



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

SUPERFLUIDEZ DE GASES DE FERMI POLARIZADOS
EN REDES ÓPTICAS EN CASI-UNA, DOS Y
TRES DIMENSIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
M. EN C. RAFAEL MENDOZA PÉREZ

TUTOR PRINCIPAL:

DR. MIGUEL ÁNGEL SOLÍS ATALA
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. MAURICIO FORTES BESPROSVANI
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES, UNAM

MÉXICO, D. F., FEBRERO DE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Superfluidez de gases de Fermi polarizados en redes
ópticas en casi-una, dos y tres dimensiones*

Agradecimientos

Con mucho afecto a mis tutores, los Dres. Mauricio Fortes, Manuel de Llano y M. A. Solís, quienes siempre me han apoyado e impulsado en todos los aspectos, especialmente en los momentos difíciles que se presentaron en mi posgrado. Durante todo el tiempo que he trabajado y aprendido con ellos me hicieron sentir parte del grupo de investigación. Aprecio en gran medida el cúmulo de conocimientos que me han enseñado en estos años y la experiencia que he adquirido.

A todos los miembros del jurado, integrado por la Dra. Rosario Paredes y los Dres. Luis Antonio Pérez, M. A. Solís, Gerardo Carmona (con quien impartí el curso de Física Estadística en la Facultad de Ciencias de la UNAM) y Rafael Baquero (en su libro aprendí muchos conceptos de la teoría BCS). Sus comentarios, sugerencias y correcciones mejoraron notablemente el contenido de esta tesis.

I would like to express my gratitude to Zlatko Koinov, who influenced my understanding of the problems presented in this thesis. I learned many techniques discussed here with him. I appreciate his help during my stays at the University of Texas at San Antonio.

Al Instituto de Física de la UNAM, que me ha provisto de las herramientas y las enseñanzas con las que me he formado como investigador en Física.

A la UNAM, por todo lo que representa para mí.

Al Posgrado en Ciencias Físicas, por ser la organización que contribuyó enormemente a mi formación académica.

A mi querida Facultad de Ciencias, que es el lugar en donde estudié mi carrera en Física.

Al CONACYT por haberme otorgado una beca para mis estudios de doctorado.

A mi entrañable CCH-Naucalpan, que fue la institución donde comenzó mi formación en ciencias. Quiero agradecer en especial a mi maestro Carlos Goroztieta, por mostrarme la belleza de la ciencia.

A mis padres amados, Rafael y Sara; mis seis hermanos amados, Alicia, Antonia, Rocío, Susana, Cristóbal y Noé, por el apoyo que me han brindado toda mi vida.

A mis amigos, Juan Antonio Nava, Julio Cruz, Marco Antonio Sánchez, Víctor Arriaga y al Vórtice: Julio David Cruz e Iván Gutiérrez.

Al pueblo de México, quien aportó los recursos a las instituciones donde recibí mi educación.

A la memoria de la División del Norte, en el centenario de sus grandes batallas contra la tiranía.

En especial a ti, Roxana Marisol Calderón, te amo.

Resumen

En esta tesis estudiamos un gas de Fermi polarizado compuesto de una mezcla de dos fracciones de diferentes números de átomos con espines hacia arriba y espines hacia abajo. El gas se encuentra en una red óptica estacionaria en casi una, dos o tres dimensiones, donde los átomos en un mismo sitio de la red interactúan entre sí mediante un potencial de contacto atractivo y tienen la posibilidad de saltar sólo a los sitios contiguos. Para la descripción teórica del sistema polarizado suponemos la existencia del estado de Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO), donde el gap de apareamiento fermiónico (el parámetro de orden) depende tanto de las coordenadas como del momento de los pares de Cooper. Suponemos que en los sitios de la red el potencial es lo suficientemente profundo, para que la aproximación de amarre fuerte sea válida, y utilizamos el modelo de Hubbard atractivo, con interacciones en el mismo sitio de la red. Aquí aplicamos la teoría al sistema compuesto por átomos de ${}^6\text{Li}$ y confinado por la red óptica, que se mantiene a temperatura diferente de cero.

Analizamos el sistema con la aplicación de una aproximación de campo promedio que nos permite obtener las ecuaciones de número, del parámetro de orden y del momento total de los pares de Cooper, así como la energía libre de Helmholtz y el gran potencial termodinámico. Con estas ecuaciones determinamos que, vistas como funciones de la polarización a temperatura fija, la magnitud del momento de los pares de Cooper es creciente mientras que el parámetro de orden es decreciente en el estado FFLO, sin importar la dimensión en la que se encuentre el sistema. También construimos los diagramas de fases del sistema, es decir, las áreas que delimitan las fases en un espacio de polarización contra temperatura. En 3D y casi-1D observamos que la mayor parte del diagrama es ocupado por la fase FFLO, mientras que en 2D las áreas de la fase de Sarma y la separación de fases son comparables a ésta. Notamos que las regiones de polarización y de temperatura del diagrama de fases en casi-1D aumenta considerablemente respecto al diagrama en 3D.

Finalmente, calculamos la energía de las excitaciones colectivas de este sistema mediante la resolución de la ecuación de Bethe-Salpeter, en una aproximación de fase aleatoria generalizada, a temperatura distinta de cero. En 3D y 2D observamos la existencia de dos mínimos de tipo rotónico (uno para momentos positivos y otro para momentos negativos) en la energía de las excitaciones, de donde se deduce que existe una velocidad crítica diferente de cero que cumple con el criterio de Landau de la superfluidez, por lo que puede concluirse el carácter superfluido del sistema en esas dimensiones. En casi-1D calculamos la parte positiva del espectro, que también exhibe un mínimo de tipo rotónico. A partir de las curvas de las excitaciones colectivas reportamos las velocidades críticas, las energías mínimas para generar excitaciones rotónicas y las velocidades del sonido en las dimensiones consideradas.

Abstract

We study a polarized Fermi gas composed of a mixture of two fractions with different numbers of atoms with spin up and spin down states. This gas is loaded either in three, two or quasi one-dimensional optical lattices, where the atoms in the same site of the lattice can interact through attractive delta potential and they can jump to nearest-neighbor sites. For the theoretical description of the polarized system, we assume the existence of the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) state where the order parameter (gap) depends on both, the coordinates and center-of-mass momentum of Cooper pairs. We also assume that the lattice potential is sufficiently deep, such that the tight-binding approximation is valid and the system is well described by the single-band attractive Hubbard model. We apply this theory to a population-imbalanced gas of ${}^6\text{Li}$ atoms confined in an optical lattice at non-zero temperature.

We analyze the system with a mean-field approximation that allows us to obtain the number, gap and total momentum of Cooper pairs equations, as well as the Helmholtz free energy and the grand thermodynamic potential. With these equations we determine that in the FFLO state the magnitude of the pair momentum increases while the gap decreases, as functions of the polarization at a fixed temperature, regardless of the dimension of the system. We also calculate the phase diagram of the system, which shows the delimiting areas of the phases in the polarization vs temperature space. In 3D and quasi-1D we observe that most of the diagram is filled by the FFLO state, whereas in 2D case the areas of the Sarma state and the phase separation state are similar to the former. We note that the regions of polarization and temperature expand significantly compared to the 3D phase diagram.

Finally we calculated the energy of the collective excitations of this population-imbalanced atomic Fermi gas using a Bethe-Salpeter approach in the generalized random phase approximation at non-zero temperature. In 3D and 2D we observe the existence of two rotonlike minima (one for positive values and another one for negative values of the momentum), which implies that there is a non-zero critical flow velocity that satisfies Landau's criterion of superfluidity, and therefore, superfluidity can survive in those dimensions. In the quasi-1D case the positive side of the spectrum exhibits a rotonlike minimum too. From the curves of the collective excitations we report the critical flow velocities, the rotonic gaps and the speeds of sound in the dimensions considered.

Publicaciones

Los resultados de esta investigación se han reportado en las siguientes publicaciones:

- R. Mendoza, M. Fortes and M. A. Solís, Collective Excitations of an Imbalanced Fermion Gas in an Optical Lattice, *J. Low Temp. Phys.* DOI 10.1007/s10909-013-0926-2 (disponible en línea y próximo a publicarse en la revista) (2013). Aquí reportamos el caso cuasi-1D.
- R. Mendoza, M. Fortes, M. A. Solís, and Z. Koinov, Superfluidity of a spin-imbalanced Fermi gas in a three-dimensional optical lattice, *Phys. Rev. A* **88**, 033606 (2013).
- Z. Koinov, R. Mendoza and M. Fortes, Rotonlike Fulde-Ferrell Collective Excitations of an Imbalanced Fermi Gas in a Two-Dimensional Optical Lattice, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 100402 (2011).

Adicionalmente se ha reportado la existencia de una estructura rotónica en la energía de excitación de un par de Cooper, que ha sido originado por una interacción atractiva de alcance variable en el artículo:

- R. Mendoza, M. Fortes, M. de Llano, and M. A. Solís, One-dimensional Cooper pairing, *Physica C* **471**, 497 (2011).

Lista de símbolos

En este listado se han omitido los símbolos que sólo aparecen una vez en el texto y los que son menos recurrentes.

λ	Longitud de onda de la luz del láser que se usa para generar las redes ópticas.
a	Parámetro de la red óptica, es igual a $\lambda/2$.
a_s	Longitud de dispersión de onda s .
c	Velocidad del sonido del gas polarizado en la red óptica.
σ	Índice que denota el par de estados de espín $\sigma = \uparrow, \downarrow$.
$\hat{c}_{\sigma\mathbf{k}}$	Operador de aniquilación de un átomo con espín σ y con momento \mathbf{k} .
$\hat{c}_{\sigma\mathbf{k}}^\dagger$	Operador de creación de un átomo con espín σ y con momento \mathbf{k} .
E_R	Energía de rebote $E_R = (\hbar^2/2m)(2\pi/\lambda)^2$.
M_σ	Número de átomos con espín σ .
N	Número de sitios de la red óptica.
f	Fracción de llenado total, que es igual al número total de átomos dividido por el número de sitios de la red $f = (M_\uparrow + M_\downarrow)/N$.
f_σ	Fracción de llenado de los átomos con espín σ , que es igual al número de átomos con espín σ dividido por el número de sitios de la red, $f_\sigma = M_\sigma/N$.
$f(z)$	Función de distribución de Fermi-Dirac.
F	Energía libre de Helmholtz.
ν	Índice que denota alguna de las de tres coordenadas espaciales, $\nu = x, y, z$.
J_ν	Parámetro de Hubbard de la probabilidad de salto del sitio i al próximo vecino j en la dirección ν .
K	Función de Green de dos partículas.
P	Polarización del sistema, es equivalente a la diferencia $(f_\uparrow - f_\downarrow)/f = \frac{M_\uparrow - M_\downarrow}{M_\uparrow + M_\downarrow}$.
\mathbf{Q}	Vector del momento de las excitaciones colectivas.
Q_R	Magnitud del momento del mínimo rotónico.
\mathbf{r}_i	Vector de posición en el sitio i de la red.
s_ν	Profundidad de la red en la dirección ν en unidades de E_R .
T	Temperatura del sistema.
U	Parámetro de Hubbard de la intensidad de interacción en el sitio de la red i .
v_c	Velocidad crítica.
$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$	Función de Wannier centrada en el sitio de la red i .
β	Inverso de $k_b T$.
Δ	Parámetro de orden.
i	Número imaginario igual a $\sqrt{-1}$.
μ_σ	Potencial químico de la población con espín σ .
$\xi_\sigma(\mathbf{k})$	Energía de la población con espín σ en ausencia de interacciones.
Σ	Operador de masa.
$\hat{\psi}_{\sigma,i}$	Operador de aniquilación de un átomo con espín σ en el sitio de la red i .
$\hat{\psi}_{\sigma,i}^\dagger$	Operador de creación de un átomo con espín σ en el sitio de la red i .
$\omega(\mathbf{Q})$	Energía de las excitaciones colectivas.
ω_R	Gap rotónico, es la energía mínima para la aparición de las excitaciones rotónicas con magnitud del momento Q_R .
Ω	Gran potencial termodinámico.
$2\mathbf{q}$	Momento total del par de fermiones.

Lista de siglas

BEC	Condensación de Bose-Einstein.
BS	Bethe-Salpeter.
BSC	Bardeen-Cooper-Schrieffer.
CL	Criterio de Landau.
ELH	Energía libre de Helmholtz.
FFLO	Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov.
FLEX	Método de fluctuación-intercambio.
GRPA	Aproximación de fase aleatoria generalizada.
HF	Hartree-Fock.
HH	Hamiltoniano de Hubbard.
HST	Transformación de Hubbard-Stratonovich.
LDA	Aproximación de densidad local.
MC	Monte Carlo.
MFT	Teoría de Campo Medio.
PS	Separación de fases.
RPA	Aproximación de fase aleatoria.
SD	Schwinger-Dyson.
TG	Teorema de Goldstone.
TSPC	Dos partículas autoconsistentes.

Índice de figuras

2.1.	En esta figura se pueden apreciar el tipo de apareamiento que tiene lugar en los átomos (en 2D) como función de la polarización del sistema, en color rojo se muestra la población con espín hacia arriba, en color amarillo la de espín hacia abajo y en color azul se exhibe la región en que se traslapan las superficies de Fermi (donde proceden se encuentran los momentos de los átomos que forman los pares de Cooper). En (A) ocurre el caso de BCS. En (B) se ha originado una polarización mediante el aumento de la población de una de las especies, los pares tienen $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (los círculos son concéntricos). En (C) se ha incrementado la desigualdad de las poblaciones hasta que tiene lugar la ausencia de las superposición. Por último, en (D) exhibimos que la asignación de un momento $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ hace que las superficies vuelvan a traslaparse aunque el sistema esté polarizado. Cabe mencionar que en ninguno de los dibujos anteriores se ha mostrado las distorsiones de las superficies de Fermi, que son consecuencia de las interacciones entre los átomos del gas, ya que solamente estamos mostrando de modo cualitativo el efecto de superposición de las superficies, como producto de la asignación de un momento total distinto de cero a los pares.	20
2.2.	Redes ópticas formadas por arreglos de haces de láseres. En a) vemos una red (con un aspecto parecido a una caja de puros) en la que los átomos están confinados en tubos unidimensionales. En b) se ilustra el caso 3D, donde observamos un cristal cúbico en el que en cada sitio de la red se experimenta un fuerte potencial de oscilador armónico. Imagen tomada de la referencia [43].	24
2.3.	Potencial periódico originado por una red óptica unidimensional y estacionaria dirigida a lo largo del eje z. Un átomo puede pasar, por efecto túnel, a otro sitio de la red y a su vez, dos átomos interactúan en el mismo sitio de la red. La probabilidad de salto y el tipo e intensidad de interacción se denotan por J y U respectivamente.	25
2.4.	Sección de una red óptica bidimensional, formada por dos potenciales perpendiculares de la forma (2.4). En azul y rojo se representan al par de especies integrantes del gas de Fermi polarizado y se aprecian las vacancias en diversos sitios.	27
2.5.	Red óptica finita y cuadrada en 2D. En esta representación hay $N = 9 \times 9$ sitios, $M_{\uparrow} = 15$ ($f_{\uparrow} = 0.1852$), $M_{\downarrow} = 11$ ($f_{\downarrow} = 0.1358$), $f = 0.321$ y $P = 0.1539$, también se ilustran los parámetros de salto a los primeros vecinos J_x y J_y en las direcciones x e y , la constante de la red a y el parámetro de interacción (atractiva) U en el mismo sitio de la red entre dos fermiones con espines opuestos.	28

3.1.	Gráfico que muestra que la PS consta de un núcleo superfluido que está cubierto por una capa de fluido normal para un sistema polarizado de átomos de ${}^6\text{Li}$ confinado por trampas armónicas. En (A) se muestra fotografía (los colores son falsos y sólo ayudan a distinguir) de la población de espín mayoritaria con 8.6×10^4 átomos, en (B) se exhibe la población minoritaria de espín de 6.5×10^4 átomos, en (C) vemos la diferencia de ambas poblaciones. Este exceso de átomos compone la capa normal y polarizada que rodea al superfluido. Imagen tomada de la referencia [48].	43
3.2.	Dependencia de q_x , μ_\uparrow , μ_\downarrow y Δ de la polarización a temperatura fija $T = 10^{-4}E_R$, de átomos dispuestos en una red óptica en 3D donde $J = J_x = J_y = J_z = 0.078E_R$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0, 0)$	48
3.3.	Dependencia de q_x , μ_\uparrow , μ_\downarrow y Δ de la polarización a temperatura fija $T = 10^{-4}E_R$, de átomos colocados en una red óptica en 2D donde $J = J_x = J_y = 0.078E_R$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0)$	48
3.4.	Gráfica de q_x y Δ como función de P a $T = 10^{-4}E_R$, para el caso cuasi-1D. $J_y = J_z = 10^{-4}E_R \ll J_x = 0.078E_R$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0, 0)$	49
3.5.	Gráfica de μ_\uparrow y μ_\downarrow como función de P a $T = 10^{-4}E_R$, para el caso cuasi-1D. $J_y = J_z = 10^{-4}E_R \ll J_x = 0.078E_R$	49
3.6.	Gráfica de Δ , q_x , μ_\uparrow y μ_\downarrow como funciones de la polarización a $T = 2 \times 10^{-6}E_R$ para el caso bidimensional donde $J = J_x = J_y$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0)$	50
3.7.	Gráfica para $f = 0.704$, los valores para U , J y la temperatura son iguales a los de la Fig. 3.6.	50
3.8.	Diagrama de fases del gas de Fermi polarizado en 3D. En color amarillo representamos los estados FFLO, en azul los estados de Sarma, en rojo la PS y el estado normal en color blanco. $U/J = 2.64$, $J = 0.07 E_R$, $\lambda = 1010 \text{ nm}$ y $E_R = 1.345 \times 10^{-10} \text{ eV}$	51
3.9.	Diagrama de fases del gas de Fermi polarizado en 3D para los mismos valores de la Fig. 3.8 que han sido reportados en la referencia [22].	52
3.10.	Diagrama de fases del sistema para el caso 3D ($J = J_x = J_y = J_z$). Los parámetros utilizados son $U/J = 2.64$, $J = 0.078 E_R$ y $E_R = 1.293 \times 10^{-10} \text{ eV}$	53
3.11.	Diagrama de fases del sistema en el caso cuasi-1D. Los parámetros de salto restantes son $J_y = J_z = 10^{-4}E_R \ll J_x = 0.078E_R$	53
3.12.	Diagrama de fases del sistema en el caso 2D, donde $J_x = J_y = J$. Apreciamos que la región FFLO es más reducida que las regiones de la PS y de Sarma.	54
4.1.	Esquema del plan de nuestro tratamiento. Nótese que después de llevar a cabo una descripción del sistema utilizando una teoría MFT, regresamos al hamiltoniano del sistema con la finalidad de aplicar técnicas que nos permiten tratar los términos de cuatro operadores. Posteriormente se aplican formalismos basados en integrales funcionales, que nos permiten escribir todas las magnitudes físicas de interés en términos de funciones de Green de una (MFT) y dos partículas (excitaciones colectivas). A partir de la resolución la ecuación de BS en una GRPA, vamos a calcular el espectro de las excitaciones colectivas del sistema.	59
4.2.	Representación, en términos de diagramas, de las amplitudes de BS, las funciones de Green de una partícula, las interacciones directa y de intercambio.	65

4.3.	Representación mediante diagramas de la ecuación de BS (4.4) para la amplitud $\Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, \Omega)$. La función de Green de una partícula $G_{n_2 n_1}(\mathbf{k}, \Omega)$ se representa por dos líneas sólidas, orientadas en la dirección de propagación. En cada uno de los vértices (representados por círculos) se conservan la energía y el momento.	66
4.4.	Representación en términos de diagramas para la ecuación de BS de la amplitud $\Psi^{\downarrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$	67
4.5.	Curva de intercambio de energía ΔE para el helio líquido a 1.12 K como función de la magnitud del momento transferido Q . En esta gráfica se muestra el espectro de las excitaciones en el ^4He producidas por colisiones de neutrones lentos (con longitud de onda de 4.04 Å). También se muestra la curva de dispersión de una partícula libre (Free Particle) para efectos comparativos. Imagen tomada de la referencia [94].	75
4.6.	En (a) vemos al fluido desplazándose hacia la izquierda por un tubo visto desde el sistema de referencia del laboratorio donde el tubo está en reposo, (b) es el sistema de referencia en el que el fluido está en reposo y el tubo se mueve hacia la derecha. En (c) ocurre un proceso con disipación de la energía, que es producto de la interacción del fluido con el tubo, que crea una excitación (cuasi partícula) y en (d) regresamos al sistema de referencia del laboratorio considerando que ya existe la excitación.	77
4.7.	En esta gráfica se muestra que siempre se generan excitaciones en la partícula libre sin importar lo lento que se desplace por el interior de un tubo. Para la velocidad v_2 éstas (excitaciones) siempre se presentan y su energía correspondiente está delimitada por $0 < \omega(\mathbf{Q}) < \omega(\mathbf{Q}_2)$; a una velocidad v_1 menor, ocurre la misma situación, de manera tal que para cualquier valor de la velocidad tan cercana a cero como se desee, siempre se generarán excitaciones de baja energía en el líquido.	78
4.8.	Muestra de rectas del cociente $\omega(\mathbf{Q})/Q$, apreciamos que el mínimo de dichos cocientes se presenta alrededor del mínimo rotónico Q_R	79
4.9.	Parte positiva de la curva de las excitaciones elementales $\omega(\mathbf{Q})$ de un gas polarizado de átomos de ^6Li en 3D con $P = 0.0938831$, $f = 0.4685$ y $U/J = 2.64$; en ella se puede apreciar que para velocidades menores a la crítica el movimiento de los átomos no genera excitaciones. También se dibuja la recta que corresponde a la velocidad del sonido y se destaca el comportamiento cuadrático alrededor del mínimo rotónico.	79
4.10.	Flujo alrededor de una línea de vórtice	82
4.11.	Vórtices de una gas de átomos de ^6Li que son generados desde el lado BCS al BEC de una resonancia de Feshbach. El campo de visión de cada imagen es de $880 \mu\text{m} \times 880 \mu\text{m}$, el campo magnético va de 740 G en (a) hasta 863 G en (h). Imagen tomada de la referencia [9].	83
4.12.	Gráfica (lado positivo) de la energía de excitación en una red óptica 2D ($J = J_x = J_y$) a lo largo de la dirección $(Q_x, 0)$. Los parámetros son $J = 0.078 E_R$, $U/J = 2.64$, $f = 0.5$ y $T = 2 \times 10^{-6} E_R$. La pendiente de la curva para Q_x cercano a cero determina la velocidad del sonido $c = 10 \text{ mm/s}$, la velocidad crítica es $v_c = 1 \text{ mm/s}$	85
4.13.	Lado negativo del espectro, en este caso $c = 13.1 \text{ mm/s}$, $v_c = 7.5 \text{ mm/s}$. Es notable la asimetría que posee con respecto al lado positivo.	85

- 4.14. Energía de excitación en una red óptica 3D ($J = J_x = J_y = J_z$) a lo largo de la dirección $(Q_x, 0, 0)$. Los parámetros son $J = 0.078 E_R$, $U/J = 2.64$, $f = 0.4685$ y $T = 10^{-4} E_R$. Las velocidades del sonido son $c = 8.56$ mm/s y $c = 6.14$ mm/s para la parte negativa y positiva, respectivamente. La velocidades críticas son $v_c = 0.725$ mm/s y $v_c = 0.41$ mm/s y los mínimos rotónicos son $\omega_R = 0.0077 E_R$ y $\omega_R = 0.004 E_R$ 86
- 4.15. Parte positiva de la energía de excitación en el caso cuasi-1D ($J_x \gg J_y = J_z$) a lo largo de la dirección $(Q_x, 0, 0)$. Los parámetros son $J_x = 0.078 E_R$, $J_y = J_z = 10^{-4} E_R$, $U/J_x = 2.64$, $f = 0.4685$ y $T = 10^{-4} E_R$. La velocidades del sonido es $c = 4.92$ mm/s, la velocidad crítica es $v_c = 1.05$ mm/s y el mínimo rotónico es $\omega_R = 0.0157 E_R$ 87

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	2
Abstract	3
Publicaciones	4
Lista de símbolos	5
Lista de siglas	6
Índice de figuras	7
1. Introducción	13
2. Los conceptos fundamentales	18
2.1. Las fases FFLO	18
2.2. Gases de Fermi en redes ópticas	23
2.3. Acoplamiento entre átomos y luz	23
2.4. Las redes ópticas como una poderosa herramienta de confinamiento y control de los átomos	26
2.5. El hamiltoniano del sistema	29
2.5.1. El hamiltoniano de Bose-Hubbard	29
2.5.2. El hamiltoniano de átomos fermiónicos en redes ópticas	32
3. Análisis del gas de Fermi polarizado en una red óptica en términos de una aproximación MFT	34
3.1. El hamiltoniano de campo promedio	35
3.2. La energía libre de Helmholtz	40
3.3. La separación de fases	43
3.4. Diagramas de fases	47
3.4.1. Comportamiento de q_x en el estado FFLO	47
3.4.2. Diagramas de fases en 3D, 2D y cuasi-1D	51

4. Las excitaciones colectivas y superfluidez	57
4.1. La transformación de Hubbard-Stratonovich y la ecuación de Bethe-Salpeter . . .	63
4.2. El espectro de las excitaciones colectivas	67
4.3. El criterio de Landau de la superfluidez	75
4.3.1. Estructura rotónica de la curva de las excitaciones colectivas del gas de Fermi polarizado	76
4.3.2. Vórtices cuantizados en superfluidos	81
4.4. Superfluidez en cuasi-1D, 2D y 3D	84
 5. Conclusiones y perspectivas	 90
Apéndices	94
A. Construcción de los diagramas de fases	94
B. Cálculo computacional de la energía de las excitaciones colectivas	97
 Referencias	 117

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis vamos a examinar un sistema físico en el que se manifiestan en forma macroscópica, las propiedades microscópicas cuánticas de la materia. Esta peculiar característica se hará patente por medio del fenómeno de la superfluidez¹, que es la capacidad de un fluido de desplazarse sin resistencia, a través del medio que lo contiene. Cuando el fluido está constituido por partículas cargadas, la pérdida de la resistencia eléctrica es conocida como superconductividad.

El problema fundamental que vamos a abordar consiste en determinar si el fenómeno de la superfluidez se presenta en un sistema físico polarizado, que consta de un gas de Fermi integrado por dos poblaciones de átomos de ⁶Li, en donde a una de las poblaciones se le asigna un estado de espín hacia arriba, mientras que a la restante le corresponde un estado con espín hacia abajo y consideraremos que el número de átomos de cada especie es distinto. Este gas de fermiones será confinado y manipulado por una poderosa herramienta que se denomina red óptica (en 3D, 2D y cuasi-1D), que esencialmente es un arreglo de pares de haces de luz láser que producen un potencial periódico estacionario en el que es posible colocar a los átomos. Éste es, en términos generales, el sistema físico que estudiaremos. Sin embargo, es oportuno preguntarse qué experimentos o predicciones teóricas nos condujeron a suponer que un gas polarizado de fermiones pudiera ser un superfluido. Con la finalidad de entender el contexto en el que diversas líneas de investigación fomentaron el interés de buscar la superfluidez de gases fermiónicos polarizados, haremos una breve revisión histórica.

La importancia de la superfluidez y la superconductividad puede verse con claridad durante todo el siglo anterior y los primeros años del actual. Desde que la superconductividad fue descubierta por K. Onnes en 1911, la superfluidez por P. L. Kapitza en 1938 [1] (ambas en forma experimental) y la condensación de Bose-Einstein (BEC) fuera predicha en 1925 [2], han surgido enormes retos, tanto teóricos como experimentales, para su comprensión y explicación. Podemos mencionar como muestra, las cuatro décadas y media que transcurrieron entre el descubrimiento de la superconductividad y la formulación de la teoría de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) (1957) [3], la cual ha sido sumamente exitosa en la explicación de la superconductividad que

¹En forma curiosa, la palabra superfluidez no está registrada en el Diccionario de la Lengua Española, a diferencia de *superconductor,ra* que sí lo está (es adjetivo y sustantivo) y que significa: Material que a muy bajas temperaturas pierde su resistencia eléctrica, transformándose en conductor eléctrico perfecto. Por la estrecha cercanía entre ambos fenómenos, en esta tesis vamos a usar la palabra superfluido en el mismo sentido que la palabra superfluido, es decir, como adjetivo y sustantivo.

hoy conocemos como convencional. Un segundo ejemplo de lo anterior, lo ilustra la superconductividad de alta temperatura crítica, descubierta en 1986 por Bednorz y Müller [4], que hoy día sigue siendo un problema abierto de la Física que motiva múltiples esfuerzos para su entendimiento.

Con respecto al estudio del fenómeno de las superfluidez, podemos ver que también ha seguido un proceso intenso de generación de conocimiento, motivado en su etapa inicial, por las extraordinarias características físicas que se presentan en los experimentos realizados en los superfluidos. Por ejemplo, mencionamos el efecto sifón, en el cual un superfluido mantiene su tensión superficial, lo que le permite subir por las paredes de su contenedor sin la restricción que impone la viscosidad de un fluido normal y que está ausente en el superfluido.

En el caso de la BEC, que podemos definir como la ocupación macroscópica del estado base, el camino fue el inverso, pues el primer condensado se logró en 1995 [5] (setenta años después de su predicción) y fue el producto de un intenso y difícil proceso de manipulación de la materia a nivel atómico, en el que están involucradas técnicas de enfriamiento y confinamiento que siguen siendo un campo muy activo e importante de la Física actual; el Premio Nobel de Física 2012, otorgado por el sorprendente grado de manipulación de los átomos [6], así lo muestra. Después de la BEC en átomos bosónicos, fue natural estudiar los gases atómicos compuestos por fermiones, que poseen la dificultad adicional de seguir el principio de exclusión de Pauli. En los gases de Fermi la BEC se logra por medio de un mecanismo de apareamiento, en donde los átomos forman moléculas diatómicas cuyo espín total es cero, sufren una condensación a temperaturas bajas. Para simular tal mecanismo fue necesario emplear gases atómicos alcalinos que poseyeran dos estados hiperfinos que podían ser enfriados por debajo de su temperatura de Fermi, como el caso del ^{40}K [7]. Posteriormente, mediante el uso de las resonancias de Feshbach, se controló la intensidad y el tipo de interacción interatómica, con lo cual se tuvo acceso al análisis del comportamiento de estos sistemas tanto para valores negativos de la longitud de dispersión, en donde hay un estado de BCS de moléculas débilmente ligadas, como del positivo (BEC), de pares fuertemente ligados [7]. Este proceso posibilitó la condensación de átomos fermiónicos apareados con espín total entero y el estudio de diversos fenómenos del cruce BCS-BEC.

Durante la época en que se desarrollaron los experimentos que condujeron a la observación experimental de la BEC, D. M. Lee, D. D. Osheroff y R. C. Richardson recibieron el Premio Nobel de Física en 1996 por el descubrimiento de la superfluidez del ^3He (fermión). Las investigaciones reportadas [8] por este grupo cambiaron la idea de que la superfluidez estaba asociada al carácter bosónico del ^4He . En particular, explicaron que la superfluidez del ^3He se origina cuando la temperatura es tan baja (del orden de 2.49 mK) que los efectos térmicos no inhiben la formación de pares de átomos de ^3He que poseen espín entero, lo que ocasiona que se comporten como bosones y se manifieste la superfluidez.

El descubrimiento de la superfluidez en el ^3He muy probablemente, condujo a parte del grupo de investigación que logró el primer condensado de Bose-Einstein a indagar si ésta propiedad podía exhibirse en gases de Fermi compuestos por átomos alcalinos, utilizando el poderoso arsenal de técnicas experimentales y de conocimientos que habían adquirido previamente. Sus investigaciones han fructificado, pues han proporcionado evidencia experimental crucial sobre la existencia de la superfluidez en nubes de átomos de ^6Li confinadas por el uso de trampas

armónicas, tanto para una mezcla sin polarización [9], como para una mezcla con polarización distinta de cero [10]. Por otra parte, no debe perderse de vista el impresionante desarrollo de las redes ópticas como instrumentos de confinamiento y control de los átomos que ha tenido en los últimos años [11–15], situación que ha proporcionado enormes avances en el estudio de sistemas integrados por muchos cuerpos cuánticos.

A pesar de lo anterior, el interés de investigar la posibilidad de que la superfluidez o la superconductividad se manifieste en sistemas polarizados es de mayor antigüedad y se remonta a la década de los años sesenta del siglo XX, pocos años después de la aparición de la teoría BCS para sistemas no polarizados. En aquel tiempo, Fulde y Ferrell (FF) [16] y Larkin y Ovchinnikov (LO) [17] propusieron una generalización de la teoría BCS de la superconductividad en la que el parámetro de orden² (gap) no sólo dependía del momento total de los pares de Cooper, sino también de las coordenadas espaciales, con el objetivo de describir la superconductividad de los sistemas polarizados, en donde se apreciaba que la introducción de impurezas paramagnéticas en metales superconductores generaba un campo magnético *interno* que era capaz de destruir pares de Cooper, de manera tal que si se aumentaba el número de impurezas, se observaba que la superconductividad subsistía hasta un valor crítico del campo magnético en el que el metal se volvía uno normal.

La introducción de la polarización de los fermiones originó una nueva fase que se le denomina en forma genérica fase FFLO, las cuales consideramos que son las apropiadas para el análisis de gases de átomos fermiónicos polarizados. Cabe mencionar que en la época en que se propusieron las fases FFLO, la teoría BCS comenzaba a cosechar enormes éxitos en la explicación de la superconductividad convencional y que con el tiempo se volvería el formalismo base de muchas teorías modernas que involucran la física de los pares de Cooper. Dado que en la teoría BCS se supone que el número de fermiones con espín hacia arriba es igual al número al de aquellos con espín hacia abajo (polarización igual a cero), los estados FFLO resultó ser exótico para su tiempo.

Este panorama abre una ventana de posibilidades a nuestro equipo de investigación, el cual está sumamente interesado en la comprensión de las propiedades de los sistemas cuánticos de muchos cuerpos fuertemente correlacionados, es decir, de gases de Fermi, de Bose y una mezcla de ambos colocados en estructuras periódicas, en el que el comportamiento individual de un átomo (o molécula) está influenciado en gran medida por el resto de los átomos que lo componen. Hemos mencionado en términos generales, los importantes análisis que han llevado a la búsqueda de la superfluidez de los sistemas polarizados, sin embargo, como antecedentes inmediatos a nuestro problema podemos mencionar los trabajos pioneros publicados en [18] donde propusieron la aplicación de las fases FFLO para átomos fermiónicos-ultrafríos confinados por trampas armónicas. En la referencia [19] se mostró la evidencia de la superfluidez en átomos ultrafríos (sin polarización) en redes ópticas; en relación más estrecha con nuestra investigación, se encuentra la serie de publicaciones [15, 20–24] en donde se analiza el mismo sistema que nos interesa en 3D, 2D y en cuasi-1D; en [25] se toma en cuenta la adición de trampas armónicas adicionales a la red como un mecanismo de confinamiento.

En cuanto a la detección experimental del estado FFLO, tenemos las referencias [26–28]; sobre

²En esta investigación usaremos ambos vocablos en forma indistinta.

la superfluidez de átomos ultrafríos en redes ópticas triangulares, puede consultarse las publicaciones [28, 29], donde la primera trata con átomos de Bose y la segunda con átomos fermiónicos (de una mezcla sin polarización). En este contexto es necesario enfatizar que el propósito fundamental de nuestra investigación es analizar las propiedades de un gas polarizado de Fermi que es confinado por redes ópticas en 3D, 2D y cuasi-1D, entre las que se encuentra la superfluidez. En este aspecto, la aportación de este trabajo reside en determinar la existencia de dicha propiedad mediante la energía de las excitaciones elementales.

Considerando lo anterior, decidimos dividir la investigación reportada en esta tesis en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 hablaremos de los rasgos generales de las fases FFLO, que como hemos dicho, consideramos las fases adecuadas para el análisis de los gases polarizados ultrafríos. También vamos a exponer las características esenciales de una red óptica, que es la herramienta experimental con la que se confina y manipula al gas polarizado y que permite controlar el tipo y la intensidad de interacción así como la geometría del potencial periódico, entre otras posibilidades. Terminaremos este capítulo con la exposición del tipo de hamiltoniano de Hubbard que será apropiado para el estudio del sistema, las condiciones que deben satisfacerse para su empleo, los parámetros asociados a este hamiltoniano y la manera en cómo son modificados por la red. Este capítulo tiene la misión de hacer una descripción completa del sistema, del mecanismo que lo confina y controla y del modelo que lo describe.

En el Capítulo 2 haremos un análisis del sistema en términos de una aproximación de campo promedio (MFT) que se aplica al hamiltoniano de Hubbard (HH) atractivo que va a describir al gas fermiónico polarizado, como una primera etapa del análisis. En esta sección vamos a realizar una transformación de Bogoliubov-Valatin al HH del sistema, con el fin de obtener una forma más sencilla que nos permita extraer información física que nos permita entender al sistema. A través de la forma diagonal del hamiltoniano MFT, vamos a determinar el gran potencial termodinámico y la energía libre de Helmholtz (ELH). Mediante la minimización de la ELH obtendremos las ecuaciones de número de las dos poblaciones, del parámetro de orden y del momento total de los pares de Cooper. Observaremos que el comportamiento del momento de los pares y el gap, en la fase FFLO, es universal (ya que no depende de la dimensión del sistema), considerándolos como funciones de la polarización a temperatura fija. En esta parte vamos a construir los diversos diagramas de fases del sistema en 3D, 2D y cuasi-1D, con el objetivo de apreciar la forma en la que el cambio de dimensión afecta las propiedades del sistema. Mediante los diagramas de fases distinguiremos las regiones de temperatura y polarización en las que se presentan las diversas fases del sistema, que son: FFLO, de Sarma y la separación de fases (PS), cuyo significado explicaremos más adelante. En particular, apreciaremos que el área ocupada por las fases del sistema (FFLO, PS y de Sarma) en cuasi-1D es mucho mayor que en el área del caso en 3D, lo que significa que las regiones de polarización y de temperatura en las que pueden detectarse experimentalmente las fases del sistema, aumentan notablemente. También veremos que los diagramas son muy susceptibles, tanto a pequeños cambios en los parámetros de Hubbard, como al cambio del número total de fermiones que yacen en la red.

El Capítulo 3 está centrado en el estudio de las excitaciones colectivas del sistema. A manera de introducción, comenzaremos con una descripción de los aspectos físicos del formalismo por el cual puede obtenerse este espectro, que proviene de la interacción de la luz con la materia en los materiales semiconductores [30]. Posteriormente veremos que es posible obtener la energía de las excitaciones colectivas por medio de la ecuación de Bethe-Salpeter (BS) en una aproximación

de fase aleatoria generalizada (GRPA). Destacaremos que a partir de la energía de las excitaciones colectivas puede determinarse si la condición de superfluido es propia de nuestro gas polarizado, además calcularemos la velocidad del sonido y la velocidad crítica, que son parámetros que pueden comprobarse experimentalmente. Finalmente, el Capítulo 4 está dedicado a las conclusiones y perspectivas de esta investigación. En los apéndices se describen los algoritmos computacionales que fueron seguidos para la resolución numérica de las ecuaciones de esta tesis.

Capítulo 2

Los conceptos fundamentales

En este capítulo daremos los elementos esenciales que nos ayudarán a tener una idea clara del tipo de gas de fermiones que analizaremos, de la utilidad de las redes ópticas como herramienta de control y manipulación de los átomos, y del tipo de hamiltoniano que emplearemos en el estudio. Iniciaremos con una revisión de los experimentos y las preguntas que motivaron la introducción de las fases FFLO para el estudio de los sistemas polarizados, subrayaremos su relevancia para nuestro análisis teórico y enfatizaremos la importancia que tiene la dependencia del gap de las coordenadas y del momento de los pares de fermiones.

Después haremos una inspección general de las redes ópticas, cuya aplicación y refinamiento son campos de gran actividad actualmente. Describiremos la manera en la que son generadas, el tipo de redes que se pueden construirse experimentalmente y la gran utilidad que posee como mecanismo de control y confinamiento de gases atómicos polarizados de Fermi y de Bose. Cerraremos este capítulo analizando la forma del hamiltoniano de Hubbard tanto para bosones como para fermiones, en el contexto de las redes ópticas, y las condiciones físicas que deben ser satisfechas para su aplicación. Insistiremos en la enorme ventaja que representa que los parámetros del hamiltoniano sean controlados y manipulados por medio de la red óptica.

2.1. Las fases FFLO

La fenomenología de los superconductores convencionales mostraba que el estado superconductor permanecía a pesar del aumento del campo magnético *externo* aplicado (desde cero) a temperatura fija, hasta que finalmente se destruía la superconductividad y el material se convertía en un metal normal, cuando el campo magnético excedía un valor crítico que dependía de la temperatura. Sin embargo, menos de una década después del establecimiento de la teoría BCS, se halló otro tipo de mecanismo sustancialmente distinto que era capaz de deshacer el estado superconductor por medio de campos magnéticos *internos*, que consistía en la inserción de impurezas en el material que introducían campos magnéticos de intercambio, es decir, campos magnéticos que tienden a alinear en forma paralela los momentos magnéticos de los fermiones de los pares de Cooper. La presencia de las impurezas generaba fases totalmente

diferentes a las de la teoría BCS (pensada para sistemas no polarizados) que derivaron en la búsqueda de modelos teóricos para resolver los nuevos planteamientos. En este contexto surgen las fases FFLO, en las que el parámetro de orden fue generalizado (depende de la posición y el momento total del par de Cooper) con el objetivo de introducir los efectos de la polarización.

El caso de un gas de Fermi compuesto de una mezcla polarizada, fue estudiado por primera ocasión por FF [16] quienes abordaron el problema en el cual un campo de intercambio fuerte, actuaba sobre los espines de los electrones en un superconductor, y que al hacerlo cambiaban sus propiedades. Dicho campo era originado por el alineamiento ferromagnético de impurezas (diluidas) colocadas en el metal superconductor, que ocasionaban la polarización de los espines de los electrones de integrantes de los pares de Cooper. Si el campo era lo suficientemente intenso como para romper muchos pares de electrones, entonces la ecuación de gap autoconsistente cambiaba significativamente y tenía lugar un estado que se veía modificado por los electrones no apareados, con inusuales características que dependían de la magnitud del campo de intercambio. Si se incrementaba este último, el aumento de la desintegración de los pares de Cooper causaba la transición del sistema, entre el estado BCS y el estado normal, en forma continua.

Con el objetivo de estudiar la ecuación del gap y las ecuaciones que describen el apareamiento, teniendo presente la coexistencia de pares de Cooper junto con electrones no apareados, FF propusieron un estado significativamente diferente del estado base superconductor de la teoría BCS. En cuanto al gap de energía, supusieron que existía una dependencia tanto del momento del par de los electrones que formaban los pares de Cooper, como de las coordenadas espaciales. En cuanto al momento del par, señalaron que era necesario considerar que el caso en que dicha magnitud fuese diferente de cero (recuérdese que en la teoría BCS se anula).

La introducción de esta propuesta tenía la finalidad de seguir manteniendo traslapadas a las superficies de Fermi de los electrones que formaban los pares de Cooper, debido a que cuando el número de fermiones de una especie dominaba sobre la otra, las superficies de Fermi dejaban de superponerse si se mantenían pares con momento nulo. Esta idea puede asimilarse mediante la inspección de la Fig. 2.1 y vale la pena detenerse a entenderla, en (A) tenemos el caso BCS, en donde el número de átomos con espín hacia arriba es el mismo que el número de átomos con espín hacia abajo, además el momento total de cada par de Cooper es igual a cero, la polarización en este caso P_A es igual a cero y la superposición de las superficies de Fermi es máxima (región azul). En (B) tiene lugar un aumento de la población de una de las especies que integra el gas de fermiones, por lo que la energía de Fermi de esa especie aumenta, lo que ocasiona que la polarización en este caso sea diferente de cero ($P_B \neq 0$). Observamos que a pesar de esto se traslapan las superficies de Fermi y no es necesario considerar que los pares tengan un momento distinto de cero. En (C), la polarización es mayor que en (B) $P_C > P_B$ y notamos que ya no hay una superposición de las superficies de Fermi. En (D) se tiene la misma polarización que en (C) $P_C = P_D$ y apreciamos que se forman pares de átomos fermiónicos siempre y cuando su momento sea diferente de cero. En particular, un átomo con momento $\mathbf{k}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{k}$ y espín hacia arriba se une con otro átomo con momento $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{k}$ con espín hacia abajo para formar un par con momento total igual a $2\mathbf{q}$. En este caso todos los momentos de los pares que forman parte del gas tienen este último valor.

Con el análisis anterior, se entiende por qué es necesario suponer que los momentos de los pares de fermiones deben ser diferentes de cero, para el caso de un gas de Fermi polarizado. Ahora

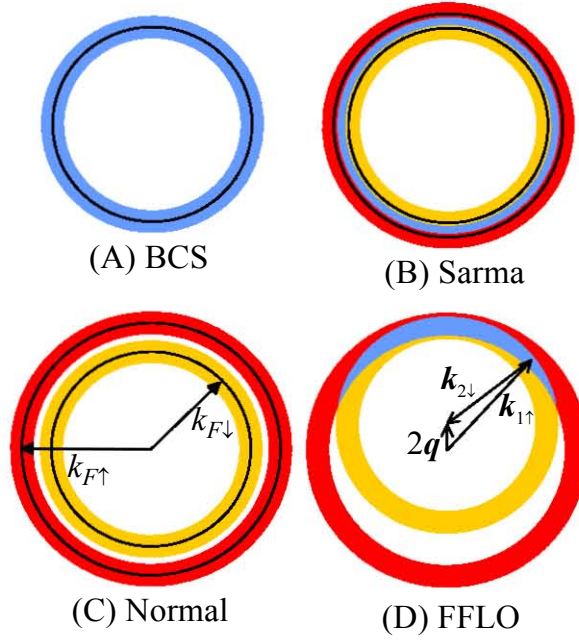


Figura 2.1: En esta figura se pueden apreciar el tipo de apareamiento que tiene lugar en los átomos (en 2D) como función de la polarización del sistema, en color rojo se muestra la población con espín hacia arriba, en color amarillo la de espín hacia abajo y en color azul se exhibe la región en que se traslapan las superficies de Fermi (donde proceden se encuentran los momentos de los átomos que forman los pares de Cooper). En (A) ocurre el caso de BCS. En (B) se ha originado una polarización mediante el aumento de la población de una de las especies, los pares tienen $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (los círculos son concéntricos). En (C) se ha incrementado la desigualdad de las poblaciones hasta que tiene lugar la ausencia de las superposiciones. Por último, en (D) exhibimos que la asignación de un momento $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ hace que las superficies vuelvan a traslaparse aunque el sistema esté polarizado. Cabe mencionar que en ninguno de los dibujos anteriores se ha mostrado las distorsiones de las superficies de Fermi, que son consecuencia de las interacciones entre los átomos del gas, ya que solamente estamos mostrando de modo cualitativo el efecto de superposición de las superficies, como producto de la asignación de un momento total distinto de cero a los pares.

revisaremos la dependencia espacial que es tomada en cuenta en la forma del parámetro de orden del estado FFLO.

Durante el estudio de FF, de manera simultánea e independiente, LO [17] estudiaban el mismo tipo de sistemas (metales débilmente ferromagnéticos en los que el número de electrones con espín opuesto era desigual) y también se dieron cuenta que además de la dependencia del momento de los pares, el gap dependía de las coordenadas (al igual que FF), en particular del vector de coordenadas relativo del par. La causa física de esta dependencia podía intuirse, ya que el campo magnético de intercambio introduce inhomogeneidades que causan esta dependencia espacial en el interior del superconductor. En términos más precisos, calcularon que el gap de las ecuaciones de Gorkov [17], a partir de las cuales se deduce la función de Green de los electrones, era una función periódica de las coordenadas. En particular, FF determinaron que el gap tenía una dependencia espacial que variaba como una onda plana, mientras que LO encontraron que una superposición de dos de ellas también era una solución para el gap del sistema polarizado.

En particular, en el estado FFLO¹, el par de Cooper está formado por un fermión con momento $\mathbf{q} + \mathbf{k}$ y espín \uparrow y un fermión con momento $\mathbf{q} - \mathbf{k}$ y espín \downarrow , de suerte que el momento total es $2\mathbf{q}$ y el parámetro de orden tiene una dependencia espacial con la forma²

$$\Delta_{\mathbf{q}} = \Delta \exp(2i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.1)$$

donde Δ (función dependiente de la temperatura), es el gap de energía de la teoría BCS convencional y \mathbf{r} es el vector de las coordenadas relativas, que es la diferencia entre los vectores de posición de los electrones que componen el par de Cooper. Así las cosas, se propuso que este mecanismo nuevo y exótico (para su tiempo) podía describir la superconductividad de los sistemas polarizados. Conviene comentar que aunque dichas generalizaciones del gap de energía fueron realizadas durante la década de los sesenta del siglo anterior, las fases FFLO siguen captando la atención de investigadores porque la pregunta acerca de la condición de superfluido o de superconductor de los sistemas polarizados sigue sin respuesta, aún cuando es fundamental para diversos sistemas, en los campos de la materia condensada [31–33] y la física nuclear y de altas energías [34, 35]. Sin embargo, las fases FFLO se han caracterizado por ser considerablemente difíciles de detectar [35, 36], pese a los enormes esfuerzos teórico-experimentales realizados para su observación experimental. Para ilustrar esto podemos comentar que según diversos análisis, se ha encontrado que el caso tridimensional tiene la dificultad extra de poseer un espacio de fases menor que el caso unidimensional [22, 26, 36–39], y por ello no resulta difícil entender que esta línea de búsqueda permanezca activa, aunque de hecho, los avances recientes han revelado mayor y más convincente evidencia experimental de las fases FFLO [26, 27].

Por otro lado, el tratamiento de campo promedio de los estados FFLO muestra una competencia en términos energéticos entre éstos y los estados polarizados con $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ llamados estados de Sarma³ [41]. Esta situación puede intuirse desde ahora y en ella intervienen dos factores clave: la polarización y la temperatura. La primera se aprecia partiendo de la Fig. 2.1, donde advertimos que pueden existir pares con momento total nulo, si la polarización es baja. Si la temperatura es distinta de cero, entonces hay energía térmica disponible que es susceptible de ser utilizada para la formación de pares cuyo momento no sea nulo, cuyo costo energético es mayor que los pares con momento igual a cero [36]. Por estas razones, no es inmediato determinar qué fase es más favorable que otra.

Además, en la competencia entre la fase FFLO y de Sarma, se agregará una fase denominada *Separación de fases*, que se define como una mezcla *inhomogénea* compuesta por dos partes, una normal que lleva toda la polarización del sistema, y otra superfluida [42]. Los detalles de la competencia entre estas fases se discutirán en el siguiente capítulo, por el momento basta con aclarar que se precisarán las regiones en las que un estado domina sobre el otro, teniendo como criterio (disponiendo de las expresiones de campo promedio) la minimización de la energía libre de Helmholtz.

¹Estrictamente hablando trataremos un estado FF, pues solamente tomamos en cuenta una onda plana, en el estado LO se considera una superposición de éstas, sin embargo, en las publicaciones actuales del tema se les denomina fases FFLO en forma genérica.

²A partir de este punto $i = \sqrt{-1}$.

³Esta fase también se denomina BP (breached phase superfluid phase) [20] y se define como una fase compuesta de una mezcla *homogénea* formada por un fluido normal y un superfluido [33, 40]. Con esta definición, no haremos distinción entre la fase de Sarma y la BP.

Por lo anterior, es de gran importancia calcular el diagrama de fases del sistema que estudiamos [20], ya que con esta información podríamos ubicar los valores de los parámetros que permiten la observación experimental de los estados FFLO, de Sarma y la separación de fases. En el capítulo destinado a la descripción del sistema en términos de una aproximación MFT, examinaremos la manera de calcular dicho diagrama en cuasi una, dos y tres dimensiones, compararemos la energía de las diversas fases y analizaremos la dependencia del gap, los potenciales químicos de cada especie y el momento de los pares, con respecto a la polarización.

2.2. Gases de Fermi en redes ópticas

Actualmente es posible colocar gases cuánticos (bosónicos, fermiónicos y una mezcla de ambos) en cristales artificiales de luz, generados por la interferencia de haces de láseres ópticos. Los arreglos así formados son llamados *redes ópticas* y el estudio de tales sistemas es por sí mismo un campo fecundo en la Física actual. En particular, las redes ópticas proporcionan una poderosa herramienta para el análisis de las propiedades de los sistemas compuestos de muchos cuerpos cuánticos que se encuentran en estructuras periódicas. Mediante el uso de redes ópticas podemos observar fenómenos de dinámica cuántica no lineal, fases cuánticas fuertemente correlacionadas u observar las superficies de Fermi de diversos sistemas en potenciales periódicos [43]. En otras palabras, en lugar de utilizar un cristal en donde los átomos pueden colocarse en potenciales periódicos que son resultado de interacciones atómicas, podemos emplear una red óptica en la cual la disposición de los átomos es resultado de la interacción entre éstos y una onda estacionaria óptica.

Las redes ópticas son potenciales periódicos creados con dos haces láser contrapuestos con la misma frecuencia, la interferencia entre los láseres forma una onda estacionaria óptica con una constante de la red $a = \lambda/2$ (λ es la longitud de onda del láser) en la que pueden depositarse los átomos. El número de pares de láseres determina la dimensión del potencial periódico [11]; dos láseres contrapuestos (red óptica unidimensional) generan un patrón de interferencia estacionario, dos pares de haces contrapuestos ortogonales generan tubos unidimensionales en los cuales los átomos pueden moverse a lo largo de una dimensión. Finalmente, con tres pares de haces se construye un cristal cúbico 3D, como puede verse en la Fig. 2.2. En todos los casos, se pueden colocar a los átomos en los mínimos del potencial y de este modo se contará con un sistema en el que sus componentes están experimentando un potencial periódico⁴. A continuación examinaremos con mayor exactitud los motivos que hacen que se elijan a las redes ópticas como herramientas de control y manipulación de los átomos.

2.3. Acoplamiento entre átomos y luz

En esta sección examinaremos la interacción entre los láseres que originan la red óptica y los átomos del gas de fermiones. Un láser de longitud de onda λ emite fotones con energía $\hbar ck$ con $k = 2\pi/\lambda$. Aunque los fotones son entidades mecánico-cuánticas, tanto el haz de luz láser como su correspondiente campo electromagnético pueden ser tratados con mecánica clásica [44, 45], como una primera aproximación que para los fines de esta tesis es suficiente⁵. El campo eléctrico de una onda plana que se desplaza a la derecha (izquierda) del eje z está dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{E_0}{2} \cos(\pm kz - \omega t) \hat{k} \quad (2.2)$$

⁴Más adelante veremos que estos mínimos pueden aproximarse por un potencial de oscilador armónico alrededor de esas posiciones.

⁵El tratamiento extenso y riguroso del acoplamiento puede consultarse en los textos [44, 45].

donde $\omega = ck$ y \hat{k} es el vector unitario en la dirección del eje z . La polarización⁶ eléctrica se denota por E_0 y se supone constante, lo que implica que estamos usando luz láser linealmente polarizada. Si colocamos un par de haces contrapuestos que tengan la misma longitud de onda, crearemos una onda estacionaria unidimensional que actúa como un potencial periódico capaz de confinar a los átomos, a este tipo de arreglo se le conoce como *red óptica*. Asumiendo que los dos haces de luz láser tiene la misma polarización lineal, el campo eléctrico que resulta de sumar los campos eléctricos individuales es

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{x}, t) = E_0 \cos kz \cos \omega t \hat{k} \quad (2.3)$$

Es inmediato generalizar esta breve discusión a dos y tres dimensiones, mediante otro par de láseres contrapuestos (con las mismas características del campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ citadas previamente), si adicionamos un par en la dirección x , haremos una red en el plano $x - z$ tal que los átomos restringen su movimiento en tubos que se desplazan a lo largo del eje y (ver Fig. 2.2 (a)). Si añadimos otro par de haces en la dirección y obtenemos la red tridimensional mostrada en la Fig. 2.2 (b).

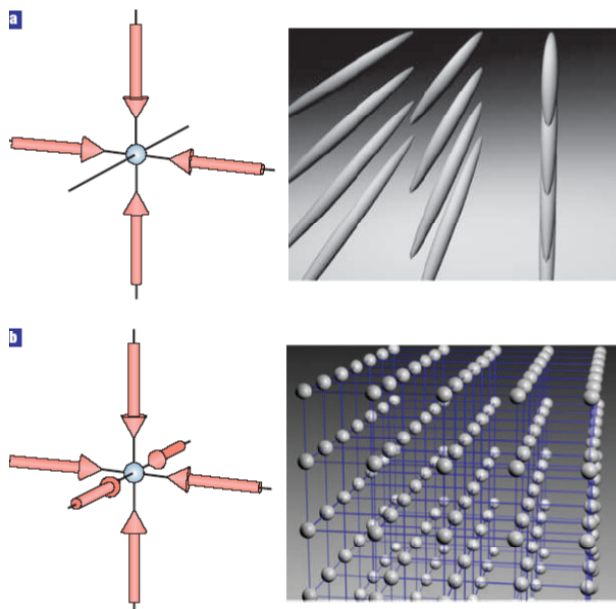


Figura 2.2: Redes ópticas formadas por arreglos de haces de láseres. En a) vemos una red (con un aspecto parecido a una caja de puros) en la que los átomos están confinados en tubos unidimensionales. En b) se ilustra el caso 3D, donde observamos un cristal cúbico en el que en cada sitio de la red se experimenta un fuerte potencial de oscilador armónico. Imagen tomada de la referencia [43].

Por otra parte, los átomos alcalinos que vamos a depositar en la red óptica se acoplan al campo electromagnético (externo) de los láseres a causa del efecto Stark [44, 45], debido a la inducción de un momento dipolar eléctrico en los átomos. Este momento está dado por $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \alpha(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, con $\alpha(\omega)$ la polarizabilidad del átomo que depende, en general, de la frecuencia

⁶Esta es una polarización eléctrica y no debe confundirse con el concepto de polarización que será empleado más adelante, que se refiere a las poblaciones desiguales de los átomos del gas.

del campo eléctrico. El potencial resultante en la dirección del eje z de este acoplamiento, que ahora tiene una longitud de onda $\lambda/2$, es [43–45]:

$$V^{ex}(\mathbf{x}) = -\mathbf{d}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\alpha(\omega)\mathbf{E}^2(\mathbf{x}) = V_0 \cos^2 kz \quad (2.4)$$

donde $V_0 = -\alpha(\omega)E_0^2/4$. Este potencial estacionario (que resulta de sumar dos ondas que se mueven en sentido contrario) puede ser repulsivo o atractivo, es función de la polarizabilidad que a su vez, depende la frecuencia del láser que se usa. De esta manera, el arreglo de láseres descrito con anterioridad, puede proporcionarnos un potencial estacionario con la que podemos atrapar y manipular a los átomos. La apariencia del potencial de la red⁷ se muestra en la Fig. 2.3, en los mínimos de este potencial se colocan los átomos y por esta causa las redes ópticas pueden ser consideradas como cristales de luz. Anticipamos que existen dos parámetros íntimamente asociados al movimiento de los átomos: el parámetro de salto J , que está relacionado con el efecto túnel que ocurre cuando un átomo pasa de un mínimo de la red a otro, y el parámetro de interacción U en el mismo sitio de la red. En la siguiente sección trataremos en forma más detallada estos parámetros (veremos la dependencia explícita de estos parámetros como función de la profundidad de los pozos), por el momento sólo basta reconocerlos en forma intuitiva.

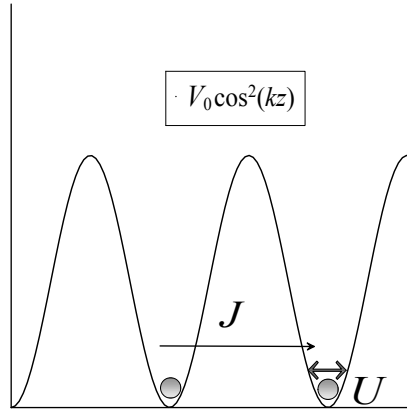


Figura 2.3: Potencial periódico originado por una red óptica unidimensional y estacionaria dirigida a lo largo del eje z . Un átomo puede pasar, por efecto túnel, a otro sitio de la red y a su vez, dos átomos interactúan en el mismo sitio de la red. La probabilidad de salto y el tipo e intensidad de interacción se denotan por J y U respectivamente.

Terminaremos esta parte haciendo un comentario relevante sobre el potencial (2.4), las redes ópticas profundas permiten trabajar en el límite de amarre fuerte, en el cual las interacciones entre los átomos y los saltos de los mismos tiene lugar entre los primeros vecinos de la red. Físicamente esto significa que los átomos están bien localizados en los mínimos del potencial y esto representa una condición fundamental de la descripción, no obstante (como lo advertimos anteriormente), la profundidad debe permitir que la probabilidad de salto de un sitio a otro de la red no se anule. Otra consecuencia del uso de redes ópticas profundas reside en que podemos aproximar el potencial de la red (2.4) alrededor de los mínimos, por un potencial de oscilador armónico [45].

⁷En la figura se ha omitido el efecto de un potencial armónico residual que proviene del haz (gaussiano) del láser que distorsiona la forma del potencial dado por (2.4) que no tiene efectos físicos sobre el sistema [12, 14, 43].

2.4. Las redes ópticas como una poderosa herramienta de confinamiento y control de los átomos

Otra serie de características favorables e importantes de la utilización de las redes ópticas es que la geometría y la profundidad del potencial están bajo control total del experimentador. La topología de los potenciales que atrapan a los átomos puede ser cambiada si causamos interferencia entre haces con un ángulo diferente a 180° , lo cual permite crear redes triangulares o arreglos más complejos [46], en los que hay un enorme interés [28, 29]. La separación entre los mínimos de la red cambia si modificamos la longitud de onda de la red y la profundidad del potencial óptico puede variarse simplemente cambiando la intensidad del láser.

También podemos modificar el carácter estacionario de las redes, hemos visto que aquellas formadas con pares de haces de láseres contrapuestos que poseen la misma frecuencia se les denomina redes ópticas estacionarias. Si se ocupan pares de haces con distinta frecuencia, entonces la red ya no es estacionaria y se denomina *red óptica móvil*, en este caso la red se diseña para desplazarse con una cierta velocidad \mathbf{v} y esta característica afecta las propiedades de los gases que se colocan en ella. Por ejemplo, si colocamos un gas de átomos de ^6Li compuesto por una mezcla binaria (con espines opuestos) *equilibrada* en una red óptica móvil, tanto en 1D como en 2D, resulta que el estado superfluido es *inestable*, ya que el movimiento de la red puede, por un lado, destruir la superfluidez del sistema, debido a que la energía de las excitaciones colectivas se anula [47] para un valor del momento de las excitaciones colectivas distinto de cero, y por otro parte, ocasiona que el espectro de las excitaciones colectivas sea *asimétrico*. Este hecho revela la influencia que puede tener la red óptica sobre las propiedades físicas del gas, sin embargo, a lo largo de la tesis examinaremos las propiedades de gases de fermiones polarizados solamente en redes estacionarias en cuasi-1D, dos y tres dimensiones y nos referiremos a ellas como redes ópticas simplemente.

Todas las ventajas que hemos descrito son un traje a la medida del sistema que estudiamos; la facilidad para manipular la profundidad del potencial que atrapa a los átomos toma una importancia capital, porque nos permite suponer que la profundidad del potencial de confinamiento es suficiente para validar una aproximación de amarre fuerte y, por lo tanto, poder usar una expresión simplificada del modelo de Hubbard, que es la base de nuestra descripción teórica. Es necesario aclarar que la profundidad debe permitir que la probabilidad de salto de un átomo de un sitio a otro de la red sea diferente de cero, si la profundidad del potencial es muy grande la movilidad de los átomos desaparece y el sistema se comportará como un aislante. Además debe cumplirse que la red no debe estar completamente llena, pues la naturaleza fermiónica (el principio de exclusión de Pauli) limita enormemente el movimiento de los átomos, puesto que se impediría el salto de alguno de ellos a cualquier otro sitio de la red, porque estaría ocupado por otro átomo con el mismo espín.

Existen otras características de las redes ópticas que vale la pena citar, aún en forma compendiosa. Por ejemplo, sabemos que las redes son rígidas y prácticamente perfectas [13, 14], en el sentido de carecer de fonones, y que se pueden combinar con otro tipo de herramientas de confinamiento, como son las trampas armónicas. Por otra parte, las temperaturas típicas de las redes están en el orden de los nanokelvin [13, 26] y es posible llegar más abajo si se usan

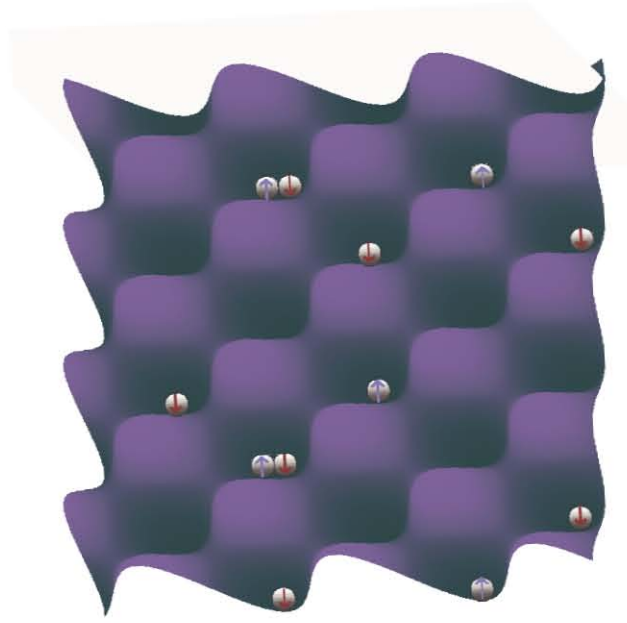


Figura 2.4: Sección de una red óptica bidimensional, formada por dos potenciales perpendiculares de la forma (2.4). En azul y rojo se representan al par de especies integrantes del gas de Fermi polarizado y se aprecian las vacancias en diversos sitios.

técnicas de evaporación de átomos. Además de esto, las escalas de tiempo de las redes, que son del orden de milisegundos, permiten estudiar en tiempo real diversos fenómenos que son inaccesibles en los sistemas clásicos de la materia condensada, que podrían ser el cambio de la geometría del confinamiento y de los efectos que esto produce sobre las propiedades del sistema, por citar alguno de ellos.

Para terminar esta parte, en la que discutimos las condiciones favorables del empleo de las redes ópticas como herramientas de control y confinamiento, manifestamos que en el sistema que investigamos no se ha considerado el uso de una trampa adicional a la red como instrumento de confinamiento. No obstante, en numerosos e importantes estudios teóricos como experimentales [11, 12, 25, 26, 37, 48] se toma en cuenta la agregación de trampas adicionales que tienen la finalidad de evitar que los átomos se escapen de la red óptica. Una de las consecuencias del uso de trampas adicionales es la dependencia en las coordenadas de los potenciales químicos de cada población, a saber

$$\mu_\sigma(r) = \mu_\sigma - V(r) \quad (2.5)$$

donde r es la distancia al origen de la trampa armónica, $V(r)$ es el potencial externo adicional a la red (que puede ser armónico) y μ_σ es el potencial químico en ausencia del potencial externo (que calcularemos en esta investigación). Esta forma de los potenciales químicos es conocida como aproximación de densidad local [12] (LDA en inglés) y físicamente es muy diferente a la que será analizada en el sistema, ya que nosotros hemos supuesto que dichas magnitudes no dependen de las coordenadas. El principal motivo que condujo a no considerar la existencia de una trampa adicional es la sencillez en el análisis del sistema, como observaremos más adelante, la inclusión del potencial de dicha trampa complicaría enormemente las ecuaciones que describen al sistema. Hacemos esta aclaración con la intención de que el lector tenga presente los límites de nuestra descripción, así como la LDA cuando consulte las referencias de investi-

gaciones relacionadas con esta tesis.

Las fracciones de llenado

Ahora que hemos mostrado la enorme utilidad que nos proporcionan las redes ópticas como mecanismo de control y manipulación, vamos a mencionar las fracciones que están relacionadas con la polarización de nuestro gas y el número de átomos que serán confinados por la red. Consideraremos un gas de M átomos fermiónicos, de los cuales hay M_\uparrow fermiones con espín hacia arriba y M_\downarrow fermiones con espín hacia abajo, que son colocados en N sitios y se cumple que $N \geq M_{\uparrow,\downarrow}$. Las fracciones de llenado son $f_{\uparrow,\downarrow} = M_{\uparrow,\downarrow}/N$, el factor de llenado total es $f = f_\uparrow + f_\downarrow$ ($0 \leq f \leq 2$) y la polarización por $P = (f_\uparrow - f_\downarrow)/f$ ($0 \leq P \leq 1$). Esta última relación define con claridad el concepto de polarización que manejamos en esta tesis. La Fig. 2.4 ilustra una red bidimensional generada por dos pares de láseres (Ec. (2.4)) y en la Fig. 2.5 mostramos (con intenciones ilustrativas ya que usaremos redes infinitas que nos permiten ignorar efectos de borde que se presentan en redes finitas) una instantánea de una red cuadrada y bidimensional.

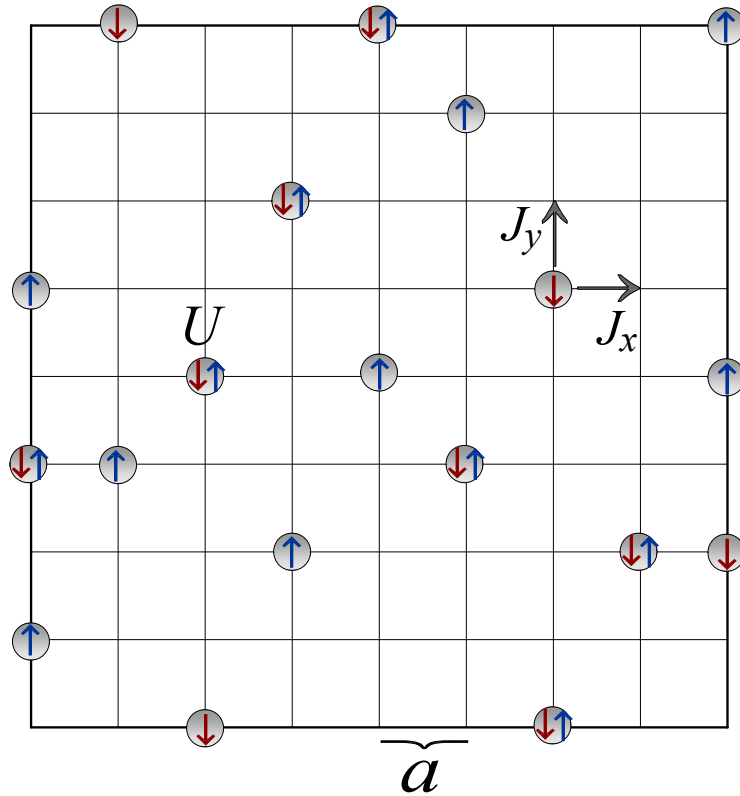


Figura 2.5: Red óptica finita y cuadrada en 2D. En esta representación hay $N = 9 \times 9$ sitios, $M_\uparrow = 15$ ($f_\uparrow = 0.1852$), $M_\downarrow = 11$ ($f_\downarrow = 0.1358$), $f = 0.321$ y $P = 0.1539$, también se ilustran los parámetros de salto a los primeros vecinos J_x y J_y en las direcciones x e y , la constante de la red a y el parámetro de interacción (atractiva) U en el mismo sitio de la red entre dos fermiones con espines opuestos.

2.5. El hamiltoniano del sistema

En las secciones precedentes se ha hecho una descripción del sistema que estudiaremos, que consiste en un gas de fermiones polarizado con interacciones atractivas entre los átomos en un mismo sitio de la red, que es confinado por medio de una red óptica estacionaria creada por haces de luz láser; ahora nos concentraremos en la descripción del HH [49], que será el modelo con el que estudiaremos al sistema. Este hamiltoniano es bien conocido en la física de la materia condensada⁸ y ha sido usado para la descripción de las propiedades de sistemas de muchos cuerpos cuánticos correlacionados. Esto se debe a que dicho modelo de Hubbard toma en cuenta la posibilidad de que las partículas pasen de un sitio a otro del sistema y la interacción entre las partículas del sistema. Esta interacción (atractiva o repulsiva) es fundamental en el estudio de los sistemas correlacionados, pues las partículas que integran los sistemas de muchos cuerpos no se mueven de forma independiente. Considerando lo anterior, en la tesis utilizaremos el HH suponiendo que las interacciones entre las partículas se dan entre los átomos del mismo sitio y que los saltos ocurren entre los sitios de la red más cercanos.

2.5.1. El hamiltoniano de Bose-Hubbard

Dado que también existe un gran interés en el estudio de los átomos bosónicos [12, 43, 51] en redes, a continuación vamos a examinar la manera en la que surge el hamiltoniano de Hubbard para este tipo de átomos. El procedimiento que examinaremos es muy ilustrativo y sirve de antecedente para la discusión del hamiltoniano de los átomos fermiónicos, que es el caso que abordaremos en la tesis.

La acción, en un formalismo de tiempo imaginario ($\tau \rightarrow it$), que describe un gas de átomos bosónicos diluido que interactúan por pares a través del potencial $V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, y sujetos al potencial externo $V^{ext}(\mathbf{x})$ producido por una red óptica, está dada por [45, 50]

$$S[\hat{\Psi}^\dagger, \hat{\Psi}] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, \tau) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V^{ex}(\mathbf{x}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, \tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, \tau) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', \tau) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\Psi}(\mathbf{x}', \tau) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, \tau), \quad (2.6)$$

aquí $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, \tau)$ y $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, \tau)$ son los operadores de campo de creación y aniquilación. El potencial externo de una red óptica (isotrópica) está dado por

$$V^{ex}(\mathbf{x}) = \sum_{\nu} V_0 \cos^2(kx_{\nu}) \quad (2.7)$$

⁸En el libro [50] puede profundizarse en las aplicaciones del modelo de Hubbard en el ámbito de la materia condensada desde un enfoque moderno.

donde λ es la longitud de onda del láser, $k = 2\pi/\lambda$ y $\nu = x, y, z$ ⁹. Hacemos esta discusión en 3D, pero los resultados que obtendremos pueden aplicarse al caso bidimensional. Usaremos las funciones de onda de Wannier para expandir los operadores de campo

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{\mathbf{n}, i} \widehat{\psi}_{\mathbf{n}, i}(\tau) w_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.8)$$

donde los operadores de la expansión $\widehat{\psi}_{\mathbf{n}, i}^\dagger$ y $\widehat{\psi}_{\mathbf{n}, i}$ son de creación y aniquilación de un átomo en el estado de Wannier \mathbf{n} en el sitio i y satisfacen las reglas de conmutación usuales de operadores de Bose. La función de Wannier $w_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ está centrada en el sitio i de la red óptica. A temperaturas bajas y para energías de interacción pequeñas, los átomos ocupan solamente el nivel de energía más bajo $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ de la red. En la forma de la expansión de la Ec. (2.8) se toma en consideración que estamos en un régimen de amarre fuerte, el cual nos permite garantizar que los átomos están bien localizados en los mínimos del potencial (2.7) [50, 51, 53]. Sustituyendo (2.8) en (2.6) para $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, nos queda

$$\begin{aligned} S[\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}] &= \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \sum_{ij} \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \widehat{\psi}_j(\tau) \int d\mathbf{x} w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \right. \\ &+ \sum_{ij} \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) \widehat{\psi}_j(\tau) \int d\mathbf{x} w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V^{ex}(\mathbf{x}) - \mu \right) w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{ii'jj'} \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) \widehat{\psi}_{i'}^\dagger(\tau) \widehat{\psi}_j(\tau) \widehat{\psi}_{j'}(\tau) \right. \\ &\times \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) w_0^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{i'}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') w_0(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j) w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j'}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Expresión que nos permite escribir la acción en una forma más compacta

$$S[\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}] = S_0[\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}] + S_{int}[\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}] \quad (2.11)$$

donde explícitamente la acción libre queda

$$S_0[\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}] = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left\{ \sum_i \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon_i - \mu \right) \widehat{\psi}_i(\tau) - \sum_{i \neq j} \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) J_{ij} \widehat{\psi}_j(\tau) \right\}, \quad (2.12)$$

y donde hemos usado que las funciones de Wannier son ortonormales en la misma banda

$$\int d\mathbf{x} w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}.$$

También hemos introducido la energía del mismo sitio

$$\varepsilon_i \equiv \int d\mathbf{x} w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V^{ex}(\mathbf{x}) \right) w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (2.13)$$

y el parámetro de salto entre el sitio i y j

⁹En adelante ν representa las coordenadas espaciales.

$$J_{ij} \equiv - \int d\mathbf{x} w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V^{ex}(\mathbf{x}) \right) w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (2.14)$$

La suma doble del término que involucra al parámetro de salto en la Ec. (2.12) se realiza sobre todos los sitios de la red para los cuales $i \neq j$. En una red óptica profunda, solamente toma en cuenta la contribución de los primeros vecinos, denotado por $\langle i, j \rangle$, si además suponemos que la probabilidad de salto en las tres direcciones espaciales es la misma, entonces $J_{i,j} = J$ con $i \neq j$. Las interacciones entre los átomos se determinan con los elementos de matriz

$$U_{ii'jj'} = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) w_0^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{i'}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') w_0^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_j) w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j'}), \quad (2.15)$$

donde no sólo se incluyen las interacciones en el mismo sitio de la red, sino que contempla la interacción entre sitios remotos de la red. Sin olvidar que nos estamos restringiendo a un régimen de amarre fuerte (garantizado por el uso de una red óptica profunda), tomaremos en cuenta sólo la interacción en el sitio i . Con esto, podemos definir la parte de la acción que considera la interacción entre los átomos

$$S_{int}[\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}] \equiv \int_0^{\hbar\beta} d\tau \frac{U}{2} \sum_i \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) \widehat{\psi}_i^\dagger(\tau) \widehat{\psi}_i(\tau) \widehat{\psi}_i(\tau), \quad (2.16)$$

donde hemos definido

$$U \equiv \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) w_0^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') w_0^*(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) w_0^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.17)$$

Para bosones, el hamiltoniano correspondiente a la acción (2.9) es conocido como modelo de Bose-Hubbard y está dado por [45]

$$\widehat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \widehat{\psi}_i^\dagger \widehat{\psi}_j + \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \widehat{\psi}_i^\dagger \widehat{\psi}_i + U \sum_i \widehat{\psi}_i^\dagger \widehat{\psi}_i^\dagger \widehat{\psi}_i \widehat{\psi}_i, \quad (2.18)$$

con μ el potencial químico del sistema. Concluiremos esta discusión señalando que en la Ec. (2.17) no hemos supuesto ninguna forma (salvo que sea de corto alcance, por tratarse de un gas diluido) en el potencial $V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ni algún tipo de interacción, sin embargo dado que estamos tratando gases diluidos es válido proponer que

$$V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.19)$$

Con ello la Ec. (2.17) queda

$$U = \int d\mathbf{x} |w_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^4 = \frac{2\hbar\omega a_s}{l\sqrt{2\pi}} \quad (2.20)$$

donde a_s es la longitud de dispersión de ondas s y $l = \sqrt{\hbar/m\omega}$ es la longitud de oscilación de un oscilador armónico¹⁰ con energía $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$. De la Ec. (2.14), el parámetro J queda

¹⁰Recuérdese que se aproxima la forma de los mínimos del potencial generado por la red Ec. (2.7) por uno de potencial armónico.

$$J = \frac{4}{\sqrt{\pi}} E_R \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{3/4} \exp \left[-2 \left(\frac{V_0}{E_R} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.21)$$

Donde $E_R = (\hbar k)^2/2m$ es la energía de rebote, que se define como la energía que adquiere un átomo que inicialmente se hallaba en reposo al absorber un fotón de la red, a lo largo de esta tesis se usará como la escala natural de energía. Los detalles de los cálculos de U y J pueden checarsse en la referencia [45], el punto que queremos destacar es que ambos parámetros pueden ser controlados por la red óptica.

2.5.2. El hamiltoniano de átomos fermiónicos en redes ópticas

En el caso de los fermiones, la interacción en el mismo sitio desaparece debido al principio de exclusión de Pauli si solamente introducimos átomos en un estado hiperfino, por lo anterior, es indispensable inyectar en la red óptica dos poblaciones de átomos en estados hiperfinos (situación que ocurre en los experimentos). En nuestro estudio modelaremos esta circunstancia suponiendo que en lugar de dichos estados tenemos una población con espín hacia arriba y otra con espín hacia abajo. De esta manera, nuestro sistema consta de un gas de Fermi constituido de una mezcla no balanceada de átomos fermiónicos de dos estados hiperfinos $\sigma = \uparrow, \downarrow$, que interactúan entre sí por medio de un potencial de contacto atractivo, que son confinados en una red óptica estacionaria. Suponemos nuevamente que la red óptica posee la profundidad necesaria para que sea válido el régimen de amarre fuerte.

En el caso de los fermiones, siguiendo un procedimiento análogo al anterior, el hamiltoniano es [22]

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\sigma} \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V^{ex}(\mathbf{x}) - \mu_{\sigma} \right) \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \\ & + \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{x}) \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{x}') \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donde los operadores de campo ahora satisfacen las relaciones de anticonmutación y μ_{σ} es el potencial químico de cada población. De nueva cuenta, este hamiltoniano es apropiado si la red óptica es profunda ($V^{ex}(\mathbf{x})$ es exactamente el mismo que en el caso de Bose-Hubbard) y la temperatura es suficientemente baja¹¹. Expandimos los operadores como sigue

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) = \sum_i w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \hat{\psi}_{\sigma,i} \quad (2.23)$$

donde $\hat{\psi}_{\sigma,i}$ es el operador de aniquilación de un átomo en el sitio i y nuevamente la función de Wannier está centrada en el mismo sitio. A diferencia del caso anterior, ahora vamos a suponer que la probabilidad de salto de un sitio a otro de la red no es la misma en cada dirección espacial. El nuevo hamiltoniano ahora queda¹².

¹¹Más adelante especificaremos con precisión el orden de magnitud de la temperatura, cuando calculemos el diagrama de fases.

¹²En este hamiltoniano no aparece la energía del sitio i , equivalente a la ε_i de la Ec. (2.13) porque es posible interpretarla como la energía de una partícula que salta al mismo sitio de la red i y puede incorporarse en las sumas sobre $\langle i, j \rangle_{\nu}$

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -J_x \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_x} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - J_y \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_y} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - J_z \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_z} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} \\ & - \sum_{\sigma, i} \mu_\sigma \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, i} + U \sum_i \hat{\psi}_{\uparrow, i}^\dagger \hat{\psi}_{\downarrow, i}^\dagger \hat{\psi}_{\downarrow, i} \hat{\psi}_{\uparrow, i}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Suponiendo que la interacción es de contacto y atractiva (Ec. (2.19)), U es

$$U = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \int d\mathbf{x} |w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)|^4. \quad (2.25)$$

Mientras que para los parámetros J_ν

$$J_\nu \equiv - \int d\mathbf{x} w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V^{ex}(\mathbf{x}) \right) w^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(i \pm a)\hat{x}_\nu}) \quad (2.26)$$

donde el subíndice $(i \pm a)\hat{x}_\nu$ significa evaluar las funciones de Wannier en el vecino más cercano al sitio de la red i , en la dirección \hat{x}_ν . Explícitamente el resultado es [15, 51, 52]

$$U = -\frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{|a_s|}{\lambda} \left(\frac{2s_x s_y s_z E_R^3 \hbar^2}{m\lambda^2} \right)^{1/4} \quad (2.27)$$

en tanto que los parámetro de salto tenemos la expresión:

$$J_\nu = E_R e^{-\pi^2 \sqrt{s_\nu}/4} \left[\left(\frac{\pi^2 s_\nu}{4} - \frac{\sqrt{s_\nu}}{2} \right) - \frac{1}{2} s_\nu (1 + e^{-\sqrt{s_\nu}}) \right]. \quad (2.28)$$

donde J_ν es el parámetro de salto en la dirección ν y s_ν es la amplitud de las ondas que generan el potencial dado por la Ec. (2.7), en unidades de la energía E_R . Para terminar esta discusión, puntualizamos que el resto de la tesis se concentrará en el límite de acoplamiento débil, donde $U/J < 6$ [20, 24]. Es necesario aclarar que en diversas referencias [54] relacionadas con el modelo de Hubbard, se denomina límite de acoplamiento débil cuando $U/J \ll 1$ (cuando se favorece la movilidad de los fermiones sobre la interacción entre ellos), lo que hace que la ocupación doble sea poco probable. Esto ocasiona que existan muchos sitios vacíos y que en los sitios ocupados sólo haya un fermión con un valor de espín (\uparrow o \downarrow). Esto es conocido como modelo $t - J$, donde t designa al parámetro J que estamos utilizando en esta tesis y $J = t^2/U$, sin embargo el HH [54] que se emplea para el análisis teórico es diferente al que discutiremos aquí.

Capítulo 3

Análisis del gas de Fermi polarizado en una red óptica en términos de una aproximación MFT

La idea fundamental de esta sección es describir las interacciones que tienen lugar en un gas de Fermi, constituido por dos poblaciones desiguales de átomos (polarizado), una con espín hacia arriba y la otra con espín hacia abajo, que interactúan entre sí por medio de un potencial de contacto atractivo. Dicho gas se confinará por medio de una red óptica estacionaria y será analizado en 3D, 2D y en cuasi-1D. Entendiendo que esta tarea puede hacerse a diferentes niveles, comenzaremos con una descripción del sistema hecha en términos de una aproximación de MFT. A grandes rasgos, podemos decir que la esencia de una aproximación MFT reside en la inclusión de la influencia de todas las partículas que forma parte del sistema en un campo promediado, de suerte que el problema de tratar un sistema físico formado por muchos cuerpos cuánticos correlacionados se reduce a resolver el problema de una sola partícula, sobre la cual actúa el campo en el que ha sido promediado el efecto del resto de las partículas y de los potenciales que la confinan. Ahora bien, en un enfoque basado en una aproximación MFT, los campos que se promedian deben satisfacer ciertas condiciones, por ejemplo, es posible determinarlos a partir de un método autoconsistente, o bien, en forma equivalente, garantizar que los campos promediados minimizan la ELH.

Considerando lo anterior, el esquema de nuestra descripción en el marco de una teoría MFT, parte de un hamiltoniano que refleja las propiedades físicas de nuestro sistema. No obstante, sabiendo que a pesar de que dicho hamiltoniano se caracterice por la sencillez en la descripción, en general no es posible resolverlo de manera exacta y por ello es necesario hacer ciertas aproximaciones de MFT. En particular, veremos que dichas aproximaciones nos permitirán simplificar los términos de interacciones entre pares de átomos. A partir de este punto, vamos a introducir las fases FFLO y con esto seremos capaces de sustituir los promedios de operadores de campo. Posteriormente realizaremos una transformación de Bogoliubov-Valatin sobre el hamiltoniano de campo promedio, que lo llevará a una forma diagonal. Una vez que disponemos de la forma más sencilla del hamiltoniano, procedemos a calcular el gran potencial termodinámico y la energía libre de Helmholtz, si minimizamos esta última obtendremos las dos ecuaciones de número, del gap y del momento de los pares de fermiones.

A través de dichas ecuaciones, ubicaremos los intervalos de polarización y temperatura en las

que se presentan las diversas fases del sistema. Esto último, refleja un par de aspectos que son propios del uso de las teorías MFT en el ámbito de los sistemas cuánticos correlacionados, por una parte, ejemplifica el empleo de una teoría MFT en el estudio de las fases que se presentan en los sistemas y, por otra parte, ilustra la manera en la que la aplicación de una teoría MFT nos provee de información que aporte al entendimiento de las propiedades físicas de nuestro sistema y los fenómenos que ocurren en él. Es importante señalar que la información física obtenida por una aproximación MFT es el punto de arranque de tratamientos y formalismos más elaborados, orientados a la descripción y análisis de los sistemas compuestos por muchos cuerpos cuánticos. Sin embargo, por el momento nos centraremos en el estudio de nuestro sistema con las herramientas proporcionadas por la teoría MFT de nuestro problema, en donde atestigüaremos el papel preponderante que toma la fase FFLO.

3.1. El hamiltoniano de campo promedio

Con los conceptos que hemos visto, ya podemos expresar el hamiltoniano¹ de nuestro sistema, que consiste en gas de Fermi diluido integrado por una mezcla desigual de dos poblaciones de átomos² de ⁶Li en estados hiperfinos, que serán modelados por dos estados de espín, los cuales interactúan entre sí por medio de un potencial de contacto atractivo. El gas será colocado en una red óptica (profunda) estacionaria en cuasi-1D, 2D y 3D y nos limitaremos al régimen de interacciones débiles³. Dicho hamiltoniano es

$$\hat{H} = -J_x \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_x} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - J_y \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_y} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - J_z \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_z} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - \sum_{\sigma, i} \mu_\sigma \hat{n}_{\sigma, i} - U \sum_i \hat{n}_{\uparrow, i} \hat{n}_{\downarrow, i}. \quad (3.1)$$

Aquí el operador de Fermi $\hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger$ ($\hat{\psi}_{\sigma, i}$) crea (destruye) un fermión (un átomo de ⁶Li en nuestro caso) en el sitio de la red i que puede tomar dos valores de espín $\sigma = \uparrow, \downarrow$, el símbolo $\langle i, j \rangle$ denota una suma que únicamente toma en cuenta los vecinos más próximos. Estos operadores satisfacen las relaciones usuales de anticonmutación

$$\left\{ \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger, \hat{\psi}_{\sigma', j} \right\} = \delta_{i, j} \delta_{\sigma, \sigma'}$$

$$\left\{ \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger, \hat{\psi}_{\sigma', j}^\dagger \right\} = \left\{ \hat{\psi}_{\sigma, i}, \hat{\psi}_{\sigma', j} \right\} = 0.$$

Los primeros tres términos en la Ec. (3.1) corresponden a la energía cinética usual en las aproximaciones de amarre fuerte. En el cuarto término, $\hat{n}_{\sigma, i} = \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, i}$ es el operador de número en el sitio i con el vector de posición \mathbf{r}_i , el potencial químico de cada especie está representado por μ_σ . Este término establece una referencia para la energía del sistema, ya que cuenta el número total átomos de cada población y lo multiplica por su respectivo potencial químico, el cual no depende del sitio de la red, a diferencia de la LDA. En el formalismo que vamos a exponer el

¹A partir de este punto usamos un sistema de unidades en el que $k_B = \hbar = 1$.

²El formalismo que exhibiremos puede aplicarse a una mezcla binaria de otro elemento, por ejemplo el fermión ⁴⁰K, simplemente sustituyendo la masa del ⁶Li por la de éste.

³En la publicación [24] se ataca exactamente el mismo problema, pero en el régimen de acoplamiento fuerte e intermedio.

número de átomos de cada población puede variar, en general. En el quinto término ya se ha tomado en cuenta una interacción atractiva entre átomos con espines opuestos que ocupan el mismo sitio de la red, porque U es positiva y está antecedida por un signo negativo. Cuando la interacción es repulsiva, el signo que antecede al parámetro de interacción es positivo. La forma explícita de U está dada por la Ec. (2.27) y en ella ya se ha tomado en cuenta que las interacciones entre los átomos son de contacto.

En una aproximación de MFT el término de interacción, que corresponde con el quinto término de la Ec. (3.1), se aproxima por la expresión⁴

$$U \sum_i \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i} \widehat{\psi}_{\uparrow i} \approx U \sum_i \left(\langle \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \rangle \widehat{\psi}_{\downarrow i} \widehat{\psi}_{\uparrow i} + \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \langle \widehat{\psi}_{\downarrow i} \widehat{\psi}_{\uparrow i} \rangle - \langle \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \rangle \langle \widehat{\psi}_{\downarrow i} \widehat{\psi}_{\uparrow i} \rangle \right), \quad (3.2)$$

donde el término $\widehat{\psi}_{\downarrow i} \widehat{\psi}_{\uparrow i}$ aniquila un par de fermiones en el sitio i , el término $\widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger$ lo crea en el mismo sitio, mientras que el tercer factor en el miembro derecho de la Ec. (3.2) no depende de los operadores de campo. El símbolo $\langle \dots \rangle$ denota un promedio sobre un ensamble. En la Eq. (3.2) no aparecen los términos de Hartree $\widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\uparrow i} \langle \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i} \rangle$ y $\langle \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\uparrow i} \rangle \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}$ porque ya se han incluido en el potencial químico de cada especie, mientras que los términos de Fock $\widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i} \langle \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\uparrow i} \rangle$ y $\langle \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i} \rangle \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\uparrow i}$ no contribuyen [21].

Es ilustrativo apreciar por qué se anulan las contribuciones de Fock. Veamos cómo actúa el par de operadores $\widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger$ suponiendo que en el sitio i ocurre una interacción y que ya existen dos átomos con espines antiparalelos. El operador $\widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger$ aniquila el átomo que tiene espín hacia abajo, pero como ya existe un átomo con espín hacia arriba, el operador $\widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger$ ocasiona que el par de operadores se anule; una situación análoga ocurre con $\widehat{\psi}_{\downarrow i}^\dagger \widehat{\psi}_{\uparrow i}^\dagger$. Lo mismo pasa si en el sitio de la red no existen átomos, pues $\widehat{\psi}_{\uparrow i}$ y $\widehat{\psi}_{\downarrow i}$ producen ceros en esa situación. Esto hace que la aportación los términos de Fock sea igual a cero.

Ahora sustituiremos los promedios involucrados en la ecuación anterior por los estados FFLO; es decir, vamos a introducir una dependencia en el parámetro de orden, que es la magnitud física que nos revelará para qué valores de polarización y de temperatura se presenta la fase FFLO, tanto de la posición de los átomos en la red óptica, como del momento total del par de fermiones que se han formado por la interacción atractiva, recordando que dicha interacción entre los átomos se controla por medio de la red óptica, mediante el parámetro U . Los pares están constituidos por dos átomos, uno de ellos con momento $\mathbf{k}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{k}$ y espín hacia arriba y otro con momento $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{k}$ y espín hacia abajo, de tal manera que el momento total del par es $2\mathbf{q}$ y que el espín total del par es cero. La forma explícita del estado FFLO es

$$-U \langle \widehat{\psi}_{\downarrow i} \widehat{\psi}_{\uparrow i} \rangle = \Delta e^{2i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \quad (3.3)$$

con \mathbf{r}_i la posición del sitio de la red i . Con la forma de la ecuación anterior vamos a incluir diferentes estados. Si el número de átomos de cada especie es igual ($P = 0$) y $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, reproducimos la teoría estándar BCS; si el número de átomos es desigual ($P \neq 0$) existen dos casos,

⁴Esta aproximación se obtiene teniendo en mente que cualquier operador \widehat{A} puede expresarse como $\widehat{A} = \langle \widehat{A} \rangle + \delta \widehat{A}$ con $\delta \widehat{A} \equiv \widehat{A} - \langle \widehat{A} \rangle$ el operador de fluctuación. Como es usual en MFT, en (3.2) se desprecian términos cuadráticos de $\delta \widehat{A}$.

cuando $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (estados de Sarma) y cuando los pares de Cooper tienen un momento finito diferente de cero (estados FFLO). Finalmente, $\Delta = 0$ corresponde con un estado en la cual la superfluidez está ausente (estado normal). En la sección de los diagramas de fases mostraremos explícitamente las regiones de estabilidad de cada fase.

La ecuación (3.3) revela el rasgo característico la aproximación MFT, pues en la interacción entre los fermiones del sitio i está considerado el efecto del *resto* de los átomos a través de un promedio. Más adelante notaremos que esta elección del parámetro de orden lleva a un hamiltoniano de campo promedio que minimiza la ELH. Conviene introducir las siguientes energías

$$\xi_{\uparrow,\downarrow}(\mathbf{k}) \equiv \sum_{\nu} 2J_{\nu} (1 - \cos k_{\nu}a) - \mu_{\uparrow,\downarrow}. \quad (3.4)$$

Estas cantidades corresponden con las energías de cada partícula en su estado normal (sin interacción) pero confinado por la red y referidas a su potencial químico. Ahora estamos en condiciones de escribir el hamiltoniano (3.1) en el espacio de momentos en una aproximación MFT usando como hipótesis la forma de la fase FFLO. Para tal finalidad sustituimos la forma del estado FFLO dada por la Ec. (3.3), en la aproximación del término de interacción de la Ec. (3.2) y posteriormente lo sustituimos la Ec. (3.1). La nueva forma del hamiltoniano es:

$$\hat{H}_{MFT} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left(\xi_{\uparrow}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\uparrow\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{k}} + \xi_{\downarrow}(\mathbf{k}) \hat{c}_{\downarrow\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\downarrow\mathbf{k}} + \Delta \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger} + \Delta^* \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \frac{|\Delta|^2}{U} \right) \quad (3.5)$$

donde hemos empleado la transformación [53, 55] usual:

$$\hat{\psi}_{\sigma i}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}}^{\text{B.Z.}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{c}_{\sigma\mathbf{k}}^{\dagger} \quad (3.6)$$

aquí la suma se lleva a cabo sobre todos los momentos \mathbf{k} dentro de la primera zona de Brillouin (B. Z.), lo que significa que $-\pi/a \leq k_{\nu} \leq \pi/a$, recordando que \mathbf{r}_i representa las coordenadas del i -ésimo sitio de la red y $2\mathbf{q}$ es el momento del par de fermiones. $\hat{c}_{\sigma\mathbf{k}}^{\dagger}$ ($\hat{c}_{\sigma\mathbf{k}}$) es el operador que crea (destruye) un fermión con espín σ y con momento \mathbf{k} . Si usamos las relaciones de anticonmutación de los operadores fermiónicos y las condiciones a la frontera en las sumas sobre \mathbf{k} entonces resulta

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MFT} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} & \left(\xi_{\uparrow}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \hat{c}_{\uparrow\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\uparrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \left(\hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}} - 1 \right) \right. \\ & \left. + \Delta \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger} + \Delta^* \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \frac{|\Delta|^2}{U} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

esto puede escribirse en forma matricial,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MFT} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} & \begin{pmatrix} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}}^{\dagger} & \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\uparrow}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_{\downarrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}} \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left(\xi_{\downarrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \frac{|\Delta|^2}{U} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

en donde Δ es la amplitud del parámetro de orden que hasta el momento se ha considerado un número complejo, pero a partir de este momento vamos a suponer (sin pérdida de generalidad) que es un número real, con lo cual, se simplifican las expresiones. El segundo término de la ecuación anterior es una constante que es importante en el cálculo de las energías libres. Dado que nuestro objetivo es obtener la expresión más simplificada del hamiltoniano previo, es inmediato calcular los valores propios de la matriz en (3.8), que son $\lambda_{\pm} = \eta_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \pm E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})$. Hemos recurrido a las siguientes relaciones

$$\eta_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[\xi_{\uparrow}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \xi_{\downarrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k})], \quad E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \sqrt{\chi_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) + \Delta^2} \quad \text{y} \quad \chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}[\xi_{\uparrow}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) + \xi_{\downarrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k})]. \quad (3.9)$$

Sin embargo, en lugar de usar los valores propios λ_{\pm} , es más provechoso introducir las siguientes cantidades:

$$\omega_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \equiv E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \pm \eta_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}). \quad (3.10)$$

La razón de meter las definiciones (3.10) se entenderá con amplitud en cuanto llegemos a la forma diagonal del hamiltoniano MFT, por ahora podemos adelantar que corresponden a la energía de excitación de cuasi partículas (en una MFT). Además conviene señalar que en las energías Ec. (3.10) va metida información sobre de la desigualdad en el número de átomos con espín, que también produce potenciales químicos distintos, y que se traduce en la pérdida de simetría en comparación con la teoría BCS, como veremos más adelante. Para llevar a una forma diagonal al hamiltoniano (3.8), usamos la transformación de Bogoliubov-Valatin adecuada para este problema, dada por:

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{\uparrow\mathbf{q}+\mathbf{k}} \\ \hat{c}_{\downarrow\mathbf{q}-\mathbf{k}}^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) & v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \\ -v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) & u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k},\mathbf{q}} \\ \hat{\gamma}_{\downarrow-\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

donde la forma explícita de los coeficientes es

$$u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})} \right)} \quad v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})} \right)}. \quad (3.12)$$

Con la transformación (3.11), el hamiltoniano (3.8) se simplifica aún más y adopta la forma

$$\hat{H}_{MFT} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left[\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} & \hat{\gamma}_{\downarrow-\mathbf{k},\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{+}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) & 0 \\ 0 & -\omega_{-}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k},\mathbf{q}} \\ \hat{\gamma}_{\downarrow-\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \end{pmatrix} + \left(\xi_{\downarrow}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \frac{\Delta^2}{U} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Donde los operadores de cuasi partícula $\hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}}$ obedecen la estadística de Fermi. La ecuación previa es nuestro nuevo hamiltoniano en la aproximación de MFT, por medio de él hallaremos las ecuaciones de gap, de número de átomos para cada población y la del momento del par de fermiones. Este hamiltoniano también nos permite calcular el gran potencial termodinámico y la energía libre de Helmholtz, con lo cual ya podemos situar las regiones de temperatura y polarización en las que la fase de Sarma o FFLO son más estables y las zonas en las que el sistema es un fluido normal. Por otra parte, es adecuado escribir el hamiltoniano (3.13) en

términos de los operadores de creación y aniquilación de cuasi partículas y de sus propiedades de anticonmutación:

$$\hat{H}_{MFT} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left[\omega_{+}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k},\mathbf{q}} + \omega_{-}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \hat{\gamma}_{\uparrow-\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\uparrow-\mathbf{k},\mathbf{q}} \right] + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left(\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) - E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) + \frac{\Delta^2}{U} \right). \quad (3.14)$$

Vale la pena detenerse a realizar dos observaciones. En primer lugar, el hamiltoniano anterior es independiente de la dimensión, en el sentido de que las sumas involucradas (que describen a un sistema finito) pueden convertirse en integrales en una, dos o tres dimensiones siempre que tomemos en cuenta el límite termodinámico, que en este caso significa que tanto el número total de partículas como el volumen de la red tienden al infinito, manteniendo el cociente de ambas cantidades constante.

La siguiente observación consiste en apreciar que en el ámbito de una teoría MFT, es posible interpretar al gas de Fermi polarizado, que ha sido confinado por medio de redes ópticas, como un gas de cuasi partículas libres con energías $\omega_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{q})$, que son creadas y aniquiladas por los operadores $\hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger}$ y $\hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}}$, más un término de energía del estado base (en el cual no existen excitaciones) que corresponde al término constante del hamiltoniano (3.14). Esas cuasi partículas son llamadas *excitaciones elementales*, ya que a partir de la forma de la transformación (3.11), puede verse que los operadores $\hat{\gamma}$ tienen eigenestados que son una superposición de estados con diferente número de ocupación con momentos $\mathbf{q} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{q} - \mathbf{k}$, y por esta razón dichas cuasi partículas son excitaciones colectivas del gas, visto como un todo.

Por otra parte, el hamiltoniano (3.14) contiene a la forma bien conocida del hamiltoniano de BCS, si hacemos que $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$ y el número de átomos de cada población se iguala, la Ec. (3.14) se reduce al hamiltoniano diagonal de la teoría BCS [53,56], dado por

$$\hat{H}_{MFT}^{BCS} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \left(\hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\uparrow\mathbf{k}} + \hat{\gamma}_{\uparrow-\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\uparrow-\mathbf{k}} \right) + \text{constante}$$

donde $E_{\mathbf{k}}$ es la energía de las excitaciones (cuasi partículas). Para finalizar esta sección señalamos que los operadores $\hat{\gamma}$ describen cuasi partículas que siguen la estadística de Fermi-Dirac, razón por la cual satisfacen, en equilibrio térmico, las siguientes relaciones [15,55]:

$$\langle \hat{\gamma}_{\{\uparrow,\downarrow\}\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\{\uparrow,\downarrow\}\mathbf{k},\mathbf{q}} \rangle = f(\omega_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{q})), \quad \langle \hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle = \langle \hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}} \hat{\gamma}_{\sigma\mathbf{k},\mathbf{q}} \rangle = 0 \quad (3.15)$$

donde $f(\omega_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{q})) = [\exp(\beta\omega_{\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{q})) + 1]^{-1}$ es la función de distribución de Fermi-Dirac y $\beta = 1/T$ con T la temperatura del sistema.

3.2. La energía libre de Helmholtz

Es válido preguntarse ¿Cómo podemos encontrar los promedios $\langle \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \rangle$ en un enfoque de MFT? Actualmente hay dos rutas equivalentes para tal fin, la primera, que será la que seguimos en la tesis, consiste en usar la forma del promedio expresado en (3.3), para después minimizar la ELH. La segunda ruta es proponer una forma inicial (basada en argumentos físicos) de $\langle \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \rangle$ y calcularla en forma autoconsistente. Considerando que este es un procedimiento ampliamente utilizado y que es proclive a ser calculado con métodos computacionales, repasaremos de manera sucinta su proceder. Nos interesa saber el siguiente promedio⁵

$$\bar{n}_{\mu\mu'}^c \equiv \langle \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \rangle \quad (3.16)$$

usando el nuevo hamiltoniano de campo promedio, debe obtenerse el mismo resultado al usar la siguiente relación

$$\bar{n}_{\mu\mu'}^c \equiv \langle \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \rangle_{MFT} = \frac{1}{Z_{MFT}} \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}_{MFT}} \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \right] \quad (3.17)$$

donde \hat{H}_{MFT} es el hamiltoniano MFT y Z_{MFT} es la función de partición canónica MFT dada por

$$Z_{MFT} = \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}_{MFT}} \right]$$

La Ec. (3.17) es autoconsistente porque $\bar{n}_{\mu\mu'}^c$ está dado por \hat{H}_{MFT} y Z_{MFT} , que a su vez dependen de $\bar{n}_{\mu\mu'}^c$. En este método se parte de una propuesta inicial para el promedio $\langle \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \rangle$, que se mejorará a través del método autoconsistente que acabamos de describir, hasta que dicho promedio converja a un valor que ya no cambie. La otra opción consiste en usar una expresión explícita del promedio $\bar{n}_{\mu\mu'}^c$ tal que minimice la energía libre asociada al hamiltoniano de campo promedio. Optamos este camino y lo describiremos en seguida.

El tipo de potencial termodinámico de un gas de Fermi depende de las condiciones en que se este haciendo el estudio. En los gases polarizados hay dos situaciones físicas diferentes; una de ellas es la de fijar el potencial químico de cada una de las poblaciones [21, 26] y la otra consiste en la fijación de el número de átomos de cada población. En el primer caso es apropiado tomar como base al gran potencial termodinámico $\Omega(\Delta, \mu_\uparrow, \mu_\downarrow, \mathbf{q})$, posteriormente se minimiza este potencial y se obtienen las regiones de estabilidad.

En la segunda situación física, es adecuado emplear la energía libre $F(\Delta, f_\uparrow, f_\downarrow, \mathbf{q})$ que nuevamente se minimiza y se determinan sus fases estables. En el siguiente análisis calcularemos ambos potenciales termodinámicos. En una aproximación MFT el gran potencial termodinámico que está a la temperatura T , se evalúa a partir de la función de partición gran canónica de un ensamble de cuasi partículas con energía [20, 21] $\omega_\pm(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ (ver el hamiltoniano (3.14)) dado por

⁵Como se está exhibiendo en esta parte, el promedio $\langle \hat{c}_\mu^\dagger \hat{c}_{\mu'} \rangle$ no es el dado por (3.3), pues μ denota un conjunto de números que determinan un estado cuántico que no necesariamente coinciden con los dados por (3.3). Este apartado solamente tiene la intención de mostrar cómo funciona el método autoconsistente en términos generales.

$$Z_G = \text{Tr} e^{-\beta \widehat{H}_{MFT}} = \prod_{\mathbf{k}} (1 + e^{-\beta \omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})}) (1 + e^{-\beta \omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q})}) e^{-(\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) - E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) + \frac{\Delta^2}{U})}, \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta que $\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z_G$ el gran potencial queda

$$\Omega = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) - E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) + \frac{\Delta^2}{U} - \frac{1}{\beta} \ln ([1 + \exp(-\beta \omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q}))] [1 + \exp(-\beta \omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q}))]) \right\}, \quad (3.19)$$

y sabiendo que la ELH es una transformación de Legendre efectuada al gran potencial, ésta queda dada por

$$F(\Delta, \mathbf{q}, f_{\uparrow}, f_{\downarrow}) = \Omega + \mu_{\uparrow} f_{\uparrow} + \mu_{\downarrow} f_{\downarrow}. \quad (3.20)$$

El siguiente paso es minimizar la expresión anterior de la ELH, que involucra derivadas de primer orden de esta última cantidad con respecto a μ_{\uparrow} , μ_{\downarrow} , Δ y \mathbf{q} . Este es un proceso laborioso, en el que es útil usar las siguientes relaciones,

$$\frac{\partial \omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{\partial \mu_{\uparrow}} = -u_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial \omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{\partial \mu_{\downarrow}} = v_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial \omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{\partial \mu_{\uparrow}} = v_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q})}{\partial \mu_{\downarrow}} = -u_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}).$$

Al final, obtenemos las ecuaciones resultantes⁶ para f_{\uparrow} , f_{\downarrow} , Δ y \mathbf{q} :

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \mu_{\uparrow}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{\uparrow}} + f_{\uparrow} \Rightarrow f_{\uparrow} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) f(\omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})) + v_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) f(-\omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q}))], \quad (3.21)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \mu_{\downarrow}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{\downarrow}} + f_{\downarrow} \Rightarrow f_{\downarrow} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) f(\omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q})) + v_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) f(-\omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q}))], \quad (3.22)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \Delta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta} \Rightarrow 1 = \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - f(\omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - f(\omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q}))}{2E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})} \quad (3.23)$$

y

$$0 = \frac{\partial F}{\partial q_x} = \frac{\partial \Omega}{\partial q_x} \Rightarrow 0 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\partial \eta_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})}{\partial q_x} [f(\omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - f(\omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q}))] + \frac{\partial \chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})}{\partial q_x} \left[1 - \frac{\chi_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})} [1 - f(\omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})) - f(\omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q}))] \right] \right\} \quad (3.24)$$

en donde $f(z)$ es la función de distribución de Fermi-Dirac. Mediante las Ecs. (3.21)-(3.24) sabremos el comportamiento de Δ , \mathbf{q} , f_{\uparrow} , f_{\downarrow} como funciones de la temperatura y la polarización una vez que hayamos elegido los parámetros U , J_{ν} y f tanto para la fase de FFLO como la de Sarma. Con respecto a esta última fase se cumple que $q_x = 0$ y por esta razón no tiene sentido

⁶El conjunto de ecuaciones (3.21)-(3.24) también es independiente de la dimensión, las sumas pueden cambiarse por integrales en dos o tres dimensiones. Por ejemplo, $\mathbf{q} = (q_x, 0)$ en 2D, la elección de esta forma explícita del momento de los pares no conlleva una pérdida de generalidad, hemos analizado que el hecho relevante es que dicho momento debe ser diferente de cero para seguir ocasionando la superposición de las superficies de Fermi. Por este argumento, en el caso 3D se puede hacer $\mathbf{q} = (q_x, 0, 0)$

hablar de la Ec. (3.24), motivo por el cual el número de ecuaciones de esta fase se reduce a tres.

El procedimiento para determinar las regiones de estabilidad puede plantearse como sigue: en ambas fases resolvemos las ecuaciones de número y del gap, más la del momento de los pares de Cooper (en la fase FFLO), luego evaluamos la ELH con dichas soluciones para los mismos valores de los parámetros de Hubbard, esto nos dirá qué fase tiene la menor energía y, por lo tanto, es más favorable. Posteriormente se repite el mismo procedimiento para otros valores de P y de T ($f_{\uparrow} = f(1 + P)/2$ y $f_{\downarrow} = f(1 - P)/2$), esperando que en algunas ocasiones no existan soluciones para alguna fase. Por ejemplo, con las ideas que hemos visto es natural pensar que no hayan soluciones para el estado de Sarma cuando los valores de las polarización sean altos, pues como hemos advertido desde el principio de la discusión, es necesario proveer un momento diferente de cero a los pares con la finalidad de que tenga lugar la superposición de las superficies de Fermi.

3.3. La separación de fases

Hasta el momento solamente hemos discutido dos fases que se hayan en competencia en nuestro tratamiento (FFLO y Sarma), no obstante, es necesario tomar en cuenta otro tipo de situación física que es sustancialmente diferente y que tiene lugar en nuestro sistema. Esta nueva fase se denomina *Separación de fases* (PS)⁷ y ha sido analizada en múltiples artículos relacionados con el estudio de los sistemas cuánticos fuertemente correlacionados, que son confinados por redes ópticas y/o trampas armónicas. En términos físicos, surge cuando una fracción de los fermiones que componen el gas se aparean y forman una fase FFLO, Sarma o BCS, mientras que los fermiones restantes integran una fase normal polarizada. El aspecto físico de esta nueva fase es la de un núcleo superfluido que se halla en un estado de BCS (sin polarización), en el que los pares de Cooper tienen un momento total igual a cero, cubierto por un fluido normal polarizado que esté conformado por dos poblaciones de átomos. Cabe mencionar que estas características de la PS han sido discutidas en los artículos [33, 40] y reportadas en forma experimental en las referencias [48, 58]. En la Fig. 3.1 se muestra la apariencia de la PS en un sistema polarizado de átomos de ⁶Li pero confinado por trampas armónicas.

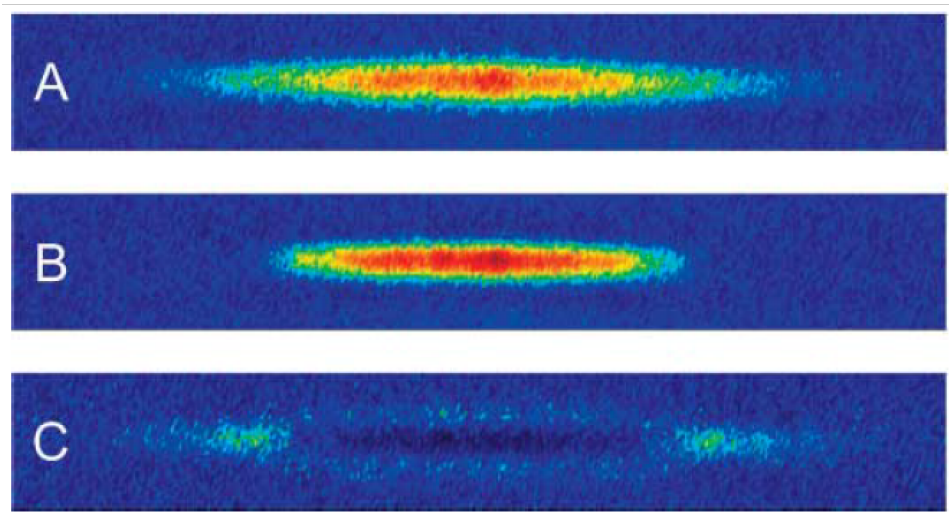


Figura 3.1: Gráfico que muestra que la PS consta de un núcleo superfluido que está cubierto por una capa de fluido normal para un sistema polarizado de átomos de ⁶Li confinado por trampas armónicas. En (A) se muestra fotografía (los colores son falsos y sólo ayudan a distinguir) de la población de espín mayoritaria con 8.6×10^4 átomos, en (B) se exhibe la población minoritaria de espín de 6.5×10^4 átomos, en (C) vemos la diferencia de ambas poblaciones. Este exceso de átomos compone la capa normal y polarizada que rodea al superfluido. Imagen tomada de la referencia [48].

La causa de la existencia de esta separación se debe a una disminución de la energía libre del sistema que está compuesto por la mezcla de ambas fases, es decir, resulta energéticamente más favorable promover la separación del sistema (para ciertos valores de polarización y temperatura), en una mezcla de fases constituida por pares de Cooper (ya sea FFLO, Sarma o BCS) y una fase normal-polarizada formada por dos poblaciones desiguales de átomos sin interacción,

⁷Se denotará esta fase por sus siglas en inglés, manteniendo la consistencia en las notaciones de las diversas fases y términos.

que permanecer sólo en algunas de las tres fases puras citadas.

En esta sección describiremos la PS del sistema y calcularemos su energía libre, suponiendo que la parte que está constituida por pares de fermiones es de tipo BCS. Esta hipótesis está cimentada en dos consideraciones: la primera de ellas se origina en el análisis de las referencias [20, 21, 42, 48, 57, 58] en las que se exponen tanto las evidencias experimentales de la existencia de la PS, como los esfuerzos teóricos que la describen. Aunque las herramientas que hemos expuesto en esta tesis también nos permiten postular que la parte formada por pares de fermiones es de tipo FFLO o de Sarma y obtener su energía libre, la segunda consideración toma en cuenta la sencillez de la descripción, pues si supusiéramos a los pares de Cooper en las fases FFLO o Sarma, el número de variables físicas aumenta y esto trae como consecuencia, el notable incremento en la dificultad de resolución del conjunto de ecuaciones relacionadas con éstas.

A continuación calcularemos la energía de cada uno de los dos fluidos presentes en la PS, teniendo a nuestra disposición los resultados de las secciones anteriores. La energía de la PS está integrada por dos fluidos, uno superfluido y otro normal. El primero de ellos se encuentra en un estado de BCS, es decir, está formado por pares de Cooper cuyo momento $2\mathbf{q}$ es igual a cero y su polarización es igual a cero. El segundo fluido lleva consigo toda la polarización y está constituido por dos poblaciones de átomos con espín que no están equilibradas y que no interactúan entre sí. La energía libre de la mezcla es

$$F_{PS} = xF_N + (1 - x)F_{BCS} \quad (3.25)$$

donde x es la fracción de átomos que se encuentran en la fase (estado) normal y F_N denota su energía libre de Helmholtz, F_{BCS} es la energía del fluido en el estado de BCS, que está dada por

$$F_{BCS} = \Omega_{BCS} + \mu(1 - x)\tilde{f}, \quad (3.26)$$

con Ω_{BCS} es el gran potencial del fluido de BCS, $(1 - x)\tilde{f}$ cuantifica el número de átomos en este estado, μ es su potencial químico del estado BCS y \tilde{f} es el factor de llenado total, que puede ser considerado variable (así lo consideramos para obtener las ecuaciones de la PS, al final hacemos $\tilde{f} = cte.$), pero que en todos los diagramas de fase que reportaremos en esta tesis se mantendrá constante. El gran potencial está dado por

$$\Omega_{BCS} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \xi(\mathbf{k}) - E(\mathbf{k}) + \frac{\Delta^2}{U} - \frac{2}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta E(\mathbf{k})}) \right\} \quad (3.27)$$

donde el factor de 2 que multiplica el cuarto término en el interior de la suma indica que esta parte se constituye por pares de Cooper, además

$$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2}$$

$$\xi(\mathbf{k}) = \sum_{\nu} 2J_{\nu}(1 - \cos k_{\nu}a) - \mu.$$

La parte normal de la mezcla está dada por

$$F_N = \Omega_N + \mu_{\uparrow} \left(f_{\uparrow} - (1 - x)\tilde{f} \right) + \mu_{\downarrow} \left(f_{\downarrow} - (1 - x)\tilde{f} \right) \quad (3.28)$$

$$\Omega_N = -\frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}} \{ \ln [(1 + e^{-\beta\Omega_{\uparrow}})(1 + e^{-\beta\Omega_{\downarrow}})] \}. \quad (3.29)$$

Dado que hay $(1-x)\tilde{f}$ átomos en el estado BCS (superfluido y no polarizado), entonces el resto de átomos con espín hacia arriba $f_{\uparrow} - (1-x)\tilde{f}$ y con espín hacia abajo $f_{\downarrow} - (1-x)\tilde{f}$ conforman el fluido normal, esta diferencia proporciona toda la polarización a la mezcla en su conjunto. La energía de cada partícula referida al potencial químico es

$$\Omega_{\uparrow,\downarrow} = \sum_{\nu} 2J_{\nu}(1 - \cos k_{\nu}a) - \mu_{\uparrow,\downarrow}.$$

donde μ_{σ} denota el potencial químico de átomos con espín σ de la fase normal. De esta forma, la energía de la PS es

$$\begin{aligned} F_{PS}(x, \tilde{f}, \mu, \mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow}, \Delta) &= x\Omega_N + (1-x)\Omega_{BCS} + \mu(1-x)^2\tilde{f} \\ &+ \mu_{\uparrow}(f_{\uparrow} - (1-x)\tilde{f}) + \mu_{\downarrow}(f_{\downarrow} - (1-x)\tilde{f}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En forma análoga al caso de las fases FFLO, podemos minimizar este potencial para determinar la ecuación del gap y de número del fluido BCS; las ecuaciones de número para cada especie, así como la fracción de átomos de la fase normal. A continuación aclararemos el significado físico de x y de \tilde{f} . Por una parte, si minimizamos la energía libre de la PS con respecto a x obtenemos

$$\frac{\partial F_{PS}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tilde{f}(\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}) = \Omega_N - \Omega_{BCS} + \mu_{\uparrow}f_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}f_{\downarrow}. \quad (3.31)$$

Si ahora tomamos en cuenta la diferencia de energías entre la fase normal y fluido BCS dada por

$$\Delta F = F_N - F_{BCS} = \Omega_N - \Omega_{BCS} + \mu_{\uparrow}f_{\uparrow} - \tilde{f}(\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}) \quad (3.32)$$

notamos que cuando $\Delta F = 0$ ($F_N = F_{BCS}$), la ecuación anterior coincide con (3.31). Con este resultado, si ahora recordamos que la energía está dada por (3.25), obtenemos que $F_{PS} = F_{BCS} = F_N$ y esto último garantiza la existencia de ambas fases (superfluida y normal) simultáneamente, si las energías libres no fuesen iguales, el sistema optaría por permanecer en una sola de las fases (la de menor energía libre). Si ahora examinamos la ecuación que resulta de minimizar la energía con respecto de la fracción \tilde{f} tenemos que

$$\frac{\partial F_{PS}}{\partial \tilde{f}} = 0 \Rightarrow \mu(1-x) = x(\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}) \quad (3.33)$$

Esta última ecuación garantiza el equilibrio entre los potenciales químicos de los fluidos, de modo que cuando ocurre la ruptura de algún par de Cooper, simultáneamente es sustituido por dos átomos con espines opuestos provenientes de la fase normal. Las ecuaciones resultantes son

$$\frac{\partial F_{PS}}{\partial \mu_{\uparrow}} = 0 \Rightarrow f_{\uparrow} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} f(\Omega_{\uparrow}) + (1-x)\tilde{f} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial F_{PS}}{\partial \mu_{\downarrow}} = 0 \Rightarrow f_{\downarrow} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} f(\Omega_{\downarrow}) + (1-x)\tilde{f} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial F_{PS}}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \tilde{f}(1-x) = \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{k}} [f(E(\mathbf{k}))u_{\mathbf{k}}^2 + f(-E(\mathbf{k}))v_{\mathbf{k}}^2] \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial F_{PS}}{\partial \Delta} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{U}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - 2f(E(\mathbf{k}))}{2f(E(\mathbf{k}))}. \quad (3.37)$$

Donde

$$u(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \right)}$$

$$v(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi(\mathbf{k})}{E(\mathbf{k})} \right)}$$

y f es la función de distribución de Fermi-Dirac. A partir de las ecuaciones (3.34)-(3.37) se determinan el gap y los tres potenciales químicos que minimizan la energía libre F_{PS} . Cuando estos valores son encontrados, se usan las ecuaciones (3.31) y (3.33) con la finalidad de calcular la energía libre F_{PS} , esto permite comparar la energía de esta fase con las energías de la fase FFLO y la de Sarma. La menor de dichas energías es la que se coloca en el diagrama de fases. No obstante, es oportuno mencionar la naturaleza de la PS es más compleja que sus antecesoras, ya que hemos visto que en ella coexisten en equilibrio dos fases. Esto trae como consecuencia que la resolución numérica de las ecuaciones de la PS resulten ser más complicadas y requieran de mayor tiempo de cómputo, comparándola con las fases puras de Sarma y de FFLO.

Finalmente, queremos precisar que en esta tesis no estudiaremos la naturaleza inhomogénea de la mezcla de fluidos que integran la PS, en la Fig. 3.1 puede mirarse la evidencia experimental de la condición inhomogénea de esta fase. Esta característica es interesante y ha sido reportado en diversos análisis [42, 48], en donde puede verificarse que en la separación se tiene un núcleo que está formado por una fase superfluida y apareada, que es cubierta por una capa de fluido en su estado normal. Como hemos observado, el análisis que acabamos de exhibir se limita a analizar los aspectos energéticos de la PS y la influencia que tiene, en tanto que compite con los estados de Sarma y FFLO, en el entendimiento de las fases que se presentan en nuestro sistema. En la siguiente parte nuestra misión consiste en determinar con precisión las regiones de polarización y temperatura en las que se presentan dichas fases.

3.4. Diagramas de fases

Hasta ahora, mediante una teoría MFT hemos obtenido las ecuaciones que describen las fases que suceden en nuestro sistema. Con estas ecuaciones es posible hallar la dependencia de los diversos potenciales químicos, el gap y el momento de los pares (en el caso de la fase FFLO), como función de la temperatura, la polarización y de los parámetros f, U y J_ν , para cada una de las tres fases apareadas⁸ que estamos considerando. Por otra parte, debemos recordar que también hemos calculado la ELH y el gran potencial termodinámico de cada fase, de manera tal que tenemos a nuestra disposición la herramienta necesaria para la construcción del diagrama de fases del sistema.

En el diagrama de fases podemos identificar las regiones de temperatura y polarización en las que el sistema se encuentra en una fase normal ($\Delta = 0$), o bien, en alguna de las fases apareadas que se hayan en competencia. Con respecto a esto último, mencionamos que el criterio que determina cuál de las tres fases es más estable, una vez que se han fijado los valores de T, P, f, U y J_ν y que se han resuelto las ecuaciones de cada una de las fases⁹, es la comparación directa de sus energías libres, de suerte que el estado que posea la menor energía es más estable. De esta manera, en el diagrama de fases del sistema se colocan las regiones en las que las fases poseen la menor energía libre.

En esta investigación presentaremos los diagramas de fases del sistema en 3D, 2D y cuasi-1D¹⁰ manteniendo fijos los parámetros de Hubbard f, U y J_ν . Esta información nos permitiría reportar las zonas de temperatura y polarización en los que tendría lugar la existencia del estado FFLO y que podrían ser de utilidad para la realización de un experimento. Por otro lado, como veremos más adelante, la comparación de los diagramas de fases en 3D y cuasi-1D (que contengan los mismos valores de los parámetros U, f y J_ν) nos proporcionará información física de los efectos de la dimensión en las propiedades del sistema.

3.4.1. Comportamiento de q_x en el estado FFLO

En esta sección nos limitaremos a exhibir el comportamiento de $q_x, \mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ y Δ como función de la polarización (f constante) a temperatura fija. Esta elección está basada en el interés particular de entender el comportamiento del momento de los pares de Cooper, a medida que varía la polarización del sistema. En las Figs. 3.2, 3.3, además de la 3.4 y 3.5, que corresponden al caso 3D, 2D y cuasi-1D respectivamente, se observa el comportamiento de dichas magnitudes como función de la polarización a $T = 10^{-4}E_R$ cuando se han mantenido constantes los parámetros f, U y J_ν (ver los valores). En todas las gráficas anteriores $\lambda = 1030$ nm y $E_R = 1.293 \times 10^{-10}$ eV. En las Figs. 3.6 y 3.7 mostramos el caso bidimensional cuando $f = 0.5$ y $f = 0.704$ a $T = 2 \times 10^{-6}E_R$. La observación de todas las gráficas permite distinguir un com-

⁸Entenderemos que una fase apareada o condensada (FFLO, Sarma o PS) es aquella en la cual $\Delta \neq 0$. Hacemos esta definición con la finalidad de distinguirla de la fase normal.

⁹Recordando que en todos los casos debemos calcular $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ y Δ . Adicionalmente, en la fase FFLO se debe encontrar q_x y en la PS μ, \hat{f} y x

¹⁰A lo largo de esta tesis entenderemos como caso cuasi-1D si ocurre que $J_x \gg J_y = J_z$. A su vez, en 2D y 3D supondremos que $J = J_x = J_y$ y $J = J_x = J_y = J_z$ respectivamente.

portamiento *universal* de q_x y Δ , es decir, que no depende de la dimensión en la que se halle el sistema. Apreciamos que el momento de los pares es una función creciente de la polarización y que el gap es una función decreciente de la misma magnitud física.

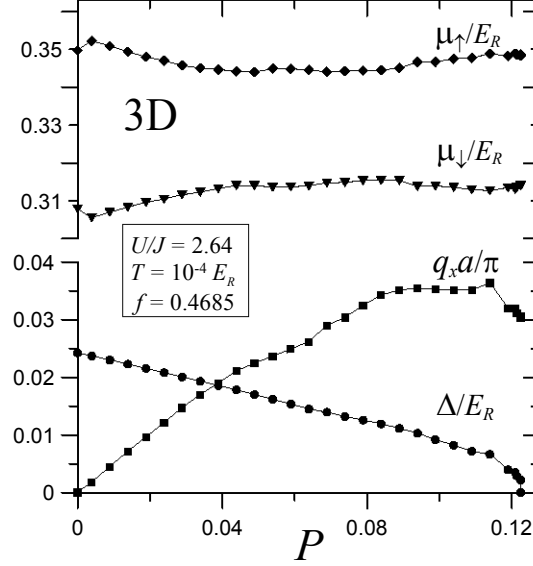


Figura 3.2: Dependencia de q_x , μ_{\uparrow} , μ_{\downarrow} y Δ de la polarización a temperatura fija $T = 10^{-4} E_R$, de átomos dispuestos en una red óptica en 3D donde $J = J_x = J_y = J_z = 0.078 E_R$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0, 0)$.

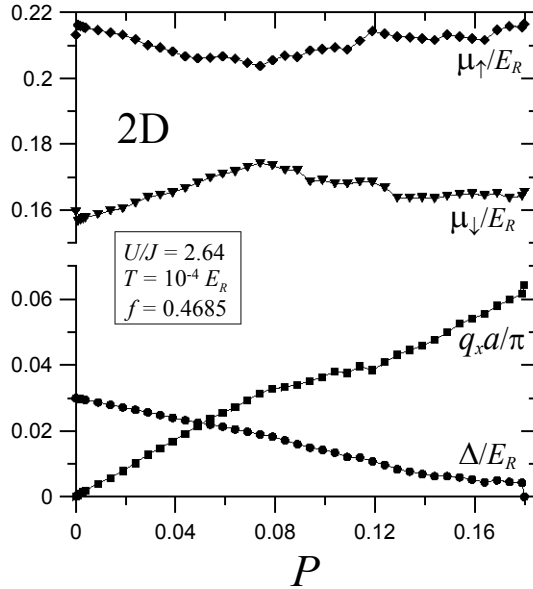


Figura 3.3: Dependencia de q_x , μ_{\uparrow} , μ_{\downarrow} y Δ de la polarización a temperatura fija $T = 10^{-4} E_R$, de átomos colocados en una red óptica en 2D donde $J = J_x = J_y = 0.078 E_R$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0)$.

La explicación física del comportamiento de q_x se debe a que es necesario proporcionar un momento diferente de cero a los pares de fermiones que integran los pares de Cooper, con

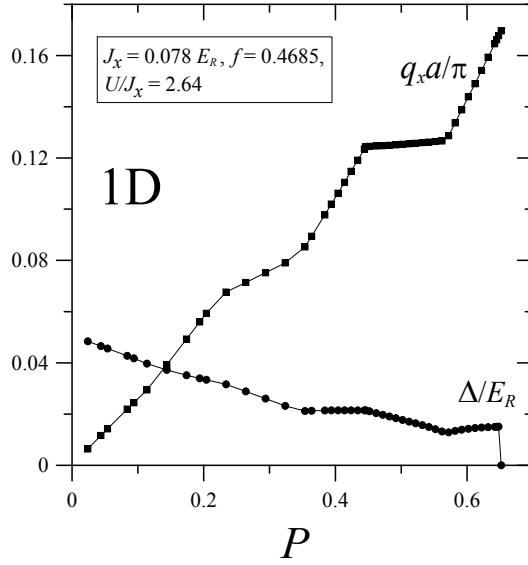


Figura 3.4: Gráfica de q_x y Δ como función de P a $T = 10^{-4} E_R$, para el caso cuasi-1D. $J_y = J_z = 10^{-4} E_R \ll J_x = 0.078 E_R$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0, 0)$.

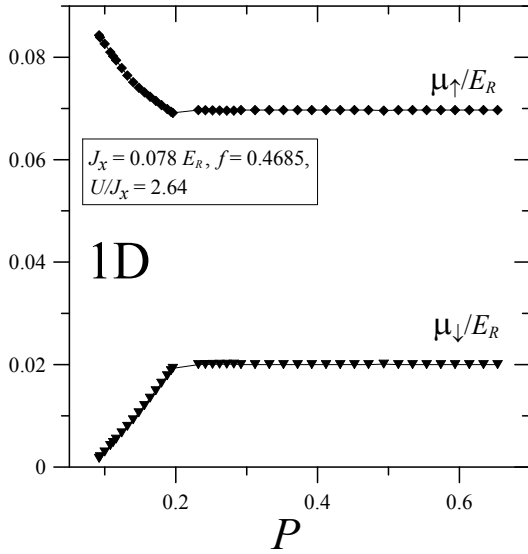


Figura 3.5: Gráfica de μ_\uparrow y μ_\downarrow como función de P a $T = 10^{-4} E_R$, para el caso cuasi-1D. $J_y = J_z = 10^{-4} E_R \ll J_x = 0.078 E_R$.

la finalidad de ocasionar que las superficies de Fermi se traslapen¹¹. Si se incrementa la polarización, es necesario proporcionar un momento de mayor magnitud a los pares, hasta que, llegando a un cierto límite, ya no es posible traslapar ambas superficies. El comportamiento de Δ es paralelo al de q_x , a similitud de la teoría BCS convencional, el mayor traslape tiene lugar cuando q_x se anula y va disminuyendo conforme P aumenta, hasta un cierto valor crítico, en

¹¹Recuérdese que en la sección introductoria revisamos que el traslape es máximo cuando q_x es cero y que aún a pequeñas polarizaciones las superficies de Fermi se intersectan con $q_x = 0$ hasta cierto límite

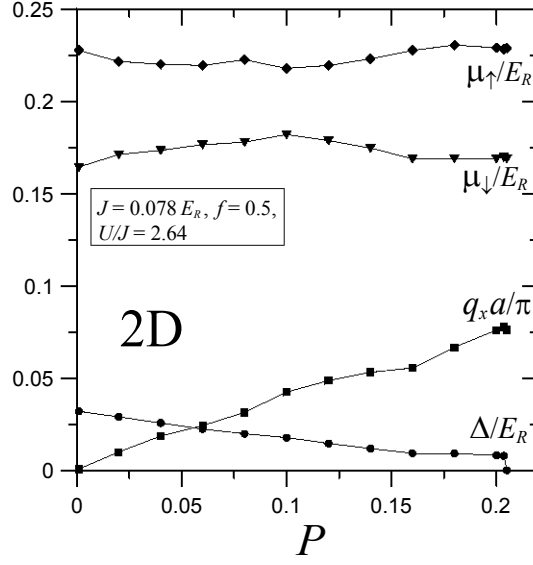


Figura 3.6: Gráfica de Δ , q_x , μ_\uparrow y μ_\downarrow como funciones de la polarización a $T = 2 \times 10^{-6} E_R$ para el caso bidimensional donde $J = J_x = J_y$ y $\mathbf{q} = (q_x, 0)$.

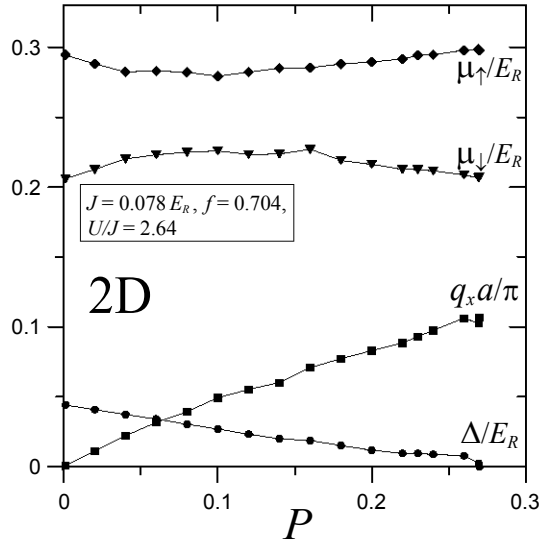


Figura 3.7: Gráfica para $f = 0.704$, los valores para U , J y la temperatura son iguales a los de la Fig. 3.6.

el cual $\Delta = 0$ y q_x alcanza su valor máximo. A este valor especial de la polarización (P_c) se le denomina límite de Clogston-Chandrasekhar [35, 36] y en las Figs. 3.2 a 3.7 puede observarse el valor de P_c . El significado físico de este límite radica en conocer con precisión los valores máximos de polarización que el sistema sostiene, de manera que si superamos por arriba este límite, el sistema se comporta en forma normal y por ello puede ser de gran utilidad en el diseño de un experimento que confirme la existencia de la fase FFLO.

3.4.2. Diagramas de fases en 3D, 2D y cuasi-1D

En esta sección determinaremos con precisión las regiones de polarización y temperatura en las que las fases del sistema poseen mayor estabilidad. Vale la pena señalar que todos los diagramas de fases se han calculado a f constante, lo que en términos físicos significa mantener fijo el número total de átomos. Para fijar con claridad dichas regiones, recordemos que el primer procedimiento consiste en resolver las ecuaciones (3.21)-(3.24) para los estados FFLO y los estados de Sarma ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$), las ecuaciones (3.34)-(3.37) para la PS, posteriormente se comparan sus ELH y finalmente se colocan los estados de menor energía. Los detalles computacionales de este proceso pueden consultarse en el Apéndice A.

El plan de esta sección reside en llevar a cabo comparaciones entre los diversos diagramas con el objetivo de observar: a) las diferencias con diagramas reportados por otros grupos de investigación, b) los efectos de los parámetros de Hubbard en los diagramas en 3D, c) el incremento del área de las fases apareadas comparando los diagramas en 3D y en cuasi-1D y d) el diagrama del caso bidimensional.

En las Figs 3.8-3.9 tenemos el caso tridimensional con los valores $f = 0.4$, $U/J = 3.72$, $J = 0.07 E_R$ y $\lambda = 1010$ nm, mismos que han sido tomados en cuenta con la finalidad de contrastar con el diagrama de fases reportado en [22]. Solamente en este diagrama vamos a usar este valor de la longitud de onda del láser, en todos los demás $\lambda = 1030$ nm.

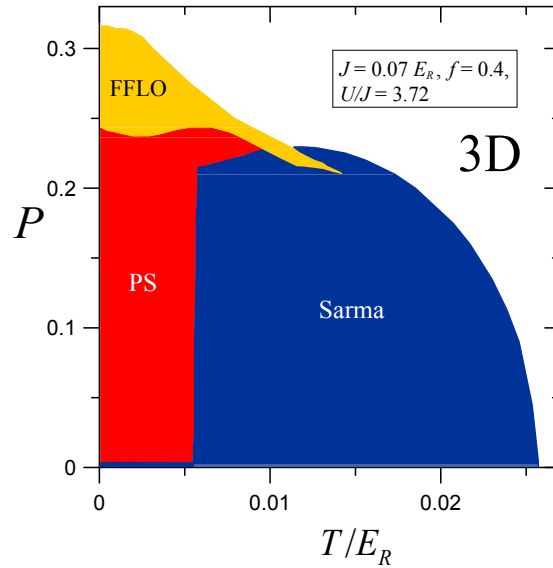


Figura 3.8: Diagrama de fases del gas de Fermi polarizado en 3D. En color amarillo representamos los estados FFLO, en azul los estados de Sarma, en rojo la PS y el estado normal en color blanco. $U/J = 2.64$, $J = 0.07 E_R$, $\lambda = 1010$ nm y $E_R = 1.345 \times 10^{-10} eV$.

En la Fig. 3.8 apreciamos que la fase FFLO es más estable en la zona del diagrama de fases de polarizaciones altas, a partir de $P \approx 0.24$ a $P \approx 0.32$ y en la temperatura se extiende de $T = 0$ a $T \approx 0.015 E_R$. En este diagrama existe una pequeña cuchilla que se incrusta en la región de la fase de Sarma, que por una parte, ocupa la mayor parte del espacio de las fases apareadas,

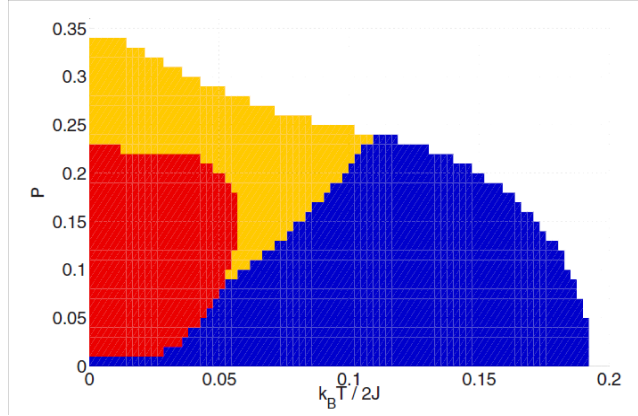


Figura 3.9: Diagrama de fases del gas de Fermi polarizado en 3D para los mismos valores de la Fig. 3.8 que han sido reportados en la referencia [22].

y por otra, en ella tiene lugar la mayor temperatura sostenida por el sistema $P \approx 0.025$. La región de la PS muestra mayor estabilidad cuando $0 \leq T \leq 0.005 E_R$ y $0 \leq P \leq 0.24$.

En la Fig. 3.9 observamos similitudes y diferencias con respecto a la Fig. 3.8, empezaremos con las primeras. La máxima polarización que soporta el sistema ocurre a $T = 0$ y tiene el valor de $P = 0.33$, que es muy cercano que el expuesto en el diagrama 3.8. A la misma temperatura el estado FFLO se encuentra en el intervalo $0.23 \leq P \leq 0.33$, mientras que en la PS $0 \leq P \leq 0.23$. La máxima temperatura a la que se presenta el estado FFLO es $0.1 k_B T / 2J$ ($0.014 E_R$ en nuestras unidades) a $P \approx 0.23$. También podemos distinguir que la mayor parte del área de las fases apareadas la ocupa la fase de Sarma y que la mayor temperatura que soporta el sistema es de $0.19 k_B T / 2J$ ($= 0.027 E_R$). La PS es más estable en la región de temperaturas bajas $0 \leq T \leq 0.05 k_B T / 2J$ ($= 0.075 E_R$) y $0 \leq P \leq 0.23$.

Por otro lado, apreciamos diversas diferencias, por ejemplo, la región del estado FFLO se presenta en polarizaciones menores a $P = 0.23$ y el área en la que yace es comparable al área de la fase PS, además de que carece de la cuchilla de la Fig. 3.8. Para finalizar la comparación, también notamos que la forma de la PS cambia. Atribuimos la causa de estas diferencias a la definición de la PS. Anteriormente hemos expuesto el concepto de PS, el cual usamos aquí, que se basa en lo expuesto en la referencia [42], mientras que en la referencia [22] la PS tiene lugar cuando $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ y la energía de las cuasi partículas es negativa.

En las Figs. 3.10-3.11 mostramos los diagramas de fases para $f = 0.4685$, $U/J = 2.64$ con $J = 0.078 E_R$ en 3D; $U/J_x = 2.64$, $J_x = 0.078 E_R$ y $J_y = J_z = 10^{-4} E_R$ para el caso cuasi unidimensional. En estos diagramas la longitud de onda de los láseres es $\lambda = 1030 \text{ nm}$ ¹². El siguiente paso consiste en la comparación de los diagramas tridimensionales, e iniciamos advirtiendo que en la Fig. 3.10 se ha disminuido la interacción en el sitio i de la red en un U ($\approx 29\%$), se han aumentado tanto el parámetro de salto J como la fracción de llenado total ($\approx 17\%$) con respecto a los valores de la Fig. 3.8. Físicamente esto significa que hemos fomentado la movilidad de los átomos en detrimento de la interacción entre éstos. La consecuencia de estos cambios se refleja en el área que ahora ocupan las fases apareadas, la cual ha disminuido considerablemente con

¹²Los diagramas de fases son insensibles a pequeños cambios en la longitud de onda de los láseres de la red óptica [20].

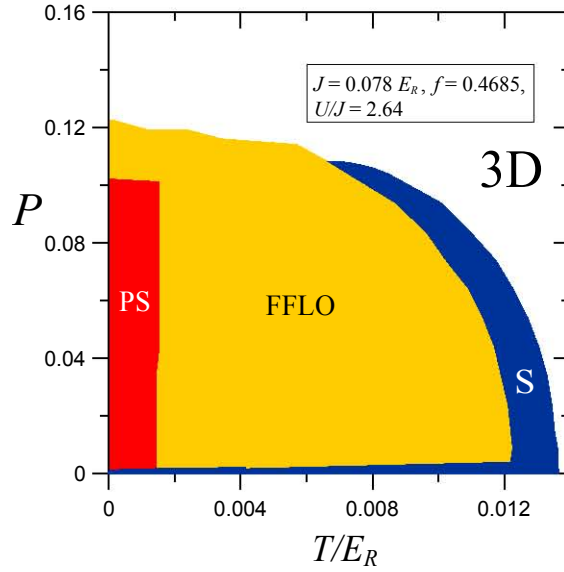


Figura 3.10: Diagrama de fases del sistema para el caso 3D ($J = J_x = J_y = J_z$). Los parámetros utilizados son $U/J = 2.64$, $J = 0.078 E_R$ y $E_R = 1.293 \times 10^{-10} eV$.

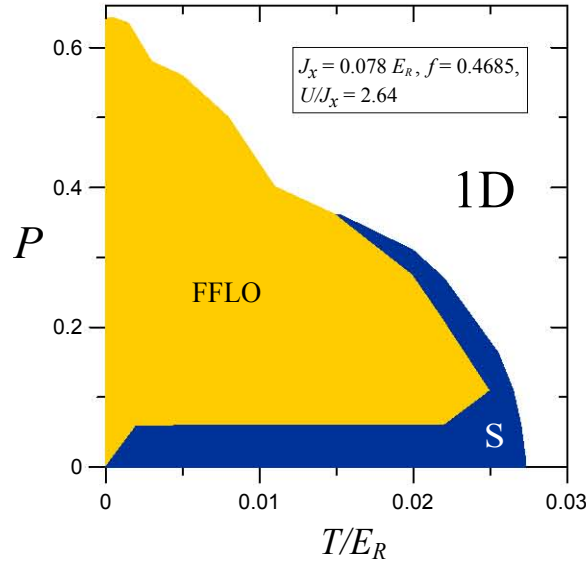


Figura 3.11: Diagrama de fases del sistema en el caso cuasi-1D. Los parámetros de salto restantes son $J_y = J_z = 10^{-4} E_R \ll J_x = 0.078 E_R$.

respecto a la Fig. 3.8. Es notoria la forma en la que el estado FFLO cubre la mayor parte del diagrama y en la que la fase de Sarma (S) ha decrecido y ha adoptado una forma de guadaña. La PS, por su parte, sigue siendo más estable en la región de temperaturas ($0 \leq T \leq 0.0017 E_R$) y ($0 \leq P \leq 0.1$)

Con estos nuevos parámetros la polarización máxima (a $T = 0$) es de $P = 0.12$ y la temperatura máxima (a $P = 0$) es $T = 0.0124 E_R$, lo que significa de 64 % (pasó de $P = 0.33$ a $P = 0.12$) y

de 48 % (de $T = 0.025$ a $T = 0.0124$) 51 % respectivamente. Estos cambios reflejan (de manera intuitiva) que el sistema es muy susceptible a variaciones en los parámetros de Hubbard, por esta causa el entendimiento de la evolución de los diagramas de fase como función de dichos parámetros es una cuestión interesante que puede abordarse con la herramienta que se ha discutido. Asimismo, es prudente indicar que la reducción de las fases apareadas plantea dificultades en el diseño experimental, ya que a pesar de que la mayor parte del área del diagrama la invade la fase FFLO, ésta puede detectarse a temperaturas menores a $T = 0.012 E_R$ (18 nK), lo cual representa un reto experimental (aunque accesible), si tenemos en cuenta que las temperaturas típicas que pueden alcanzarse en el laboratorio (con la ayuda de trampas armónicas adicionales a la red) son del orden de centenares de nanokelvin [26].

El inconveniente producido por el reducido tamaño de la región de temperatura y polarización en la que se puede detectar el estado FFLO en el caso tridimensional, y la manera de resolver este problema, han sido tratado en numerosas publicaciones [15, 22, 26, 59] en las que se ha advertido que en el caso cuasi unidimensional existe un aumento sobresaliente del área del diagrama de fases. La Fig. 3.11 comprueba con nuestro modelo que, efectivamente, la fase FFLO puede detectarse a polarizaciones y temperaturas considerablemente mayores. En esta figura se observa que la mayor polarización es $P = 0.66$ a $T = 0$ y que la temperatura máxima es de $T = 0.025 E_R$ ($T = 37.5$ nK) para $P \approx 0.1$ que lo observado en la Fig. 3.10. Sin embargo, hay semejanzas entre el caso 3D y cuasi-1D, ya que se manifiesta que la mayor parte del área de las fases apareadas es cubierta por el estado FFLO y que el de Sarma adquiere nuevamente la forma de una guadaña.

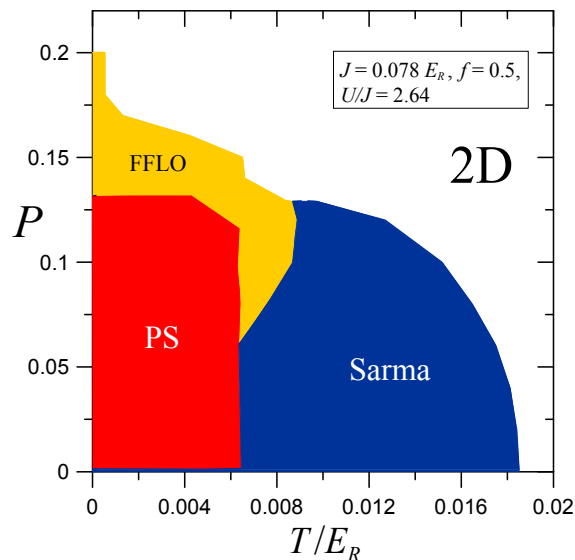


Figura 3.12: Diagrama de fases del sistema en el caso 2D, donde $J_x = J_y = J$. Apreciamos que la región FFLO es más reducida que las regiones de la PS y de Sarma.

La principal diferencia reside en el hecho de que en la Fig. 3.11 destaca la ausencia de la PS, esto se debe a que no hemos encontrado una solución a las Ecs. (3.34)-(3.37) para los valores asignados de los parámetros. Esto no significa que no exista dicha fase, sino que es necesario realizar una búsqueda más exhaustiva. A pesar de lo anterior, existe evidencia de que el área

de la PS disminuye para ciertos valores de los parámetros de Hubbard. En la referencia [22] se muestra que el área de la PS es considerablemente menor que las fases de FFLO y de Sarma y que además se ha desplazado con respecto al diagrama en 3D en la Fig. 3.9, es decir, su zona de estabilidad ya no se encuentra en la región de temperaturas y polarizaciones bajas¹³.

La falta de algún análisis o experimento que demuestre la existencia (o ausencia) de la PS para los valores de los parámetros de Hubbard de $f = 0.4685$, $J = J_y = J_z = 10^{-4} E_R$, $J_x = 0.078 E_R$, $U/J_x = 2.64$ motivan, por un lado, la realización de un mayor refinamiento en la búsqueda del área de estabilidad de la PS, que hemos iniciado y que se basa en la elaboración de una malla (ver Apéndice A) que se extiende sobre la totalidad de los valores de P y T del diagrama en la Fig. 3.11 en donde hemos tomado las soluciones de la referencia [22] como puntos de partida. Pese a lo anterior, no hemos encontrado dichas soluciones. Por otro lado, dicha ausencia estimula la realización de un análisis teórico que se dirija a justificar la progresiva reducción de la PS (apoyado en la disminución del área mostrado en la referencia [22]), hasta que, para ciertos valores críticos de los parámetros de Hubbard, desaparezca. Esta es una tarea que puede realizarse con las herramientas que hemos expuesto en esta tesis.

Finalmente, en la Fig. 3.12 se ilustra el diagrama de fases del caso bidimensional para los parámetros $f = 0.5$, $U/J = 2.64$ y $J = 0.078 E_R$. Como se aprecia, el valor del parámetro de salto y de la interacción en el sitio i de la red corresponden a nuestro estudio seminal de la investigación del sistema [60], con la novedad de considerar la presencia de la PS. Observamos que el área de la fase FFLO es notoriamente menor que la de Sarma y la de la PS, la polarización máxima que soporta el sistema es $P = 0.20$ a $T = 0$ y que la temperatura máxima es $T = 0.185 E_R$ a $P = 0$. Sin perder de vista que el factor de llenado total $f = 0.5$ es distinto al usado en los diagramas de fases en 2D y 3D ($f = 0.4685$ en ambos casos), constatamos que los intervalos de polarización y temperatura que exhibe son mayores que el caso tridimensional y menores que en una dimensión.

Antes de concluir este capítulo, es apropiado hacer una recapitulación de lo que se ha hecho hasta el momento. En primer lugar, justificamos el uso de las fases FFLO para el estudio de las propiedades del gas de Fermi polarizado, examinamos el destacado papel de las redes ópticas en el control y manipulación de los átomos y después determinados el tipo de hamiltoniano (y las condiciones físicas que deben cumplirse para su utilización), con el que se describiría a nuestro sistema. Posteriormente, a partir de una aproximación MFT, hicimos una transformación de Bogoliubov-Valatin que llevó al hamiltoniano a una forma diagonal, que nos permitió, por un lado, hacer una interpretación del gas en términos de un conjunto de cuasi partículas y a por otro lado, a calcular el gran potencial termodinámico y la ELH.

A partir de ese punto, nuestra atención se concentró en el estudio de las diversas fases apareadas (FFLO, Sarma y PS) que se presentan el sistema. Dado que poseíamos las energías libres de cada fase, calculamos y resolvimos las diferentes ecuaciones de número, del gap y, en la fase FFLO, del momento de los pares de fermiones. Con esta relevante información física, nuestra siguiente tarea fue la identificación de las zonas de estabilidad de las fases FFLO, de Sarma y de la PS, así como de la fase normal, en el espacio de polarización y temperatura.

¹³Es necesario tener en cuenta que los valores de los parámetros son diferentes a los empleados en la Fig. 3.11, en la publicación [22] $f = 0.4$, $U/J_x = 2.86$ y $J_x = 0.07 E_R$, mientras que nosotros usamos $f = 0.4685$, $J_x = 0.078 E_R$ y $U/J_x = 2.64$

Para complementar lo anterior, llevamos a cabo la comparación de los diagramas de fases en 3D y cuasi-1D, con el objetivo de observar los efectos de la dimensión sobre las características físicas de los diagramas de fases del sistema, en particular, constatamos que el diagrama de fases aumenta considerablemente (manteniendo fijos los parámetros de Hubbard) al disminuir la dimensión. Para concluir este repaso, podemos afirmar que poseemos los elementos iniciales para el diseño de un experimento que compruebe la existencia (por ejemplo) de la fase FFLO en el sistema, teniendo como base el cúmulo de información que hemos obtenido hasta el momento.

Capítulo 4

Las excitaciones colectivas y superfluides

Una vez que hemos llevado a cabo un análisis del sistema mediante el empleo de una aproximación de MFT, la idea esencial de este capítulo es ir más allá de este enfoque y el resto de la investigación sigue este propósito. Hemos tenido presente que la aplicación de una MFT a las interacciones entre pares de partículas, suele ser suficiente para entender las características físicas relevantes de los sistemas bajo análisis, por lo menos en lo que se refiere a las propiedades estáticas del mismo. Sin embargo, sabemos que una teoría de MFT proporciona resultados satisfactorios cuando tratamos estados cuánticos estacionarios; si nuestro interés se centra en las propiedades dinámicas de sistemas de muchas partículas, es necesario adoptar teorías que sean adecuadas para este fin.

Esto puede ejemplificarse con el gas de electrones en un sólido que interactúan entre sí mediante fuerzas de Coulomb, que es un sistema bien conocido (característico) de la teoría de muchos cuerpos. Si comenzamos con una aproximación de MFT de este sistema, entonces se obtienen resultados erróneos como, por ejemplo, que la masa efectiva del electrón es cero [61]. La razón física de este resultado se debe a que la aproximación de MFT (que en este caso se basa en una ecuación de HF) no toma en cuenta las correlaciones (efectos de apantallamiento) entre las partículas, por ello es necesario acogerse a una aproximación de fase aleatoria (RPA), que sí considera la interacción efectiva entre dos partículas via el sistema de muchos cuerpos. Al aplicar esta última al gas de electrones se obtienen resultados físicos más razonables, en el sentido de que la masa efectiva calculada en una RPA es del orden de magnitud de la masa del electrón, como efectivamente ocurre en los experimentos.

Es oportuno mencionar que además de que la RPA ha ayudado al entendimiento de las propiedades centrales del gas de electrones en un sólido, juega un papel muy importante en los estudios de la interacción electrón-fonón, superconductividad y otros fenómenos que involucran sistemas fuertemente correlacionados. Esta aproximación funciona bien si analizamos sistemas en los que haya un número grande de partículas en el interior del radio de interacción, es decir, para sistemas de alta densidad, en el caso opuesto, cuando el número de partículas es bajo, es más adecuada otro tipo de descripción o utilizar un método que la mejore. Es bien conocido que en una RPA solamente se incluyen los diagramas de burbujas (interacción de intercambio) [53, 61, 62], cuando también incorporamos los diagramas de escalera (interacción directa) la aproximación es llamada aproximación de fase aleatoria generalizada (GRPA) [47].

Volviendo al contexto de nuestro problema, es oportuno preguntar: ¿Qué tipo de magnitudes físicas nos interesan más allá de una MFT? ¿Cuáles son las propiedades que esperamos que se manifiesten en nuestro sistema? En este capítulo podemos responder a estos cuestionamientos diciendo que deseamos calcular la energía de las excitaciones colectivas del gas polarizado y confinado por medio de redes ópticas, y que esperamos que dicho gas posea la propiedad de la superfluidez. El interés de buscar la manifestación del fenómeno de la superfluidez, está motivado por la serie de importantes evidencias experimentales que se han observado tanto en los sistemas de átomos fermiónicos compuestos por una mezcla equilibrada de átomos [63] como en sistemas fermiónicos polarizados-ultrafríos, donde se ha encontrado al estado superfluido formando parte de una separación de fase [48], o bien, se ha revelado la superfluidez mediante la detección de vórtices [9,10]. Aquí vale la pena señalar que en todos los experimentos anteriores se han usado *trampas ópticas* para confinar a los átomos. En cuanto a análisis teóricos que hagan predicciones acerca de la superfluidez, se han reportado estudios de átomos bosónicos [28] en redes ópticas triangulares y cúbicas [51] y en sistemas fermiónicos equilibrados [29] en redes triangulares; en sistemas fermiónicos polarizados se han dado a conocer diagramas de fases en donde se examinan las condiciones en las que ocurre dicho fenómeno [64], en las referencias [20,27] se discuten análisis (más cercanos a nuestro problema) donde se ha usado el estado FFLO como el apropiado para la descripción de tales sistemas.

Cabe mencionar que aunque hemos precisado las regiones de polarización y temperatura en las que tienen lugar las distintas fases condensadas del sistema (que involucran apareamiento de los átomos fermiónicos), esto no garantiza que nuestro sistema sea superfluido. Para poner en claro esto, en la referencia [65] se muestra que hay sistemas polarizados compuestos de átomos fermiónicos de ^6Li y de ^{40}K en los que existen las fases FFLO y de Sarma, sin que se presente la superfluidez; en la serie de artículos [66] se reportan experimentos realizados en gases de fermiones polarizados en los que literalmente hay apareamiento sin superfluidez. Estos resultados (junto con los que hemos comentado anteriormente) proporcionan razones convincentes para probar la necesidad de usar formalismos que estén más allá de una MFT.

En este contexto resulta natural (y fundamental) determinar si el fenómeno de la superfluidez de gases de Fermi polarizados colocados en redes ópticas en 3D, 2D o cuasi-1D, puede comprobarse experimentalmente o bien, predecirse a partir de primeros principios. Esto hace que sea de vital importancia determinar la energía de las excitaciones colectivas del gas polarizado, porque (como se examinará con detalle) a través de esta espectro es posible concluir si la superfluidez se presenta. Las siguientes secciones de esta investigación se dedicarán a esta finalidad.

El diagrama de flujo de nuestra investigación se puede observar en la Fig. 4.1, donde mostramos que la etapa final es la obtención de la energía de las excitaciones colectivas¹, a partir de la cual determinaremos si en nuestro sistema se presenta la superfluidez. Como lo muestra la Fig. 4.1, partiremos de los resultados derivados de un enfoque de MFT, es decir, suponemos que en nuestro sistema existe una fase FFLO y calculamos los valores de μ_\uparrow , μ_\downarrow , Δ y q_x que minimizan la ELH. Sabiendo que las excitaciones de una partícula (cuasi partículas) del sistema descrito por el HH atractivo en una aproximación de MFT, se manifiestan como polos de las transformadas de Fourier de funciones de Green de una partícula, es necesario recurrir a las funciones

¹En adelante esta energía será denominada (sin distinción) espectro o energía de las excitaciones colectivas.

de Green de dos partículas porque los modos colectivos $\omega(\mathbf{Q})$ se manifiestan como polos de la transformada de Fourier de la función de Green de dos partículas K [70].

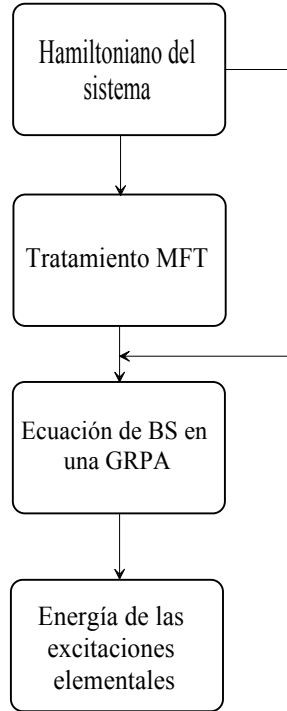


Figura 4.1: Esquema del plan de nuestro tratamiento. Nótese que después de llevar a cabo una descripción del sistema utilizando una teoría MFT, regresamos al hamiltoniano del sistema con la finalidad de aplicar técnicas que nos permiten tratar los términos de cuatro operadores. Posteriormente se aplican formalismos basados en integrales funcionales, que nos permiten escribir todas las magnitudes físicas de interés en términos de funciones de Green de una (MFT) y dos partículas (excitaciones colectivas). A partir de la resolución la ecuación de BS en una GRPA, vamos a calcular el espectro de las excitaciones colectivas del sistema.

En términos generales, el sentido de la siguiente parte de la investigación, una vez que hemos analizado el sistema mediante una teoría de MFT, consiste en regresar al hamiltoniano (3.1) y efectuar una HST, con la que se desacopla el término de interacción, que se reduce a productos de dos operadores de campo, a costa de introducir un campo bosónico con el que van a interactuar los campos fermiónicos propios del sistema, a partir de este punto se aplican las técnicas y formalismos de las integrales funcionales, que permiten expresar las magnitudes físicas de interés en términos de funciones de Green. En esta estancia entra en acción la ecuación de BS, que es la herramienta más ortodoxa para la discusión de problemas de dos cuerpos en la teoría de campos [88]. A pesar de ello, no es posible resolverla en el caso general, por lo que es necesario realizar una aproximación. En esta investigación supondremos que el kernel de la ecuación de BS es una generalización de la RPA (donde sólo se considera la interacción de intercambio [62]), que toma en cuenta la adición del término directo, lo que trae como consecuencia una mejora [47] de la descripción. Con esta aproximación se obtiene el espectro de las excitaciones colectivas, dado que conocemos que este último se define como las soluciones de la ecuación de BS para la función de Green de dos partículas K . A partir de la forma del espectro sabremos si la superfluidez puede existir en nuestro sistema.

En el párrafo anterior se expresa, en esencia, la estructura de la segunda parte de la investigación reportada en esta tesis. Sin embargo, vamos a mencionar aspectos generales de las teorías que permiten obtener las excitaciones colectivas, de sistemas fuertemente correlacionados en presencia de una fase condensada con la intención de complementar la información acerca de investigaciones relacionadas [30,70] que tienen el propósito de ver diversos problemas de dichos sistemas desde una visión unificada.

Excitaciones colectivas en sistemas correlacionados cuánticos

Hemos dicho que luego de haber realizado una descripción de nuestro sistema usando una aproximación de campo promedio, la idea consiste en volver la atención al hamiltoniano dado por la Ec. (3.1). Anteriormente dijimos que no es posible resolverlo en forma general, ya que desde un punto de vista teórico, las mayores dificultades son debidas a, (I) la ausencia de enfoques que sean completamente confiables para el tratamiento analítico de la naturaleza de muchos cuerpos cuánticos del problema y, (II) el aumento de requerimientos de poderosas herramientas de cómputo que sean capaces de hacer simulaciones numéricas. Existen diferentes métodos que han sido usados para estudiar al tipo de hamiltoniano dado por la Ec. (3.1), entre los que podemos mencionar el análisis MFT seguido por una GRPA (la cual usaremos para calcular el espectro), el método de fluctuación-intercambio (FLEX) [67], las simulaciones de Monte Carlo (MC) [68] y el esquema de dos partículas autoconsistente (TPSC) [69].

Excepto por el método MC, todos los enfoques de muchos cuerpos precedentes deben escoger una aproximación para el operador de masa Σ . La precisión de las aproximaciones es crucial para el entendimiento de las propiedades físicas del modelo de Hubbard, a causa de las relaciones autoconsistentes entre cantidades de una y dos partículas. Por ejemplo, el kernel $\partial\Sigma/\partial G$ de la ecuación de BS de la energía de las excitaciones colectivas depende del operador de masa que a su vez depende de la función de Green de dos partículas K . Hablando en forma estricta, en el caso del modelo de Hubbard, el operador de masa es una suma de dos términos: el término de Hartree Σ_H y el término de Fock Σ_F . En muchos artículos relacionados con dicho operador se ha ignorado la contribución de Hartree [69] y por esta razón es importante extender las relaciones autoconsistentes entre cantidades de una y dos partículas que sólo han considerado el término de Fock.

La misma cuestión surge en la teoría de la propagación de la luz en semiconductores [30, 70] y otros problemas actuales de la teoría de muchos cuerpos. Por ejemplo, los fenómenos de la superconductividad debida a la formación de pares de Cooper y la condensación de Bose-Einstein (BEC) de los polaritones² (o excitones), son la manifestación del mismo efecto, a saber, la ruptura espontánea de la simetría de norma [70]. Por esta razón, esperaríamos que en el estudio de dichos fenómenos haya grandes similitudes tanto en las ecuaciones que describen los fenómenos como en las conclusiones que se obtienen.

²En el contexto en el que hablamos, el polaritón es una cuasi partícula formada por un fotón y un excitón. Este último es un estado ligado constituido por un electrón y un agujero (del electrón).

En la BEC de los polaritones tenemos fotones en un semiconductor (o una cavidad semiconductor) acoplados fuertemente a excitaciones electrónicas (excitones) que crean polaritones que poseen una masa efectiva muy pequeña (10^{-5} veces la masa del electrón). El espectro de las excitaciones colectivas (los polaritones) surge como un polo común de la función de Green de dos partículas K y de la función de Green del fotón D , que satisface la ecuación de Dyson $D^{-1} = D^{(0)-1} - \tilde{\Pi}$, donde $D^{(0)-1}$ y $\tilde{\Pi}$ son el propagador libre del fotón y la autoenergía del mismo, respectivamente.

Existen dos algoritmos para calcular el espectro del polaritón. Como ya dijimos, el primero se basa en hallar los polos de la función K , que se obtiene a través de la ecuación de BS y en ella intervienen relaciones autoconsistentes entre magnitudes de una partícula y dos partículas. En términos más específicos, el kernel de la ecuación BS es expresado como una derivada funcional del operador de masa (donde están incluidas las contribuciones de Hartree y de Fock) con respecto a la función G , a su vez, el operador de masa depende de la función de Green de dos partículas, de suerte que se debe resolver de manera autoconsistente la ecuación de Schwinger-Dyson (SD) para la función de Green de una partícula y la ecuación de BS. Esta es una tarea realmente complicada y por esta razón también se considera un enfoque alternativo que se apoya en el hecho de que tanto la autoenergía del fotón $\tilde{\Pi}$ (o función dieléctrica), como la función de Green de dos partículas \tilde{K} excitónica tienen polos comunes. Por definición [70], la función de Green excitónica satisface la ecuación de BS cuando el término de Hartree del operador de masa se ignora. Para encontrar los polos de \tilde{K} se tiene que resolver (de nuevo) en forma autoconsistente la ecuación de Schwinger-Dyson para la función de Green de una partícula y la ecuación de BS, considerando únicamente el término de Fock en el operador de masa. Sin embargo, es posible recibir información sobre la energía de esos polos comunes por medio de la medición de las posiciones de los picos del espectro de absorción excitónica, de manera tal que se construye una expresión para la autoenergía del fotón mediante el uso de parámetros mensurables. El siguiente paso sería el de hallar el espectro de las excitaciones colectivas a través de la solución de las ecuaciones de Maxwell.

Estos son, a grandes rasgos, los métodos para calcular la energía de las excitaciones colectivas. La siguiente cuestión sería: ¿cómo relacionar el modelo de Hubbard con el problema de los polaritones en semiconductores? La manera más sencilla de hacer esta correspondencia se logra a través del empleo de la transformación de Hubbard-Stratonovich (HST), que nos permite pasar del modelo de Hubbard a otro en el cual los fermiones se acoplan a un campo de Bose. A pesar de que existe este mapeo (que además es exacto [45, 50]) entre ambos problemas, no hay manera de construir una expresión de las magnitudes asociadas al campo bosónico por medio de la utilización de algunos parámetros mensurables [70]. El único método que existe para determinar la energía de las excitaciones colectivas consiste en resolver la ecuación de BS (en una GRPA), asumiendo que el operador de masa contempla las dos contribuciones que hemos mencionado.

En la referencia [70] se expone las técnicas y formalismos que permiten hacer una descripción unificada de superconductores (cupratos) y semiconductores, también se muestra la forma de calcular el espectro de las excitaciones mediante los dos algoritmos que hemos explicado. Vale la pena mencionar que en el cálculo se exhibe el poderío de las integrales funcionales de la teoría de campos, cuyo punto fundamental reside en expresar todas las magnitudes físicas de interés en términos de funciones de Green. La discusión completa de los conceptos y las técnicas

funcionales involucradas se pueden complementar con las referencias [30, 47, 52, 71].

En la siguiente sección de esta tesis vamos mostrar el procedimiento que se sigue para resolver las ecuaciones de BS (en una GRPA), que culmina con la determinación de la energía de las excitaciones colectivas. No pretendemos abordar los detalles del tratamiento ni los conceptos que operan en él, con los cuales se justifican y demuestran con todo rigor, que la forma de las ecuaciones o las aproximaciones que vamos a usar son válidas, ya que esta labor ha sido una línea de investigación por sí misma. La revisión minuciosa del tratamiento y la discusión de los conceptos que intervienen en él se puede consultar en las referencias citadas en el párrafo anterior.

4.1. La transformación de Hubbard-Stratonovich y la ecuación de Bethe-Salpeter

Sabemos que las excitaciones de una partícula del hamiltoniano dado por la Ec. (4.1) (lo volvemos a escribir para recordarlo), se manifiestan como polos de la función de Green de una partícula G , mientras que las excitaciones de dos partículas están relacionadas con los polos de la función de Green de dos partículas K . Los polos de estas funciones están definidos como las soluciones de la ecuación de Schwinger-Dyson [72,73] (SD) $G^{-1} = G^{(0)-1} - \Sigma$ y de la ecuación de BS [74] $[K^{(0)-1} - I]\Psi = 0$, respectivamente. Aquí $G^{(0)-1}$ es el propagador de una partícula, Σ es el operador de masa fermiónico (también denominado operador de autoenergía [62]), I es el kernel de la ecuación de BS, Ψ es un operador de campo de Nambu y $K^{(0)} = GG$ es el operador libre de dos partículas, que es un producto de dos funciones de Green de una partícula. Dado que el operador de masa depende de la función de Green de dos partículas, la posición de ambos polos debe obtenerse a través de un método autoconsistente [70].

$$\hat{H} = -J_x \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_x} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - J_y \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_y} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - J_z \sum_{\sigma, \langle i, j \rangle_z} \hat{\psi}_{\sigma, i}^\dagger \hat{\psi}_{\sigma, j} - \sum_{\sigma, i} \mu_\sigma \hat{n}_{\sigma, i} + U \sum_i \hat{n}_{\uparrow, i} \hat{n}_{\downarrow, i} \quad (4.1)$$

Por otra parte, es ampliamente aceptado que la GRPA es una buena aproximación para calcular las excitaciones colectivas en un régimen de acoplamiento débil, por esta razón puede usarse para separar las soluciones de la ecuación de SD y las de la ecuación de BS. En la GRPA las excitaciones de una partícula son reemplazadas por las que se obtienen por medio del proceso que lleva el hamiltoniano de MFT (también denominado HF en la literatura) a una forma diagonal, mientras que los modos colectivos se calculan mediante la resolución de la ecuación de BS asumiendo que las funciones de Green de una partícula han sido calculadas en una aproximación de MFT y que el kernel de la ecuación de BS contiene los términos de Hartree y de Fock.

Hablando en términos generales, existen dos formulaciones distintas de la GRPA que pueden ser usadas para determinar el espectro de las excitaciones colectivas del tipo de hamiltoniano dado por la Ec. (4.1). La primera formulación hace uso del método de la función de Green [30, 52, 71, 75, 77–79], mientras que la segunda se basa en las ecuaciones de Anderson-Rickayzen [80–83]. El método de la función de Green no sólo se ha utilizado para calcular las excitaciones colectivas del problema de la BEC de excitones en los semiconductores [30, 75], sino también en la BEC de pares de Cooper de superconductores estratificados en onda s [77]. Acorde a este método, los modos colectivos se manifiestan como polos de la función de Green de dos partículas K , así como de las funciones de respuesta de espín y de la densidad. Ambas funciones de respuesta pueden expresarse en términos de K , pero es muy común obtener los polos de la función de respuesta de la densidad siguiendo el formalismo de Baym-Kadanoff [84], en el cual dicha función se define por medio de derivadas funcionales de la densidad, con respecto a los campos externos. En términos físicos, este enfoque se centra en la respuesta del sistema bajo estudio a la perturbación de agentes externos [23, 76]. El segundo método usado para analizar el espectro de las excitaciones colectivas del HH comienza con las ecuaciones de Anderson-Rickayzen, en las cuales la GRPA puede reducirse a un conjunto de tres ecuaciones acopladas, en las que el espectro se obtiene por medio de la resolución de un determinante secular de 3×3 [23, 80].

Como ya habíamos comentado anteriormente, la principal dificultad que se presenta con el modelo de Hubbard reside en que la parte de la interacción del hamiltoniano involucra un producto de cuatro operadores de campo, por lo que las correspondientes funciones de Green no pueden ser evaluadas en forma exacta. La idea más sencilla para resolver este problema es aplicar el método de MFT que ya hemos descrito y empleado, que básicamente es una manera de desacoplar los términos de la parte de interacción. Para ir más allá de esta aproximación, usaremos la idea de transformar los términos de cuatro operadores en una forma que involucre términos cuadráticos en los operadores, que puede realizarse a través de la HST para los operadores fermiónicos. En el procedimiento para desacoplar los términos de interacción se usan operadores de campo de Nambu con cuatro componentes:

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(x) \\ \psi_{\downarrow}(x) \\ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(y) & \psi_{\downarrow}^{\dagger}(y) & \psi_{\uparrow}(y) & \psi_{\downarrow}(y) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Donde estamos usando las variables compuestas $y = \{\mathbf{r}, u\}$ y $x = \{\mathbf{r}', u'\}$, con \mathbf{r} y \mathbf{r}' son vectores de posición y, de acuerdo al formalismo de tiempo imaginario (Matsubara), las variables u y u' van de 0 a $\beta = 1/k_B T$ (con $\hbar = 1$). $\psi_{\uparrow}^{\dagger}(x)$ ($\psi_{\uparrow}(x)$) es un operador de campo que crea (destruye) un fermión con coordenadas x . Es conveniente señalar que a partir de este punto y en lo que resta de la tesis, con la finalidad de simplificar la notación, vamos a denotar las matrices con el símbolo “ $\widehat{}$ ” y prescindiremos del mismo para las componentes (que son operadores de campo) del vector dado por la Ec. (4.2). En contraste con enfoques previos, en los que los grados de libertad fermiónicos son integrados después de realizar la HST, nosotros desacoplamos el problema en el que aparecen cuatro operadores, por medio de la introducción de un modelo del sistema que consiste de un campo bosónico que interacciona con los campos fermiónicos $\psi^{\dagger}(x)$ y $\psi(x)$.

Hay tres ventajas que trae consigo el considerar los grados de libertad tanto bosónicos como fermiónicos. En primer lugar, la aproximación que se usa para desacoplar la relación autoconsistente entre el operador de masa y la función de Green de dos partículas, lleva en forma automática a conservar las relaciones entre los operadores porque ella descansa en el hecho de que el kernel de BS puede escribirse en términos de derivadas funcionales de la parte de Fock Σ^F y de Hartree Σ^H del operador de autoenergía, entonces $I = I_d + I_{exc} = \delta\Sigma^F/\delta G + \delta\Sigma^H/\delta G = \delta^2\Phi/\delta G\delta G$ con Φ una funcional. Como ha sido mostrado por Baym [85], cualquier aproximación de autoenergía se conserva siempre que: (I) la autoenergía se escriba como la derivada de una funcional $\Phi[G]$, que en este caso $\Sigma = \delta\Phi[G]/\delta G$ y, (II) la ecuación de SD para G necesariamente se resuelva en forma autoconsistente manteniendo la forma del operador de masa (de autoenergía). La segunda ventaja consiste en que la energía de las excitaciones colectivas del modelo de Hubbard puede calcularse de dos maneras; como polos de la función de Green K y de la función de Green bosónica D o, equivalentemente, como polos de las partes de la densidad y de espín de la función de respuesta general Π . Es necesario aclarar que la función de Green bosónica D se define por la ecuación de Dyson $D = D^{(0)} + D^{(0)}\Pi D^{(0)}$ donde $D^{(0)}$ es el propagador libre del bosón. La tercera ventaja recae en el hecho de que la acción que describe las interacciones en el modelo de Hubbard, es similar a la acción $\psi^{\dagger}A\psi$, con A el campo de Bose del fotón, de la electrodinámica cuántica. Esto permite aplicar el poderío de los métodos de la teoría de campos, tal como el método de las transformaciones de Legendre [86], para derivar la

ecuación SD y las ecuaciones de BS, así como la ecuación de vértice para la función de vértice Γ y la ecuación de Dyson para la función de Green bosónica D .

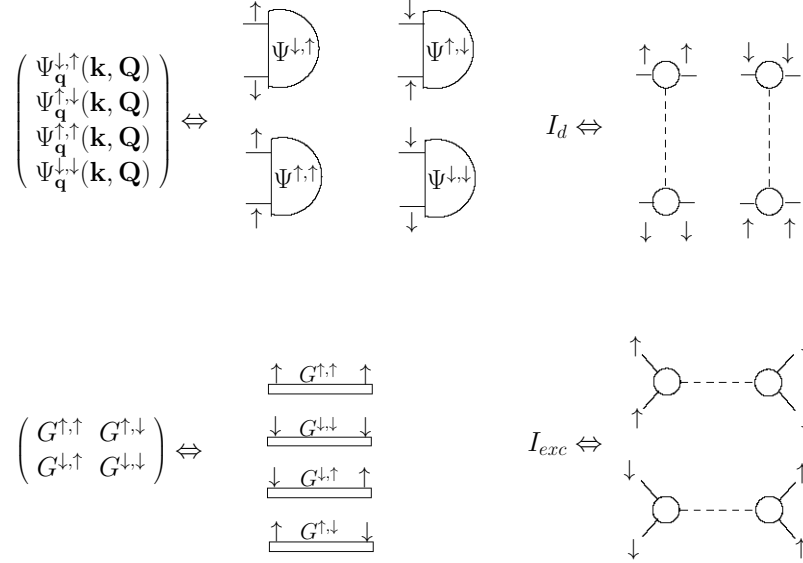


Figura 4.2: Representación, en términos de diagramas, de las amplitudes de BS, las funciones de Green de una partícula, las interacciones directa y de intercambio.

La suposición fundamental del formalismo de la ecuación de BS que vamos a presentar, radica en suponer que los estados ligados de dos fermiones en la red óptica son descritos por las funciones de onda de BS (que llamaremos amplitudes de BS). Las amplitudes de BS determinan la amplitud de probabilidad de encontrar al primer fermión en el sitio de la red i en el momento t_1 y al segundo fermión en el sitio j en el momento t_2 . Las amplitudes de BS dependen de la coordenada de tiempo relativa $t_1 - t_2$ y de la coordenada del centro de masa temporal $(t_1 + t_2)/2$ [87]:

$$\Phi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; t_1, t_2) \exp\{i[\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2 - \omega(\mathbf{Q})(t_1 + t_2)/2]\} \Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j; t_1 - t_2) \quad (4.3)$$

donde $\{n_1, n_2\}$ denotan los números cuánticos de espín, \mathbf{Q} y $\omega(\mathbf{Q})$ son el momento y la energía de las excitaciones colectivas respectivamente. La transformada de Fourier en d dimensiones de $\Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}; t) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)} \Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}; \Omega)$ satisface la siguiente ecuación de BS, que se exhibe en términos de diagramas en la Fig. 4.3.

$$\Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}; \Omega) = G_{n_1 n_3}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \Omega + \omega(\mathbf{Q})) G_{n_4 n_2}(\mathbf{k}, \Omega) \int \frac{d\Omega'}{2\pi} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \times \left[I_d \begin{pmatrix} n_3 & n_5 \\ n_4 & n_6 \end{pmatrix} \left| \mathbf{k} - \mathbf{p}, \Omega - \Omega' \right. \right] + I_{exc} \begin{pmatrix} n_3 & n_5 \\ n_4 & n_6 \end{pmatrix} \left| \mathbf{Q}, \omega(\mathbf{Q}) \right. \right] \Psi_{n_6 n_5}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}; \Omega'). \quad (4.4)$$

Aquí $G_{n_1 n_2}(\mathbf{k}, \Omega)$ es la función de Green de una partícula, I_d e I_{exc} (ver Fig. 4.2) son las partes directa (Fock) y de intercambio (Hartree) del kernel de BS. Es conveniente mencionar que en problemas similares de interacción entre fotones y electrones en electrodinámica cuántica, la

parte directa del kernel de BS depende de la frecuencia, por lo que la solución de la ecuación de BS es más complicada. En el caso del modelo de Hubbard, el propagador del bosón es independiente de la frecuencia, por esta causa, la siguiente ecuación de BS para las amplitudes de BS a tiempos iguales $\Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} \Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, \Omega)$ toma lugar:

$$\Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} G_{n_1 n_3}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \Omega + \omega(\mathbf{Q})) G_{n_4 n_2}(\mathbf{k}, \Omega) \times \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \left[I_d \left(\begin{array}{cc} n_3 & n_5 \\ n_4 & n_6 \end{array} \middle| \mathbf{k} - \mathbf{p} \right) + I_{exc} \left(\begin{array}{cc} n_3 & n_5 \\ n_4 & n_6 \end{array} \middle| \mathbf{Q} \right) \right] \Psi_{n_6 n_5}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}). \quad (4.5)$$

Esta última forma de las amplitudes de BS serán nuestro punto de partida para el cálculo de la energía de las excitaciones colectivas de nuestro sistema.

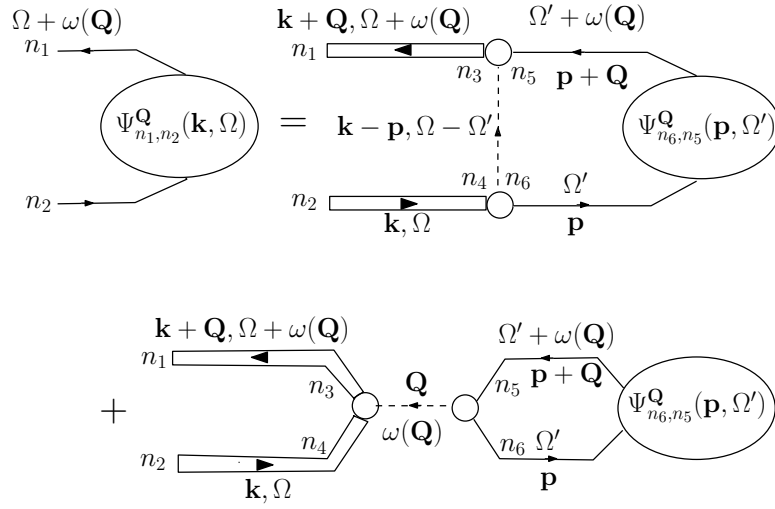


Figura 4.3: Representación mediante diagramas de la ecuación de BS (4.4) para la amplitud $\Psi_{n_2 n_1}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, \Omega)$. La función de Green de una partícula $G_{n_2 n_1}(\mathbf{k}, \Omega)$ se representa por dos líneas sólidas, orientadas en la dirección de propagación. En cada uno de los vértices (representados por círculos) se conservan la energía y el momento.

4.2. El espectro de las excitaciones colectivas

A continuación vamos a derivar la energía de las excitaciones colectivas $\omega(\mathbf{Q})$ partiendo de la ecuación de BS en la GRPA dada por la Ec. (4.5). El vector que contiene las amplitudes de BS con dos índices de espín $\{\uparrow, \downarrow\}$ es

$$\widehat{\Psi}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{q}}^{\downarrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \Psi_{\mathbf{q}}^{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \Psi_{\mathbf{q}}^{\uparrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \Psi_{\mathbf{q}}^{\downarrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Como hemos estado insistiendo, vamos a suponer que el operador de masa es una suma de los términos de Fock Σ^F y de Σ^H . Este último término genera la interacción de intercambio $I_{exc} = \delta\Sigma^H/\delta G$ en el kernel de la ecuación de BS, la parte directa de la interacción $I_{exc} = \delta\Sigma^H/\delta G$ se origina en el término de Fock. En la Fig. 4.4 mostramos ambas contribuciones en términos de diagramas, el término directo se representa por una línea segmentada vertical mientras que el término de intercambio se representa por una línea segmentada horizontal. También se ilustran la representación de la ecuación de BS y la función de Green de una partícula. En estas aproximaciones, la ecuación de BS para las amplitudes de BS es $\widehat{\Psi} = \widehat{K}^{(0)}[I_d + I_{exc}]\widehat{\Psi}$, donde vale la pena recordar que $\widehat{K}^{(0)}$ es un producto de funciones de Green de una partícula (calculadas en una MFT) cuya forma explícita veremos próximamente.

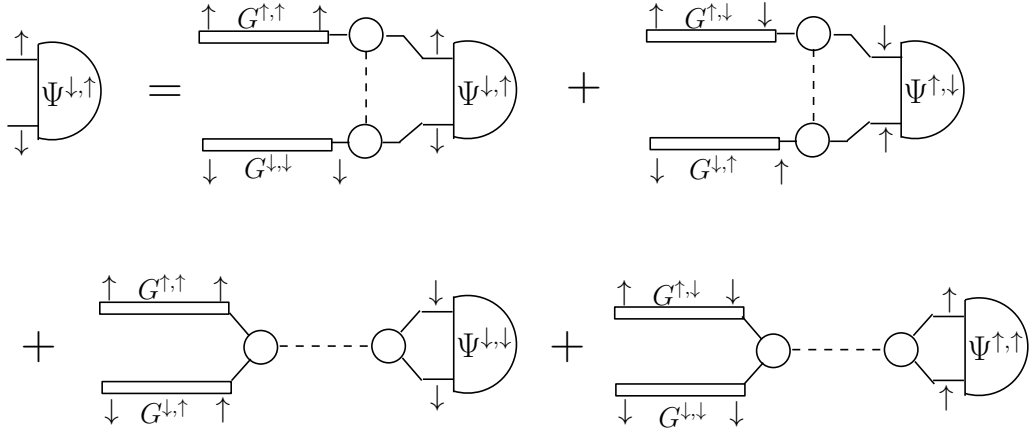


Figura 4.4: Representación en términos de diagramas para la ecuación de BS de la amplitud $\Psi^{\downarrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$.

En la Fig. 4.4 mostramos la ecuación de BS para la amplitud $\Psi_{\mathbf{q}}^{\downarrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$, las otras tres ecuaciones para $\Psi_{\mathbf{q}}^{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$, $\Psi_{\mathbf{q}}^{\uparrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$ y $\Psi_{\mathbf{q}}^{\downarrow, \downarrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$ son similares. La ecuación se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Psi^{\downarrow, \uparrow}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = & - \int \frac{d\Omega}{2\pi} G_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \omega + \Omega) G_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}, \Omega) \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \Psi^{\downarrow, \uparrow}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ & - \int \frac{d\Omega}{2\pi} G_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \omega + \Omega) G_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}, \Omega) \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \Psi^{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d\Omega}{2\pi} G_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \omega + \Omega) G_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}, \Omega) \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \Psi^{\downarrow,\downarrow}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\
& + \int \frac{d\Omega}{2\pi} G_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \omega + \Omega) G_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k}, \Omega) \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \Psi^{\uparrow,\uparrow}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En donde el kernel actúa sobre los índices de espín como sigue

$$I_d \begin{pmatrix} n_3 & n_5 \\ n_4 & n_6 \end{pmatrix} = -U \delta_{n_3, n_5} \delta_{n_2, n_4}, \quad I_{exc} \begin{pmatrix} n_3 & n_5 \\ n_4 & n_6 \end{pmatrix} = U \delta_{n_3, n_5} \delta_{n_2, n_4}.$$

Por otra parte, las funciones de Green de una partícula en una aproximación de MFT están dadas por

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} G_{\mathbf{q}}^{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}, \omega_m) & G_{\mathbf{q}}^{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}, \omega_m) \\ G_{\mathbf{q}}^{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k}, \omega_m) & G_{\mathbf{q}}^{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}, \omega_m) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

cuyos elementos de matriz son

$$G_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k}, \omega_m) = \frac{A_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k})}{\omega_m - \omega_+(\mathbf{k}, \mathbf{q})} + \frac{B_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k})}{\omega_m + \omega_-(\mathbf{k}, \mathbf{q})} \tag{4.9}$$

con $\omega_m = (2\pi)(m + 1/2)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $i, j = \{\uparrow, \downarrow\}$. $A_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k})$ y $B_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k})$ son las componentes de las siguientes matrices

$$\widehat{A}_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) & u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \\ u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) & v_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} v_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) & -u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) \\ -u_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})v_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) & u_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

observamos que $G^{i,j}(\mathbf{k}, \omega_m) = G^{j,i}(\mathbf{k}, \omega_m)$ con $i \neq j$, esta característica se hereda a $A_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k}) = A_{\mathbf{q}}^{ji}(\mathbf{k})$ y $B_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k}) = B_{\mathbf{q}}^{ji}(\mathbf{k})$ cuando $i \neq j$. El término $i0^+$ indica en qué mitad del plano de la frecuencia compleja hay convergencia cuando se realizan las integrales. Después de realizar la integración a lo largo de la frecuencia, llegamos a la siguiente ecuación matricial para las amplitudes de BS

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = -U \widehat{D} \sum_{\mathbf{q}} \widehat{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + U \widehat{M} \sum_{\mathbf{q}} \widehat{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}). \tag{4.11}$$

donde, $U \widehat{D}$ and $U \widehat{M}$ simbolizan las interacciones directa y de intercambio en forma respectiva

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) & 0 & 0 \\ K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) & 0 & 0 \\ K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \downarrow, \uparrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) & 0 & 0 \\ K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \uparrow, \downarrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) \\ 0 & 0 & K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) \\ 0 & 0 & K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \downarrow, \downarrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) \\ 0 & 0 & K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p), & K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow, \uparrow, \uparrow, \downarrow)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Aquí $\omega_p = (2\pi/\beta)p$; $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es la frecuencia de Bose (recordando que es herencia del campo bosónico introducido por la HST), también se ha introducido el propagador de dos partículas $K_{\mathbf{q}}^{(i,j,k,l)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) = \sum_{\omega_m} G_{\mathbf{q}}^{i,j}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}; \omega_p + \omega_m) G_{\mathbf{q}}^{k,l}(\mathbf{k}; \omega_m)$, con $i, j, k, l = \uparrow, \downarrow$. El operador de dos partículas se define como sigue:

$$\begin{aligned}
K_{\mathbf{q}}^{(i,j,k,l)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p \rightarrow \omega + i0^+) &= \sum_{\omega_m} G_{\mathbf{q}}^{i,j}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}, \omega_p + \omega_m) G_{\mathbf{q}}^{i,j}(\mathbf{k}, \omega_m) |_{\omega_p \rightarrow \omega + i0^+} = \\
\tilde{A}_{\mathbf{q}}^{ij} A_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k})) - f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}))}{\omega - [\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}) - \omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k})] + i0^+} &+ \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{ij} B_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{-f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k})) + f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}))}{\omega - [-\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}) + \omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k})] + i0^+} \\
\tilde{A}_{\mathbf{q}}^{ij} B_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{1 - f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k})) - f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}))}{\omega - [\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}) + \omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k})] + i0^+} &+ A_{\mathbf{q}}^{ij} \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k})) + f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q})) - 1}{\omega - [-\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}) - \omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k})] + i0^+}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $A_{\mathbf{q}}^{ij} = A_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k})$, $B_{\mathbf{q}}^{ij} = B_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k})$, $\tilde{A}_{\mathbf{q}}^{ij} = A_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k} + \mathbf{Q})$ y $\tilde{B}_{\mathbf{q}}^{ij} = B_{\mathbf{q}}^{ij}(\mathbf{k} + \mathbf{Q})$. Con esto, el propagador de dos partículas se puede escribir en la siguiente forma compacta:

$$\begin{aligned}
K_{\mathbf{q}}^{(i,j,k,l)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) &= \\
\tilde{A}_{\mathbf{q}}^{ij} A_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k})) - f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}))}{W + i0^+} &+ \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{ij} B_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{-f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k})) + f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}))}{Z + i0^+} \\
\tilde{A}_{\mathbf{q}}^{ij} B_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{1 - f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k})) - f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q}))}{X + i0^+} &+ A_{\mathbf{q}}^{ij} \tilde{B}_{\mathbf{q}}^{kl} \frac{f(\omega_+(\mathbf{q}, \mathbf{k})) + f(\omega_-(\mathbf{q}, \mathbf{k} + \mathbf{Q})) - 1}{Y + i0^+}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) + E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})$, $\epsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) - E_{\mathbf{q}}(\mathbf{k})$, $\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = \eta_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}) - \eta_{\mathbf{q}}(\mathbf{k} + \mathbf{Q})$. Además $X = \omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) - \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$, $Y = \omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) + \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$, $W = \omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) - \epsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$ y $Z = \omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) + \epsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$. Teniendo en cuenta toda la información anterior, el procedimiento para resolver la ecuación de BS se reduce a encontrar las condiciones bajo las que el sistema de ecuaciones (algebraicas) (4.11) tiene solución, considerando las ecuaciones (4.8)-(4.10) y (4.12)-(4.15).

El conjunto de ecuaciones (4.11) puede simplificarse enormemente por medio de la introducción de una nueva matriz $\hat{\Phi} = \hat{T} \hat{\Psi}$ ($\hat{T}^{-1} = \frac{1}{2} \hat{T}$), donde

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

con $\hat{\sigma}_x$ y $\hat{\sigma}_z$ las matrices de Pauli, de manera que el nuevo sistema a resolver es:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = \frac{U}{2} \hat{T} \left[\hat{M} - \hat{D} \right] \hat{T} \sum_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \tag{4.17}$$

Con la transformación que involucra a la Ec. (4.16), es posible dotar con mayor simetría al nuevo sistema de ecuaciones (4.17), que se traduce en una mayor facilidad en su resolución. En particular, recordando la simetría de las funciones de Green dadas por la Ec. (4.9), tenemos que $K_{\mathbf{q}}^{(i,j,k,l)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) = K_{\mathbf{q}}^{(j,i,l,k)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) = K_{\mathbf{q}}^{(i,j,l,k)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p) = K_{\mathbf{q}}^{(j,i,k,l)}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}, \omega_p)$, por lo que solamente existen nueve funciones de Green de dos partículas independientes. Estas características conducen a la siguiente igualdad

$$\widehat{T} \left[\widehat{M} - \widehat{D} \right] \widehat{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{14} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{24} \\ -\mathcal{A}_{13} & -\mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{34} \\ \mathcal{A}_{14} & \mathcal{A}_{24} & -\mathcal{A}_{34} & \mathcal{A}_{44} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

donde

$$\mathcal{A}_{11} = -(K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow)} + K^{(\uparrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow)}), \quad \mathcal{A}_{12} = K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow)}$$

$$\mathcal{A}_{13} = K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow)}, \quad \mathcal{A}_{14} = K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow)}$$

$$\mathcal{A}_{22} = -K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow)} + 2K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow)} - K^{(\uparrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow)}, \quad \mathcal{A}_{23} = K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow)}$$

$$\mathcal{A}_{24} = K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow)}, \quad \mathcal{A}_{33} = K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} + 2K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow)} + K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)}$$

$$\mathcal{A}_{34} = K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)} \text{ y } \mathcal{A}_{44} = -K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow)} + 2K_{\mathbf{q}}^{(\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow)} - K_{\mathbf{q}}^{(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow)}.$$

Por sencillez, hemos omitido los argumentos de las funciones de dos partículas. El conjunto de ecuaciones (4.17), con la forma dada por (4.18) puede resolverse para $T \neq 0$. Sin embargo, con fines ilustrativos, esbozaremos el procedimiento algebraico que permite encontrar la condición que se debe satisfacer para que el sistema de ecuaciones de BS tenga soluciones no triviales, cuando la temperatura es igual a cero. Es necesario precisar que los pasos esenciales del método que vamos a describir (cuando $T = 0$), puede aplicarse cuando la temperatura es diferente de cero, aunque la dificultad en la resolución de las ecuaciones aumenta considerablemente. A $T = 0$ la función de distribución de Fermi-Dirac se reemplaza por la función escalón, $f(z) = \Theta(-z)$, considerando las ecuaciones (4.15), entonces la Ec. (4.17) es

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \Phi_2(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \Phi_3(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \Phi_4(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \begin{pmatrix} -l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^2 \mathcal{C}_- & -l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ & l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ & l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_- \\ -l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ & -\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^2 \mathcal{C}_- & \gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_- & \gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ \\ -l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ & -\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_- & \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^2 \mathcal{C}_- & \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ \\ l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_- & \gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ & -\tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} \mathcal{C}_+ & -m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^2 \mathcal{C}_- \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ \Phi_2(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ \Phi_3(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ \Phi_4(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Aquí se han usado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} &= u(\mathbf{k})u(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) + v(\mathbf{k})v(\mathbf{k} + \mathbf{Q}), \\ l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} &= u(\mathbf{k})u(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) - v(\mathbf{k})v(\mathbf{k} + \mathbf{Q}), \\ \tilde{\gamma}_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} &= u(\mathbf{k})v(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) - u(\mathbf{k} + \mathbf{Q})v(\mathbf{k}), \\ m_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} &= u(\mathbf{k})v(\mathbf{k} + \mathbf{Q}) + u(\mathbf{k} + \mathbf{Q})v(\mathbf{k}),\end{aligned}$$

además de

$$\mathcal{C}_- = \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} \text{ y } \mathcal{C}_+ = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}.$$

Las ecuaciones (4.19) puede simplificarse si introducimos nuevas funciones con la forma:

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\Phi_1(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}{l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}}, \quad \tilde{\Phi}_2 = \frac{\Phi_2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}{\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}}, \quad \tilde{\Phi}_3 = \frac{\Phi_3(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}{\tilde{\gamma}_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}}, \quad \text{y } \tilde{\Phi}_4 = -\frac{\Phi_4(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}{m_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}}.$$

A partir de estas funciones y de la forma de las ecuaciones (4.19) se sigue que $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_4$ y $\tilde{\Phi}_2 = \tilde{\Phi}_3$, por lo que ahora es posible trabajar con dos incógnitas que pueden expresarse mediante las funciones de Green de dos partículas que ya conocemos. Esta simplificación permite definir $G^\pm = (\tilde{\Phi}_1 \pm \tilde{\Phi}_2)/2$, de suerte que ahora

$$\begin{aligned}[\omega(\mathbf{Q}) + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) - \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})] G^+(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) &= -\frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} [\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} + l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} l_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}] G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ &+ \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} [\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} - l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} l_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}] G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} [G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) - G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q})] \\ &- \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} m_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} m_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} [G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q})]\end{aligned}\quad (4.20)$$

y

$$\begin{aligned}[\omega(\mathbf{Q}) + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) + \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})] G^-(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} [\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} + l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} l_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}] G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \\ &- \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} [\gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} - l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} l_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}] G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} [G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) - G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q})] \\ &+ \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} U \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} m_{\mathbf{k},\mathbf{Q}} m_{\mathbf{q},\mathbf{Q}} [G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q})].\end{aligned}\quad (4.21)$$

El siguiente procedimiento consiste en reescribir la ecuación de BS en la siguiente forma

$$[G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) + G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q})] = \frac{U[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})] \gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})} \Gamma(\mathbf{Q}) + \frac{U \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})} L(\mathbf{Q})$$

$$-\frac{U[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]\tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}\tilde{\Gamma}(\mathbf{Q}) + \frac{U\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}M(\mathbf{Q}). \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} [G^+(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) - G^-(\mathbf{q}, \mathbf{Q})] &= \frac{U\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{Q})\gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}\Gamma(\mathbf{Q}) + \frac{U[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}L(\mathbf{Q}) \\ &- \frac{U\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})\tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}\tilde{\Gamma}(\mathbf{Q}) + \frac{U[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}M(\mathbf{Q}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{Q}) &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} Z_-(\mathbf{k}, \mathbf{Q}), \quad L(\mathbf{Q}) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} l_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} Z_+(\mathbf{k}, \mathbf{Q}), \quad \tilde{\Gamma}(\mathbf{Q}) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} Z_-(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ &\text{y } M(\mathbf{Q}) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}} Z_+(\mathbf{k}, \mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

con $Z_{\pm} = G^+(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \pm G^-(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$. A través de las ecuaciones (4.23)-(4.24), se obtienen cuatro ecuaciones acopladas homogéneas, (recordando que $\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_4$ y $\tilde{\Phi}_2 = \tilde{\Phi}_3$ y que $G^{\pm} = (\tilde{\Phi}_1 \pm \tilde{\Phi}_2)/2$) que pueden expresarse en la forma $\widehat{M}_Z \Xi = 0$, con \widehat{M}_Z una matriz de 4×4 y $\Xi = (\Gamma(\mathbf{Q}) \quad L(\mathbf{Q}) \quad M(\mathbf{Q}) \quad \tilde{\Gamma}(\mathbf{Q}))^T$ (\mathcal{T} indica transposición). Los polos $\omega(\mathbf{Q})$ se obtienen haciendo que $\mathcal{Z} = \det \widehat{M}_Z = 0$. El determinante es

$$\begin{vmatrix} U^{-1} + I_{\gamma, \gamma}^{\mathbf{q}} & J_{\gamma, l}^{\mathbf{q}} & I_{\gamma, \tilde{\gamma}}^{\mathbf{q}} & J_{\gamma, m}^{\mathbf{q}} \\ J_{\gamma, l}^{\mathbf{q}} & U^{-1} + I_{l, l}^{\mathbf{q}} & J_{l, \tilde{\gamma}}^{\mathbf{q}} & I_{l, m}^{\mathbf{q}} \\ I_{\gamma, \tilde{\gamma}}^{\mathbf{q}} & J_{l, \tilde{\gamma}}^{\mathbf{q}} & -U^{-1} + I_{\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}}^{\mathbf{q}} & J_{\tilde{\gamma}, m}^{\mathbf{q}} \\ J_{\gamma, m}^{\mathbf{q}} & I_{l, m}^{\mathbf{q}} & J_{\tilde{\gamma}, m}^{\mathbf{q}} & U^{-1} + I_{m, m}^{\mathbf{q}} \end{vmatrix} \quad (4.25)$$

y se han introducido los símbolos $I_{a,b}^{\mathbf{q}}$ y $J_{a,b}^{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} I_{a,b}^{\mathbf{q}} &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} \varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})} \\ J_{a,b}^{\mathbf{q}} &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{a_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}, \mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} [\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]}{[\omega + \Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})]^2 - \varepsilon_{\mathbf{q}}^2(\mathbf{k}, \mathbf{Q})}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A partir del determinante anterior se puede calcular la energía de las excitaciones colectivas cuando la temperatura es igual a cero. Si la temperatura es diferente de cero, el procedimiento es más complejo y elaborado, en el trayecto de la resolución se requiere de diversas manipulaciones y transformaciones. Sin embargo, el procedimiento sigue los pasos esenciales que discutimos recientemente, inicia con la Ec. (4.18) cuyos elementos de matriz son combinaciones de las funciones de Green de dos partículas que cuando $T \neq 0$ están dadas por la Ec. (4.15). Finalmente, también se llega a un sistema de ecuaciones acoplado y homogéneo, cuya condición necesaria para la existencia de soluciones distintas de cero es que el determinante asociado al sistema se anule. A temperatura distinta de cero el determinante es

$$\mathcal{Z} = \begin{vmatrix} U^{-1} + (I_{\gamma,\gamma} - L_{\tilde{\gamma},\tilde{\gamma}}) & (J_{\gamma,l} - K_{m,\tilde{\gamma}}) & (I_{\gamma,\tilde{\gamma}} + L_{\gamma,\tilde{\gamma}}) & (J_{\gamma,m} + K_{l,\tilde{\gamma}}) \\ (J_{\gamma,l} - K_{m,\tilde{\gamma}}) & U^{-1} + (I_{l,l} - L_{m,m}) & (J_{l,\tilde{\gamma}} + K_{m,\gamma}) & (I_{l,m} + L_{l,m}) \\ (I_{\gamma,\tilde{\gamma}} + L_{\gamma,\tilde{\gamma}}) & (J_{l,\tilde{\gamma}} + K_{m,\gamma}) & -U^{-1} + (I_{\tilde{\gamma},\tilde{\gamma}} - L_{\gamma,\gamma}) & (J_{\tilde{\gamma},m} - K_{\gamma,l}) \\ (J_{\gamma,m} + K_{l,\tilde{\gamma}}) & (I_{l,m} + L_{l,m}) & (J_{\tilde{\gamma},m} - K_{\gamma,l}) & U^{-1} + (I_{m,m} - L_{l,l}) \end{vmatrix}, \quad (4.27)$$

donde se han empleado los siguientes símbolos

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} \left[\frac{1-f(\omega_-(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_+(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})-\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} - \frac{1-f(\omega_+(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_-(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})+\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} \right], \\ J_{a,b} &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} \left[\frac{1-f(\omega_-(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_+(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})-\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} + \frac{1-f(\omega_+(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_-(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})+\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} \right], \\ K_{a,b} &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} \left[\frac{f(\omega_-(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_-(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})+\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} + \frac{f(\omega_+(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_+(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})-\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} \right], \\ L_{a,b} &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} \left[\frac{f(\omega_-(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_-(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})+\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} - \frac{f(\omega_+(\mathbf{k},\mathbf{q})) - f(\omega_+(\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}))}{\omega+\Omega_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})-\varepsilon_{\mathbf{q}}(\mathbf{k},\mathbf{Q})} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

a y b pueden tomar un valor dentro en el siguiente conjunto

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} &= u_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}}, \\ l_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} &= u_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} - v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}}, \\ \tilde{\gamma}_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} &= u_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} - u_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}, \\ m_{\mathbf{k},\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} &= u_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} + u_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Si en el determinante (4.27) anulamos los términos que contengan todos los elementos con subíndices $\tilde{\gamma}$, obtenemos el espectro reportado en la referencia [82] en forma de un determinante de 3×3 y también se reduce, haciendo tender la temperatura a cero a los determinantes publicados en [52], para una mezcla *equilibrada* de fermiones con espín opuesto. Por otro lado, el determinante (4.27) tiene la misma forma (sin pasar por alto que los coeficientes dados por las ecuaciones (4.28) son diferentes) que el determinante reportado en la publicación [47], de un gas de Fermi compuesto por poblaciones con el mismo número de átomos con espines opuestos, pero que están siendo confinados por medio de una red óptica móvil, lo que ilustra que el método que acabamos de seguir, para resolver la ecuación de BS con la que se obtiene el espectro de las excitaciones colectivas, hace posible describir una variedad de sistemas cuánticos compuestos a través de un enfoque unificado, que parte de que tanto el sistema polarizado en una red óptica estacionaria como la mezcla sin polarización en una red óptica móvil siguen la misma ecuación de BS dada por la Ec. (4.5). Consideramos necesario recordar que para calcular la energía de las excitaciones colectivas, es indispensable conocer los valores de polarización y temperatura en los que se presenta la fase FFLO (es decir, el diagrama de fases), de lo contrario pueden elegirse valores en los que el sistema está en la fase normal.

Reiteramos que a partir de la ecuación $\mathcal{Z} = 0$, vamos a calcular el espectro. Por el momento, podemos adelantar ciertos rasgos que deben observarse en la curva de las excitaciones colectivas. Por ejemplo, sabemos que en concordancia con el Teorema de Goldstone (TG), que cuando $\mathbf{Q} \rightarrow 0$ entonces $\omega \rightarrow 0$. En este límite $J_{a,b}$, $K_{a,b}$ y $L_{a,b}$ convergen a cero y la ecuación secular se reduce a la ecuación de gap, que en este nuevo formalismo se escribe $0 = 1 + UI_{\gamma=1,\gamma=1}$, que se

conoce solución trivial a las ecuaciones de BS [30, 38, 39, 52, 60]. De esta forma, las ecuaciones de BS están en concordancia con el TG. De acuerdo a este teorema, la invarianza de norma es restablecida por la existencia del modo de Goldstone cuya energía se aproxima a cero cuando $\mathbf{Q} \rightarrow 0$. En términos más generales el TG afirma que si en una teoría invariante de Lorentz con una métrica definida positiva, se rompe una simetría continua, entonces aparecen excitaciones sin masa [89].

Con lo anterior, esperamos que el espectro tenga una dependencia lineal cuando $\mathbf{Q} \rightarrow 0$, lo que significa que la velocidad del sonido en este límite sea independiente del vector de las excitaciones colectivas \mathbf{Q} y que comience en el origen de coordenadas. De esta manera, las características físicas reveladas y anticipadas por el TG van a dirigir el comportamiento del espectro en la región de energía baja, que servirá como guía en la etapa inicial de la resolución numérica del determinante (4.27).

El siguiente procedimiento es construir la curva cuando sabemos qué pasa cuando $\mathbf{Q} \rightarrow 0$, y para ello es necesario echar mano de un elaborado procedimiento (ver Apéndice B). Con el fin de simplificar esta formidable tarea suponemos (sin pérdida de generalidad) que el momento de las excitaciones colectivas \mathbf{Q} tiene solamente una componente espacial distinta de cero, con $-\pi/a \leq Q_x \leq \pi/a$. Sabemos que cuando los valores de Q_x son cercanos a cero, la energía de las excitaciones es lineal y esto es conocido como *modo de Goldstone* como habíamos anticipado, esta característica es muy importante para el cálculo de la energía de las excitaciones, ya que en la resolución numérica de la ecuación $\mathcal{Z} = 0$ aparecen soluciones sin significado físico que son descartadas debido a que no satisfacen las propiedades requeridas por el TG. Adelantamos que la parte negativa del espectro en el caso cuasi-1D no es satisfactoria porque no comienza en el origen, y que esta situación es causada por la precisión que estamos aplicando en la integración numérica del cálculo; no debido al formalismo que estamos utilizando.

En la siguiente sección vamos a revisar las características, tanto físicas como geométricas, que debe cumplir la energía de las excitaciones colectivas para determinar si el sistema sea un superfluido. Como veremos, en esta etapa cobra gran relevancia el criterio de Landau (CL) de la superfluidez, el cual nos proporciona información en la descripción del proceso de generación de excitaciones (las cuales generan disipación de energía) desde un punto de vista microscópico y cómo se elude dicho proceso en los superfluidos. Observaremos cómo se calculan ciertas magnitudes físicas que nos ayudan a entender aspectos dinámicos del sistema y que pueden ser verificados experimentalmente, entre las que se encuentra la velocidad del sonido.

4.3. El criterio de Landau de la superfluidez

Dentro de los fenómenos físicos que tienen lugar en la física de muchos cuerpos cuánticos, podemos atestiguar que la superfluidez es uno de los más fascinantes³. Una de las razones que sustentan esta afirmación es su naturaleza extraordinaria, ya que la superfluidez es un fenómeno físico *macroscópico* en el que se manifiestan las propiedades cuánticas (microscópicas) de la materia. A lo largo del siglo anterior, nos hemos sorprendido con las propiedades que han sido expuestas por los líquidos de helio; por ejemplo, en el ^4He (bosón), la capacidad que tiene de subir por las paredes de un contenedor (debido a la pérdida de viscosidad) sin las restricciones que poseen los líquidos normales, fenómeno conocido como efecto sifón, o la capacidad que tiene de propagarse a través de medios porosos que los líquidos normales no pueden penetrar, o más recientemente, con el descubrimiento de las fases superfluidas [8] del ^3He (fermión) y, finalmente, como las líneas de investigación novedosas centradas en las propiedades de rotación de los superfluidos [9, 14].

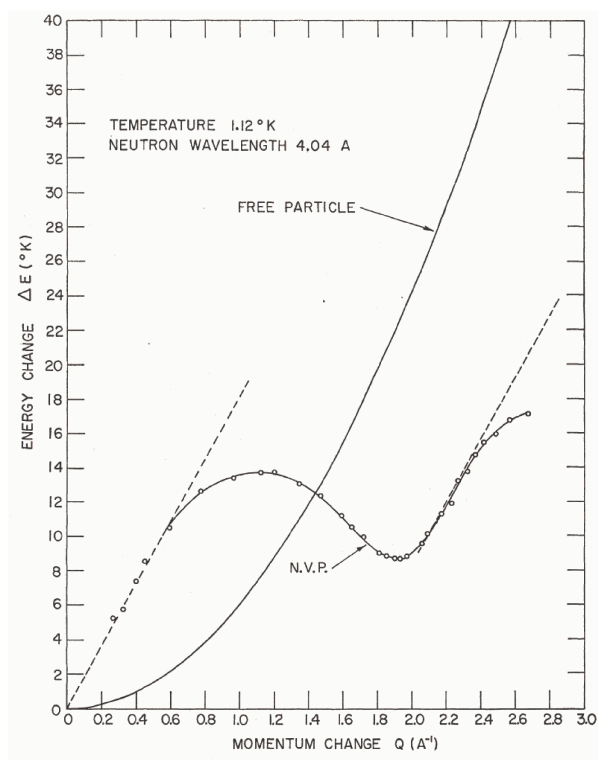


Figura 4.5: Curva de intercambio de energía ΔE para el helio líquido a 1.12 K como función de la magnitud del momento transferido Q . En esta gráfica se muestra el espectro de las excitaciones en el ^4He producidas por colisiones de neutrones lentos (con longitud de onda de 4.04 \AA). También se muestra la curva de dispersión de una partícula libre (Free Particle) para efectos comparativos. Imagen tomada de la referencia [94].

Otra rasgo significativo del fenómeno de la superfluidez, es la estrecha similitud que guarda con la superconductividad convencional, de hecho, en ambos fenómenos ocurre una abrupta

³Para una revisión más completa de la fenomenología de la fase superfluida ver los trabajos pioneros [92, 93].

desaparición de la fricción a algún tipo de movilidad, que tiene lugar a temperaturas bajas. Recordemos además que en secciones anteriores vimos que las fases FFLO fueron pensadas originalmente para entender un mecanismo magnético capaz de destruir la superconductividad en metales. Sabemos que en la teoría BCS (y extensiones de la misma) los electrones forman pares de Cooper (estado base) y que la existencia de una brecha (gap) de energía entre el estado base y los estados excitados, es responsable de que un sistema permanezca con la condición de superconductor. Más adelante veremos que el mínimo rotónico cumple una función similar en los sistemas superfluidos. La Fig. 4.5 muestra la gráfica de la energía de excitación como función del momento del ^4He superfluido. Es oportuno mencionar que esta curva puede determinarse a partir de primeros principios con gran precisión [95], incluso para valores del momento grandes [96] (dos veces el momento del rotón). Observamos que para valores del momento cercanos a cero la energía de excitación es lineal, de acuerdo al comportamiento esperado por el TG.

En esta sección repasaremos con cierto detenimiento, el CL [50, 97, 98, 100] de la superfluidez con el objetivo de determinar, a partir de las características geométricas de la curva de las excitaciones elementales, si el sistema que hemos estado analizando posee dicha propiedad. Como veremos a continuación, el CL nos permite interpretar dicho fenómeno desde una óptica microscópica y lo repasaremos siguiendo un razonamiento debido a Landau, en el que en primera instancia supuso que el transporte de las partículas generaba excitaciones en el líquido, es decir, partió del proceso inverso. Posteriormente examinaremos cómo calcular la velocidad crítica y la velocidad del sonido, una vez que tenemos la curva de las excitaciones colectivas.

4.3.1. Estructura rotónica de la curva de las excitaciones colectivas del gas de Fermi polarizado

El flujo de corriente estacionario en medios normales se impide por el mecanismo de disipación de energía, es decir, las partículas que constituyen el fluido son dispersadas por las imperfecciones del medio y convierten parte de su energía en la creación de excitaciones elementales. De hecho, hablando en términos macroscópicos, la conversión de energía cinética en excitaciones elementales se manifiesta por sí misma en la producción de calor. En los superfluidos este mecanismo está desactivado dado que el flujo de los átomos es realizado sin disipación.

¿Cómo se elude la disipación de energía en los superfluidos? En primer lugar podríamos decir que si reducimos la cantidad de energía almacenada en el sistema, esperaríamos que no hubiese una cantidad de energía suficiente para crear excitaciones elementales, sin embargo, esta situación no se presenta en los superfluidos. De acuerdo al TG [50, 60], se espera que la energía de las excitaciones elementales tenga una dependencia lineal cuando el valor del momento de las excitaciones es cercano cero, lo que físicamente significa que existen excitaciones colectivas de muy baja energía, ocasionando que en el sistema siempre haya una cantidad de energía suficiente para generar las excitaciones. A continuación vamos a seguir un razonamiento debido a Landau en el que se analiza cómo se evita el proceso de disipación de energía en los superfluidos.

Consideremos el movimiento de algún fluido a través de un tubo, como se ilustra en la Fig. 4.6,

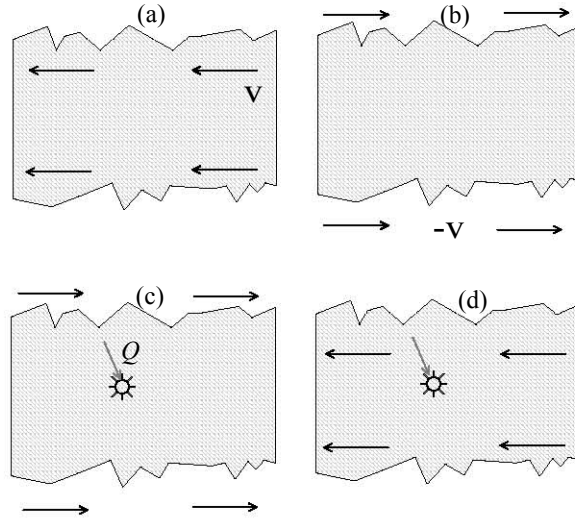


Figura 4.6: En (a) vemos al fluido desplazándose hacia la izquierda por un tubo visto desde el sistema de referencia del laboratorio donde el tubo está en reposo, (b) es el sistema de referencia en el que el fluido está en reposo y el tubo se mueve hacia la derecha. En (c) ocurre un proceso con disipación de la energía, que es producto de la interacción del fluido con el tubo, que crea una excitación (cuasi partícula) y en (d) regresamos al sistema de referencia del laboratorio considerando que ya existe la excitación.

que se desplaza a una velocidad uniforme⁴ \mathbf{v} y que tiene una masa M de modo tal que su energía cinética es $E_1 = M\mathbf{v}^2/2$. Efectuemos una transformación galileana tal que nos deje ver las cosas desde el punto de vista del fluido como en (b), en la cual son las paredes del tubo las que se mueven con una velocidad $-\mathbf{v}$. Ahora supongamos que las fuerzas de fricción entre el fluido y las paredes del tubo promueven la creación de excitaciones elementales de momento \mathbf{Q} con energía $\omega(\mathbf{Q})$, que ocasionan que el fluido ya no esté en reposo (c). En este marco de referencia la energía del fluido es $E' = \omega(\mathbf{Q})$ y el momento es $\mathbf{P}' = \mathbf{Q}$. Si hacemos otra transformación galileana de vuelta al marco de referencia del laboratorio (d), ahora es:

$$E_2 = \frac{(\mathbf{P}' + M\mathbf{v})^2}{2M} + E' = \frac{M\mathbf{v}^2}{2} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} + \frac{\mathbf{Q}^2}{2M} + \omega(\mathbf{Q}). \quad (4.29)$$

Es posible despreciar el tercer término del miembro derecho de la Ec. (4.29) suponiendo que la masa M del fluido es suficientemente grande. Dado que la energía necesaria para crear la excitación debe ser provista por el líquido y, que estamos considerando un proceso con disipación que reduce la energía del sistema ($E_1 > E_2$), entonces tenemos que el cambio en la energía del fluido

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \omega(\mathbf{Q}) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} < 0,$$

lo cual implica que $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} < -\omega(\mathbf{Q})$. La energía $\omega(\mathbf{Q})$ es positiva definida, por lo cual, existe un mínimo en el conjunto de parejas de \mathbf{Q} y de \mathbf{v} que hace que la desigualdad anterior se cumpla y que ocurre cuando los vectores anteriores son antiparalelos. De esta manera, podemos expresar las condiciones para la creación de excitaciones elementales (cuasi partículas), que

⁴Se hace esta suposición por simplicidad, ya que esperaríamos que todos los átomos del fluido no tengan la misma velocidad, sin embargo veremos que la superfluidez está vinculada a la existencia de una velocidad crítica, de modo tal que si somos capaces de hacer que los átomos del gas se desplacen por debajo de esta velocidad, no se crearán procesos con disipación de energía.

generan procesos con disipación, de la siguiente forma: Si para toda \mathbf{v} existe un \mathbf{Q} antiparalelo a \mathbf{v} tal que $\omega(\mathbf{Q}) < Qv$, entonces se generarán excitaciones elementales. De esta manera, la interacción del fluido con el medio que lo confina puede generar las excitaciones elementales (cuasi partículas), de modo que la energía cinética de los átomos disminuye y puede ser usada para crear excitaciones elementales que ocasionan que el movimiento del fluido se haga más lento. Lo anterior significa que las excitaciones generan viscosidad en el fluido.

Como un ejemplo de un sistema físico en el que se cumple que $\omega(\mathbf{Q}) < Qv$, vamos a ilustrar el caso de la partícula libre de masa m donde $\omega(\mathbf{Q}) = Q^2/2m$. En la Fig. 4.7 mostramos gráficamente por qué siempre se generan excitaciones en la partícula libre cuando se desplaza por un tubo, que en términos geométricos significa que la curva $Q^2/2m$ está debajo de la recta Qv_2 con v_2 la velocidad del fluido.

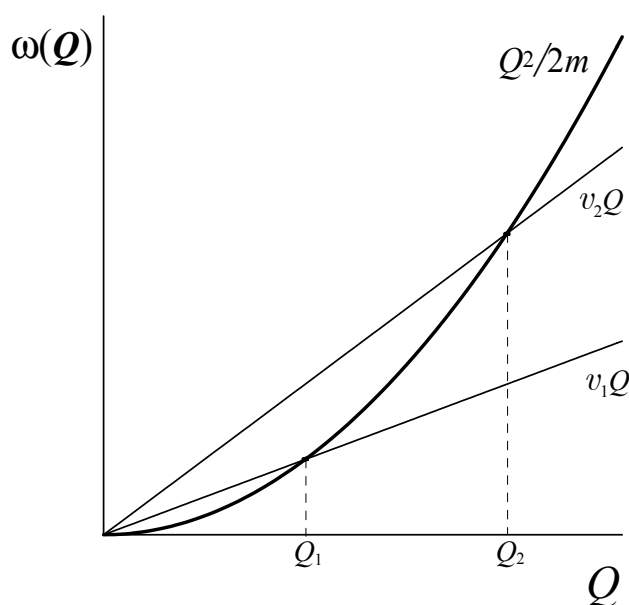


Figura 4.7: En esta gráfica se muestra que siempre se generan excitaciones en la partícula libre sin importar lo lento que se desplace por el interior de un tubo. Para la velocidad v_2 éstas (excitaciones) siempre se presentan y su energía correspondiente está delimitada por $0 < \omega(\mathbf{Q}) < \omega(\mathbf{Q}_2)$; a una velocidad v_1 menor, ocurre la misma situación, de manera tal que para cualquier valor de la velocidad tan cercana a cero como se desee, siempre se generarán excitaciones de baja energía en el líquido.

Como nuestro interés está motivado en el proceso opuesto (movimiento sin disipación), entonces podemos pensar que si un fluido que se desplaza a una velocidad v a través de un medio que lo confina, cuya energía de las excitaciones colectivas $\omega(\mathbf{Q})$ con \mathbf{Q} el momento de dichas excitaciones, se cumple que $\omega(\mathbf{Q})/Q > v$ para toda Q , entonces se moverá sin generar procesos de disipación de energía a lo largo del medio, lo que significa que es un superfluido. A continuación vamos a ver que existe un valor crítico diferente de cero de la velocidad que permite que el desplazamiento de los átomos sea sin fricción, siempre que se muevan con una velocidad menor a dicho valor crítico. Veremos que el CL está vinculado a la existencia de una velocidad crítica, por lo que nuestra siguiente meta es calcularla a partir de la energía de las excitaciones elementales, asumiendo ciertas características que vamos a especificar próximamente. Para tal

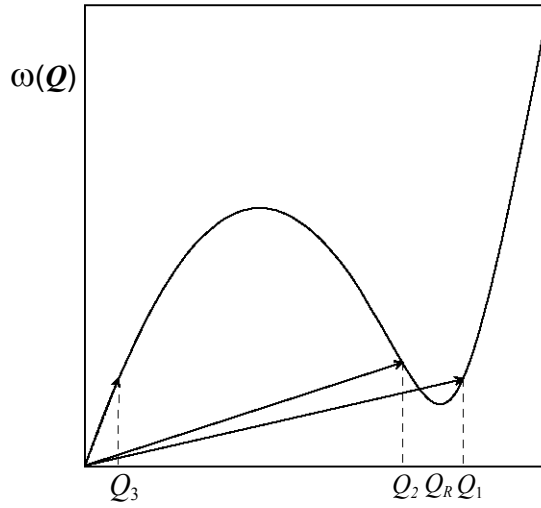


Figura 4.8: Muestra de rectas del cociente $\omega(\mathbf{Q})/Q$, apreciamos que el mínimo de dichos cocientes se presenta alrededor del mínimo rotónico Q_R .

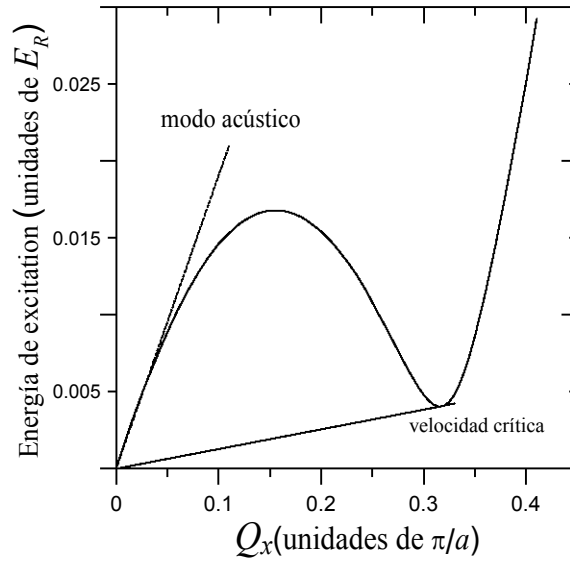


Figura 4.9: Parte positiva de la curva de las excitaciones elementales $\omega(\mathbf{Q})$ de un gas polarizado de átomos de ${}^6\text{Li}$ en 3D con $P = 0.0938831$, $f = 0.4685$ y $U/J = 2.64$; en ella se puede apreciar que para velocidades menores a la crítica el movimiento de los átomos no genera excitaciones. También se dibuja la recta que corresponde a la velocidad del sonido y se destaca el comportamiento cuadrático alrededor del mínimo rotónico.

fin requerimos describir diversos elementos geométricos, en la Fig. 4.8 mostramos rectas que unen el origen de coordenadas con tres puntos de la curva. Q_3 representa a la familia de puntos cercanos a cero que tienen una pendiente común. Observamos que en la curva se cumple el TG [50] ya que $\omega(\mathbf{Q}) \rightarrow 0$ cuando $Q \rightarrow 0$ en forma lineal. Las rectas correspondientes a Q_1 y Q_2 ilustran la existencia de un mínimo del conjunto de rectas $\omega(\mathbf{Q})/Q$ que ocurre alrededor del mínimo rotónico de la curva Q_R ⁵, es decir:

⁵No debe confundirse el mínimo del cociente $\omega(\mathbf{Q})/Q$, que define a la velocidad crítica, con el mínimo Q_R de la curva $\omega(\mathbf{Q})$ que

$$\left(\frac{\omega(\mathbf{Q})}{Q}\right)_{Q=Q_3} < \left(\frac{\omega(\mathbf{Q})}{Q}\right)_{Q=Q_2} < \left(\frac{\omega(\mathbf{Q})}{Q}\right)_{Q=Q_1}.$$

Si se calcula todo el conjunto de cocientes⁶ $\omega(\mathbf{Q})/Q$, encontraríamos que existe un mínimo que coincide con la recta tangente a la curva y que se encuentra a la derecha de Q_R , como mostramos en la Fig. 4.9. Definimos

$$\left(\frac{\omega(\mathbf{Q})}{Q}\right)_{\text{mín}} \equiv v_c. \quad (4.30)$$

El análisis de los cocientes que recién explicamos es la base de un código de programación con el que se calcula la velocidad crítica, teniendo en cuenta que en general no se dispone de una expresión analítica de $\omega(\mathbf{Q})$. Sin embargo, no sólo podemos extraer esta información, también tenemos la posibilidad de estimar la velocidad del sonido, que se define como [15, 22]

$$\left.\frac{\omega(\mathbf{Q})}{Q}\right|_{Q \rightarrow 0} \equiv c. \quad (4.31)$$

En la discusión anterior hemos supuesto una forma particular en el espectro de las excitaciones, sin embargo el CL puede enunciarse con toda generalidad de la siguiente forma: *Si un fluido que se desplaza a una velocidad v a través de un medio que lo confina con $v < v_c \equiv (\omega(\mathbf{Q})/Q)_{\text{mín}}$ ($v_c \neq 0$), con $\omega(\mathbf{Q})$ la energía de las excitaciones elementales con momento \mathbf{Q} , entonces el movimiento no genera procesos de fricción, lo que significa que es un superfluido.*

Si, por algún mecanismo, somos capaces de hacer que los átomos del fluido se desplacen a una velocidad *menor* que v_c , por lo que hemos visto, produciremos que en el movimiento colectivo de los átomos no provoquen procesos disipativos (fricción) y en consecuencia, podrá observarse experimentalmente el fenómeno de la superfluidez. En un fluido normal $v_c = 0$, esto ocasiona que el fluido se mueva con fricción para toda v (sin importar que el movimiento sea muy lento); en el caso superfluido $v_c \neq 0$ y entonces el fluido se desplazarán sin fricción por debajo de esta velocidad. Esta condición causa que el gas de bosones libres no sea un superfluido, pues su relación energía-momento es $\omega(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^2/2m$ y esto ocasiona la ausencia de un mínimo rotónico que sea distinto de cero.

Hemos visto que si la energía de excitaciones colectivas del sistema satisface la desigualdad $\omega(\mathbf{Q}) > Qv$ expresada en el CL, puede concluirse su condición de *superfluido*. Sin embargo, la información física que contiene este espectro (de las excitaciones) es más amplio. Por ejemplo, a través del estudio de las excitaciones rotónicas puede saberse la contribución de la parte lineal y de la parte rotónica, al calor específico a volumen constante del sistema⁷, que es una cantidad medible experimentalmente.

Entre la información física que puede aprovecharse cuando conocemos la velocidad crítica, está la temperatura de transición superfluida T_λ [99], es decir, se puede determinar una magnitud macroscópica mediante una velocidad microscópica intrínseca del superfluido. El camino

es un momento donde la pendiente de la recta tangente es cero.

⁶Por la forma de la curva, para hallar la velocidad crítica solamente nos podemos concentrar alrededor de Q_R .

⁷En otros sistemas de muchos cuerpos cuánticos, es razonable calcular C_V suponiendo que la energía de las excitaciones colectivas *no cambia* con la temperatura. En el ámbito de los sistemas polarizados, la referencia [23] muestra que estrictamente esto no ocurre, pues la velocidad del sonido depende de T . Considerando la enorme dificultad que toma el cálculo (en esta tesis se obtuvieron los espectros para un solo valor de P y otro de T para cada dimensión) esto sólo puede considerarse como una aproximación inicial.

inverso también es posible: la estimación de los parámetros microscópicos del rotón por medio de su temperatura de transición. A pesar de lo anterior, no abordaremos estas cuestiones en esta tesis y sirvan las observaciones anteriores sólo para ilustrar la relevancia del estudio del espectro de energía para el análisis de los sistemas superfluidos. En particular, retomamos la muy importante consecuencia que proporciona que la energía de las excitaciones colectivas del sistema, y que es la de garantizar la condición de superfluido, con ello proporcionaremos la velocidad crítica y la velocidad del sonido del sistema, magnitudes que también pueden ser verificadas experimentalmente [15, 22, 23].

Para concluir esta parte de la discusión, escribimos el espectro rotónico de Landau [100], que nos proporciona una expresión analítica que es válida alrededor del mínimo rotónico y que caracteriza al tipo de espectros que se representan en las Figs. 4.5, 4.8 y 4.9, dado por

$$\omega(\mathbf{Q}) = \Delta_R + \alpha(Q - Q_R)^2; \quad Q > Q_R \quad (4.32)$$

donde Δ_R es el gap rotónico, es decir, la energía mínima necesaria para crear excitaciones rotónicas (cuasipartículas), α es el inverso del doble de la masa efectiva μ . Todos estos parámetros pueden calcularse una vez que tenemos la energía de las excitaciones, en el caso del ^4He , $\alpha = 1/2\mu$ con $\mu = 0.16m_{^4\text{He}}$ [98].

4.3.2. Vórtices cuantizados en superfluidos

Hemos identificado la superfluidez de un sistema cuántico por la capacidad de fluir sin fricción, sin embargo hay otra manera de detectar este fenómeno mediante otro tipo de arreglos experimentales y que consiste en la creación de vórtices cuantizados cuando el fluido es puesto en rotación. Antes de concluir esta sección, no podemos dejar de mencionar (en forma muy breve) las espectaculares propiedades de rotación de los superfluidos, y para ello partimos del modelo fenomenológico de los dos fluidos propuesto por Landau y Tisza, en el cual se puede asignar una velocidad macroscópica \mathbf{v}_n a la parte normal del fluido y \mathbf{v}_s a la parte superfluida. A través de la ecuación de Gross-Pitaevskii, que se puede interpretar como una ecuación de Schrödinger no lineal, aplicada a un *condensado* de partículas⁸ puede demostrarse que el campo de velocidades de un superfluido es *irrotacional*, a saber

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}.$$

En este contexto, esperaríamos que al poner en rotación al sistema completo, solamente lo hiciera la parte normal dado que la parte superfluida es irrotacional. A pesar de lo anterior, diversos experimentos [14] demuestran que a partir de ciertas velocidades angulares el momento angular adquirido por el sistema se aproxima al valor dado por la mecánica clásica del cuerpo rígido. Esto es, hay un mecanismo capaz de transferir momento angular a la parte superfluida. La explicación de esta aparente contradicción está fundamentada en la generación de líneas de vórtices, que como veremos, son singularidades de la distribución de velocidades.

⁸Históricamente, esta ecuación se utilizó para el análisis de un gas de bosones con interacciones débiles, motivado por las sorprendentes propiedades del ^4He superfluido. Tomamos esta discusión con la finalidad de ilustrar el fenómeno de la formación de vórtices en los superfluidos.

Consideremos que existe una línea en el fluido en donde la velocidad es singular, esto significa que la velocidad diverge y que no pueda definirse en ese punto y entonces $\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$ excepto en la línea. Si calculamos la circulación del campo \mathbf{v}_s de velocidades a lo largo de una trayectoria cerrada centrada en la línea del vórtice ($r = 0$), obtenemos que la integral es⁹

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \quad (4.33)$$

donde

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi$$

con φ la fase de la función de onda del condensado. Puede demostrarse que la ecuación anterior es igual a

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{mr} \hat{\theta}, \quad (4.34)$$

donde r y θ pueden apreciarse en la Fig. 4.10, con $\hat{\theta}$ el vector angular unitario. Vemos que la Ec. (4.3.2) es cantidad que diverge en cero y $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$, excepto en $r = 0$. Sin embargo, la Ec. (4.3.2) muestra el resultado más importante: la circulación alrededor de un vórtice está cuantizada. Esto permite transmitir momento angular al superfluido en rotación, de manera que cuando creamos un número suficiente de vórtices, se forma una red regular que nos proporciona una manera de identificar a un superfluido.

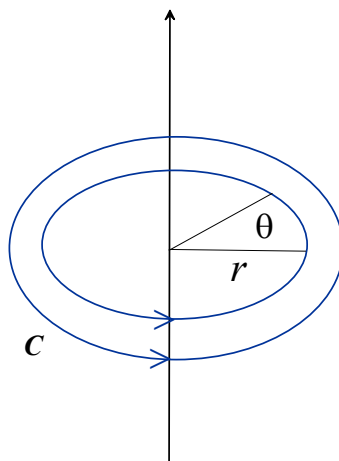


Figura 4.10: Flujo alrededor de una línea de vórtice

Existen muy importantes estudios sobre la formación de vórtices como evidencia de la superfluidéz. En la referencia [9] (crucial) se reporta la existencia de vórtices en gases de Fermi de átomos de ${}^6\text{Li}$ confinados en trampas ópticas y en [10] se publica la evidencia experimental de la superfluidéz del mismo elemento en trampas armónicas de una mezcla polarizada, teniendo

⁹Con la finalidad de poner énfasis en la naturaleza cuántica de los vórtices en los superfluidos, volveremos a usar unidades físicas *únicamente* en esta subsección.

en cuenta que en ambos experimentos se usa luz láser para rotar a los gases. En la Fig. 4.11 pueden apreciarse los vórtices que se crean en átomos de ${}^6\text{Li}$. Aunque los experimentos anteriores se han llevado a cabo en sistemas diferentes, son una motivación más para la búsqueda del fenómeno de la superfluidez en nuestro gas polarizado confinado por una red óptica. En este contexto ya resulta natural preguntarse si la existencia de dicha propiedad puede presentarse en el sistema que estamos analizando.

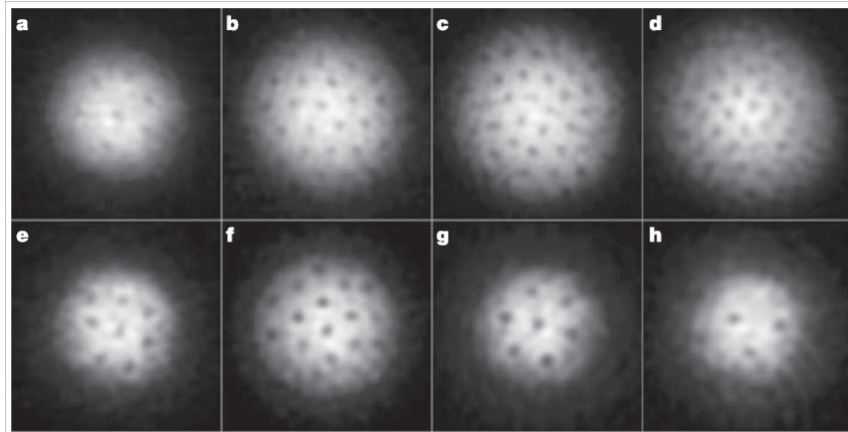


Figura 4.11: Vórtices de una gas de átomos de ${}^6\text{Li}$ que son generados desde el lado BCS al BEC de una resonancia de Feshbach. El campo de visión de cada imagen es de $880 \mu\text{m} \times 880 \mu\text{m}$, el campo magnético va de 740 G en (a) hasta 863 G en (h). Imagen tomada de la referencia [9].

4.4. Superfluidez en cuasi-1D, 2D y 3D

En esta sección vamos a demostrar, a través de la forma del espectro de las excitaciones, que la superfluidez se manifiesta en nuestro sistema en 3D, 2D y en cuasi-1D. Aprovecharemos la discusión que hemos tenido acerca de las propiedades geométricas que posee el espectro de las excitaciones de un sistema superfluido, con el objetivo de comprobar que éstas se presentan en nuestro gas polarizado confinado por una red óptica. Así las cosas, observaremos el comportamiento lineal del espectro para valores del momento de las excitaciones cercanos a cero, en concordancia con el TG; la estructura rotónica del mínimo de la curva (el espectro rotónico de Landau) y la asimetría de dicho espectro, causada por la polarización del sistema [60]. También reportaremos la velocidad crítica, el gap rotónico (energía mínima para crear excitaciones de tipo rotónico) y la velocidad del sonido de cada curva, que son magnitudes físicas que se pueden medir en el laboratorio. Con respecto a este último punto, verificaremos que el orden de magnitud de las velocidades del sonido que vamos a reportar son del orden de milímetros por segundo, en correspondencia con los resultados exhibidos en [23].

En la Fig. 4.12 presentamos la parte positiva ($\mathbf{Q} = (Q_x, 0)$) de la energía de las excitaciones colectivas¹⁰ del caso bidimensional, cuando $J = 0.078 E_R$, $U/J = 2.64$, $f = 0.5$ y $T = 2 \times 10^{-6} E_R$, que son valores de los parámetros de Hubbard usados en publicaciones previas [15, 20–23] y que son susceptibles de ser comprobados experimentalmente. Comprobamos que se satisface el TG ya que la energía de las excitaciones tiende a cero cuando el momento de éstas tiende a cero. Distinguimos el comportamiento lineal del espectro para valores cercanos a cero de Q_x , que se denomina modo acústico. La pendiente de la recta para valores pequeños de Q_x determina la velocidad del sonido en el fluido. Observamos que esta curva satisface el CL porque existe una velocidad crítica no nula que hace que $\omega(\mathbf{Q}) > Qv$ siempre que $0 < v < v_c$, por lo cual la superfluidez se manifiesta en el sistema. En la gráfica aparece la pendiente de la recta tangente alrededor del mínimo, que como ya hemos visto, coincide con la velocidad crítica. Si seguimos el trayecto de la curva, se destaca la presencia de un mínimo de tipo rotónico, con lo cual puede estimarse la energía mínima para generar excitaciones rotónicas, que en este caso es $\omega_R = 0.017 E_R$, las cuales ocasionan la destrucción de la superfluidez.

La Fig. 4.13 muestra la parte negativa del espectro. Observamos que esencialmente sigue el mismo comportamiento que la parte positiva en cuanto al comportamiento lineal cercano al origen, a la existencia de un mínimo rotónico y de una velocidad crítica. Sin embargo, notamos la asimetría que existe con respecto a la parte positiva, la cual es consecuencia de la naturaleza polarizada del sistema [60], que se traduce en una inhomogeneidad propia del sistema, que se agrega a la inhomogeneidad espacial causada por la presencia del potencial externo de la red óptica. La manera de relacionar dicha asimetría con los parámetros de Hubbard y las fracciones $f_{\uparrow, \downarrow}$ es una línea de investigación que puede ser abordada en lo futuro, y que sólo nos limitaremos a mencionar en esta tesis.

La Fig. 4.14 muestra el espectro de las excitaciones colectivas para el caso tridimensional ($J = J_x = J_y = J_z$) con $J = 0.078 E_R$, $U/J = 2.64$, $f = 0.0938831$ y $T = 10^{-4} E_R$, que

¹⁰En todos las gráficas, la energía de excitación está en unidades de E_R y el momento de las excitaciones Q_x está expresado en unidades de π/a .

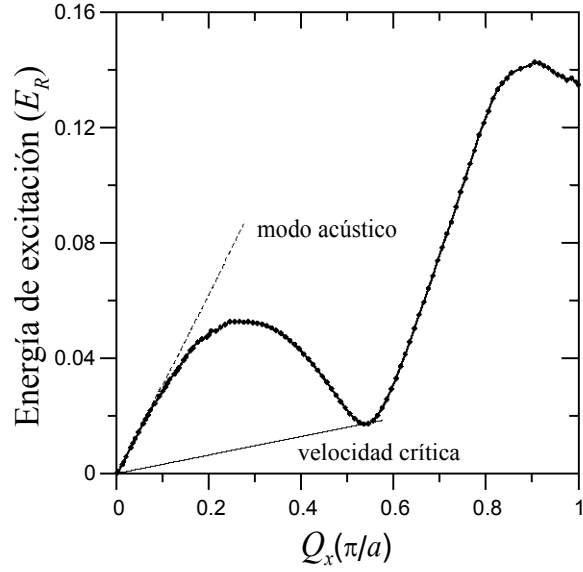


Figura 4.12: Gráfica (lado positivo) de la energía de excitación en una red óptica 2D ($J = J_x = J_y$) a lo largo de la dirección $(Q_x, 0)$. Los parámetros son $J = 0.078 E_R$, $U/J = 2.64$, $f = 0.5$ y $T = 2 \times 10^{-6} E_R$. La pendiente de la curva para Q_x cercano a cero determina la velocidad del sonido $c = 10$ mm/s, la velocidad crítica es $v_c = 1$ mm/s.

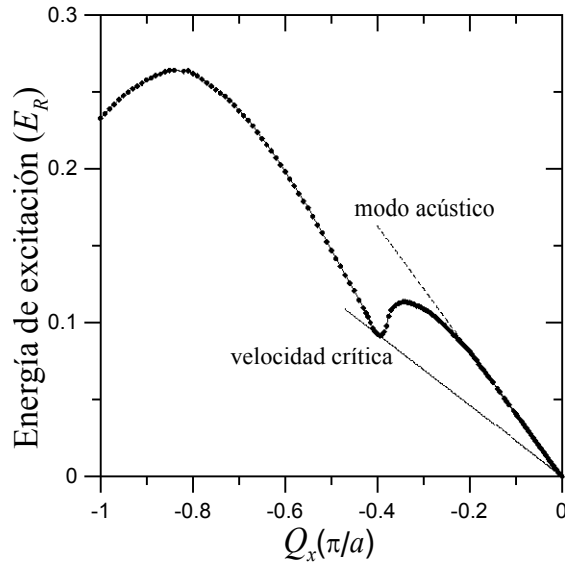


Figura 4.13: Lado negativo del espectro, en este caso $c = 13.1$ mm/s, $v_c = 7.5$ mm/s. Es notable la asimetría que posee con respecto al lado positivo.

de igual forma han sido inspirados por las referencias [15, 20–23]. En ella se aprecian las mismas características físicas del caso 2D en cuanto al comportamiento lineal para valores de Q_x cercanos a cero y la existencia de la estructura rotónica, sin embargo, con respecto al caso 2D, se ha reducido considerablemente la asimetría del espectro¹¹, lo que permite apreciar en una

¹¹Tenga el lector presente que los parámetros de Hubbard y la temperatura no son iguales, hacemos la comparación con el objetivo

sola figura el espectro completo. A partir de esta gráfica se aprecia con claridad que el sistema en 3D es también superfluido.

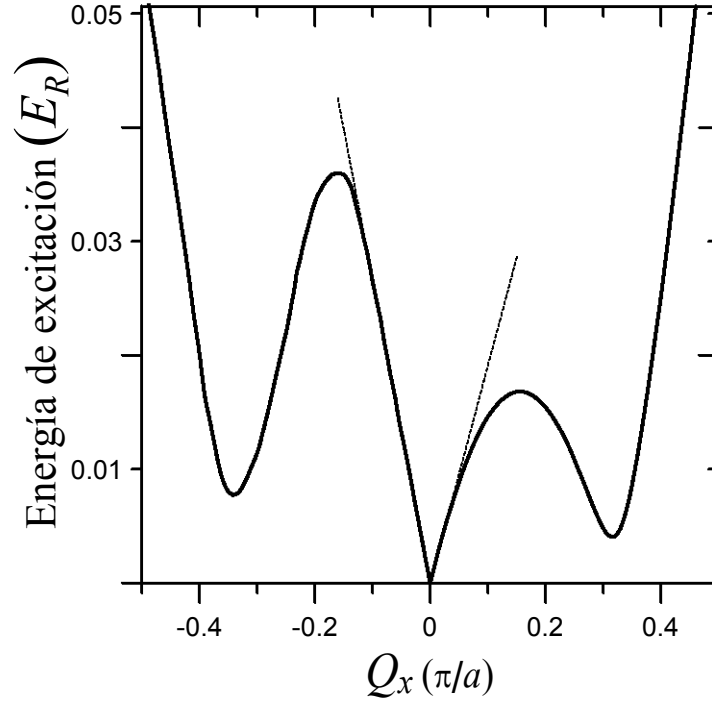


Figura 4.14: Energía de excitación en una red óptica 3D ($J = J_x = J_y = J_z$) a lo largo de la dirección $(Q_x, 0, 0)$. Los parámetros son $J = 0.078 E_R$, $U/J = 2.64$, $f = 0.4685$ y $T = 10^{-4} E_R$. Las velocidades del sonido son $c = 8.56$ mm/s y $c = 6.14$ mm/s para la parte negativa y positiva, respectivamente. Las velocidades críticas son $v_c = 0.725$ mm/s y $v_c = 0.41$ mm/s y los mínimos rotónicos son $\omega_R = 0.0077 E_R$ y $\omega_R = 0.004 E_R$.

En la Fig. 4.15 mostramos la parte positiva de la energía de las excitaciones colectivas para el caso cuasi-1D. Cabe mencionar que únicamente mostramos esta parte debido a que con la precisión con la que se han ejecutado los cálculos (en la integración numérica), el lado negativo no satisface el TG, resultado que lo hace físicamente inaceptable. Para remediar esta situación es necesario incrementar la precisión en los cálculos y la base de esta afirmación es un refinamiento que hicimos en el cálculo de la parte negativa, con el cual se mejoró la forma del espectro (pasó de ser cuadrática a lineal) pero que continúa sin iniciar en el origen. El mejoramiento de los cálculos para la parte negativa del espectro energético requiere por lo menos de mayor precisión en los programas de cómputo, tarea que forma parte de los proyectos a futuro. Consideramos que es necesario precisar que los problemas que presenta la parte negativa del espectro en el caso cuasi-1D, se deben a las limitaciones computacionales que hemos explicado, no así del formalismo con el que se ha calculado la energía de las excitaciones colectivas, ya que en la sección 4.2 mostramos que el determinante (4.27) satisface el TG, que en nuestro problema significa que existe una solución para las ecuaciones de BS cuando $\mathbf{Q} \rightarrow 0$ con la energía $\omega(\mathbf{Q}) \rightarrow 0$.

En este punto de la investigación, podemos decir que la parte positiva de la energía de las excitaciones colectivas proporciona fuertes indicios de la superfluidez del sistema en cuasi-1D.

de enfatizar que los espectros son muy sensibles al cambio de dichos parámetros.

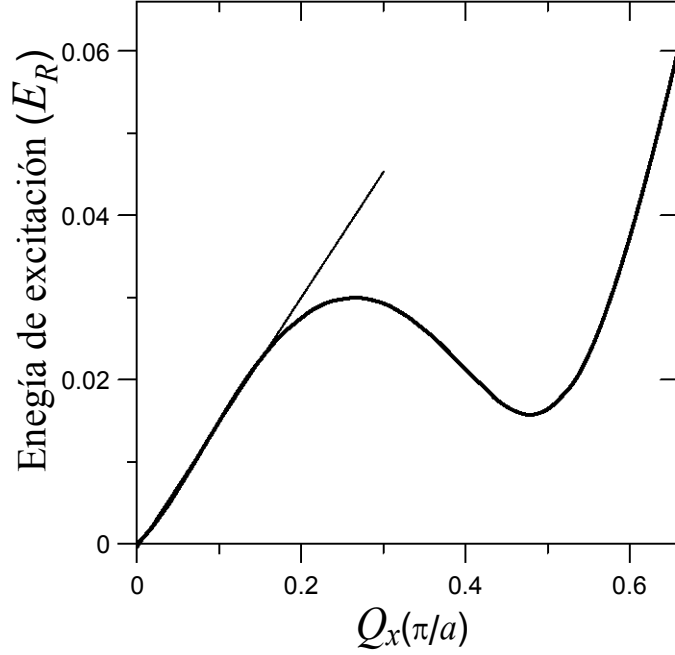


Figura 4.15: Parte positiva de la energía de excitación en el caso cuasi-1D ($J_x \gg J_y = J_z$) a lo largo de la dirección $(Q_x, 0, 0)$. Los parámetros son $J_x = 0.078 E_R$, $J_y = J_z = 10^{-4} E_R$, $U/J_x = 2.64$, $f = 0.4685$ y $T = 10^{-4} E_R$. La velocidad del sonido es $c = 4.92$ mm/s, la velocidad crítica es $v_c = 1.05$ mm/s y el mínimo rotónico es $\omega_R = 0.0157 E_R$.

Por los conceptos que hemos discutido¹², ésta desaparecería solamente si el espectro se anulara (como ocurre en [47, 65]) para algún $Q_x < 0$, puesto que el lado positivo exhibe con claridad la existencia de una velocidad crítica. El mecanismo por el que la energía de las excitaciones colectivas se hace cero para algún valor del momento de las excitaciones no nulo, es conocido como *inestabilidad de Landau* y causa que la superfluidez no se manifiesta en sistemas fermiónicos polarizados compuestos por una mezcla de átomos fermiónicos ^{40}K y de ^6Li , y en una mezcla equilibrada de átomos de ^6Li colocados en una red óptica móvil. De esta manera, aunque no reportamos la parte negativa del espectro, es posible afirmar que la superfluidez del caso cuasi-1D podría desaparecer si aparece una inestabilidad de Landau.

Por otro lado, puede verse que se han elegido los mismos valores de la temperatura $T = 10^{-4} E_R$, la fracción de llenado $f = 0.4685$ y la polarización $P = 0.0938831$ del caso 3D, con la finalidad de presenciar los cambios que produce la disminución de la dimensión en el sistema. A partir de la observación de los espectros en 3D y cuasi-1D, percibimos la manera en la que pequeños cambios en los parámetros de Hubbard se traducen en cambios significativos en la velocidad crítica, el mínimo rotónico y la velocidad del sonido de la energía de excitación (la misma situación tiene lugar en los diagramas de fases), por lo que otra línea de investigación derivada de esta tesis puede ser la de averiguar con precisión la variación del espectro como función de los parámetros U , J_ν , f y de la temperatura.

¹²Recuérdese que la superfluidez queda garantizada si existe un mínimo distinto de cero en la familia de cocientes de $\omega(\mathbf{Q})/Q$, como el lado positivo muestra una velocidad crítica, para que el sistema dejara de ser superfluido la parte negativa tendría que anularse.

En términos más específicos, distinguimos que la velocidad del sonido disminuye de 6.14 mm/s en 3D, a 4.92 mm/s en cuasi-1D. En cuanto a la velocidad crítica, apreciamos un aumento sustancial de 0.41 mm/s a 1.05 mm/s, mientras que el gap rotónico pasa de $\omega_R = 0.004 E_R$ a $\omega_R = 0.0157 E_R$. Estos incrementos hacen que sea necesaria una mayor cantidad de energía para generar excitaciones de tipo rotónicas en el sistema en cuasi-1D con respecto al caso tridimensional, lo que se traduce en una mayor dificultad para destruir el estado superfluido, por lo menos en lo que respecta a la parte positiva. Si a esto sumamos (como ya hemos visto) que el sistema cuasi unidimensional sostiene mayores polarizaciones que el caso 3D, entonces estas características hacen que sea más propicia la detección experimental del estado superfluido en cuasi-1D.

Antes de dar las conclusiones de esta tesis, es posible realizar una nueva interpretación de nuestro sistema, a la luz de la información que hemos obtenido a través del estudio de la energía de las excitaciones colectivas. Por ejemplo, hemos demostrado que en el caso tridimensional, la velocidad crítica es de 0.41 mm/s, lo que significa que si somos capaces de hacer que los átomos de ${}^6\text{Li}$ se muevan por debajo de ese valor, entonces no existirán excitaciones que generen procesos con disipación de energía. Sin embargo, es natural pensar que hay algunos átomos del sistema que tengan una velocidad mayor a la crítica y que, por lo tanto, estén generando excitaciones. El tipo de cuasi partículas que se estén creando dependerá de la energía que posea el átomo que se desplaza por arriba de v_c .

Hemos discutido que el espectro de las excitaciones colectivas se puede considerar como un conjunto de excitaciones elementales o de cuasi partículas, que no deben confundirse con los átomos reales de ${}^6\text{Li}$, ya que ellas se identifican con todo el conjunto de dichos átomos y los valores de la energía de las excitaciones elementales describen el espectro de energía de todo el sistema cuántico, o sea, de todo el gas polarizado colocado en la red óptica en su conjunto. En la parte lineal del espectro, que satisface el TG, tienen lugar las excitaciones colectivas de baja energía (que pueden ser tan cercanas a cero como se quiera), de manera que el estado excitado del gas de fermiones está constituido por ondas sonoras que revelan su condición elástica. Si provocamos perturbaciones de energía baja en el gas de fermiones, veríamos que se genera una onda sonora que se desplaza a la velocidad del sonido, que en el caso 3D es de 6.14 mm/s. Por otra parte, hallamos que en el espectro existe un umbral para las excitaciones rotónicas, que corresponde a una velocidad $v_c = 0.41$ mm/s en el caso 3D, de suerte que si los átomos se mueven a una velocidad mayor, entonces se generarán procesos de fricción que destruirán la superfluididad.

De esta manera, es válido pensar que el gas de fermiones polarizado está integrado por dos fluidos, uno normal que es resultado de la generación de excitaciones que está vinculado a la disipación de energía, y uno superfluido, en el que están todos los átomos cuya velocidad es menor a la velocidad crítica, que conserva la energía. En este punto tomaría lugar la siguiente pregunta: ¿Qué principio o condición determina cuándo tenemos un superfluido o un fluido normal, teniendo presente la coexistencia de estas dos clases de subsistemas? La respuesta la encontramos en los diagramas de fases que hemos reportado. En el caso en 3D vemos que hay una polarización máxima $P = 0.12$ a $T = 0$, lo que implica que si introducimos en la red un gas cuya polarización sea mayor a dicho número, entonces el sistema siempre será normal aún a $T = 0$. También encontramos que a $P = 0$ la máxima temperatura en la que el sistema está en alguna de las tres fases condensadas es $T = 0.0124 E_R$ que es igual a 18 nK (ver Fig. 3.10). Esta información hace posible ver las cosas desde una perspectiva global. Supongamos que in-

yectamos una gas de ${}^6\text{Li}$ con una polarización $P = 0.09388$ en la red óptica en 3D, en la Fig. 3.10 se observa que la temperatura de transición es $T = 0.011 E_R$ ($T = 16.5$ nK); por debajo de esta temperatura ($0 \leq T \leq 0.011 E_R$) las excitaciones colectivas que son ocasionadas por la existencia de átomos que se desplazan a una velocidad mayor a la crítica, no son suficientes para destruir la superfluidez del sistema, que se encuentra en alguna de las tres fases condensadas (PS, FFLO o Sarma) dependiendo del valor de la temperatura. Si ocurre que $T > 0.011 E_R$, entonces el sistema es un fluido normal debido a que hay energía disponible para aumentar la energía cinética de los átomos, lo que permite que tengan una velocidad mayor a la crítica y que por lo tanto, no sea posible mantener la superfluidez.

Para terminar este capítulo mostramos una tabla en donde se exhiben las magnitudes asociadas a la superfluidez del ${}^4\text{He}$ (tomadas de la referencia [97]) y de nuestro gas polarizado de átomos de ${}^6\text{Li}$ en todas las dimensiones. Incluimos esta tabla solamente con un propósito ilustrativo, ya que ambos sistemas son completamente distintos.

Parámetro	${}^4\text{He}$	3D ($f = 0.4685$)	2D ($f = 0.5$)	Cuasi-1D($f = 0.4685$)
c	237 m/s	6.14 mm/s	10 mm/s	4.92 mm/s
v_c	59.3 m/s	0.41 mm/s	1 mm/s	1.05 mm/s
Q_R [π/a]	3131.5	0.315	0.535	0.48
ω_R [E_R]	5.765×10^6	0.004	0.017	0.0157
Temperatura	1.1 K	0.15 nK	3 pK	0.15 nK
ρ [átomos/ Å^3]	0.0218	3.4×10^{-9}	3.7×10^{-9}	3.4×10^{-9}

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Conclusiones

Para un gas de Fermi formado por dos fracciones de diferentes números de átomos con espines opuestos, confinado por medio de una red óptica profunda, a temperatura distinta de cero, donde los átomos con espines opuestos interactúan entre sí en el mismo sitio de la red, a través de una potencial de contacto atractivo y pudiendo saltar de un sitio de la red a los primeros vecinos de la misma, hemos elaborado los diagramas de fases, que muestran las regiones de polarización y de temperatura en donde se presentan la fase FFLO, de Sarma, la separación de fases y la fase normal del sistema en 3D, 2D y cuasi-1D. Presenciamos que en general, los diagramas de fases son muy susceptibles a pequeños cambios del factor de llenado y del parámetro de interacción entre los átomos en el mismo sitio de la red. En el sistema bidimensional verificamos que las regiones de estabilidad del estado FFLO, de Sarma y de la separación de fases son comparables entre sí. Con respecto a los diagramas de fases de los casos 3D y cuasi-1D, usamos la misma fracción de llenado total y el parámetro de interacción con la finalidad de analizar los efectos de la reducción de la dimensión en las propiedades del sistema. Encontramos que en ambos casos la mayor parte de las fases condensadas es ocupada por el estado FFLO y comprobamos que el área ocupada por los estados FFLO del diagrama de fases en cuasi-1D es considerablemente mayor que el diagrama en 3D, características que hacen más propicia la detección experimental de la fase FFLO en el sistema cuasi-1D. En relación con la fase FFLO, constatamos que el comportamiento creciente del parámetro de orden y decreciente del momento del los pares de Cooper, como funciones de la polarización y manteniendo la temperatura fija, son universales, pues no dependen de la dimensión del sistema.

En relación a la superfluidez del sistema, es conveniente enfatizar los resultados más importantes de la investigación que reportamos en esta tesis: Mediante la utilización de las ecuaciones de Bethe-Salpeter, en una generalización de la aproximación de fase aleatoria para el modelo de Hubbard atractivo, calculamos los modos colectivos de un gas de Fermi polarizado confinado por una red óptica estacionaria profunda en 3D, 2D y cuasi-1D. Encontramos que en 2D y en 3D, el espectro de las excitaciones colectivas muestra una estructura rotónica a partir de la cual se calcula una velocidad crítica que satisface el criterio de Landau de la superfluidez, lo que

significa que la superfluidez puede presentarse en el gas de fermiones polarizado en redes ópticas. También determinamos que los espectros presentan mínimos de tipo rotónico, tanto para la parte positiva como para la negativa del momento de las excitaciones, por lo que también reportamos los umbrales de energía para los que se presentan las excitaciones de tipo rotónico que destruyen la superfluidez del sistema. En el caso cuasi-1D hallamos que en la parte positiva del espectro también presenta la mismas características que los casos en dos y tres dimensiones.

A partir de la energía de las excitaciones elementales y con los parámetros de Hubbard utilizados, proporcionamos las velocidades críticas, los mínimos rotónicos y las velocidades del sonido en cada dimensión, las cuales son magnitudes físicas que pueden ser comprobadas mediante un experimento. Hallamos que en todos los espectros que calculamos, la naturaleza polarizada del sistema trae como consecuencia la asimetría de la energía de las excitaciones colectivas con respecto al momento de las excitaciones colectivas.

Perspectivas

Los resultados que reportamos en esta tesis sirven de base a las siguientes líneas de investigación:

- Calcular la energía de las excitaciones colectivas para diversos valores de la polarización, la temperatura y el factor de llenado total, dentro de los valores que hemos reportado en los diagramas de fase del sistema en 3D, 2D y cuasi-1D.
- Incluir en el diagrama de fases la dependencia del factor de llenado total y analizar la evolución del sistema desde el sistema en 3D, pasando por cuasi-2D y 2D hasta el caso cuasi-1D.
- Encontrar relaciones analíticas entre la asimetría de las curvas de la energía de las excitaciones con la polarización del sistema y la fracción de llenado total.
- Estudiar el gas polarizado en una red óptica móvil con valores de los parámetros de Hubbard similares a los que hemos usado en esta investigación.
- Introducir defectos en la red, que pueden ser vacancias en algunos sitios de la red o variaciones aleatorias en las profundidades de los pozos, y estudiar sus efectos sobre los diagramas de fases y la existencia de la superfluidez.

El propósito principal de estas propuestas es el de complementar nuestros resultados que hemos obtenido en esta tesis, debido a que tienen relación directa con los resultados y son la continuación natural de esta investigación. La primera propuesta mostraría la forma en que cambian las velocidades del sonido, los mínimos rotónicos y las velocidades críticas como función de la temperatura, el factor de llenado y la polarización; en la segunda se exhibiría con mayor claridad el cambio de los diagramas de fases al variar la dimensión del sistema; el último punto aportaría información más precisa acerca de la dependencia del espectro de la naturaleza polarizada intrínseca del gas de fermiones.

Con respecto a análisis que no han sido explorados, proponemos las siguientes ideas:

- Calcular el calor específico a volumen constante del sistema.
- Abordar el problema de la existencia de la superfluidez de gases de Fermi polarizados en redes ópticas triangulares en cuasi-2D.
- Incluir el efecto de trampas armónicas en nuestro tratamiento.

La primera proposición no ha sido reportada, es conveniente señalar que en el cálculo del calor específico (magnitud medible) puede emplearse la energía de las excitaciones colectivas. El segundo punto resulta ser una línea de gran interés actualmente, debido al estudio de las propiedades del grafeno; el último punto toma en consideración que en los experimentos que se han mencionado en el desarrollo de esta tesis, son usados mecanismos adicionales de confinamiento.

Por otra parte, podemos afirmar que el presente proyecto propone la solución de un problema actual y de interés creciente en el ámbito internacional, que aborda el cuestionamiento sobre la

superfluidez en sistemas polarizados confinados en estructuras periódicas y la búsqueda de los mecanismos que puedan ayudar a determinar, la observación de las fases FFLO. Finalmente, quedamos en espera de experimentos futuros que comprueben la mayoría de los resultados reportados en esta tesis, ya que hasta el momento no se tienen resultados experimentales preliminares para comparar con las predicciones que hemos discutido.

Códigos de programación

Con la finalidad de tratar con las cuatro ecuaciones de MFT (3.21)-(3.24) y la ELH (3.20), con los que se construye el diagrama de fases del sistema, y el determinante (4.27), con el que se calcula el espectro de las excitaciones colectivas; hacemos uso de una convención estandarizada en la Física de la Materia Condensada [101], que es:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} F(k_x, k_y) = \frac{L_1}{2\pi} \frac{L_2}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} F(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (1)$$

para el caso bidimensional, donde hemos considerado que \mathbf{k} está dentro de la primera zona de Brillouin. $L_1 = N_x a$ y $L_2 = N_y a$ son las longitudes del sistema en las direcciones x e y , N_x y N_y son el número de sitios en la dirección x e y respectivamente y suponemos que estos números son mucho mayores a uno, como $N = N_x N_y$ (en 2D) entonces el factor que resulta frente a las integrales del miembro derecho de la Ec. (1) es $a^2/(2\pi)^2$. Al hacer $a = 1$ y partiendo de la Ec. (1), podemos hacer los cambios de variables $x = \tan(k_x/4)$ e $y = \tan(k_y/4)$, que producen la siguiente ecuación

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(k_x, k_y) dk_x dk_y = \left(\frac{4}{2\pi}\right)^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g(x, y)}{(1+x)(1+y)} dx dy. \quad (2)$$

donde $g(x, y)$ es una nueva función que resulta de aplicar los cambios de variable en el miembro izquierdo de la ecuación previa. Para hacer la integración numérica de la Ec. (2), usamos el método de integración gaussiana y el método descrito en la referencia [52]. Dicha integral es aproximada por una suma de valores del integrando evaluado en un conjunto de números que están dentro del intervalo $[-1, 1]$. En la tesis utilizamos 33 (en 3D) y 49 (en 2D) puntos, tanto de una integración gaussiana como de aquellos usados en la publicación [52], estas sumas permiten hacer la siguiente aproximación

$$\left(\frac{4}{2\pi}\right)^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g(x, y)}{(1+x)(1+y)} dx dy \approx \left(\frac{4}{2\pi}\right)^2 \sum_i \sum_j w_i w_j g(x_i, x_j) \quad (3)$$

donde i y j corren de cero hasta el número de puntos elegidos (33 ó 49), w_i y w_j son pesos estadísticos asociados a la suma. El tipo de aproximación dado por la Ec. (3) permite resolver en forma numérica las ecuaciones (3.21)-(3.24), la ELH (3.20) y el determinante (4.27). Todos los cálculos computacionales fueron hechos en el programa *Mathematica*® en sus versiones 6-9. En el Apéndice A vamos a describir el método usado para elaborar los diagramas de fases, en el Apéndice B se exhibe el procedimiento empleado para la construcción del espectro.

A. Construcción de los diagramas de fase

El procedimiento que explicaremos tiene como etapa inicial, la obtención de *un* conjunto de soluciones, ya sea para el estado FFLO o para el de Sarma a T, U, J_ν, f y P fijas. Es conveniente señalar que aunque en la fase de Sarma ($q_x = 0$) solamente debemos resolver tres ecuaciones, es más provechoso iniciar la elaboración del diagrama de fases, con la especificación de los intervalos de polarización y temperatura en las que aparece la fase FFLO, debido a que las soluciones de las (3.21)-(3.24) son puntos de partida considerablemente útiles para la búsqueda de las soluciones de la fase de Sarma. En la situación inversa, en la que poseemos las soluciones para las ecuaciones de Sarma, éstas no conducen (generalmente) a las soluciones de las ecuaciones del estado FFLO, aunque vale la pena comentar que esto es efectivo únicamente cuando nos encontramos en la frontera de ambas fases, la cual ignoramos en principio. En este apéndice vamos a suponer que siempre se mantienen fijos los parámetros U, J_ν, f y que inicialmente tenemos las soluciones al estado FFLO, es decir, que hemos resuelto las ecuaciones (3.21)-(3.24) para un valor de T y de P . A partir de esto es posible seguir el siguiente algoritmo:

- Usar los valores de $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow, \Delta$ y q_x que han sido determinados, para evaluar la ELH $F_{FF}(\Delta, q_x, f_\uparrow, f_\downarrow)$.
- Resolver las ecuaciones del estado de Sarma (3.21)-(3.23) (con $q_x = 0$).
- Calcular la ELH $F_{Sarma}(\Delta, f_\uparrow, f_\downarrow)$ con los valores de $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ y Δ .
- Si para el par (T, P) $F_{FF} < F_{Sarma}$ entonces la fase de FFLO es más probable (punto en color amarillo), si ocurre que $F_{FF} > F_{Sarma}$ la fase de Sarma es más estable (punto en azul).
- Modificar ligeramente¹ el valor de T o P para cada fase y comparar las energías libres punto a punto.

El algoritmo anterior se realiza hasta que no existan soluciones para *ambos* tipos de estados, ya en algunas zonas sólo hay soluciones para un tipo de fase. Por ejemplo, se espera que no encontremos soluciones a las ecuaciones de Sarma para valores de la polarización altos (por los argumentos físicos que hemos discutido en esta tesis).

Hasta el momento sólo consideramos dos fases y no debemos perder de vista que es necesario calcular la ELH de la PS. Este proceso es en cierto modo independiente, ya que las soluciones FFLO o Sarma no proporcionan información que ayude a encontrar las soluciones de esta fase $x, \mu, \mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ y \tilde{f} , que por cierto, son notoriamente más difíciles de calcular que las anteriores. A pesar de ello, una vez que se tienen las soluciones a las ecuaciones (3.34)-(3.37), a T y P dadas, los pasos finales del algoritmo son:

- Usar las magnitudes $x, \mu, \mu_\uparrow, \mu_\downarrow$ y \tilde{f} para calcular la energía F_{PS} .
- Comparar esta cantidad con la *menor* de las dos energías libres previas, si resulta que F_{PS} (como siempre ocurrió en todos los cálculos de esta tesis) es menor, entonces la PS es más estable que las fases de FFLO y de Sarma (región roja del diagrama).

¹Puede ocurrir que si cambiamos sustancialmente la temperatura o la polarización, caigamos en la zona de la fase normal o bien, dado que $\mu_\uparrow, \mu_\downarrow, \Delta$ y q_x son funciones de P y T , que las soluciones iniciales no sean de utilidad.

- Calcular las soluciones a las ecuaciones (3.34)-(3.37) y la energía F_{PS} , modificando ligeramente el valor de P o de T .
- Repetir los dos pasos anteriores en todo el intervalo de soluciones de esta fase.

Cuando se haya concluido la comparación de las tres fases que hemos considerado en la tesis, entonces hemos terminado el diagrama de fases del sistema para U , J_ν y f y ahora disponemos de la información necesaria para ubicar con precisión las regiones de estabilidad de cada fase, así como la de los valores críticos de temperatura y polarización a partir de los cuales el sistema se comporta en forma normal.

A continuación mostraremos el código de programación de la PS (los de las fases FFLO y de Sarma funcionan similarmente) que calcula las soluciones manteniendo fija la polarización. Omitiremos (con el fin de no incurrir en demasiados detalles del cálculo) el código que se desplaza en dirección vertical (T constante) dado que tienen una forma muy parecida al primero.

B. Cálculo computacional de la energía de las excitaciones colectivas

En este procedimiento es fundamental determinar la parte lineal de la curva. El TG es el principio rector en la construcción de esta parte inicial de la curva, ya que nos garantiza que ésta comienza en el origen y que existe una dependencia lineal entre $\omega(\mathbf{Q})$ y Q_x . Esta tarea resultaría sencilla (como ocurre en gases no polarizados [47]) si para cada valor del momento de las excitaciones Q_x solamente hubiera un valor de $\omega(\mathbf{Q})$, sin embargo, en el caso de gases polarizados existe una ingente cantidad de soluciones para cada valor de dicho momento y esto causa que durante la elaboración de la energía de las excitaciones, tengamos que realizar el seguimiento de más de una curva, ya que en principio no se debe descartar alguna de ellas. Teniendo en cuenta la multiplicidad de raíces (valores para los cuales $\mathcal{Z} = 0$), establecemos el algoritmo seguido para la construcción de la parte lineal de la energía $\omega(\mathbf{Q})$ del lado positivo de la misma²

- 1) Asignar un valor de Q_x pequeño, digamos $Q_x a/\pi = 0.0001$.
- 2) Graficar \mathcal{Z} como función del $\omega(\mathbf{Q})$ asignado y registrar los ceros de esta compleja función, que son los valores de los que se extraen las probables curvas.
- 3) Elegir otro valor (puede usarse un paso $Q_x a/\pi = 0.0005$) y llevar a cabo el paso previo.

Posteriormente se sigue el algoritmo precedente hasta que se aprecie con claridad una familia de rectas que coinciden en el *origen de coordenadas*. Desafortunadamente, no se puede establecer con claridad hasta qué valor de $Q_x a/\pi$ debe seguirse con este minúsculo paso, todo depende del grado de aproximación que se esté usando, de la temperatura a la que se esté calculando la energía y el número de rectas que pasen por el origen. Este conjunto de rectas es el punto de partida de la construcción de $\omega(\mathbf{Q})$ y reiteramos que en este punto del análisis no es posible descartar alguna de ellas, ya que todas satisfacen el TG y por esta causa debe hacerse el seguimiento de cada una de estas posibles trayectorias. Teniendo en cuenta que ya contamos con una serie de curvas de partida, la siguiente parte del algoritmo es:

- 4) Adoptar otro paso mayor y extraer las raíces de la energía. Por ejemplo en el cálculo de $\omega(\mathbf{Q})$ del caso tridimensional se usó un incremento de 0.01 a partir de $Q_x a/\pi = 0.01$. No debe perderse de vista que en algunas ocasiones se debe reducir el paso, ya sea por los pequeños saltos que ocurren en la curva (inherentes a toda aproximación), o por la cercanía de varias raíces.
- 5) Completar el punto anterior hasta completar el intervalo de Q_x .

Otra norma que opera en la elaboración de la curva es la continuidad, ya que en algunas ocasiones las rectas que son candidatas a conformar la parte lineal de la energía de excitación, conducen a curvas que poseen amplios segmentos donde no existen soluciones o donde aparecen cambios abruptos de comportamientos o dislocaciones. Las situaciones anteriores no son físicamente aceptables y ayudan a descartar el número de curvas a seguir.

Por otra parte, es importante considerar la dimensión del sistema. En 3D y en cuasi-1D se realiza una integral triple en cada término del \mathcal{Z} y esto produce un mayor tiempo de cálculo

²Recuérdese que $Q_x \in [-1, 1]$ en unidades de π/a .

(con respecto al caso 2D). En esta investigación se ha optado por el uso de un menor número de puntos (con respecto al caso 2D) en la evaluación de las integrales, con el objetivo de reducir el tiempo de cómputo. En el caso bidimensional cada término del determinante tiene una integral doble y se pueden usar 49 puntos de Gauss en cada una de ellas. Teniendo en cuenta esto, para los pasos 4) y 5) hemos desarrollado un código de programación automatizado en el caso 2D. En 3D y cuasi-1D es suficiente aproximar las raíces del determinante en forma gráfica.

(*Este es el programa para calcular la PS en 2D*)

49

(*Se elige el número de puntos de Gauss o de la aproximación discutida en el artículo: Z. Koinov, Speed of sound in an optical lattice, Ann. Phys. (Berlín) 552, 693 (2010).*)

$$m_e := 9.10938 * 10^{-31}$$

$$m_p := 1.67262 * 10^{-27}$$

$$q_e := 1.60218 * 10^{-19}$$

$$k_B := 1.38065 * 10^{-23}$$

$$\epsilon_0 := 8.85419 * 10^{-23}$$

$$N_A := 6.022 * 10^{23}$$

$$c := 2.99792 * 10^8$$

$$\hbar := 1.054571628 * 10^{-34}$$

$$u := 1.660538782 * 10^{-27}$$

$$m := 6.01512234 * u$$

$$\text{Bohr} := 52.9177 * 10^{-12}$$

$$\text{Lambda} := 1030 * 10^{-9}$$

$$d := \frac{1}{2} * \text{Lambda}$$

$$E_R := \frac{\hbar^2}{2 * m} * \left(\frac{2 * \pi}{\text{Lambda}} \right)^2$$

$$U_f[sx_, sy_, a_] := \frac{8}{\sqrt{\pi}} * \frac{a * \text{Bohr}}{\text{Lambda} * q_e} * \left(\frac{2 * sx * sy * E_R^3 * \hbar^2}{m * \text{Lambda}^2} \right)^{1/4}$$

$$J_i[s_] :=$$

$$\frac{E_R}{q_e} * e^{-\frac{\pi^2 * \sqrt{s}}{4}} * \left(\left(\frac{\pi^2 * s}{4} - \frac{\sqrt{s}}{2} \right) - \frac{1}{2} * s * \left(1 + e^{-\sqrt{s}} \right) \right)$$

(*Profundidades de la red óptica*)

$s_x := 2.5$

$s_y := 2.5$

$s_z := 2.5$

$J_x := J_i[s_x]$

$J_y := J_i[s_y]$

$$\text{cosk}[x_] := \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{6x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^4}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$\text{sink}[x_] := \left(\frac{4x}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^3}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$\text{Fermi}[x_, T_] := \frac{1}{e^{\frac{x}{T}} + 1}$$

$\Omega_{up}[x_, y_, \mu_{up}] :=$

$$2 * J_x * (1 - \text{cosk}[x]) + 2 * J_y * (1 - \text{cosk}[y]) - \mu_{up} * ER / qe$$

$\Omega_d[x_, y_, \mu_d] :=$

$$2 * J_x * (1 - \text{cosk}[x]) + 2 * J_y * (1 - \text{cosk}[y]) - \mu_d * ER / qe$$

$\Omega_{egan}[x_, y_, \mu_{up}, \mu_d, T_] :=$

$$-T * \text{Log}[1 + \text{Exp}[-\Omega_{up}[x, y, \mu_{up}] / T]] - T * \text{Log}[1 + \text{Exp}[-\Omega_d[x, y, \mu_d] / T]]$$

$\Omega_{egan}[\mu_{up}, \mu_d, T_] :=$

$$N \left[\left(\frac{4^2}{(2 * \pi)^2} * \left(\sum_{k=1}^R w_k * \left(\sum_{s=1}^R w_s * \Omega_{egan}[z_k, z_s, \mu_{up}, \mu_d, T] \right) \right) \right) \right]$$

$\xi[x_, y_, \mu_] := 2 * J_x * (1 - \text{cosk}[x]) + 2 * J_y * (1 - \text{cosk}[y]) - \mu * ER / qe$

$$\text{En}[x_, y_, \mu_, \Delta_] := \sqrt{\xi[x, y, \mu]^2 + (\Delta * ER / qe)^2}$$

$\Omega_{egabcs}[x_, y_, \mu_, \Delta_, T_] := \xi[x, y, \mu] -$

$$\text{En}[x, y, \mu, \Delta] - 2 * T * \text{Log}[1 + \text{Exp}[-\text{En}[x, y, \mu, \Delta] / T]] + \frac{(\Delta * ER / qe)^2}{(J_x * (2.643580582076922^{\wedge} 2))}$$

$\Omega_{egaBCS}[\mu_, \Delta_, T_] :=$

$$N \left[\left(\frac{4^2}{(2 * \pi)^2} * \left(\sum_{k=1}^R w_k * \left(\sum_{s=1}^R w_s * \Omega_{egaBCS}[z_k, z_s, \mu, \Delta, T] \right) \right) \right) \right]$$

```

XF[mu_, mup_, mud_, Δ_, T_] :=
  
$$\frac{1}{\mu + \mu_p + \mu_d} \left( (\text{OmegaN}[\mu_p, \mu_d, T] - \text{OmegaBCS}[\mu, \Delta, T]) / (ER / qe) + \mu_p * (f * (1 + P) / 2) + \mu_d * (f * (1 - P) / 2) \right)$$

X[mu_, mup_, mud_] := 
$$\frac{\mu}{\mu + \mu_p + \mu_d}$$

F[mu_, mup_, mud_, Δ_, T_] :=
  
$$\frac{1}{\mu_p + \mu_d} \left( (\text{OmegaN}[\mu_p, \mu_d, T] - \text{OmegaBCS}[\mu, \Delta, T]) / (ER / qe) + \mu_p * (f * (1 + P) / 2) + \mu_d * (f * (1 - P) / 2) \right)$$

Free[mu_, mup_, mud_, Δ_, T_] := X[mu, mup, mud] *
  
$$\left( \text{OmegaN}[\mu_p, \mu_d, T] / (ER / qe) + \mu_p * \left( (f * (1 + P) / 2) - (1 - X[\mu, \mu_p, \mu_d]) * F[\mu, \mu_p, \mu_d, \Delta, T] \right) + \mu_d * \left( (f * (1 - P) / 2) - (1 - X[\mu, \mu_p, \mu_d]) * F[\mu, \mu_p, \mu_d, \Delta, T] \right) \right) + (1 - X[\mu, \mu_p, \mu_d]) * \left( \text{OmegaBCS}[\mu, \Delta, T] / (ER / qe) + \mu * (1 - X[\mu, \mu_p, \mu_d]) * F[\mu, \mu_p, \mu_d, \Delta, T] \right)$$

um[x_, y_, mu_, Δ_] :=
  
$$\sqrt{\left( \frac{1}{2} * (1 + \xi[x, y, \mu] / \text{En}[x, y, \mu, \Delta]) \right)}$$

vm[x_, y_, mu_, Δ_] :=
  
$$\sqrt{\left( \frac{1}{2} * (1 - \xi[x, y, \mu] / \text{En}[x, y, \mu, \Delta]) \right)}$$

Fgap[x_, y_, mu_, Δ_, T_] :=
  
$$(1 - 2 * \text{Fermi}[\text{En}[x, y, \mu, \Delta], T]) / (2 * \text{En}[x, y, \mu, \Delta])$$

(*Estas son las ecuaciones a resolver*)
Zgap[mu_, Δ_, T_] := (Jx * (2.643580582076922`)) *
  
$$N \left[ \left( \frac{4^2}{(2 * \pi)^2} * \left( \sum_{k=1}^R w_k * \left( \sum_{s=1}^R w_s * \text{Fgap}[z_k, z_s, \mu, \Delta, T] \right) \right) \right) \right]$$


```



```

ZnumberBCS[mu_, mup_, mud_, Δ_, T_] :=
  2 * N[ ( (4^2 / (2 * π)^2) * ( ∑_{k=1}^R w_k * ( ∑_{s=1}^R (w_s * (Fermi[En[z_k, z_s, mu, Δ], T] *
    um[z_k, z_s, mu, Δ]^2 + Fermi[-En[z_k, z_s, mu, Δ], T] *
    vm[z_k, z_s, mu, Δ]^2) ) ) ) ) ) ] - XF[mu, mup, mud, Δ, T]

Znumberup[mu_, mup_, mud_, Δ_, T_] :=
  N[ ( (4^2 / (2 * π)^2) * ( ∑_{k=1}^R w_k * ( ∑_{s=1}^R w_s * Fermi[Ωup[z_k, z_s, mup], T] ) ) ) ) ] +
  XF[mu, mup, mud, Δ, T]

Znumberd[mu_, mup_, mud_, Δ_, T_] :=
  N[ ( (4^2 / (2 * π)^2) * ( ∑_{k=1}^R w_k * ( ∑_{s=1}^R (w_s * Fermi[Ωd[z_k, z_s, mud], T] ) ) ) ) ) ] +
  XF[mu, mup, mud, Δ, T]

(*SetDirectory["/home/masolis/Desktop/Espectro 3D/diagrama de fases"]*)

(*Parámetros de Hubbard*)

T0 := {}

Jx / (ER / qe)
0.0782495

Jy / (ER / qe)
0.0782495

f := 0.5

P := 0.1

fup := 0.275

fd := 0.225

(*Soluciones iniciales*)

(*{"T/ER,P",0.006000000000000001`,0.1`,`μ",0.07723485160039478`,`μu",
  0.09602342476412652`,`μd",0.052321544722655135`,`gap",0.005175279521243166`}
{2.7755575615628914`*^-17,0.275`,`0.225`,`0.9999999999999997`,
  "FE/ER",0.0065791752888059475`,`f",0.5`}*)

mu0 := 0.07675126692478978`
mup0 := 0.09993106079443026`
mud0 := 0.04627271018930594`
Y0 := 0.011446722520129415`

```

```

cont := 0
datalist = {};
smnu = 0;
f0upc = fup;
f0dc = fd;
onec = 1;

While[Abs[smnu] < 10-14 && Abs[f0upc - fup] < 10-8 &&
  Abs[f0dc - fd] < 10-8 && Abs[onec - 1] < 10-6, cont++;
T0 = (0.0001 - (0.000003 * cont)) * ER / qe;
res = {mu, mup, mud, y} /. FindRoot[
  {ZnumberBCS[mu, mup, mud, y, T0], (f * (1 + P) / 2) - Znumberup[mu, mup, mud, y, T0],
  (f * (1 - P) / 2) - Znumberd[mu, mup, mud, y, T0], 1 - Zgap[mu, y, T0]},
  {{mu, mu0}, {mup, mup0}, {mud, mud0}, {y, Y0}}];
mu0 := res[[1]];
mup0 := res[[2]];
mud0 := res[[3]];
Y0 := res[[4]];
(*datalist=Append[datalist, {T0*qe/ER, P, Qx0, Xup0, Xd0, Y0}];
Export["P0038831TFF.dat", datalist, "Data"];*)
Print[{"T/ER, P", T0 * qe / ER, P, "μ", mu0, "μu", mup0, "μd", mud0, "gap", Y0}];
smnu := ZnumberBCS[mu0, mup0, mud0, Y0, T0];
f0upc := Znumberup[mu0, mup0, mud0, Y0, T0];
f0dc := Znumberd[mu0, mup0, mud0, Y0, T0];
onec := Zgap[mu0, Y0, T0];
FE := Free[mu0, mup0, mud0, Y0, T0];
Print[{smnu, f0upc, f0dc, onec, "FE/ER", FE, "f", f0upc + f0dc}];
NotebookSave[]]

```

(*Las instrucciones anteriores van a mostrar los valores de los potenciales químicos (tres) y el gap que resuelven las ecuaciones MFT de la PS. Este programa para cuando el gap se anula*)

```
starting = SessionTime[]
```

```
62.766060
```

```
(*Este es el código para calcular el espectro  
cuando el valor del momento de las excitaciones es Qx=  
0.002 en unidades de  $\pi/a$  para el caso cuasi 1D. El algoritmo  
se repite para otro valor de Qx hasta llegar a 1. Se hace  
un procedimiento similar cuando el momento es negativo*)
```

```
QZx := 0.002
```

```
R = 33
```

```
33
```

```
me := 9.10938 * 10-31
```

```
mp := 1.67262 * 10-27
```

```
qe := 1.60218 * 10-19
```

```
kB := 1.38065 * 10-23
```

```
eps0 := 8.85419 * 10-23
```

```
NA := 6.022 * 1023
```

```
c := 2.99792 * 108
```

```
hbar := 1.054571628 * 10-34
```

```
u := 1.660538782 * 10-27
```

```
m := 6.01512234 * u
```

```
Bohr := 52.9177 * 10-12
```

```
Lambda := 1030 * 10-9
```

```
d :=  $\frac{1}{2} * \text{Lambda}$ 
```

```
ER :=  $\frac{\text{hbar}^2}{2 * m} * \left( \frac{2 * \pi}{\text{Lambda}} \right)^2$ 
```

```
Uf[sx_, sy_, sz_, a_] :=  $\frac{8}{\sqrt{\pi}} * \frac{a * \text{Bohr}}{\text{Lambda} * \text{qe}} * \left( \frac{2 * \text{sx} * \text{sy} * \text{sz} * \text{ER}^3 * \text{hbar}^2}{m * \text{Lambda}^2} \right)^{1/4}$ 
```

```
Ji[s_] :=  $\frac{\text{ER}}{\text{qe}} * e^{-\frac{\pi^2 * \sqrt{s}}{4}} * \left( \left( \frac{\pi^2 * s}{4} - \frac{\sqrt{s}}{2} \right) - \frac{1}{2} * s * (1 + e^{-\sqrt{s}}) \right)$ 
```

```
sx := 2.5
```

```
sy := 2.5
```

```
sz := 2.5
```

$J_x := J_i[sx]$

$J_y := 0.0001 * (ER / qe)$

$J_z := 0.0001 * (ER / qe)$

$J_x / \left(\frac{ER}{qe} \right)$

0.0782495

$U[a_] := Uf[sx, sy, sz, a]$

$fup := 0.2562481325320474`$

$fd := 0.2122628674679541`$

$QZy := 0$

$Qx := \pi * QZx$

$Qy := \pi * QZy$

$Qz := \pi * 0$

(*Abajo aparecen las soluciones al estado FFLO en una aproximación de MFT*)

$T := 0.0001 * ER / qe$

$Xup0 := 0.08379500702604122`$

$Xd0 := 0.014326298739337797`$

$Y0 := 0.04171945797218711`$

$qx := 0.02445986283810949` * \pi$

$qy := \pi * 0$

$qz := \pi * 0$

$\Delta := Y0 * ER / qe$

$mup := Xup0 * ER / qe$

$mum := Xd0 * ER / qe$

$a0 := 0.10275281553398058 * \frac{d}{Bohr}$

$a0$

1000.

$J_x / (ER / qe)$

0.0782495

f := 0.468511

P := 0.0938831

$$U0 := \frac{1}{(Jx * 2.643580582076922^f)}$$

$$\text{Fermi}[x_, T_] := \frac{1}{e^{\frac{x}{T}} + 1}$$

$$\text{cosk}[x_] := \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{6x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^4}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$\text{sink}[x_] := \left(\frac{4x}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^3}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{up}}[x_, y_, z_] := & 2 * Jx * (1 - \text{cosk}[x] * \text{Cos}[qx] + \text{sink}[x] * \text{Sin}[qx]) + \\ & 2 * Jy * (1 - \text{cosk}[y] * \text{Cos}[qy] + \text{sink}[y] * \text{Sin}[qy]) + \\ & 2 * Jz * (1 - \text{cosk}[z] * \text{Cos}[qz] + \text{sink}[z] * \text{Sin}[qz]) - \text{mup} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{d}}[x_, y_, z_] := & 2 * Jx * (1 - \text{cosk}[x] * \text{Cos}[qx] - \text{sink}[x] * \text{Sin}[qx]) + \\ & 2 * Jy * (1 - \text{cosk}[y] * \text{Cos}[qy] - \text{sink}[y] * \text{Sin}[qy]) + \\ & 2 * Jz * (1 - \text{cosk}[z] * \text{Cos}[qz] - \text{sink}[z] * \text{Sin}[qz]) - \text{mum} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{Qup}}[x_, y_, z_] := & 2 * Jx * (1 - (\text{cosk}[x] * \text{Cos}[Qx] - \text{sink}[x] * \text{Sin}[Qx]) * \text{Cos}[qx] + \\ & (\text{sink}[x] * \text{Cos}[Qx] + \text{cosk}[x] * \text{Sin}[Qx]) * \text{Sin}[qx]) + \\ & 2 * Jy * (1 - (\text{cosk}[y] * \text{Cos}[Qy] - \text{sink}[y] * \text{Sin}[Qy]) * \text{Cos}[qy] + \\ & (\text{sink}[y] * \text{Cos}[Qy] + \text{cosk}[y] * \text{Sin}[Qy]) * \text{Sin}[qy]) + \\ & 2 * Jz * (1 - (\text{cosk}[z] * \text{Cos}[Qz] - \text{sink}[z] * \text{Sin}[Qz]) * \text{Cos}[qz] + \\ & (\text{sink}[z] * \text{Cos}[Qz] + \text{cosk}[z] * \text{Sin}[Qz]) * \text{Sin}[qz]) - \text{mup} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{\text{Qd}}[x_, y_, z_] := & 2 * Jx * (1 - (\text{cosk}[x] * \text{Cos}[Qx] - \text{sink}[x] * \text{Sin}[Qx]) * \text{Cos}[qx] - \\ & (\text{sink}[x] * \text{Cos}[Qx] + \text{cosk}[x] * \text{Sin}[Qx]) * \text{Sin}[qx]) + \\ & 2 * Jy * (1 - (\text{cosk}[y] * \text{Cos}[Qy] - \text{sink}[y] * \text{Sin}[Qy]) * \text{Cos}[qy] - \\ & (\text{sink}[y] * \text{Cos}[Qy] + \text{cosk}[y] * \text{Sin}[Qy]) * \text{Sin}[qy]) + \\ & 2 * Jz * (1 - (\text{cosk}[z] * \text{Cos}[Qz] - \text{sink}[z] * \text{Sin}[Qz]) * \text{Cos}[qz] + \\ & (\text{sink}[z] * \text{Cos}[Qz] + \text{cosk}[z] * \text{Sin}[Qz]) * \text{Sin}[qz]) - \text{mum} \end{aligned}$$

$$\chi[x_, y_, z_] := \frac{1}{2} (\xi_{\text{up}}[x, y, z] + \xi_{\text{d}}[x, y, z])$$

$$\eta[x_, y_, z_] := \frac{1}{2} (\xi_{\text{up}}[x, y, z] - \xi_{\text{d}}[x, y, z])$$

$$\chi_{\text{Q}}[x_, y_, z_] := \frac{1}{2} (\xi_{\text{Qup}}[x, y, z] + \xi_{\text{Qd}}[x, y, z])$$

$$\eta_{\text{Q}}[x_, y_, z_] := \frac{1}{2} (\xi_{\text{Qup}}[x, y, z] - \xi_{\text{Qd}}[x, y, z])$$

$$\text{En}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \sqrt{\chi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]^2 + \Delta^2}$$

$$\text{EnQ}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \sqrt{\chi\text{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]^2 + \Delta^2}$$

$$\text{um}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \sqrt{\frac{1}{2} * \left(1 + \frac{\chi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{\text{En}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]} \right)}$$

$$\text{umQ}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \sqrt{\frac{1}{2} * \left(1 + \frac{\chi\text{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{\text{EnQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]} \right)}$$

$$\text{vm}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \sqrt{\frac{1}{2} * \left(1 - \frac{\chi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{\text{En}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]} \right)}$$

$$\text{vmQ}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \sqrt{\frac{1}{2} * \left(1 - \frac{\chi\text{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{\text{EnQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]} \right)}$$

$$\gamma[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{um}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{umQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{vm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{vmQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{l}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{um}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{umQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{vm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{vmQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\gamma\text{t}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{um}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{vmQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{vm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{umQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{mz}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{um}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{vmQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{vm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \text{umQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{varepsilon}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{EnQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{En}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{epsilon}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{EnQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{En}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{Omega}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \eta[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \eta\text{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{omegap}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \eta[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{En}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{omegam}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{En}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \eta[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{omegaQp}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \eta\text{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{EnQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{omegaQm}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \text{EnQ}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \eta\text{Q}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$$

$$\text{FI0101}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{\gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} *$$

$$\left((1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \text{T}] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \text{T}]) / \right. \\ \left. (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) - \right. \\ \left. (1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \text{T}] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \text{T}]) / \right. \\ \left. (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) \right)$$

$$\text{I}\gamma\gamma := \text{N} \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^{\text{R}} \left(w_s * \sum_{p=10^{\lambda}}^{\text{R}} \left(w_p * \sum_{t=1}^{\text{R}} w_t * \text{FI0101}[\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{FL0101}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{\gamma_t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma_t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{\text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) -} \right. \\ \left. \frac{\text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{L}\gamma_t\gamma_t := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FL0101}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{I0101} := \text{U0} + \text{I}\gamma\gamma - \text{L}\gamma_t\gamma_t$$

$$\text{FJ0102}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{1[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{(1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T])}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) +} \right. \\ \left. \frac{(1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T])}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{J}\gamma_1 := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FJ0102}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{FK0102}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{mz[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma_t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{\text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) +} \right. \\ \left. \frac{\text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{K}\gamma_t := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FK0102}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{I0102} := \text{J}\gamma_1 - \text{K}\gamma_t$$

$$\text{FI0103}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{\gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma_t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{(1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T])}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) -} \right. \\ \left. \frac{(1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T])}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{I}\gamma\gamma_t := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FI0103}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{FL0103}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{\gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma_t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{\text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) -} \right. \\ \left. \frac{\text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{L}\gamma\gamma_t := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FL0103}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{I0103} := \text{I}\gamma\gamma_t + \text{L}\gamma\gamma_t$$

$$\text{FJ0104}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{mz[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) +} \right. \\ \left. \frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{J}\gamma_m := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FJ0104}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{FK0104}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{l[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma_t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{\text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) +} \right. \\ \left. \frac{\text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{Kl}\gamma_t := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FK0104}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{I0104} := \text{J}\gamma_m + \text{Kl}\gamma_t$$

$$\text{I0201} := \text{I0102}$$

$$\text{FI0202}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] := \frac{l[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * l[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\ \left(\frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) -} \right. \\ \left. \frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])} \right) \\ \text{I11} := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FI0202}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{FL0202}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] := \frac{\text{mz}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] * \text{mz}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]}{2} * \\ \left(\frac{\text{Fermi}[\text{omegam}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] + \text{epsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]) -} \right. \\ \left. \frac{\text{Fermi}[\text{omegap}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] - \text{epsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}])} \right) \\ \text{Lmm} := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FL0202}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{I0202} := \text{U0} + \text{I11} - \text{Lmm}$$

$$\text{FJ0203}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] := \frac{1[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] * \gamma t[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]}{2} * \\ \left(\frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] - \text{varepsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]) +} \right. \\ \left. \frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] + \text{varepsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}])} \right) \\ \text{J1}\gamma t := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FJ0203}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{FK0203}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] := \frac{\text{mz}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] * \gamma[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]}{2} * \\ \left(\frac{\text{Fermi}[\text{omegam}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] + \text{epsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]) +} \right. \\ \left. \frac{\text{Fermi}[\text{omegap}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] - \text{epsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}])} \right) \\ \text{Km}\gamma := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FK0203}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\text{I0203} := \text{J1}\gamma t + \text{Km}\gamma$$

$$\text{FI0204}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] := \frac{1[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] * \text{mz}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]}{2} * \\ \left(\frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] - \text{varepsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}]) -} \right. \\ \left. \frac{1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}], T]}{(\Omega + \text{Omega}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] + \text{varepsilon}[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}])} \right) \\ \text{I1m} := N \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FI0204}[z_s, z_p, z_t] \right) \right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\text{FL0204}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] &:= \frac{1[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \text{mz}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\
& \left((\text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) - \\
& \quad \left. (\text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad \left. (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])) \right) \\
\text{Llm} &:= \text{N} \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FL0204}[\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_t] \right) \right) \right) \right] \\
\text{I0204} &:= \text{Ilm} + \text{Llm} \\
\text{I0301} &:= \text{I0103} \\
\text{I0302} &:= \text{I0203} \\
\text{FI0303}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] &:= \frac{\gamma t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\
& \left((1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) - \\
& \quad \left. (1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad \left. (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])) \right) \\
\text{I}\gamma t\gamma t &:= \text{N} \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FI0303}[\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_t] \right) \right) \right) \right] \\
\text{FL0303}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] &:= \frac{\gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\
& \left((\text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) - \\
& \quad \left. (\text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad \left. (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{epsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])) \right) \\
\text{L}\gamma\gamma &:= \text{N} \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FL0303}[\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_t] \right) \right) \right) \right] \\
\text{I0303} &:= -\text{U0} + \text{I}\gamma t\gamma t - \text{L}\gamma\gamma \\
\text{FJ0304}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] &:= \frac{\text{mz}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] * \gamma t[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]}{2} * \\
& \left((1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] - \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) + \\
& \quad \left. (1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], T]) / \right. \\
& \quad \left. (\Omega + \text{Omega}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] + \text{varepsilon}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}])) \right) \\
\text{J}\gamma t\text{m} &:= \text{N} \left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FJ0304}[\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_p, \mathbf{z}_t] \right) \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

```

FK0304[x_, y_, z_] := 
$$\frac{l[x, y, z] * \gamma[x, y, z]}{2} * \\
((\text{Fermi}[\text{omegam}[x, y, z], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[x, y, z], T]) / \\
(\Omega + \text{Omega}[x, y, z] + \text{epsilon}[x, y, z]) + \\
(\text{Fermi}[\text{omegap}[x, y, z], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[x, y, z], T]) / \\
(\Omega + \text{Omega}[x, y, z] - \text{epsilon}[x, y, z])) \\
K\gamma 1 := N\left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FK0304}[z_s, z_p, z_t]\right)\right)\right)\right] \\
I0304 := J\gamma tm - K\gamma 1 \\
I0401 := I0104 \\
I0402 := I0204 \\
I0403 := I0304 \\
FI0404[x_, y_, z_] := 
$$\frac{mz[x, y, z] * mz[x, y, z]}{2} * \\
((1 - \text{Fermi}[\text{omegam}[x, y, z], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[x, y, z], T]) / \\
(\Omega + \text{Omega}[x, y, z] - \text{varepsilon}[x, y, z]) - \\
(1 - \text{Fermi}[\text{omegap}[x, y, z], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[x, y, z], T]) / \\
(\Omega + \text{Omega}[x, y, z] + \text{varepsilon}[x, y, z])) \\
Imm := N\left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FI0404}[z_s, z_p, z_t]\right)\right)\right)\right] \\
FL0404[x_, y_, z_] := 
$$\frac{l[x, y, z] * l[x, y, z]}{2} * \\
((\text{Fermi}[\text{omegam}[x, y, z], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQm}[x, y, z], T]) / \\
(\Omega + \text{Omega}[x, y, z] + \text{epsilon}[x, y, z]) - \\
(\text{Fermi}[\text{omegap}[x, y, z], T] - \text{Fermi}[\text{omegaQp}[x, y, z], T]) / \\
(\Omega + \text{Omega}[x, y, z] - \text{epsilon}[x, y, z])) \\
Ll1 := N\left[\left(\frac{4^3}{(2 * \pi)^3} * \sum_{s=1}^R \left(w_s * \sum_{p=1}^R \left(w_p * \sum_{t=1}^R w_t * \text{FL0404}[z_s, z_p, z_t]\right)\right)\right)\right] \\
I0404 := U0 + Imm - Ll1 \\
AZ := {{I0101, I0102, I0103, I0104}, {I0201, I0202, I0203, I0204}, \\
{I0301, I0302, I0303, I0304}, {I0401, I0402, I0403, I0404}} \\
Qx / \pi \\
0.002 \\
(*Este es el determinante*)$$$$$$

```

A1[Ω_] = AZ

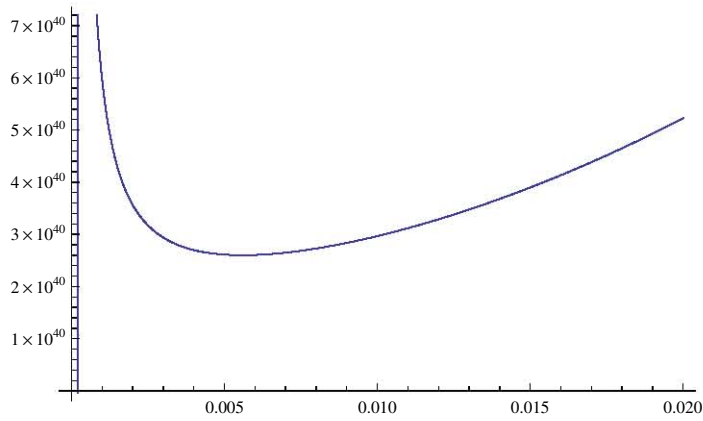
A very large output was generated. Here is a sample of it:

```
{ {<<1>>}, {<<1>>}, {<<1>>}, {<<1>>}}
```

Show Less Show More Show Full Output Set Size Limit...

(*Las raíces de la siguiente gráfica son las soluciones del determinante*)

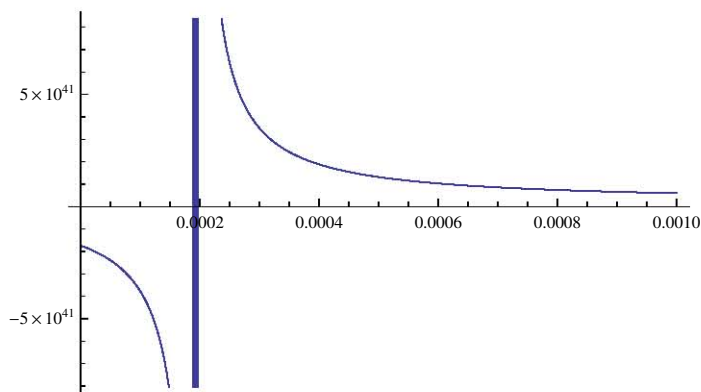
Plot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.0, 0.02}]



FindRoot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.001}]

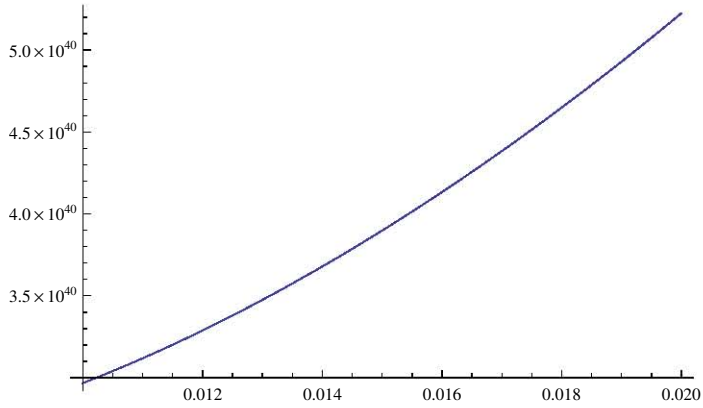
\$Aborted

Plot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.0, 0.001}]

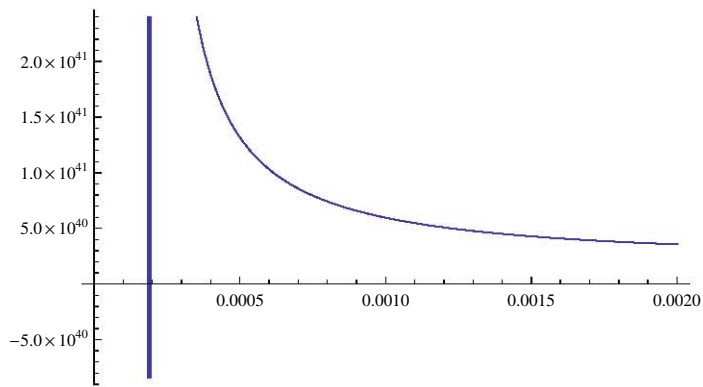


NotebookSave[]

Plot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.02, 0.01}]

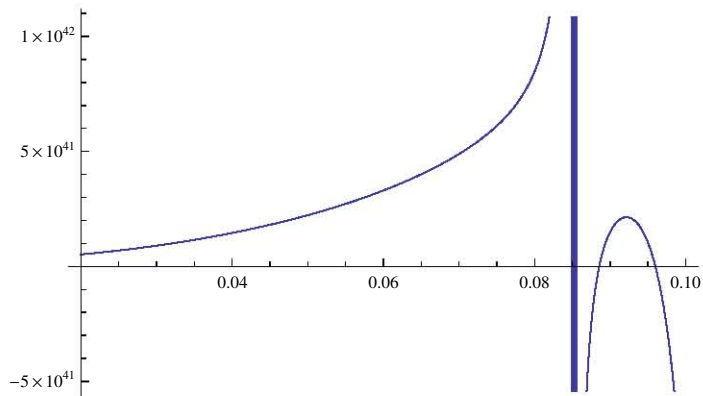


Plot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.0, 0.002}]



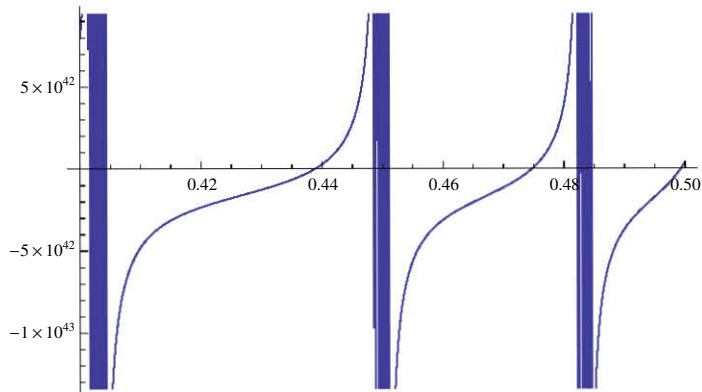
(*En esta gráfica se muestra que existen más soluciones, que no pueden ser descartadas*)

Plot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.02, 0.1}]



NotebookSave[]

```
Plot[Det[A1[x * ER / qe]], {x, 0.4, 0.5}]
```



```
Sol = {{0.0001866`, 1.492`*^38}, {0.0001944`, -1.44`*^38},
  {0.08496`, -1.184`*^37}, {0.08515`, -1.05`*^39}, {0.08553`, -1.05`*^39},
  {0.08859`, -1.184`*^37}, {0.09601`, 1.026`*^39}, {0.1057`, 1.458`*^40},
  {0.1062`, -1.079`*^40}, {0.1068`, 1.458`*^40}, {0.1073`, -1.079`*^40},
  {0.1119`, -1.079`*^40}, {0.1125`, -3.617`*^40}, {0.1132`, -1.079`*^40},
  {0.1236`, -3.617`*^40}, {0.1273`, -3.617`*^40}, {0.1276`, -3.617`*^40},
  {0.1281`, -1.079`*^40}, {0.1595`, -1.079`*^40}, {0.1792`, -3.617`*^40},
  {0.1803`, -1.079`*^40}, {0.1809`, -3.617`*^40}, {0.182`, -3.617`*^40}};
```

```
Sol2 = Delete[#, 2] & /@ Sol;
```

```
QCE = 0.002;
```

```
(*Este es el conjunto de soluciones que  
encontramos para este valor del momento Qx=0.002*)
```

```
Insert[#, QCE, 1] & /@ Sol2
```

```
{{0.002, 0.0001866}, {0.002, 0.0001944}, {0.002, 0.08496}, {0.002, 0.08515},
  {0.002, 0.08553}, {0.002, 0.08859}, {0.002, 0.09601}, {0.002, 0.1057},
  {0.002, 0.1062}, {0.002, 0.1068}, {0.002, 0.1073}, {0.002, 0.1119}, {0.002, 0.1125},
  {0.002, 0.1132}, {0.002, 0.1236}, {0.002, 0.1273}, {0.002, 0.1276}, {0.002, 0.1281},
  {0.002, 0.1595}, {0.002, 0.1792}, {0.002, 0.1803}, {0.002, 0.1809}, {0.002, 0.182}}
```

```
(*FindRoot[Det[A1[x*ER/qe]], {x, 0.05076}]*)
```

```
ending = SessionTime[]
```

```
17461.052750
```

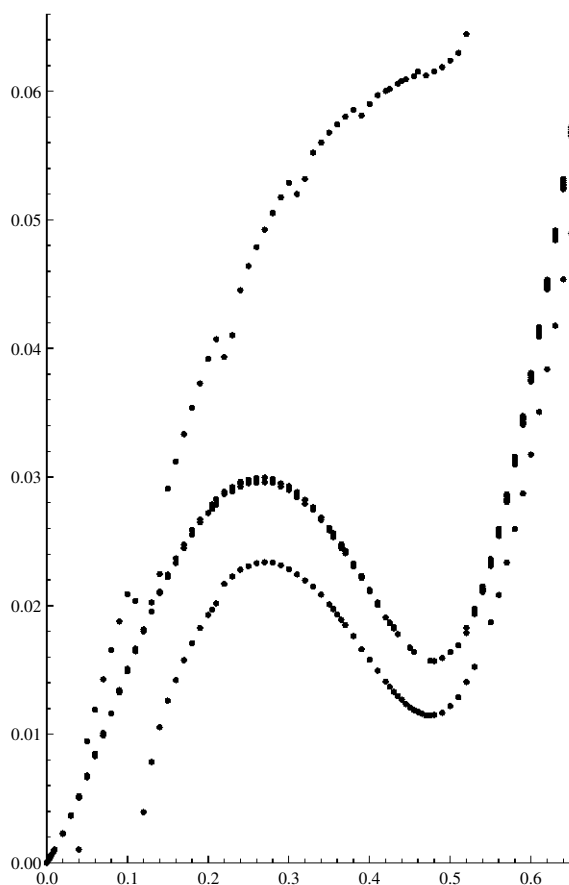
```
difre = ending - starting
```

```
17398.286690
```

```
(*10^3*0.0008698022470179826`*d*ER/(hbar*Qx)*)
```

```
NotebookSave[]
```

(*En la siguiente gráfica mostramos las soluciones para otros valores del momento (se exhiben alrededor de 70 valores de Q_x), lo que significa que es necesario repetir este programa otras setenta veces, para diferentes momentos*)



(*Nótese que a simple vista se percibe que sólo existe una curva físicamente aceptable, que satisfice el TG. En 2D y 3D aparecen varias curvas que comienzan en forma lineal en el origen, las cuales no pueden ser descartadas en principio, por lo que es necesario hacer un análisis. En esas dimensiones el número de soluciones que aparecen para un valor de Q_x dado también aumenta considerablemente, en el caso cuasi-1D hay un número reducido de ellas, como puede verse en la gráfica, lo cual simplifica el análisis*)

Referencias

- [1] P. L. Kapitza, Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point, *Nature* **141**, 74 (1938); J. F. Allen and H. Jones, New Phenomena Connected with Heat Flow in Helium II, *Nature* **141**, 243 (1938); J. F. Allen and D. Misener, Flow of Liquid Helium II, *Nature* **141**, 75 (1938).
- [2] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gas, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* [La teoría cuántica del gas ideal monoatómico, *Actas de la Academia Prusiana de Ciencias*], 261 (1924); Quantentheorie des einatomigen idealen Gas 2, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* [La teoría cuántica del gas ideal monoatómico 2, *Actas de la Academia Prusiana de Ciencias*], 3 (1925).
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957); J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Microscopic Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957); L. N. Cooper, Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas, *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956).
- [4] J. G. Bednorz and K. A. Müller, Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System, *Z. Phys. B* **64**, 189 (1986).
- [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, *Science* **269**, 198 (1995); K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [6] www.nobelprize.org
- [7] B. DeMarco and D. S. Jin, Exploring a quantum degenerate gas of fermionic atoms, *Phys. Rev. A* **58**, R4267 (1998).
- [8] D. D. Osheroff, R. C. Richardson, and D. M. Lee, Evidence for a New Phase of Solid ^3He , *Phys. Rev. Lett.* **28**, 885 (1972); D. D. Osheroff, W. J. Gully, R. C. Richardson, and D. M. Lee, New Magnetic Phenomena in Liquid ^3He below 3 mK, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 920 (1972).
- [9] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck and W. Ketterle, Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas, *Nature* **435**, 1047 (2005).
- [10] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, W. Ketterle, Fermionic Superfluidity with Imbalanced Spin Populations, *Science* **311**, 492 (2006).

- [11] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [12] T. Esslinger, Fermi-Hubbard Physics with Atoms in an Optical Lattice, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1**, 129 (2010).
- [13] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen(De) and U. Sen, Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond, *Advances in Physics* **56**, 243 (2007).
- [14] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari, Theory of ultracold atomic Fermi gases, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [15] T. Koponen, J.-P. Martikainen, J. Kinnunen, and P. Törmä, Sound velocity and dimensional crossover in a superfluid Fermi gas in an optical lattice, *Phys. Rev. A* **73**, 033620 (2006).
- [16] P. Fulde and R. A. Ferrell, Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field, *Phys. Rev.* **135**, A550 (1964).
- [17] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, Inhomogeneous State of Superconductors, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, 1136 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 762 (1965)].
- [18] T. Mizushima, K. Machida, and M. Ichioka, Direct Imaging of Spatially Modulated Superfluid Phases in Atomic Fermion Systems, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 060404 (2005); K. Machida, T. Mizushima, and M. Ichioka, Generic Phase Diagram of Fermion Superfluids with Population Imbalance, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 120407 (2006).
- [19] J. K. Chin, D. E. Miller, Y. Liu, C. Stan, W. Setiawan, C. Sanner, K. Xu and W. Ketterle, Evidence for superfluidity of ultracold fermions in an optical lattice, *Nature (London)* **443**, 961 (2006).
- [20] T. K. Koponen, T. Paananen, J.-P. Martikainen, and P. Törmä, Finite-Temperature Phase Diagram of a Polarized Fermi Gas in an Optical Lattice, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 120403 (2007).
- [21] T. Koponen, J Kinnunen, J.-P. Martikainen, L. M. Jensen and P Törmä, Fermion pairing with spin-density imbalance in an optical lattice, *New J. Phys.* **8**, 179 (2006).
- [22] T. Paananen, T. K. Koponen, P. Törmä and J. P. Martikainen, Noise correlations of the ultracold Fermi gas in an optical lattice, *Phys. Rev. A* **77**, 053602 (2008).
- [23] M. O. J. Heikkinen and P. Törmä, Collective modes and the speed of sound in the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov state, *Phys. Rev. A* **83**, 053630 (2011).
- [24] T.-L. Dao, M. Ferrero, A. Georges, M. Capone, and O. Parcollet, Polarized Superfluidity in the Attractive Hubbard Model with Population Imbalance, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 236405 (2008).
- [25] T. K. Koponen, T. Paananen, J.-P. Martikainen, M. R. Bakhtiari and P. Törmä, FFLO state in 1-, 2- and 3-dimensional optical lattices combined with a non-uniform background potential, *New J. Phys.* **10**, 045014 (2008); K. Machida, T. Mizushima, and M. Ichioka, Generic Phase of Fermion Superfluids with Population Imbalance, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 120407 (2006).

- [26] Y.-A. Liao, A. S. C. Rittner, T. Paprotta, W. Li, G. B. Partridge, R. G. Hulet, S. K. Baur and E. J. Mueller, Spin-imbalance in a one-dimensional Fermi gas, *Nature* **467**, 567 (2010).
- [27] H. Lu, L. O. Baksmaty, C. J. Bolech, and Han Pu, Expansion of 1D Polarized Superfluids: The Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov State Reveals Itself, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 225302 (2012); R. Lortz et al., Calorimetric Evidence for a Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov Superconducting State in the Layered Organic Superconductor κ -(BEDT-TTF)₂Cu(NCS)₂, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 187002 (2007).
- [28] Z. Chen and B. Wu, Bose-Einstein Condensate in a Honeycomb Optical Lattice: Fingerprint of Superfluidity at the Dirac Point, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 065301 (2011).
- [29] S. Tsuchiya, R. Ganesh, and A. Paramekanti, Superfluidity of Dirac fermions in a tunable honeycomb lattice: Cooper pairing, collective modes, and critical currents, *Phys. Rev. A* **86**, 033604 (2012).
- [30] G. F. Glinskii and Z. Koinov, Functional formulation of microscopic theory of exciton polaritons, *Theoret. Mat. Fiz.* **70**, 358 (1987); Z. Koinov, Direct optical transitions in semiconductors in the presence of the exciton condensed phase, *Phys. Rev. B* **72**, 085203 (2005).
- [31] S. Takada and T. Izuyama, Superconductivity in a Molecular Field. I, *Prog. Theor. Phys.* **41**, 635 (1969). H. A. Radovan et al., Magnetic enhancement of superconductivity from electron spin domains, *Nature* **425**, 51 (2003); A. Bianchi et al., Possible Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov Superconducting State in CeCoIn₅, *Phys. Rev. Lett.* **91** 187004 (2003); R. Combescot and C. Mora, The low-temperature Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov phases in 3 dimensions, *Europhys. Lett.*, **68**, 79 (2004); M. M. Maška et al., Superconducting Bardeen-Cooper-Schrieffer versus Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov states of heavy quasiparticles with spin-dependent masses and Kondo-type pairing, *Phys. Rev. B* **82**, 054509 (2010); A. Romano et al., Field-induced transition from chiral spin-triplet to mixed-parity Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov superconductivity, *Phys. Rev. B* **81**, 064513 (2010); H. Caldas, Cold asymmetrical fermion superfluids, *Phys. Rev. A* **69**, 063602 (2004); A. Sedrakian, J. Mur-Petit, A. Polls, and H. Mütter, Pairing in a two-component ultracold Fermi gas: Phases with broken-space symmetries, *Phys. Rev. A* **72**, 013613 (2005).
- [32] A. Lazarides and B. Van Schaeybroeck, Collective excitations of trapped imbalanced fermion gases, *Phys. Rev. A* **77**, 041602 (2008); S. Nascimbène et al., Collective Oscillations of an Imbalanced Fermi Gas: Axial Compression Modes and Polaron Effective Mass, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 170402 (2009); J. M. Edge and N. R. Cooper, Signature of the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov Phase in the Collective Modes of a Trapped Ultracold Fermi Gas, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 065301 (2009); W. V. Liu and F. Wilczek, Interior Gap Superfluidity, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 047002 (2003).
- [33] M. M. Forbes, E. Gubankova, W. V. Liu, and Frank Wilczek, Stability Criteria for Breached-Pair Superfluidity, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 017001 (2005).
- [34] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, QCD at finite baryon density: nucleon droplets and color superconductivity, *Phys. Lett. B* **422**, 247 (1998); M. Alford, Color-Superconducting Quark Matter, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51**, 131 (2001).

- [35] R. Casalbuoni and G. Nardulli, Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and QCD, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 263 (2004); A. M. Clogston, Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 266 (1962); B. S. Chandrasekhar, A Note on the Maximum Critical Field of High-Field Superconductors, *Appl. Phys. Lett.* **1**, 7 (1962).
- [36] J. P. A. Devreese, S. Klimin, M. Wouters, and J. Tempere, The Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov State in a 3D Fermi Gas Subjected to a 1D Periodic Potential, *Mod. Phys. Lett. B* **26**, 1230014 (2012).
- [37] T. Mizushima, K. Machida and M. Ichioka, Direct Imaging of Spatially Modulated Superfluid Phases in Atomic Fermion Systems, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 060404 (2005); M. Parish, S. K. Baur, E. J. Mueller and D. A. Huse, Quasi-One-Dimensional Polarized Fermi Superfluids, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 250403 (2007); G. Orso, Attractive Fermi Gases with Unequal Spin Populations in Highly Elongated Traps, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 070402 (2007).
- [38] R. Mendoza, M. Fortes, M. A. Solís, and Z. Koinov, Superfluidity of a spin-imbalanced Fermi gas in a three-dimensional optical lattice, *Phys. Rev. A* **88**, 033606 (2013).
- [39] R. Mendoza, M. Fortes and M. A. Solís, Collective Excitations of an Imbalanced Fermion Gas in an Optical Lattice, *J. Low Temp. Phys.* (disponible en línea y próximo a publicarse en la revista, DOI 10.1007/s10909-013-0926-2) (2013).
- [40] A. Sedrakian, J. W. Clark and M. Alford (Editors), *Pairing in Fermionic Systems. Basic Concepts and Modern Applications* (World Scientific, USA, 2006).
- [41] G. Sarma, On the influence of a uniform exchange field acting on the spins of the conduction electrons in a superconductor, *Phys. Chem. Solids* **24**, 1029 (1963).
- [42] P. F. Bedaque, H. Caldas, and G. Rupak, Phase Separation in Asymmetrical Fermion Superfluids, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 247002 (2003); H. Caldas, Cold asymmetrical fermion superfluids, *Phys Rev. A* **69**, 063602 (2004); S. Sachdev and K. Yang, Fermi surfaces and Luttinger's theorem in paired fermion systems, *Phys. Rev. B* **73**, 174504 (2006).
- [43] I. Bloch, Ultracold quantum gases in optical lattices, *Nature* **1**, 23 (2005).
- [44] C. J. Foot, *Atomic Physics* (Oxford University Press, Oxford, 2005).
- [45] H. T. C. Stoof, K. B. Gubbels and D. B. M. Dickerscheid, *Ultracold Quantum Fields* (Springer, Bristol, 2009).
- [46] L. Santos, M. A. Baranov, J. I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann, and M. Lewenstein, Atomic Quantum Gases in Kagomé Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 030601 (2004).
- [47] Z. Koinov and P. Koynov, Collective-mode spectrum of a superfluid Fermi gas in a moving optical lattice: A Bethe-Salpeter approach, *Phys. Express* **2**, 17 (2012).
- [48] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y.-A. Liao, R. G. Hulet, Pairing and Phase Separation in a Polarized Fermi Gas, *Science* **311**, 503 (2006).
- [49] J. Hubbard, Electron Correlations in Narrow Energy Bands, *Proc. R. Soc. London A* **276**, 238 (1963); Electron Correlations in Narrow Energy Bands. III. An Improved Solution, **281**, 401 (1964); J. Hubbard, The magnetism of iron, *Phys. Rev. B* **19** 2626 (1979); Magnetism of iron. II, **20** 4584 (1979).

- [50] A. Altland and B. Simons, *Condensed Matter Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 2006).
- [51] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [52] Z. G. Koinov, Non-perturbative treatment of the attractive Hubbard model, *Phys. Status Solidi B* **247**, 140 (2010); Speed of sound in an optical lattice, *Ann. Phys. (Berlin)* **552**, 693 (2010); Z. G. Koinov, M. Fortes, M. de Llano, and M. A. Solís, Unified description of collective modes in superconductors and semiconductors with a exciton condensed phase, *Phys. Status Solidi B* **247**, 2207 (2010).
- [53] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-body Quantum Theory in Condensed Matter Physics* (Oxford University Press, Oxford UK, 2009).
- [54] K. Maki and H. Won, Spin fluctuations of d-wave superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1758 (1994); J. Brinckmann and P. A. Lee, Slave Boson Approach to Neutron Scattering in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+y}$ Superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2915 (1999); J. Brinckmann and P. A. Lee, Renormalized mean-field theory of neutron scattering in cuprate superconductors, *Phys. Rev. B* **65**, 014502 (2001); J.-X. Li, C.-Y. Mou and T. K. Lee, Consistent picture for resonance-neutron-peak and angle-resolved photoemission spectra in high-Tc superconductors, *Phys. Rev. B* **62**, 640 (2000); J.-X. Li and C.-D. Gong, Doping dependence of the resonance peak and incommensuration in high-Tc superconductors, *Phys. Rev. B* **66**, 014506 (2002); H. Yamase and W. Metzner, Magnetic excitations and their anisotropy in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+y}$: Slave-boson mean-field analysis of the bilayer t-J model, *Phys. Rev. B* **73**, 214517 (2006).
- [55] O. Navarro and R. Baquero, *Ideas fundamentales de la superconductividad* (UNAM, México, D. F., 2007).
- [56] M. Tinkham, Second Edition, *Introduction to Superconductivity* (McGraw Hill Inc., Singapore, 1996).
- [57] K. Sun and C. J. Bolech, Pair tunneling, phase separation, and dimensional crossover in imbalanced fermionic superfluids in a coupled array of tubes, *Phys. Rev. A* **87**, 053622 (2013).
- [58] Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle, Observation of Phase Separation in a Strongly Interacting Imbalanced Fermi Gas, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030401 (2006).
- [59] M. M. Parish, S. K. Baur, E. J. Mueller, and D. A. Huse, Quasi-One-Dimensional Polarized Fermi Superfluids, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 250403 (2007).
- [60] Z. Koinov, R. Mendoza and M. Fortes, Rotonlike Fulde-Ferrell Collective Excitations of an Imbalanced Fermi Gas in a Two-Dimensional Optical Lattice, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 100402 (2011).
- [61] R. D. Mattuck, *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem*, Second Edition (Mc-Graw Hill Inc., USA, 1976).
- [62] A. Zagoskin, *Quantum theory of many-body systems: techniques and applications* (Springer Verlag, USA, 1998).

- [63] J. K. Chin, D. E. Miller, Y. Liu, C. Stan, W. Setiawan, C. Sanner, K. Xu and W. Ketterle, Evidence for superfluidity of ultracold fermions in an optical lattice, *Nature (London)* **443**, 961 (2006); D. E. Miller, J. K. Chin, C. A. Stan, Y. Liu, W. Setiawan, C. Sanner, and W. Ketterle, Critical Velocity for Superfluid Flow across the BEC-BCS Crossover, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 070402 (2007); M. Greiner, C. A. Regal and D. S. Jin, Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas, *Nature (London)* **426**, 537 (2003); S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. H. Denschlag and R. Grimm, Bose-Einstein Condensation of Molecules, *Science* **302**, 2101 (2003); M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
- [64] M. M. Parish, F. M. Marchetti, A. Lamacraft and B. D. Simons, Finite-Temperature phase diagram of a polarized Fermi condensate, *Nature* **3**, 124 (2007).
- [65] Z. Koinov, E. Enriquez, S. Pahl, Z. Alabadi and H. Kim, Landau instability and phase diagram of ^6Li and ^{40}K atoms loaded in an optical lattice, *Phys. Express* **3**, 28 (2013).
- [66] C. H. Schunck et al., Pairing Without Superfluidity: The Ground State of an Imbalanced Fermi Mixture, *Science* **11**, 867 (2007); A. Schirotzek, Yong-il Shin, C. H. Schunck, and W. Ketterle, Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 140403 (2008); C. H. Schunck, Yong-il Shin, A. Schirotzek and, W. Ketterle, Determination of the fermion pair size in a resonantly interacting superfluid, *Nature* **454**, 739 (2008).
- [67] M. Randeria, J. M. Duan and L. Y. Sheh, Bound states, Cooper pairing, and Bose condensation in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 981 (1989); J. Liu, J. Schmalian and N. Trivedi, Pairing and Superconductivity Driven by Strong Quasiparticle Renormalization in Two-Dimensional Organic Charge Transfer Salts, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 127003 (2005).
- [68] Y. Zhang and J. Callaway, Extended Hubbard model in two dimensions, *Phys. Rev. B* **39**, 9397 (1989); A. Georges et al., Dynamical mean-field theory of strongly correlated fermion systems and the limit of infinite dimensions, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 13 (1996).
- [69] S. Allen and A.-M. S. Tremblay, Nonperturbative approach to the attractive Hubbard model, *Phys. Rev. B* **64**, 075115 (2001); B. Davoudi and A.-M. S. Tremblay, Non-perturbative treatment of charge and spin fluctuations in the two-dimensional extended Hubbard model: Extended two-particle self-consistent approach, *Phys. Rev. B* **76**, 085115 (2007); B. Davoudi, S. R. Hassan, and A.-M. S. Tremblay, Competition between charge and spin order in the t-U-V extended Hubbard model on the triangular lattice, *Phys. Rev. B* **77**, 214408 (2008); Y. M. Vilk and A.-M. S. Tremblay, Non-Perturbative Many-Body Approach to the Hubbard Model and Single-Particle Pseudogap, *J. Phys. I (France)* **17**, 1309 (1997).
- [70] E. V. Ludeña, R. F. Bishop and P. Iza (Editors), *Condensed Matter Theories Vol. 25* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 2011).
- [71] Z. G. Koinov, A field-theoretical approach to the extended Hubbard model, *Physica C*, **470**, 144 (2010).
- [72] J. Schwinger, The Theory of Quantized Fields. I, *Phys. Rev.* **82** 914 (1951).

- [73] F. J. Dyson, The S Matrix in Quantum Electrodynamics, Phys. Rev. **75** 1736 (1949).
- [74] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, A Relativistic Equation for Bound-State Problems, Phys. Rev. **84** 1232 (1951).
- [75] R. Côté and A. Griffin, Excitonic modes in a Bose-condensed electron-hole gas in the pairing approximation, Phys. Rev. B **37**, 4539 (1988); H. Chu and Y. C. Chang, Theory of optical spectra of exciton condensates, Phys. Rev. B **54**, 5020 (1996).
- [76] Y. Yunomae, I. Danshita, D. Yamamoto, N. Yokoshi, and S. Tsuchiya, Current-induced instability of superfluid Fermi gases in optical lattices, J. Phys.: Conf. Ser. **150**, 032128 (2009).
- [77] R. Côté and A. Griffin, Cooper-pair-condensate fluctuations and plasmons in layered superconductors, Phys. Rev. B **48**, 10404 (1993).
- [78] Z. Koinov and P. Nash, Bethe-Salpeter equations for the collective modes of the t-U-V-J model with d-wave pairing: Analysis of the photoemission resonance of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, Phys. Rev. B **48**, 10404 (1993).
- [79] R. Combescot, M. Yu. Kagan and S. Stringari, Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover, Phys. Rev. A **74**, 042717 (2006).
- [80] R. Ganesh, A. Paramekanti and A. A. Burkov, Collective modes and superflow instabilities of strongly correlated Fermi superfluids, Phys. Rev. A **80**, 043612 (2009).
- [81] G. Rickayzen, Collective Excitations in the Theory of Superconductivity, Phys. Rev. **115**, 795 (1959).
- [82] L. Belkhir and M. Randeria, Crossover from Cooper pairs to composite bosons: A generalized RPA analysis of collective excitations, Phys. Rev. B **49**, 6829 (1994).
- [83] P. W. Anderson, Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity, Phys. Rev. **112**, 1900 (1958).
- [84] G. Baym and L. P. Kadanoff, Conservation Laws and Correlation Functions, Phys. Rev. **124**, 287 (1961).
- [85] G. Baym, Self-Consistent Approximations in Many-Body Systems, Phys. Rev. **127**, 1391 (1962).
- [86] C. De Dominicis and P. C. Martin, Stationary Entropy Principle and Renormalization in Normal and Superfluid Systems. I. Algebraic Formulation, J. Math. Phys. **5**, 430 (1964).
- [87] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc Graw Hill, New York, 1980).
- [88] A. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particles Systems* (Dover Publications Inc., New York, 2003); N. Nakanishi, A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation, Prog. Theor. Phys. Supplement **43**, 1 (1969).
- [89] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 2008).
- [90] K. V. Samokhin, Goldstone modes in Larkin-Ovchinnikov-Fulde-Ferrell superconductors, Phys. Rev. B **81**, 224507 (2010).

- [91] Y.-P. Shim, R. A. Duine, and A. H. MacDonald, Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov vortex lattice states in fermionic cold-atom systems, *Phys. Rev. A* **74**, 053602 (2006).
- [92] P. Nozières and D. Pines, *The Theory of Quantum Liquids, Vol. II* (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1990).
- [93] P. Nozières and D. Pines, *The Theory of Quantum Liquids: Superfluid Bose Liquids* (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Redwood City, 1989).
- [94] D. G. Henshaw and A. D. B. Woods, Modes of Atomic Motions in Liquid Helium by Inelastic Scattering of Neutrons, *Phys. Rev.* **121**, 1266 (1961).
- [95] D. K. Lee and F. J. Lee, Brillouin-Wigner perturbation procedure for elementary excitations in liquid ^4He , *Phys. Rev. B* **11**, 4318 (1998); V. Apaja and M. Saarela, Current patterns in the phonon-maxon-roton excitations in ^4He , *Phys. Rev. B* **57**, 5358 (1998); R. P. Feynman, Atomic Theory of the λ Transition in Helium, *Phys. Rev.* **91**, 1291 (1953); Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium, *Phys. Rev.* **94**, 262 (1954).
- [96] W. Montfrooij and E. C. Svensson, Superfluid ^4He : Just a Very Cold Liquid?, *J. Low Temp. Phys.* **121**, 293 (2000); H. R. Glyde, M. R. Gibbs, W. G. Stirling and M. A. Adams, Excitations in superfluid ^4He beyond the roton, *Europhys. Lett.* **43**, 422 (1998); R. J. Donnelly, J. A. Donnelly, and R. N. Hills, Specific Heat and Dispersion Curve for Helium II, *J. Low Temp. Phys.* **44**, 471 (1981).
- [97] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, Second Edition, (Butterworth Heinemann, Cornwall, 1997).
- [98] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover Publications Inc., New York, 1975).
- [99] A. J. M. Schmets and W. Montfrooij, Teaching superfluidity at the introductory level, arXiv:0804.3086 (2008).
- [100] L. Landau, The theory of superfluidity of helium II, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **11** 592 (1941) (*J. Phys. USSR* **5**, 71 (1941)); On the theory of superfluidity of helium II, *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947); On the hydrodynamics of helium II, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **14**, 112 (1944) (*J. Phys. USSR* **8**, 1 (1944)).
- [101] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt College Publishers, USA, 1976).