántica. En este capítulo se sintetizan los resultados de la tesis, mostrando que los fenómenos no locales de la teoría cuántica son propios de la descripción y no necesariamente de la naturaleza.

En esta tesis se analiza entonces la no localidad desde la perspectiva de la interpretación ortodoxa, de la determinista y causal y desde una teoría *fundamental* de la mecánica cuántica⁴: la electrodinámica estocástica. En todos los casos se observa que la teoría cuántica (la aproximación cuántica en el caso de la última) es no local, pero sólo la EDE nos permite rastrear el origen de este fenómeno por ser una teoría más amplia. Al exhibir de manera detallada la forma en la cual la teoría cuántica resulta ser no local y presentando una explicación para esta característica, se pretende que quien lea este trabajo retome la discusión entre Einstein y Born (que se quedó inconclusa, a pesar de que el sentimiento general es que Einstein “perdió” [8]) con nuevas herramientas para replantear y reconsiderar una respuesta negativa a la pregunta que hacen EPR ¿es completa la descripción cuántica de realidad? La intención de esta tesis es mostrar que la no localidad se encuentra en el seno de la teoría misma y bien podría ser un método utilizado para la descripción de la naturaleza y no una característica intrínseca a ella, como se ha afirmado en varias ocasiones [9][10][11].⁵ La relevancia de la pregunta que plantean EPR radica no tanto en la respuesta, sino en que ella abre camino a la construcción de teorías como la EDEL que amplían nuestra visión del mundo.

³Esta descripción es precisamente la usada en la interpretación causal y determinista de la cuántica y que, como demuestra Bohm en dos famosos artículos [5] y [6], es equivalente a la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica cuando se considera que la función de onda describe, no a un ensamble, sino al sistema directamente.

⁴Por teoría fundamental de la mecánica cuántica debe entenderse una teoría a partir de la cual se obtiene la mecánica cuántica como consecuencia de los axiomas de la primera. La EDEL no es el único esfuerzo en este sentido, un ejemplo es [7].

⁵De hecho, en la cita [11], se argumenta que no sólo el concepto de localidad debe ser abandonado para que una teoría sea consistente con los experimentos “cuánticos”, también ciertas características intuitivas del realismo deben ser abandonadas.

Capítulo 1

Las primeras manifestaciones de la no localidad cuántica

En 1935, Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) publicaron un artículo [12] que impactaría fuertemente a la comunidad científica, debido a que evidenció que la teoría cuántica describe a la naturaleza de una forma muy distinta a como lo hace la física clásica. Quizá la repercusión más importante de dicho artículo al conocimiento científico, fue propiciar una discusión sobre los fundamentos de la mecánica cuántica que condujo al estudio de los estados enredados y de los fenómenos no locales en la descripción cuántica. La discusión de estos temas no sólo no ha terminado, sino que a raíz del Teorema de Bell se ha intensificado¹ y existe ahora un creciente interés en posibles y trascendentes aplicaciones tecnológicas basadas en la no localidad cuántica. Pero más allá de su interés en el campo de la tecnología, el enredamiento, siendo *el rasgo característico de la mecánica cuántica*² puede verse como un recurso que nos permite lograr un mejor entendimiento de la teoría cuántica. Las primeras manifestaciones de la no localidad en la teoría cuántica se reportaron en sistemas de dos partículas, precisamente en el trabajo de EPR, razón por la cual el enredamiento ha llegado a ser prácticamente sinónimo de no localidad. Sin embargo, como se verá en el capítulo 2, aún en sistemas de una partícula se presentan fenómenos no locales. El estudio de este rasgo característico de la mecánica cuántica (la no localidad) en esta tesis, nos conducirá a identificar un proceso estocástico detrás de la descripción cuántica; pero antes de todo, veamos cómo inició la discusión...

1.1. El trabajo de EPR

Para poder asentar a la teoría cuántica como una teoría satisfactoria, sería necesario que ésta satisficiera dos requerimientos: que sea correcta y que sea completa. Mediante experimentos y

¹Según PROLA, el año 2011 fue el año con mayor número de citas al artículo [12], sumaron 317. En 2012 el número de citas se mantuvo alto, 277.

²Así lo calificó Schrödinger en su artículo de 1935 [13], obra donde se define este concepto.

mediciones es que se puede calificar si se satisface o no el primer requerimiento y la cuántica sí que lo hace, la teoría reproduce los resultados experimentales dentro de márgenes de error muy pequeños. El segundo requerimiento es el que se aborda en el artículo que analizaremos en esta sección.

En el artículo, EPR demuestran que suponer la completitud de la descripción cuántica conduce a resultados inconsistentes. A continuación, revisaremos la línea de argumentación de EPR.

1.1.1. Realidad y completitud, condiciones relevantes.

Dependiendo de la definición de completitud, una teoría puede o no ser completa. Para evitar que el argumento presentado dependa de tal definición, EPR observan que existe un elemento que parece ser necesario en todas las posibles definiciones y establecen una

- a) condición necesaria para que una teoría sea completa:**
 Todo elemento relevante de realidad física debe tener su contraparte en la teoría física.

Esta condición queda sujeta entonces a lo que se considere un *elemento de realidad física*. Para los propósitos del trabajo sólo resulta necesario establecer una

- b) condición suficiente para asignar un elemento de realidad a una cantidad física:** Si se puede predecir el valor de una variable física con certeza (probabilidad igual a uno) sin afectar al sistema de forma alguna, entonces existe un elemento de realidad física que corresponde a dicha variable.

Establecida la condición **b)**, veremos más adelante que la teoría cuántica permite asociar elementos de realidad a variables cuyos operadores no conmutan.

1.1.2. Los elementos de realidad asociados a dos variables que no conmutan.

A la variable física A de un cierto sistema compuesto por una partícula la teoría cuántica le asocia un operador hermitiano que denotaremos por \hat{A} . Si Ψ es un eigenestado de dicho operador con eigenvalor a , entonces la variable A tiene con certeza (probabilidad igual a la unidad) el valor a cuando el sistema se encuentra en el estado Ψ . De acuerdo con el criterio **b)**, el asegurar que una partícula se encuentra en un eigenestado del operador \hat{A} , es asociar un elemento de realidad a la variable A : se conoce su valor con certeza, sin necesidad de alterar el estado de la partícula.

Consideremos ahora dos variables A y B . Si sucede que

$$\hat{A}\Psi = a\Psi \quad \text{y} \quad \hat{B}\Psi = b\Psi, \quad (1.1.1)$$

entonces se pueden asociar elementos de realidad tanto a la variable A como a la variable B . Es un resultado de la teoría cuántica que sólo cuando $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ existen eigenfunciones Ψ tales que (1.1.1) se cumple. Para el caso $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, no existe alguna función Ψ que satisfaga

(1.1.1) y por lo tanto no pueden asociarse elementos de realidad a las dos variables A y B simultáneamente. Si suponemos que la función Ψ da una descripción completa de la realidad física y queremos ser consistentes con los criterios que hemos establecido, el hecho anterior impide que las siguientes negaciones sean ambas falsas

- i) la descripción que hace la mecánica cuántica de la realidad mediante la función de onda no es completa
- ii) cuando los operadores asociados a dos cantidades físicas no conmutan, las cantidades no poseen realidad física simultánea.

Es decir, o se considera que la función de onda toma en cuenta todos los elementos de realidad y entonces sólo una de las variables A o B tiene asociado un elemento de realidad [i) falsa, ii) verdadera] o a las dos variables se les pueden asociar elementos de realidad, pero la teoría cuántica, a través de la función de onda, no los describe simultáneamente y entonces sería una teoría incompleta [i) verdadera, ii) falsa]. EPR mencionan que, puesto que la función de onda describe resultados experimentales con éxito, sería aceptable suponer que la mecánica cuántica es una teoría completa, es decir, suponer falsa la afirmación i) y por lo tanto cierta la afirmación ii). Sin embargo, las consideraciones que realizan Einstein Podolsky y Rosen sobre un sistema de dos partículas y que se presentan a continuación, muestran que sí es posible asociar elementos de realidad a variables de operadores que no conmutan.

1.1.3. El ejemplo de EPR

Supongamos que se tienen dos partículas que interaccionan desde un tiempo $t = 0$ hasta $t = T$ y que fuera de este intervalo de tiempo las partículas no interaccionan de forma alguna. Supongamos también que el estado de las partículas en $t = 0$ es conocido. Después de la interacción, la ecuación de Schrödinger nos permite conocer el estado del sistema compuesto para todo tiempo $t > T$. Este estado, que denotaremos por Ψ , puede construirse por lo menos de dos formas como se explica a continuación.

Consideremos dos cantidades físicas A y B pertenecientes a la partícula 1. Sean $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ las respectivas eigenfunciones de los operadores asociados a estas variables:

$$\hat{A}u_n = a_n u_n \quad \text{y} \quad \hat{B}v_n = b_n v_n. \quad (1.1.2)$$

Usando el primer conjunto de eigenfunciones, el estado del sistema compuesto por las dos partículas se puede escribir de la siguiente forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_n \psi_n(x_2) u_n(x_1). \quad (1.1.3)$$

Visto el estado Ψ como función de x_1 (la variable de posición de la partícula 1) las funciones $\psi_n(x_2)$ son solamente los coeficientes del desarrollo en la base formada por las funciones $u_n(x_1)$. Si se midiera el valor de la variable A de la partícula 1 y resultara a_k , entonces, el estado de la partícula 1 después de la medición sería u_k , por lo que el estado de la partícula 2 debe estar

descrito por la función de onda ψ_k : el desarrollo (1.1.3) se reduce a un solo término. A este proceso, mediante el cual la superposición de estados (1.1.3) se reduce a un solo sumando, como resultado de alguna medición, se le conoce como *colapso de la función de onda*.

De igual forma, se pudo haber descompuesto la función Ψ en términos de las funciones $\{v_n\}$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_n \phi_n(x_2)v_n(x_1). \quad (1.1.4)$$

Si se midiera la variable B de la partícula 1, se obtendría como resultado algún eigenvalor b_r . En tal caso, el estado de la partícula 2 estaría descrito por la función ϕ_r después de la medición y el de la partícula 1, consecuentemente con la ecuación (1.1.4), sería v_r .

Se puede ver entonces que, como resultado de dos diferentes procesos de medición efectuados sobre la partícula 1, la partícula 2 se encontrará en un estado descrito por dos funciones de onda diferentes, $\psi_k(x_2)$ y $\phi_r(x_2)$. *Como las partículas no interaccionan después de $t = T$, el estado de la partícula 2 no pudo haber sido modificado por el proceso de medición en la partícula 1 y por lo tanto estas dos funciones deben describir la misma realidad física*³. Si $\psi_k(x_2)$ y $\phi_r(x_2)$ resultan ser eigenfunciones de ciertos operadores \hat{F} y \hat{G} , la afirmación anterior les atribuye elementos de realidad a las variables F y G de la partícula 2, resultado que es independiente de si conmutan o no los operadores \hat{F} y \hat{G} . En particular, EPR presentan el ejemplo de un estado Ψ para el cual dichos operadores no conmutan. Parten de la siguiente función de estado:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int e^{(i/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (1.1.5)$$

donde x_0 es una constante. La función (1.1.5) se puede escribir en términos de la base de eigenfunciones $\{u_p(x_1)\}$ del operador \hat{p}_1 :

$$\hat{p}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1},$$

es decir,

$$u_p(x_1) = e^{(i/\hbar)px_1}. \quad (1.1.6)$$

En este caso, las funciones $\psi_p(x_2)$ deben ser:

$$\psi_p(x_2) = e^{(-i/\hbar)(x_2 - x_0)p} \quad (1.1.7)$$

para que el desarrollo (1.1.3) reproduzca la función (1.1.5). Las funciones $\psi_p(x_2)$ resultan ser eigenfunciones del operador de momento $\hat{p}_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}$ de la segunda partícula.

Otra manera de escribir la función (1.1.5) es usando las eigenfunciones del operador de posición de la primera partícula $\hat{x}_1 = x_1$:

$$v_x(x_1) = \int e^{(-i/\hbar)(x - x_1)p} dp = \delta(x - x_1). \quad (1.1.8)$$

³Este enunciado es el que se considera como la hipótesis de separabilidad en el trabajo de EPR y se discute en la sección 1.1.4 con mayor detalle.

En este caso, las funciones $\phi_x(x_2)$ del desarrollo (1.1.4) deberían ser las de la siguiente ecuación para que se tenga el desarrollo correcto de (1.1.5).

$$\phi_x(x_2) = \int e^{(-i/\hbar)(x_2-x_0-x)p} dp = \delta(x_2 - x_0 - x). \quad (1.1.9)$$

Las funciones (1.1.9) son eigenfunciones del operador $\hat{x}_2 = x_2$, con eigenvalor $x + x_0$.

En términos del lenguaje que se introdujo abajo de la ecuación (1.1.4), los operadores \hat{F} y \hat{G} serían los operadores \hat{p}_2 y \hat{x}_2 del ejemplo recién expuesto. Como se estableció anteriormente, los argumentos de EPR muestran que es posible asignar a las variables asociadas a esos operadores elementos de realidad. Sin embargo, $[\hat{x}_2, \hat{p}_2] \neq 0$, por lo tanto, concluimos que la teoría cuántica asigna elementos de realidad a variables físicas cuyos operadores no conmutan, lo que permite concluir que la afirmación **ii)** es falsa. No obstante, como se discutió en la sección 1.1.2, las afirmaciones **i)** y **ii)** no pueden ser ambas falsas, de donde se sigue que necesariamente **i)** es verdadera, i.e., la descripción que provee la función de onda *no* es completa.

Los resultados anteriores se pueden sintetizar de la siguiente forma: si suponemos que la mecánica cuántica es una teoría completa (\neg **i)**) se sigue como consecuencia, a través del ejemplo de EPR, que es posible asociar elementos de realidad a variables de operadores que no conmutan: (\neg **i)** \rightarrow \neg **ii)**). No obstante, vimos en la sección 1.1.2 que las afirmaciones **i)** y **ii)** no pueden ser ambas falsas. La teoría establece que esta posibilidad es inconsistente i.e., la teoría cuántica impide \neg **i)** \wedge \neg **ii)**). Por lo tanto, para que la teoría sea autoconsistente, no es posible suponer que la teoría cuántica es completa.

1.1.4. Hipótesis implícitas: la localidad y la separabilidad.

Existen dos hipótesis implícitas en el trabajo de EPR: la separabilidad y la localidad. La hipótesis de separabilidad consiste en suponer que, al menos al momento de la medición [14], es posible describir de forma independiente los estados de los subsistemas (i.e. de cada una de las partículas); en el lenguaje que es empleado a lo largo del artículo de EPR: existen elementos de realidad que son propios de cada uno de los subsistemas de forma independiente, la descripción del sistema *como un todo*⁴ es prescindible. La hipótesis de *separabilidad* es necesaria para introducir la discusión acerca de la localidad, pues de lo contrario no tendría sentido establecer la forma de interacción entre los subsistemas.

Demos por cierta la separabilidad del sistema. Cuando EPR suponen que para tiempos posteriores a la interacción ($t > T$) la medición sobre una de las partículas no puede afectar el estado de la otra por el hecho de que se encuentran separadas, suponen que las interacciones entre partículas descritas por la teoría cuántica son locales, así como lo son las interacciones fundamentales en la física clásica -interacciones mediadas por campos. Esta hipótesis de localidad es mostrada por algunos autores como la “falla” del argumento que presentan EPR [15]. Si se supone que dentro de la teoría cuántica las partículas pueden afectarse mutuamente aún en ausencia de una

⁴ Como un todo es una característica esencial de la descripción de la naturaleza que hace la mecánica cuántica a través de la función de onda, no sólo en el caso de los estados enredados (véase siguiente subsección).

interacción mediada por un campo físico, el argumento de EPR no necesariamente muestra que la teoría cuántica es incompleta, sino que existe un tipo de interacción no local entre las partículas. Identificamos aquí entonces una primera acepción para el término no local: es una propiedad que se manifiesta cuando cuerpos distantes que no interactúan vía un potencial externo se ven afectadas por la presencia del otro. ¿Qué tipo de fuerza podría ser la responsable de esta afectación? En el capítulo 3 se estudian algunas características de esta fuerza en términos de la formulación causal y determinista de la mecánica cuántica. También se muestra que es posible recuperar estos fenómenos no locales a partir de una teoría completamente local.

Una de las dificultades al emprender el estudio de la discusión sobre el artículo de EPR es el excesivo número de trabajos que existen sobre el tema, muchos de ellos han buscado argumentos para apoyar la hipótesis de que no existe una teoría local del mundo microscópico. En este capítulo nos restringiremos a revisar brevemente sólo aquellos que considero más relevantes desde el punto de vista histórico, la respuesta de Schrödinger a EPR y el trabajo de Bell donde establece su famoso teorema.

1.2. El enredamiento

Motivado por el artículo que estudiamos en la sección anterior, Schrödinger publicó un trabajo [13] en el mismo año, donde hace énfasis en el fenómeno que subyace al argumento de EPR y que, remarca el autor, revela *el rasgo característico de la mecánica cuántica*; introduce así el concepto de *enredamiento* que Bell explotará más adelante y alrededor del cual se centrará la discusión sobre la no localidad cuántica.

1.2.1. ¿Qué es el enredamiento?

Supongamos que se tiene un sistema de dos partículas aisladas y que conocemos el estado de cada una mediante sus funciones de onda, $\psi_1(x_1)$ y $\psi_2(x_2)$. Dejaremos que las partículas interactúen durante un cierto intervalo de tiempo $[0, T]$ y posteriormente garantizaremos que no exista la posibilidad de que sigan interactuando, justo como en el ejemplo de EPR. Sucede entonces que la ecuación de Schrödinger predice que para $t > 0$ (y aún para $t > T$, cuando ya no hay interacción entre partículas) el estado del sistema completo no puede seguir siendo descrito (en general) como antes de la interacción, es decir, asociando a cada partícula una función de onda que describa su estado en forma separada. *El estado* de las dos partículas debe ser descrito por una sola función $\Psi(x_1, x_2)$ que no puede escribirse como el producto de dos funciones de una sola variable: la función de onda Ψ no es factorizable.

Schrödinger denominó dicha imposibilidad para describir el estado del sistema en términos de estados de los subsistemas como *enredamiento*⁵ y comenta en [13] que es *el rasgo* que caracteriza a

⁵El término original en alemán es “Verschränkung”, traducido también en ocasiones al español como entrelazamiento. El verbo “verschränken”, de donde proviene, se utiliza para nombrar la acción de entrelazar de forma cruzada los estambres cuando se teje.

la descripción cuántica, que la hace diferente de la clásica.⁶ Menciona también que para desenredar el estado, es decir, para asociar un estado a cada partícula de forma separada, es necesario obtener información del sistema por medio de experimentos en un proceso que denomina desenredamiento y que no corresponde a una evolución unitaria. Este proceso es de suma importancia porque está involucrado en todos los procedimientos de medición, y por lo tanto, forma parte de la base de la teoría cuántica de la medición.⁷

El estado del sistema que construyen EPR es un estado enredado, pues la función

$$\Psi(x_1, x_2) = \int e^{(-i/\hbar)(x_2 - x_0 - x_1)p} dp, \quad (1.2.1)$$

no es factorizable en alguna representación. EPR se restringen a mostrar que existe un ejemplo, Schrödinger generaliza el argumento y muestra que siempre es posible, en sistemas de dos partículas, construir un ejemplo tipo EPR. Como menciona Schrödinger, más que responder a la “paradoja” EPR, aporta elementos a ella que resultan interesantes.

1.2.2. La observación de EPR es la regla, no la excepción

El hecho de que no se pueda describir a cada uno de los subsistemas de forma independiente una vez que han interactuado es una propiedad que caracteriza a la teoría cuántica, pues desde el punto de vista clásico, cada partícula tiene un estado propio descrito por su posición y su momento -o, equivalentemente, su velocidad.⁸ Pero el desenredamiento de estados enredados nos permite determinar el estado de uno de los subsistemas a partir de mediciones realizadas sobre el otro. A continuación veremos las implicaciones teóricas de lo anterior (que no es sino la observación que hacen EPR) como fueron entendidas por Schrödinger.

Supongamos que se realiza una serie de mediciones sobre la partícula 1 de variables asociadas a operadores que conmutan, tantas variables independientes como grados de libertad tenga el sistema. Lo anterior permite determinar completamente el estado del sistema. Entonces existe una base $\{f_n(x_1)\}$ de eigenfunciones ortonormales entre sí comunes a ambos operadores. Como se realizó en la sección 1.1.3, la función $\Psi(x_1, x_2)$ puede desarrollarse respecto a la base anterior, como:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_n c_n f_n(x_1) g_n(x_2). \quad (1.2.2)$$

⁶Esta definición de enredamiento, como la imposibilidad de expresar el estado $\Psi(x_1, x_2)$ como un producto $\phi_1(x_1)\psi_2(x_2)$, es válida para estados puros $|\Psi\rangle$, que son los que emplearemos a lo largo de la tesis. Para estados mezcla debemos recurrir a una definición de enredamiento más general.

⁷A pesar de la importancia que tiene este proceso, no existe en la actualidad una teoría cuántica de la medición que sea satisfactoria, el colapso de la función de onda sigue causando preocupaciones. [2][16]

⁸La termodinámica sí describe sistemas a través de variables que no son propiedad de una partícula, sino del ensamble de partículas cuando se alcanza el equilibrio termodinámico; sin embargo la entropía de un sistema (y con ella toda la termodinámica del sistema) puede obtenerse a partir de la mecánica clásica, donde los estados no definen a un ensamble sino a las partículas directamente, utilizando métodos estadísticos. En este ejemplo, la termodinámica representa una herramienta para sistemas tratables estadísticamente y no una teoría fundamental de la dinámica de las partículas.

Las constantes c_n se introducen para que $\{g_n(x_2)\}$ sea un conjunto de funciones normalizadas. En principio no hay algo que garantice que las funciones $g_n(x_2)$ formen un conjunto ortogonal -en la expresión anterior son sólo los coeficientes del desarrollo de la función Ψ vista como función de x_1 . Sin embargo Schrödinger demuestra que siempre existe un conjunto único de funciones $\{f_n(x_1)\}$ para el que $\{g_n(x_2)\}$ es un conjunto ortogonal cuando los coeficientes $|c_n|^2$ son todos diferentes, que es el caso más general del desarrollo (1.2.2).⁹ Este desarrollo lo denomina *biortogonal*.

El desarrollo biortogonal es sólo una de las posibles formas de expresar el estado (1.2.2), pero resulta muy ilustrativa para entender el enredamiento. Consideremos que (1.2.2) representa el desarrollo biortogonal del sistema. El resultado de mediciones sobre la partícula 1 determinará el estado en el que se encuentra la partícula 1 y será, por construcción, la función f_k para alguna k . Como consecuencia, el estado de la partícula 2 estará determinado por la función g_k . Si se determinara el estado de la partícula 1 a través de un conjunto diferente de mediciones sobre la partícula 1, el desarrollo biortogonal determinaría dos conjuntos diferentes de eigenfunciones ortonormales $\{\tilde{f}_n(x_1)\}$ y $\{\tilde{g}_n(x_1)\}$. Si uno supone que las mediciones sobre la partícula 1 no pueden afectar el estado de la partícula 2, las funciones \tilde{g}_n deben ser las mismas g_n . La hipótesis anterior está basada en la suposición de que es posible describir de forma separada a un sistema enredado una vez realizada la medición, en el principio de localidad y en la suposición de que el estado del sistema queda completamente descrito a través de su función de onda. Como el desarrollo (1.2.2) debe ser única dadas las funciones $\{g_n(x_1)\}$, las mismas funciones $\{f_n(x_1)\}$ deberían determinar el desarrollo sin importar el conjunto de operadores utilizados para determinar el estado de la partícula 1. Sin embargo, lo anterior puede no suceder dado que los conjuntos de operadores $\{\hat{F}_n\}$ y $\{\tilde{\hat{F}}_n\}$ asociados a las mediciones que determinan los estados $\{f_n(x_1)\}$ y $\{\tilde{f}_n(x_1)\}$ pueden ser contruidos de tal forma que $[\hat{F}_i, \tilde{\hat{F}}_j] \neq 0$ para ciertos valores de i y j y en este caso no pueden compartir todas sus eigenfunciones.

Parecería entonces que la posibilidad de determinar el estado a través de distintos conjuntos de variables asociadas a operadores que no conmutan implicaría el hecho de que la medición en uno de los sistemas puede “virar”¹⁰ o cambiar el estado de la partícula que no es medida, aún cuando sobre ella no se ejerza acción alguna. La disyuntiva que proponen EPR y que se presenta en la sección 1.1 parece que Schrödinger la extiende y la plantea como una paradoja donde, si la teoría cuántica es completa, el experimental que realiza la medición en uno de los sistemas puede cambiar a voluntad el estado del sistema que no es medido. Además, esto sucedería de forma inmediata, como más adelante se discutirá alrededor del teorema de Bell.

1.3. El Teorema de Bell

Muchos científicos importantes de la época que presencié el debate que iniciaron EPR y que amplió Schrödinger eran partidarios de la interpretación ortodoxa de la teoría cuántica; aceptaban que ésta daba una descripción completa de la naturaleza a través de la función de onda. El

⁹El caso extremo, en el cual los coeficientes son todos iguales es el que exponen EPR.

¹⁰El término que suele ser usado es *steer* [15], que puede ser traducido como virar, manejar o navegar.

sentimiento general de la comunidad científica actualmente es que este grupo (los ortodoxos) “ganó” el debate [8], el grueso de comunidad científica aceptó que existen interacciones no locales en la descripción cuántica como salida a la paradoja anterior.¹¹ Debido al éxito que ha tenido la teoría cuántica, el construir una teoría más fundamental donde se recupere la causalidad, el determinismo y la localidad fue, y para muchos sigue pareciendo, poco atractivo. No obstante, algunos científicos -de Broglie dentro de los notables- intentaron introducir variables adicionales a la teoría cuántica para elaborar teorías alternativas que despojara a la mecánica cuántica por lo menos de su indeterminismo y su acausalidad. Los esfuerzos en esta dirección los conocemos ahora como teorías de variables ocultas. En 1932, un teorema contribuyó al desinterés de los curiosos que sobrevivieron al debate, el Teorema de von Neumann sobre variables ocultas, donde se establecía que no es posible construir una teoría determinista de variables ocultas consistente con la mecánica cuántica. Fue hasta inicios de 1952 cuando David Bohm construyó un contraejemplo al teorema de von Neuman que publicó en dos de sus artículos más famosos [5] y [6]. En su trabajo (que se discute con más detalle en el capítulo 2) Bohm construye una teoría de variables ocultas (determinista y causal) basada en ideas de De Broglie que reproduce los resultados de la teoría cuántica; esto causó un renovado interés en el tema por parte de algunos físicos, dentro de los que destaca J. S. Bell.¹²

Una característica central de la formulación que realiza Bohm de la mecánica cuántica es que posee una estructura “fuertemente no local”, dice J. S. Bell en su artículo donde prueba el teorema que ahora lleva su nombre [18]. Bell estudió si esta estructura no local es inherente a cualquier teoría de variables ocultas que recupere los resultados de la teoría cuántica; el resultado de este trabajo es revisado a continuación.

Bell supone que existe un conjunto de variables ocultas¹³ (parámetros objetivos), que determinan el estado de un sistema de partículas de “una forma más completa”¹⁴. Puede ser que el resultado del experimento sea la consecuencia de la interacción de la partícula con el aparato de medición y dependa tanto de propiedades de la partícula¹⁵ que se está midiendo, como de la configuración del aparato que realiza la medición. A este tipo de variables se les llama *contextuales* y

¹¹Esto ha cambiado mucho últimamente, prueba de ello es el renovado interés por los fundamentos de la teoría cuántica que transmite el premio Nobel 2003 A. Leggett [2].

¹²Las contribuciones de D. Bohm impactaron fuertemente el trabajo de Bell, pues gran parte de su investigación está centrada en la discusión acerca de la falta de localidad evidente en la formulación determinista y causal de Bohm. En 1966 Bell mostró que una de las hipótesis usadas por von Neumann no se cumple en general [17], con lo que se invalida su conclusión.

¹³Por variables ocultas se debe entender una serie de parámetros físicos que no forman parte del cuerpo teórico de la teoría cuántica y que, al considerarse junto con el estado cuántico del sistema, permiten predecir en forma completamente determinista el resultado de una medición (el cual la mecánica cuántica sólo predice en términos probabilísticos).

¹⁴Porque parte de suponer que la mecánica cuántica a través de la función de onda no la da, como sugieren EPR.

¹⁵A la característica de una teoría en la que se supone que las partículas poseen propiedades de forma independiente a su observación se le conoce como *realismo*. Una medición revelará un valor preexistente de la propiedad medida, aún cuando el resultado pueda ser afectado por el dispositivo que realiza la medición. La visión realista se opone generalmente a la convencional en la teoría cuántica, según la cual, la variable medida tiene sentido físico sólo porque existe un proceso de medición.

no son consideradas dentro del teorema de Bell [19][20][21]. Si el resultado del experimento sólo depende de alguna propiedad de la partícula, se está midiendo una variable *no contextual*. Así, una hipótesis implícita del teorema es que sólo se consideran variables ocultas no contextuales. En su trabajo, Bell establece que *cualquier* teoría de variables ocultas¹⁶ que reproduzca los resultados de la mecánica cuántica no puede ser local, pues la condición de localidad impide que se puedan reproducir las correlaciones que predice la teoría cuántica.

Además de la claridad con la que se presenta el argumento, el trabajo de Bell resultó ser muy importante debido a que es susceptible de ser llevado al experimento, lo que representó una oportunidad para llevar la discusión, que hasta el momento había sido sólo teórica, al laboratorio y dejar que los resultados dieran la última palabra.¹⁷ Mi postura al respecto es que la interpretación de dichos resultados está circunscrita a un modelo de la naturaleza pues las variables propuestas por Bell tienen características que las hacen no genéricas. Por lo anterior, del experimento no se puede extraer la información necesaria para establecer algún tipo de no localidad en los fenómenos observados.

1.3.1. Derivación Matemática

El Teorema de Bell se desarrolla en torno al ejemplo que construyeron Bohm y Aharonov [22] con la intención de simplificar el argumento de EPR. En este ejemplo, el sistema enredado se compone de dos partículas con espín 1/2 en un estado de espín total 0. Las proyecciones del espín en direcciones diferentes juegan el papel de la posición y el momento en el trabajo de EPR. Los operadores asociados a estas variables no conmutan por lo que este ejemplo recupera todas las características del que construyeron EPR en 1935.

Circunscrito al sistema de Bohm y Aharonov, Bell muestra que suponiendo ciertos los requerimientos de localidad y separabilidad (es decir, que el estado de la partícula que no interacciona con el instrumento de medición no es alterado por efecto de la medición realizada en el otro subsistema) no es posible reproducir, en general, las correlaciones entre las variables de las dos partículas que predice la teoría cuántica. Así introduce la razón de ser de su artículo, la inquietud ¿será posible la existencia de una teoría de variables ocultas que recupere las correlaciones que predice la teoría cuántica? Bell responde que no es posible para las teorías locales. Repasemos las ideas que están detrás de esta derivación y en qué momento necesita restringir el tipo de variables utilizadas a variables no contextuales.

Consideremos un sistema conformado por dos partículas (1 y 2) que forman un singulete. Cada una de ellas pasará a través un aparato Stern-Gerlach en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente. Los ejes de campo en los aparatos son variables y están determinados por los vectores unitarios \vec{a} y \vec{b} . Si se satisface $|t_1 - t_2| < d/c$ donde d es la distancia que separa a los aparatos y c la velocidad de la

¹⁶No se menciona la contextualidad como hipótesis para llegar a esta conclusión, aunque más adelante veremos que es necesaria.

¹⁷Aunque las relaciones que se utilizan para realizar los experimentos no son las obtenidas en el artículo mencionado, sí se plantea la posibilidad de probar experimentalmente los resultados del teorema. Posteriormente Clauser, Horne, Shimony y Holt [24] propusieron una versión del Teorema de Bell que es susceptible de ser llevado al laboratorio.

luz, entonces no se podría generar un cambio en alguna partícula por efecto de la medición que se realizara en la otra. Denotaremos por A y B a los resultados de medir las proyecciones del espín de las partículas a lo largo de la dirección $\bar{\mathbf{a}}$ y $\bar{\mathbf{b}}$, respectivamente. El hecho de que los resultados quedan determinados a través de un conjunto de parámetros objetivos λ ¹⁸ y de la orientación del campo sólo en el aparato que mide a cada una (requisito de localidad), se establece de la siguiente forma -una vez que normalizamos:

$$A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) = \pm 1 \quad \text{y} \quad B(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) = \pm 1. \quad (1.3.1)$$

La hipótesis de localidad, i.e., el hecho de que la medición sobre una partícula no afecta a la otra, está implícito en (1.3.1), pues el resultado de A no depende de $\bar{\mathbf{b}}$ y viceversa. Los parámetros λ no son conocidos, pero se propone que existe una función de distribución de probabilidad ρ_λ asociada a ellos con las propiedades:

$$\int d\lambda \rho_\lambda = 1, \quad (1.3.2a)$$

$$\rho_\lambda \in [0, 1]. \quad (1.3.2b)$$

Con esta distribución se puede definir la correlación de los resultados medidos como:

$$P_{ab} = \int d\lambda \rho_\lambda A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) B(\bar{\mathbf{b}}, \lambda). \quad (1.3.3)$$

El estado singlete corresponde a una correlación perfecta (caso por caso) cuando $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$; para cada par de partículas que provienen de una fuente común en un estado de espín total cero se satisface la siguiente relación -siempre que $\rho_\lambda \neq 0$:

$$A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) = -B(\bar{\mathbf{a}}, \lambda). \quad (1.3.4)$$

Sea $\bar{\mathbf{c}}$ otro vector unitario, entonces, usando (1.3.3) y el hecho de que $(A(\bar{\mathbf{w}}, \lambda))^2 = 1$ para cualquier vector $\bar{\mathbf{w}}$, se tiene:

$$P_{ab} - P_{ac} = \int d\lambda \rho_\lambda A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) B(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) - \int d\lambda \rho_\lambda A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) B(\bar{\mathbf{c}}, \lambda) \quad (1.3.5a)$$

$$= - \int d\lambda \rho_\lambda [A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) A(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) - A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) A(\bar{\mathbf{c}}, \lambda)] \quad (1.3.5b)$$

$$= \int d\lambda \rho_\lambda A(\bar{\mathbf{a}}, \lambda) A(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) [A(\bar{\mathbf{c}}, \lambda) A(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) - 1]. \quad (1.3.5c)$$

Por lo tanto, usando (1.3.1), (1.3.2) y (1.3.4) se obtiene que

$$|P_{ab} - P_{ac}| \leq \int d\lambda \rho_\lambda |A(\bar{\mathbf{c}}, \lambda) A(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) - 1| = \int d\lambda \rho_\lambda (A(\bar{\mathbf{b}}, \lambda) B(\bar{\mathbf{c}}, \lambda) + 1) = 1 + P_{bc},$$

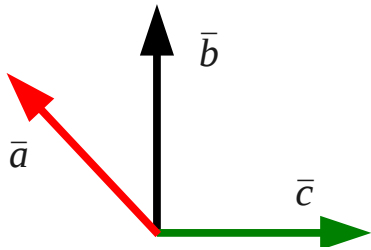
¹⁸Para la demostración del teorema de Bell, λ puede denotar, ya sea, un conjunto de variables ocultas, así como un conjunto de funciones de dichas variables.

pues $A(\bar{\mathbf{b}}, \lambda)B(\bar{\mathbf{c}}, \lambda) + 1$ es siempre mayor o igual que cero. Las relaciones anteriores permiten establecer una condición para las correlaciones P_{ab} , P_{ac} y P_{cb} dada por la siguiente “desigualdad de Bell”:

$$1 + P_{bc} \geq |P_{ab} - P_{ac}|. \quad (1.3.6)$$

Dentro de la teoría cuántica, la correlación (1.3.3) es igual al valor esperado (en este caso en el estado singulete) del operador $\hat{\sigma}_a \hat{\sigma}_b$, donde $\hat{\sigma}_x$ es el operador de proyección de espín sobre el eje definido por el vector unitario $\bar{\mathbf{x}}$. La forma de la correlación es obtenida en el apéndice A e igual a

$$P_{ab} = \langle \sigma_a \sigma_b \rangle = -\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = -\cos \theta \quad \text{donde } \theta \text{ es el ángulo entre } \bar{\mathbf{a}} \text{ y } \bar{\mathbf{b}}. \quad (1.3.7)$$



Bell argumenta que toda teoría de variables ocultas *local* debe satisfacer la relación (1.3.6), pues es la única restricción que se ha impuesto sobre la teoría, además del realismo. No obstante, la teoría cuántica no siempre satisface esta desigualdad, como se muestra a continuación. Consideremos el arreglo con $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = -\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}} = 1/\sqrt{2}$ y $\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{c}} = 0$ -ver figura (1.1).

La ecuación (1.3.6) establecería que

$$1 \geq 2/\sqrt{2}, \quad (1.3.8)$$

Figura 1.1: Disposición de ejes $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ y $\bar{\mathbf{c}}$ que generan una violación de (1.3.6).

lo cual es falso. Bell concluye entonces que no puede elaborarse una teoría local y realista que reproduzca los resultados de la mecánica

cuántica, introduciendo en ella variables (ocultas) que le son ajenas.

1.4. Algunas críticas a las conclusiones de Bell

Para los experimentales, la base en la cual se expresa un estado está determinada por el arreglo experimental. En este sentido, la no conmutatividad de operadores en la teoría cuántica puede interpretarse como la imposibilidad de realizar simultáneamente dos mediciones correspondientes a las variables físicas asociadas a tales operadores. Esto imposibilita la construcción de una función de distribución de probabilidad conjunta para variables que no conmutan, objeción que está en la base de algunos argumentos que critican la conclusión de Bell y que se presentan brevemente a continuación.

Brody

La suposición real que se encuentra detrás de las desigualdades de Bell (y que es violada por la teoría cuántica) no es ni la localidad, ni la posibilidad de construir una teoría de variables ocultas que tenga los mismos resultados que la teoría cuántica; la suposición es que se pueden

medir dos variables sin que exista una interferencia mutua al hacerlo. Brody le llama “suposición de medición conjunta” (SMC).¹⁹ En su artículo titulado “The Bell Inequality I: Joint Measurability” [23], obtiene desigualdades equivalentes a la desigualdad CHSH (la cual es una desigualdad “tipo” Bell desarrollada por Clauser, Horne, Shimony y Holt [24]) sin utilizar alguna hipótesis de localidad; concluye que sólo se requiere que sea cierta la SMC. Además, construye un ejemplo clásico (dos osciladores armónicos clásicos) donde calcula la correlación entre las variables de posición y obtiene la correlación 1.3.7, salvo por el signo. Con lo anterior, muestra que la violación de las desigualdades de Bell no está restringida a la teoría cuántica, sino también a sistemas que entendemos como locales.

Mi objeción al teorema de Bell

Considero que, para las teorías formuladas con variables contextuales no es aplicable el Teorema de Bell. Si uno introduce variables ocultas que dependen de la orientación del aparato de medición, el rumbo del teorema cambia desde la definición (1.3.3). Para una teoría local, ésta debería ser:

$$P_{ab} = \int d\lambda_A d\lambda_B \rho_a(\lambda_A, \bar{\mathbf{a}}) \rho_b(\lambda_B, \bar{\mathbf{b}}) A(\lambda_A, \bar{\mathbf{a}}) B(\lambda_B, \bar{\mathbf{b}}), \quad (1.4.1)$$

donde λ_Y son las variables relevantes para determinar el resultado, en el aparato correspondiente, de la variable Y . Lo que se está haciendo en el fondo es introducir el acoplamiento del instrumento con la partícula y si la medición en la teoría cuántica es un proceso dinámico, esta suposición es necesaria. La función $\rho(\lambda)$ en el trabajo de Bell, por ser independiente de la la orientación del campo en cada aparato Stern-Gerlach, sería

$$\rho(\lambda) = \int d^3\bar{\mathbf{a}} d^3\bar{\mathbf{b}} \rho_a \rho_b.$$

En términos de la notación que se presentó, la resta $P_{ab} - P_{ac}$ (1.3.5a) es:

$$P_{ab} - P_{ac} = \int d\lambda_A d\lambda_B \rho_a(\lambda_A, \bar{\mathbf{a}}) [\rho_b(\lambda_B, \bar{\mathbf{b}}) A(\lambda_A, \bar{\mathbf{a}}) B(\lambda_B, \bar{\mathbf{b}}) - \rho_b(\lambda_B, \bar{\mathbf{c}}) A(\lambda_A, \bar{\mathbf{a}}) B(\lambda_B, \bar{\mathbf{c}})]. \quad (1.4.2)$$

Para pasar a la expresión (1.3.5b) y continuar con el teorema de Bell, sería necesario suponer que $\rho_b(\lambda_B, \bar{\mathbf{b}}) = \rho_b(\lambda_B, \bar{\mathbf{c}})$, que no parece ser razonable y, en todo caso, tendría que ser demostrado para realizar la conclusión que hace Bell en su trabajo.

1.5. Comentarios finales

Publicado diecinueve años después de que lo fuera el artículo [12], un libro de Einstein [25] muestra que la idea que está detrás de la coyuntura que presentan EPR es la interpretación que

¹⁹En inglés, “joint measurability assumption”.

se le da a la función Ψ que es solución a la ecuación de Schrödinger. La “paradoja” propuesta por EPR desaparece si se considera que la función de onda no describe directamente al sistema de partículas, sino que reproduce los resultados experimentales de mediciones realizadas sobre un ensamble, es decir, describe al sistema en un sentido estadístico. De ser así, entonces las leyes que gobiernan los fenómenos cuánticos no son completas por ser intrínsecamente probabilísticas. Más aún, no se podrían encontrar un conjunto de leyes completas a partir de la descripción cuántica, pues “sería como intentar obtener de la termodinámica (de la mecánica estadística), las leyes de la mecánica” [25].

Usualmente se opta por la interpretación ortodoxa de la teoría cuántica, forzando a que la descripción que provee la función de onda sea completa. En es cierto que dicha interpretación, provee una teoría completa y coherente, mientras que la interpretación de ensamble deja el problema abierto de determinar cuáles serían las reglas que rigen la dinámica de partículas microscópicas y que darían lugar a una teoría fundamental. Para mí, este problema no es sino atractivo.

Es importante señalar que ni la interpretación de ensamble ni la ortodoxa, ninguna nos revelan los mecanismos con los que opera la mecánica cuántica (eso es tarea de una teoría fundamental, y no de un interpretación) sólo podemos asegurar que, como explicó Einstein, en la interpretación de ensamble no existe la posibilidad de la inconsistencia que plantean EPR. Sin embargo, no importa cómo interpretemos el significado de la función de onda, siguen existiendo las correlaciones que no sabemos de dónde provienen, fluctuaciones misteriosas, etc. La teoría cuántica como teoría probabilística funciona muy bien, pero no podemos decir por qué funciona.

En este capítulo hemos hecho un breve repaso histórico de los trabajos pioneros más representativos en relación con la no localidad cuántica, exhibiendo la forma tan peculiar que tiene la teoría para describir los sistemas compuestos. Claramente el fenómeno de la no localidad fue inicialmente discutido en el contexto de sistemas de varias partículas (problema al que regresaremos en el capítulo 3); sin embargo, un análisis sobre las soluciones de la ecuación de Schrödinger nos permitirá concluir que la teoría cuántica es intrínsecamente no local, incluso cuando describe sistemas conformados por una sola partícula. En el próximo capítulo abordaremos esta cuestión, y mostraremos que la no localidad cuántica se puede entender como un artificio de la descripción, en lugar de considerarla como una propiedad intrínseca de la naturaleza.

Capítulo 2

No localidad en sistemas de una partícula

La no localidad comúnmente se entiende como un fenómeno asociado a sistemas de varias partículas donde éstas se correlacionan, incluso en ausencia de un campo físico que actúe como mediador de posibles interacciones. Sin embargo, del estudio de dos trabajos importantes ([5] y [6]) de David Bohm, se concluiría que también los sistemas cuánticos de *una* partícula presentan características no locales. El presente capítulo está dedicado a evidenciar y estudiar tales características desde varios puntos de vista.

Para desarrollar su teoría, Bohm reescribe la ecuación de Schrödinger y obtiene una ecuación parecida a la ecuación de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica. Dentro de este esquema, la dinámica de una partícula puede describirse “clásicamente” (empleando las nociones de trayectoria y velocidad) pero incluyendo un potencial cuántico V_Q que se suma al potencial externo (clásico) del problema V . La introducción del potencial cuántico en la ecuación que gobierna la dinámica de una partícula genera entonces un tipo de no localidad desligada del concepto de enredamiento. Esto puede verse estudiando, como se hará más adelante, la evolución temporal de la función de onda para ciertos ejemplos particulares. Veremos que las soluciones de la ecuación de Schrödinger vaticinan cambios “instantáneos” en todo el espacio como consecuencia de una perturbación localizada; de modo que la evolución de un cierto estado inicial resulta ser no local. Podría argumentarse que tal resultado no necesariamente refleja una propiedad no local, ya que la ecuación de Schrödinger no es una ecuación relativista; sin embargo, veremos que la mecánica cuántica relativista tiene soluciones que predicen cambios en la función de onda que se propagan con velocidades tan cercanas a la velocidad de la luz como se desee para sistemas con masa, prediciendo que una partícula masiva se puede acelerar a velocidades enormes como consecuencia de, por ejemplo, liberar partículas confinadas. Lo anterior resulta difícilmente creíble y puede considerarse como la manifestación de mecanismos no locales de la teoría cuántica.¹

¹Es importante observar que este resultado no depende del significado que se le dé a la función de onda, pues para un ortodoxo significa que la partícula tiene probabilidad distinta de cero de acelerarse a velocidades relativistas

Más adelante en el capítulo, se estudia el origen de la no localidad en la descripción cuántica desde la perspectiva de la electrodinámica estocástica lineal (EDEL), teoría que establece que las propiedades cuánticas de los sistemas emergen como resultado de un intrincado proceso de interacción entre la materia y el campo de radiación estocástico de punto cero.

2.1. La no localidad en la descripción cuántica

2.1.1. La formulación tipo Hamilton-Jacobi de la teoría cuántica

La reinterpretación que hace Bohm de la teoría cuántica está fundamentada en la transformación de la ecuación de Schrödinger al proponer la solución:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho} e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar}, \quad (2.1.1)$$

donde ρ y S son funciones escalares reales de la posición y el tiempo. Si sustituimos esta solución en la ecuación de Schrödinger obtenemos:

$$e^{iS/\hbar} i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\rho} + i \frac{\rho}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} S \right) = -e^{iS/\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{\sqrt{\rho}}{\hbar^2} (\nabla S)^2 + i \left(\frac{2}{\hbar} \nabla \sqrt{\rho} \cdot \nabla S + \frac{\sqrt{\rho}}{\hbar} \nabla^2 S \right) + V \sqrt{\rho} \right]. \quad (2.1.2)$$

La ecuación compleja que resulta se puede expresar en términos de las siguientes dos ecuaciones reales (que se corresponden respectivamente, a la parte imaginaria y a la parte real):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (2.1.3a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.1.3b)$$

Siendo que ρ es la densidad de probabilidad en el espacio de configuración, satisface la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.1.4)$$

donde

$$\mathbf{j} = \mathbf{v} \rho, \quad (2.1.5)$$

con $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la velocidad de flujo de probabilidad en el espacio de configuración. Lo anterior nos permite identificar la variable $\rho \nabla S / m$ en (2.1.3a) con la corriente de probabilidad \mathbf{j} y, por tanto, la velocidad de flujo de probabilidad \mathbf{v} está dada por:

$$\frac{\mathbf{j}}{\rho} = \mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}. \quad (2.1.6)$$

al ser liberada (sin darle energía mediante algún mecanismo) mientras que desde la interpretación de ensamble, significa que alguna de las partículas confinadas se aceleró.

Puesto que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad que aparece en la ecuación de continuidad, ella representa la velocidad de flujo, es decir, la velocidad promedio con la que las partículas del ensemble atraviesan un volumen dV centrado en \mathbf{x} en un tiempo dt . Por lo tanto, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ no resultará ser la velocidad de algún miembro del ensamble, sino la velocidad local que está relacionada con un flujo de probabilidad y por tanto lleva información estadística. Más adelante veremos cómo es que Bohm entiende esta velocidad.

Revisemos ahora brevemente la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica, pues ella será relevante para el análisis de las ecuaciones cuánticas (2.1.3). Es común que esta formulación se presente dentro de la formulación hamiltoniana de la mecánica como una cierta transformación canónica de coordenadas que simplifica mucho el hamiltoniano transformado, lo hace cero. Sin embargo, la descripción de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica es una formulación distinta a la Lagrangiana, Newtoniana y Hamiltoniana. Esta formulación puede obtenerse de responder la pregunta ¿existe una función escalar del espacio de configuración cuyo gradiente coincida con el vector tangente a las trayectorias del sistema en dicho espacio? Tal función (que denotaremos por S_c) es la solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi, una ecuación diferencial parcial de $n + 1$ variables -el tiempo y las n coordenadas del espacio de configuración,

$$\frac{\partial S_c}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0, \quad (2.1.7)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, H es la función hamiltoniana y S_c satisface

$$\frac{\partial S_c}{\partial q_i} \equiv p_i, \quad (2.1.8)$$

el momento generalizado asociado q_i .

Para el caso de un sistema en n coordenadas cartesianas, esta ecuación es:

$$\frac{\partial S_c}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} \left(\frac{\partial S_c}{\partial x_i} \right)^2 + V(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (2.1.9)$$

Resumiendo, en la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica se propone la existencia de una función S_c tal que su campo gradiente determine el flujo de las soluciones, i.e., las superficies de nivel de S_c son ortogonales a las trayectorias en el espacio de configuración para todo punto. Las velocidades generalizadas, cuando las coordenadas q^i son directamente la posición en coordenadas cartesianas x_i , coinciden con las velocidades del sistema en las diferentes direcciones

$$v_i = \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (2.1.10)$$

Regresando a la descripción cuántica, vemos que la ecuación (2.1.3b) se parece a la ecuación (2.1.9) en el caso $\hbar \rightarrow 0$. Más aún, esta similitud puede conservarse aún en el caso $\hbar \neq 0$, definiendo un potencial efectivo V_{eff}

$$V_{eff} = V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = V(x) + V_Q(\rho(x)), \quad (2.1.11)$$

donde

$$V_Q(\rho) \equiv -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (2.1.12)$$

Con la definición (2.1.11), la ecuación (2.1.3b) se puede escribir como una ecuación con la misma estructura que la ecuación de Hamilton Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V_{eff}(x) = 0. \quad (2.1.13)$$

Aunque las ecuaciones (2.1.13) y (2.1.9) tienen la misma estructura, es muy importante tener en mente que son bastante diferentes. En la ecuación (2.1.7) se describe el movimiento de una partícula directamente, mientras que en (2.1.13) aparecen variables que son promedios locales sobre un ensamble, es decir, la ecuación (2.1.13) no describe sino estadísticamente la dinámica de un cierto sistema. Sin embargo, en la teoría de Bohm se establece la velocidad (2.1.6) como la velocidad de *una* partícula.

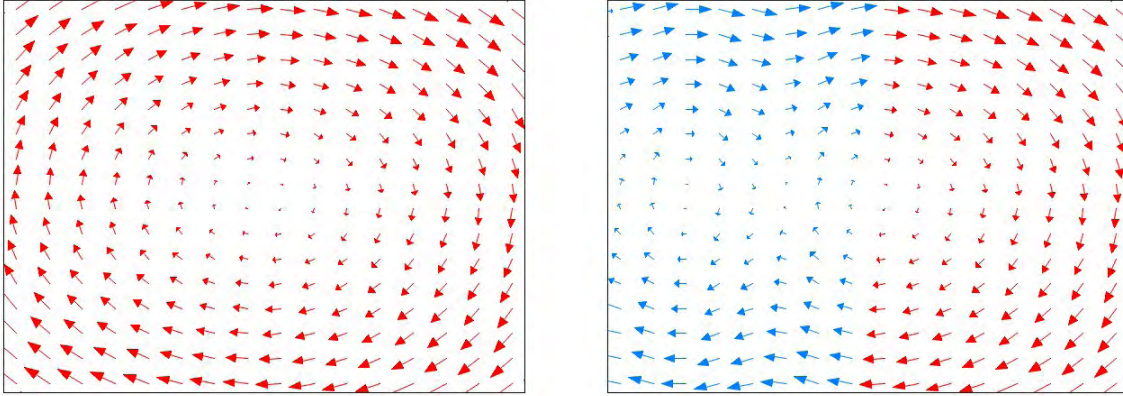
Con esta elección, (2.1.3b) juega el papel de la ecuación de Hamilton Jacobi del correspondiente problema cuántico y Bohm afirma y demuestra en [5] y [6] que las partículas cuánticas pueden ser descritas con los modelos clásicos de partícula cuando agregamos a esta descripción un potencial V_Q que no tiene análogo en la física clásica. El origen de este nuevo potencial, Bohm se lo atribuye a la existencia de un campo *físico* Ψ que está gobernado por la ecuación de Schrödinger y que *guía* a la partícula a través del campo de velocidad dado por la ecuación piloto

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -i \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\nabla \Psi}{\Psi} - \frac{\nabla \Psi^*}{\Psi^*} \right) = \frac{1}{m} \nabla S. \quad (2.1.14)$$

Dicha ecuación determina la trayectoria (concepto ausente en la interpretación ortodoxa) de la partícula, dada la condición inicial $\mathbf{x}(t=0)$. Cuando se asignan diferentes valores a $\mathbf{x}(t=0)$, se determina un ensamble de trayectorias (para la misma función de onda). Se le otorga entonces un sentido estadístico a la teoría postulando que la probabilidad de que la partícula se encuentre en una vecindad $d^3\mathbf{x}$ alrededor del punto \mathbf{x} está dada por el módulo al cuadrado del campo $\Psi(\mathbf{x}, t)$. Esto es lo que permite, en la interpretación de Bohm, establecer contacto con la interpretación probabilística de ρ . Como la posición, el momento de la partícula y el potencial cuántico no son variables en la descripción cuántica ortodoxa, son consideradas “variables ocultas” (en términos del lenguaje utilizado por Bell) en términos de las cuales se puede dar una descripción de los fenómenos completamente equivalente a la ecuación de Schrödinger. A continuación estudiaremos con un poco más de detalle el potencial cuántico y su comportamiento ante perturbaciones en el sistema.

2.1.2. Una diferencia esencial entre el potencial clásico y el potencial efectivo.

Para comparar la teoría cuántica de Bohm con la clásica, recurriremos a una característica que es mejor entendida en la formulación hamiltoniana de la mecánica. En el haz cotangente del



(a) Campo vectorial para la ecuación diferencial (2.1.15)

(b) Campo vectorial para la ecuación diferencial (2.1.16)

Figura 2.1: Modificación local del potencial para un oscilador armónico en el haz cotangente.

espacio (variedad) de configuración, las ecuaciones de Hamilton se ven como un campo vectorial: $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{p}/m, \mathbf{F}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}/m, -\nabla V)$ [26][27]. Las soluciones de las ecuaciones de movimiento son las curvas en el espacio fase (parametrizadas por el tiempo) que son tangentes al campo en todo punto. En principio, dentro de la teoría clásica puede realizarse un cambio en este campo vectorial (en el campo de fuerzas) de forma arbitraria² en el espacio fase sin que esto implique cambios en este campo lejos de la zona modificada.³ La interpretación geométrica de una ecuación diferencial nos permite visualizar esto fácilmente. En las figuras 2.1 se muestran los campos vectoriales de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.1.15)$$

$$m\ddot{x} = \begin{cases} -kx & \text{si } x \geq 0 \\ -k \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Vemos que el potencial se puede modificar localmente, de tal suerte que la dinámica en la región fuera de la zona en la cual se genera la perturbación permanece idéntica. Mientras la partícula no se encuentre en la región en la cual se realizó la perturbación, la partícula no puede percibir las modificaciones en el potencial a distancia.

A continuación veremos que, en el caso cuántico, cambios en el potencial externo V en una cierta región D del espacio generan cambios en el potencial cuántico en regiones tan lejanas de

²Tomando en cuenta la condición de continuidad del campo.

³De hecho, el concepto de potencial fue introducido para realizar una descripción local de la dinámica de los sistemas que simplifica mucho la descripción de los fenómenos electromagnéticos [28], la dinámica de una partícula sólo depende de las características del potencial en la vecindad de la partícula.

D como se quiera. Esto es, el potencial efectivo, a diferencia de uno clásico, no puede modificarse localmente.

Consideremos el producto cartesiano $\{\mathbf{x} \times (\nabla S)\}$. Este espacio es el espacio fase en la formulación determinista de la teoría cuántica. Las trayectorias tangentes al campo vectorial $(\mathbf{p}/m, -\nabla V_{eff})$ en este espacio fase son las soluciones de la ecuación diferencial (2.1.13) y por tanto corresponden a las posibles trayectorias de la partícula. Supongamos ahora que cambiamos el potencial V_{eff} en una región del espacio D , modificando el potencial externo (físico) del sistema. Estudiaremos un ejemplo en el cual dicho potencial de⁴⁵

$$V_I(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x \leq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 2a + b, \\ 0, & \text{si } 0 < x < 2a + b, \end{cases} \quad (2.1.17)$$

a

$$V_{II}(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x \leq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 2a + b, \\ 0, & \text{si } 0 < x < a \quad \text{o} \quad a + b < x < 2a + b, \\ V_0, & \text{si } a \leq x \leq a + b; \end{cases} \quad (2.1.18)$$

con $V_0 > 0$. Las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el potencial de la ecuación (2.1.17) son

$$\psi_I(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen}(kx) & \text{si } 0 < x < 2a + b, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 2a + b, \end{cases} \quad (2.1.19)$$

con $k^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{(2a+b)^2}$ y $n = \{1, 2, \dots\}$, por lo que la solución general dentro del pozo se puede escribir como

$$\Phi_I(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-iE_n t/\hbar} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2a+b}x\right). \quad (2.1.20)$$

Por otro lado, la solución a la ecuación estacionaria de Schrödinger con el potencial (2.1.18) para $E < V_0$ se puede escribir como

$$\Phi_{II}(x) = \begin{cases} A_1 \operatorname{sen}(kx), & \text{si } 0 \leq x < a, \\ A_2 e^{qx} + A_3 e^{-qx}, & \text{si } a \leq x < a + b, \\ A_4 \operatorname{sen}(k(l-x)), & \text{si } a + b \leq x \leq 2a + b, \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

⁴Los efectos transitorios se estudian más adelante.

⁵Las discontinuidades en el potencial no deben introducir efectos sobre lo que queremos demostrar, sólo se toma este potencial por ser de fácil y conocida solución.

donde $l = 2a + b$, $q^2 = \frac{2m(V_0 - E_n^0)}{\hbar^2}$, $E_n^0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ y, suponiendo $qb \ll 1$,

$$k = k_{n\pm} \approx \frac{n\pi}{a} \left(1 - \frac{1}{q_0a} \pm \frac{4}{q_0} e^{-bq_0} \right) \quad (2.1.22)$$

Cabe señalar que el doble pozo (2.1.18) tiene dos soluciones para una misma n , una simétrica (+) y otra antisimétrica (-) respecto al centro del pozo. Una derivación del resultado anterior se puede ver en el Apéndice B.

En el intervalo $[0, a]$, la solución general se escribe entonces como

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-iE_n t/\hbar} \text{sen } k_{n+} x + d_n e^{-iE_n t/\hbar} \text{sen } k_{n-} x, \quad (2.1.23)$$

donde se definió

$$E_{n\pm} = \left(1 - \frac{2}{q_0a} \pm \frac{4e^{-q_0b}}{q_0a} \right) E_n^0.$$

Supongamos que el estado inicial de la partícula es un eigenestado del hamiltoniano con el potencial V_I . Cuando se modifica el pozo y V_I se sustituye por V_{II} , la densidad de probabilidad lejos de la región donde se modificó el potencial (por ejemplo en el intervalo $[0, a]$) ahora es una función del tiempo, pues el eigenestado original ya no lo será del nuevo hamiltoniano y la función de onda en la región $[0, a]$ tendría que escribirse en la forma (2.1.23). Como consecuencia, el potencial cuántico cambiará en el tiempo en lugares lejanos a donde se realizó la perturbación. Ello indica que cambios en el potencial externo en cierta región pueden afectar la dinámica del sistema en regiones distintas, y que no se puede modificar el potencial efectivo en una región sin modificarlo en otra, como ocurre con el potencial externo (clásico); nos lo impide la dependencia de V_Q en ρ .

Con los resultados anteriores, se muestra que el potencial que introduce Bohm para traducir la dinámica de los cuerpos cuánticos en un lenguaje clásico posee propiedades sumamente no clásicas que contravienen las nociones clásicas de localidad. Una pregunta que resulta inmediata de este análisis es cuál es la velocidad con la que se propagan los cambios de V_Q . En la siguiente sección del trabajo, se analizan estados transitorios en el marco de la teoría cuántica no relativista, mostrando que el potencial cuántico cambia instantáneamente en todo el espacio cuando el sistema es perturbado. Veremos también que si se utiliza la ecuación de Klein Gordon, la modificación al potencial cuántico viaja a la velocidad de la luz.

2.1.3. Propiedades del potencial cuántico derivadas de perturbaciones dependientes del tiempo

Consideremos el siguiente potencial dependiente del tiempo que generaliza el presentado en (2.1.18)

$$V(x, t) = \begin{cases} \infty, & \text{si } x \leq 0 & \text{o } x \geq 2a + b, \\ 0, & \text{si } 0 < x < a & \text{o } a + b < x < 2a + b, \\ V_0\tau, & \text{si } a \leq x \leq a + b, \end{cases} \quad (2.1.24)$$

para $\tau = t\epsilon$ una variable adimensional. La solución a la ecuación de Schrödinger la podemos aproximar con teoría de perturbaciones tanto como se quiera para $\tau \ll 1$ y V_0 finito, obteniendo la evolución temporal del estado de donde se puede calcular el potencial efectivo como función del tiempo $V_{eff}(x, t)$. En el apéndice C se presentan los resultados de la teoría de perturbaciones que usaremos aquí para encontrar la solución (aproximada) de la ecuación de Schrödinger.

Suponiendo que a $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado base del pozo no perturbado ($V_0\tau = 0$) y tomando $a = b$, la función de onda (aproximada) que se deriva en el apéndice (C) es:

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{3a}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3a} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(f(k) e^{i\omega_{k1}t} \frac{(1 - e^{-i\omega_{k1}t} - i\omega_{k1}t)}{\omega_{k1}^2} \sqrt{\frac{2}{3a}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{3a} \right), \quad (2.1.25)$$

donde:

$$f(k) \equiv \frac{3i\epsilon V_0}{4\pi\hbar(k^2 - 1)} \left[\operatorname{sen} \frac{2}{3}k\pi + \operatorname{sen} \frac{1}{3}k\pi + k\sqrt{3} \left(\cos \frac{2}{3}k\pi + \cos \frac{1}{3}k\pi \right) \right] \quad y \quad (2.1.26a)$$

$$\omega_{k1} = \frac{E_k - E_1}{\hbar} = \frac{\hbar\pi^2(k^2 - 1)}{2m(3a)^2}. \quad (2.1.26b)$$

La densidad de probabilidad al tiempo $t = 0$ está dada por la ecuación

$$\rho^{(0)}(x) = \rho(x, 0) = \frac{2}{3a} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{3a} x \right) \quad (2.1.27)$$

y un instante después por

$$\rho(x, t) = \rho^{(0)}(x) + \rho^{(1)}(x, t), \quad (2.1.28)$$

donde $\rho^{(1)}$ representa la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} = & \frac{2}{3a} \sum_{k, k'=2}^{\infty} \left(f(k) f(k') e^{i(\omega_{k1} - \omega_{k'1})t} \frac{(1 - e^{-i\omega_{k1}t} - i\omega_{k1}t)}{\omega_{k1}^2} \frac{(1 - e^{i\omega_{k'1}t} + i\omega_{k'1}t)}{\omega_{k'1}^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{3a} \operatorname{sen} \frac{k'\pi x}{3a} \right) \\ & + \frac{4}{3a} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \left(f(k) e^{i\omega_{k1}t} \frac{(1 - e^{-i\omega_{k1}t} - i\omega_{k1}t)}{\omega_{k1}^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{3a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3a} \right) \right]. \end{aligned}$$

El potencial cuántico (2.1.12) para el sistema antes de ser perturbado físicamente (es decir, a $t = 0$) es constante en todo el pozo,

$$V_Q(x, t = 0) = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(3a)^2}. \quad (2.1.30)$$

Para $\tau \ll 1$, el término $\rho^{(1)}$ en (2.1.28) es pequeño comparado con $\rho^{(0)}$, por lo que se podemos considerar $\sqrt{\rho(x, t)} \approx \sqrt{\rho^{(0)}} \left(1 + \frac{\rho^{(1)}}{2\rho^{(0)}} \right)$ de tal forma que el potencial cuántico es, aproximadamente,

$$\begin{aligned}
V_Q(x, t) &\approx \left(1 + \frac{\rho^{(1)}}{2\rho^{(0)}}\right)^{-1} \left(V_Q^{(0)} - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{\sqrt{\rho^{(0)}}} \partial_{xx}^2 \left(\frac{\rho^{(1)}}{\sqrt{\rho^{(0)}}}\right)\right) \\
&\approx V_Q^{(0)} - \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial_{xx}^2 \rho^{(1)}}{2\rho^{(0)}} + \frac{\rho^{(1)}}{(\rho^{(0)})^{3/2}} (\partial_x \rho^{(0)})^2 - \frac{\partial_x \rho^{(1)} \partial_x \sqrt{\rho^{(0)}}}{(\rho^{(0)})^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Es claro de aquí que en presencia de la perturbación, por pequeña que sea, $V_Q^{(0)} \neq V_Q(x, t)$ para cualquier tiempo $t > 0$ y para toda x . De acuerdo con la teoría de Bohm, el potencial al que está sometido una partícula cuántica es $V_{eff} = V + V_Q$. Si uno modifica el potencial V_{eff} mediante un cambio en el potencial V en la región $[a, a+b]$, el cálculo anterior muestra que la teoría cuántica, a través de métodos perturbativos, predice un cambio “instantáneo” en la densidad de partículas en $x \notin [a, a+b]$, que se traduce en un cambio de la misma naturaleza en el potencial V_{eff} . Lo anterior es una muestra de la no localidad en la teoría cuántica, fenómeno que, como hemos visto, es introducido vía el potencial efectivo que aparece en la formulación tipo Hamilton-Jacobi para sistemas cuánticos de una partícula.⁶ Específicamente, la no localidad es resultado de que el potencial efectivo es tal que cambios en alguna región del espacio generan cambios inmediatos lejos de la región perturbada. También es notable que la densidad de probabilidad, una variable medible del sistema, cambia de forma instantánea en regiones lejanas a la perturbación: esto es indudablemente una muestra de no localidad donde *no* hay “comunicación” entre partículas pues sólo hay una.

Podría argumentarse que el método utilizado para llegar a este resultado es aproximado, por lo que la conclusión no debe ser necesariamente cierta, sin embargo el método de perturbaciones debe dar una solución tan cercana a la analítica como se guste y las conclusiones obtenidas seguirían en pie; no obstante, para disipar cualquier duda podemos recurrir a un artículo de Marcos Moshinsky donde se resuelve un estado transitorio de forma analítica. Como veremos a continuación, el resultado es entonces bastante sólido: la ecuación de Schrödinger predice resultados incompatibles con la noción de localidad.

2.1.4. Un ejemplo con tratamiento relativista, la velocidad de propagación de una perturbación es c

Consideremos la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (2.1.31)$$

con $V(x) = 0$ (partícula libre) sujeta a la siguiente condición inicial:

$$\Psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \quad (2.1.32)$$

⁶Recordemos que el conjunto de partículas es un conjunto meramente estadístico; es entonces claro que tampoco tiene sentido pensar en una interacción entre las partículas que conforman al ensemble.

En [29], Moshinsky obtiene la solución analítica del problema:

$$\Psi_k(x, t) = e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}} e^{y^2} \operatorname{erfc}(y), \quad (2.1.33a)$$

$$\text{con } y = \left(\frac{m}{i2\hbar t}\right)^{1/2} \left(x - \frac{\hbar k}{m}t\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty e^{-z^2} dz. \quad (2.1.33b)$$

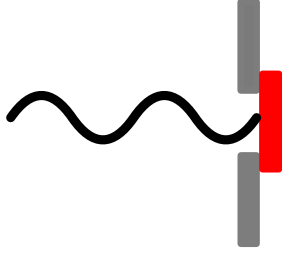


Figura 2.2: Condición inicial de la función de onda en el problema resuelto por Moshinsky.

Este problema es un modelo idealizado de un obturador en $x = 0$ que absorbe completamente partículas que provienen desde $-\infty$ (como se ilustra en la figura 2.2) y que es retirado en $t = 0$. Para analizar las soluciones (2.1.33a) de la ecuación de Schrödinger, observemos el fenómeno a una distancia $x = ct > 0$ donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

La función de onda (2.1.33a) evaluada en $t = t_0$ a una distancia $x = x_0 = ct_0$ resulta ser:

$$\Psi(x_0, t_0) = 2\pi^{-1/2} e^{\frac{imx_0^2}{2\hbar t_0}} e^{-i\frac{m}{2\hbar}(c - \frac{\hbar k}{m})^2 t_0} \int_{y_0}^\infty e^{-z^2} dz. \quad (2.1.34)$$

Como la función error es distinta de cero evaluada en cualquier número $y \in \mathbb{C}$, la función de onda es distinta de cero en $x_0 = ct_0$. Sin embargo, estamos observando el fenómeno a una distancia donde no debería de existir cambio alguno. De hecho, bien pudimos haber evaluado en $x > ct_0$, como comenta el mismo autor (Moshinsky), y haber obtenido el mismo resultado: la función de onda es distinta de cero en toda la región $x > 0$ inmediatamente después de haber retirado el obturador. La densidad de partículas ρ , una cantidad medible, cambia entonces de forma inmediata en toda la región $x > 0$. Antes de quitar el obturador la densidad de probabilidad es cero en esa región, y para $t > 0$ es el cuadrado del módulo de un complejo distinto de cero. Moshinsky comenta esta característica de la solución y menciona que existe un “error” en el modelo debido a no haber considerado la ecuación relativista (de Klein-Gordon) para describir partículas que alcanzaron velocidades comparables con la de la luz -las partículas tendrían que alcanzar velocidades relativistas para ser detectadas en la región $x \approx ct_0$. Resulta curioso (increíble) que una partícula libre se acelere a velocidades relativistas por el hecho de abrir un obturador. Si este problema requiere un tratamiento relativista, entonces también cualquier otro problema como nos muestra el ejemplo de la sección anterior.

La ecuación cuántica relativista del problema es la ecuación de Klein Gordon:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{mc}{\hbar} \Psi. \quad (2.1.35)$$

Su solución, para el mismo problema del obturador, se calcula también en [29] y es:

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{x}{c} \\ e^{i(kx-Ect)} + \frac{1}{2} J_0\left(\frac{mc}{\hbar}(c^2t^2 - x^2)^{1/2}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{iz}\right)^n J_n\left[\frac{mc}{\hbar}(c^2t^2 - x^2)^{1/2}\right] & \text{si } t > \frac{x}{c}, \end{cases} \quad (2.1.36)$$

donde J_n son las funciones de Bessel de orden n , $\xi = [(ct+x)/(ct-x)]^{1/2}$ y $z = \frac{\hbar}{mc}(k+E)$. La energía en el artículo, se expresa en unidades del inverso de la longitud:

$$E = \sqrt{k^2 + m^2c^2/\hbar^2}. \quad (2.1.37)$$

En el límite cuando $x \rightarrow ct$, usando los valores asintóticos para valores pequeños del argumento $(c^2t^2 - x^2)$ de la función de Bessel de orden n , se obtiene [30]

$$J_n(y) \rightarrow \frac{1}{n!} \left(\frac{y}{2}\right)^n, \quad (2.1.38)$$

por lo que la suma infinita en la ecuación (2.1.36) se convierte en:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{iz}\right)^n J_n\left[\frac{mc}{\hbar}(c^2t^2 - x^2)^{1/2}\right] \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{iz}\right)^n \frac{[\frac{mc}{\hbar}(c^2t^2 - x^2)^{1/2}]^n}{2^n n!}. \quad (2.1.39)$$

Esta expresión asintótica, recordando el valor de ξ , resulta ser la serie de la exponencial:

$$e^{[-imc(ct+x)]/(2z\hbar)}. \quad (2.1.40)$$

Sustituyendo lo anterior podemos evaluar el último sumando de la función de onda (2.1.36) (para $x \rightarrow ct$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{iz}\right)^n J_n\left[\frac{mc}{\hbar}(c^2t^2 - x^2)^{1/2}\right] \rightarrow e^{\frac{-ix}{(k+E)} \frac{m^2c^2}{\hbar^2}} = e^{-ix \frac{E^2 - k^2}{(k+E)}} = e^{i(kx-Ect)}, \quad (2.1.41)$$

donde se utilizó la expresión para la energía (2.1.37). Con las consideraciones anteriores, la función de onda es discontinua en $t = x/c$,

$$\lim_{x \rightarrow ct} \Psi(x, t) = \frac{1}{2} J_0(0) = \frac{1}{2}, \quad (2.1.42)$$

lo que predice, para velocidades tan cercanas a la velocidad de la luz como se desee, la existencia de partículas que adquirieron esa velocidad por efecto de liberarlas.

Si vemos este resultado a través de la teoría de Bohm, los cambios en el campo físico Ψ se propagan a la velocidad de la luz y por tanto también los cambios en el potencial cuántico, resultado que parecería ser consistente con la teoría electromagnética y la relatividad general. A través

de la interpretación ortodoxa o de ensamble, este resultado predice algo un tanto cuestionable: la probabilidad de que una partícula con masa sea detectada al mismo tiempo que un fotón que parte desde $x = 0$ cuando se retira el obturador, es distinta de cero para todo efecto práctico. La teoría no nos dice algo acerca de dónde proviene la energía que acelera a las partículas, pero predice que partículas con masa pueden tener velocidades muy cercanas a la de luz. Esto resulta bastante interesante, pues nos permite concluir que no sólo la teoría cuántica no relativista es no local, sino que la ecuación de Klein Gordon parece también mostrar fenómenos no locales cuando el sistema es descrito por una función de onda.

2.2. Rastreando el origen de la no localidad a partir de la EDEL

La no localidad existe en la descripción cuántica independientemente de la interpretación que le demos a la función de onda, sea que ésta represente a una partícula o a un ensamble de partículas. Este hecho puede tomarse como una motivación para estudiar la estructura de la teoría cuántica desde teorías más fundamentales, con el fin de entender mejor el origen de este fenómeno, y del comportamiento cuántico en general. Una teoría fundamental de la mecánica cuántica busca recuperar y entender el formalismo de esta última a partir de principios físicos “más fundamentales”. Dentro de estos esfuerzos, podemos mencionar: la electrodinámica estocástica [31], la obtención de la ecuación de Schrödinger a partir de la termodinámica fuera de equilibrio y las fluctuaciones de vacío [7] y la derivación de la ecuación de Schrödinger a partir de la ecuación de onda para el campo electromagnético y las bases de la teoría de la relatividad especial [32]. En esta sección trataremos de entender la no localidad desde la perspectiva que nos ofrece la electrodinámica estocástica lineal (EDEL). La razón por la cual se utiliza este enfoque es porque el cuerpo de la teoría se fundamenta en los modelos con los que se construye prácticamente toda la física clásica: los campos, el modelo de partícula, posición y tiempo. La ventaja de construir una teoría de tal forma es que nos permite, en principio, crearnos una imagen realista y causal del mundo cuántico; una imagen que considero disfrutable precisamente por ser accesible mediante la experiencia con estos conceptos en la física clásica.

2.2.1. El campo de punto cero

El elemento esencial en la EDEL (que no forma parte de la física clásica y por lo tanto, introduce fenómenos interesantes como la cuantización [33]) es la existencia de un campo estocástico de radiación a temperatura cero, denominado *campo de punto cero* (cpc). La existencia de este campo es un postulado de la EDEL que resulta ser consistente con la electrodinámica clásica. Más aún, se ha demostrado [34,35] que las relaciones termodinámicas para los osciladores de un campo de radiación aceptan soluciones consistentes con la presencia de una energía de punto cero (atérmica) no nula, que es proporcional a la frecuencia del modo de radiación. Así, si bien la existencia del cpc es en principio consistente con la física clásica, esta última no lo incorpora. La idea central de la EDEL es que basta reconocer la presencia del cpc para explicar la cuantización como resultado de la interacción (clásica) entre el campo y la materia. Siguiendo este principio, la

teoría ha sido capaz de recuperar y explicar varios de los mecanismos que subyacen al fenómeno cuántico en general, mostrando que la cuantización no es un fenómeno intrínseco a la naturaleza, sino un fenómeno emergente, resultado, en última instancia, de la existencia del cpc [33][34].⁷

En lo que sigue veremos algunas propiedades del campo de punto cero, que serán de utilidad más adelante.

Sobre las variables que definen al campo

En términos de su desarrollo en ondas planas, la componente eléctrica del campo se puede escribir como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \xi_n}{\omega_n^2 V}} \left(\hat{\mathbf{e}}_{n\lambda} a_{n\lambda} e^{-i\omega_n t + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}} + \hat{\mathbf{e}}_{n\lambda}^* a_{n\lambda}^* e^{-(i\omega_n t + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x})} \right), \quad (2.2.1)$$

donde \mathbf{k}_n es el vector de onda tal que $\omega_n = |\mathbf{k}_n|/c$, λ indica la polarización, $\hat{\mathbf{e}}_n$ es el vector de polarización, ξ la energía por unidad de volumen, y $a_{n\lambda}$ denota una variable aleatoria, que le imprime su carácter estocástico al campo.

Las cuadraturas del campo se definen de la siguiente forma

$$q_{n,\lambda} = i \sqrt{\frac{\xi_n}{2\omega_n^2}} (a_{n\lambda} e^{-i\omega_n t} - a_{n\lambda}^* e^{i\omega_n t}) \quad p_{n,\lambda} = \sqrt{\frac{\xi_n}{2}} (a_{n\lambda} e^{-i\omega_n t} + a_{n\lambda}^* e^{i\omega_n t}). \quad (2.2.2)$$

En términos de estas variables, la hamiltoniana del campo se escribe

$$H = \sum_{n,\lambda} \xi_n a_{n\lambda}^* a_{n\lambda} = \sum_{n,\lambda} \frac{1}{2} (p_{n\lambda}^2 + \omega_n^2 q_{n\lambda}^2), \quad (2.2.3)$$

expresión que tiene la estructura de la función hamiltoniana para un conjunto de osciladores armónicos desacoplados [20]. Estas variables nos permiten modelar naturalmente al campo como un conjunto de osciladores armónicos.

Sobre la densidad espectral del cpc

Una forma de derivar la energía por modo del cpc se basa en la Ley de Wien. Esta ley se aplica a todo sistema de osciladores armónicos que se encuentren en equilibrio térmico a temperatura T . En particular, se aplica a los osciladores del campo de radiación cuando éste se encuentra en equilibrio con la materia de la cavidad que contiene al campo. La Ley de Wien establece que la energía media por modo de frecuencia ω a temperatura T debe ser

$$U(\omega, T) = \omega f(\omega/T), \quad (2.2.4)$$

⁷Dentro de la EDEL, el campo de punto cero es considerado de naturaleza electromagnética por lo que afecta la descripción de partículas que posean algún momento eléctrico o magnético distinto de cero, que es el caso de prácticamente todas las partículas elementales.

donde f es una función hasta aquí indeterminada de su argumento.

Clásicamente, se supone que $f[(\omega/T) \rightarrow \infty] = 0$ de forma un poco arbitraria; un resultado más general sería suponer que $f[(\omega/T) \rightarrow \infty] = A$, donde A es una constante distinta de cero [35]. A temperatura cero, esto define la densidad energética del cpc, entonces la densidad energética por modo de frecuencia ω del cpc debe ser proporcional a la frecuencia:

$$U(\omega, T \rightarrow 0) = A\omega. \quad (2.2.5)$$

Observaciones sobre el comportamiento de la densidad de energía U a $T \neq 0$, nos permiten identificar la constante $A = \frac{\hbar}{2}$.⁸

En [34] se muestra que la Ley de Planck es una consecuencia natural de escoger la solución general (2.2.5) en lugar de la clásica ($U(\omega, T \rightarrow 0) = 0$), es decir, surge de consideraciones termostadísticas que se siguen de suponer que existe energía a temperatura cero, *sin* hipótesis alguna de cuantización. Se obtiene entonces un resultado muy importante como consecuencia directa de la existencia del cpc: la solución al problema del cuerpo negro que vio nacer a la mecánica cuántica.

La densidad espectral del cpc se obtiene de la relación

$$\rho_0(\omega) = U(\omega, T = 0)D(\omega), \quad (2.2.6)$$

donde $D(\omega)$ es el número de modos por unidad de volumen en el espacio definido por las componentes del vector de onda $\{k_x, k_y, k_z\}$, llamado espacio recíproco. El número de estados en una esfera de radio $k \equiv |\mathbf{k}|$ en este espacio es

$$N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{4}{3}\pi k^3. \quad (2.2.7)$$

Si el número de estados lo escribimos en términos de la densidad de estados $D(\omega)$ por unidad de volumen, en la forma $N = \frac{1}{L^3} \int D(\omega) d\omega$, entonces usando la relación $k = \omega/c$, se obtiene que la densidad de modos es proporcional a ω^2

$$D(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3}. \quad (2.2.8)$$

Tomando en cuenta las dos polarizaciones del campo,

$$D(\omega) = \frac{1}{L^3} \frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (2.2.9)$$

Uniendo los resultados (2.2.6) y (2.2.9), obtenemos que la densidad espectral del campo de punto cero es⁹

⁸Con estas observaciones, nos referimos a la distribución de energía radiada por un cuerpo negro medida experimentalmente.

⁹Esta densidad integrada sobre todas las frecuencias es claramente divergente y existen muchos problemas alrededor de ella; es inevitable no mencionar uno, la cantidad de energía contenida en el cpc es enorme, tanta que debería tener efectos gravitacionales de magnitudes que no se observan.[36] Si uno calcula la constante cosmológica considerando la existencia de este campo, se obtiene un valor que difiere del medido por cerca de 120 órdenes de magnitud. Esto no puede indicar sino la existencia de algo que no se está considerando, algo fundamental que no entendemos, y que representa un problema para la física contemporánea.

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \omega^3. \quad (2.2.10)$$

Sobre la distribución de las variables del campo

La distribución de las variables del campo en el modelo estocástico en la EDEL se propone gaussiana. La distribución de probabilidad de las variables del campo que se modela sería:

$$P(q_{n,\lambda}) = \left(\frac{\omega_n}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-q_{n,\lambda}^2 \omega_n / \hbar} \quad (2.2.11a)$$

$$P(p_{n,\lambda}) = \left(\frac{1}{\pi\hbar\omega_n}\right)^{1/2} e^{-p_{n,\lambda}^2 n / \hbar\omega_n}. \quad (2.2.11b)$$

2.2.2. La dinámica en el espacio fase.

Consideremos una partícula con masa m y carga e que interactúa con el campo de punto cero. Las ecuaciones que determinan la evolución del estado de la partícula son:

$$m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + m\tau\ddot{\mathbf{x}} + e\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{e}{c}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}); \quad (2.2.12)$$

donde \mathbf{E} es la componente eléctrica del campo de punto cero, \mathbf{B} la magnética, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es la fuerza externa y $m\tau\ddot{\mathbf{x}}$ es la fuerza de Abraham-Lorentz que representa la fuerza de reacción por efecto de que las cargas radían [37]. La constante τ es proporcional al cuadrado de carga de la partícula:

$$\tau \equiv \frac{2e^2}{3mc^3}. \quad (2.2.13)$$

De ahora en adelante, nos concentraremos en la forma unidimensional de la ecuación (2.2.12) y despreciaremos los efectos magnéticos sobre la dinámica de la partícula, pues analizaremos la dinámica del sistema a velocidades no relativistas.

Para simplificar el análisis de la ecuación anterior, se utilizará la aproximación de onda larga, que consiste en suponer que el gradiente del campo eléctrico es prácticamente cero, es decir, el campo casi no cambia en la región en la cual se está moviendo la partícula. Con las consideraciones anteriores, la ecuación de movimiento de la partícula es:

$$\frac{dp}{dt} = f(x) + m\tau\ddot{x} + eE(t). \quad (2.2.14)$$

La ecuación (2.2.14) determina un campo vectorial en el espacio fase $\{x, p\}$ de la partícula y las soluciones son las curvas en el espacio fase tangentes al campo. Las condiciones iniciales caracterizan a una solución particular y la realización específica del campo.

Si seguimos a una partícula en su espacio fase y observamos el tiempo Δt que se encuentra en un elemento diferencial de volumen $dx dp$ centrado en (x, p) , podemos construir una densidad de probabilidad R de la siguiente manera:

$$R(x, p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{t}. \quad (2.2.15)$$

Es importante notar que la ecuación que gobierna la dinámica de los puntos R no es necesariamente la ecuación de Liouville, pues el hamiltoniano de este sistema depende del tiempo y por lo tanto no se satisfacen las condiciones para el teorema de Liouville; la partícula le transfiere energía al campo y también el campo le transfiere energía a la partícula. Si uno considera el sistema *campo + partícula*, podemos asumir que la energía se conserva y el hamiltoniano de este sistema sí coincidiría con la energía del sistema. Definamos entonces, en el espacio fase del sistema campo + partícula (x_s, p_s) una función de distribución de probabilidad R . Los grados de libertad $x_s \equiv \{x, q_{n\lambda}\}$ y $p_s \equiv \{p, p_{n\lambda}\}$, incluyen a los del campo a través de sus cuadraturas.

La ecuación de continuidad para el conjunto de grados de libertad $x_s \equiv \{x, q_{n\lambda}\}$ y $p_s \equiv \{p, p_{n\lambda}\}$ en el espacio fase es:

$$\frac{\partial}{\partial t} R(x_s, p_s, t) + \dot{x}_s \frac{\partial}{\partial x_s} (R(x_s, p_s, t)) + \dot{p}_s \frac{\partial}{\partial p_s} (R(x_s, p_s, t)) = 0. \quad (2.2.16)$$

Como estamos interesados únicamente en la descripción del sistema mecánico, conviene eliminar de esta ecuación las variables del campo. Para ello definimos un operador \hat{P} , que promedia el valor de una función definida en el espacio fase completo $F(x_s, p_s, t)$ sobre todos los grados de libertad del campo, es decir, sobre todas las posibles realizaciones del mismo.¹⁰¹¹ Con el operador \hat{P} actuando sobre R podemos descomponer R en dos partes, una que corresponde a su promedio (sobre las variables del campo), dada por $\hat{P}R$, y otra que contiene el término fluctuante $(1 - \hat{P})R$:

$$Q(x, p, t) \equiv \hat{P}R \quad \text{y} \quad \delta Q(x, p, t) \equiv (1 - \hat{P})R. \quad (2.2.17)$$

Las definiciones anteriores resultarán útiles porque Q representa la función de distribución en el espacio fase (restringido) de la partícula, la cual nos permitirá estudiar la dinámica de dicho subsistema. Nos ocuparemos, entonces, de obtener una ecuación para la variable $Q(x, p, t)$.

Una consecuencia de suponer que la distribución de las variables del campo es gaussiana es que el promedio de cualquier variable $A(x, p, t)$ en el espacio fase satisface la siguiente relación [31][38]

¹⁰Por realización del campo debe entenderse a una forma particular del campo estocástico; el desarrollo (2.2.1) para una distribución dada no es único. Cada una de las posibles formas del cpc que satisfacen (2.2.10) es llamada una realización del campo. Vemos que especificar $a_{n\lambda}$ y su conjugada para cada frecuencia y polarización determina la forma del campo y por tanto define una realización. Como estas variables están relacionadas unívocamente con las cuadraturas del campo, un punto en el subespacio del espacio fase especifica una realización. En este sentido, promediar en el subespacio del campo cualquier variable es promediar sobre las posibles realizaciones del campo.

¹¹ \hat{P} es un proyector, pues $\hat{P}^2 = \hat{P}$. En algún sentido, puede hablarse de la proyección del espacio fase del sistema a un espacio de las coordenadas de las partículas.

$$\hat{P}(E(t)\hat{P}A(x_s, p_s, t)) = 0. \quad (2.2.18)$$

La ecuación (2.2.16) se reescribe, en términos de las variables (2.2.17) y usando la ecuación de movimiento (2.2.14), como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q + \delta Q) + \hat{L}(Q + \delta Q) + \frac{\partial}{\partial p}(eE(Q + \delta Q)) + \hat{L}_f(Q + \delta Q) + e\frac{\partial}{\partial p}ER = 0, \quad (2.2.19)$$

donde se han introducido los operadores

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial p} (f(x) + m\tau\ddot{x}), \quad (2.2.20a)$$

$$\hat{L}_f \equiv \sum_{n,\lambda} \left[p_{n,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial q_{n,\lambda}} \right) - \omega_n^2 q_{n,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial p_{n,\lambda}} \right) \right]. \quad (2.2.20b)$$

En el apéndice D se muestra la forma en la cual se despeja la distribución marginal Q de la ecuación (2.2.19), lo que da lugar a la siguiente ecuación tipo Fokker Planck:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} pQ + \frac{\partial}{\partial p} [(f(x) + m\tau\ddot{x}) Q] = e^2 \frac{\partial}{\partial p} \hat{\mathcal{D}}(t)Q. \quad (2.2.21)$$

La ecuación (2.2.21) nos permite estudiar la dinámica de un ensamble de partículas sometidas a un campo estocástico de punto cero y a una fuerza externa f . Es importante resaltar que (2.2.21) no es una ecuación estocástica, pues se obtiene de remover la estocasticidad introducida por el cpc.

2.2.3. La aproximación no radiativa

Calculemos la evolución temporal del promedio de alguna variable $G(x, p)$ del espacio fase de la partícula que no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = \int G \frac{\partial Q}{\partial t} dx dp. \quad (2.2.22)$$

Usando la ecuación (2.2.21) e integrando por partes, asumiendo que Q en el infinito se anula, se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = \left\langle \dot{x} \frac{\partial G}{\partial x} \right\rangle + \left\langle f \frac{\partial G}{\partial p} \right\rangle + m\tau \left\langle \ddot{x} \frac{\partial G}{\partial p} \right\rangle - e^2 \left\langle \frac{\partial G}{\partial p} \hat{\mathcal{D}} \right\rangle. \quad (2.2.23)$$

Consideremos ahora la función del espacio fase $H_M = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$. Esta función es el hamiltoniano del sistema cuando la partícula se encuentra en un régimen no radiativo de tal forma que $\langle H_M \rangle$ tiene sentido físico, corresponde a la energía total del sistema en promedio. Por ejemplo, mientras no suceda una transición entre estados electrónicos, el hamiltoniano del sistema puede escribirse como la suma de la energía cinética más la energía potencial debida a su interacción

electrostática entre los electrones y el núcleo, despreciando su radiación. En tales sistemas, que definiremos como sistemas en el régimen estacionario, $\langle H_M \rangle$ debe ser una cantidad conservada y por tanto $\frac{d}{dt} \langle H_M \rangle = 0$. La estacionariedad de los sistemas que *en promedio* no radían, establece la siguiente condición, obtenida a partir de (2.2.23):

$$m\tau \langle \ddot{x}\dot{x} \rangle = e^2 \langle \dot{x}\hat{\mathcal{D}} \rangle. \quad (2.2.24)$$

A la ecuación (2.2.24) se le conoce como la condición de balance de energía [20][39]. En términos de la descripción que nos ofrece la EDEL del mundo microscópico, esta condición se logra cuando el sistema ha alcanzado un régimen reversible. El lado izquierdo de la ecuación (2.2.24), como $\frac{\partial H_M}{\partial p} = \dot{x}$, resulta ser la potencia media radiada y por lo tanto, podemos interpretar el término $e^2 \langle \dot{x}\hat{\mathcal{D}} \rangle$ como la potencia media absorbida. El balance establecido por la ecuación (2.2.24) se alcanza entonces dentro de esta teoría cuando se equilibran los efectos que sobre la dinámica de la partícula que genera el acoplamiento con el cpc; podría interpretarse que las trayectorias estables, como la de los electrones en los orbitales atómicos, son trayectorias en las cuales se mantiene el sistema debido a que el mecanismo de intercambio de energía con el campo de radiación genera un mínimo estable a lo largo de ciertos caminos. (La estabilidad del átomo tiene entonces un origen dinámico dentro de esta teoría.)

Como resultado de esta sección, podemos entonces considerar que, una vez alcanzado el estado estacionario, los términos proporcionales a τ y a e^2 de la ecuación (2.2.21) corresponden a una perturbación en la descripción del movimiento dada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} pQ + \frac{\partial}{\partial p} f(x)Q = 0. \quad (2.2.25)$$

El hecho de que la perturbación dependa de e^2 significa que, como hemos visto, la perturbación es debida al proceso de radiación y que representa una corrección a la dinámica del sistema cuya descripción no la contiene. Esta aproximación veremos que conduce a la descripción de Schrödinger del sistema.

2.2.4. Iniciando la transición al espacio de configuración

La teoría cuántica está formulada en el espacio de configuración del sistema, por lo que para conectar los resultados obtenidos en la sección anterior con la teoría cuántica, será necesario reducir la descripción al espacio de configuración de la partícula. Esta transición puede realizarse sistemáticamente por medio de la función característica \tilde{Q} [31][20][39],

$$\tilde{Q}(x, z, t) \equiv \int Q(x, p, t) e^{izp} dp, \quad (2.2.26)$$

que genera los momentos locales $\langle p^n \rangle_x$ de la siguiente forma:

$$\langle p^n \rangle_x \equiv \langle p^n \rangle(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int p^n Q(x, p, t) e^{ipz} dp = (-i)^n \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial^n \tilde{Q}}{\partial z^n} \right) \Bigg|_{z=0}, \quad (2.2.27)$$

donde

$$\rho(x, t) \equiv \int Q(x, p, t) dp = \tilde{Q}(x, 0, t). \quad (2.2.28)$$

A continuación realizaremos una serie de cálculos que más adelante nos permitirán relacionar el potencial cuántico (2.1.12) con las fluctuaciones del momento debidas a que las partículas están en presencia del cpc.

Los primeros dos momentos locales $\langle p \rangle_x$ y $\langle p^2 \rangle_x$ se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\langle p \rangle_x = -i \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -i \left(\frac{\partial \ln \tilde{Q}}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}, \quad (2.2.29a)$$

$$\langle p^2 \rangle_x = - \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=0} = - \left(\frac{\partial \ln \tilde{Q}}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z=0} - \left(\frac{\partial^2 \ln \tilde{Q}}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=0}. \quad (2.2.29b)$$

Con las dos relaciones anteriores, se puede obtener la siguiente expresión para las fluctuaciones locales $\sigma_p^2(x, t)$:

$$\sigma_p^2(x, t) \equiv \langle p^2 \rangle_x - \langle p \rangle_x^2 = - \left(\frac{\partial^2 \ln \tilde{Q}}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=0}. \quad (2.2.30)$$

Un cambio de variables nos permitirá escribir el resultado anterior en términos de x . Definamos las variables:

$$z_+ \equiv x + \eta z \quad \quad \quad z_- \equiv x - \eta z, \quad (2.2.31)$$

donde η es un parámetro por determinar con unidades de acción.

La forma general de la función \tilde{Q} , en términos de estas variables, es:

$$\tilde{Q}(z_+, z_-, t) = q_+(z_+, t) q_-(z_-, t) \chi(z_+, z_-, t). \quad (2.2.32)$$

Se puede observar de (2.2.26) que $\tilde{Q}^*(x, z, t) = \tilde{Q}(x, -z, t)$. La consecuencia de esto sobre las funciones q_+ , q_- y χ es que:

$$q_{\pm}^*(z_{\pm}, t) = q_{\mp}(z_{\pm}, t) \quad \quad \quad \chi^*(z_+, z_-, t) = \chi(z_-, z_+, t). \quad (2.2.33)$$

Tras la sustitución $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \eta \left(\frac{\partial}{\partial z_+} - \frac{\partial}{\partial z_-} \right)$, la ecuación (2.2.30) se escribe de la siguiente forma:

$$\sigma_p^2(x, t) = -\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \ln q_+}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2 \ln q_-}{\partial z_-^2} \right) \Big|_{z=0} + 4\eta^2 \frac{\partial^2 \ln \chi}{\partial z_+ \partial z_-} \Big|_{z=0}. \quad (2.2.34)$$

En el límite $z \rightarrow 0$, las dos variables z_+ y z_- tienden a x y la expresión (2.2.32) se reduce a:

$$\tilde{Q}(x, 0, t) = q_+(x, t) q_+^*(x, t) \chi_0(x, t), \quad (2.2.35)$$

con χ_0 una función real. Siempre es posible hacer $\chi_0 = 1$ sin pérdida de generalidad de la siguiente forma. Supongamos que $\chi_0 \neq 1$, entonces $\chi_0 = \chi_0(x, t)$. Volvamos a realizar la factorización (2.2.32), considerando la función $q_+(z_+, t) \rightarrow q_+(z_+, t)\sqrt{\chi_0(z_+, t)}$ y $q_-(z_-, t) \rightarrow q_-(z_-, t)\sqrt{\chi_0(z_-, t)}$. Entonces en el límite $z \rightarrow 0$ obtenemos la estructura (2.2.35) con $\chi_0 = 1$, así

$$\tilde{Q}(x, 0, t) = q_+(x, t)q_+^*(x, t), \quad (2.2.36)$$

lo que nos permite escribir la distribución marginal como:

$$\rho(x, t) = q(x, t)q^*(x, t), \quad (2.2.37)$$

donde $q(x, t) = q_+(x, t)$. En consistencia con la aproximación no radiativa, consideraremos el caso en el cual la función \tilde{Q} es factorizable en las variables (z_+, z_-) , de tal forma que $\chi = 1$ [39]. La expresión (2.2.34) se reduce entonces a:

$$\sigma_p^2(x, t) = -\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x^2} \right). \quad (2.2.38)$$

La relación (2.2.37) sugiere interpretar a $q(x, t)$ como la amplitud de probabilidad Ψ de la mecánica cuántica. En la siguiente sección veremos que en efecto tal identificación es legítima y que la presente descripción nos conduce a la ecuación de Schrödinger.

2.2.5. La ecuación de Schrödinger a partir de la ecuación de Fokker Planck del problema

Al calcular la transformada de Fourier de la ecuación (2.2.25) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} - i \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x \partial z} - izf(x)\tilde{Q} = 0. \quad (2.2.39)$$

En las variables z_+, z_- , el operador $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$ de la ecuación anterior se transforma en $\eta \left(\frac{\partial^2}{\partial z_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_-^2} \right)$. Dividiendo la ecuación anterior entre \tilde{Q} dada por (2.2.32) con $\chi = 1$, como se explicó anteriormente, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_+(z_+, t)q_-^*(z_-, t)} \frac{\partial}{\partial t} q_+(z_+, t)q_-^*(z_-, t) - i \frac{\eta}{m} \left(\frac{1}{q_+(z_+, t)} \frac{\partial^2}{\partial z_+^2} q_+(z_+, t) - \frac{1}{q_-^*(z_-, t)} \frac{\partial^2}{\partial z_-^2} q_-^*(z_-, t) \right) \\ = \frac{i}{2\eta} (z_+ - z_-) f[(z_+ + z_-)/2]. \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Utilizando el teorema del valor medio, podemos reescribir el término del lado derecho en términos del potencial V que da lugar a la fuerza externa $f = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Así, usamos que

$$-[V(z_+) - V(z_-)] = \int_{z_-}^{z_+} f(u) du = (z_+ - z_-) f(\xi), \quad \text{donde} \quad \xi \in [z_-, z_+] \quad (2.2.41)$$

y sustituimos en (2.2.40) para llegar a (obviamos la dependencia temporal sólo en la notación):

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_+(z_+)} \left[-\frac{i\eta}{m} \frac{\partial^2}{\partial z_+^2} q_+(z_+) + \frac{i}{2\eta} V(z_+) q_+(z_+) + \frac{\partial}{\partial t} q_+(z_+) \right] + \\ \frac{1}{q_-(z_-)} \left[\frac{i\eta}{m} \frac{\partial^2}{\partial z_-^2} q_-(z_-) - \frac{i}{2\eta} V(z_-) q_-(z_-) + \frac{\partial}{\partial t} q_-(z_-) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

que es verdadera en la aproximación lineal de f , es decir, para z cercana a cero. La ecuación anterior nos dice que q_+ y q_- obedecen ecuaciones desacopladas en la aproximación radiativa, y nos permite aplicar el método de separación de variables para escribir:

$$\frac{1}{q_+(z_+)} \left[-\frac{i\eta}{m} \frac{\partial^2}{\partial z_+^2} q_+(z_+) + \frac{i}{2\eta} V(z_+) q_+(z_+) + \frac{\partial}{\partial t} q_+(z_+) \right] = c, \quad (2.2.43)$$

con $c \in \mathbb{R}$. Podemos tomar la constante de separación como cero, o bien escribir la solución de la siguiente forma:

$$\psi(z_{\pm}) = e^{ict} q_{\pm}. \quad (2.2.44)$$

En el límite $z \rightarrow 0$, la función ψ así definida satisface la relación:

$$-2 \frac{\eta^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) = 2i\eta \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t). \quad (2.2.45)$$

La ecuación anterior se obtuvo de la descripción de una partícula interactuando con el campo de punto cero cuando ésta se encuentra en un régimen no radiativo. En dicho régimen, es factible tratar los efectos radiativos como perturbaciones y una descripción aproximada a orden cero en e^2 del sistema puede hacerse en términos de la ecuación (2.2.45), que es una ecuación que tiene la estructura de la ecuación de Schrödinger. Sin embargo la constante η es un parámetro libre aún. Siendo que η es un parámetro universal, i.e. no depende del problema particular, para determinarlo se puede resolver un problema específico, por ejemplo, el átomo de hidrógeno. La comparación con los experimentos dará que $\eta = \hbar/2$. La ecuación (2.2.45) es entonces:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi, \quad (2.2.46)$$

que es precisamente la ecuación de Schrödinger. Es importante destacar que el valor del parámetro η (proporcional a la constante de Planck) proviene del campo de punto cero[33][34]. Es decir, aunque en la descripción (no radiativa) que hemos hecho toda referencia explícita al campo se ha eliminado, su presencia se refleja en la dinámica de la partícula, a través de la constante de Planck de la ecuación (2.2.46).

2.2.6. El origen del potencial cuántico de Bohm

Hemos mostrado en este capítulo que la descripción cuántica se deriva de la EDEL bajo ciertas aproximaciones. Este hecho abre la posibilidad de estudiar las características del potencial cuántico y por lo tanto los resultados de la sección 2.1, desde una perspectiva diferente a la que ofrece la teoría cuántica. Vamos ahora a estudiar el origen del potencial cuántico. En particular, veremos que este último está relacionado con la energía cinética debida a las fluctuaciones que el epc le imprime a la partícula. Para ello introducimos la velocidad difusiva:

$$u(x, t) \equiv \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{1}{\psi^*} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \quad (2.2.47)$$

que nos permite establecer, junto con la velocidad (2.1.14), la correspondencia con el operador de momento de la siguiente forma:

$$\hat{p} \leftrightarrow m(v - iu) \rightarrow m(v - iu)\psi = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = \hat{p}\psi. \quad (2.2.48)$$

Más adelante también será útil la siguiente expresión, que se obtiene de aplicar repetidamente la ecuación (2.2.48), multiplicar a la izquierda por ψ^* e integrar sobre todo el espacio,

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = m \langle \hat{p}(v - iu) \rangle = m^2 \langle v^2 + u^2 \rangle. \quad (2.2.49)$$

La velocidad $u(x, t)$ es una medida de la diferencia entre la velocidad promedio de entrada (la velocidad media hacia el punto x) y la velocidad promedio de salida (la velocidad media desde el punto x) (ver figura 2.3), por lo que puede interpretarse como una velocidad de difusión [20]; en el caso en el que la velocidad de entrada sea igual a la velocidad de salida, $u = \frac{1}{2}(v_e - v_s) = 0$.

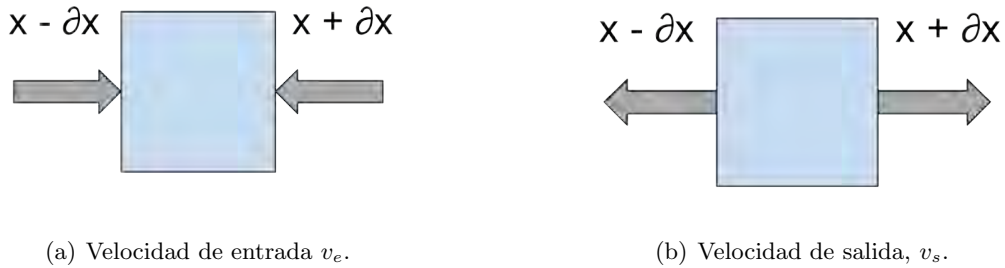


Figura 2.3: Velocidades que permiten visualizar el significado de la velocidad $u = \frac{1}{2}(v_e - v_s)$.

A partir de los resultados anteriores podemos reescribir el potencial cuántico de la siguiente

forma:

$$V_Q \equiv -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] = -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \quad (2.2.50)$$

$$= \frac{\sigma_p^2(x)}{m} - \frac{1}{2} m u^2, \quad (2.2.51)$$

donde en la última línea se usó la ecuación (2.2.38) con $\eta = \hbar/2$. El promedio del potencial cuántico en todo el ensamble resulta ser:

$$\langle V_Q(\rho) \rangle = \frac{\langle \sigma_p^2 \rangle}{m} - \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle, \quad (2.2.52)$$

pues

$$\int \rho(x) \sigma_p^2(x) dx = -\frac{\hbar^2}{4} \int \rho \left(\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x^2} \right) dx = \frac{\hbar^2}{4} \int \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx = m^2 \langle u^2 \rangle. \quad (2.2.53)$$

Observemos que el promedio del potencial cuántico coincide con la energía cinética promedio en el ensamble por efecto de procesos difusivos, los cuales son inevitables gracias a que el cpc le imprime fluctuaciones al momento de la partícula. De hecho, la ecuación (2.2.49) permite ver que para u diferente de cero (lo cual ocurre para toda ρ que no sea constante, es decir, para todos los casos de interés), el término $\langle u^2 \rangle$ es estrictamente positivo, lo que implica la existencia de fluctuaciones del momento irreducibles, las llamadas fluctuaciones cuánticas. Más aún, la ecuación (2.2.53) muestra que el cuadrado de la velocidad u está estrechamente relacionado con las desviaciones (locales) del momento con respecto a su valor medio local. Esta observación relaciona entonces el potencial cuántico con tales fluctuaciones, lo que le otorga un sentido más fundamental a V_Q : esta función lleva información de los efectos dispersivos que produce el cpc localmente, es decir, en un punto dado x cuando se ha promediado sobre el espacio momental. Esta última característica describe entonces el origen de los efectos no locales producidos por el potencial cuántico, pues éste lleva información de todo el espacio de momentos, y por lo tanto, de la dinámica de todo el ensamble.

Dentro de la teoría de Bohm, el potencial cuántico tiene un origen un tanto oscuro y el hecho de que la modificación de otro tipo de potencial (el externo) lo modifique, podría poner en duda su validez como un campo físico. Por otro lado, las fluctuaciones en el momento son una consecuencia natural del acoplamiento de la partícula con el cpc. Dentro de la EDEL, el potencial cuántico no resulta ser tal, sino un término en la energía cinética debido a las fluctuaciones que el cpc le imprime a la partícula. La descripción a través de las velocidades (2.2.47) y (2.1.14) es resultado de la transición al espacio de configuración.

2.3. Conclusiones

En este capítulo se observan fenómenos no locales en la descripción cuántica de la naturaleza a través de la ecuación de Schrödinger desde tres visiones diferentes de la mecánica cuántica,

la ortodoxa, Bohm-de Broglie y la electrodinámica estocástica. Se mostró que la solución de la ecuación de Schrödinger al problema del obturador (partículas confinadas que se liberan súbitamente) predice la posibilidad de encontrar a la partícula en cualquier lugar del espacio para cualquier tiempo posterior a la liberación. El mismo problema resuelto con la ecuación relativista correspondiente (Klein Gordon) nos garantizaría la posibilidad de encontrar alguna partícula tan cerca como se quiera de ct donde c es la velocidad de la luz y t el tiempo transcurrido desde la liberación. Estos resultados ciertamente van en contra de nuestra intuición. Si uno utiliza la interpretación de ensamble, las conclusiones son las mismas, pues el mismo argumento aplica cambiando el objeto directo de la oración; en lugar de decir 'la probabilidad de encontrar a la partícula' diría 'la probabilidad de encontrar alguna partícula del ensamble'.

Desde la formulación de Bohm se tiene además otro elemento que presenta características no locales, el potencial cuántico. El hecho de que este potencial tenga como argumento al módulo cuadrado de la función de onda genera que la evolución no local de Ψ se le herede al potencial cuántico.

La teoría cuántica resulta, a través de ejemplos relativamente sencillos, claramente no local aún en la descripción de sistemas de una partícula. El mismo método de perturbaciones cuántico es un método no local. Para calcular la solución en algún lugar del espacio al tiempo t , cercano a cero, es necesario conocer la función de onda en *todo* el espacio al tiempo cero: la evolución de la función de onda en un punto depende de cómo es esta función en todo el espacio. Es más, la evolución de la función de onda se puede describir en términos del propagador del problema de forma también no local:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x', t') K(x, t; x', t') dx'. \quad (2.3.1)$$

Parecería que la no localidad entra a la mecánica cuántica en sistemas de dos partículas, pero en este capítulo podemos observar que no es necesario. Todo estudiante de física en la licenciatura vio el desarrollo no local de la función de onda si estudio el método de perturbaciones o el propagador.

Respecto a lo que menciona Einstein en [25] y que se presenta brevemente al final del capítulo anterior, el tipo de no localidad que se estudia en este capítulo no desaparece de la descripción si uno se limita a considerar que la función de onda describe al sistema únicamente de forma estadística; la teoría cuántica resulta ser no local sea cual sea la interpretación que se le dé a la función de onda.

La electrodinámica estocástica nos ofrece un marco descriptivo local que además conduce a la mecánica cuántica -a la ecuación de Schrödinger- como se mostró en este capítulo. Desde esta perspectiva, la no localidad (usando la acepción del término que construimos en este capítulo) aparece como un ingrediente propio de la descripción en el régimen no radiativo que se hereda a la descripción en el espacio de configuración. Las correcciones radiativas pueden despreciarse siempre que se dé un balance entre la energía radiada y la absorbida del cpc. Como dicho balance se logra para una distribución particular que depende el potencial externo, si éste es modificado se necesitará que pase un cierto tiempo para que el sistema pueda describirse adecuadamente en el régimen no radiativo -no se satisfará por algún lapso de tiempo (breve) la ecuación (2.2.24).

Sin embargo, para describir al sistema con la ecuación de Schrödinger, es necesario suponer que tal equilibrio se logra instantáneamente. Esto deriva en propiedades no locales para la evolución de la función de onda, pues suponer que dicho balance se logra instantáneamente es equivalente a suponer que se adopta de forma inmediata una nueva distribución de probabilidad con la cual es verdadera la ecuación (2.2.24). (Es decir, los promedios realizados en la relación (2.2.24) hacen verdadera la igualdad y por tanto se pueden seguir considerando los fenómenos radiativos como correcciones.)

Obtener la mecánica cuántica como una teoría que emerge de otra más fundamental nos permite también ver el potencial cuántico desde otra perspectiva; en este capítulo se mostró que dicho término tiene un origen cinético dentro de la EDEL, representa contribuciones a la energía cinética debidas a las fluctuaciones en el momento de la partícula que imprime el campo de punto cero. El promedio del potencial cuántico resulta ser igual al promedio de la energía cinética asociada a la velocidad de difusión (2.2.47), que es cero sólo en ausencia del cpc. Cuando se elimina el origen de la estocasticidad de la forma en la que se realiza en la EDEL (i.e. realizando promedios sobre las posibles realizaciones) aparecen elementos que dan cuenta del efecto promedio del cpc sobre la dinámica del sistema; el potencial cuántico aparece como un elemento relacionado con las fluctuaciones en el momento de la partícula.

Que la teoría cuántica es una teoría sobre la estadística de los resultados es una opinión compartida por una parte bastante significativa de la comunidad científica. De hecho, los resultados obtenidos en este capítulo estarían de acuerdo con que la teoría cuántica es una descripción esencialmente probabilística, pero ¿qué tipo de probabilidad es la probabilidad cuántica? Ballentine [40] demuestra que la teoría cuántica satisface los axiomas de la teoría probabilística kolmogoroviana cuando se está trabajando con operadores que conmutan. Sin embargo, la imposibilidad de describir simultáneamente variables a los cuales la teoría cuántica les asocia operadores que no conmutan puede interpretarse como la imposibilidad de construir una teoría probabilística kolmogoroviana para todas las variables del sistema; por ejemplo, algunas de las distribuciones cuánticas de probabilidad que se construyen en el espacio fase (como la de Wigner) no son positivas siempre. Desde la perspectiva que nos ofrece la EDEL, la mecánica cuántica es una teoría probabilística marginal que resulta de la descripción de un proceso estocástico. No siempre es posible reconstruir una función de probabilidad a partir de sus marginales.

Capítulo 3

El enredamiento visto desde la EDEL

En sistemas de dos (o más) partículas es que la discusión de la no localidad ha sido abordada por la mayoría de los trabajos; como ya vimos, EPR hacen observaciones sobre los sistemas de dos partículas y es con ellas que describen los fenómenos “raros” de la mecánica cuántica. Posteriormente Bell estudia también la localidad con este tipo de sistemas y, como debemos gran parte de la literatura actual sobre el tema a su trabajo de 1964 [18], hablar de localidad prácticamente es hablar de sistemas de multipartita. En este capítulo estudiaremos también este tipo de sistemas, pero desde una perspectiva un poco diferente. Partiendo de las ecuaciones de movimiento de la EDEL que generalizan las presentadas en el capítulo anterior a sistemas de dos partículas, analizaremos cómo surge el enredamiento, y veremos que la sola presencia del campo es capaz de enredar los sistemas. Veremos también que las “fuerzas cuánticas” que aparecen por efecto del potencial cuántico que introduce Bohm en su formulación causal y determinista de la teoría cuántica resultan ser precisamente las causantes de las correlaciones entre las diferentes partículas que integran el sistema. Recordemos que si nos circunscribimos a la descripción cuántica de sistemas de partículas iguales que no interactúan, tales correlaciones no tienen algún origen físico bien identificado, sino que se aceptan como producto del principio de simetrización [21] de la función de onda, es decir, son un postulado de la teoría necesario que nos permite escoger, de la familia de soluciones a la ecuación de Schrödinger, aquellas que son físicamente aceptables. Por otro lado, la EDEL nos ofrece un marco teórico que es consistente con los principios de la física clásica y que se reduce a la mecánica cuántica en una cierta aproximación, ofreciéndonos una visión del mundo microscópico que no necesita de los axiomas de la mecánica cuántica. Por esta razón, y siendo el enredamiento un aspecto fundamental de la mecánica cuántica, es que dedicamos este capítulo para estudiar la no localidad en sistemas de dos partículas desde el marco de la EDEL.

Como recordatorio, un estado puro enredado es uno que caracteriza a un sistema de dos o más partículas y se distingue por la no factorizabilidad de la función de onda correspondiente, en funciones que dependan, cada una, de variables de una sola partícula. El hecho de que las partículas permanezcan enredadas, introduce correlaciones entre algunas de sus variables que

persisten aún cuando las partículas han dejado de interactuar. Las correlaciones en los sistemas enredados podríamos entonces adjudicarlas a “interacciones fantasmales a distancia”, como les llamó Einstein, y estudiar una serie de fenómenos relacionados con ellas; sin embargo los capítulos anteriores nos sugieren detenernos un poco y estudiar si existe alguna descripción (más amplia que la mecánica cuántica) del sistema, que pueda reproducir los resultados de la mecánica cuántica, pero que sea local originalmente.

Casi todos los resultados de este capítulo no se encuentran reportados en la literatura, por lo que los podemos considerar la aportación original del trabajo de tesis.

3.1. Formulación de la mecánica cuántica en términos de fuerzas

El problema de muchos cuerpos en la mecánica cuántica también puede reducirse a una descripción en términos de una ecuación de continuidad y una tipo Hamilton Jacobi. Siguiendo el procedimiento empleado en (2.1.2), podemos partir de la ecuación de Schrödinger para dos partículas:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V_1(\mathbf{x}_1) + V_2(\mathbf{x}_2) + V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right) \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad (3.1.1)$$

y escribir la solución

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)} e^{iS(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)/\hbar}, \quad (3.1.2)$$

lo que nos conduce al siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \nabla_i \cdot \left(\rho \frac{\nabla_i S}{m_i} \right) = 0, \quad (3.1.3a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} + V_1(x_1) + V_2(x_2) + V(x_1, x_2) - \frac{\hbar^2}{4m_i} \left[\frac{\nabla_i^2 \rho}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla_i \rho}{\rho} \right)^2 \right] \right) = 0. \quad (3.1.3b)$$

Como en el caso de una partícula, la primera de estas ecuaciones representa una ecuación de continuidad (de conservación de la densidad de probabilidad) en el espacio de configuración. La segunda es una ecuación tipo Hamilton-Jacobi que generaliza aquella que vimos en el capítulo anterior para una sola partícula. De acuerdo con la ecuación (3.1.3b), para el caso de dos partículas el potencial cuántico del problema es:

$$V_Q = \sum_i V_Q^{(i)} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\nabla_i^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (3.1.4)$$

Si en este sistema de dos partículas no existe potencial de interacción entre ellas (i.e. $V(x_1, x_2) = 0$), la ecuación (3.1.3) tipo Hamilton-Jacobi se convierte en

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 + V_Q + V_1 + V_2 = 0, \quad (3.1.5)$$

donde nuevamente V_i es el potencial externo del problema sobre la partícula i y

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{m_i} \nabla_i S. \quad (3.1.6)$$

Si calculamos el gradiente (respecto a las variables de la partícula i) de la ecuación (3.1.4), podemos expresar la ecuación dinámica en términos de fuerzas ejercidas sobre la partícula. La ventaja de esta descripción, que será clara más adelante, es que se evidencian los efectos en la dinámica del sistema debidos a la no factorizabilidad de la función de onda. La ecuación que resulta es la siguiente:

$$m_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \frac{1}{2} m_1 \nabla_i \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \nabla_i \mathbf{v}_2^2 + \nabla_i V_Q + \nabla_i V_i = 0. \quad (3.1.7)$$

y se puede reescribir de la siguiente forma (con $i \neq j$):

$$m_i \frac{D_i \mathbf{v}_i}{D_i t} = -\nabla_i \left(V_i + V_Q + \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_j^2 \right), \quad (3.1.8)$$

donde se introdujo el operador $\frac{D_i}{D_i t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i$ que es el operador llamado derivada material en el contexto de dinámica de fluidos. Si se construyera un problema donde la velocidad de las partículas 1 y 2 fueran, respectivamente, las velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 dadas por (3.1.6), entonces la teoría anterior correspondería a la descripción causal y determinista de Bohm de los sistemas cuánticos. En esa interpretación, (3.1.8) es la ecuación de movimiento de la partícula en la descripción Euleriana del movimiento, es decir, en aquella donde la velocidad es el campo vectorial que determina su trayectoria. Esto es precisamente lo que propone Bohm, construir un sistema de dos partículas en donde las velocidades son las que definen los campos vectoriales $\nabla_i S$ en el punto \mathbf{x}_i al tiempo t -para la partícula i . Nuevamente señalo, como lo hice en el capítulo anterior, que desde la perspectiva de la EDEL la identificación de $\nabla_i S$ con el momento de la partícula sólo puede hacerse de forma estadística, es decir, (3.1.6) define una velocidad local promedio, que se identifica a partir de la ecuación de continuidad (3.1.3a).

Para analizar la estructura del lado derecho de la ecuación (3.1.8), en particular del potencial cuántico, escribamos la función de onda de la siguiente forma:

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{iS} = \sqrt{\rho_1(\mathbf{x}_1, t) \rho_2(\mathbf{x}_2, t) \rho_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)} e^{i[S_1(\mathbf{x}_1, t) + S_2(\mathbf{x}_2, t) + S_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)]}, \quad (3.1.9)$$

donde ρ_{12} y S_{12} son las partes no factorizables de la función de onda, es decir, ρ_{12} y S_{12} no pueden escribirse como el producto y la suma, respectivamente, de funciones cuyo argumento sea sólo de variables de una partícula. Como se mencionó en la sección 1.2, la no factorizabilidad de la función de onda implica el enredamiento en el estado de las partículas y por lo tanto las funciones ρ_{12} y S_{12} dan lugar al posible enredamiento de la función de onda. Notemos que existen entonces dos formas en las cuales el sistema puede estar enredado:

- en la fase: si S_{12} no es constante en las variables espaciales, la partícula i es afectada por la velocidad de flujo v_j de la partícula j , pues el término $\nabla_i \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_j^2$ en la ecuación (3.1.8) es distinto de cero.

- en la amplitud: si ρ_{12} no es una constante, la “fuerza” cuántica $-\nabla_i V_Q$ sobre la partícula situada en \mathbf{x}_i será en general una función que depende de la posición de la partícula j - en una dimensión:

$$\frac{\partial V_Q}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^2 -\frac{\hbar^2}{2m_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x_k^2} \quad (3.1.10)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^2 \frac{\hbar^2}{2m_k} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{12}}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho_{12}}}{\partial x_k^2} + \frac{1}{\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_{12}}} \frac{\partial \sqrt{\rho_1}}{\partial x_k} \frac{\partial \sqrt{\rho_{12}}}{\partial x_k} + \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho_1}}{\partial x_k^2} \right). \quad (3.1.11)$$

El primer y segundo término dentro del paréntesis son funciones de x_1 y x_2 excepto cuando $\sqrt{\rho_{12}} = e^{\pm x_1 x_2 / a^2}$ con a constante (que no satisface las condiciones de frontera usuales para las funciones onda físicas) o bien cuando es una constante, es decir, cuando la amplitud es factorizable; en el caso general entonces, dicho término es una función de ambas variables.

Es importante señalar que las fuerzas debidas al potencial cuántico pueden existir aún cuando no exista un potencial de interacción entre las partículas; el potencial externo V puede descomponerse en la forma $V_1(x_1) + V_2(x_2)$ a partir de un cierto tiempo τ posterior a alguna interacción responsable de enredar previamente a las partículas, como mencionan EPR en su artículo, y sin embargo las partículas en esta descripción siguen interaccionando a través del potencial cuántico. A este fenómeno también corresponde un tipo de no localidad, la interacción entre partículas sin la existencia de un campo físico que medie la interacción es un elemento necesario en la descripción de los fenómenos cuánticos a través del potencial cuántico.

Más adelante, partiremos de la EDEL para llegar a la pareja de ecuaciones (3.1.3), demostrando así que en un sistema compuesto de dos partículas, se puede recuperar la descripción cuántica a partir de una teoría más amplia que la cuántica y que incluye al cpc como generador de las fluctuaciones cuánticas y del posible enredamiento de las partículas.

3.2. Sistemas de dos partículas en la EDEL

Supongamos que tenemos dos partículas con carga e_i que no interaccionan entre sí, pero se encuentran inmersas en el mismo campo de punto cero con las características que presentamos en el capítulo anterior. La ecuación de movimiento unidimensional de cada una la podemos escribir de la siguiente forma,

$$m_i \ddot{x}_i = f_i(x_i) + m_i \tau_i \ddot{x}_i + e_i \mathcal{E}_i(t). \quad (3.2.1)$$

\mathcal{E}_i es un campo efectivo al que se acopla la partícula i que consiste del campo de punto cero, en la aproximación de onda larga $E(t)$, y el campo de radiación cercano de la partícula j , $E_j^{(rad)}$: $\mathcal{E}_1 = E(t) + E_2^{(rad)}$ y, \mathcal{E}_2 se define análogamente.¹ La dinámica del sistema que consiste del campo

¹La forma particular de este campo en tres dimensiones cuando las partículas se encuentran a distancias cortas es [41]:

$$\mathcal{E}_i = E(t) + E_j^{(rad)} = \frac{e_2}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\rho|} (\hat{\rho} \times (\hat{\rho} \times \mathbf{a}_j)),$$

y las dos partículas en el espacio fase² satisface la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad $R(x_s, p_s, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(x_s, p_s, t) + \sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{x}_i R(x_s, p_s, t)) + \frac{\partial}{\partial p_i} (\dot{p}_i R(x_s, p_s, t)) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_c} (\dot{x}_c R(x_s, p_s, t)) + \frac{\partial}{\partial p_c} (\dot{p}_c R(x_s, p_s, t)) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Definamos el operador de Liouville \hat{L} de las dos partículas,

$$\hat{L} = \sum_{i=1,2} \hat{L}_i = \sum_{i=1,2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(f_i(x_i) + m_i \tau_i \ddot{x}_i + e_i E_j^{(rad)} \right) \right]. \quad (3.2.4)$$

Con esta definición, que generaliza (2.2.20a), y usando la misma definición para el Liouviliano del campo del capítulo 2, (2.2.20b), la ecuación de continuidad la podemos escribir de una forma más sintética,

$$\frac{\partial}{\partial t} R(x_s, p_s, t) + \hat{L} R(x_s, p_s, t) + \hat{L}_f R(x_s, p_s, t) + \left(e_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial p_2} \right) ER = 0. \quad (3.2.5)$$

Utilizando el mismo método de proyectores que nos fue útil en el capítulo anterior, podemos resolver para la distribución marginal $Q(x_1, x_2, p_1, p_2, t) = \hat{P}R$ donde \hat{P} sigue siendo el operador que promedia sobre las realizaciones del campo, es decir, integra sobre el espacio fase del campo. Supondremos, como se hizo en el capítulo anterior, que el campo de punto cero no se ve afectado sustancialmente, de tal forma que $\hat{L}_f R = 0$. En tal caso, se pueden obtener nuevamente las ecuaciones (D.0.3), lo que permite escribir una ecuación de Langevin para el problema de dos partículas:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{i \neq j} \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i} p_i Q + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(f_i(x_i) + m_i \tau_i \ddot{x}_i + e_i E_j^{(rad)} \right) Q \right) = \sum_{i=1,2} e_i^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \hat{D}_i(t) Q. \quad (3.2.6)$$

donde $\varrho = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, el vector que “une” a las partículas. En el caso de una dimensión, la fuerza de Lorentz puede aproximarse por la fuerza de Abraham Lorentz sobre la segunda partícula (dividida entre dos de suponer radiación simétrica) para distancias cortas:

$$F_{rad} = \frac{1}{2} \frac{e_i}{e_j} m_j \tau_j \ddot{x}_j.$$

Por lo que el campo efectivo podemos proponer que sea

$$\mathcal{E}_i = E(t) + \frac{1}{2e_j} m_j \tau_j \ddot{x}_j. \quad (3.2.2)$$

²El espacio fase del problema incluye los momentos y coordenadas del campo, que son las cuadraturas $q_{n\lambda}$ y $p_{n\lambda}$ introducidos en (2.2.2) y los propios de las partículas x_i y p_i . Cuando nos refiramos a todos ellos, usaremos la notación (x_s, p_s) .

Los operadores \hat{D}_i y \hat{G} quedan definidos por:

$$\hat{D}_i(t)Q = \hat{P}E \sum_{m,n=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[-e_i \hat{G} \frac{\partial}{\partial p_n} (1 - \hat{P}) E \right]^k \hat{G} \frac{\partial}{\partial p_m} EQ \quad (3.2.7a)$$

$$\hat{G}A(x_1, x_2, p_1, p_2, t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L} \right)^{-1} A(x_1, x_2, p_1, p_2, t) = \int_0^t e^{-\hat{L}(t-t')} A(x_1, x_2, p_1, p_2, t') dt'. \quad (3.2.7b)$$

El término $\frac{\partial}{\partial p_i} (e_i E_j^{(rad)} Q)$ acopla la ecuación (3.2.6) en las variables de las partículas. Esto es, no podemos proponer $Q = Q_1(x_1, p_1, t)Q_2(x_2, p_2, t)$ que separe dicha ecuación en las variables de las partículas. La dependencia del campo efectivo al que está sometido la partícula 1 en las variables de la partícula 2 inevitablemente acopla las variables de las partículas. Lo anterior es una característica sumamente importante por su consecuencia inmediata: la ecuación (3.2.6) *no tiene soluciones separables en las variables de cada una de las partículas*. Desde el punto de vista físico es entendible que las partículas pueden interactuar a través del campo efectivo y por tanto la no separabilidad de la ecuación en las variables de las partículas es una consecuencia natural de la descripción.

A continuación, estudiaremos este sistema una vez que ha alcanzado un régimen no radiativo. De igual forma como sucedió en el caso de una partícula, la aproximación no radiativa nos permitirá recuperar la ecuación de Schrödinger para dos partículas cuando se reduzca la descripción al espacio de configuración.

3.2.1. La aproximación no radiativa para el sistema de dos partículas.

Para el caso de funciones del espacio fase $G(x_1, x_2, p_1, p_2)$ que no dependan explícitamente del tiempo,

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = \int G \frac{\partial Q}{\partial t} dx_1 dx_2 dp_1 dp_2. \quad (3.2.8)$$

Usando la ecuación (3.2.6), podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma, integrando por partes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle G \rangle = & \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle_{nr} - e^2 \left\langle \frac{\partial G}{\partial p_1} \hat{D}_1 \right\rangle - e^2 \left\langle \frac{\partial G}{\partial p_2} \hat{D}_2 \right\rangle \\ & + \left\langle \left(m_1 \tau_1 \ddot{x}_1 + e E_1^{(rad)} \right) \frac{\partial G}{\partial p_1} \right\rangle + \left\langle \left(m_2 \tau_2 \ddot{x}_2 + e E_2^{(rad)} \right) \frac{\partial G}{\partial p_2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

donde

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle_{nr} = \left\langle \dot{x}_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} \right\rangle + \left\langle \dot{x}_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle f_1 \frac{\partial G}{\partial p_1} \right\rangle + \left\langle f_2 \frac{\partial G}{\partial p_2} \right\rangle. \quad (3.2.10)$$

Nuevamente aclaramos que se impuso la condición de que $Q \rightarrow 0$ a medida que $x \rightarrow \infty$; este tipo de soluciones son las que nos interesan, pues estamos estudiando sistemas ergódicos. Procederemos

a calcular la variación temporal de la función $H_M = T + V = \sum_i \left(\frac{1}{2m_i} p_i^2 + V_i(x_i) \right)$ sobre el ensamble. El promedio de la energía cinética $\langle T \rangle$, cambia de la siguiente forma en el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \langle T \rangle = \sum_i \frac{1}{2m_i} \frac{d}{dt} \langle p_i^2 \rangle = \sum_{i \neq j} \left(\frac{1}{m_i} \langle p_i f_i \rangle + \left\langle \tau_i p_i \ddot{x}_i + e E_j^{(rad)} \right\rangle - \frac{1}{m_i} e^2 \langle p_i \hat{D}_i \rangle \right). \quad (3.2.11)$$

El cambio en el tiempo de la energía potencial $V = V_1 + V_2$ es:

$$\frac{d}{dt} \langle V \rangle = \sum_i -\frac{1}{m_i} \langle p_i f_i \rangle. \quad (3.2.12)$$

Consideremos ahora el promedio $\langle H_M \rangle$ que tiene significado físico, es la energía promedio del sistema cuando se desprecian los detalles de su dinámica debidos al acoplamiento de las partículas con el campo de radiación. Introduciremos nuevamente la hipótesis no radiativa mediante la condición $\frac{d}{dt} \langle H_M \rangle = 0$. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle H_M \rangle &= \frac{d}{dt} \langle T + V \rangle \\ &= -e^2 \left\langle \frac{\partial H_M}{\partial p_1} \hat{D}_1 \right\rangle - e^2 \left\langle \frac{\partial H_M}{\partial p_2} \hat{D}_2 \right\rangle \\ &+ \left\langle \left(m_1 \tau_1 \ddot{x}_1 + e E_1^{(rad)} \right) \frac{\partial H_M}{\partial p_1} \right\rangle + \left\langle \left(m_2 \tau_2 \ddot{x}_2 + e E_2^{(rad)} \right) \frac{\partial H_M}{\partial p_2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

la hipótesis no radiativa establece la siguiente relación:

$$\left\langle \left(m_1 \tau_1 \ddot{x}_1 + e E_1^{(rad)} \right) p_1 \right\rangle + \left\langle \left(m_2 \tau_2 \ddot{x}_2 + e E_2^{(rad)} \right) p_2 \right\rangle = e^2 \langle p_1 \hat{D}_2 \rangle + e^2 \langle p_2 \hat{D}_1 \rangle. \quad (3.2.14)$$

La condición (3.2.14) impone una relación entre la potencia media radiada y absorbida por las partículas debido a su acoplamiento con el campo de radiación. Como dicho campo acopla el movimiento de las partículas, en el régimen estacionario (no radiativo) el estado de cada una de las partículas debe ser modificado de tal forma que se satisfaga la condición (3.2.14). Lo anterior es equivalente a decir que las variables de las partículas están correlacionadas. La forma a través de la cual la partícula 2 modifica el estado de la partícula 1 debe ser a través del campo efectivo, pues, para que la expresión (3.2.14) sea cierta, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las trayectorias de las partículas, no pueden satisfacer ecuaciones de movimiento desacopladas y no tienen alguna otra forma de interactuar dentro de este marco teórico -estamos considerando que el potencial de interacción entre las partículas $V(x_1, x_2) = 0$. Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, la densidad de probabilidad en el espacio fase de las dos partículas Q debe ser tal que los estados de las partículas estén correlacionados. Esto es equivalente a decir que la función Q no sea separable en dos funciones donde cada una esté determinada por variables de sólo una partícula.

Las observaciones anteriores nos permiten describir la dinámica del sistema en la aproximación no radiativa, como se hizo en el capítulo 2, con la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \sum_{i=1,2} \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i} p_i Q + \frac{\partial}{\partial p_i} f_i(x_i) Q \right) = 0, \quad (3.2.15)$$

que es una ecuación tipo Fokker-Planck.

A continuación veremos que la ecuación (3.2.15) se reduce a la ecuación de Schrödinger cuando se describe el sistema en cuestión en el espacio de configuración del problema en lugar del espacio fase. La no separabilidad de la función de onda (el enredamiento) se puede entender como una corrección radiativa a la descripción cuántica que se pierde al hacer la aproximación que se acaba de proponer. Como veremos más adelante, los términos que se introducen en la descripción de Bohm de los sistemas cuánticos enredados están directamente relacionados con la correlación en los momentos de las partículas.

3.2.2. Llevando la descripción al espacio de configuración

Al aplicar el operador de Fourier $\int dp_1 dp_2 e^{i(p_1 z_1 + p_2 z_2)}$ a la ecuación (3.2.15), resulta la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} - i \sum_{j=1,2} \left(\frac{1}{m_j} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial x_j} \tilde{Q} + z_j f_j(x_j) \tilde{Q} \right) = 0, \quad (3.2.16)$$

donde

$$\tilde{Q}(x_1, x_2, z_1, z_2) = \int dp_1 dp_2 Q(x_1, x_2, p_1, p_2) e^{i(p_1 z_1 + p_2 z_2)}. \quad (3.2.17)$$

La función \tilde{Q} genera los momentos locales $\langle p_i^n \rangle_x$ de la siguiente forma:

$$\langle p_j^n \rangle_x = \int p_j^n Q dp_1 dp_2 = (-i)^n \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial^n \tilde{Q}}{\partial z_j^n} \right) \Big|_{z_1=z_2=0}. \quad (3.2.18)$$

También podemos escribir las correlaciones entre los diferentes momentos de las partículas mediante una expresión sencilla. Como la condición $z_1 = z_2 = 0$ aparecerá constantemente, nos referiremos a ella simplemente como $z = 0$. La correlación local $\langle p_i^n p_j^m \rangle(x)$ en el espacio de configuración la podemos calcular así:

$$\langle p_j^n p_k^m \rangle_x = (-i)^{n+m} \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial^{n+m} \tilde{Q}}{\partial z_j^n \partial z_k^m} \right) \Big|_{z=0}. \quad (3.2.19)$$

Realizamos ahora un desarrollo en serie de potencias de la función \tilde{Q} alrededor de $z = 0$. Escribiendo explícitamente todos los términos hasta segundo orden en z obtenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & \tilde{Q} \Big|_{z=0} + \sum_{j=1,2} z_j \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z_j} \right) \Big|_{z=0} \\ & + \frac{1}{2} \left(z_1^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial z_1^2} \right) \Big|_{z=0} + 2z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \Big|_{z=0} + z_2^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial z_2^2} \right) \Big|_{z=0} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Utilizando las expresiones (3.2.18) y (3.2.19), la ecuación anterior la podemos reescribir en términos de correlaciones y momentos locales de la siguiente forma:

$$\tilde{Q} = \rho + \sum_{j=1,2} i z_j \rho \langle p_j \rangle_x - \frac{1}{2} (z_1^2 \rho \langle p_1^2 \rangle_x + 2z_1 z_2 (\rho \langle p_1 p_2 \rangle_x) + z_2^2 \rho \langle p_2^2 \rangle_x) + \dots \quad (3.2.21)$$

donde $\rho = \tilde{Q}(x_1, x_2, 0, 0)$. De este desarrollo en potencias, podemos obtener un sistema de ecuaciones que es equivalente a la ecuación (3.2.16).³ A orden cero y a primer orden, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1,2} \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle p_i \rangle_x \rho \right) = 0 \quad (3.2.24a)$$

$$\sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle p_i \rangle_x) + \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho [\langle p_i^2 \rangle_x + \langle p_i p_j \rangle_x]) - \rho f_i(x_i) \right) = 0. \quad (3.2.24b)$$

La primera de las ecuaciones resulta ser la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad ρ con:

$$\mathbf{j} = (v_1, v_2)\rho = (\langle p_1 \rangle_x / m_1, \langle p_2 \rangle_x / m_2)\rho \quad (3.2.25)$$

La velocidad $\langle p_i \rangle_x / m_i$ no representa la velocidad de la partícula i , sino una velocidad que resulta de promediar la velocidad de las partículas pertenecientes al ensamble i dado que: a) la

³El desarrollo se realiza de la siguiente forma. Aproximamos la derivada en la ecuación (3.2.16) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial z_j} \approx i \rho \langle p_j \rangle_x - (z_j \rho \langle p_j^2 \rangle + z_m (\rho \langle p_j p_m \rangle)), \text{ con } j \neq m. \quad (3.2.22)$$

Sustituyendo, cerca de $z = 0$ dicha ecuación es aproximadamente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + i \sum_j z_j \frac{\partial}{\partial} \{ \rho \langle p_j \rangle_x \} - i \sum_j \left[\frac{1}{m_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (i \rho \langle p_n \rangle_x - z_j \rho \langle p_j^2 \rangle - z_m \rho \langle p_n p_m \rangle) \right] = 0, \text{ con } m \neq j. \quad (3.2.23)$$

Tomando los elementos a orden cero en z_i y z_2 se obtiene la ecuación de continuidad anunciada previamente -se supuso que $\hat{L}_f R = 0$. Considerando que las contribuciones de z_1 y z_2 son del mismo orden, cerca de $z = 0$, se obtiene una ecuación que se reducirá a la de Schrödinger, como se demuestra más adelante.

partícula i se encuentra en la posición x_i al tiempo t y b) la partícula j se encuentra en la posición x_j al mismo tiempo.

La ecuación (3.2.24b) la reescribiremos en términos de las velocidades y las correlaciones locales, puesto que escrita así, resulta equivalente a la ecuación tipo Hamilton-Jacobi que vimos antes. Para ello usamos que $\langle p_i \rangle_x = m_i v_i$ y reescribimos (3.2.24b)

$$\sum_{i=1,2} \left(m_i \frac{\partial}{\partial t} (v_i \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \left[m_i v_i^2 + \frac{m_1 m_2}{m_i} v_1 v_2 \right] + \frac{1}{m_i} \rho [\sigma_{p_i}^2 + \Gamma(p_1, p_2)] \right) - f_i(x_i) \right) = 0 \quad (3.2.26)$$

Hemos introducido, sumando dos ceros adecuados, las funciones definidas en (2.2.38):

$$\sigma_{p_i}^2(x, t) = -\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x_i^2} \right), \quad (3.2.27)$$

y definimos:

$$\Gamma(p_1, p_2) = \langle p_1 p_2 \rangle_x - \langle p_1 \rangle_x \langle p_2 \rangle_x, \quad (3.2.28)$$

una correlación entre los momentos locales de las partículas. Naturalmente Γ será función de la posición de las partículas.

Ahora simplemente reescribiremos la ecuación (3.2.26) en una forma más conveniente para nuestros propósitos; expandiremos los primeros dos términos del sumando con $i = 1$:

$$m_1 \frac{\partial}{\partial t} (v_1 \rho) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho [m_1 v_1^2 + m_2 v_1 v_2]) = \rho \left(m_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} m_1 v_1^2 \right) + \left(\rho m_2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 v_2 + m_1 v_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} [m_1 v_1^2 + m_2 v_1 v_2] \right)$$

El último término de la ecuación anterior entre paréntesis cuadrados lo podemos escribir en términos de la ecuación de continuidad:

$$\left(-\rho \left[\frac{1}{2} m_1 \frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + m_1 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - m_2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 v_2 \right] - m_1 v_1 v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} m_2 v_1 v_2 \right)$$

Cuando sumamos sobre las dos partículas:

$$\left(-\rho \left[\frac{1}{2} m_1 \frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial v_2^2}{\partial x_2} + m_1 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - m_1 \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 v_2 + m_2 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - m_2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 v_2 \right] - m_1 v_1 v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} m_2 v_1 v_2 - m_2 v_1 v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} m_1 v_1 v_2 \right) = -\rho \left[\frac{1}{2} m_1 \frac{\partial v_1^2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial v_2^2}{\partial x_2} - m_2 v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - m_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right]$$

Desarrollando la derivada respecto al tiempo en la ecuación (3.2.26), usando la ecuación de continuidad y dividiendo entre ρ , se obtiene:

$$\sum_{i=1,2} \left(m_i \partial_t (v_i) + \partial_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) + \frac{1}{\rho m_i} \partial_i [\rho (\sigma_{p_i}^2 + \Gamma(p_i, p_j))] - f_i(x_i) \right) + m_2 v_1 \partial_1 v_2 + m_1 v_2 \partial_2 v_1 = 0. \quad (3.2.29)$$

La notación $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ fue conveniente por motivos de presentación.

3.2.3. Un breve paréntesis; la estructura de la solución y sus implicaciones en la forma de las variables Γ , $\sigma_{p_i}^2$ y $\langle p_i \rangle_x$

Haremos un breve paréntesis para introducir la constante de Planck a la descripción que hemos realizado hasta el momento de nuestro sistema de dos partículas, así como para enfatizar el hecho de que la función $\Gamma(p_1, p_2)$ sólo es distinta de cero cuando la función de onda no es factorizable.

La siguiente expresión será útil para realizar los cálculos:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1, p_2) &= \langle p_1 p_2 \rangle_x - \langle p_1 \rangle_x \langle p_2 \rangle_x \\ &= - \left[\left(\frac{1}{\tilde{Q}} \partial_{z_1 z_2}^2 \tilde{Q} \right) - \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \partial_{z_1} \tilde{Q} \right) \left(\frac{1}{\tilde{Q}} \partial_{z_2} \tilde{Q} \right) \right] \Big|_{z=0} \\ &= - \frac{1}{\tilde{Q}} \left(\partial_{z_1 z_2}^2 \ln \tilde{Q} \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

donde usamos que:

$$\partial_{z_1 z_2}^2 \ln \tilde{Q} = - \frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \tilde{Q} + \frac{1}{\tilde{Q}^2} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z_1} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z_2}. \quad (3.2.31)$$

Por analogía con lo que hicimos en la sección 2.2.4, definiremos $z_{k\pm} = x_k \pm \frac{\hbar}{2} z_k$ y usaremos la siguiente forma de expresar la función \tilde{Q} :

$$\tilde{Q} = q_+(z_{1+}, z_{2+}, t) q_-(z_{1-}, z_{2-}, t) \chi, \quad \text{donde} \quad q_{\pm} = q_{1\pm}(z_{1\pm}) q_{2\pm}(z_{2\pm}) q_{12\pm}(z_{1\pm}, z_{2\pm}) \quad (3.2.32)$$

y χ representa la parte no factorizable en las variables $z_{1\pm}, z_{2\pm}$. Ésta es la forma más general de la solución. Siguiendo en analogía con la sección 2.2.4, asumiremos que la función χ es constante en consistencia con la aproximación no radiativa. En tal caso, la función $\Gamma(p_1, p_2)$ se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1, p_2) &= - \partial_{z_1 z_2}^2 \ln q_+ q_- \Big|_{z=0} \\ &= - \frac{\hbar^2}{4} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z_{2+} z_{1+}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{1-} z_{2+}} \right) \ln q_+ - \left(\frac{\partial^2}{\partial z_{1+} z_{2-}} - \frac{\partial^2}{\partial z_{2-} z_{1-}} \right) \ln q_- \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Como q_{i+} y q_{i-} son solamente funciones de z_{i+} y z_{i-} respectivamente, la relación anterior se reduce a:

$$- \partial_{z_1 z_2}^2 \ln q_+ q_- \Big|_{z=0} = - \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_{2+} z_{1+}} \ln q_+ + \frac{\partial^2}{\partial z_{2-} z_{1-}} \ln q_- \right) \Big|_{z=0}. \quad (3.2.34)$$

Por lo tanto, en el límite $z \rightarrow 0$, la función Γ adquiere la siguiente forma:

$$\Gamma(p_1 p_2) = - \frac{\hbar^2}{4} \partial_{12}^2 \ln \rho_{12} = - \frac{\hbar^2}{4} \partial_{12}^2 \ln \rho. \quad (3.2.35)$$

Se ha introducido la notación $\tilde{Q}|_{z=0} = \rho(x_1, x_2, t) = \rho_1(x_1, t)\rho_2(x_2, t)\rho_{12}(x_1, x_2, t)$.

Las funciones $\sigma_{p_i}^2 = \langle p_i^2 \rangle_x - \langle p_i \rangle_x^2$, por su parte pueden expresarse (ver relación (2.2.38)) como:

$$\sigma_{p_i}^2 = -\frac{\hbar^2}{4} \partial_{ii}^2 \ln \rho. \quad (3.2.36)$$

De la ecuación (3.2.35), se puede ver que la parte no factorizable de la función de onda está vinculada con las correlaciones entre los momentos locales de las partículas.

Además de las expresiones anteriores, se obtiene una relación muy importante para establecer el contacto con la mecánica cuántica:

$$\langle p_i \rangle_x = -i \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z_{i+}} - \frac{\partial}{\partial z_{i-}} \right) \ln \tilde{Q} \Big|_{z=0}. \quad (3.2.37)$$

En analogía con el caso de una partícula, definiremos la función

$$\psi(x_1, x_2, t) = q_+(z_{1+}, z_{2+}, t)|_{z=0}. \quad (3.2.38)$$

Como $\tilde{Q}^*(x_1, x_2, z_1, z_2, t) = \tilde{Q}(x_2, x_1, -z_1, -z_2, t)$ y $z_{i+} \rightarrow z_{i-}$ cuando se cambia de signo z_i , entonces $\psi^* = q_-(z_{1-}, z_{2-}, t)$. Lo anterior es completamente análogo al caso de una partícula. El momento local queda relacionado con la velocidad de flujo de probabilidad conocida en la teoría cuántica (en la aproximación no radiativa consistente con $\chi = 1$, por analogía con el caso de una partícula):

$$m_i v_i(x_1, x_2) = \langle p_i \rangle_x = -i \frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right). \quad (3.2.39)$$

Si escribimos a la función ψ en su forma polar con la notación (3.1.9), la ecuación anterior resulta ser

$$\langle p_i \rangle_x = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad (3.2.40)$$

expresión que resultará importante para establecer el contacto con la teoría cuántica a través de la formulación de Bohm. A continuación haremos notar que la descripción que nos ofrece la EDEL de los sistemas de dos partículas se reduce a la cuántica en las aproximaciones que hemos considerado.

3.2.4. La ecuación de Schrödinger en un sistema de dos partículas

Primero estableceremos la relación entre las derivadas del potencial cuántico con las derivadas de los términos que contienen las funciones σ_{p_i} y Γ en (3.2.29); estas últimas las podemos sintetizar en las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{1}{m_i \rho} \partial_i (\rho \sigma_{p_i}^2) = -\frac{\hbar^2}{4m_i} \left(\frac{1}{\rho} \partial_i (\rho \partial_{ii}^2 \ln \rho) \right) = -\frac{\hbar^2}{4m_i} \left(\frac{\partial_{iii}^3 \rho}{\rho} - 2 \frac{\partial_i \rho}{\rho} \frac{\partial_{ii}^2 \rho}{\rho} + \left(\frac{\partial_i \rho}{\rho} \right)^3 \right), \quad (3.2.41a)$$

$$\frac{1}{m_i \rho} \partial_i (\rho \Gamma(p_1, p_2)) = -\frac{\hbar^2}{4m_i} \left(\frac{1}{\rho} \partial_i (\rho \partial_{ij}^2 \ln \rho) \right) = -\frac{\hbar^2}{4m_i} \left(\frac{\partial_{iij}^3 \rho}{\rho} - \frac{\partial_j \rho}{\rho} \frac{\partial_{ii}^2 \rho}{\rho} - \frac{\partial_i \rho}{\rho} \frac{\partial_{ij}^2 \rho}{\rho} + \left(\frac{\partial_i \rho}{\rho} \right)^2 \frac{\partial_j \rho}{\rho} \right). \quad (3.2.41b)$$

Las derivadas del potencial cuántico las podemos sintetizar, de igual forma, en estas dos expresiones:

$$\partial_i V_Q^{(i)} = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \partial_i \left(\frac{\partial_{ii}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = -\frac{\hbar^2}{4m_i} \left(\frac{\partial_{iij}^3 \rho}{\rho} - 2 \frac{\partial_i \rho}{\rho} \frac{\partial_{ii}^2 \rho}{\rho} + \left(\frac{\partial_i \rho}{\rho} \right)^3 \right), \quad (3.2.42a)$$

$$\partial_j V_Q^{(i)} = -\frac{\hbar^2}{2m_i} \partial_j \left(\frac{\partial_{ii}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = -\frac{\hbar^2}{4m_i} \left(\frac{\partial_{iij}^3 \rho}{\rho} - \frac{\partial_j \rho}{\rho} \frac{\partial_{ii}^2 \rho}{\rho} - \frac{\partial_i \rho}{\rho} \frac{\partial_{ij}^2 \rho}{\rho} + \left(\frac{\partial_i \rho}{\rho} \right)^2 \frac{\partial_j \rho}{\rho} \right). \quad (3.2.42b)$$

Observamos que las ecuaciones (3.2.41) y (3.2.42) son las mismas. Por esta razón podemos reescribir la ecuación (3.2.29) ahora en términos de la función S y el potencial cuántico V_Q , obteniendo la siguiente condición:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + V_Q + V \right) = 0. \quad (3.2.43)$$

Esta ecuación la podemos integrar. Sea

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + V_Q + V. \quad (3.2.44)$$

La ecuación (3.2.43) es, en términos de \mathcal{F} es la siguiente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \mathcal{F} = 0, \quad (3.2.45)$$

cuya solución es

$$\mathcal{F}(x_1, x_2, t) = \mathcal{G}(x_1 - x_2, t). \quad (3.2.46)$$

Como la ecuación anterior debe ser consistente con la aproximación no radiativa donde no existe información acerca de la distancia entre las partículas, no es razonable aceptar que la descripción que hace la ecuación (3.2.46) del mismo sistema tenga a $x_1 - x_2$ como variable, por lo que \mathcal{G} es sólo una función del tiempo. Como el hamiltoniano de un sistema mecánico está definido salvo

por la derivada total respecto al tiempo de alguna función F^4 [42], las ecuaciones de movimiento que se obtienen de (3.2.46) son las mismas que aquellas que resultan de

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + V_Q + V = 0, \quad (3.2.47)$$

que junto con la ecuación de continuidad que también se obtiene como parte de la jerarquía de ecuaciones (3.2.24), son equivalentes a la ecuación de Schrödinger

$$\sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \hat{p}_i^2 + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.2.48)$$

como se mostró en la sección 3.1. Es decir, se ha recuperado la mecánica cuántica para sistemas de dos partículas a partir de la EDEL. Como hemos visto, el potencial cuántico introduce los términos asociados con las fluctuaciones cuánticas y con las correlaciones entre las partículas. Además se muestra que el origen de tales correlaciones no necesariamente es debido a la existencia de algún potencial entre las partículas, los sistemas se pueden correlacionar a través del cpc.

3.2.5. El potencial cuántico en sistemas de dos partículas

Siguiendo el camino que tomamos en el capítulo 2, una vez que hemos establecido contacto con la mecánica cuántica, podemos escribir los promedios sobre el potencial cuántico en términos de las velocidades difusivas

$$u_i(x_1, x_2, t) = \frac{\hbar}{2m_i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i}, \quad (3.2.49)$$

que fueron introducidas para una dimensión en (2.2.47). Notemos que el potencial cuántico puede escribirse en términos de las fluctuaciones locales σ_{p_i} :

$$V_Q^i(\rho) = -\frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{\sigma_{p_i}^2}{m_i} - \frac{1}{2} m_i u^2, \quad (3.2.50)$$

Esto generaliza inmediatamente la conclusión a la que se llegó en el capítulo 2: el potencial cuántico posee un origen dinámico dentro de la EDEL. Debemos además hacer énfasis en un aspecto importante que no puede estudiarse en el caso de una partícula y es que las velocidades u_i son función de x_1 y x_2 en general. Sólo para el caso cuando $\rho(x_1, x_2, t)$ sea factorizable en las variables de las partículas será cierto que $u_i = u_i(x_i, t)$. En tal situación, no existirán correlaciones entre las variables de las partículas como es de esperarse. Si la distribución marginal ρ es separable, $\Gamma = 0$ de acuerdo con (3.2.35), o sea $\langle p_1 p_2 \rangle_x = \langle p_1 \rangle_x \langle p_2 \rangle_x$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 \rangle &= \int \langle p_1 p_2 \rangle_x \rho dx_1 dx_2 \\ &= \left(\int \langle p_1 \rangle_x \rho_1 dx_1 \right) \left(\int \langle p_2 \rangle_x \rho_2 dx_2 \right) \\ &= \langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

⁴Siempre será posible construir la función de la cual \mathcal{F} es su derivada, es $F = \int_0^t \mathcal{F}(t') dt'$.

puesto que en el caso factorizable $\langle p_i \rangle_x$ es sólo función de x_i y $\int \rho_i dx_i = 1$. Concluimos que el caso factorizable corresponde a aquél en el que los momentos de las partículas y los momentos locales *no* están correlacionados.

Por último, haremos una breve revisión sobre la razón por la cual aparece V_Q en la descripción cuántica de los sistemas. Dada la siguiente igualdad,

$$\int \rho(x_1, x_2, t) \sigma_{p_i}^2 dx_1 dx_2 = \frac{\hbar^2}{4} \int \rho \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 = m_i^2 \langle u_i^2 \rangle, \quad (3.2.52)$$

es posible reescribir el promedio sobre el espacio de configuración de la función V_Q , usando (3.2.50), como:

$$\langle V_Q^{(i)} \rangle = \frac{\langle \sigma_{p_i}^2 \rangle}{m_i} - \frac{1}{2} m_i \langle u_i^2 \rangle = \frac{1}{2} m_i \langle u_i^2 \rangle. \quad (3.2.53)$$

Los operadores \hat{p}_i cuánticos se pueden corresponder, como se hizo en (2.2.48), de la siguiente forma:

$$\hat{p}_i \leftrightarrow m(v_i - iu_i) \quad (3.2.54)$$

y por lo tanto

$$\langle \hat{p}_i^2 \rangle = m_i^2 (v_i^2 + u_i^2). \quad (3.2.55)$$

Con las observaciones anteriores podemos ver que, introduciendo las fluctuaciones en el momento mediante la correspondencia (3.2.54) en un sistema que se encuentra en un régimen no radiativo, es posible reproducir los promedios obtenidos a través de la mecánica cuántica con la formulación de Bohm:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \sum_i \frac{1}{2m_i} \langle \hat{p}_i^2 \rangle + \langle \hat{V}(\hat{x}) \rangle \\ &= \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i (\langle v_i^2 \rangle + \langle u_i^2 \rangle) \right] + \langle V(x) \rangle \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \langle v_i^2 \rangle \right) + \langle V_Q + V \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

Podemos entonces ver a la mecánica cuántica como la descripción no radiativa de un sistema inmerso en un cpc que introduce fluctuaciones en el momento. En la EDEL tales fluctuaciones tienen su origen en el acoplamiento de las partículas con el cpc, mientras que si nos restringimos a la mecánica cuántica deben axiomatizarse.

3.3. El enredamiento como un efecto radiativo

Partiendo de la descripción estadística usando el estado clásico de dos partículas acopladas al campo de radiación⁵ (con el que se ha logrado un balance radiativo) se obtuvo el par de

⁵Que incluye al campo de punto cero.

ecuaciones (3.2.24) que son equivalentes a la ecuación de Schrödinger. Para poder hablar acerca del origen de las correlaciones en los sistemas de dos partículas donde el potencial de interacción es cero, es necesario tomar en cuenta el campo de radiación al que están acopladas las partículas. Desde la perspectiva de la EDEL, el enredamiento entre partículas que no interactúan puede entenderse porque los sistemas se correlacionan a través del campo de radiación, como se explica a continuación. Una partícula está acoplada al campo de radiación de la otra y viceversa; esto genera que el estado de equilibrio radiativo se logre simultáneamente por ambas partículas mediante la correlación de sus variables. Lo anterior se puede ver en la ecuación que describe al sistema con todo y los efectos radiativos (3.2.29); ésta no es separable en las variables de las partículas, pues los términos $eE_i^{(rad)}$ acoplan las ecuaciones para las partículas: el acoplamiento es precisamente un fenómeno radiativo que se pierde en la descripción no radiativa del sistema. Sin embargo si uno recuerda que dicha descripción es el resultado de un complicado proceso en el que se intercambia de energía entre las partículas y el cpc de una forma tal que se satisface el balance de energía (3.2.14), las correlaciones que introduce el enredamiento son necesarias para recuperar la dinámica de las partículas. Este efecto radiativo puede recuperarse mediante la no factorizabilidad de la función de onda, como demuestra el hecho de que la teoría cuántica, con tal imposición, describe correctamente la dinámica para este tipo de sistemas. Las correlaciones para sistemas en los que no existe potencial de interacción se pierde en la descripción cuántica del problema, debe introducirse axiomáticamente. La llamada interacción de intercambio, que no tiene origen físico dentro de la mecánica cuántica puede entenderse como una interacción entre las partículas a través del campo de radiación.

En sistemas de partículas iguales existe un fenómeno que se le atribuye a la indistinguibilidad llamado interacción de intercambio [43]. Aún cuando no se proponga un potencial de interacción, es un requisito que la función de onda de partículas iguales tenga una simetría definida, que el estado esté enredado; este requerimiento tiene consecuencias estadísticas importantes.

Para sistemas de partículas iguales, existen ciertos operadores hermitianos que conmutan con el hamiltoniano llamados operadores de intercambio \mathcal{P}_{ij} , cuya acción sobre la función de onda es intercambiar las variables de las partículas: $\mathcal{P}_{ij} [\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_n)] = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_n)$. Las funciones de onda que tienen significado físico en sistemas de partículas idénticas son aquellas que son eigenfunciones de los operadores de intercambio y por tanto aquellas que tienen simetría definida. (Principio de simetrización [44].) Lo anterior tiene efectos importantes sobre la dinámica de los sistemas que se asemejan a la existencia una “fuerza”: la varianza de la posición relativa da idea sobre la separación media entre las partículas y ésta depende de la simetrización de la función de onda; hay “algo” que tiende a separar (o juntar) a las partículas⁶ y esta información relacionada con este efecto está contenida en la simetrización de la función de onda.

En el marco teórico que ofrece la EDEL, partículas idénticas pueden interactuar a través de modos comunes del campo efectivo [45]. Cuando las masas de las partículas son iguales y están

⁶Por ejemplo, en los sistemas fermiónicos, las partículas tienden a estar más “separadas” que en los sistemas bosónicos [43].

sometidas a un mismo potencial externo, entonces los modos del campo que son relevantes para la dinámica de ambas partículas son los mismos, por lo tanto es natural que se acople la dinámica de las partículas a través del campo.⁷ A medida que las partículas se alejan, o bien tienen masas muy diferentes, el acoplamiento a través del campo puede despreciarse. Tales situaciones corresponden a aquellas en las que el principio de simetrización para estos sistemas puede ser ignorado [44].

En este capítulo podemos apreciar que el enredamiento, en ciertos casos y dentro de la EDEL, es la manifestación de las correlaciones inducidas por la interacción a través del campo de radiación entre partículas cuando la descripción del sistema se reduce a la descripción cuántica. En este capítulo además se mostró que el origen de tales correlaciones no necesita de la interacción a través de un potencial, lo que es necesario es el acoplamiento de las variables a través del campo de radiación.

⁷Si las masas son las mismas, las partículas tienen la misma inercia y por tanto responden a los mismos modos del campo. Si están sometidas al mismo potencial externo, entonces estarán confinadas a la misma región del espacio, aumentando la posibilidad de interacción a través del campo de radiación.

Capítulo 4

Recapitulación

4.1. Sobre la localidad en la teoría cuántica

Existen muchas formas en las cuales podemos modelar a la naturaleza, y no todas nos son útiles siempre. Por ejemplo, para estudiar el crecimiento de una cierta población de bacterias podemos despreciar el modelo de partícula (con posición y momento) y campos que nos ofrece la física clásica y en lugar de éste usar uno donde los parámetros relevantes para describir el estado del sistema¹ sean otros, como la cantidad de ciertos nutrientes (tal vez el coeficiente de difusión del nutriente en el medio donde están suspendidas las bacterias) y otros factores que controlen la tasa de crecimiento de la colonia. Si se establece una ecuación que gobierne la dinámica del estado del sistema y el modelo se hizo con cuidado², las predicciones que realice el modelo se acercarán mucho a lo que se observe. De las distintas formas que existen para describir un cierto fenómeno, puede ser que algunas sean locales en el espacio y en el tiempo y que otras utilicen mecanismos no locales para el mismo fin. Si existe una forma de demostrar la equivalencia entre dos modelos, uno local y el otro no, o bien, si se puede derivar uno a partir del otro, podemos concluir que la localidad (o la falta de ella) no es una característica intrínseca del fenómeno que intentamos modelar, sino de la forma que escogimos para describirlo. Puede ser que no exista equivalencia entre teorías diferentes debido a que en un marco teórico no tiene sentido introducir los parámetros que son relevantes en otro. En este caso, simplemente son incomparables las teorías; hablan de cosas diferentes. Podría suceder también que los resultados de una sean contrarios a los de otra y en ese caso será pertinente estudiar cuál es el modelo que empata mejor con lo observado. En la ciencia se intenta sistemáticamente resolver este último caso y como consecuencia se ha logrado construir un aparato autoconsistente sumamente poderoso. Notemos que la teoría cuántica y la clásica hablan sobre lo mismo y predicen cosas diferentes, lo cual presenta un dilema que se ha resuelto restringiendo el dominio de validez de cada una de las teorías. Sería necesario

¹En este caso el estado del sistema da información sobre la población de bacterias; puede ser directamente el número de bacterias o alguna función de éste.

²Es decir, se utilizaron parámetros que sí les permiten abstraer la dinámica del sistema.

entonces precisar los alcances de cada una; sin embargo no se suele presentar a una teoría como la consecuencia de otra (como sí sucede en el caso de la relatividad general o la termodinámica) por lo que los límites de validez de entre la teoría clásica y la cuántica son un tanto arbitrarios. En esta tesis se demuestra que ampliando consistentemente el marco teórico de la física clásica, introduciendo un campo de radiación estocástico a temperatura cero, se puede obtener la ecuación de Schrödinger. Lo anterior nos permite concluir que la no localidad no es un requisito de las teorías fundamentales del mundo microscópico como he escuchado a varios colegas afirmar y como se podría leer de la introducción que hace Bell en su artículo de 1964:

“Ésta [la no localidad] es una característica, de acuerdo con el resultado que aquí se demuestra, de cualquier teoría de variables ocultas que reproduzca los resultados de la mecánica cuántica”

si uno la lee fuera de contexto. El obtener la teoría cuántica a partir de un marco local y con el que estamos muy familiarizados nos permite “ver” los mecanismos de la mecánica cuántica desde una perspectiva interesante y rica, en la cual se puede hacer una descripción local que conduce, bajo ciertas aproximaciones, a entender la no localidad de la descripción cuántica. Podemos tener formulaciones no locales de la física, como lo menciona Feynman en su célebre libro “El Carácter de la Ley Física” [46], pero eso no establece la no localidad como una característica de la naturaleza o bien de nuestro conocimiento acerca de ella.

4.2. El aparato no local de la teoría cuántica

Tan pronto como se propusieron los primeros modelos del átomo, se observó que la física clásica no era consistente con ellos. Y a medida que éstos fueron ganando adeptos, fue necesario circunscribirlos a un nuevo aparato teórico. La gran imaginación e intuición física de los científicos de inicios del siglo pasado llevó a cambiar la definición de “estado” para crear dicho aparato, lo que representó una verdadera revolución intelectual. El estado cuántico no estaría representado por la posición y el momento de una partícula puntual con una trayectoria definida en el espacio tiempo, como lo es en la mecánica clásica, sino a través de una función de onda en un espacio de Hilbert. La dinámica de esta función estaría determinada por la famosa ecuación que formuló Schrödinger a finales de 1925. Descritos los sistemas físicos de esta forma, se daba inicio a la incursión de la ciencia en el mundo atómico y subatómico, y los problemas de la física atómica empezaron a tener solución. El éxito de esta teoría fue tal que no tardó en enraizarse en el seno de la física como una teoría fundamental.

A inicios del siglo pasado, la alta probabilidad de resolver un problema en forma cerrada con la nueva teoría estableció una línea definida para los científicos de la época y de las siguientes; si la mecánica cuántica era o no una teoría fundamental probablemente no resultaba interesante al lado de todos los resultados que se podían obtener usando el aparato recién creado. Pocos se dedicaron entonces a aclarar la forma en la cual se describen los fenómenos naturales dentro de la teoría cuántica y muchos, en cambio, se dedicaron a resolver problemas concretos y a extender los alcances de la teoría cuántica. Entre los interesados por aclarar los elementos de

dicha teoría encontramos a Einstein, Podolsky, Rosen, Schrödinger y a de Broglie. Los primeros tres, EPR, hacen una observación que promueve la reflexión sobre la descripción de los estados cuánticos a través de la función de onda. Su argumento necesita de la construcción de un estado enredado. Para tales estados la teoría cuántica no permite la descripción del estado de cada uno de los constituyentes del sistema de forma independiente, sin embargo sí es posible hacerlo como resultado de un proceso de medición. Como además el aparato teórico de la mecánica cuántica no permite describir simultáneamente la evolución de variables asociadas a operadores que no conmutan, el estado cuántico de los subsistemas que se obtiene como resultado de la medición depende de la base que se utiliza para desenredar al sistema, es decir, de las variables que se hayan medido. El desenredamiento se puede hacer exclusivamente con mediciones sobre uno de los subsistemas, por lo que el estado con el que se describe el subsistema sobre el que no se realizaron mediciones depende de las variables que fueron medidas en el otro subsistema. Si uno supone que, separándolas lo suficiente, las mediciones realizadas sobre una de las partículas no puede cambiar el estado de la otra, entonces EPR muestran que la teoría cuántica no describe todos los elementos a los que le puede asignar realidad física. Construyen un ejemplo en el cual demuestran que la teoría cuántica permite asociarle una posición determinada a la partícula que no es medida y también un momento determinado; sin embargo, la teoría cuántica no permite describir la evolución de ambos parámetros de forma simultánea y por tanto debe ser incompleta. El argumento de EPR depende de un ejemplo en particular, pero Schrödinger se encargó de mostrar que en realidad es característico de todos sistemas cuánticos que interaccionaron en algún momento y acuña el término enredamiento.

Como mencionó Einstein posteriormente [25], este enredo no existe si uno se limita a asociarle un carácter estadístico a la función de onda, es decir, si uno se abstiene de afirmar que la teoría cuántica describe la dinámica de sistemas individuales. Las respuestas que se dieron al trabajo de EPR son diversas, pero en casi todas se percibe la intención de defender a la teoría cuántica como una teoría completa y fundamental. Trabajos más recientes se han dedicado a ahondar en este punto y no se ha alcanzado el consenso. ¿Es o no completa la teoría cuántica?

Con la intención de mejorar la comprensión de los fenómenos cuánticos, J. S. Bell realizó un estudio en el que propone la posibilidad de “completar” el estado cuántico, definiendo uno nuevo que permita hacer una descripción local del fenómeno que plantean EPR. Concluye que no es posible hacerlo. Este resultado suele interpretarse en formas radicales que ya todos hemos escuchado, sin embargo los comentarios realizados en el capítulo 1 deberían invitarlo a uno a ser cauteloso. Por ejemplo, es necesario para demostrar el teorema de Bell que las variables ocultas introducidas no se acoplen al instrumento de medición. Sería más atinado establecer la conclusión del teorema de Bell de la siguiente forma: no es posible construir una teoría local y compatible con todos los resultados de la mecánica cuántica con variables “ocultas” no contextuales a las cuales esté asociada una función de distribución de probabilidad que satisfaga los axiomas de Kolmogorov. De hecho, en esta tesis se muestra la posibilidad de construir una teoría local que da cuenta de los resultados de la mecánica cuántica.

4.2.1. Los sistemas de una partícula

Aunque la no localidad cuántica es usualmente estudiada en sistemas de dos partículas, existen mecanismos no locales en la teoría cuántica que podemos estudiar en sistemas de una partícula y que no dependen de la interpretación que se le dé a la función de onda. Vemos que la ecuación de Schrödinger, que gobierna la dinámica del sistema, establece que la evolución de la función de onda no es local. En el capítulo 2 se estudian métodos perturbativos y una solución exacta para hacer notar lo anterior. Antes de proceder, podemos analizar cualitativamente lo que se muestra en el capítulo 2. Imaginemos que se tiene una partícula bajo un cierto potencial y que la partícula se encuentra en un eigenestado del hamiltoniano correspondiente. Ahora imaginemos que se realiza una perturbación al hamiltoniano de forma local. Para una perturbación genérica, el estado inicial de la partícula no será eigenestado del hamiltoniano perturbado y como consecuencia inmediata, la densidad de probabilidad será una función del tiempo. Esta transición no resulta ser local, es decir, no sucede que la función de onda es modificada en la zona donde se realiza la perturbación y posteriormente esta perturbación es propagada con una cierta velocidad a otras regiones; los cambios no se propagan, la función de onda responde en todo el espacio de configuración (accesible) a una perturbación localizada. Lo anterior es evidente cuando se ve la evolución de los sistemas a través de un propagador K :

$$\Psi(x, t) = \int dx' K(x, t; x', t') \Psi(x', t'), \quad (4.2.1)$$

la evolución de la función de onda está determinada por el conocimiento de la función de onda en todo el espacio de configuración (accesible) en un tiempo pasado -y del propagador del problema particular. La evolución del estado cuántico es, en este sentido, no local.

No sólo vista a través de un propagador resulta no local la evolución del estado cuántico, el método perturbativo también permite concluir que la ecuación de Schrödinger genera soluciones con estas características: la forma en la cual se calculan los coeficientes en la expansión (C.0.1) es claramente no local, se necesita hacer un promedio sobre todo el espacio del hamiltoniano (C.0.5) pesado por la distribución de probabilidad para obtenerlos; esto mismo se hace cuando se obtienen los valores esperados en la teoría cuántica.³ Esto se estudia en el capítulo 2, en el cual se dan soluciones aproximadas y exactas para ciertos problemas y se obtiene el mismo efecto. Los problemas que se presentan son una perturbación localizada en un pozo de potencial infinito y la liberación de partículas mediante un obturador. En tres diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica hay fenómenos no locales asociados con la evolución de la función de onda que tienen repercusiones físicas. Si la función de onda es interpretada a la Copenhague, vemos que resolver la ecuación de Schrödinger para un obturador genera resultados que sugieren que una partícula es capaz de acelerarse a una velocidad arbitraria por efecto de un cambio localizado en el potencial externo. La ecuación de Klein Gordon limita la velocidad que puede obtener la partícula a la de la luz, sin embargo parecería que la energía no se conserva en el sistema o por lo menos,

³En cambio, la teoría clásica de perturbaciones es enteramente local, sólo basta información local para determinar un cambio local en las soluciones debido a una cierta perturbación.

debería existir un mecanismo de transmisión de energía “misterioso” pero tan importante que un cambio localizado en el potencial permite acelerar a una partícula a velocidades relativistas. Con la interpretación de ensamble los argumentos son parecidos, cambiando el sujeto de las oraciones, de “la partícula” a “una partícula”. Si interpretamos la función de onda a la Bohm, entonces si el potencial cuántico es consistente con la ecuación de Schrödinger, uno podría modificar la dinámica de una partícula “instantáneamente” a distancia, con una modificación del potencial externo en alguna región alejada a la partícula. En el ejemplo del pozo infinito perturbado que se presenta, se observa que el potencial cuántico, como resultado de la evolución no local de la función de onda, se modifica en todo el pozo de una forma no local, lo que permitiría la modificación del estado clásico de la partícula (su posición y su momento) por efecto de una perturbación en regiones alejadas. A partir de la EDEL se puede ver que la descripción de los sistemas a través de una función de onda es intrínsecamente no local como se muestra en la derivación que se realiza de la ecuación de Schrödinger en este trabajo. La observación en esta sección es importante debido a que muestra que la mecánica cuántica es intrínsecamente no local, los resultados de esta tesis sugieren que la misma descripción a través de la función de onda en el régimen no radiativo es una descripción no local de los fenómenos.

Que la mecánica cuántica es no local es un hecho que no necesita recurrir a argumentos que consideren sistemas de dos partículas. La cuantización del campo de radiación es otro ejemplo de la forma no local en la cual se describen los sistemas físicos en la teoría cuántica: el proceso de radiación visto como la población de un modo del campo no es un proceso localizado. Sin embargo esta descripción nos permite manejar fácilmente el intercambio de energía en cantidades fijas. El hecho de que la función de onda nos ofrezca una descripción tan poderosa de la naturaleza no implica que todas las teorías que se acerquen a los problemas del mundo microscópico deban tener un aparato no local; la veracidad de esta aseveración se puede ver desde diferentes enfoques en numerosos trabajos [19][20][23][47][48][49].

4.3. El aparato no local de la teoría cuántica desde la EDEL

Con los argumentos que fueron presentados en la tesis, resulta claro que la mecánica cuántica describe sistemas de una partícula con métodos no locales y éstos se estudiaron a través de la EDEL para el caso no relativista. Una hipótesis fundamental de la EDEL es la existencia de un campo de punto cero con el que se acoplan las partículas a través de sus distintos momentos magnéticos o eléctricos. Escribimos la ecuación de movimiento para el estado clásico de una partícula en el régimen no relativista -en el cual las fuerzas magnéticas no juegan un papel importante. Como estamos interesados en la dinámica de la partícula se promedió el efecto del campo, considerando todas sus posibles realizaciones. Como resultado se obtuvo una ecuación de Langevin para la distribución marginal Q en el espacio fase de la partícula. Siguiendo los pasos de Cetto y de la Peña [31], se muestra que en el régimen estacionario los términos radiativos en el hamiltoniano pueden ser considerados como una perturbación, por lo que en una primera aproximación (llamada no radiativa) uno los puede despreciar. El régimen no radiativo se identifica

entonces con trayectorias de la partícula en las cuales, en promedio, la energía radiada es igual a la energía que se absorbe del campo -balance radiativo. Si uno lleva la descripción del sistema en la aproximación no radiativa al espacio de configuración de la partícula, se demuestra que la ecuación de Schrödinger es la que determina la dinámica del sistema. La función de onda, vista a través de la EDEL, representa siempre el estado de un sistema que ha alcanzado un estado de balance radiativo, por lo que si uno modifica el potencial externo, la ecuación de Schrödinger no puede dar cuenta del estado transitorio en el cual no se satisface (2.2.24); será una suposición necesaria de la descripción cuántica el asumir que el régimen no radiativo se alcanza inmediatamente después de realizar la perturbación. Por lo tanto, si uno modifica el potencial externo en el tiempo, la distribución de probabilidad de modificará consecuentemente en todo el espacio, generando velocidades de propagación instantáneas en las perturbaciones. Lo anterior sugiere que la escala de tiempo de la descripción cuántica es de grano grueso. Estudiando los fenómenos cuánticos desde la EDEL, existen procesos a escalas de tiempo que escapan a la descripción cuántica; a saber, el proceso de intercambio de energía (la radiación y la absorción de energía) con el campo que conduce al régimen no radiativo. En las descripciones de grano grueso, los fenómenos no locales como los descritos en el capítulo 2 no son una sorpresa.

Una ventaja de estudiar la mecánica cuántica con la interpretación de Bohm es que los fenómenos no locales están contenidos en un solo término, el llamado potencial cuántico. Desde la EDEL, este “potencial” es en realidad un término cinético debido a las fluctuaciones locales en el momento de las partículas causadas por el cpc [39]. Como las fluctuaciones locales del momento en la descripción realizada en el espacio de configuración son el resultado de un promedio parcial sobre el espacio de momentos, su evolución será no local como consecuencia de lo explicado en el párrafo anterior, es decir, como la distribución en el espacio fase de la partícula evoluciona de forma no local en el régimen no radiativo, las velocidades difusivas que se obtienen con promedios utilizando dicha distribución de probabilidad introducirán en la descripción causal y determinista, de Bohm - de Broglie, efectos no locales a través del llamado “potencial cuántico”. Dichos efectos fueron observados a inicios del capítulo 2. Vista entonces como una teoría que emerge de la EDEL, la mecánica cuántica nos ofrece una descripción de la naturaleza que, para dar cuenta del proceso estocástico al que está sometido la partícula utiliza mecanismos no locales.

4.3.1. El enredamiento visto desde la EDEL

Para estudiar el enredamiento desde la EDEL fue necesario proponer un sistema multipartita dentro de este marco y mostrar que se puede obtener la ecuación de Schrödinger correspondiente. En el capítulo 3 se realiza esto para un sistema de dos partículas, lo que nos permitió reformular el enredamiento con las ideas clásicas de estado, i. e., mediante trayectorias, en el espacio tiempo, de partículas puntuales y evitando la introducción de elementos oscuros como el concepto de potencial cuántico.

En la interpretación de Bohm de la mecánica cuántica, el “potencial” cuántico en sistemas de dos partículas puede acoplar las ecuaciones de movimiento para cada una de las partículas, aún cuando el potencial físico de interacción sea cero. A inicios del capítulo 3 se muestra que

tal acoplamiento está unívocamente relacionado con el enredamiento del estado cuántico correspondiente, o equivalentemente para estados puros, a la no factorizabilidad de la función de onda: en los casos en los que la función de onda es factorizable, el potencial cuántico se puede escribir como la suma de funciones que dependen, cada una, de variables de una partícula, lo que separa la ecuación tipo Hamilton Jacobi del problema y la dinámica de las partículas se desacopla. El mecanismo que propone Bohm para el acoplamiento de las partículas (el potencial cuántico) resulta un tanto oscuro: hemos visto que es no local y además no es independiente del potencial externo, pues cambios en éste implican modificaciones en el potencial cuántico. Los potenciales con los que la mayoría estamos familiarizados son todos independientes entre sí y su evolución temporal puede describirse en un marco local. La EDEL nos ofrece una descripción con elementos que para todo físico resultan familiares, en la cual el enredamiento es una consecuencia natural: aún cuando se suponga que no existe un potencial de interacción entre dos partículas, éstas pueden interactuar a través del campo de radiación. Se demuestra en el capítulo 3 que las correlaciones entre las variables de las partículas para sistemas enredados son consecuencia del proceso radiativo al que están sometidas. El enredamiento se entiende en este marco entonces como efecto radiativo al que está circunscrito la ecuación de Schrödinger.

En el capítulo 3 se demuestra que de la ecuación de continuidad para el sistema de dos partículas acopladas al cpc se puede resolver para la distribución marginal Q (el espacio fase de las dos partículas) con el mismo método utilizado en el capítulo 2. Se obtiene así una ecuación de Langevin para el problema. Cuando las partículas se encuentran relativamente cerca como para poder considerar que ambas están sometidas al mismo cpc, el régimen estacionario se alcanza en un campo efectivo que consiste del campo de punto cero y el generado por la radiación de las partículas. (A este campo efectivo nos referimos como el campo de radiación, pues con él se pueden describir todos los procesos radiativos.) El régimen no radiativo se logra a través del acoplamiento en las variables de las partículas a través del campo de radiación y como consecuencia, la distribución marginal Q no será separable. Aquí se encuentra el origen de la no factorizabilidad de la función de onda, el campo de radiación enreda a las partículas.

Posteriormente se demuestra que la ecuación de Fokker Planck que se obtiene de la aproximación no radiativa en un sistema de partículas con potencial de interacción cero, conduce a las ecuaciones que resultan de hacer una transformada de Madelung sobre la ecuación de Schrödinger (la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica cuántica) por lo que resultan completamente equivalentes a ésta. Lo anterior nos permite tener una visión diferente del potencial cuántico, como se hizo en el capítulo 2 y se generalizan los resultados obtenidos para el caso de una partícula. Se muestra que el potencial cuántico tiene un origen dinámico: está relacionado con las fluctuaciones del momento. Como tales fluctuaciones son generadas por el proceso de radiación-absorción que conduce al régimen no radiativo, dependen de las variables de ambas partículas. El acoplamiento en las variables de las partículas se da en esta escala, como se demuestra cuando se relaciona la parte no factorizable del potencial cuántico con las fluctuaciones locales del momento.

El tratamiento de problemas de partícula libre escapa los alcances de este trabajo, pues en ellos no es válida la hipótesis de ergodicidad necesaria para definir correctamente la densidad de probabilidad en el espacio de configuración del problema y por lo tanto la ecuación de Liouville

del problema, que es el punto de partida en la reducción de la EDEL a la mecánica cuántica, no tiene sentido. Conjeturas acerca de lo que sucede en estos casos se dejan al lector en el que haya nacido la curiosidad. Lo que sí podemos hacer es formular el problema dentro del contexto de este trabajo, ¿cuál es el mecanismo que permite que las correlaciones en los momentos de las partículas permanezcan aún cuando los sistemas se encuentran separados? A tiempos cortos puede esperarse que las correlaciones se preserven [50], sin embargo para tiempos largos no queda claro qué es lo que sucede. ¿Qué tan cortos o largos son los tiempos en los cuales permanecen las correlaciones en este sistema? sería una pregunta importante de responder, pues de ser largos, podrían dar pie a entender la permanencia del enredamiento en el estado de partículas que se hayan separado.⁴

4.4. Perspectivas a futuro

De los intereses más fuertes que despertó en mí hacer esta tesis es profundizar en el estudio del proceso de radiación.⁵ La razón es que considero que no se conoce con el detalle suficiente este proceso que es muy importante, pues está en el seno de fenómenos tan relevantes como la cuantización -como se puede ver de estudiar la EDEL. Los procesos radiativos se han circunscrito a una visión cuántica de la naturaleza, sin embargo, considero que es relevante que no permanezcan ahí para enriquecer nuestra descripción de la naturaleza.

Otro interés despertado en mí fue el estudio de los materiales superconductores. A pesar de que aún no conozco la teoría que está detrás del modelo actual de los materiales superconductores, considero que las ideas que se consolidaron en mi mente como resultado de este trabajo pueden ser útiles en los campos en los cuales la teoría cuántica ha encontrado límites, como lo es la descripción de los materiales superconductores de alta temperatura.

4.5. ¿Por qué la EDEL?

A diferencia de otras descripciones, el poder de la ciencia radica en el grado de unificación que ha alcanzado: una cantidad enorme de fenómenos puede estudiarse dentro de un mismo marco

⁴Cabe mencionar que los experimentos con los que se estudian los estados enredados en partículas libres son principalmente realizados con fotones, no con partículas masivas, en cuales resulta difícil mantener el enredamiento cuando las éstas se alejan. La persistencia del enredamiento en sistemas masivos cuando éstos se han alejado no es un hecho experimental.

⁵Las partículas cargadas radían y como resultado de eso sufren un cambio en su estado, se frenan. Este hecho experimental es introducido dentro de la electrodinámica clásica a través del término $m\tau\ddot{x}$ y su origen es un tanto oscuro. Puede derivarse a partir de igualar la potencia media radiada dada por la fórmula de Larmor, integrando el vector de Poynting en una esfera “de radio infinito” asociado al término del campo eléctrico de una partícula acelerada. Se realiza la integración a un radio infinito debido a que se considera que sólo los términos de \mathbf{S} que decaen como $1/r^2$ y que sobreviven en el proceso de integración en infinito son términos asociados a energía que se separó de la partícula, es decir, no existe alguna forma de que la partícula recupere esta energía; se usa entonces el adjetivo *radiada* para designar aquella porción de energía que se separó de la partícula mediante algún proceso.

teórico. Fue por el interés de extender la unificación de la descripción física que inicialmente decidí estudiar la teoría cuántica a partir de la EDEL.

La característica que más me atrae de la ciencia es su capacidad para describir una cantidad enorme de fenómenos con relativamente pocos axiomas. En este sentido, el hecho de que la teoría cuántica requiera de axiomas diferentes e incompatibles (al parecer) con el resto de la física, me resulta un poco inquietante. La existencia de tales inconsistencias generan, en casi todos los estudiantes que se enfrentan a la teoría cuántica, inquietudes sanas que muchas veces son apaciguadas con frases parecidas a esta: “te tienes que deshacer de tus concepciones clásicas del mundo si es que quieres entender los fenómenos cuánticos”. Sin embargo antes de proceder a descartar el modelo de partícula puntual y el de estado clásico definido mediante la posición y la velocidad, decidí experimentar con la electrodinámica estocástica, que es una teoría clásica en el sentido de que el estado y modelo de partícula es de la mecánica clásica; el elemento que se agrega al cuerpo teórico ya existente es un campo, otro de los elementos que forman parte de la base descriptiva de la física clásica. Este campo es solución a las ecuaciones de Maxwell y no existe en las descripciones clásicas, pues éstas suponen que a temperatura cero la energía del campo de radiación es cero. A escalas macroscópicas la existencia de tal campo es irrelevante pues no podría modificar de forma importante la dinámica de los sistemas, sin embargo, tanto a temperaturas bajas como a escalas microscópicas sus efectos se vuelven relevantes y eventualmente pueden llegar a dominar la descripción. Para tratar un fenómeno estocástico como lo es este campo, herramientas estadísticas son usuales y convenientes. Del resultado de un largo trabajo por parte de relativamente pocos científicos en el mundo, la EDEL ha mostrado que la mecánica cuántica puede recuperarse desde una teoría “clásica”⁶ de la naturaleza usando una descripción estadística del proceso estocástico. Además de la mecánica cuántica de Schrödinger, la EDEL describe varios fenómenos que se encuentran ya en el dominio de la electrodinámica cuántica y la teoría cuántica relativista como la radiación de cuerpo negro, el efecto Lamb y el cálculo directo de los coeficientes de Einstein [20][33][34][45].

Sin duda alguna, la teoría cuántica es maravillosa desde varios sentidos; nos ofrece una descripción de la naturaleza que ha permitido desarrollar una cantidad inimaginable de dispositivos y además representa un puente sólido entre el mundo microscópico y el macroscópico. Este puente ha sido tendido de una forma tan sólida que ha permitido a la comunidad científica estudiar fenómenos que podemos observar sólo indirectamente con una precisión inimaginable.⁷ (Estamos tan seguros de que la teoría dará resultados correctos que el presupuesto para experimentos en este terreno han superado el PIB de algún país pequeño.) Sin embargo, generar teorías alternas a la cuántica (consistentes con esta última, claro) no sería sino enriquecedor. Podemos referirnos al caso de la mecánica clásica para ejemplificar lo anterior; la formulación lagrangiana, la new-

⁶Clásica en el sentido de que utiliza modelos clásicos de la naturaleza: partícula, espacio, tiempo y campos.

⁷Por ejemplo, el cálculo de la constante de estructura fina (utilizando electrodinámica cuántica y mediciones sumamente precisas de la razón giromagnética del electrón) coincide con los resultados experimentales hasta donde se ha podido medir; las predicciones utilizando métodos de la teoría cuántica llegan ya a determinar α hasta en una parte por mil millones, tres ordenes de magnitud fuera del alcance experimental. Se espera que el experimento sólo vaya confirmando este cálculo. [51]

toniana, la hamiltoniana y la de Hamilton-Jacobi son equivalentes, pero para estudiar el caos no es conveniente ver el mundo a la Newton y, por otro lado, formulación Hamiltoniana permite abordar el problema; para resolver la trayectoria del tiro parabólico o de partícula libre no usaremos el método de Hamilton-Jacobi y Newton nos permite resolver este problema con la precisión suficiente para llevar al hombre a la Luna; existen simetrías (y como consecuencia cantidades conservadas) que escapan a la formulación lagrangiana y que son relativamente claras en la formulación hamiltoniana. Concluimos que las diferentes formulaciones de la mecánica clásica enriquecen nuestro poder de descripción, enriquecen a la ciencia. Por eso considero que siempre debemos aspirar a generar nuevos modelos de los fenómenos naturales; es muy probable que, si son formulados correctamente, sean equivalentes a los que ya existen pero aporten un nuevo enfoque; esto provoca emociones en el científico comparables con la percepción de la belleza, pues de alguna forma sentimos que establecemos algún tipo de contacto con lo que *existe*. Sólo vuelvo a resaltar que siempre debemos limitarnos a realizar aseveraciones acerca de los modelos que hacemos de la naturaleza, no de ella; lo que sentimos es otra cosa -importante, por cierto, pues es lo que nos mantiene haciendo ciencia a muchos.

Apéndices

Apéndice A

Cálculo de las correlaciones de las proyecciones de espín en un singulete

Tomemos, sin pérdida de generalidad, $S_a^{(-)} = S_z^{(-)}$ y consideremos que b está en el plano xz . Esto significa que, si θ es el ángulo entre los detectores, se tienen el siguiente par de ecuaciones:

$$S_a^{(-)} = S_z^{(-)} \quad (\text{A.0.1})$$

$$S_b^{(+)} = \cos(\theta)S_z^{(+)} + \text{sen}(\theta)S_x^{(+)} \quad (\text{A.0.2})$$

De las ecuaciones anteriores, podemos calcular

$$S_a^{(-)}S_b^{(+)} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \uparrow_{-}\downarrow_{+} - \uparrow_{+}\downarrow_{-} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| S_z^{(-)} \uparrow (\cos(\theta)S_z^{(+)} \downarrow + \text{sen}(\theta)S_x^{(+)} \downarrow) - S_z^{(-)} \downarrow (\cos(\theta)S_z^{(+)} \uparrow + \text{sen}(\theta)S_x^{(+)} \uparrow) \right\rangle = \quad (\text{A.0.3})$$

$$\frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \uparrow (-\cos(\theta) \downarrow + \text{sen}(\theta) \uparrow) + \downarrow (\cos(\theta) \uparrow + \text{sen}(\theta) \downarrow) \right\rangle = \quad (\text{A.0.4})$$

$$\frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\cos(\theta)(\downarrow_{-}\uparrow_{+} - \uparrow_{-}\downarrow_{+}) + \text{sen}(\theta)(\uparrow_{-}\uparrow_{+} + \downarrow_{-}\downarrow_{+}) \right\rangle \quad (\text{A.0.5})$$

Al obtener el valor esperado del operador, se obtiene: $-\frac{\hbar^2}{4} \cos(\theta)$.

Apéndice B

Cálculo de la solución a la ecuación de Schrödinger para el potencial (2.1.18)

La solución es de la forma:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_1 \operatorname{sen}(kx) \\ A_2 e^{qx} + A_3 e^{-qx} \\ A_4 \operatorname{sen}(l - kx), \end{cases} \quad (\text{B.0.1})$$

con $l = 2a + b$, pues se debe satisfacer que $\psi(0) = 0$ y $\psi(l) = 0$.

Las continuidad de la función de onda impone las siguientes condiciones

$$A_1 \operatorname{sen}(ka) = A_2 e^{qa} + A_3 e^{-qa} \quad (\text{B.0.2})$$

$$A_2 e^{q(a+b)} + A_3 e^{-q(a+b)} = A_4 \operatorname{sen}(ka). \quad (\text{B.0.3})$$

La continuidad en la derivada de la función de onda, por otro lado, establece las siguientes igualdades:

$$kA_1 \cos(ka) = q(A_2 e^{qa} - A_3 e^{-qa}) \quad (\text{B.0.4})$$

$$q(A_2 e^{q(a+b)} - A_3 e^{-q(a+b)}) = -kA_4 \cos(ka) \quad (\text{B.0.5})$$

De sumar las ecuaciones (B.0.2) y (B.0.4), se obtiene:

$$A_2 = \frac{A_1 e^{-qa}}{2} \left(\operatorname{sen}(ka) + \frac{k}{q} \cos(ka) \right) \quad (\text{B.0.6})$$

y de restarlas,

$$A_3 = \frac{A_1 e^{qa}}{2} \left(\operatorname{sen}(ka) - \frac{k}{q} \cos(ka) \right). \quad (\text{B.0.7})$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (B.0.6) y (B.0.7), se establece que el cociente A_1/A_4 tiene dos expresiones,

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{\left(\tan(ka) - \frac{k}{q}\right)}{\left(\tan(ka) + \frac{k}{q}\right)} e^{-qb} \quad (\text{B.0.8})$$

y

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{\left(\tan(ka) + \frac{k}{q}\right)}{\left(\tan(ka) - \frac{k}{q}\right)} e^{qb}. \quad (\text{B.0.9})$$

Por lo tanto, se debe cumplir que

$$\left(\tan(ka) + \frac{k}{q}\right)^2 = \left(\tan(ka) - \frac{k}{q}\right)^2 e^{-2qb}, \quad (\text{B.0.10})$$

o sea,

$$\left(\tan(ka) + \frac{k}{q}\right) = \pm \left(\tan(ka) - \frac{k}{q}\right) e^{-qb}, \quad (\text{B.0.11})$$

o bien,

$$\tan(ka) = -\frac{k}{q} \frac{1 \pm e^{-qb}}{1 \mp e^{-qb}}. \quad (\text{B.0.12})$$

Si $qb \gg 1$, entonces esta expresión se aproxima, despreciando los términos e^{-2qb} por

$$\tan(ka) = -\frac{k}{q} \left(1 \pm 2e^{-qb}\right). \quad (\text{B.0.13})$$

La solución a orden más bajo se obtiene aproximando por cero el lado derecho de la ecuación. En este orden, la solución k_0 satisface

$$k_0 = \frac{n\pi}{a} \quad (\text{B.0.14})$$

y la energía correspondiente

$$E_n^{(0)} = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad (\text{B.0.15})$$

En una segunda aproximación, introduciendo la variable $q_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_n^{(0)})}}{\hbar}$, es

$$ka = n\pi - \frac{k_0}{q_0} \left(1 \pm 2e^{-q_0 b}\right) \quad (\text{B.0.16})$$

y

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{2E_n^{(0)}}{aq_0} \pm \frac{4E_n^{(0)}}{aq_0} e^{-q_0 b}. \quad (\text{B.0.17})$$

Apéndice C

El método de perturbaciones dependiente del tiempo.

Utilizaremos el método de variación de parámetros para describir al sistema deescrito por el hamiltoniano $\hat{H}_0 + \hat{H}(t)$. Este método consiste en escribir las soluciones de la forma

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x), \quad (\text{C.0.1})$$

donde ϕ_n son las eigenfunciones del hamiltoniano no perturbado H_0 , con el potencial (2.1.17). De la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + H(t)) \Psi, \quad (\text{C.0.2})$$

se obtiene la relación

$$i\hbar \sum_n \dot{C}_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x) = \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} \hat{H}(t) \phi_n(x). \quad (\text{C.0.3})$$

Multiplicando la ecuación anterior por ϕ_k e integrando sobre todo el espacio se encuentra la siguiente ecuación para los coeficientes C_n

$$\dot{C}_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n C_n(t) e^{i(E_k - E_n)t/\hbar} H_{kn}, \quad (\text{C.0.4})$$

donde se ha introducido la siguiente variable (función del tiempo)

$$H_{kn} = H_{kn}(t) \equiv \int \phi_k^* \hat{H}(t) \phi_n dx. \quad (\text{C.0.5})$$

Integrando la ecuación (C.0.4), se obtiene

$$C_k(t) = C_k(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_n \int_0^t C_n(t') e^{i(E_k - E_n)t'/\hbar} H_{kn} dt'. \quad (\text{C.0.6})$$

Si suponemos que inicialmente el sistema se encuentra en el eigenestado Ψ_N del hamiltoniano no perturbado, entonces, para que sólo exista un término en la solución (C.0.1) a $t = 0$, los coeficientes deben ser de la forma $C_k(0) = \delta_{Nk}$. La siguiente notación será conveniente:

$$\Psi_N(x, t) = \sum_k C_{Nk}(t) e^{-iE_k t/\hbar} \phi_k(x). \quad (\text{C.0.7})$$

Para resolver la ecuación integral (C.0.6), que es exacta, podemos realizar un desarrollo perturbativo de los coeficientes:

$$C_{Nk} = C_{Nk}(0) + C_{Nk}^{(1)}(t) + C_{Nk}^{(2)}(t) + \dots \quad (\text{C.0.8})$$

Podemos sustituir esta expresión para los coeficientes en la ecuación (C.0.6), obteniendo

$$\begin{aligned} C_{Nk}(t) &= C_{Nk}(0) + C_{Nk}^{(1)}(t) + C_{Nk}^{(2)}(t) + \dots \\ &= C_{Nk}(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_k \int_0^t C_{Nk}(0) e^{i(E_k - E_n)t/\hbar} H_{kn} dt' - \frac{i}{\hbar} \sum_k \int_0^t C_{Nk}^{(1)}(t') e^{i(E_k - E_n)t'/\hbar} H_{kn} dt' + \dots \end{aligned}$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones para los primeros órdenes

$$C_{Nk}(0) = \delta_{Nk}, \quad (\text{C.0.9a})$$

$$C_{Nk}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{kN}t'} H_{kN} dt', \quad (\text{C.0.9b})$$

$$C_{Nk}^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_l \int_0^t dt' \int_0^{t'} \left(e^{i\omega_{kN}t'} H_{kl}(t') e^{i\omega_{lN}t''} H_{lN}(t'') \right) dt'', \quad (\text{C.0.9c})$$

donde $\omega_{kN} = (E_k - E_N)/\hbar$. Con la determinación de estos coeficientes, se puede obtener la solución al problema mediante (C.0.7).

Los coeficientes H_{Nk} (C.0.5) para el potencial (2.1.24), utilizando las soluciones (2.1.19) del hamiltoniano no perturbado (2.1.17) son

$$H_{Nk} = \epsilon V_0 t \frac{2a+b}{\pi} \left(\frac{N \operatorname{sen}(ku) \cos(Nu) - k \cos(ku) \operatorname{sen}(Nu)}{k^2 - N^2} \right) \Bigg|_{u=\frac{a\pi}{2a+b}}^{u=\frac{(a+b)\pi}{2a+b}}. \quad (\text{C.0.10})$$

Para mostrar que estos coeficientes pueden ser distintos de cero de una forma sencilla, partamos del estado base $N = 1$ y supongamos $a = b$. Los coeficientes (C.0.10) entonces se escriben

$$H_{1k} = -\epsilon V_0 t \frac{3}{4\pi(k^2 - 1)} \left(\operatorname{sen} \frac{2}{3} k\pi + \operatorname{sen} \frac{1}{3} k\pi + k\sqrt{3} \left(\cos \frac{2}{3} k\pi - \cos \frac{1}{3} k\pi \right) \right),$$

que es distinto de cero para $k \neq 0$. Si tomamos la expresión (C.0.8) a primer orden, podemos expresar los coeficientes C_{1k} de la forma

$$C_{1k} = 1 + f(k) \int_0^t t' e^{i\omega_{k1}t'} dt' = 1 + f(k) \frac{(1 - e^{-i\omega_{k1}t} - i\omega_{k1}t)}{\omega_{k1}^2} e^{i\omega_{k1}t}, \quad (\text{C.0.11})$$

donde

$$f(k) \equiv \frac{3i\epsilon V_0}{4\pi\hbar(k^2 - 1)} \left[\text{sen } \frac{2}{3}k\pi + \text{sen } \frac{1}{3}k\pi + k\sqrt{3} \left(\cos \frac{2}{3}k\pi + \cos \frac{1}{3}k\pi \right) \right] \quad \text{y} \quad (\text{C.0.12a})$$

$$\omega_{k1} = \frac{E_k - E_1}{\hbar} = \frac{\hbar\pi^2(k^2 - 1)}{2m(3a)^2}. \quad (\text{C.0.12b})$$

Apéndice D

La ecuación de Langevin para el espacio fase de la partícula

El campo de punto cero lo supondremos suficientemente robusto, de tal forma que la partícula no lo modifica sustancialmente. Lo anterior lo introduciremos a la teoría suponiendo que en el subespacio del campo no es modificada la ecuación de continuidad¹, esto es:

$$\hat{L}_f \left(R|_{cpc} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} R|_{cpc} = 0, \quad (\text{D.0.1})$$

pues la distribución del campo en un régimen estacionario suponemos que no varía en el tiempo.² La ecuación (2.2.19) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} (Q + \delta Q) + \hat{L}(Q + \delta Q) + \frac{\partial}{\partial p} (eE(Q + \delta Q)) = 0, \quad (\text{D.0.2})$$

A continuación, procederemos a despejar la función $Q = \hat{P}R$ de la ecuación (D.0.2). El procedimiento, a pesar de que involucra operadores complicados, es relativamente sencillo. Al aplicar \hat{P} y $1 - \hat{P}$ a la ecuación (D.0.2), dado que \hat{P} conmuta con la derivada temporal y con \hat{L} ,

¹Esta hipótesis tendrá como consecuencia la conservación de probabilidad en el subespacio de la partícula, lo cual se obtiene, consistentemente, en el conjunto de ecuaciones (3.2.24) que se obtienen dentro de la aproximación no radiativa.

²Para revisar con un poco más de detalle esta parte, se puede recurrir a la sección de [20] donde se discute la versión causal de ecuación (2.2.14). Ahí se construye un campo efectivo resulta del proceso de interacción materia-cpc. Se muestra que la descripción de la interacción partícula-campo se puede hacer en términos de un campo con una densidad espectral modificada respecto a la del cpc y tal densidad resulta constante en el tiempo. Para recuperar la misma forma del operador \hat{D} (que no es necesario para los propósitos de este trabajo) sería necesario que la distribución de las variables del campo efectivo permanezca gaussiana.

se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q) + \hat{L}(Q) = -e \frac{\partial}{\partial p} \hat{P} E \delta Q, \quad (\text{D.0.3a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta Q) + \hat{L}(\delta Q) = -e \frac{\partial}{\partial p} E Q - e \frac{\partial}{\partial p} (1 - \hat{P}) E \delta Q. \quad (\text{D.0.3b})$$

Utilizando el resultado (2.2.18), el término $\hat{P}(E \frac{\partial Q}{\partial p}) = \hat{P}(E \hat{P} \frac{\partial R}{\partial p})$ se vuelve cero como consecuencia de la forma de la distribución de las variables del campo.

Para obtener el valor de Q , definimos el inverso del operador $\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}$, al que denotaremos por \hat{G} :

$$\hat{G}A(x, p, t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L} \right)^{-1} A(x, p, t) = \int_0^t e^{-\hat{L}(t-t')} A(x, p, t') dt'. \quad (\text{D.0.4})$$

Observemos que este operador es lineal. Aplicando el operador G a las ecuaciones (D.0.3), se obtienen las siguientes expresiones:

$$Q = -e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} \hat{P} E \delta Q, \quad (\text{D.0.5a})$$

$$\delta Q + e \hat{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left[(1 - \hat{P}) E \delta Q \right] \right\} = -e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} E Q. \quad (\text{D.0.5b})$$

Sustituyendo (D.0.5b) en (D.0.5a):

$$Q = -e \hat{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \hat{P} E \left[1 + e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} (1 - \hat{P}) E \right]^{-1} e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} E Q \right\}. \quad (\text{D.0.6})$$

Aplicando el operador $\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}$ a la ecuación anterior, que es el inverso de G , se obtiene la siguiente ecuación tipo Fokker Planck:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \hat{L}Q = -e \frac{\partial}{\partial p} \hat{P} E \left[1 + e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} (1 - \hat{P}) E \right]^{-1} e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} E Q \quad (\text{D.0.7})$$

La ecuación anterior puede ser, finalmente, reescrita en términos de un operador integrodiferencial $\hat{D}(t)$ el cual, desarrollando el operador entre paréntesis cuadrados en la expresión anterior y usando el hecho de que $E Q = (1 - \hat{P}) E Q$, satisface:

$$\hat{D}(t)Q = \hat{P} E \sum_{k=1}^{\infty} \left[e \hat{G} \frac{\partial}{\partial p} (1 - \hat{P}) E \right]^k Q. \quad (\text{D.0.8})$$

La expresión que resulta, recordando la forma del operador \hat{L} (2.2.20a), es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} p Q + \frac{\partial}{\partial p} [(f(x) + m\tau\ddot{x}) Q] = e^2 \frac{\partial}{\partial p} \hat{D}(t)Q. \quad (\text{D.0.9})$$

En el lado derecho de la ecuación anterior, el operador $\frac{\partial}{\partial p} \hat{D}$ involucra la integral en el intervalo temporal $(0, t)$ (D.0.4), motivo por el cual podemos esperar que los procesos que sean modelados por la ecuación (2.2.21) no sean markovianos en el espacio fase.

Bibliografía

- [1] T. Folger, “Is quantum mechanics tried, true, widely successful, and wrong?,” *Science*, vol. 324, pp. 1512–1513, June 2009.
- [2] A. Cho, “Elite retreat takes the measure of a weirdly ordinary world,” *Science*, vol. 304, p. 1896, June 2004.
- [3] M. Schlosshauer, J. Kofler, and A. Zeilinger, “A snapshot of foundational attitudes toward quantum mechanics,” *arXiv:1301.1069v1*, 2013.
- [4] P. R. Holland, *The Quantum Theory of Motion*. Cambridge University Press, 1 ed., 1993.
- [5] D. Bohm, “A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden variables”. I,” *Physical Review*, vol. 85, pp. 166–179, January 1952.
- [6] D. Bohm, “A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden variables”. II,” *Physical Review*, vol. 85, pp. 180–193, January 1952.
- [7] G. Grössing, “The vacuum fluctuation theorem: Exact Schrödinger equation via nonequilibrium thermodynamics,” *Physics Letters A*, vol. 372, pp. 4556–4563, June 2008.
- [8] H. M. Wiseman, “From Einstein’s Theorem to Bell’s Theorem: A history of quantum non-locality,” *arXiv:quant-ph/0509061v3*, 2005.
- [9] S. Popescu, “Why isn’t nature more non-local?,” *Nature Physics*, vol. 2, pp. 505–508, August 2006.
- [10] D. J. Saunders, S. J. Jones, H. M. Wiseman, and G. J. Pryde, “Experimental EPR-steering using Bell-local states,” *Nature Physics*, vol. 6, pp. 845–849, September 2010.
- [11] S. Groblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, C. Brukner, M. Zukowski, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger, “An experimental test of non-local realism,” *Nature*, vol. 446, pp. 871–875, April 2007.
- [12] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical Review*, vol. 47, pp. 777–780, May 1935.

- [13] E. Schrödinger, “Discussion of probability relations between separated systems,” *Cambridge Philosophical Society*, vol. 31, pp. 555–563, October 1935.
- [14] A. Fine, *The Einstein-Podolsky-Rosen Argument in Quantum Theory*, ch. <http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/qt-epr/>. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2012.
- [15] E. G. Cavalcanti, S. J. Jones, H. M. Wiseman, and M. D. Reid, “Experimental criteria for steering and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox,” *Physical Review A*, vol. 80, pp. 1–5, October 2009.
- [16] A. E. Allahverdyan, R. Balian, and T. M. Nieuwenhuizen, “Understanding quantum measurement from the solution of dynamical models,” *Physics Reports*, no. 0, pp. 1–187, 2012.
- [17] J. S. Bell, “On the problem of hidden variables in quantum mechanics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 38, pp. 447–452, July 1966.
- [18] J. S. Bell, “On the Einstein Podolsky Rosen paradox,” *Physics*, vol. 1, pp. 195–200, November 1964.
- [19] T. M. Nieuwenhuizen, “Where Bell went wrong,” *ArXiv e-prints*, p. arXiv:0812.3058v1, December 2008.
- [20] L. de la Peña and A. M. Cetto, *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics*, vol. 75 of *Fundamental Theories of Physics*. Kuwer Academic Publishers, 1 ed., 1996.
- [21] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. FCE, 3 ed., 2003.
- [22] D. Bohm and Y. Aharonov, “Discussion of experimental proof for the paradox of Eistein, Rosen and Podolsky,” *Physical Review*, vol. 108, pp. 1070–1076, November 1957.
- [23] T. Brody, *The Philosophy Behind Physics*. Springer-Verlag, 1 ed., 1993.
- [24] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, pp. 880–884, Oct 1969.
- [25] A. Einstein, *Ideas and Opinions*. Crown Publishers, Inc. New York, 1 ed., 1954.
- [26] V. I. Arnol’d, *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 3 ed., 1984.
- [27] V. I. Arnol’d, *Mathematical Methods for Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2 ed., 1989.
- [28] R. P. Feynman, *Lectures on Physics*. Addison Wesley, 1 ed., 1970.
- [29] M. Moshinsky, “Diffraction in time,” *Physical Review*, vol. 88, pp. 625–631, November 1952.

- [30] G. B. Arfken, H.-J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 7 ed., 2012.
- [31] L. de la Peña and A. M. Cetto, “Derivation of quantum mechanics from stochastic electrodynamics,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 18, p. 1612, August 1977.
- [32] D. W. Ward and S. M. Volkmer, “How to derive the Schrödinger equation,” *arXiv:physics/0610121*, October 2006.
- [33] L. de la Peña, A. Valdéz-Hernández, and A. M. Cetto, “Quantum mechanics as an emergent property of ergodic systems embedded in the zero-point radiation field,” *Foundations of Physics*, vol. 39, pp. 1240–1272, November 2009.
- [34] L. de la Peña, A. Valdéz-Hernández, and A. M. Cetto, “Statistical consequences of the zero-point energy of the harmonic oscillator,” *American Journal of Physics*, vol. 76, p. 947, October 2008.
- [35] T. H. Boyer, “Thermodynamics of the harmonic oscillator: Wien’s displacement law and the Planck spectrum,” *ArXiv e-prints*, October 2002.
- [36] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Jan 1989.
- [37] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *The Classical Theory of Fields*, vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth Heinemann, 4 ed., 1980.
- [38] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, 2 ed., 1989.
- [39] L. de la Peña, A. M. Cetto, A. Valdéz-Hernández, and H. M. França, “Origin and meaning of quantum nonlocality,” *ArXiv e-prints*, Oct. 2011.
- [40] L. E. Ballentine, “Probability theory in quantum mechanics,” *American Journal of Physics*, vol. 54, pp. 883–888, October 1985.
- [41] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Pearson/Addison Wesley, 3 ed., 1999.
- [42] J. V. José and E. J. Saletan, *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [43] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson/Prentice Hall, 2 ed., 2005.
- [44] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, and B. Dui, *Quantum Mechanics (2 vol. set)*. Pearson/Prentice Hall, 2006.
- [45] A. Valdéz-Hernández, *Investigación del origen del enredamiento cuántico desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica Lineal*. Ph.D. Thesis, IFUNAM, April 2010.

- [46] R. P. Feynman, *The character of the physical law*. M. I. T. Press, 1 ed., 1965.
- [47] W. M. de Muynch, “The Bell inequalities and their irrelevance to the problem of locality in quantum mechanics,” *Physics Letters*, vol. 114A, pp. 65–67, February 1986.
- [48] H. Razmi, “On the role of locality condition in Bell’s theorem,” *ArXiv e-prints arXiv:quant-ph/0301008v1*, 2003.
- [49] M. Kupczynski, “Entanglement and quantum nonlocality demystified,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1508, no. 1, pp. 253–264, 2012.
- [50] A. E. Allahverdyan, A. Khrennikov, and T. M. Nieuwenhuizen, “Brownian entanglement,” *Physical Review A*, vol. 72, p. 032102, September 2005.
- [51] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, and B. Odom, “New determination of the fine structure constant from the electron g value and QED,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 030802, Jul 2006.