



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

ANÁLISIS DE SINCRONÍA EN SISTEMAS BIOLÓGICOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA  
JOSÉ DANIEL CASTRO DÍAZ

TUTORES PRINCIPALES  
DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ, I. DE I.  
DR. PABLO PADILLA LONGORIA, IIMAS

MÉXICO, D. F. ENERO DE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Héctor Benítez Pérez

Secretario: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

1er. Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

2do. Vocal: Dr. Pablo Padilla Longoria

3er. Vocal: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

Esta tesis fue elaborada en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

TUTORES DE TESIS:

---

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

---

Dr. Pablo Padilla Longoria



# Agradecimiento

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de esta tesis y de mis estudios de maestría.



## Agradecimiento personal

Le agradezco al Dr. Jaime Moreno por haber aceptado explorar un enfoque diferente al de su actual línea de investigación, en aras de mi crecimiento académico.

Agradezco al Dr. Pablo Padilla por toda su orientación y entusiasmo a lo largo del desarrollo de esta tesis.

Al Dr. Marco Arteaga porque, aún cuando esta vez no fue mi tutor, siempre pude contar con su apoyo y consejo.

A mis amigos de generación Carla, Úrsula, Cesar, Rafa, Manuel, Adrian, Miguel, Jared, Luis y Uriel por todos esos momentos que vivimos juntos como parte de la generación 2012 de la maestría en Control. Gracias por haberme enseñado lo que significa pertenecer a un verdadero grupo de amigos en esta etapa de mi vida adulta.

A la Dra. Tatiana Márquez por enseñarme que una negativa puede, a veces, resultar muy positiva.

A mi madre y a mi padre por su apoyo incondicional en todo momento.

A mi hermano Eduardo por inspirarme a seguir aprendiendo muchas y más cosas.

Al Coach Mario Victoria por enseñarme que el deporte debe estar presente siempre en mi vida y por seguirme guiando en el camino.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por todo lo que me ha dado y sin lo cual mi vida sería muy diferente.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
1.1. Biología de Sistemas . . . . .	13
1.2. Sincronización de sistemas biológicos . . . . .	14
1.3. Un caso particular: luciérnagas . . . . .	14
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	15
1.5. Estado del Arte . . . . .	15
1.5.1. Estudio de sincronía en física e ingeniería . . . . .	15
1.5.2. Estudio de sincronía en biología . . . . .	16
1.5.3. Estudio de la sincronización en poblaciones de osciladores . . . . .	16
1.6. Solución propuesta . . . . .	17
1.6.1. Alcances y limitaciones . . . . .	18
1.7. Contribución . . . . .	18
1.8. Organización del trabajo . . . . .	19
<b>2. Preliminares matemáticas</b>	<b>21</b>
2.1. Oscilaciones auto sostenidas . . . . .	21
2.1.1. Ciclos límite . . . . .	21
2.1.2. El oscilador de van der Pol . . . . .	22
2.2. Teoría de estabilidad Lyapunov para sistemas no autónomos . . . . .	23
2.2.1. Estabilidad de sistemas no autónomos . . . . .	23
2.2.2. Método indirecto de Lyapunov para sistemas no autónomos . . . . .	25
2.2.3. Estabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo . . . . .	25
2.2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov de soluciones periódicas . . . . .	25
2.3. Teoría de estabilidad de Floquet . . . . .	26
2.3.1. Sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos . . . . .	26
2.3.2. Estabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos . . . . .	26
2.3.3. Condición de estabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos . . . . .	28
2.3.4. Cálculo de los exponentes característicos . . . . .	28
2.4. Comentarios del capítulo . . . . .	33

<b>3. Condiciones necesarias para obtener sincronía</b>	<b>35</b>
3.1. Construcción del modelo de osciladores acoplados . . . . .	35
3.1.1. Fuentes puntuales de luminosidad . . . . .	36
3.1.2. Modelo de una población de osciladores acoplados . . . . .	36
3.2. Análisis de sincronía en un sistema biológico . . . . .	37
3.3. Análisis dinámico para el caso de dos luciérnagas . . . . .	38
3.3.1. Dinámica de sincronía . . . . .	40
3.4. Análisis dinámico para el caso de tres luciérnagas . . . . .	40
3.4.1. Dinámica de sincronía . . . . .	42
3.5. Generalización al caso de $n$ luciérnagas . . . . .	43
3.5.1. Dinámica de sincronía . . . . .	45
3.6. Comentarios del capítulo . . . . .	45
<b>4. Condiciones suficientes para obtener sincronía</b>	<b>47</b>
4.1. Análisis dinámico para el caso de dos luciérnagas . . . . .	47
4.1.1. Condición suficiente de sincronía . . . . .	49
4.1.2. Obtención de los exponentes característicos . . . . .	50
4.2. Análisis dinámico para el caso de tres luciérnagas . . . . .	51
4.2.1. Condición suficiente de sincronía . . . . .	53
4.2.2. Obtención de los exponentes característicos . . . . .	54
4.3. Generalización al caso de $n$ luciérnagas . . . . .	54
4.3.1. Condición suficiente de sincronía . . . . .	57
4.3.2. Obtención de los exponentes característicos . . . . .	58
4.4. Comentarios del capítulo . . . . .	58
<b>5. Verificación de resultados</b>	<b>61</b>
5.1. Aspectos generales . . . . .	61
5.2. Primer caso de estudio . . . . .	62
5.2.1. Condición necesaria . . . . .	62
5.2.2. Condición suficiente . . . . .	63
5.2.3. Simulación . . . . .	64
5.3. Segundo caso de estudio . . . . .	65
5.3.1. Condición necesaria . . . . .	65
5.3.2. Condición suficiente . . . . .	66
5.3.3. Simulación . . . . .	66
5.4. Tercer caso de estudio . . . . .	67
5.4.1. Condición necesaria . . . . .	67
5.4.2. Condición suficiente . . . . .	68
5.4.3. Simulación . . . . .	69
5.5. Cuarto caso de estudio . . . . .	72
5.5.1. Condición necesaria . . . . .	72
5.5.2. Condición suficiente . . . . .	73
5.5.3. Simulación . . . . .	73
5.6. Quinto caso de estudio . . . . .	74

	11
5.6.1. Condicion necesaria . . . . .	74
5.6.2. Condición suficiente . . . . .	76
5.6.3. Simulación . . . . .	76
<b>6. Conclusiones</b>	<b>79</b>
6.1. Comentarios finales . . . . .	79
6.2. Trabajo futuro . . . . .	80



# Capítulo 1

## Introducción

El nuevo paradigma de las Ciencias Biológicas es el estudio de los seres vivos mediante el uso de herramientas matemáticas. Más aún, en las últimas décadas, los biólogos se han percatado de que las teorías de sistemas dinámicos y de control puede ayudarlos a comprender muchos sistemas y procesos que hoy en día la Biología clásica no puede explicar. La gran mayoría de estos sistemas se estudian desde el enfoque holístico, es decir, se analizan en su conjunto y no a través de las partes que los componen. Por lo tanto, el sistema es considerado como un todo integrado en donde la dinámica global emerge de la interacción entre ellas. Por otro lado, la teoría de control es capaz de describir el funcionamiento de un sistema analizando por separado sus partes. Debido a su gran complejidad es conveniente, en ocasiones, estudiar los sistemas biológicos desde esta perspectiva, ya que descomponiendo al sistema en pequeños subsistemas, se puede extraer información relevante que sea útil al tratar de describir su comportamiento.

### 1.1. Biología de Sistemas

La aplicación de la teoría de control a los sistemas biológicos tiene una historia que data de más de sesenta años. El matemático Norbert Wiener, a través de su innovador trabajo en cibernética [Wiener, 1948], planteó darle a las máquinas algunas cualidades de los seres vivos mediante la perspectiva de las comunicaciones y el control. Trabajos subsecuentes tratan de entender la fisiología humana. Por ejemplo, en su influyente artículo, Fred Grodins y sus colegas estudiaron la respuesta del sistema respiratorio a la inhalación de  $\text{CO}_2$  como un regulador retroalimentado [Grodins, 1954], utilizando analogías con circuitos eléctricos.

Las actuales investigaciones en el campo difieren de los esfuerzos previos en varios aspectos. En primer lugar, se enfoca en la fisiología celular. El entendimiento de los mecanismos moleculares por los cuales una célula funciona ha avanzado dramáticamente en el último cuarto de siglo; ahora se cuenta con una caracterización formal de la base química con la cual la célula regula su propio comportamiento. Además, en años recientes, los biólogos han desarrollado técnicas experimentales que han abierto nuevas puertas para investigar el comportamiento celular, que es la base para el estudio de otros sistemas más complejos.

Aunque se trata de una ciencia relativamente nueva, la Biología de Sistemas (*Systems Biology* en inglés) es muy vasta y contiene varias subdisciplinas. En lo que respecta a la teoría del control,

lo que se busca es que los modelos matemáticos emulen el comportamiento real del sistema. Dado que los sistemas en biología son muy grandes y complejos, se espera poder describir una parte específica de ellos, por ejemplo una vía metabólica en particular, el ritmo del latido del corazón o la luminosidad de un insecto. Una vez establecido que el modelo se aproxima lo suficiente a un comportamiento real, éste se estudia usando herramientas matemáticas y técnicas de análisis dinámico con el fin de encontrar ciertas características que pueden llegar a explicar el funcionamiento real del sistema.

## 1.2. Sincronización de sistemas biológicos

La palabra sincronía tiene su origen en las palabras griegas  $\chi\rho\nu\nu\omicron\zeta$  (cronos, que significa tiempo) y  $\sigma\nu\nu$  (sin, que significa común, lo mismo) [Pikovsky, 2001]. Si se traduce literalmente, sincrónico significa “ocurriendo al mismo tiempo”. Este término se refiere a una gran variedad de fenómenos en casi todos los campos de las ciencias naturales e ingeniería. Inicialmente, la sincronización fue investigada en diferentes objetos construidos por el hombre tales como instrumentos musicales, sistemas de generación de energía o lasers. Se encontró que tiene numerosas aplicaciones prácticas en la ingeniería mecánica y eléctrica. Hoy en día, el centro de las investigaciones en el área se ha trasladado hacia los sistemas biológicos, en donde es encontrada a diferentes niveles. Se presenta en ejemplos fascinantes tales como variaciones sincrónicas de sustancias en el núcleo celular, ajustes del latido del corazón con la respiración o diferentes formas de comportamientos cooperativos en insectos, animales e incluso humanos. Todos los ejemplos son variaciones del mismo tema: la aparición espontánea del orden y la generación de ritmos. Usualmente todos estos sistemas individuales no están aislados de su ambiente, más aún, interactúan unos con otros. Esta interacción puede ser muy débil, algunas veces casi imperceptible y sin embargo causa una transición cualitativa: un sistema ajusta su ritmo conforme a los ritmos de los otros.

## 1.3. Un caso particular: luciérnagas

En el sudeste asiático, en lugares como Tailandia o Borneo, se pueden ver enjambres de luciérnagas sobre los manglares a orilla de los ríos que, cada determinado tiempo brillan al mismo ritmo. Las luciérnagas adultas son largas y estrechas alrededor de media pulgada de largo. Su característica más notable es la parte inferior del abdomen con el último número de segmentos de color amarillo-verdoso, formando una “cola luminosa” capaz de producir destellos de luz. Evidentemente las luciérnagas se sincronizan, basta ver un árbol lleno de ellas en una noche oscura para notar como emerge un patrón aparentemente ordenado de destellos debido a la acción colectiva de muchos individuos. Se cree que los destellos sirven como señales de comunicación para el apareamiento. Este fenómeno es la consecuencia de que los machos se sincronizan con sus vecinos compitiendo en pequeños grupos por las hembras en un nivel muy localizado [Escalante, 2012]. La razón aparente que los impulsa a sincronizarse es que las hembras sólo pueden ver al macho que brilla y desde luego que al macho le interesa ser visto o al menos no estar apagado cuando otro esté brillando, pues sus posibilidades de aparearse se reducen de manera que modifica su ritmo y su luminosidad en vista de los competidores; dicho de otra

forma, a ninguno le conviene estar apagado cuando algún otro esté encendido y por lo tanto se sincronizan.

## 1.4. Planteamiento del problema

El problema que se plantea resolver en este trabajo es el siguiente: *Dado un sistema de osciladores de van der Pol interconectados mediante funciones lineales y que emulan el comportamiento de la bioluminiscencia de un grupo de luciérnagas, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que dicho sistema entre en sincronía total utilizando técnicas de análisis de sistemas dinámicos.*

Por sincronía total se entiende que todas las variables de estado se comporten exactamente de la misma manera, aún cuando inicien en condiciones iniciales diferentes.

En el trabajo a desarrollar se estudiarán los casos de dos y tres osciladores únicamente. Una vez establecido que el comportamiento dinámico es el mismo en todas las variables de estado, independientemente del número de ellos, se obtendrán las condiciones necesarias y suficientes para el caso general de  $n$  osciladores.

## 1.5. Estado del Arte

El estudio de la sincronía surgió de observar y tratar de entender fenómenos puramente físicos. Entre más se investigaba, más se caía en la cuenta de que la naturaleza tiene una profunda tendencia hacia el orden, y que esto sucede a todos los niveles, desde los planetas girando en sus órbitas hasta fotones en láseres que hacen que la luz brille en un intenso y estrecho rayo de un color muy puro. Al ser tan común la ocurrencia de este fenómeno, los científicos se percataron de que está presente en prácticamente todas las ramas de la biología y que su estudio a través de herramientas matemáticas, tal como se hace en física, puede ayudar a comprender mejor como se comportan los seres vivos.

En las siguientes secciones se hará una revisión histórica y actual de las investigaciones más relevantes en el estudio de la sincronía en física y biología para después enfatizar el surgimiento de la investigación de sistemas biológicos sincronizados desde una perspectiva matemática.

### 1.5.1. Estudio de sincronía en física e ingeniería

En 1665, Christian Huygens fue el primero que observó y estudió la sincronización de manera sistemática. Descubrió que un par de relojes con péndulo comunicados por un soporte común se sincronizaban i.e., al término de cierto tiempo sus oscilaciones coincidían perfectamente. Este hecho causó un gran impacto en los descubrimientos científicos y tecnológicos de su época ya que permitió que la medición del tiempo fuera más exacta. Casi tres siglos después, Lord Raleygh describió el fenómeno de sincronización en sistemas acústicos observando el comportamiento de dos pipas de órganos musicales del mismo tono colocados lado a lado [Raleygh, 1945].

Una nueva etapa de la investigación en sincronización está relacionada con el desarrollo de la ingeniería eléctrica. J. H. Vincent y W. H. Eccles descubrieron la propiedad de sincronía de un triodo generador – un dispositivo eléctrico basado en un tubo de vacío que produce corrien-

te periódicamente. En sus experimentos ellos acoplaron dos generadores que tenían frecuencias ligeramente diferentes y demostraron que el acoplamiento forzaba al sistema a vibrar con una frecuencia común [Eccles and Vincent, 1920].

Unos años después, Victor Appleton y Balthasar van der Pol replicaron y ampliaron los experimentos de Eccles y Vincent y dieron el primer paso hacia el estudio teórico del efecto descubierto, lo cual fue de gran importancia ya que los triodos generadores se convirtieron en elementos básicos de los sistemas de radio y comunicación [van der Pol, 1920]. El fenómeno de sincronía fue usado para estabilizar la frecuencia de un poderoso generador con la ayuda de otro más débil pero más preciso [Appleton, 1922].

A partir de los años veinte y gracias a la teoría desarrollada por Appleton y van der Pol, la investigación sobre sincronización en ingeniería se ha extendido a los dispositivos electrónicos y a las ventajas que conlleva que dos o más de ellos se sincronicen por sí mismos o de manera inducida mediante un estímulo externo.

### 1.5.2. Estudio de sincronía en biología

En 1729 Jean-Jacques Dortous de Mairan, un matemático y astrónomo francés realizó experimentos con alubias. Se dio cuenta que las hojas de esta planta se movían hacia arriba o hacía abajo de acuerdo con el cambio de día o noche. Una vez hecha esta observación, de Mairan colocó la planta en una habitación oscura y encontró que el movimiento de las hojas continuaba incluso sin variaciones de iluminación en el ambiente. A partir de ahí, muchos experimentos aún más complicados han sido replicados en diferentes laboratorios y, ahora, es bien sabido que todos los sistemas biológicos, desde el más simple hasta el más altamente organizado, cuentan con relojes internos que les proporcionan información del cambio entre día y noche. El origen de estos relojes es aún un reto, pero hoy en día está bien establecido que ajustan los ritmos circadianos (de *circa*: aproximado, cercano a y *dies*: día) a señales externas. Si el sistema es totalmente aislado del ambiente y es sometido a condiciones constantes (iluminación, temperatura y presión), su ciclo externo difiere del ciclo de 24 horas al que todos los seres vivos están habituados. En condiciones naturales, los relojes biológicos sincronizan su ritmo de acuerdo al periodo de 24 horas de rotación de la Tierra.

### 1.5.3. Estudio de la sincronización en poblaciones de osciladores

Lo que corresponde a esta tesis es estudiar la sincronía de una población de osciladores. En esta sección se darán a conocer los esfuerzos que se han desarrollado durante este y el siglo pasado tratando de describir cómo y por qué una población de osciladores se sincroniza.

Arthur Winfree propone en su artículo [Winfree, 1967] el estudio de una población de osciladores mutuamente acoplados modelados mediante ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. Fue el primero que reconoció que el problema biológico podía abordarse como lo que décadas antes se había estudiado en física, pero haciendo un nuevo conjunto de suposiciones. En física, las oscilaciones son usualmente conservativas e idénticas; en biología las oscilaciones son auto sostenidas y no idénticas. Esto quiere decir que cada oscilador tiene un ciclo límite estable. Esta suposición es razonable ya que los osciladores biológicos generalmente regulan su amplitud, si éstos son perturbados, regresan a su ciclo estándar, mientras que los osciladores conservativos

recordarán dichas perturbaciones en el tiempo futuro. En trabajos posteriores Winfree [Winfree, 1987] se centró en describir, de una manera más general, el tipo de interacción que debe haber entre los osciladores para que exista sincronización en sus ritmos, centrándose en su fase. A través de estudios numéricos y analíticos descubrió que la sincronización ocurre cooperativamente. Cuando la propagación de frecuencias naturales es grande comparada con el acoplamiento, las oscilaciones se comportan de una manera incoherente al oscilar a su frecuencia natural pero cuando la propagación se decrementa, la población se mantiene incoherente hasta que de un momento a otro, pasan por un umbral y entran en sincronía de manera espontánea.

Basándose en las ideas de Winfree, Yoshiki Kuramoto propone en 1975 un modelo matemático en donde hace la analogía entre sincronización y transiciones de fase. De este trabajo se concluyó que existe un espectro de frecuencias muy particular – ya descubierto por Wiener en sus estudios del ritmo alpha de las ondas cerebrales [Wiener, 1958] – y que permitió el desarrollo de fórmulas que caracterizan el umbral descrito por Winfree [Kuramoto, 1975].

Por su parte, Mirollo y Strogatz se enfocaron en el estudio de osciladores acoplados mediante pulsos ya que según ellos, esta forma de acoplamiento se acerca más a la realidad biológica. En su artículo [Mirollo and Strogatz, 1990] destacan las características matemáticas que deben poseer los osciladores para sincronizarse, entre ellas el signo del pulso de acoplamiento. Además, generalizan al caso de una población de  $n$  osciladores con cualquier condición inicial, suponiendo que los osciladores son idénticos y que están acoplados “*all to all*”. Poco después Bard Ermentrout propuso un nuevo modelo basándose en la observación de la luciérnaga *Pteroptyx malaccae*. Añadiendo adaptabilidad al modelo estándar del oscilador [Ermentrout, 1991], es posible observar alteraciones frecuenciales, las cuales empatan con algunos sistemas circadianos de mamíferos. De esta manera Ermentrout acerca mucho más la teoría matemática a aspectos puramente biológicos y biofísicos.

Más recientemente, Enrique Escalante se ha dado a la tarea de estudiar la sincronía de una población de osciladores de van der Pol idénticos acoplados mediante funciones lineales. Realizando un análisis dinámico en donde, una vez linealizado el modelo alrededor del origen, encuentra los valores propios que generan sincronía en el sistema. Así pues, llega a la conclusión de que estos valores cambian dependiendo del número de osciladores considerados [Escalante, 2012]. En consecuencia, le da a este hecho una interpretación biológica basándose en el fenómeno de sincronía en poblaciones de luciérnagas: el esfuerzo que realiza una luciérnaga (en este caso modelando el comportamiento de su bioluminiscencia mediante una ecuación de van der Pol) para sincronizarse con las demás, depende del número de competidores que percibe.

## 1.6. Solución propuesta

En este trabajo se propone la obtención de condiciones necesarias y suficientes para conocer si una población de osciladores idénticos está en sincronía total tomando como base los parámetros de interconexión entre ellos. Se plantea que el sistema represente un conjunto de luciérnagas macho ya que es sencillo darle una interpretación biológica al comportamiento de su bioluminiscencia, mediante la ecuación de van der Pol, cuando éstas están en competencia por una hembra durante su época de apareamiento.

La propuesta presentada en este texto es en gran parte una extensión del trabajo de Enrique

Escalante sobre el estudio de sincronización y modelos matemáticos. En su análisis primero se linealiza el sistema de osciladores alrededor del origen, obteniendo después sus valores característicos con el fin de comprobar que sus parámetros cambian conforme aumenta el número de competidores. La solución propuesta en este trabajo es el análisis del sistema no lineal de osciladores mediante cambios de coordenadas que representarán a sus errores de sincronía para después hacer un estudio de estabilidad que consecuentemente arrojará condiciones de sincronía.

### 1.6.1. Alcances y limitaciones

Una luciérnaga es un ser vivo muy complejo. En esta tesis no se espera obtener resultados que den respuesta a interrogantes entomológicas de este insecto. Se toma como base ya que resulta relativamente fácil relacionar el comportamiento dinámico del modelo matemático con el comportamiento biológico de su luminosidad, pero bien se pudo haber escogido cualquier otro fenómeno biológico oscilatorio que entre en sincronía ya que son abundantes en la naturaleza.

Una limitante importante es que el modelo considera únicamente funciones lineales como acoplamiento entre los osciladores ya que los autores de los trabajos consultados coinciden en que las interconexiones mediante pulsos son las que más se asemejan al acoplamiento real que existe en la naturaleza, al menos para las luciérnagas. También se deja de lado el análisis de fase ya que se busca que las condiciones para que haya sincronía estén basadas únicamente en la estructura dinámica del sistema.

Otro aspecto importante a considerar es que sólo se buscan condiciones necesarias y suficientes para que haya sincronía total en el sistema, es decir, cada uno de los elementos del conjunto de osciladores debe comportarse exactamente igual al resto de sus compañeros. Puede que haya sincronía en uno o varios subconjuntos de osciladores, pero esos casos no se consideran. A pesar de las limitantes mencionadas, a lo largo del trabajo se muestra cómo la teoría de análisis de sistemas dinámicos es muy útil y tan versátil que puede ser aplicada al estudio de seres vivos, por medio de la biología de sistemas. Se espera que el trabajo motive a la experimentación en biología molecular ya que en dicha disciplina la sincronía juega un papel fundamental.

## 1.7. Contribución

En este trabajo se tomó un modelo matemático de osciladores de van der Pol y se adaptó a un fenómeno biológico que se observa frecuentemente en la naturaleza. Si bien se ha estudiado extensamente las características de los sistemas sincronizados, no se han reportado estudios de condiciones necesarias y suficientes para que una población de osciladores entre en sincronía con base en la estructura dinámica del modelo matemático que los representa. En este trabajo, aparte de aplicar técnicas de análisis de sistemas no lineales, se muestra cómo existen otras herramientas matemáticas que son de gran utilidad al estudiar fenómenos periódicos. Repitiendo el tipo de analogía en un sistema biológico tal y como se hizo en este trabajo, se espera discernir un poco más acerca de las causas que hacen que se sincronicen y que finalmente refleja la enorme tendencia hacia el orden de la naturaleza.

## 1.8. Organización del trabajo

El presente trabajo se compone de cinco capítulos. En el capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de la tesis, en el capítulo 3 se presenta el desarrollo para obtener las condiciones necesarias de sincronía mientras que en el capítulo 4 se hace lo mismo para las condiciones suficientes. En el capítulo 5 se presentan ejemplos particulares que comprueban mediante simulaciones que la sincronía se da con base en las condiciones obtenidas en los capítulos posteriores. Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.



## Capítulo 2

# Preliminares matemáticas

Para desarrollar el análisis dinámico que permitirá resolver el problema planteado en esta tesis, es necesario conocer detalladamente las ecuaciones del sistema con el que se va a trabajar, además de las herramientas matemáticas que se requieren para su estudio. Estas herramientas incluyen el método indirecto de Lyapunov, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes periódicos y la teoría de estabilidad de Floquet.

### 2.1. Oscilaciones auto sostenidas

La principal característica de los sistemas con oscilaciones auto sostenidas es que aún cuando sean aislados, continúan oscilando a su propio ritmo. Este ritmo es determinado por las propiedades mismas del sistema. Dichas oscilaciones son autónomas y son una clase de modelos no lineales que son conocidos como sistemas auto oscilatorios.

#### 2.1.1. Ciclos límite

La oscilación auto sostenida es uno de los fenómenos más importantes que ocurren en los sistemas dinámicos. Los sistemas que las producen son ubicuos en la naturaleza e ingeniería y su imagen universal es el ciclo límite.

Un sistema oscila [Khalil, 2002] cuando tiene una solución no trivial periódica de la forma

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \geq 0$$

para cualquier  $T > 0$ .

La imagen representativa de una solución periódica en el plano de fase es una trayectoria cerrada que es usualmente llamada una *órbita periódica* o una *órbita cerrada* y puede observarse en la Figura 2.1.

Para entender el origen del término *ciclo límite* se tiene que determinar como éste difiere de todas las demás trayectorias en el plano de fase. Para ello, se considera el comportamiento de las éstas en la vecindad del ciclo límite, en otras palabras, se debe de observar que pasa si un punto en el plano de fase es alejado del ciclo límite. Para un sistema físico o biológico, esto significa que

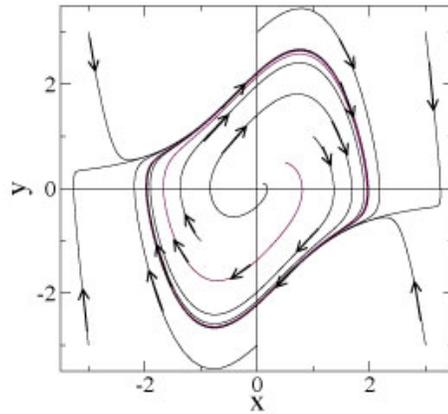


Figura 2.1: Ciclo límite

se perturba su movimiento periódico. Es aquí de donde se obtiene la característica esencial de las oscilaciones auto sostenidas: después de la perturbación de la oscilación, el ritmo original se restaura, esto quiere decir que el punto en el plano de fase regresa al ciclo límite [Pikovsky, 2001]. Un ciclo límite con esta propiedad se conoce como ciclo límite estable. También existen ciclos límite inestables que tienen la propiedad de que todas las trayectorias que inician en puntos arbitrariamente cerca tienden fuera mientras  $t \rightarrow \infty$ . La propiedad mencionada anteriormente también significa que las oscilaciones no dependen de las condiciones iniciales o de como el sistema haya sido excitado inicialmente.

La forma del ciclo límite depende exclusivamente de los parámetros internos del sistema. Si la oscilación tiene forma de onda senoidal, entonces el oscilador es llamado *quasilineal* o *armónico*, en este caso su ciclo límite se representa por un círculo en el plano de fase, en cambio los sistemas altamente no lineales pueden exhibir oscilaciones y ciclos límite de formas complicadas.

### 2.1.2. El oscilador de van der Pol

Considérese la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0. \quad (2.1)$$

Donde  $\mu$  es un parámetro que representa que tan fuerte es la no linealidad y  $\omega_0$  es la frecuencia natural del oscilador. Cuando las constantes  $\mu$  y  $\omega_0$  son positivas, existe una curva cerrada en el plano de fase y las trayectorias que inician cerca, ya sea afuera o adentro, convergen a ella. Se puede ver claramente que este comportamiento coincide con el descrito en la Subsección 2.1.1, tratándose entonces de un ciclo límite definido por la ecuación (2.1) y que es conocida como *ecuación de van der Pol*.

El término  $-\mu(1 - x^2)$  representa un coeficiente de amortiguamiento. Para valores grandes de  $x$ , este coeficiente es positivo e indica que se está removiendo energía del sistema. Sin embargo, para valores pequeños de  $x$ , el coeficiente de amortiguamiento es negativo e indica que se está añadiendo energía al sistema. Por lo tanto, ya que el amortiguamiento no lineal varía respecto a  $x$ , el

comportamiento del sistema no puede crecer infinitamente ni llegar a cero. En vez de eso, emerge una oscilación sostenida independiente de las condiciones iniciales del sistema [Slotine, 1992]. Como se dijo anteriormente, este comportamiento se representa en el plano de fase mediante un ciclo límite y es conservado gracias a la liberación y absorción periódicas de energía a través del término de amortiguamiento y puede tomar formas especiales dependiendo del valor de  $\mu$ . Además, para que las soluciones de la ecuación de van der Pol exhiban este comportamiento periódico es necesario que se cumpla

$$\mu \gg \omega_0. \quad (2.2)$$

donde, como se mencionó anteriormente,  $\omega_0$  es la frecuencia natural del oscilador.

Es importante señalar que el ciclo límite del oscilador de van der Pol tiene la propiedad de que todas las trayectorias en su vecindad tienden hacia él mientras  $t \rightarrow \infty$ , tratándose entonces de un ciclo límite estable.

## 2.2. Teoría de estabilidad Lyapunov para sistemas no autónomos

Se dice que un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que comienzan en puntos cercanos permanecen cerca, en otro caso, es inestable. Es asintóticamente estable si todas las soluciones que inician en puntos cercanos, no sólo permanecen cerca sino que además tienden al punto de equilibrio mientras que el tiempo tiende a infinito. Estos conceptos pueden ser fácilmente extendidos al caso de estabilidad de soluciones periódicas, que es la base para el desarrollo de la teoría expuesta en este trabajo.

En esta sección se dará a conocer el método indirecto o método de linealización para sistemas no autónomos o variantes en el tiempo.

### 2.2.1. Estabilidad de sistemas no autónomos

Considérese el sistema no autónomo a tramos

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.3)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$  es continua a trozos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  sobre  $[0, \infty) \times D$  y  $D \subset R^n$  es un dominio que contiene al origen  $x = 0$ . El origen es un punto de equilibrio para (2.3) en  $t = 0$  si

$$f(t, 0) = 0. \quad \forall t \geq 0$$

Un punto de equilibrio en el origen puede ser una traslación de un punto de equilibrio distinto de cero, o de manera más general, la traslación de una solución diferente de cero del sistema. Para visualizar esto, supóngase que  $\bar{y}(\tau)$  es una solución del sistema

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y)$$

definido para todo  $\tau \geq a$ . El cambio de variables

$$x = y - \bar{y}(\tau); \quad t = \tau - a \quad (2.4)$$

transforma el sistema a la forma

$$\dot{x} = g(\tau, y) - \dot{\bar{y}}(\tau) = g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - \dot{\bar{y}}(t + a) = f(t, x).$$

Dado que

$$\bar{y}(t + a) = g(t + a, \bar{y}(t + a)) \quad \forall t \geq 0$$

el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema transformado en  $t = 0$ . Por lo tanto, examinando la estabilidad del origen como un punto de equilibrio del sistema transformado se determina la estabilidad de la solución  $\bar{y}(\tau)$  del sistema original. La solución de un sistema no autónomo puede depender de  $t$  y de  $t_0$  mientras que la solución de un sistema autónomo depende sólo de  $(t - t_0)$ . Por lo tanto, la estabilidad de un punto de equilibrio generalmente va a ser dependiente de  $t_0$ . El origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio estable de (2.3) si, para cada  $\epsilon > 0$ , y cualquier  $t \geq 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

La constante  $\delta$  es, en general, dependiente del tiempo inicial  $t_0$ . La existencia de  $\delta$  para cada  $t_0$  no necesariamente garantiza que haya una constante  $\delta$ , dependiente solamente de  $\epsilon$ , que funciones para todo  $t_0$ .

**Definición 2.2.1** *El punto de equilibrio  $x = 0$  de (2.3) es*

- estable si, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{2.5}$$

- uniformemente estable si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independiente de  $t_0$  tal que (2.5) se satisface.
- inestable si no es estable.
- asintóticamente estable si es estable y existe una constante positiva  $c = c(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$ , para toda  $\|x(t_0)\| < c$ .
- uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y hay una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0$ , tal que para todo  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $t_0$ ; esto es, para cada  $\eta > 0$ , existe  $T = T(\eta) > 0$  tal que

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

- globalmente uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable,  $\delta_\epsilon$  puede ser escogida tal que satisfaga  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \delta(\epsilon) = \infty$  y para cada par de números positivos  $\eta$  y  $c$ , existe  $T = T(\eta, c) > 0$  tal que

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

### 2.2.2. Método indirecto de Lyapunov para sistemas no autónomos

El siguiente teorema retoma el método indirecto de Lyapunov para mostrar estabilidad exponencial del origen en el caso no autónomo.

**Teorema 2.2.1** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ , y la matriz Jacobiana está acotada y es Lipschitz en  $D$ , uniformemente en  $t$ .

Sea

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0}$$

Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema no lineal si es un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x$$

### 2.2.3. Estabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo

La estabilidad del origen de un punto de equilibrio para el sistema lineal variante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = A(t)x \tag{2.6}$$

puede ser completamente caracterizada en términos de la matriz de transición de estados del sistema. De la teoría de sistemas no lineales, se sabe que la solución de (2.6) está dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados. El siguiente teorema caracteriza la estabilidad asintótica en términos de  $\Phi(t, t_0)$ .

**Teorema 2.2.2** *El punto de equilibrio  $x = 0$  de (2.6) es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si la matriz de transición de estados satisface la desigualdad*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)} \tag{2.7}$$

para cualesquiera constantes positivas  $k$  y  $\lambda$ .

### 2.2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov de soluciones periódicas

Si  $\bar{x}$  es una solución periódica del sistema

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.8}$$

Las propiedades de estabilidad de la solución periódica  $\bar{x}$  pueden ser caracterizadas en el sentido de Lyapunov. Sea

$$y = x - \bar{x}$$

entonces el origen  $y = 0$  se vuelve un punto de equilibrio del sistema de la ecuación (2.8) tal que el origen  $y = 0$  se vuelve un punto de equilibrio del sistema no autónomo

$$\dot{y} = f(t, y + \bar{x}) - f(t, \bar{x}) \quad (2.9)$$

El comportamiento de las soluciones de (2.8) cerca de  $\bar{x}$  es equivalente al comportamiento de las soluciones de (2.9) cerca de  $y = 0$ . Por lo tanto, se pueden caracterizar las propiedades de estabilidad de  $\bar{x}$  a partir del equilibrio  $y = 0$ . Entonces, encontrar las condiciones de estabilidad de  $\bar{x}$  se reduce a estudiar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no autónomo revisado en la Sección 2.2.1.

## 2.3. Teoría de estabilidad de Floquet

En esta sección se darán a conocer los conceptos esenciales para el estudio de sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos, así como las herramientas necesarias que serán utilizadas para determinar su estabilidad.

### 2.3.1. Sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos

Considérese el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (2.10)$$

donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$  tal que

$$A(t + T) = A(t), \quad \forall t \geq 0$$

para todo  $T > 0$ , que se asume continua y por lo tanto en el espacio  $R^{n \times n}$  de las matrices con elementos integrables sobre  $T$ .

### 2.3.2. Estabilidad de sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos

Al igual que para el caso de un sistema lineal variante en el tiempo, la estabilidad de (2.10) puede ser completamente caracterizada mediante su matriz de transición de estados  $\Phi(t, t_0)$  si se satisface

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad (2.11)$$

con  $\Phi(t_0, t_0) = I$ .

Si se considera  $t_0 = 0$ , la teoría de Floquet establece que

$$\Phi(t) = P(t)e^{Mt} \quad (2.12)$$

en donde  $P(t)$  es una transformación continua e invertible y que cumple

$$P(t + T) = P(t) \quad (2.13)$$

con

$$P(0) = I. \quad (2.14)$$

Por lo tanto, las soluciones de (2.10) decaen exponencialmente si y sólo si los valores característicos de  $M$  tienen parte real negativa. Desde luego,  $P$  y  $M$  no son únicas y tampoco lo son los valores característicos. Más aún, calcularlos es un trabajo arduo ya que el cálculo de  $\Phi$  implica resolver la ecuación

$$\Phi(T) = P(T)e^{MT} = P(0)e^{MT} = e^{MT} = V \quad (2.15)$$

lo cual es indeseable y a veces imposible [Mees, 1981] y hace que en tiempo continuo no exista una expresión analítica para la matriz de transición. Sin embargo, Floquet también plantea un método alternativo: encontrar algún cambio de variable

$$x(t) = P(t)z(t) \quad (2.16)$$

tal que transforme el sistema (2.10) en un sistema de coeficientes constantes de la forma

$$\dot{z}(t) = Mz(t). \quad (2.17)$$

Entonces, con la ayuda de la dinámica de la matriz  $M$ , se transforma el sistema en un sistema lineal invariante en el tiempo, haciendo el análisis de estabilidad de (2.10) posible.

**Definición 2.3.1** *La matriz  $V$  de la ecuación (2.15) se conoce como matriz de monodromía del sistema y se trata de la matriz de transición del sistema en el instante  $t = T$ .*

Conociendo  $V$  se podría calcular  $M$ , pero no es posible debido a la ambigüedad del logaritmo

$$e^{MT} = V \Rightarrow e^{MT+jk2\pi I} = e^{(M+jk\omega I)T} = V \quad (2.18)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \text{ y } \omega = 2\pi/T \quad (2.19)$$

En otras palabras, si la matriz  $M$  de la ecuación (2.15) se satisface, a cada matriz  $\hat{M}$  con  $\hat{M} = M + jk\omega I$ , le corresponde una transformación asociada  $\hat{P}(t) = e^{-jk\omega t}P(t)$ . Entonces la matriz de monodromía  $V$  es calculada mediante  $M$  y  $P(t)$ . Los resultados anteriores se anuncian en el siguiente Teorema:

**Teorema 2.3.1** *(Teorema de Floquet) Sea  $A : R \rightarrow \Phi$  continua y  $T$ -periódica. Sea  $\Phi$  una matriz de monodromía de (2.10). Sea  $M \in \Phi_{n \times n}$  tal que  $e^{MT} = V$ . Entonces, se tiene*

1.  $\exists$  un cambio de variable  $x(t) = P(t)z(t)$  tal que  $\dot{x} = A(t)x \rightarrow \dot{z}(t) = Mz(t)$ .
2.  $P(t)$  es  $T$ -periódica.

En general  $P(t)$  y  $M$  son complejos conjugados incluso si  $A(t)$  es real.

### Factores y exponentes característicos

El concepto de valor propio juega un papel fundamental en la teoría de los sistemas lineales invariantes en el tiempo. En su lugar, en sistemas lineales variables en el tiempo con coeficientes periódicos, es reemplazado por un par de términos: Factor Característico y Exponente Característico, que a continuación se definen.

**Definición 2.3.2** *Los factores característicos del sistema (2.10) se entienden como los valores propios  $\rho_1 \dots \rho_n$  de la matriz de monodromía  $V$  asociada. Los valores propios  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  de la matriz constante  $M$  se llaman exponentes característicos del sistema (2.10).*

De la ecuación (2.15) se obtiene la relación que deben cumplir los factores y exponentes característicos.

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \rho_i = \frac{1}{T} \{ \ln \rho_i + j \arg \rho_i + 2k\pi j \} \quad (2.20)$$

$$= \lambda_{i,0} + kj\omega \quad (2.21)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.22)$$

Aunque los factores característicos están claramente definidos, los exponentes característicos lo están sólo en múltiplos de  $j\omega$  donde  $\omega = 2\pi/T$ .

### 2.3.3. Condición de estabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos

Una vez expuestos los conceptos de estabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo con coeficientes periódicos, es necesario conocer el criterio que da a conocer cuando éstos son estables o no mediante el siguiente teorema

**Teorema 2.3.2** *El sistema lineal variante en el tiempo con coeficientes periódicos (2.10) es*

- *asintóticamente estable si  $Re\{\lambda_j\} < 0 \forall \lambda_j$  exponentes característicos o de forma equivalente,*
- *asintóticamente estable si  $|\rho_j| < 1$  en donde  $\rho_j$  son los factores característicos de su matriz de monodromía asociada  $V$ .*
- *Inestable si no es estable.*

Cuando la estabilidad está dada con base en los factores característicos, se requiere entonces que todos ellos permanezcan dentro del círculo unitario.

### 2.3.4. Cálculo de los exponentes característicos

En las subsecciones anteriores se obtuvo que la estabilidad de un sistema LVT con coeficientes periódicos depende de sus exponentes característicos, o bien de los factores característicos de su matriz de monodromía asociada  $V$ . Entonces, es de vital importancia conocer el valor de unos o de otros. Sin embargo, como se mencionó en la Sección (2.3.2), en el caso de los factores característicos, esto no es posible ya que no existe una expresión analítica para la matriz  $V$ . La alternativa es hallar los exponentes característicos del sistema aprovechando la periodicidad de la matriz  $A(t)$ . Esto se logra recurriendo a su representación en series de Fourier. Para ello es necesario encontrar de manera simultánea  $P(t)$  y  $M$ . A continuación se presenta el método desarrollado por Schumacher [Schumacher and Moreno, 1998] y que es la base para hallar los

exponentes característicos del sistema.

En las nuevas coordenadas descritas por la ecuación (2.17), la matriz  $A(t)$  es

$$A(t)P(t) = \dot{P}(t) + P(t)M. \quad (2.23)$$

En la mayoría de los casos  $M$  será similar a una matriz diagonal, es decir, después de una transformación de similaridad adecuada quedará de la forma

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

donde  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , denotan los  $n$  valores propios de  $M$ . La matriz  $P$  se divide entonces en  $n$  vectores columna

$$P(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)], \quad (2.25)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.24) y (2.25) en (2.23) se obtiene

$$A(t) [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)] = [\dot{p}_1(t), \dot{p}_2(t), \dots, \dot{p}_n(t)] + [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Dividiendo (2.26) en  $n$  ecuaciones individuales

$$A(t)p_i(t) = \dot{p}_i(t) + p_i(t)\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.27)$$

Como  $A(t)$  y  $p(t)$  son periódicos, pueden ser representados por las series de Fourier

$$A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega t}, \quad (2.28)$$

$$p_i(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} p_{i,r} e^{jr\omega t}, \quad (2.29)$$

$$\dot{p}_i(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} p_{i,r} jr\omega e^{jr\omega t} \quad (2.30)$$

Aquí, el coeficiente  $A_k$  de  $A(t)$  se calcula mediante

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Sin embargo los vectores de coeficientes  $p_{i,r}$  son desconocidos y deben ser determinados. Sustituyendo las ecuaciones (2.28) a (2.30) en (2.27) se obtiene para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} p_{i,r} e^{jr\omega t} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} p_{i,r} jr\omega e^{jr\omega t} + \lambda_i \sum_{r=-\infty}^{\infty} p_{i,r} e^{jr\omega t}$$

y mediante la combinación del término exponencial del lado izquierdo y el cambio de variable  $r \rightarrow s$  en el lado derecho, se obtiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_k p_{i,r} e^{j(k+r)\omega t} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} p_{i,s} (js\omega + \lambda_i) e^{js\omega t}. \quad (2.31)$$

Como las funciones  $e^{js\omega t}$  son linealmente independientes, la ecuación (2.31) sólo se puede satisfacer si los coeficientes que acompañan a cada término exponencial en el lado izquierdo y en el lado derecho son iguales, es decir

$$\begin{aligned} \sum_{k+r=s} A_k p_{i,r} &= js\omega p_{i,s} + \lambda_i p_{i,s} \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} (A_{s-r} - \delta_{s,r} js\omega I_n) p_{i,r} &= \lambda_i p_{i,s} \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

En la ecuación (2.32)  $\delta_{sr}$  es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_{sr} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r. \end{cases}$$

La ecuación (2.32) puede ser escrita en forma matricial de la forma

$$\mathbf{A} \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i. \quad (2.33)$$

En donde  $\mathbf{A}$  es una hipermatriz de dimensión infinita que está compuesta por submatrices de dimensión  $n \times n$  submatrices. El bloque central  $\mathbf{A}(0,0)$  a partir del cual  $\mathbf{A}$  es construida se define como  $A_0$  y es en donde se produce  $s = r = 0$  en (2.32). Construyendo el bloque  $A(s, r)$  se obtiene la matriz  $(A_{s-r} - \delta_{s,r} js\omega I_n)$  y por lo tanto  $\mathbf{A}$  tiene la siguiente forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & A_{-1} & \vdots & A_{-3} & \ddots \\ A_1 & A_0 + j\omega I_n & A_{-1} & A_{-2} & A_{-3} \\ \cdots & A_1 & A_0 & A_{-1} & \cdots \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_0 - j\omega I_n & A_{-1} \\ \ddots & A_3 & \vdots & A_1 & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

$\mathbf{p}_i$  es un vector columna de dimensión infinita compuesto por los coeficientes de Fourier de  $p_i(t)$  y los vectores de la el  $i$ -ésima columna de  $P(t)$  se componen por:

$$\mathbf{p}_i = [\cdots p_{i,-2}^T, p_{i,-1}^T, p_{i,0}^T, p_{i,1}^T, p_{i,2}^T, \cdots]^T. \quad (2.35)$$

En la ecuación (2.33) se buscan  $\lambda_i$  y  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  que pueden ser interpretados formalmente como los eigenvalores y eigenvectores de la matriz  $\mathbf{A}$ , respectivamente. Sin embargo, dado que la matriz  $\mathbf{A}$  es de dimensión infinita, tiene una infinidad de vectores y valores propios. El problema reside entonces en la determinación de éstos. Con el fin de calcular  $M$  y  $P(t)$ , se hace

una aproximación y no se considera una hipermatriz de dimensión infinita sino una submatriz central  $\mathbf{A}_N$  que abarca los bloques de  $\mathbf{A}(-N, N)$  hasta  $\mathbf{A}(N, N)$  de la forma

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} A_0 + jN\omega I_n & \cdots & A_{-N} & \cdots & A_{-2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N & \cdots & A_0 & \cdots & A_{-N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2N} & \cdots & A_N & \cdots & A_0 - jN\omega I_n \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Los valores propios de  $\mathbf{A}_N$  convergen a los valores propios de  $\mathbf{A}$  y por lo tanto, a los exponentes característicos de  $A(t)$  de la siguiente manera: conforme  $N$  aumenta los valores característicos de la matriz  $\mathbf{A}_N$  aparecen en el plano complejo con la misma parte real y repitiéndose cada  $N\omega$  veces sobre rectas paralelas al eje imaginario. El método inicia a partir de los valores característicos de la matriz  $A_0$ , y con desviaciones que se corrigen en la siguiente iteración. Por lo tanto, entre más grande sea  $N$  mucho mejor será la aproximación. Sin embargo, por cuestiones de procesamiento computacional, no es posible hacer crecer este valor de forma arbitraria además de que se acentuaría la aparición de valores característicos espurios (en el caso de haberlos), hecho que dificulta el análisis.

Para la selección de los valores propios por lo general es útil una representación gráfica de su ubicación en el plano complejo. Para ilustrar esto considérese como ejemplo el sistema (2.37) obtenido de [Schumacher and Moreno, 1998].

Sea el sistema lineal variante en el tiempo con coeficientes periódicos

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -11 + 15 \sin 12t & 15 \cos 12t \\ 15 \cos 12t & -11 - 15 \sin 12t \end{bmatrix} x. \quad (2.37)$$

Usando la ecuación (2.28) la representación en serie de Fourier de (2.37) es

$$A(t) = A_{-1}e^{-j\omega t} + A_0 + A_1e^{j\omega t}$$

donde

$$A_{-1} = \frac{15}{4} \begin{bmatrix} j & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix}, \quad A_0 = -\frac{11}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{15}{4} \begin{bmatrix} -j & 1 \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

con  $\omega = 12$  rad/s.

Si se hace una aproximación de la hipermatriz (2.34) a partir de (2.36) usando  $N = 2$  se obtiene

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} A_0 + j24I_2 & A_1 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ A_1 & A_0 + j12I_2 & A_{-1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & A_1 & A_0 & A_1 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & A_1 & A_0 - j12I_2 & A_{-1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & A_1 & A_0 + j24I_2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

donde  $I_2$  es una matriz identidad de  $2 \times 2$  y  $\bar{0}$  es una matriz de ceros de igual dimensión. Gráficamente, los valores característicos de  $\mathbf{A}_2$  se representan en la Figura 2.2. Como se puede

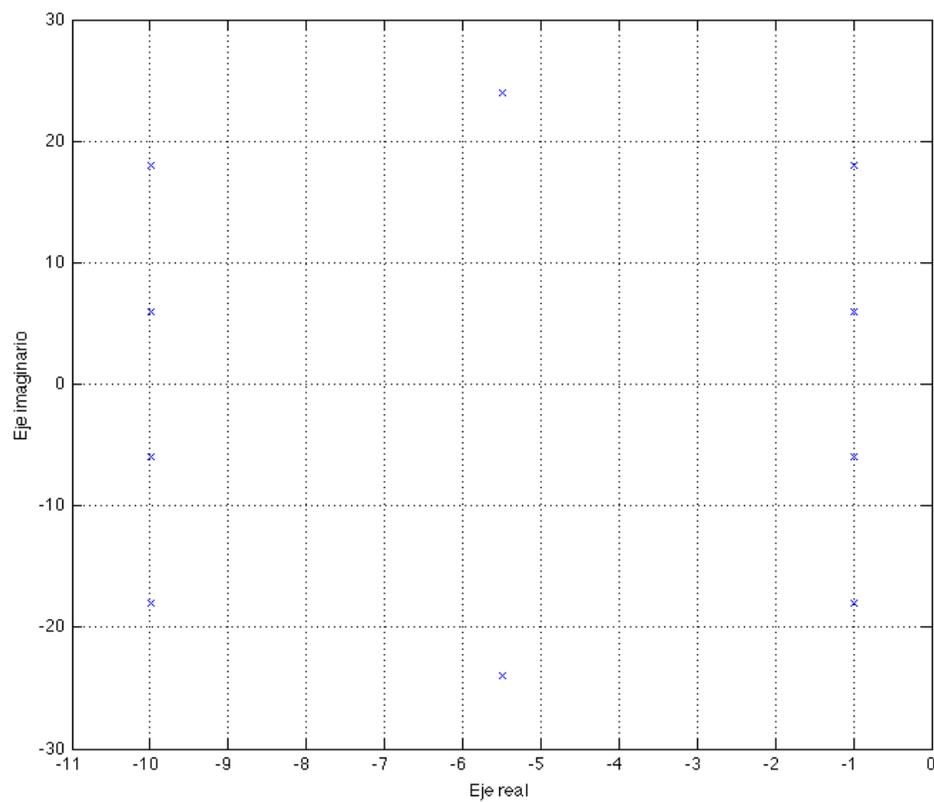


Figura 2.2: Plano complejo generado al calcular los valores característicos de  $A_2$

notar, existen dos subconjuntos de la cantidad total  $\Sigma$  de eigenvalores de  $\mathbf{A}_2$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{-1 + j6, -1 + j18, -1 - j6, -1 - j18\}, \\ \Sigma_2 &= \{-10 + j6, -10 + j18, -10 - j6, -10 - j18\}.\end{aligned}$$

en donde cada elemento tiene la misma parte real y sólo difieren por un múltiplo entero de  $j\omega$  en la parte imaginaria.

El resto de los valores  $\lambda_{9,10} = -5.5 \pm j24$  pueden ser asignados a cualquiera de los dos subconjuntos y son considerados como espurios. Esto refleja la restricción que se produce al obtener una submatriz finita de la hipermatriz infinita  $\mathbf{A}$  pero a través de la representación gráfica se pueden ubicar los valores propios centrales y se pueden despreciar este tipo de errores que produce la iteración del método numérico.

Si quisiera analizar la estabilidad del sistema mediante los valores característicos obtenidos, se concluiría que el sistema lineal variante en el tiempo con coeficientes periódicos es asintóticamente estable debido a que la parte real de éstos es negativa, es decir  $Re\{\lambda_1\} = -1$  y  $Re\{\lambda_2\} = -10$ .

## 2.4. Comentarios del capítulo

En este capítulo se revisaron los fundamentos matemáticos necesarios para estudiar un modelo de osciladores acoplados mediante funciones lineales. En primer lugar se describió el comportamiento de un ciclo límite estable definido por la ecuación no lineal de van der Pol, la cual es la base para la construcción de dicho modelo. En segundo lugar, se caracterizó la estabilidad de un punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov para después extender dicho conocimiento al caso de sistemas lineales variantes en el tiempo ya que en lo sucesivo, se pretende estudiar la estabilidad local del modelo no lineal mediante el método indirecto de Lyapunov. Finalmente se introdujo la teoría de estabilidad de Floquet ya que, además de ser lineal variante en el tiempo, el modelo obtenido al linealizar conserva la característica de periodicidad de las ecuaciones no lineales originales.



## Capítulo 3

# Condiciones necesarias para obtener sincronía

La concepción más elemental de sincronía, desde la perspectiva matemática, es que una variable de estado determinada se comporte exactamente igual a otra. Es posible que comiencen en condiciones iniciales diferentes pero invariablemente las trayectorias serán iguales en algún momento y permanecerán así mientras el tiempo avanza hacia infinito. En biología, los casos de sistemas en donde aparece la sincronía son muy numerosos y en su mayoría ocurre cuando son auto oscilatorios. Esta tesis aprovecha que la ecuación de van der Pol modela un fenómeno auto oscilatorio que coincide con el comportamiento de muchos sistemas biológicos: se genera un movimiento periódico representado en el plano de fase mediante un ciclo límite. Aunque se han estudiado las características de la sincronización en sistemas biológicos, hay pocos trabajos en la literatura que tratan de discernir el momento en que ocurre y se basan en la estructura matemática de las interconexiones del sistema. En este trabajo se pretende predecir el momento en que un sistema biológico de osciladores idénticos, modelado mediante ecuaciones de van der Pol, entran en sincronía con base en condiciones necesarias y suficientes obtenidas al estudiar la dinámica del sistema interconectado.

En este capítulo se explicará cómo se construyó el modelo matemático que representa a una población de osciladores idénticos modelados mediante la ecuación de van der Pol y acoplados por medio de funciones lineales, para después realizar el análisis dinámico que arroja condiciones necesarias para la sincronización basándose en los parámetros de interconexión del sistema. A partir de este capítulo se hablará de “oscilador” y “luciérnaga” indistintamente.

### 3.1. Construcción del modelo de osciladores acoplados

La construcción del modelo obedece al siguiente razonamiento: ya que se consideran osciladores idénticos, primero se inicia con la representación de una sola luciérnaga, después con la de dos y así sucesivamente hasta obtener un modelo que represente a  $n$  luciérnagas acopladas. Uno de los objetivos en este y los siguientes capítulos es aproximar el comportamiento de  $n$  osciladores mediante el de dos y el de tres dado que su estructura matemática es la misma y sólo aumenta el tamaño del modelo conforme se agregan elementos al sistema. A continuación

se presentan los fundamentos físicos y biológicos necesarios para relacionar la ecuación de van der Pol con el comportamiento de la luminosidad de una luciérnaga así como el procedimiento para construir el modelo de una población de osciladores.

### 3.1.1. Fuentes puntuales de luminosidad

La luminosidad o intensidad lumínica producida sobre una superficie esférica ideal por una fuente de luz puntual sin interferencia, sigue la ley del recíproco cuadrado: es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a la superficie iluminada de la fuente. Cada luciérnaga se considera una fuente puntual [Escalante, 2012] ya que emite la misma intensidad luminosa en todas las direcciones consideradas. Además, mientras cada luciérnaga esté más cerca una de la otra, la intensidad lumínica será mayor y por lo tanto la influencia que se ejerce entre ellas también. Un ejemplo de este fenómeno se puede ver en la Figura 3.1 en donde la

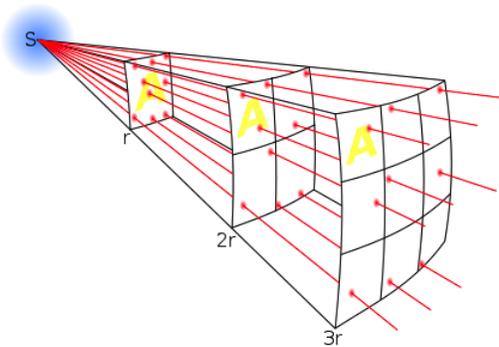


Figura 3.1: Ley del recíproco cuadrado para una fuente de luz puntual

influencia que ejerce la fuente de luz puntual  $S$  es mayor a una distancia  $r$  que a una  $2r$  o una  $3r$  siguiendo la ley del recíproco cuadrado. Las unidades en el sistema internacional son el lux que es equivalente a un lumen por metro cuadrado.

### 3.1.2. Modelo de una población de osciladores acoplados

La base de la construcción del modelo de osciladores acoplados es la ecuación de van der Pol descrita por (2.1) ya que modela adecuadamente sistemas que presentan oscilaciones periódicas y supone que la bioluminisencia de cada luciérnaga tiene un ritmo natural de encendido y apagado [Escalante, 2012], pero que éste se ajusta en función de la luminosidad de sus competidores y de la distancia que los separa de ellos. Tomando esto en consideración, la luminosidad de cada luciérnaga será representada por  $x_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ . La influencia luminosa que recibe la luciérnaga  $i$  de sus vecinas está medida por la ley del recíproco cuadrado y estará representada por los coeficientes  $a_{rl}$  con  $1 \leq r, l \leq n$ , donde los subíndices de cada coeficiente deben interpretarse como la influencia de la luciérnaga  $l$  sobre la luciérnaga  $r$ , medidos por la ley del recíproco cuadrado. Entonces, escribiendo la ecuación (2.1) con la notación de Newton y agregando el

subíndice correspondiente a  $x$ , la luminosidad de una sola luciérnaga estará representada por

$$\ddot{x}_1 - \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + a_{11}x_1 = 0.$$

Por comodidad, se despeja  $\dot{x}_1$  de esta última ecuación

$$\dot{x}_1 = \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1$$

siendo interpretado el parámetro  $a_{11}$  como el esfuerzo que la luciérnaga 1 se exige a si misma para ajustar su ritmo y sincronizarse con otras. Ya que en este caso la luciérnaga está aislada este parámetro no tiene significado alguno y es por eso que cualquier análisis realizado en esta tesis comienza siempre con dos de ellas. Considerando ahora dos luciérnagas cuya luminosidad se ve afectada en su ritmo al influir una en la otra y viceversa, el modelo queda como

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2.\end{aligned}$$

En este caso los parámetros  $a_{11}$  y  $a_{22}$  si tienen significado y son el esfuerzo que la luciérnaga 1 se exige a si misma para ajustar su ritmo con el de la 2 y el esfuerzo que la luciérnaga 2 se exige a si misma para ajustar su ritmo con el de la 1 respectivamente.

Para el caso de tres luciérnagas el modelo será

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \ddot{x}_2 &= \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \ddot{x}_3 &= \mu(1 - x_3^2)\dot{x}_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3.\end{aligned}$$

Se observa que los acoplamientos entre luciérnagas son representados mediante funciones lineales. La interpretación biológica propuesta es que la influencia ejercida por una luciérnaga sobre otra sea visual, es decir, el parámetro  $a_{rl}$  tomará algún valor dependiendo de si la luciérnaga  $r$  está observando durante todo tiempo a la luciérnaga  $l$ . De acuerdo a la ley del recíproco cuadrado, dicho valor es siempre igual a 1 ya que se considera en este trabajo que luciérnagas adyacentes están separadas una unidad de distancia.

Ya anteriormente se demostró mediante simulaciones [Escalante, 2012] que el esfuerzo que cada luciérnaga hace por brillar, es decir el valor de los parámetros  $a_{ii}$ , cambia con respecto al número de machos competidores y de la distancia que hay entre ellos. Además es necesario señalar que el modelo propuesto no distingue geometría de los conjuntos de luciérnagas, tan sólo la distancia que las separa.

### 3.2. Análisis de sincronía en un sistema biológico

Sea el sistema

$$\ddot{x}_1 = \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \quad (3.1)$$

$$\ddot{x}_2 = \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \quad (3.2)$$

$$\ddot{x}_3 = \mu(1 - x_3^2)\dot{x}_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \quad (3.3)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\ddot{x}_n = \mu(1 - x_n^2)\dot{x}_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots - a_{nn}x_n \quad (3.4)$$

que, siguiendo el mismo razonamiento que para los casos de dos y tres luciérnagas, modela la luminosidad en el caso de  $n$  de ellas, y que todas se encuentran en una vecindad local, con la misma equidistancia para su luminosidad, se pretende:

- En primer lugar, encontrar condiciones necesarias para que haya sincronía total en el sistema es decir, que todas las variables de estado se comporten de la misma manera. Para ello, se analizará la dinámica del error de sincronía bajo la premisa de que una variable de estado debe ser exactamente igual a las demás para que ésta ocurra. Entonces, si el error de sincronía y su derivada son cero, se hallará una dinámica cuyas soluciones representan al ciclo límite estable donde convergen todas las trayectorias del sistema de osciladores, ésta se conoce como *dinámica de sincronía*.
- En segundo lugar, encontrar condiciones suficientes para que haya sincronía total en el sistema. Para ello se linealizará el sistema de osciladores alrededor de su dinámica de sincronía por medio de un cambio de variables. Esto dará lugar a un modelo no lineal que cuenta con una parte lineal variante en el tiempo con coeficientes periódicos cuyo estudio de estabilidad mediante la teoría de Floquet puede dar conocimiento acerca de si el sistema se sincroniza o no.

Las condiciones necesarias y suficientes serán obtenidas al generalizar los casos de dos y tres luciérnagas al caso de  $n$  luciérnagas aprovechando que la estructura del sistema se genera a partir de considerar osciladores idénticos.

Se escogió darle al sistema (3.1)-(3.4) la interpretación del comportamiento de la luminosidad de un arreglo de  $n$  luciérnagas macho que compiten por la hembra durante el apareamiento dado que es fácil relacionar visualmente las oscilaciones de su bioluminiscencia con el comportamiento dinámico de un ciclo límite estable, sin embargo, ya que en la naturaleza la sincronía aparece ubicuamente, se puede aproximar el modelo utilizado a cualquier otro sistema biológico interconectado que oscile y se sincronice.

### 3.3. Análisis dinámico para el caso de dos luciérnagas

El modelo para dos luciérnagas según lo considerado en la Sección 3.1 es

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 - a_{22}x_2 + a_{21}x_1.\end{aligned}$$

Introduciendo como variables de estado a  $x_{i1} = x_i$  y  $x_{i2} = \dot{x}_i$  con  $i = 1, 2$ , el sistema se puede escribir como

$$\dot{x}_{11} = x_{12} \tag{3.5}$$

$$\dot{x}_{12} = \mu(1 - x_{11}^2)x_{12} - a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} \tag{3.6}$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \tag{3.7}$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} - a_{22}x_{21} + a_{21}x_{11} \tag{3.8}$$

La sincronía total para dos osciladores sucede si

$$x_{11} = x_{21} \quad (3.9)$$

$$x_{12} = x_{22} \quad (3.10)$$

Para obtener (3.9) y (3.10) es necesario definir los cambios de coordenadas

$$e_{11} = x_{11} - x_{21} \quad (3.11)$$

$$e_{12} = x_{12} - x_{22} \quad (3.12)$$

nombrando a estas dos últimas ecuaciones como *errores de sincronía* del sistema.

La dinámica de los errores de sincronía se pueden obtener despejando  $x_{11}$  y  $x_{12}$  de (3.11) y (3.12) respectivamente

$$x_{11} = e_{11} + x_{21} \quad (3.13)$$

$$x_{12} = e_{12} + x_{22}. \quad (3.14)$$

y sustituyendo estas ecuaciones en el sistema (3.5)-(3.8), las cuales representan la dinámica de la primera luciérnaga.

Desarrollando algebraicamente se llega a las ecuaciones

$$\dot{e}_{11} = e_{12} \quad (3.15)$$

$$\dot{e}_{12} = \mu[e_{12} - e_{12}x_{21}^2 - 2e_{11}x_{21}x_{22} - e_{12}e_{11}^2 - 2e_{11}e_{12}x_{21} - e_{11}^2x_{22}] - a_{11}e_{11} - a_{21}e_{11} + x_{21}(a_{12} - a_{21} + a_{22} - a_{11}) \quad (3.16)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (3.17)$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} + (a_{21} - a_{22})x_{21} + a_{21}e_{11} \quad (3.18)$$

que describen a la dinámica de los errores de sincronía.

Es conveniente aclarar que se pudo haber despejado  $x_{21}$  y  $x_{22}$  de las ecuaciones (3.11) y (3.12) y sustituir éstas en (3.7) y (3.8) pero dado que los osciladores son idénticos, el resultado hubiera sido un sistema de ecuaciones diferenciales igual al descrito por (3.15)-(3.18) pero donde aparecieran las derivadas de  $x_{11}$  y  $x_{12}$ .

Para que haya sincronía total en el sistema es necesario que (3.11), (3.12) y sus derivadas sean iguales a cero, si eso pasa el sistema (3.15)-(3.18) queda como

$$\dot{e}_{11} = 0 \quad (3.19)$$

$$\dot{e}_{12} = x_{21}(a_{12} - a_{21} + a_{22} - a_{11}) \quad (3.20)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} + (a_{21} - a_{22})x_{21}. \quad (3.22)$$

La derivada de  $e_{12}$  aún depende de los parámetros de interconexión del sistema y para que ésta sea igual a cero es necesario que se cumpla

$$a_{12} - a_{21} + a_{22} - a_{11} = 0. \quad (3.23)$$

Por comodidad, esta última ecuación se despeja de forma tal que a cada lado de la igualdad queden los parámetros de cada luciérnaga por separado, obteniendo

$$a_{12} - a_{11} = a_{21} - a_{22} \quad (3.24)$$

que son la condición necesaria para que dos luciérnagas estén en sincronía total.

### 3.3.1. Dinámica de sincronía

Si se cumple la condición necesaria de sincronía (3.24) el sistema (3.19)-(3.22) queda como

$$\dot{e}_{11} = 0 \quad (3.25)$$

$$\dot{e}_{12} = 0 \quad (3.26)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} + (a_{21} - a_{22})x_{21}. \quad (3.28)$$

que es la dinámica de sincronía del sistema en las nuevas coordenadas, es decir, todas las trayectorias del sistema (3.5)-(3.8) se aproximarán a las soluciones de (3.27) y (3.28) mientras el tiempo tiende a infinito. Además, es conveniente señalar que la frecuencia de oscilación es diferente entre las luciérnagas del arreglo original y la dinámica obtenida en las ecuaciones (3.25)-(3.28). Mientras que para el primer y segundo osciladores ésta es  $-a_{11}$  y  $-a_{22}$  respectivamente, para la dinámica de sincronía es  $a_{21} - a_{22}$ , haciendo dependiente la frecuencia de esta última únicamente de los parámetros de la segunda luciérnaga.

## 3.4. Análisis dinámico para el caso de tres luciérnagas

El modelo para dos luciérnagas según lo considerado en la Sección 3.1 es

$$\ddot{x}_1 = \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$\ddot{x}_2 = \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 - a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3$$

$$\ddot{x}_3 = \mu(1 - x_3^2)\dot{x}_3 - a_{33}x_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2.$$

Introduciendo como variables de estado a  $x_{i1} = x_i$  y  $x_{i2} = \dot{x}_i$  con  $i = 1, 2, 3$ , el sistema queda como

$$\dot{x}_{11} = x_{12} \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_{12} = \mu(1 - x_{11}^2)x_{12} - a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (3.31)$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} - a_{22}x_{21} + a_{21}x_{11} + a_{23}x_{31} \quad (3.32)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32} \quad (3.33)$$

$$\dot{x}_{32} = \mu(1 - x_{31}^2)x_{32} - a_{33}x_{31} + a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} \quad (3.34)$$

La sincronía total para el caso de tres luciérnagas se dará si

$$x_{11} = x_{31} \quad (3.35)$$

$$x_{12} = x_{32} \quad (3.36)$$

$$x_{21} = x_{31} \quad (3.37)$$

$$x_{22} = x_{32} \quad (3.38)$$

Para obtener (3.35)-(3.38) se definen los cambios de coordenadas

$$e_{11} = x_{31} - x_{11} \quad (3.39)$$

$$e_{12} = x_{32} - x_{12} \quad (3.40)$$

$$e_{21} = x_{31} - x_{21} \quad (3.41)$$

$$e_{22} = x_{32} - x_{22}. \quad (3.42)$$

que, al igual que para el caso de dos luciérnagas, son nombrados como *errores de sincronía* y su dinámica puede ser obtenida despejando a  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$  y  $x_{22}$  de (3.39), (3.40), (3.41) y (3.42) respectivamente

$$x_{11} = x_{31} - e_{11} \quad (3.43)$$

$$x_{12} = x_{32} - e_{12} \quad (3.44)$$

$$x_{21} = x_{31} - e_{21} \quad (3.45)$$

$$x_{22} = x_{32} - e_{22}. \quad (3.46)$$

y sustituyéndolas éstas en (3.29)-(3.34) para después desarrollar algebraicamente y obtener

$$\dot{e}_{11} = e_{12} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{12} = & \mu[e_{12} - e_{12}x_{31}^2 - 2e_{11}x_{31}x_{32} - e_{12}e_{11}^2 + 2e_{11}e_{12}x_{31} \\ & + e_{11}^2x_{32}] + e_{21}(a_{12} - a_{32}) - e_{11}(a_{11} + a_{31}) \\ & + x_{31}(a_{12} + a_{13} - a_{11} - a_{31} - a_{32} + a_{33}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\dot{e}_{21} = e_{22} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{22} = & \mu[e_{22} - e_{22}x_{31}^2 - 2e_{21}x_{31}x_{32} - e_{22}e_{21}^2 + 2e_{21}e_{22}x_{31} \\ & + e_{21}^2x_{32}] + e_{11}(a_{21} - a_{31}) - e_{21}(a_{32} - a_{22}) \\ & + x_{31}(a_{31} + a_{32} - a_{33} - a_{21} - a_{23} + a_{22}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32} \quad (3.51)$$

$$\dot{x}_{32} = \mu(1 - x_{31}^2)x_{32} + (a_{31} + a_{32} - a_{33})x_{31} - a_{31}e_{11} - a_{32}e_{21} \quad (3.52)$$

que describen la dinámica de los errores de sincronía con base en las ecuaciones de la primera y segunda luciérnagas. Para que pueda existir sincronía total en el sistema es necesario que los errores de sincronía (3.39)-(3.42) y sus derivadas sean iguales a cero, si esto ocurre el sistema

(3.47)-(3.52) queda como

$$\dot{e}_{11} = 0 \quad (3.53)$$

$$\dot{e}_{12} = x_{31}(a_{12} + a_{13} - a_{11} - a_{31} - a_{32} + a_{33}) \quad (3.54)$$

$$\dot{e}_{21} = 0 \quad (3.55)$$

$$\dot{e}_{22} = x_{31}(a_{31} + a_{32} - a_{33} - a_{21} - a_{23} + a_{22}) \quad (3.56)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32} \quad (3.57)$$

$$\dot{x}_{32} = \mu(1 - x_{31}^2)x_{32} + (a_{31} + a_{32} - a_{33})x_{31}. \quad (3.58)$$

Pero las derivadas de  $e_{12}$  y  $e_{22}$  aún dependen de los parámetros de interconexión del sistema y para que sean iguales a cero es necesario que se cumpla

$$a_{12} + a_{13} - a_{11} - a_{31} - a_{32} + a_{33} = 0 \quad (3.59)$$

y

$$a_{31} + a_{32} - a_{33} - a_{21} - a_{23} + a_{22} = 0 \quad (3.60)$$

respectivamente.

Por comodidad, se reagrupan las ecuaciones (3.59) y (3.60) obteniendo

$$a_{12} + a_{13} - a_{11} = a_{21} + a_{23} - a_{22} = a_{31} + a_{32} - a_{33} \quad (3.61)$$

que es la condición necesaria para que tres luciérnagas estén en sincronía total.

### 3.4.1. Dinámica de sincronía

Si se cumple la condición necesaria (3.61) el sistema (3.53)-(3.58) queda como

$$\dot{e}_{11} = 0 \quad (3.62)$$

$$\dot{e}_{12} = 0 \quad (3.63)$$

$$\dot{e}_{21} = 0 \quad (3.64)$$

$$\dot{e}_{22} = 0 \quad (3.65)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32} \quad (3.66)$$

$$\dot{x}_{32} = \mu(1 - x_{31}^2)x_{32} + (a_{31} + a_{32} - a_{33})x_{31} \quad (3.67)$$

que describe la dinámica de sincronía del sistema en las nuevas coordenadas. Al igual que para el caso de dos luciérnagas, es conveniente señalar que la frecuencia de oscilación es diferente entre el arreglo original y la dinámica obtenida en las ecuaciones (3.62)-(3.67). Mientras que para el primer, segundo y tercer osciladores es  $-a_{11}$ ,  $-a_{22}$  y  $-a_{33}$  respectivamente, para la dinámica de sincronía es  $a_{31} + a_{32} - a_{33}$ , haciendo dependiente la frecuencia de esta última únicamente de los parámetros de la tercer luciérnaga.

### 3.5. Generalización al caso de $n$ luciérnagas

Escribiendo el sistema (3.1)-(3.4) en forma vectorial

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{x}$$

donde  $\mathbf{x} \in R^n$  es el vector que representa la luminosidad de las  $n$  luciérnagas,  $\mathbf{f} : D \rightarrow R^n$  y  $\mathbf{G} \in R^{n \times n}$  es una matriz que contiene los parámetros de interconexión entre ellas. Introduciendo como vectores de estado a  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (3.68)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{G}\mathbf{x}_1 \quad (3.69)$$

en donde  $\mathbf{x}_1 = [x_{11} \ x_{21} \ x_{31} \ \dots \ x_{n1}]^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = [x_{12} \ x_{22} \ x_{32} \ \dots \ x_{n2}]^T$ ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_{11}, x_{12}) \\ f_2(x_{21}, x_{22}) \\ \vdots \\ f_n(x_{n1}, x_{n2}) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

con  $f_i(x_{i1}, x_{i2}) = \mu(1 - x_{i1}^2)x_{i2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

La sincronía total para el sistema de  $n$  osciladores se dará si

$$x_{11} = x_{21} = x_{31} = \dots = x_{n1} \quad (3.72)$$

para el vector  $\mathbf{x}_1$  y

$$x_{21} = x_{22} = x_{32} = \dots = x_{n2} \quad (3.73)$$

para el vector  $\mathbf{x}_2$ .

Definiendo entonces, al igual que en los casos anteriores, las ecuaciones de los errores de sincronía

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x_{n1} - \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{(n-1)1} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x_{n2} - \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{(n-1)2} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

o bien

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{U}x_{n1} - \mathbf{M}\mathbf{x}_1 \quad (3.76)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{U}x_{n2} - \mathbf{M}\mathbf{x}_2 \quad (3.77)$$

con  $\mathbf{U} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$  de  $(n-1)$  elementos y

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

de dimensión  $(n-1) \times n$  se llega al sistema

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \quad (3.79)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}) + x_{n1}\mathbf{\Gamma} \quad (3.80)$$

$$\dot{x}_{n1} = x_{n2} \quad (3.81)$$

$$\dot{x}_{n2} = \mu(1 - x_{n1}^2)x_{n2} + (a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn-1} - a_{nn})x_{n1} - a_{n1}e_{11} - a_{n2}e_{21} - \dots - a_{nn-1}e_{(n-1)1} \quad (3.82)$$

donde  $\mathbf{e}_1 = [e_{11} \ e_{21} \ \dots \ e_{(n-1)1}]^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = [e_{12} \ e_{22} \ \dots \ e_{(n-1)2}]^T$ ,

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, x_{n1}, x_{n2}) \\ \vdots \\ g_{n-1}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, x_{n1}, x_{n2}) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

y

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} a_{12} + \dots + a_{1n} - a_{11} - a_{n1} - \dots - a_{nn-1} + a_{nn} \\ a_{21} + \dots + a_{2n} - a_{22} - a_{n1} - \dots - a_{nn-1} + a_{nn} \\ \vdots \\ a_{(n-1)1} + \dots + a_{(n-1)n} + a_{(n-1)(n-1)} - a_{n1} - \dots - a_{nn-1} + a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Pero las ecuaciones (3.79) y (3.80) aún dependen de los parámetros de interconexión del sistema y para que sean igual a cero es necesario que se cumpla

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0},$$

obteniendo por separado

$$a_{12} + \dots + a_{1n} - a_{11} = a_{n1} + \dots + a_{nn-1} - a_{nn} \quad (3.85)$$

$$a_{21} + \dots + a_{2n} - a_{22} = a_{n1} + \dots + a_{nn-1} - a_{nn} \quad (3.86)$$

$$(3.87)$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$a_{(n-1)1} + \dots + a_{(n-1)n} + a_{(n-1)(n-1)} = a_{n1} + \dots + a_{nn-1} - a_{nn}. \quad (3.88)$$

Combinando estas últimas ecuaciones se obtiene

$$a_{12} + \dots + a_{1n} - a_{11} = a_{21} + \dots + a_{2n} - a_{22} = \dots = a_{(n-1)1} + \dots + a_{(n-1)n} + a_{(n-1)(n-1)} = a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \dots + a_{nn-1} - a_{nn}. \quad (3.89)$$

Este resultado puede plasmarse en el siguiente teorema

**Teorema 3.5.1** *Un sistema de  $n$  osciladores idénticos modelados mediante ecuaciones de van der Pol e interconectados mediante funciones lineales se encuentra en sincronía total si se cumple la condición necesaria*

$$\sum_{p=2}^n a_{1p} - a_{11} = a_{21} + \sum_{p=3}^n a_{2p} - a_{22} = a_{31} + a_{32} + \sum_{p=4}^n a_{3p} - a_{33} = \dots = \sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn} \quad (3.90)$$

en donde  $a_{rl}$  con  $1 \leq r, l \leq n$  son los coeficientes de interconexión entre los osciladores.

### 3.5.1. Dinámica de sincronía

Si se cumple la condición necesaria de sincronía (3.90) el sistema (3.79)-(3.82)

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{0} \quad (3.91)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{0} \quad (3.92)$$

$$\dot{x}_{n1} = x_{n2} \quad (3.93)$$

$$\dot{x}_{n2} = \mu(1 - x_{n1}^2)x_{n2} + (a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \dots + a_{nn-1} - a_{nn})x_{n1} \quad (3.94)$$

Reescribiendo este último sistema se obtiene

$$\dot{x}_{n1} = x_{n2}$$

$$\dot{x}_{n2} = \mu(1 - x_{n1}^2)x_{n2} + \left( \sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn} \right) x_{n1}$$

que es la dinámica de sincronía para el caso de  $n$  osciladores y todas las trayectorias del sistema convergen a sus soluciones mientras el tiempo avanza hacia infinito y cuya frecuencia de oscilación depende de

$$\sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn}$$

a diferencia de los osciladores en el arreglo original.

## 3.6. Comentarios del capítulo

Las condiciones necesarias obtenidas en este capítulo y cuya estructura está formada por los parámetros de interconexión entre las luciérnagas, son indispensables para que aparezca la sincronía, es más, si falta una de ellas, ésta no se genera. Aún así, son incapaces de producirla

por si mismas. Aunque son una buena herramienta para predecir si los sistemas de osciladores se sincronizan, hacen falta otro tipo de condiciones que, de la mano con las condiciones necesarias, nos aseguren que el fenómeno ocurrirá, es decir, el solo hecho de estar presentes provocará que aparezca la sincronía en los osciladores. Estas son las condiciones suficientes, las cuales se obtendrán en el siguiente capítulo.

## Capítulo 4

# Condiciones suficientes para obtener sincronía

En el capítulo anterior se obtuvieron las condiciones necesarias para que un sistema de  $n$  osciladores se sincronice. Aunque se encontró que éstas dependen de los parámetros de interconexión del sistema, su cumplimiento no garantiza que haya sincronía. Se necesitan otras condiciones más poderosas cuya aparición asegurará que el arreglo de luciérnagas osciladores esté sincronizado. Una condición suficiente es aquella que al estar presente provoca la aparición de un suceso, en el caso del arreglo de luciérnagas, provocará que la totalidad de sus elementos estén brillando al mismo ritmo y con la misma intensidad. Su obtención se hará a través de un análisis dinámico más formal que el del error de sincronía descrito en el capítulo anterior y cuya base se encuentra en la teoría de estabilidad de Lyapunov y el método indirecto de Lyapunov, ambos para sistemas no autónomos. Para hacer uso de ellos es necesario modificar la dinámica del error de sincronía obtenida en el capítulo anterior a través de un nuevo cambio de coordenadas que dará lugar a un sistema no lineal con una parte lineal variante en el tiempo con coeficientes periódicos y que puede ser estudiado por medio de la teoría de estabilidad de Floquet. De igual forma que en Capítulo 2, se desarrollarán los ejemplos para el caso de dos y tres luciérnagas para después generalizar al caso de  $n$  luciérnagas.

### 4.1. Análisis dinámico para el caso de dos luciérnagas

Retomando las ecuaciones del sistema de dos osciladores definidas en el Capítulo 3

$$\dot{x}_{11} = x_{12} \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_{12} = \mu(1 - x_{11}^2)x_{12} - a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} \tag{4.2}$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \tag{4.3}$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} - a_{22}x_{21} + a_{21}x_{11}, \tag{4.4}$$

así como las ecuaciones que representan su dinámica del error de sincronía

$$\dot{e}_{11} = e_{12} \quad (4.5)$$

$$\dot{e}_{12} = \mu[e_{12} - e_{12}x_{21}^2 - 2e_{11}x_{21}x_{22} - e_{12}e_{11}^2 - 2e_{11}e_{12}x_{21} - e_{11}^2x_{22}] - a_{11}e_{11} - a_{21}e_{11} + x_{21}(a_{12} - a_{21} + a_{22} - a_{11}) \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (4.7)$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} + (a_{21} - a_{22})x_{21} + a_{21}e_{11}. \quad (4.8)$$

En este punto es necesario aclarar que la condición necesaria (3.24) obtenida en el Capítulo 3 también depende del error de sincronía  $e_{11}$  pero ya que se asume que, para que exista sincronía en el sistema, éste debe ser igual a cero, dicha condición sólo dependerá de los parámetros  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{11}$ .

Considerando lo anterior, si se cumple la condición necesaria de sincronía (3.24) se puede definir

$$\dot{\bar{x}}_{21} = \bar{x}_{22} \quad (4.9)$$

$$\dot{\bar{x}}_{22} = \mu(1 - \bar{x}_{21}^2)\bar{x}_{22} + (a_{21} - a_{22})\bar{x}_{21} \quad (4.10)$$

como el ciclo límite estable a cuyas soluciones deben convergen todas las trayectorias del sistema (4.1)-(4.4) para que sus variables de estado estén en sincronía total, si esto ocurre se cumple que

$$x_{21} = \bar{x}_{21} \quad (4.11)$$

$$x_{22} = \bar{x}_{22}. \quad (4.12)$$

Se puede definir entonces un nuevo cambio de coordenadas

$$\epsilon_{21} = x_{21} - \bar{x}_{21} \quad (4.13)$$

$$\epsilon_{22} = x_{22} - \bar{x}_{22} \quad (4.14)$$

donde  $\epsilon_{21}$  y  $\epsilon_{22}$  son los errores de sincronía entre las trayectorias de la segunda luciérnaga y las ecuaciones del ciclo límite estable definido en las ecuaciones (4.9) y (4.10).

Despejando  $x_{21}$  y  $x_{22}$  de (4.13) y (4.14) respectivamente se tiene

$$x_{21} = \epsilon_{21} + \bar{x}_{21} \quad (4.15)$$

$$x_{22} = \epsilon_{22} + \bar{x}_{22}. \quad (4.16)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (4.5)-(4.8) y desarrollando algebraicamente, se llega al sistema

$$\dot{\epsilon}_{11} = \epsilon_{12} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{12} = & \mu[\epsilon_{12} - \epsilon_{12}\epsilon_{21}^2 - 2\epsilon_{12}\epsilon_{21}\bar{x}_{21} - \epsilon_{12}\bar{x}_{21}^2 - 2\epsilon_{11}\epsilon_{21}\epsilon_{22} - 2\epsilon_{11}\epsilon_{21}\bar{x}_{22} \\ & - 2\epsilon_{11}\epsilon_{22}\bar{x}_{21} - 2\epsilon_{11}\bar{x}_{21}\bar{x}_{22} - \epsilon_{12}\epsilon_{11}^2 - 2\epsilon_{11}\epsilon_{12}\epsilon_{21} - 2\epsilon_{11}\epsilon_{12}\bar{x}_{21} \\ & - \epsilon_{11}^2\epsilon_{22} - \epsilon_{11}^2\bar{x}_{22}] - a_{11}\epsilon_{11} - a_{21}\epsilon_{11} + \alpha(\epsilon_{21} + \bar{x}_{21}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\dot{\epsilon}_{21} = \epsilon_{22} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{22} = & \mu[\epsilon_{22} - \epsilon_{21}^2\epsilon_{22} - 2\epsilon_{21}\epsilon_{22}\bar{x}_{21} - \epsilon_{22}\bar{x}_{21}^2 - \epsilon_{21}^2\bar{x}_{22} - 2\epsilon_{21}\bar{x}_{21}\bar{x}_{22}] \\ & + a_{21}\epsilon_{21} - a_{22}\epsilon_{21} - a_{21}\epsilon_{11} \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde  $\alpha = a_{12} - a_{21} + a_{22} - a_{11}$  y que es la misma condición necesaria de sincronía obtenida en el Capítulo 3.

Separando las partes lineal y no lineal de (4.17)-(4.20) y ordenando las ecuaciones en forma matricial se obtiene un sistema de la forma

$$\dot{x} = A_2(t)x + \mu\xi_1 \quad (4.21)$$

en donde  $x = [e_{11} \ e_{12} \ \epsilon_{21} \ \epsilon_{22}]^T$ ,

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(a_{11} + a_{21}) - 2\mu\bar{x}_{21}\bar{x}_{22} & \mu - \mu\bar{x}_{21}^2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{21} & 0 & a_{21} - a_{22} - 2\mu\bar{x}_{21}\bar{x}_{22} & \mu - \mu\bar{x}_{21}^2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

y donde

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -e_{12}\epsilon_{21}^2 - 2e_{12}\epsilon_{21}\bar{x}_{21} - 2e_{11}\epsilon_{21}\epsilon_{22} - 2e_{11}\epsilon_{21}\bar{x}_{22} - 2e_{11}\epsilon_{22}\bar{x}_{21} \\ -e_{12}e_{11}^2 + 2e_{11}e_{12}\epsilon_{21} + 2e_{11}e_{12}\bar{x}_{21} + e_{11}^2\epsilon_{22} + e_{11}^2\bar{x}_{22} + \alpha\bar{x}_{21} \\ 0 \\ -\epsilon_{21}^2\epsilon_{22} - 2\epsilon_{21}\epsilon_{22}\bar{x}_{21} - \epsilon_{21}^2\bar{x}_{22} \end{bmatrix}$$

es un elemento altamente no lineal del sistema.

De acuerdo a la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov de soluciones periódicas expuesta en la Sección 2.2.4, los cambios de coordenadas (4.13) y (4.14) hacen que el sistema no lineal original (4.1)-(4.4) haya sido linealizado alrededor del ciclo límite estable (4.9)-(4.10) correspondiente a su dinámica de sincronía y, con la ayuda del método indirecto de Lyapunov descrito en el Teorema 2.2.1, se puede garantizar su estabilidad local. Además, ya que  $\bar{x}_{21}$  y  $\bar{x}_{22}$  son las soluciones periódicas de dicho ciclo límite y aparecen en algunos de los coeficientes de la matriz lineal variante en el tiempo (4.22), se puede usar la teoría de Floquet para este propósito.

#### 4.1.1. Condición suficiente de sincronía

Ya que la matriz  $A_2(t)$  del sistema (4.21) cumple con

$$A_2(t + T_2) = A_2(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donde  $T_2 > 0$  es el periodo del ciclo límite definido por las ecuaciones (4.9) y (4.10), se puede utilizar el Teorema de estabilidad de Floquet 2.3.2 y determinar si las trayectorias de (4.1)-(4.4) convergen o no a las soluciones de su dinámica de sincronía, dependiendo del valor de

los parámetros de interconexión del sistema. Si convergen, significará que todos los errores de sincronía del vector  $\mathbf{x}$  se vuelven cero y, por consiguiente, el sistema estará en sincronía.

Tomando todo lo anterior en consideración, se puede plantear la condición suficiente de sincronía total para dos osciladores

$$\operatorname{Re}\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4 \quad (4.23)$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la parte lineal del sistema (4.21).

El método indirecto de Lyapunov para sistemas no autónomos presentado en el Teorema 2.2.1 establece que si se tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema lineal

$$\dot{x} = A_2(t)x \quad (4.24)$$

ese mismo punto de equilibrio será exponencialmente estable para el sistema no lineal

$$\dot{x} = A_2(t)x + \mu\xi_1. \quad (4.25)$$

Haciendo un análisis como el de la Sección 2.2.4 se obtiene el mismo resultado pero para soluciones periódicas, de esta manera se puede caracterizar totalmente la estabilidad de (4.25) estudiando solamente la estabilidad de (4.24) mediante la condición (4.23). En otras palabras, al haber linealizado el sistema (4.25) alrededor del ciclo límite (4.9) y (4.10) mediante el método indirecto de Lyapunov, el término  $\xi_1$  desaparece.

#### 4.1.2. Obtención de los exponentes característicos

Una vez establecido que las condiciones suficientes dependen de los exponentes característicos del sistema (4.21), se usará la teoría desarrollada en la Sección 2.3.4 para su obtención.

Ya que  $A_2(t)$  es  $T$ -periódica se puede expresar mediante la serie de Fourier

$$A_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2_k} e^{jk\omega t} \quad (4.26)$$

en donde

$$A_{2_k} = \frac{1}{T} \int_0^T A_2(t) e^{-jk\omega t} dt$$

se puede construir la matriz

$$\mathbf{A}_{2_N} = \begin{bmatrix} A_{2_0} + jN\omega I_4 & \cdots & A_{2_{-N}} & \cdots & A_{2_{-2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2_N} & \cdots & A_{2_0} & \cdots & A_{2_{-N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2_{2N}} & \cdots & A_{2_N} & \cdots & A_{2_0} - jN\omega I_4 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

que es una submatriz que abarca de los bloques  $\mathbf{A}(-N, N)$  hasta  $\mathbf{A}(N, N)$  de la hipermatriz (2.34) definida en el Capítulo 2 y en donde  $N$  puede ser escogida arbitrariamente grande para que los valores propios de  $\mathbf{A}_{3_N}$  convergan a los exponentes característicos de  $A_2(t)$ .

## 4.2. Análisis dinámico para el caso de tres luciérnagas

Considérese el sistema de tres osciladores acoplados definido en la Sección 3.4

$$\dot{x}_{11} = x_{12} \quad (4.28)$$

$$\dot{x}_{12} = \mu(1 - x_{11}^2)x_{12} - a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_{22} = \mu(1 - x_{21}^2)x_{22} - a_{22}x_{21} + a_{21}x_{11} + a_{23}x_{31} \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32} \quad (4.32)$$

$$\dot{x}_{32} = \mu(1 - x_{31}^2)x_{32} - a_{33}x_{31} + a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21}. \quad (4.33)$$

así como las ecuaciones de su dinámica de error de sincronía

$$\dot{e}_{11} = e_{12} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{12} = & \mu[e_{12} - e_{12}x_{31}^2 - 2e_{11}x_{31}x_{32} - e_{12}e_{11}^2 + 2e_{11}e_{12}x_{31} \\ & + e_{11}^2x_{32}] + e_{21}(a_{12} - a_{32}) - e_{11}(a_{11} + a_{31}) \\ & + x_{31}(a_{11} - a_{12} - a_{13} - a_{33} + a_{31} + a_{32}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\dot{e}_{21} = e_{22} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{22} = & \mu[e_{22} - e_{22}x_{31}^2 - 2e_{21}x_{31}x_{32} - e_{22}e_{21}^2 + 2e_{21}e_{22}x_{31} \\ & + e_{21}^2x_{32}] + e_{11}(a_{21} - a_{31}) - e_{21}(a_{32} - a_{22}) \\ & + x_{31}(a_{31} - a_{33} + a_{32} + a_{22} - a_{21} - a_{23}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32} \quad (4.38)$$

$$\dot{x}_{32} = \mu(1 - x_{31}^2)x_{32} + (a_{31} + a_{32} - a_{33})x_{31} - a_{31}e_{11} - a_{32}e_{21}. \quad (4.39)$$

Si se cumple la condición necesaria de sincronía (3.61) se puede definir

$$\dot{\bar{x}}_{31} = \bar{x}_{32} \quad (4.40)$$

$$\dot{\bar{x}}_{32} = \mu(1 - \bar{x}_{31}^2)\bar{x}_{32} + (a_{31} + a_{32} - a_{33})\bar{x}_{31} \quad (4.41)$$

como el ciclo límite estable a cuyas soluciones deben converger todas las trayectorias del sistema (4.28)-(4.33) para que todas sus variables de estado estén en sincronía total, si esto ocurre se cumple

$$x_{31} = \bar{x}_{31} \quad (4.42)$$

$$x_{32} = \bar{x}_{32}. \quad (4.43)$$

Se puede definir entonces un nuevo cambio de coordenadas

$$\epsilon_{31} = x_{31} - \bar{x}_{31} \quad (4.44)$$

$$\epsilon_{32} = x_{32} - \bar{x}_{32} \quad (4.45)$$

donde  $\epsilon_{31}$  y  $\epsilon_{32}$  son los errores de sincronía entre las trayectorias de la tercer luciérnaga y las ecuaciones del ciclo límite estable definido en las ecuaciones (4.40) y (4.41).

Despejando  $x_{31}$  y  $x_{32}$  de estas últimas ecuaciones se tiene

$$x_{31} = \epsilon_{31} + \bar{x}_{31} \quad (4.46)$$

$$x_{32} = \epsilon_{32} + \bar{x}_{32}. \quad (4.47)$$

Sustituyendo en (4.34)-(4.39) y desarrollando algebraicamente se llega al sistema

$$\dot{e}_{11} = e_{12} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{12} = & \mu[e_{12} - e_{12}\epsilon_{31}^2 - 2e_{12}\epsilon_{31}\bar{x}_{31} - e_{12}\bar{x}_{31}^2 - 2e_{11}\epsilon_{31}\epsilon_{32} - 2e_{11}\epsilon_{31}\bar{x}_{32} \\ & - 2e_{11}\epsilon_{32}\bar{x}_{31} - 2e_{11}\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} - e_{12}e_{11}^2 - 2e_{11}e_{12}\epsilon_{31} - 2e_{11}e_{12}\bar{x}_{31} \\ & - e_{11}^2\epsilon_{32} - e_{11}^2\bar{x}_{32}] - (a_{11} + a_{31})e_{11} + (a_{12} - a_{32})e_{21} + \beta(\epsilon_{31} + \bar{x}_{31}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\dot{e}_{21} = e_{22} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{22} = & \mu[e_{22} - e_{22}\epsilon_{31}^2 - 2e_{22}\epsilon_{31}\bar{x}_{31} - e_{22}\bar{x}_{31}^2 - 2e_{21}\epsilon_{31}\epsilon_{32} - 2e_{21}\epsilon_{31}\bar{x}_{32} \\ & - 2e_{21}\epsilon_{32}\bar{x}_{31} - 2e_{21}\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} - e_{22}e_{21}^2 - 2e_{21}e_{22}\epsilon_{31} - 2e_{21}e_{22}\bar{x}_{31} \\ & - e_{21}^2\epsilon_{32} - e_{21}^2\bar{x}_{32}] + (a_{21} - a_{31})e_{11} - (a_{32} + a_{22})e_{21} + \beta(\epsilon_{31} + \bar{x}_{31}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\dot{\epsilon}_{31} = \epsilon_{32} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{32} = & \mu[\epsilon_{32} - \epsilon_{31}^2\epsilon_{32} - 2\epsilon_{31}\epsilon_{32}\bar{x}_{31} - \epsilon_{32}\bar{x}_{31}^2 - \epsilon_{31}^2\bar{x}_{32} - 2\epsilon_{31}\bar{x}_{31}\bar{x}_{32}] \\ & + (a_{31} + a_{32} - a_{33})\epsilon_{31} - a_{31}e_{11} - a_{32}e_{11} \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde  $\beta = a_{11} - a_{12} - a_{13} + a_{31} + a_{32} - a_{33}$  y que es la condición suficiente de sincronía obtenida en el Capítulo 3.

Separando parte lineal y parte no lineal de (4.48)-(4.53) y ordenando las ecuaciones en forma matricial se obtiene un sistema de la forma

$$\dot{x} = A_3(t)x + \mu\xi_2 \quad (4.54)$$

donde  $x = [e_{11} \ e_{12} \ e_{21} \ e_{22} \ \epsilon_{31} \ \epsilon_{32}]^T$ ,

$$A_3(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \mu - \mu\bar{x}_{31}^2 & a_{12} - a_{32} & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} - a_{31} & 0 & \gamma_2 & \mu - \mu\bar{x}_{31}^2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{31} & 0 & -a_{32} & 0 & \gamma_3 & \mu - \mu\bar{x}_{31}^2 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

siendo

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -(a_{11} + a_{31}) - 2\mu\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} \\ \gamma_2 &= -(a_{32} + a_{22}) - 2\mu\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} \\ \gamma_3 &= a_{31} + a_{32} - a_{33} - 2\mu\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} \end{aligned}$$

y donde también

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -e_{12}\epsilon_{31}^2 - 2e_{12}\epsilon_{31}\bar{x}_{31} - 2e_{11}\epsilon_{31}\epsilon_{32} - 2e_{11}\epsilon_{31}\bar{x}_{32} - 2e_{11}\epsilon_{32}\bar{x}_{31} \\ -e_{12}e_{11}^2 + 2e_{11}e_{12}\epsilon_{31} + 2e_{11}e_{12}\bar{x}_{31} + e_{11}^2\epsilon_{32} + e_{11}^2\bar{x}_{32} + \beta\bar{x}_{31} \\ 0 \\ -e_{22}\epsilon_{21}^2 - 2e_{22}\epsilon_{31}\bar{x}_{31} - 2e_{21}\epsilon_{31}\epsilon_{32} - 2e_{11}\epsilon_{31}\bar{x}_{32} - 2e_{11}\epsilon_{32}\bar{x}_{31} \\ -e_{22}e_{21}^2 + 2e_{21}e_{22}\epsilon_{31} + 2e_{21}e_{22}\bar{x}_{31} + e_{21}^2\epsilon_{32} + e_{21}^2\bar{x}_{32} + \beta\bar{x}_{21} \\ 0 \\ -\epsilon_{31}^2\epsilon_{32} - 2\epsilon_{31}\epsilon_{32}\bar{x}_{31} - \epsilon_{31}^2\bar{x}_{32} \end{bmatrix}$$

es un elemento altamente no lineal del sistema.

En este caso también se aplica el análisis realizado para dos luciérnagas y explicado en la Sección 4.1: de acuerdo a la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov de soluciones periódicas expuesta en la Sección 2.2.4, los cambios de coordenadas (4.44) y (4.45) hacen que el sistema no lineal original (4.28)-(4.33) haya sido linealizado alrededor del ciclo límite estable (4.40)-(4.41) correspondiente a su dinámica de sincronía y, con la ayuda del método indirecto de Lyapunov descrito en el Teorema 2.2.1, se puede garantizar su estabilidad local. Además, ya que  $\bar{x}_{31}$  y  $\bar{x}_{32}$  son las soluciones periódicas de dicho ciclo límite y aparecen en algunos de los coeficientes de la matriz lineal variante en el tiempo (4.55), se puede usar la teoría de Floquet para este propósito.

#### 4.2.1. Condición suficiente de sincronía

Ya que la matriz  $A_3(t)$  del sistema (4.54) cumple con

$$A_3(t + T_3) = A_3(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donde  $T_3 > 0$  es el periodo del ciclo límite definido por las ecuaciones (4.40) y (4.41), se puede utilizar el Teorema de estabilidad de Floquet 2.3.2 y determinar si las trayectorias de (4.28)-(4.33) convergen o no a las soluciones de su dinámica de sincronía, dependiendo del valor de los parámetros de interconexión del sistema. Si convergen, significará que todos los errores de sincronía del vector  $\mathbf{x}$  se vuelven cero y, por consiguiente, el sistema estará en sincronía.

Tomando todo lo anterior en consideración, se puede plantear la condición suficiente de sincronía total para dos osciladores

$$Re\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.56)$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la parte lineal del sistema (4.21).

Al igual que para el caso de dos luciérnagas, el método indirecto de Lyapunov para sistemas no autónomos presentado en el Teorema 2.2.1 establece que si se tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema lineal

$$\dot{x} = A_3(t)x \quad (4.57)$$

ese mismo punto de equilibrio será exponencialmente estable para el sistema no lineal

$$\dot{x} = A_3(t)x + \mu\xi_2. \quad (4.58)$$

Haciendo un análisis como el de la Sección 2.2.4 se obtiene el mismo resultado pero para soluciones periódicas, de esta manera se puede caracterizar totalmente la estabilidad de (4.58) estudiando solamente la estabilidad de (4.57) mediante la condición (4.56). En otras palabras, al haber linealizado el sistema (4.58) alrededor del ciclo límite (4.40) y (4.41) mediante el método indirecto de Lyapunov, el término  $\xi_2$  desaparece.

#### 4.2.2. Obtención de los exponentes característicos

Una vez establecido que las condiciones suficientes dependen de los exponentes característicos del sistema (4.54), se usará la teoría desarrollada en la Sección 2.3.4 para su obtención. Ya que  $A_3(t)$  es  $T$ -periódica se puede expresar mediante la serie de Fourier

$$A_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{3_k} e^{jk\omega t} \quad (4.59)$$

en donde

$$A_{3_k} = \frac{1}{T} \int_0^T A_3(t) e^{-jk\omega t} dt$$

se puede construir la matriz

$$\mathbf{A}_{3_N} = \begin{bmatrix} A_{3_0} + jN\omega I_6 & \cdots & A_{3_{-N}} & \cdots & A_{3_{-2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{3_N} & \cdots & A_{3_0} & \cdots & A_{3_{-N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{3_{2N}} & \cdots & A_{3_N} & \cdots & A_{3_0} - jN\omega I_6 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

que es una submatriz que abarca de los bloques  $\mathbf{A}(-N, N)$  hasta  $\mathbf{A}(N, N)$  de la hipermatriz (2.34) definida en el Capítulo 2 y en donde  $N$  puede ser escogida arbitrariamente grande para que los valores propios de  $\mathbf{A}_{3_N}$  convergan a los exponentes característicos de  $A_3(t)$ .

### 4.3. Generalización al caso de $n$ luciérnagas

Considérese el sistema de  $n$  osciladores definido en la Sección 3.5

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (4.61)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{G}\mathbf{x}_1 \quad (4.62)$$

en donde  $\mathbf{x}_1 = [x_{11} \ x_{21} \ x_{31} \ \dots \ x_{n1}]^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = [x_{12} \ x_{22} \ x_{32} \ \dots \ x_{n2}]^T$  y

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & -a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

es la matrix de interconexiones del sistema. Así como las ecuaciones de la dinámica de su error de sincronía

$$\dot{\mathbf{e}}_{11} = \mathbf{e}_{22} \quad (4.64)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{22} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{x}_{n1}, \mathbf{x}_{n2}) + \mathbf{x}_{n1}^T \mathbf{\Gamma} \quad (4.65)$$

$$\dot{x}_{n1} = x_{n2} \quad (4.66)$$

$$\dot{x}_{n2} = \mu(1 - x_{n1}^2)x_{n2} + \left( \sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn} \right) x_{n1} \quad (4.67)$$

se puede definir entonces

$$\dot{\bar{x}}_{n1} = \bar{x}_{n2} \quad (4.68)$$

$$\dot{\bar{x}}_{n2} = \mu(1 - \bar{x}_{n1}^2)\bar{x}_{n2} + \left( \sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn} \right) \bar{x}_{n1} \quad (4.69)$$

como el ciclo límite estable a cuyas soluciones deben converger todas las trayectorias del sistema de  $n$  osciladores. Entonces se puede definir

$$\epsilon_{n1} = x_{n1} - \bar{x}_{n1} \quad (4.70)$$

$$\epsilon_{n2} = x_{n2} - \bar{x}_{n2} \quad (4.71)$$

en donde  $\epsilon_{n1}$  y  $\epsilon_{n2}$  son los errores de sincronía entre las trayectorias de la luciérnaga  $n$  y el ciclo límite estable definido en las ecuaciones (4.68) y (4.69).

Si se sigue el mismo procedimiento que para el caso de dos y tres osciladores se obtiene un sistema de la forma

$$\dot{x} = A_n(t)x + \mu\xi_{n-1} \quad (4.72)$$

donde  $x = [e_{11} \ e_{12} \ e_{21} \ e_{22} \ \dots \ e_{(n-1)1} \ e_{(n-1)2} \ \epsilon_{n1} \ \epsilon_{n2}]^T$ ,

$$A_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1 & \kappa & a_{12} - a_{n2} & 0 & \dots & a_{1(n-1)} - a_{n(n-1)} & 0 & \beta_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} - a_{31} & 0 & \phi_2 & \kappa & \dots & a_{2(n-1)} - a_{n(n-1)} & 0 & \beta_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{(n-1)1} - a_{n1} & 0 & a_{(n-1)2} - a_{n2} & 0 & \dots & \phi_3 & \kappa & \beta_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{n1} & 0 & -a_{n2} & 0 & \dots & -a_{n(n-1)} & 0 & \phi_4 & \kappa \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

siendo

$$\begin{aligned} \kappa &= \mu - \mu \bar{x}_{n1}^2 \\ \phi_1 &= -(a_{11} + a_{n1}) - 2\mu \bar{x}_{n1} \bar{x}_{n2} \\ \phi_2 &= -(a_{n2} + a_{22}) - 2\mu \bar{x}_{n1} \bar{x}_{n2} \\ \phi_3 &= -(a_{n(n-1)} + a_{(n-1)(n-1)}) - 2\mu \bar{x}_{n1} \bar{x}_{n2} \\ \phi_4 &= \sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn} \\ \beta_n &= a_{11} - \sum_{p=1}^n a_{1p} + \sum_{p=1}^{n-1} a_{np} - a_{nn} \end{aligned}$$

y además

$$\xi_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e_{12}\epsilon_{n1}^2 - 2e_{12}\epsilon_{n1}\bar{x}_{n1} - 2e_{11}\epsilon_{n1}\epsilon_{n2} - 2e_{11}\epsilon_{n1}\bar{x}_{n2} - 2e_{11}\epsilon_{n2}\bar{x}_{n1} \\ -e_{12}e_{11}^2 + 2e_{11}e_{12}\epsilon_{n1} + 2e_{11}e_{12}\bar{x}_{n1} + e_{11}^2\epsilon_{n2} + e_{11}^2\bar{x}_{n2} + \beta\bar{x}_{n1} \\ 0 \\ -e_{22}\epsilon_{n1}^2 - 2e_{22}\epsilon_{n1}\bar{x}_{n1} - 2e_{21}\epsilon_{n1}\epsilon_{n2} - 2e_{11}\epsilon_{n1}\bar{x}_{n2} - 2e_{11}\epsilon_{n2}\bar{x}_{n1} \\ -e_{22}e_{21}^2 + 2e_{21}e_{22}\epsilon_{n1} + 2e_{21}e_{22}\bar{x}_{n1} + e_{21}^2\epsilon_{n2} + e_{21}^2\bar{x}_{n2} + \beta\bar{x}_{n1} \\ \vdots \\ 0 \\ -e_{(n-1)2}\epsilon_{n1}^2 - 2e_{(n-1)2}\epsilon_{n1}\bar{x}_{n1} - 2e_{(n-1)1}\epsilon_{n1}\epsilon_{n2} - 2e_{(n-1)1}\epsilon_{n1}\bar{x}_{n2} \\ -2e_{(n-1)1}\epsilon_{n2}\bar{x}_{n1} - e_{(n-1)2}e_{(n-1)1}^2 + 2e_{(n-1)1}e_{(n-2)2}\epsilon_{n1} \\ + 2e_{(n-1)1}e_{(n-1)2}\bar{x}_{n1} + e_{(n-1)1}^2\epsilon_{n2} + e_{(n-1)1}^2\bar{x}_{n2} + \beta\bar{x}_{n1} \\ 0 \\ -\epsilon_{n1}^2\epsilon_{n2} - 2\epsilon_{n1}\epsilon_{n2}\bar{x}_{n1} - \epsilon_{n1}^2\bar{x}_{n2} \end{bmatrix}$$

es un elemento altamente no lineal del sistema.

En este caso también se aplica el análisis realizado para dos y tres luciérnagas: de acuerdo a la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov de soluciones periódicas expuesta en la Sección 2.2.4, los cambios de coordenadas (4.70) y (4.71) hacen que el sistema no lineal original (4.61)-(4.62) haya sido linealizado alrededor del ciclo límite estable (4.68)-(4.69) correspondiente a su dinámica de sincronía y, con la ayuda del método indirecto de Lyapunov descrito en el Teorema 2.2.1, se puede garantizar su estabilidad local. Además, ya que  $\bar{x}_{n1}$  y  $\bar{x}_{n2}$  son las soluciones periódicas de dicho ciclo límite y aparecen en algunos de los coeficientes de la matriz lineal variante en el tiempo (4.73), se puede usar la teoría de Floquet para este propósito.

#### 4.3.1. Condición suficiente de sincronía

Ya que la matriz  $A_n(t)$  del sistema (4.72) cumple con

$$A_n(t + T_n) = A_n(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donde  $T_n > 0$  es el periodo del ciclo límite definido por las ecuaciones (4.68) y (4.69), se puede utilizar el Teorema de estabilidad de Floquet 2.3.2 y determinar si las trayectorias de (4.61)-(4.62) convergen o no a las soluciones de su dinámica de sincronía, dependiendo del valor de los parámetros de interconexión del sistema. Si convergen, significará que todos los errores de sincronía del vector  $\mathbf{x}$  se vuelven cero y, por consiguiente, el sistema estará en sincronía.

Tomando todo lo anterior en consideración, se puede plantear la condición suficiente de sincronía total para  $n$  osciladores

$$Re\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4.74)$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la parte lineal del sistema (4.21).

En este caso el elemento no lineal  $\xi_{n-1}$  también desaparece al utilizar el método indirecto de Lyapunov tal y como se explicó anteriormente en los casos de dos y tres luciérnagas de las secciones 4.1.1 y 4.2.1 respectivamente.

### 4.3.2. Obtención de los exponentes característicos

Una vez establecido, al igual que para el caso de dos y tres luciérnagas, que las condiciones suficientes dependen de los exponentes característicos del sistema (4.72), se usará la teoría desarrollada en la Sección 2.3.4 para su obtención.

Ya que  $A_n(t)$  es  $T$ -periódica se puede expresar mediante la serie de Fourier

$$A_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{nk} e^{jk\omega t} \quad (4.75)$$

en donde

$$A_{nk} = \frac{1}{T} \int_0^T A_n(t) e^{-jk\omega t} dt$$

se puede construir la matriz

$$\mathbf{A}_{n_N} = \begin{bmatrix} A_{n_0} + jN\omega I_{2n} & \cdots & A_{n_{-N}} & \cdots & A_{n_{-2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_N} & \cdots & A_{n_0} & \cdots & A_{n_{-N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_{2N}} & \cdots & A_{n_N} & \cdots & A_{n_0} - jN\omega I_{2n} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

que es una submatriz que abarca de los bloques  $\mathbf{A}(-N, N)$  hasta  $\mathbf{A}(N, N)$  de la hipermatriz (2.34) definida en el Capítulo 2 y en donde  $N$  puede ser escogida arbitrariamente grande para que los valores propios de  $\mathbf{A}_{n_N}$  convergan a los exponentes característicos de  $A_n(t)$ .

## 4.4. Comentarios del capítulo

Las condiciones suficientes para que haya sincronía total en un sistema de  $n$  osciladores se obtuvieron haciendo uso de la teoría de estabilidad de Lyapunov y del método indirecto de Lyapunov, ambos para sistemas no autónomos. Su cumplimiento junto con el de las condiciones suficientes garantiza que dicho sistema se sincronice a las soluciones de la dinámica de sincronía. Básicamente, la condición suficiente de sincronía es la misma para conocer si un sistema lineal variante en el tiempo con coeficientes periódicos es estable, sólo que en este caso los cambios de coordenadas propuestos permiten aplicar dicha condición de estabilidad al sistema no lineal con una parte lineal variante en el tiempo, haciendo uso de la teoría de estabilidad de Floquet. Lo

único que resta es comprobar mediante simulaciones numéricas, que las condiciones necesarias y suficientes obtenidas pueden predecir si un arreglo de luciérnagas está en sincronía o no, lo cual se hará en el siguiente capítulo.



# Capítulo 5

## Verificación de resultados

En este capítulo se presenta la validación de la teoría desarrollada mediante simulaciones numéricas. Se pretende mostrar que las condiciones necesarias y suficientes obtenidas en los Capítulos 3 y 4 respectivamente funcionan y, que a través de ellas se puede determinar de manera matemática formal si un sistema de osciladores mutuamente acoplados mediante funciones lineales está en sincronía total o no.

Se mostrarán varios casos de estudio en donde ocurre y no ocurre la sincronía total de los sistemas, siendo ésta verificada mediante la simulación del sistema original de osciladores acoplados. Ya que se generalizó al caso de  $n$  luciérnagas, existen un infinito número de casos que se podrían probar para tratar de validar los resultados obtenidos, sin embargo, en esta sección se elijen casos simples y representativos para dos, tres y cuatro luciérnagas en los cuales las condiciones de sincronía obtenidas son correctamente verificadas.

### 5.1. Aspectos generales

Una luciérnaga será representada gráficamente con la imagen de la Figura 5.1. Como se



Figura 5.1: Representación gráfica de una luciérnaga

mencionó en el Capítulo 2, las conexiones entre las luciérnagas dependen de si éstas se perciben o no visualmente entre ellas colocadas a una unidad de distancia. De acuerdo a esta interpretación biológica, los parámetros de interconexión toman un valor de 1 ó 0 respectivamente. De forma gráfica, esta interconexión será representada por la imagen de la Figura 5.2 y apuntando en la dirección en la que un insecto vea al otro. Otro aspecto a considerar es que, por comodidad, el parámetro  $\mu$  de los osciladores de van der Pol será siempre igual a 1. En cuanto a los parámetros



Figura 5.2: Representación gráfica de la interconexión entre luciérnagas

$a_{ii}$ , tal como se había especificado anteriormente, son interpretados como el esfuerzo que cada luciérnaga se exige a si misma para brillar más que sus competidores y dado que se consideran osciladores idénticos, todos ellos tienen el mismo valor.

## 5.2. Primer caso de estudio

El caso más simple es aquel en el que dos luciérnagas separadas a una unidad de distancia se ven mutuamente y se ilustra gráficamente en la Figura 5.3.

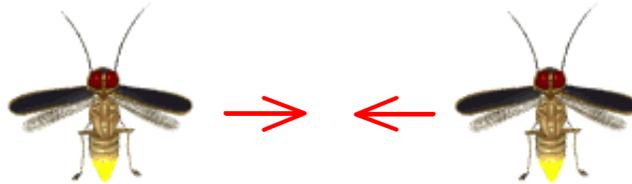


Figura 5.3: Arreglo de luciérnagas para el primer caso de estudio

### 5.2.1. Condición necesaria

La condición necesaria, de acuerdo a lo obtenido en el Capítulo 3 es

$$a_{12} - a_{11} = a_{21} - a_{22}. \quad (5.1)$$

De acuerdo al arreglo de la Figura 5.3 se tiene que los parámetros de interconexión son

$$a_{12} = 1 \quad (5.2)$$

$$a_{21} = 1 \quad (5.3)$$

y además<sup>1</sup>

$$a_{11} = 1.868 \quad (5.4)$$

$$a_{22} = 1.868 \quad (5.5)$$

Sustituyendo los parámetros (5.2)-(5.5) en la condición (5.1) se tiene

$$-0.868 = -0.868.$$

Por lo tanto se puede concluir, con base en la condición necesaria, que hay sincronía total en el sistema.

<sup>1</sup>Datos obtenido del análisis realizado en [Escalante, 2012]

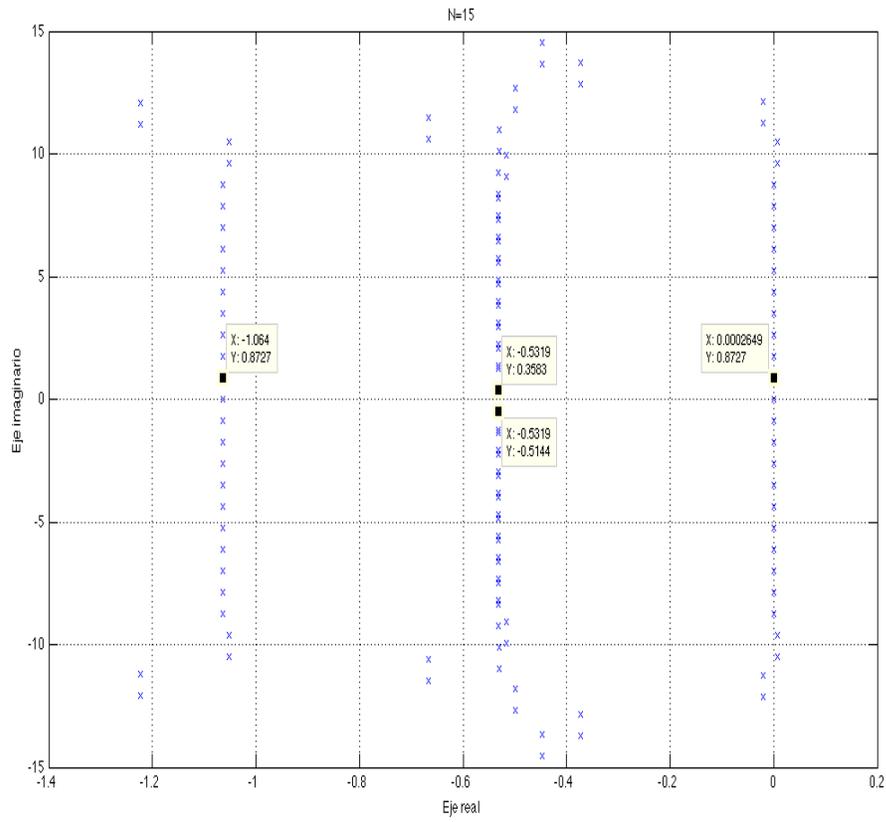


Figura 5.4: Plano complejo para el primer caso de estudio con  $N = 15$

### 5.2.2. Condición suficiente

La condición suficiente, de acuerdo a lo planteado en el Capítulo 4 es

$$\operatorname{Re}\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4 \quad (5.6)$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la matriz  $A_2(t)$  obtenida en la Sección 4.1. Usando el procedimiento descrito en la Sección 4.1.2, una vez sustituidos los parámetros de interconexión (5.2)-(5.5), se puede obtener una aproximación numérica de los exponentes característicos de la matriz (4.22). Dicha aproximación se hizo utilizando  $N = 15$  por medio de un código en Matlab diseñado por el autor y cuyo resultado se muestra en el plano complejo de la Figura 5.4. El resultado arroja que se tienen los siguientes valores característicos reales

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -1.064 \end{aligned}$$

cuyo valor se repite en el eje imaginario cada  $\omega = \pm 0.8727$  [rad/s] debido a la itereación del método. También se puede observar que se tiene don valores característicos complejos conjujados

$$\lambda_3 = -0.5319 \pm 0.5144j$$

$$\lambda_4 = -0.5319 \pm 0.3583j$$

que se repiten en el eje imaginario cada  $\omega = \pm 0.8727$  [rad/s]. Se puede concluir entonces, con base en la condición suficiente (5.6) que el sistema está en sincronía total.

### 5.2.3. Simulación

La simulación numérica fue realizada en Matlab con el código modificado del utilizado en [Escalante, 2012]. Se simularon las variables de estado  $x_{11}$  y  $x_{21}$  del sistema original, la cual representan la bioluminiscencia de las luciérnagas, utilizando un tiempo de simulación de 20 s y condiciones iniciales de  $x_0 = [2 \ 0 \ 1.5 \ 0]^T$ . La gráfica obtenida puede verse en la Figura 5.5

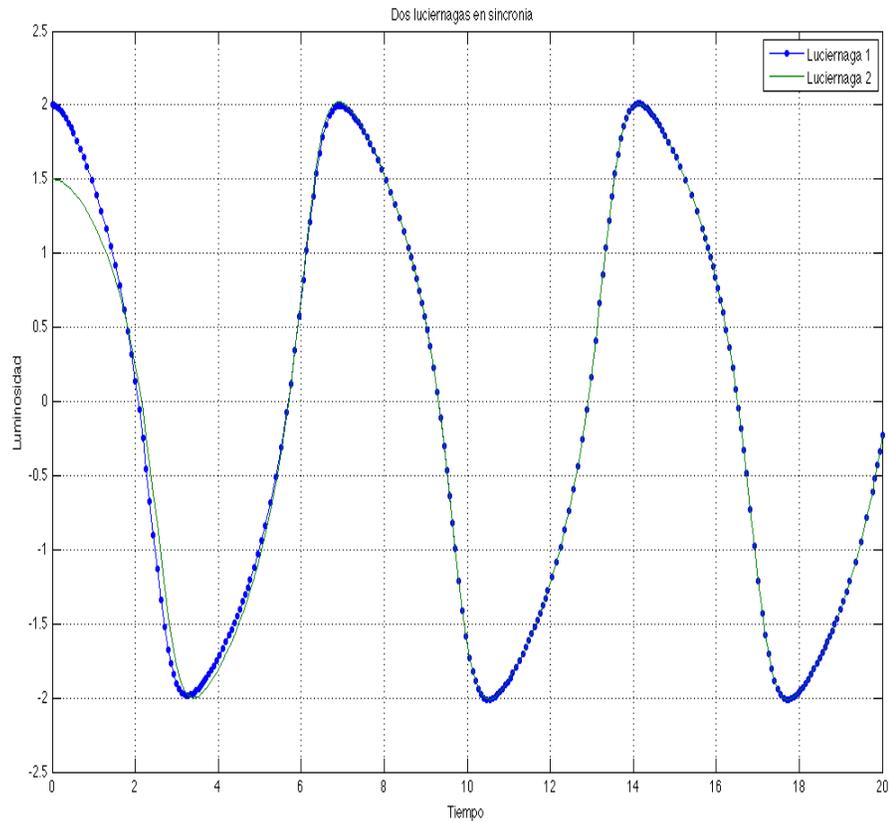


Figura 5.5: Resultado al simular primer caso de estudio

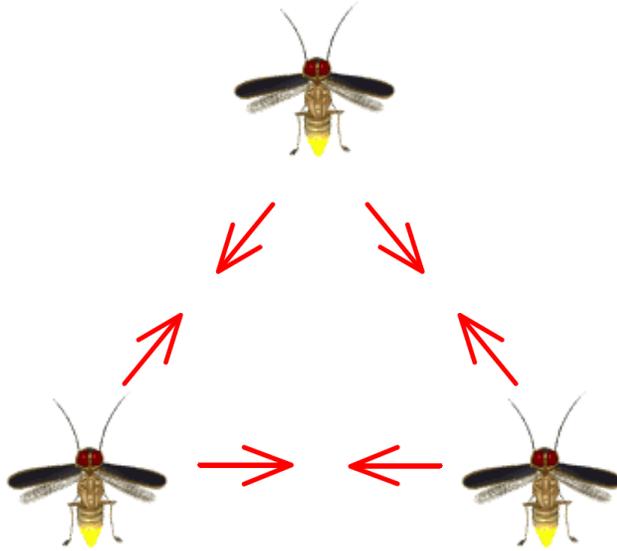


Figura 5.6: Tres luciérnagas viéndose mutuamente

### 5.3. Segundo caso de estudio

El siguiente caso son tres luciérnagas colocadas en un arreglo con forma de triángulo equilátero que se observan mutuamente. Gráficamente este caso está representado en la Figura 5.6.

#### 5.3.1. Condición necesaria

La condición necesaria, de acuerdo a lo obtenido en el Capítulo 3, es

$$a_{12} + a_{13} - a_{11} = a_{21} + a_{23} - a_{22} = a_{31} + a_{32} - a_{33}. \quad (5.7)$$

Donde los parámetros de interconexión, de acuerdo a la Figura 5.6 son

$$a_{12} = 1 \quad (5.8)$$

$$a_{13} = 1 \quad (5.9)$$

$$a_{21} = 1 \quad (5.10)$$

$$a_{23} = 1 \quad (5.11)$$

$$a_{31} = 1 \quad (5.12)$$

$$a_{32} = 1 \quad (5.13)$$

$$(5.14)$$

y donde además<sup>2</sup>

$$a_{11} = 2.5 \quad (5.15)$$

$$a_{22} = 2.5 \quad (5.16)$$

$$a_{33} = 2.5. \quad (5.17)$$

Sustituyendo los parámetros (5.8)-(5.17) en la condición (5.7) se tiene

$$0.5 = 0.5 = 0.5 \quad (5.18)$$

Por lo tanto se puede concluir, con base en la condición necesaria, que hay sincronía total en el sistema.

### 5.3.2. Condición suficiente

La condición suficiente, de acuerdo a lo planteado en el Capítulo 4, es

$$Re\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.19)$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la matriz  $A_3(t)$  obtenida en la Sección 4.2.

Esta vez el método numérico, como se puede ver en la gráfica de la Figura 5.7, arroja que se tienen seis exponentes característicos

$$\lambda_1 = -0.04212$$

$$\lambda_{2,5} = -1.047$$

$$\lambda_{3,6} = -3.504$$

$$\lambda_4 = -4.509$$

Todos ellos se repiten, de acuerdo al método descrito en el capítulo 2, en el eje imaginario cada  $\omega = 0.6349$  [rad/s]. Entonces, con base en la condición suficiente, podemos concluir que el sistema está en sincronía.

### 5.3.3. Simulación

Se simuló el sistema original de 0 a 25 s utilizando un vector de condiciones iniciales  $x_0 = [2 \ 0 \ 1.5 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ . El resultado de la simulación se muestra en la Figura 5.8.

---

<sup>2</sup>Datos obtenidos del análisis realizado en [Escalante, 2012]

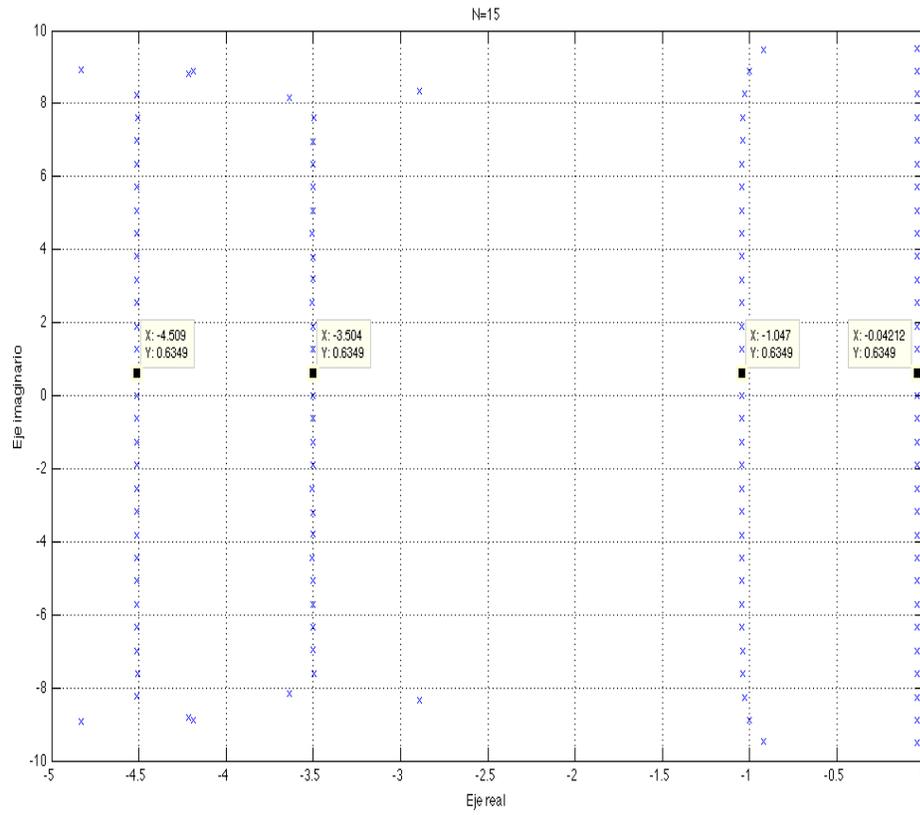


Figura 5.7: Plano complejo para el segundo caso de estudio

## 5.4. Tercer caso de estudio

En el siguiente caso se estudia nuevamente el arreglo de tres luciérnagas, solo que esta vez dos de ellas se ven entre si pero la otra sólo ve a una de éstas. Dicha situación se puede observar en la Figura 5.9.

### 5.4.1. Condición necesaria

De acuerdo a la Figura 5.9, los parámetros de interconexión entre las luciérnagas son

$$a_{12} = 0 \quad (5.20)$$

$$a_{13} = 1 \quad (5.21)$$

$$a_{21} = 1 \quad (5.22)$$

$$a_{23} = 0 \quad (5.23)$$

$$a_{31} = 1 \quad (5.24)$$

$$a_{32} = 0 \quad (5.25)$$

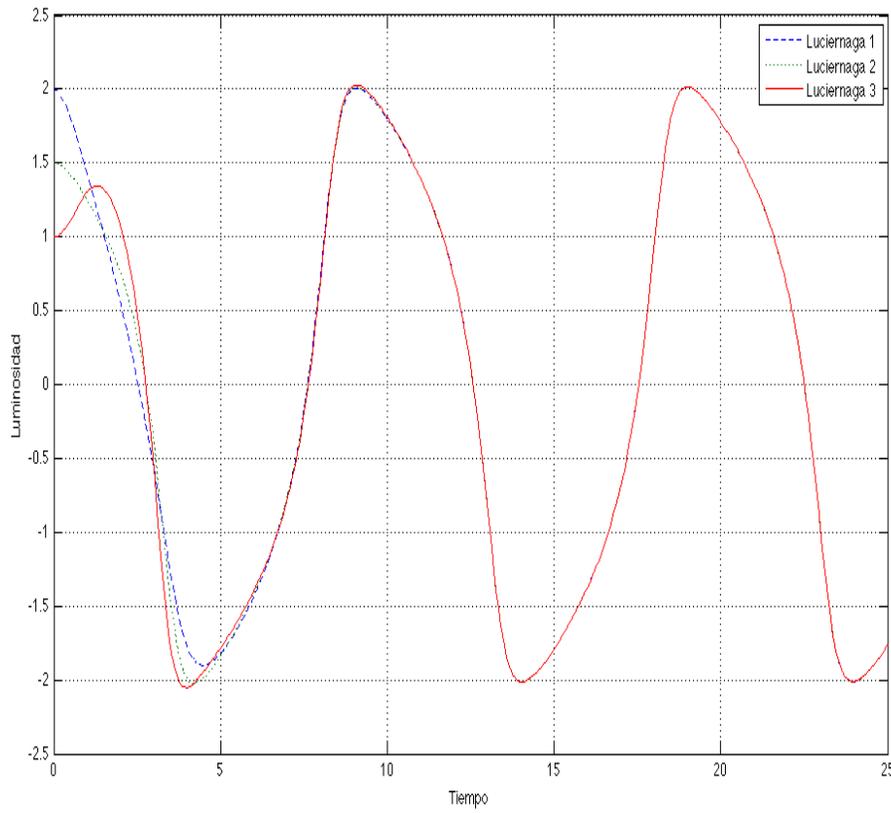


Figura 5.8: Resultado al simular el sistema del caso dos

y además<sup>3</sup>

$$a_{11} = 2.5 \quad (5.26)$$

$$a_{22} = 2.5 \quad (5.27)$$

$$a_{33} = 2.5 \quad (5.28)$$

Sustituyendo (5.20)-(5.28) en la condición (5.7) se tiene

$$-1.5 = -1.5 = -1.5 \quad (5.29)$$

Por lo tanto se puede concluir, con base en la condición necesaria, que hay sincronía total en el sistema.

#### 5.4.2. Condición suficiente

La condición suficiente, de acuerdo a lo planteado en el Capítulo 4, es

$$Re\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.30)$$

<sup>3</sup>Datos obtenidos del análisis realizado en [Escalante, 2012]

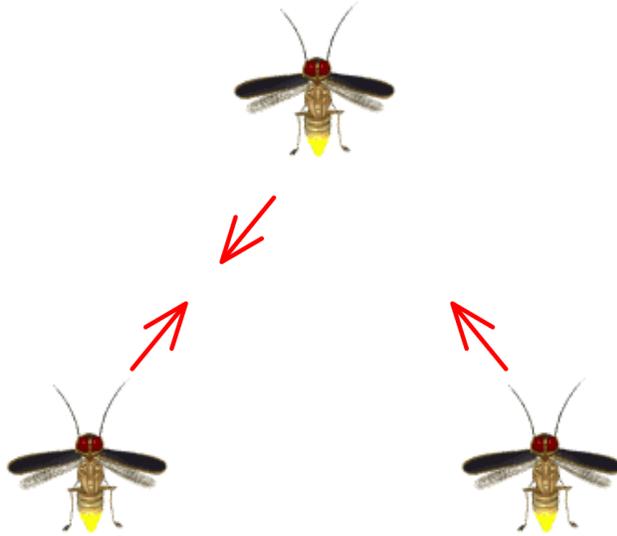


Figura 5.9: Tres luciérnagas: dos viéndose y la otra sólo a una de éstas

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la matriz  $A_3(t)$  obtenida en la Sección 4.2. Apoyándose de la Figura (5.10), el resultado arroja que se tienen seis exponentes característicos

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.577 \\ \lambda_2 &= -1.08 \\ \lambda_3 &= -1.484 \\ \lambda_4 &= -2.3 \\ \lambda_5 &= -2.7 \\ \lambda_6 &= -3.21\end{aligned}$$

cuyo valor se repiten en el eje imaginario cada  $\omega = 1.2$  [rad/s]. Entonces, dado que se cumple la condición suficiente, podemos concluir que el sistema está en sincronía.

### 5.4.3. Simulación

La simulación correspondiente al sistema se muestra en la Figura 5.11 utilizando los mismos parámetros que en el segundo caso de estudio.

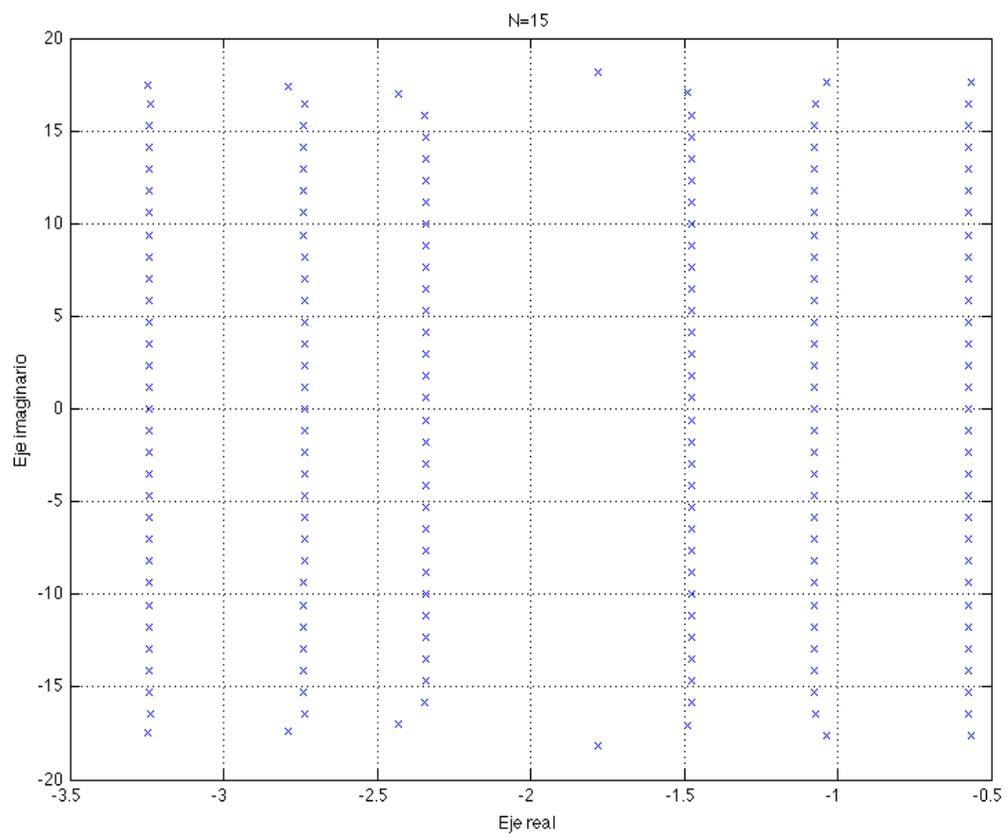


Figura 5.10: Plano complejo para el tercer caso de estudio

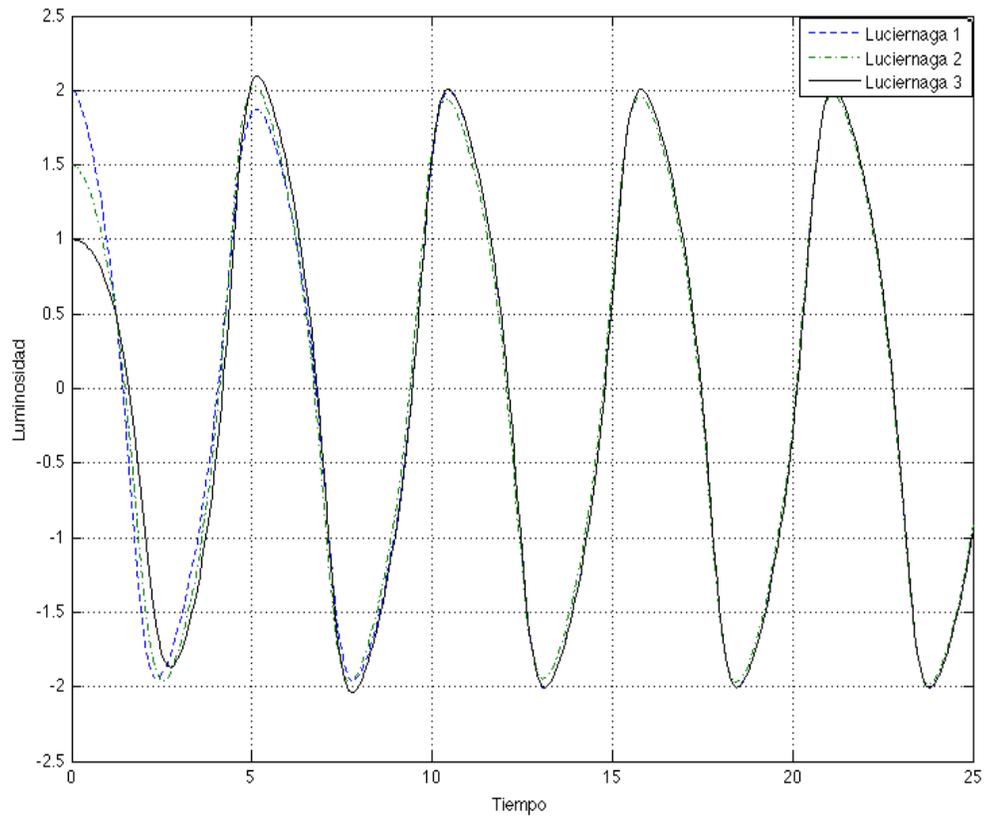


Figura 5.11: Resultado al simular el sistema del caso tres

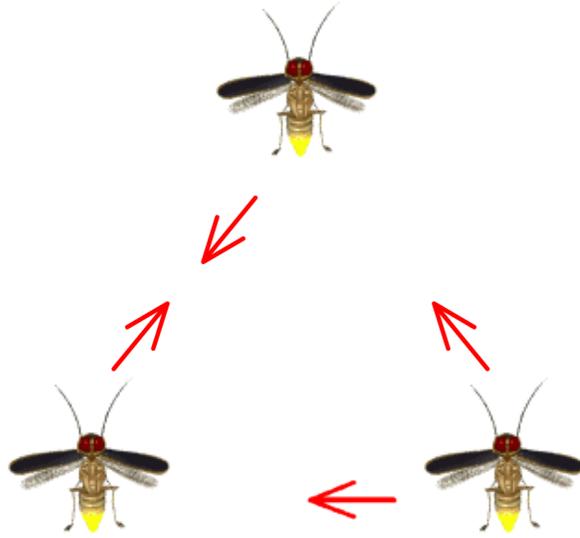


Figura 5.12: Caso de estudio 4

## 5.5. Cuarto caso de estudio

El siguiente caso de estudio es mostrado en la Figura 5.12. Esta vez, en el mismo arreglo que para el caso de tres, la misma luciérnaga no ve a una sino a dos de sus compañeras.

### 5.5.1. Condición necesaria

De acuerdo al arreglo de la figura, los parámetros de interconexión son

$$a_{12} = 0 \quad (5.31)$$

$$a_{13} = 1 \quad (5.32)$$

$$a_{21} = 1 \quad (5.33)$$

$$a_{23} = 1 \quad (5.34)$$

$$a_{31} = 1 \quad (5.35)$$

$$a_{32} = 0 \quad (5.36)$$

y además

$$a_{11} = 2.5 \quad (5.37)$$

$$a_{22} = 2.5 \quad (5.38)$$

$$a_{33} = 2.5 \quad (5.39)$$

Sustituyendo estos valores en la condición necesaria (5.7) se tiene

$$-1.5 = 0.5 = -1.5 \quad (5.40)$$

Por lo tanto se puede concluir, con base en la condición necesaria, que no hay sincronía total en el sistema.

### 5.5.2. Condición suficiente

La condición suficiente, de acuerdo a lo planteado en el Capítulo 4, es

$$Re\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.41)$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la matriz  $A_3(t)$  obtenida en la Sección 4.2. Observando el resultado de la Figura 5.13 se tienen seis exponentes característicos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.57 \\ \lambda_2 &= -1.08 \\ \lambda_3 &= -2.701 \\ \lambda_4 &= -3.211 \end{aligned}$$

que se repiten cada  $\omega = 1.2$  [rad/s] y

$$\lambda_5 = 0.5 \pm 0.528j$$

cada  $\omega = 0.528$  [rad/s] y

$$\lambda_6 = 0.5 \pm 0.6803j$$

cada  $\omega = 0.6803$  [rad/s].

Con base en esto, podemos concluir que el sistema no está en sincronía total.

### 5.5.3. Simulación

La simulación del sistema original correspondiente se muestra en la Figura 5.14.

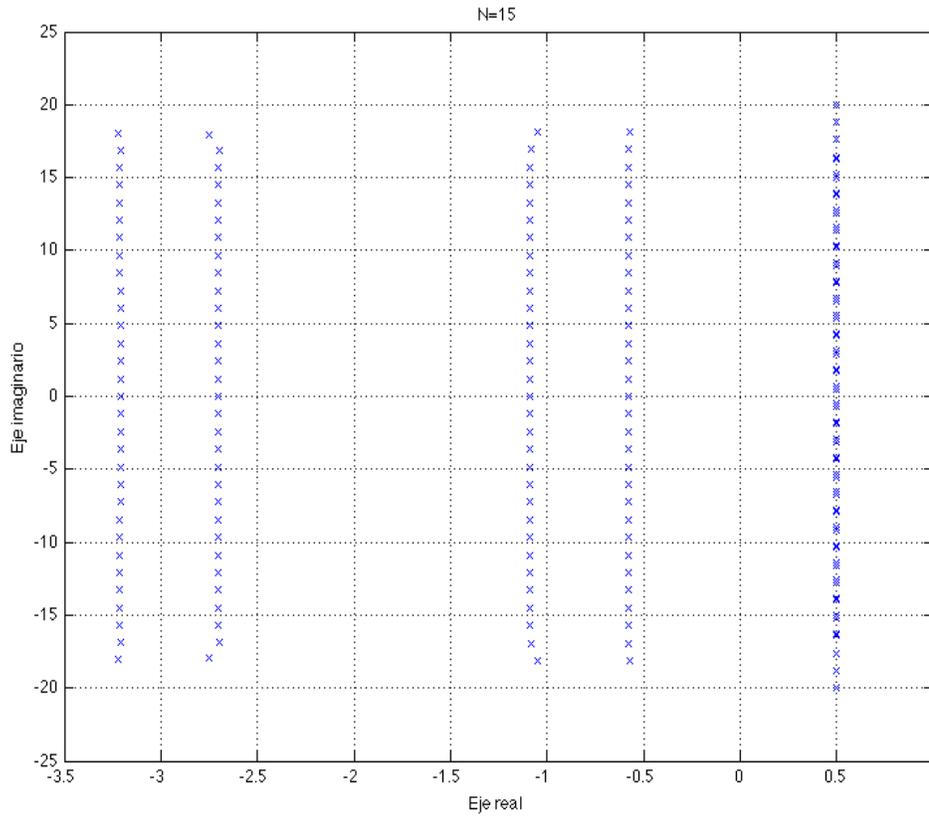


Figura 5.13: Plano complejo para el cuarto caso de estudio

## 5.6. Quinto caso de estudio

Finalmente, usando la teoría desarrollada en la Sección 3.5 se probará el caso de  $n = 4$  osciladores.

### 5.6.1. Condicion necesaria

La condición necesaria, de acuerdo a lo obtenido en el Capítulo 3, es

$$a_{12} + a_{13} + a_{14} - a_{11} = a_{21} + a_{23} + a_{24} - a_{22} = a_{31} + a_{32} + a_{34} - a_{33} = a_{41} + a_{42} + a_{43} - a_{44}. \quad (5.42)$$

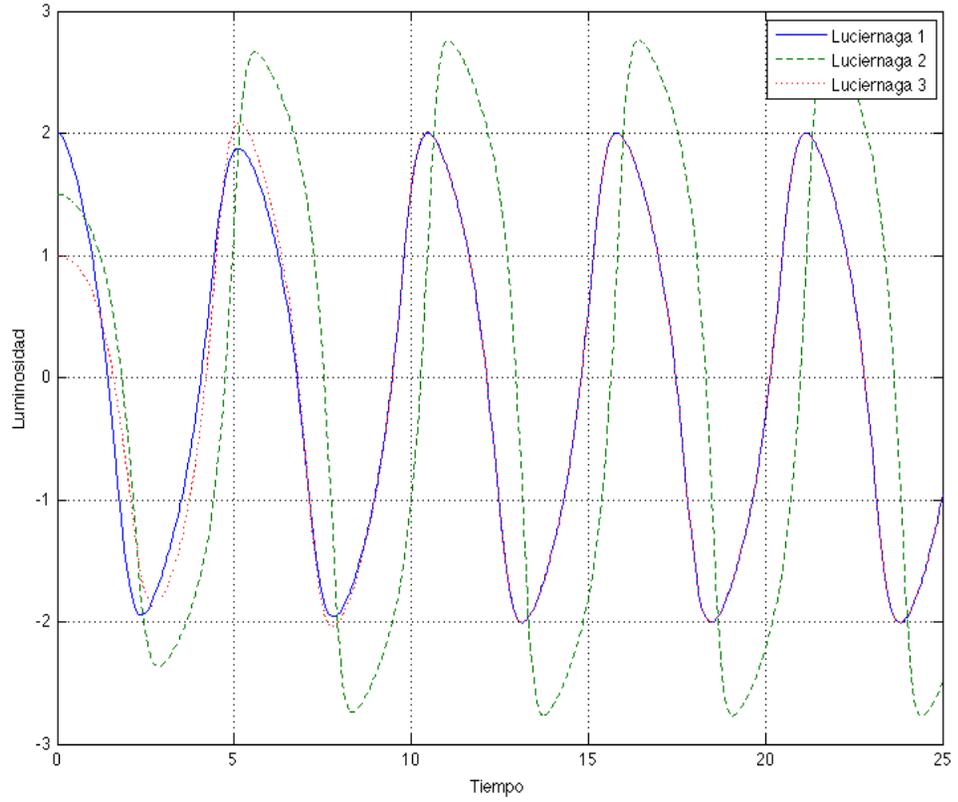


Figura 5.14: Resultado al simular el sistema del cuarto caso

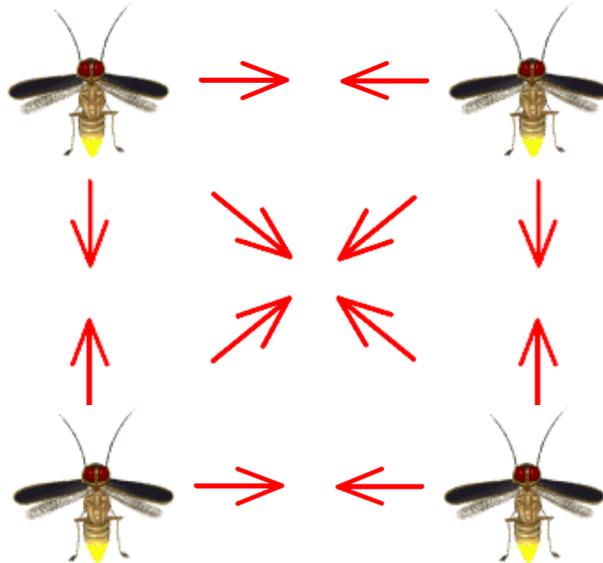


Figura 5.15: Caso de estudio 5

De acuerdo a la Figura 5.15

$$a_{12} = 1 \quad (5.43)$$

$$a_{13} = 1 \quad (5.44)$$

$$a_{14} = 1 \quad (5.45)$$

$$a_{21} = 1 \quad (5.46)$$

$$a_{23} = 1 \quad (5.47)$$

$$a_{24} = 1 \quad (5.48)$$

$$a_{31} = 1 \quad (5.49)$$

$$a_{32} = 1 \quad (5.50)$$

$$a_{34} = 1 \quad (5.51)$$

y además

$$a_{11} = 2.5 \quad (5.52)$$

$$a_{22} = 2.5 \quad (5.53)$$

$$a_{33} = 2.5 \quad (5.54)$$

$$a_{44} = 2.5 \quad (5.55)$$

Sustituyendo los valores (5.43)-(5.55) valores en la condición (5.42) se tiene

$$0.5 = 0.5 = 0.5 \quad (5.56)$$

Por lo tanto se puede concluir, con base en la condición necesaria, que hay sincronía total en el sistema.

### 5.6.2. Condición suficiente

Nuevamente, la condición suficiente, de acuerdo a lo planteado en el Capítulo 4 es

$$Re\{\lambda_j\} < 0 \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

donde  $\lambda_j$  son los exponentes característicos de la matriz del sistema lineal variante en el tiempo correspondiente al sistema.

Usando la teoría expuesta en la Sección 2.3 se puede obtener una aproximación numérica de los exponentes característicos. Dicha aproximación se hizo utilizando  $N = 15$  y cuyo resultado se muestra en la Figura 5.16. El resultado arroja que se tienen exponentes característicos, todos del lado izquierdo del semiplano complejo. Con base en esto, podemos concluir que el sistema está en sincronía. Sin embargo, al tratarse el sistema de una matriz de dimensión  $8 \times 8$ , el método numérico comienza a ser inexacto ya que la matriz con  $N = 15$  creada con base en la hipermatriz (2.34) tiene una dimensión de  $248 \times 248$ .

### 5.6.3. Simulación

La simulación correspondiente al sistema se muestra en la Figura 5.17.

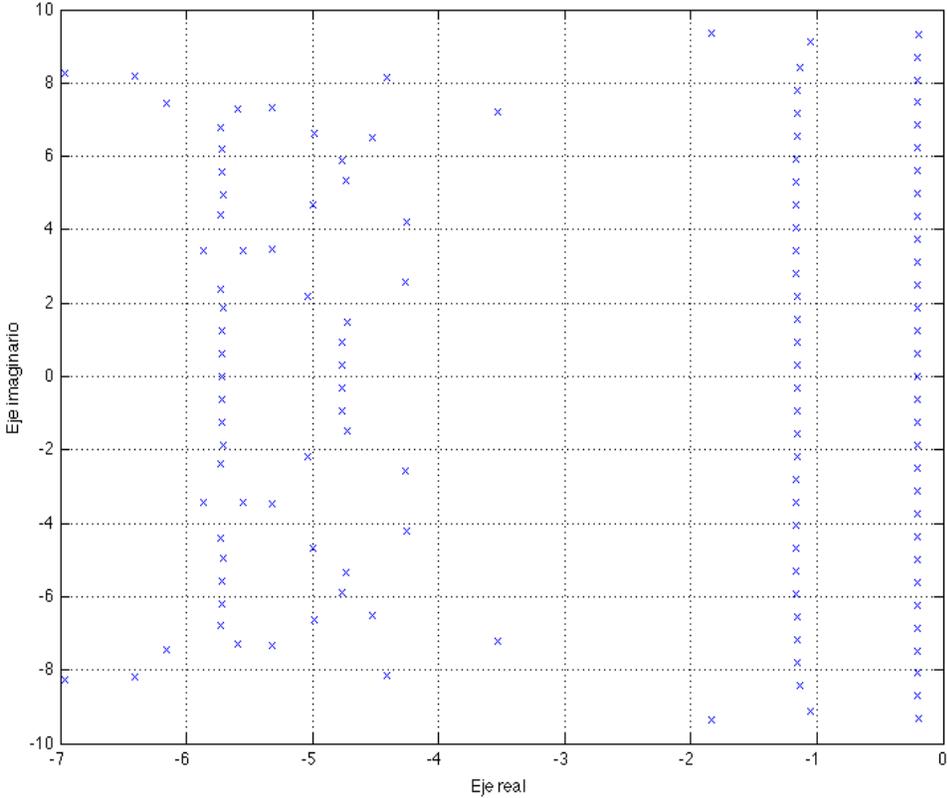


Figura 5.16: Plano complejo para el caso cinco

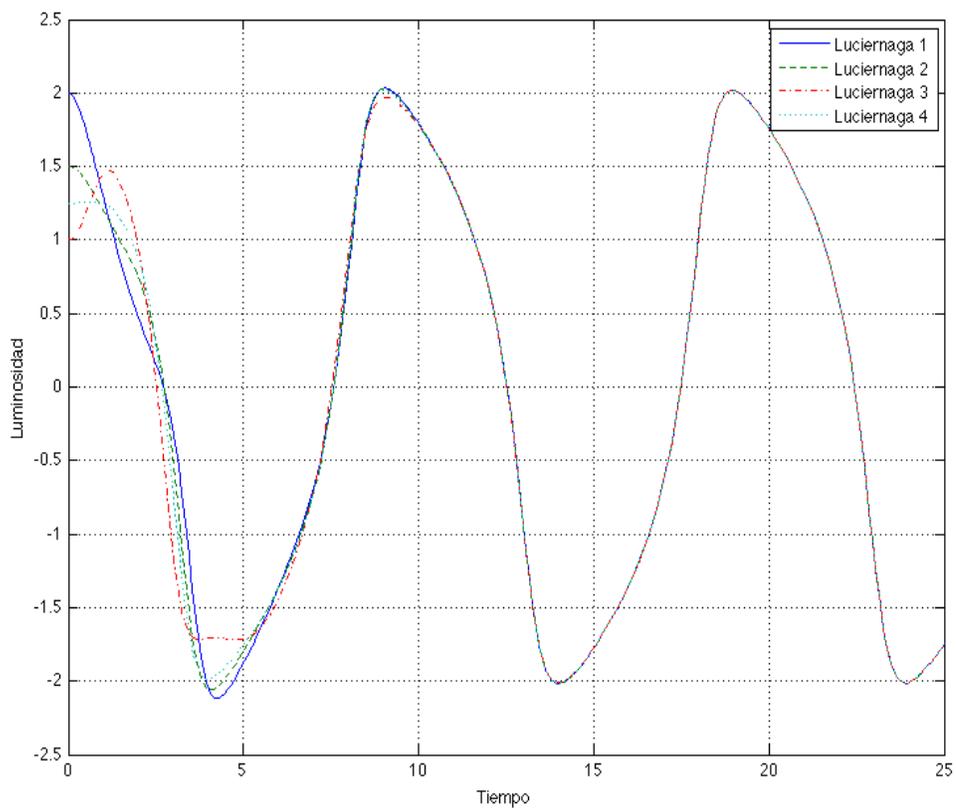


Figura 5.17: Resultado al simular el sistema del caso cinco

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1. Comentarios finales

En este trabajo se obtuvieron condiciones matemáticas necesarias y suficientes para comprobar si un sistema de osciladores mutuamente acoplados por funciones lineales está en sincronía o no. Dado que la sincronía de osciladores no lineales, se presenta constantemente en la naturaleza, se le dió a éste un enfoque de Biología de Sistemas la cual, por medio de herramientas matemáticas, trata de dar una aproximación al entendimiento a una gran gama de fenómenos biológicos. En este caso se tomó el comportamiento de la bioluminiscencia de un grupo de luciérnagas dado que es sencillo, a diferencia de otros fenómenos naturales oscilatorios, visualizar cuando y como éstas entran en sincronía, dándole una interpretación biológica aceptable: la competencia de los machos por la hembra en época de apareamiento. Dicho comportamiento se aproximó mediante la ecuación de van der Pol, modelo no lineal ampliamente utilizado para describir oscilaciones en sistemas biológicos.

En trabajos previos se había intentado predecir cuando había sincronía pero solamente basándose en simulaciones del modelo y sin entrar a detalle en condiciones matemáticas formales para predecir cuando ésta sucedía. El desarrollo propuesto es, en gran medida, una extensión de estos trabajos pero aplica las herramientas de análisis de sistemas para explicar un fenómeno biológico, papel fundamental que juega la teoría de sistemas dinámicos dentro de la Biología de Sistemas.

Los puntos cubiertos en esta tesis y que no se habían desarrollado previamente, según el material bibliográfico consultado son:

- Se realiza un análisis de estabilidad local de un conjunto de osciladores acoplados mediante funciones lineales, con ello se encuentran condiciones necesarias para que exista sincronía con base en los parámetros de interconexión del sistema.
- Se extiende exitosamente la teoría de sistemas lineales variantes en el tiempo desarrollada en [Schumacher and Moreno, 1998] en un ejemplo práctico y enfocado a la Biología de Sistemas.
- Se crea un algoritmo que obtiene los exponentes característicos del sistema lineal variante en el tiempo, mismos que son la base para obtener las condiciones suficientes para que

haya sincronía en el sistema.

- Se generaliza la teoría al caso de  $n$  osciladores.

Sin embargo, uno de los aspectos importantes con el que se encontró fue que las herramientas matemáticas del análisis de sistemas no lineales son limitadas, en gran medida, al tratar de modelar fenómenos biológicos y más aún, al intentar explicar su funcionamiento. Los esfuerzos que se hacen actualmente en Biología de Sistemas se centran en tomar una pequeña parte del sistema biológico, y estudiarla aplicando la teoría según convenga. Lo mismo se hizo en este trabajo: se tomó una pequeña parte de un ser vivo muy complejo como lo es una luciérnaga, es decir el comportamiento de su bioluminiscencia, se aproximó matemáticamente con un modelo ya conocido y finalmente se estudió usando la teoría matemática más acorde al objetivo inicialmente planteado.

## 6.2. Trabajo futuro

Aún cuando las simulaciones realizadas en este trabajo funcionaron correctamente al momento de verificar las condiciones necesarias y suficientes obtenidas, es natural tratar de realizar la extensión de éste, lo cual se lleva a cabo de forma experimental.

Como es de esperarse, sería muy difícil realizar los experimentos con luciérnagas ya que, tratándose de seres vivos, las complicaciones que conlleva tratar de ajustarlos a un ambiente controlado en un laboratorio son demasiadas, comenzando por que se necesitaría que permanecieran siempre a una misma distancia una de la otra. La alternativa es trabajar con organismos a los cuales si se les puede someter a un ambiente controlado: las bacterias. Más precisamente el modelo experimental bien conocido y trabajado en Biología Molecular, la bacteria *Escherichia Coli*. Este organismo puede someterse más fácilmente a condiciones de laboratorio y además cuenta con la ventaja de que, mediante técnicas de ingeniería genética, es capaz de generar luminiscencia, lo que se ajusta en gran medida a lo planteado en esta tesis.

# Bibliografía

- [Appleton, 1922] Appleton, E. V. (1922). The automatic synchronization of triode oscillator. *Proceedings Cambridge Philosophic Society*.
- [Bittanti and Colaneri, 2009] Bittanti, S. and Colaneri, P. (2009). *Periodic Systems: Filtering and Control*. Springer-Verlag.
- [Danino et al., 2010] Danino, T. et al. (2010). A synchronized quorum of genetic clocks. *Nature*.
- [Deshmukh et al., 2004] Deshmukh, V. et al. (2004). Control of dynamic systems with time-periodic coefficients via the lyapunov-floquet transformation and backstepping technique. *Journal of Vibration and Control*.
- [Deville and Gilbert, 2003] Deville, Y. and Gilbert, D. (2003). An overview of data models for the analysis of biochemical pathways. *Briefings in bioinformatics*.
- [Eccles and Vincent, 1920] Eccles, W. H. and Vincent, J. H. (1920). *On the Variations of Wave-Length of the Oscillations Generated by Three-Electrode Thermionic Tubes due to Changes in Filament Current, Plate Voltage, Grid Voltage, or Coupling*. Proc. R. Soc. London.
- [Elowitz et al., 1999] Elowitz, M. B. et al. (1999). A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators. *Letters to nature*.
- [Ermentrout, 1991] Ermentrout, B. (1991). *An adaptive model for synchrony in the firefly *Pteroptyx Malacca**. Journal of Mathematical Biology.
- [Escalante, 2012] Escalante, E. (2012). *Fenómenos de Sincronización y Modelos Matemáticos*. Universidad Veracruzana.
- [Grodins, 1954] Grodins, F. S. (1954). *Respiratory responses to CO<sub>2</sub> inhalation. A theoretical study of a nonlinear biological regulator*. Journal of Applied Physiology.
- [Iglesias, 2010] Iglesias, P. A. (2010). *Control Theory and Systems Biology*. MIT Press.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- [Kim et al., 2010] Kim, J. et al. (2010). A design principle underlying the synchronization of oscillations in celular systems. *Journal of Cell Science*.
- [Kitano, 2002] Kitano, H. (2002). *Systems Biology: A Brief Overview*. Science.

- [Kuramoto, 1975] Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*.
- [Lang et al., 2011] Lang, M. et al. (2011). Autonomous synchronization of chemically coupled synthetic oscillators. *Bulletin of Mathematic Biology*.
- [Lazebnik, 2002] Lazebnik, Y. (2002). Can a biologist fix a radio? *Cancer Cell*.
- [Lust, 2001] Lust, K. (2001). Improved numerical floquet multipliers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*.
- [Mees, 1981] Mees, A. (1981). *Dynamics of Feedback Systems*. John Wiley and Sons.
- [Mirollo and Strogatz, 1990] Mirollo, R. and Strogatz, S. (1990). Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal of Applied Mathematics*.
- [Montagnier et al., 2004] Montagnier, P. et al. (2004). *The control of linear time-periodic systems using Floquet-Lyapunov theory*. International Journal of Control.
- [Pikovsky, 2001] Pikovsky, A. (2001). *Synchronization*. Cambridge University Press.
- [Raleygh, 1945] Raleygh, J. (1945). *The theory of sound*. Dover Publishers.
- [Schumacher and Moreno, 1998] Schumacher, A. and Moreno, J. (1998). *Ein Galerkin-Verfahren zur Bestimmung von Floquet-Transformationsmatrizen für lineare periodisch-zeitvariante Systeme*. Automatisierungstechnik.
- [Slotine, 1992] Slotine, J.-J. (1992). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- [Sontag, 2004] Sontag, E. (2004). *Molecular Systems Biology and Dynamics: An Introduction for non-Biologist*. Notas del autor sobre Biología de Sistemas.
- [Strogatz, 1997] Strogatz, S. H. (1997). Spontaneous synchronization in nature. *IEEE International Frequency Control Symposium*.
- [Tigges and Marquez-Lago, 2009] Tigges, M. and Marquez-Lago, T. (2009). A tunable synthetic mammalian oscillator. *Nature*.
- [van der Pol, 1920] van der Pol, B. (1920). A theory of the amplitude of free and forced triode vibration. *Radio Rev.*
- [Varga, 2005] Varga, A. (2005). An overview of recent developments in computational methods for periodic systems. *German Aerospace Center*.
- [Wiener, 1948] Wiener, N. (1948). *Cybernetics or, Control and Communication in the Animal and the Machine*. John Wiley and Sons.
- [Wiener, 1958] Wiener, N. (1958). *Nonlinear problems in Random Theory*. MIT Press.
- [Winfree, 1967] Winfree, A. T. (1967). Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*.

- [Winfree, 1987] Winfree, A. T. (1987). *Timing of Biological Clocks*. Scientific American Library.
- [Yakubovich and Starzhinskii, 1975] Yakubovich, V. A. and Starzhinskii, M. (1975). *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. John Wiley and Sons.