



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA
MODELADO DE SISTEMAS TERRESTRES

Simulación Numérica de Inyección de Agua en Yacimientos
Petroleros empleando el Método de Líneas de Corriente

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

P R E S E N T A:

R O B E R T O C A R L O S M A R T Í N E Z C A R R A D A

Director de Tesis:
Dr. Luis M. De la Cruz Salas
Instituto de Geofísica

México, D.F. Enero 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

El presente trabajo no habría sido posible sin la generosa ayuda de muchas personas e instituciones. A mi *alma máter*, la Universidad Nacional Autónoma de México, al Instituto de Geofísica y al Posgrado en Ciencias de la Tierra, así como a su personal académico y administrativo que me apoyaron durante mis estudios de posgrado. Al programa nacional de Becas de Posgrado del CONACyT que disfruté durante dos años.

A mi director de tesis, el Dr. Luis De la Cruz por la paciencia que me tuvo durante la elaboración de la tesis, sus consejos, observaciones y al tiempo dedicado en las sesiones de tutoría.

A mis profesores del posgrado que ayudaron en mi formación a lo largo de estos años, sus conocimientos y experiencia sirvieron también de inspiración para mi trabajo de investigación.

A mi jurado de examen de grado: Dr. Ismael Herrera Revilla, Dra. Graciela Herrera Zamarrón, Dr. Ernesto Rubio Acosta, Dr. Carlos Ortiz Alemán y al Dr. Luis M. De la Cruz Salas. Sus comentarios y correcciones sobre mi trabajo enriquecieron el contenido de éste.

A todos ellos, ¡Gracias!

Dedicatoria

*A mi más dura crítica
y mi más ferviente apoyo:
a mis padres Leonor y Prudencio
y a Hugo, mi hermano.*

*A Érika, un alma libre y creativa.
Por nuestros colores,
la bohemia y nuestra literatura.
... ya viene el fin de semana.*

*Con personas como ustedes en mi vida,
pase lo que pase, ¡ya he ganado!
¡Éxito!*

Índice General

Índice General	4
Índice de Figuras	7
Índice de Tablas	9
1 Introducción	15
1.1. Estructura de la Tesis	17
2 Simulación de Yacimientos	19
2.1. Métodos Clásicos en Ingeniería de Yacimientos	20
2.1.1. Métodos de Balance de Materiales	20
2.1.2. Métodos de Curva de Declinación	20
2.1.3. Métodos Estadísticos	21
2.1.4. Métodos Analíticos	21
2.2. Métodos de Simulación de Yacimientos	21
2.2.1. Etapas de la Simulación	21
2.2.2. Clasificación de Simuladores de Yacimientos	22
2.2.3. Aplicaciones de la Simulación de Yacimientos	23
2.3. Términos Usados en la Simulación Numérica	24
3 Modelo Conceptual	27
3.1. Formación del Aceite y Gas	27
3.1.1. Transformación de la Materia Orgánica	28
3.2. Sistema Petrolero	29
3.3. Propiedades de la Roca y los Fluidos en el Yacimiento	30
3.3.1. Propiedades de la Roca	30
3.3.2. Propiedades de los Fluidos	33
3.4. Mojabilidad	36

3.5.	Procesos de Desplazamiento de Fluidos	37
3.6.	Interacción Roca-Fluidos	37
3.7.	Etapas de la Recuperación de Hidrocarburos	39
4	Modelos Matemáticos	41
4.1.	Formulación Axiomática	41
4.2.	Forma Conservativa de las Ecuaciones de Balance	42
4.3.	Modelo Matemático para Sistemas Multifásicos	43
4.4.	Formulación Presión-Saturación para Flujos Bifásicos	44
4.5.	Método de Líneas de Corriente	45
4.5.1.	Conceptos Fundamentales	45
4.5.2.	Líneas de Corriente	48
4.5.3.	Funciones de Corriente en 2D	50
4.5.4.	Funciones de Corriente y Líneas de Corriente en 3D	51
4.5.5.	Líneas de Corriente y Tiempo de Vuelo	53
4.5.5.1.	Tiempo de Vuelo como Coordenada Espacial	55
4.5.5.2.	Cálculo del Tiempo de Vuelo y Líneas de Corriente en 2D y 3D	55
5	Modelo Numérico	61
5.1.	Método de Volumen Finito (MVF)	61
5.2.	Modelo Discreto de Flujo en dos Fases con MVF	62
5.2.1.	Discretización de la Ecuación de Presión	62
5.2.2.	Discretización de la Ecuación de Saturación	66
5.2.3.	Algoritmo IMPES	69
5.3.	Condiciones Iniciales y de Frontera	69
5.4.	Cálculo de la Saturación en las Caras	71
5.5.	Cálculo del Transporte a lo largo de las Líneas de Corriente	71
5.5.1.	Discretización de la Ecuación de Saturación 1D	72
6	Modelo Computacional y Resultados Numéricos	73
6.1.	Software TUNAM	73
6.2.	Implementación	75
6.2.1.	Calibración 1D con el modelo de Buckley- Leverett	75
6.2.2.	Estudio de Caso	78
6.2.3.	Caso homogéneo (MVF)	79
6.2.4.	Caso no-homogéneo (MVF)	83
6.2.5.	Líneas de Corriente caso no-homogéneo	87
7	Conclusiones	93
A	Formulación Presión-Saturación	95
A.1.	Ecuación de Presión	95

A.2. Ecuación de Saturación	97
B Gradiente Conjugado para Sistemas Lineales Dispersos	99
C Aplicación del Método de Volumen Finito	103
Referencias	105

Índice de Figuras

2.1.	Etapas del proceso de modelado y simulación.	22
2.2.	Malla para un área en 2D.	24
2.3.	Corte transversal para un dominio 2D.	25
3.1.	Deposición de la materia orgánica en ambientes reductores y su posterior sepultamiento en la cuenca sedimentaria.	28
3.2.	Trampa típica con sincronía de los distintos elementos del Sistema Petrolero.	30
3.3.	A la izquierda, observamos poros interconectados y poros aislados a la derecha.	31
3.4.	Correlación permeabilidad-porosidad	33
3.5.	Relación densidad-presión.	34
3.6.	A la izquierda un fluido no mojado, al centro un fluido de mojabilidad intermedia y a la derecha un fluido mojado.	36
3.7.	Procesos de drenajes e imbibición	37
3.8.	En rojo se muestra la curva de drenaje primario e imbibición en negro y delimitan el comportamiento de la presión capilar. En verde p_c para una saturación intermedia, en amarillo una inversión de los valores para la línea verde.	38
3.9.	Inyección de agua en yacimientos petroleros.	40
4.1.	Representación esquemática de un medio continuo	42
4.2.	A la izquierda, el campo de velocidad en un dominio dado. A la derecha observamos las líneas de corriente tangentes al campo de velocidad local. Imágenes obtenidas con OpenDx.	46
4.3.	Tubo de corriente. Imágenes obtenidas con OpenDx.	46
4.4.	Tiempo de vuelo τ para una partícula de prueba.	47
4.5.	Una función de corriente no depende de la definición de la trayectoria.	48
4.6.	Una función de corriente no depende de la definición de la trayectoria.	49
4.7.	Líneas de corriente, función de corriente y tubo de corriente en 2D.	51

4.8.	Dos superficies de corriente en (a) y en (b) y sus intersecciones en (c) definen un tubo de corriente. Los bordes del tubo de corriente son líneas de corriente.	53
4.9.	Bloque de volumen finito para el cálculo del tiempo de vuelo.	56
4.10.	Partícula en un esquema de celdas 2D para el cálculo del tiempo de vuelo.	59
4.11.	Cálculo del tiempo de vuelo para una sola celda.	59
4.12.	Representación del algoritmo de Pollock en 2D.	60
4.13.	Línea de corriente en un sistema 3D.	60
5.1.	Volumen de control en tres dimensiones. Las letras mayúsculas representan los centros de los volúmenes de control, mientras que las minúsculas las caras de dichos volúmenes.	62
5.2.	La matriz resultante presenta 7 bandas en el caso tridimensional.	66
6.1.	(a) Arquitectura general de TUNAM. (b) Los paquetes FVM y Geom se muestran de manera esquemática: las letras G, S y A, a la derecha de la figura, significan <i>Generalization</i> , <i>Specialization</i> y <i>Adaptor</i> , respectivamente.	75
6.2.	Medio homogéneo de 300 m de longitud, en un principio saturado de aceite.	76
6.3.	Saturación obtenida mediante líneas de corriente en rojo y con volumen finito en verde.	77
6.4.	Geometría del dominio del caso de cinco pozos.	78
6.5.	Evolución del frente de saturación para un medio homogéneo.	82
6.6.	Valores de permeabilidad en el dominio de estudio, de izquierda a derecha: permeabilidad en dirección x , y y z	83
6.7.	Evolución del frente de saturación para un medio de permeabilidad variable.	86
6.8.	Campo de velocidad para el dominio con permeabilidad variable.	89
6.9.	Comparación de los métodos MVF y SLS en los mismos días de la simulación.	92

Índice de Tablas

3.1. Clasificación de permeabilidad de rocas	32
3.2. Valores típicos de viscosidad en aceites.	36
5.1. Condiciones iniciales para la presión y la saturación.	69
6.1. Condiciones iniciales y de frontera para la presión y la saturación.	77
6.2. Datos para el caso de estudio.	78

Abstract

In this thesis I study a three-dimensional model of two-phase flow in porous media to simulate water injection into oil fields. The mathematical models are derived from axiomatic formulation. This model consists of a set of partial differential equations, non-linear and coupled, which are solved using the IMPES algorithm. I use the pressures and saturations of water and oil phases in order to calculate the total velocity field in the domain of interest. Streamlines are paths whose points are tangent to the field velocity at given instant of time. To discretize the resulting system of equations I used the Finite Volume Method (FVM) which is derived from the conservative version of balance equations. The discrete system satisfies the principle of conservation of the extensive properties of the model for each control volumes. The relationship between the numerical algorithm and the principle of conservation is one of the biggest advantages of FVM.

This thesis also presents the development and application of a three-dimensional, two-phase streamline simulator applied to field scale multiwell problems. The underlying idea of the streamline method is to decouple the full 3D problem into multiple 1D problems along streamlines. Fluids are moved along the natural streamline grid, rather than between discrete gridblocks as in conventional methods. Permeability effects and well conditions dictate the paths that the streamlines take in 3D; the geometry and density of the streamlines reflects the geological impact of preferential flow paths introducing higher line density in regions of high porosity and permeability. The physics of the displacement is captured by the 1D solutions mapped along streamlines. The one-dimensional solution makes this approach extremely fast and effective to model flows in fields where there are many heterogeneities.

Resumen

En este trabajo se estudia un modelo de flujo bifásico en medios porosos en tres dimensiones a fin de simular numéricamente la inyección de agua en yacimientos petroleros. El modelo matemático se obtiene mediante la formulación axiomática. Este modelo consiste de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acopladas, las cuales se resuelven utilizando el algoritmo IMPES. La presión y la saturación de las fases agua y aceite ayudan a calcular el campo de velocidades total en el dominio de interés. Las líneas de corriente son trayectorias que en cada uno de sus puntos son tangentes a dicho campo de velocidad en un instante de tiempo dado. La discretización del sistema de ecuaciones resultante se llevó a cabo mediante el Método de Volumen Finito (MVF), que se deriva a partir de la forma conservativa de las ecuaciones de balance. El sistema discreto, cumple con el principio de conservación de las propiedades extensivas del modelo para cada uno de los volúmenes de control. La relación existente entre el algoritmo numérico y el principio de conservación es una de las mayores ventajas del MVF.

Esta tesis presenta también el desarrollo y la aplicación de un simulador 3D de dos fases aplicado a escala de yacimiento para problemas con múltiples pozos. La principal idea del método de Líneas de Corriente es descomponer un problema completamente en 3D en uno con múltiples líneas de corriente 1D. Los fluidos se mueven a lo largo de las líneas de corriente discretizadas, en lugar de entre los bloques de la malla de métodos convencionales. Los efectos de permeabilidad y la distribución de los pozos dictan los caminos que llevan las líneas de corriente en 3D; la geometría y la densidad de las líneas de corriente reflejarán el impacto geológico sobre los caminos preferenciales del flujo, introduciendo mayor densidad de líneas en regiones de alta porosidad y permeabilidad. La física del desplazamiento es capturada por las soluciones 1D asignadas a lo largo de cada líneas de corriente. La solución unidimensional hace que este enfoque sea extremadamente rápido y efectivo para modelar flujos en yacimientos en donde existen muchas heterogeneidades.

Capítulo 1

Introducción

El modelado de yacimientos basado en líneas de corriente ha sido usado en la industria del petróleo desde los años 50's, [15, 16]. Recientemente se ha incrementado el interés en estas técnicas debido al desarrollo de nuevas formas de caracterizar los yacimientos, [48]. Hoy en día es posible obtener modelos estáticos que integran datos geológicos y geofísicos en tres dimensiones muy detallados, [43, 50]. Lo anterior se traduce en modelos de cientos de millones de nodos para una simulación típica [26], que requieren de la capacidad de cómputo adecuada, [34, 40, 49]. El incremento en la resolución produce más variables e incertidumbres que no pueden manejarse con las técnicas estándares (métodos basados en mallas numéricas), ni con los equipos de cómputo actualmente existentes. En una simulación numérica se busca entender y cuantificar el impacto de los elementos desconocidos del modelo estático sobre el flujo de los fluidos y el transporte de hidrocarburos, para realizar un manejo prudente y eficiente del yacimiento, [25, 28, 36]. Los recientes desarrollos en las técnicas de simulación con líneas de corriente ofrecen un alto potencial para atacar este tipo de problemas, pues proporciona herramientas para la simulación rápida de yacimientos a escalas finas, [42]. La evolución de los frentes de inyección y su interacción con las heterogeneidades del yacimiento pueden ser visualizadas fácil y rápidamente, y por lo tanto proveen de una manera natural e intuitiva para caracterizar dinámicamente un yacimiento. Los fundamentos de estas técnicas se remontan al siglo XIX, desde entonces ha habido un constante desarrollo de este tipo de métodos, [1]. Una línea de corriente es una trayectoria que en cada uno de sus puntos es tangente al campo de velocidad en un instante de tiempo dado. Dado que la velocidad es dependiente del tiempo, entonces las líneas se trazan usando campos de velocidades instantáneos. La velocidad se obtendrá a partir de la solución numérica de la ecuación de presión. La ecuación de presión satisface una ecuación diferencial (parabólica o elíptica) la cual una vez obtenida sirve de base para definir y resolver una familia de ecuaciones

hiperbólicas (o, casi hiperbólicas). Así, la mayor resolución se logrará aumentando la finura del mallado para obtener la solución de la presión y reduciendo los intervalos de tiempo de las ecuaciones de transporte para las componentes.

Una vez obtenidas las presiones, se obtienen las velocidades mediante la ley de Darcy. Usando las velocidades se trazan las líneas de corriente mediante el algoritmo de Pollock y se calcula el Tiempo de Vuelo (TOF), por sus siglas en inglés, a lo largo de las mismas. Típicamente estas líneas comienzan en un pozo inyector y se hace el seguimiento hasta los pozos productores. Las ecuaciones de transporte se resuelven sobre las líneas de corriente, transformando el problema tridimensional a varios problemas en una dimensión, [24]. Este cálculo se puede realizar en paralelo simplemente repartiendo grupos de líneas de corriente, a procesadores diferentes y en ellos obtener las soluciones de transporte para cada uno de estos grupos, [8]. En simulaciones dependientes del tiempo, se deben actualizar estos campos periódicamente, pero los pasos de tiempo pueden ser largos comparados con los pasos de tiempo usados en la solución de las ecuaciones de transporte, [17, 32, 45]. Cada vez que se actualiza la presión, las saturaciones se interpolan de la malla numérica a las líneas de corriente y viceversa. Esto puede introducir errores numéricos en el balance de masa, y posiblemente introducir dispersión numérica.

Las líneas de corriente proveen imágenes instantáneas de los patrones de flujo en el campo, que los ingenieros pueden utilizar para acortar el ciclo de ajuste histórico al validar los modelos de los yacimientos, [5]. Las líneas de corriente también pueden ayudar a los ingenieros a desarrollar estrategias de inyección y mejorar la eficiencia del desplazamiento mediante el análisis de los patrones de flujo y estimando las relaciones inyector-productor en el campo durante los cálculos de distintos escenarios de predicción, [3]. Desarrollos recientes en métodos de líneas de corriente permiten ahora para los simuladores de yacimientos basados en estos métodos, [6, 7], ser aplicados a un conjunto más general de problemas, [9] que antes sólo podían ser resueltos usando métodos convencionales como el de Volumen Finito.

Objetivo

Desarrollar herramientas computacionales que implementen el método de líneas de corriente para simular el desplazamiento de aceite por agua en un yacimiento petrolero y evaluar el desempeño del Método de Líneas de Corriente contra los métodos tradicionales, particularmente, el Método de Volumen Finito.

1.1. Estructura de la Tesis

En el **capítulo 2** se aborda el concepto de simulación de yacimientos, las distintas maneras que existen de predecir su comportamiento, sus principales aplicaciones y la terminología usada en ingeniería de yacimientos, [1, 13, 36].

En el **capítulo 3** entramos a la primera parte del proceso de modelado y simulación, pues se hace la descripción del modelo conceptual del problema, [38, 25], es decir, todas aquellas leyes y principios de la física que gobiernan el flujo de fluidos en medios porosos, [14] y sus expresiones matemáticas.

Ya en el **capítulo 4**, se hace un desarrollo de los modelos matemáticos que describen el desplazamiento un flujo de dos fases en tres dimensiones en un medio poroso. Dicho modelo matemático consta de ecuaciones diferenciales parciales que se deducen a partir de la formulación axiomática, [2, 27] y la presentación del método de Líneas de Corriente y su planteamiento matemático.

El **capítulo 5** describe el Método de Volumen Finito [32, 19, 45] y su aplicación a la discretización de las ecuaciones de presión y saturación 1D para el método de Líneas de Corriente.

En el **capítulo 6** encontraremos la implementación [39] de los algoritmos descritos en el capítulo anterior a fin de resolver las ecuaciones discretas que conforman el modelo matemático. Dicha implementación se llevó a cabo en el lenguaje de programación C++ bajo la plataforma TUNAM, [18] así como la visualización de los resultados con OpenDx, [35]. Finalmente, el **capítulo 7** consta de las conclusiones a las que llegamos en este trabajo.

Capítulo 2

Simulación de Yacimientos

Un yacimiento petrolero es un medio poroso que contiene hidrocarburos. Las dos características importantes en un yacimiento son la naturaleza de la roca y de los fluidos que contiene, [10, 30]. Un yacimiento es generalmente heterogéneo; sus propiedades dependen en gran medida de la ubicación espacial. Por ejemplo, un yacimiento fracturado es considerado heterogéneo ya que se compone de un conjunto de bloques de medios porosos (la matriz rocosa) y una red de fracturas. Las propiedades de las rocas de un reservorio de esta naturaleza suelen cambiar drásticamente; su permeabilidad puede variar de un milidarcy (md) en la matriz a miles de md en las fracturas. Mientras que las ecuaciones que gobiernan los yacimientos fracturados son similares a los de un yacimiento ordinario, presentan dificultades adicionales que deben ser consideradas, como la incorporación en los modelos de la distribución variable de porosidad y permeabilidad, véase [36].

Los principales objetivos en la simulación de yacimientos son la determinación de la reservas y la predicción de las tasas de recuperación de los yacimientos y encontrar la manera de optimizar la recuperación de los hidrocarburos bajo diversas condiciones operativas, prediciendo así el desempeño a futuro del yacimiento, [20]. La simulación de yacimientos es pues, el proceso de inferir el comportamiento real a partir del comportamiento de un modelo. Los modelos pueden ser físicos, tales como modelos a escala de laboratorio o matemáticos.

Existen 4 etapas fuertemente ligas de modelado, [44], estableciendo primero el modelo físico, seguido del desarrollo de los modelos matemáticos,[22, 27], posteriormente la discretización de dichos modelos [2, 4] y el diseño de algoritmos computacionales, [21, 23, 47].

2.1. Métodos Clásicos en Ingeniería de Yacimientos

Los métodos clásicos de predicción de comportamiento de los yacimientos incluyen métodos analógicos, experimentales y matemáticos. Los métodos analógicos utilizan las características de yacimientos maduros que son análogos a los del yacimiento objetivo en un intento de predecir el rendimiento de una zona o de un yacimiento. Los métodos experimentales miden propiedades físicas, tales como la presión, la saturación y sus relaciones en los núcleos de laboratorio y luego se busca ampliar su escala para la acumulación de hidrocarburos en el yacimiento. Por último, los métodos matemáticos usan sistemas de ecuaciones que suelen ser por lo general sistemas de ecuaciones diferenciales parciales para pronosticar el desempeño del yacimiento, ver [13]

2.1.1. Métodos de Balance de Materiales

Los métodos matemáticos son los más utilizados en la simulación clásica de yacimientos en la industria petrolera a fin de predecir el comportamiento del yacimiento. Estos métodos incluyen el balance de materiales, curva de declinación, estadísticos y métodos analíticos.

Los métodos clásicos de balance de materiales usan una representación matemática de un yacimiento o volumen de drenaje. Su principio básico es la conservación de masa, es decir, la cantidad de masa de agua, aceite o gas que queda en el depósito después de un período de producción es igual a la diferencia de la cantidad de masa originalmente en su lugar y que fue removido del yacimiento debido a la producción, más la cantidad de masa añadida debido a la inyección.

2.1.2. Métodos de Curva de Declinación

Los métodos clásicos de curva de declinación usan uno de los tres declines matemáticos (exponencial, hiperbólico y armónico) para describir la tasa de declinación en la producción del aceite. Una curva de declinación tiene la forma general

$$C_q^b = -\frac{1}{q} \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

donde C es un parámetro de declinación, q es la tasa de producción (m^3/d), y t es el tiempo (días). Los casos para cuando $b = 0$, $0 < b < 1$ y $b = 1$ corresponden a declinaciones exponenciales, hiperbólicas y armónicas, respectivamente.

Los métodos de la curva de declinación coinciden con los datos históricos de producción para seleccionar una forma adecuada de la ecuación (2.1). Después de la forma que se elija, los datos históricos son igualados por la elección de los parámetros C y b que minimicen el error (utilizando a menudo el error de mínimos cuadrados) entre los datos y la ecuación. Extrapolando los datos históricos en el futuro, se predice el desempeño del yacimiento mediante la ecuación igualada. Un supuesto fundamental de cualquier método de extrapolación es que todos los procesos que ocurren en el pasado continuarán en el futuro.

2.1.3. Métodos Estadísticos

Los métodos estadísticos emplean correlaciones empíricas que son estadísticamente obtenidos usando los resultados anteriores de algunos yacimientos para pronosticar el desempeño futuro de los demás. Se trata de una generalización de los métodos analógicos. Una correlación se desarrolla con datos de yacimientos maduros de la misma región, con la misma litología y bajo las mismas condiciones de funcionamiento. Para tener confianza en el uso de un modelo de correlación empírica, las propiedades del yacimiento deben estar dentro del límite de la base de datos de regresión utilizado para desarrollar un modelo. Los errores de predicción con los métodos estadísticos pueden ser tan altos como del 20 al 50 %.

2.1.4. Métodos Analíticos

Los métodos de análisis, como el de Buckley-Leverett, utilizan la solución analítica de un modelo matemático. El modelo consta de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el flujo y transporte de fluidos en un medio poroso, junto con un conjunto adecuado de condiciones iniciales y/o de frontera. Para resolver estas ecuaciones exactamente, se deban hacer suposiciones que simplifiquen el modelo y reduzcan la complejidad del mismo. En general, estas suposiciones son muy restrictivas. Por ejemplo, en el método de Buckley-Leverett para un flujo de dos fases se ignoran las fuerzas de gravedad y capilares bajo la condición de incompresibilidad. Sin embargo, dado que gran parte de la física de un problema se mantiene, los métodos analíticos a menudo se utilizan para determinar cómo los diferentes parámetros influyen en el rendimiento del yacimiento. Además, estos métodos pueden ser utilizados para validar simuladores de yacimientos. Existen métodos más sofisticados tales como la separación de variables, transformada de Laplace, y métodos integrales, [13].

2.2. Métodos de Simulación de Yacimientos

2.2.1. Etapas de la Simulación

La simulación de yacimientos involucra cuatro etapas principales interrelacionadas, **figura 2.1**. En la primera, el modelo físico, se incorporan y desarrollan los procesos relevantes que intervienen en el fenómeno de estudio, en este caso en particular, el flujo de fluidos en medios porosos. En el modelo matemático, involucramos un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales [33] no lineales y acopladas dependientes del tiempo, analizando su existencia, convergencia y estabilidad. El modelo numérico emplea esquemas numéricos adecuados de discretización, tales como diferencias finitas, [31], volumen finito o elemento finito, integrando las propiedades básicas de las dos primeras etapas; modelos físico y matemático. En la cuarta etapa, en el modelo computacional se desarrollan algoritmos computacionales y sus códigos a fin de resolver eficientemente el sistema lineal y no lineal de ecuaciones algebraicas asociado a la

discretización numérica. Cada una de estas etapas es esencial para la simulación del yacimiento, en ocasiones es necesario iterar un determinado número de veces alguna de las etapas de la simulación a fin de ajustar los modelos físicos, matemáticos, numéricos y algoritmos computacionales para obtener un pronóstico preciso sobre el rendimiento del yacimiento.

La creciente aceptación de la simulación de yacimientos puede atribuirse a los avances en el desarrollo computacional, modelos matemáticos, métodos numéricos, técnicas de solución y herramientas de visualización científica.

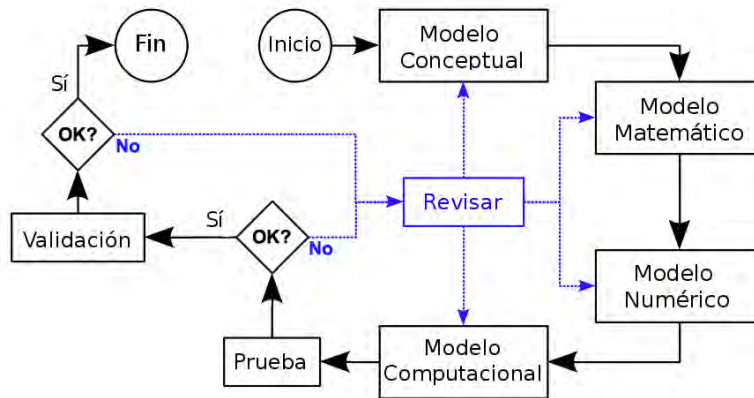


Figura 2.1: Etapas del proceso de modelado y simulación.

2.2.2. Clasificación de Simuladores de Yacimientos

Los simuladores de yacimientos se pueden clasificar de acuerdo a diferentes enfoques. Los más comunes se basan en el tipo de fluidos contenidos en el yacimiento de estudio y los procesos de recuperación que están siendo modelados. Otros enfoques incluyen el número de dimensiones (1D, 2D y 3D), el número de fases (monofásicos, bifásicos y trifásicos), y el sistema coordinado utilizado en el modelo (rectangulares, cilíndricos y esféricos). Los simuladores también pueden ser determinados por el tipo de estructura de la roca o su respuesta (ordinarios, doble porosidad/permeabilidad, acoplamiento hidráulico/térmico y fracturados).

Los simuladores basados en la clasificación del tipo de fluidos en el yacimiento incluyen gas, petróleo negro, y composicionales. Los simuladores de petróleo negro suelen ser usados para recuperaciones convencionales pues los procesos simulados no son sensibles a cambios composicionales en los fluidos del yacimiento. Los simuladores composicionales son usados cuando los procesos de recuperación de hidrocarburos son sensibles al agotamiento primario de aceite volátil y gas condensado, en operaciones de mantenimiento de presión en los yacimientos y en múltiples procesos miscibles.

Los Simuladores de yacimientos clasificados de acuerdo a los procesos de recuperación incluyen recuperación convencional (petróleo negro), desplazamiento

miscible, recuperación térmica e incorporación de químicos. Los procesos primarios de recuperación de petróleo, agua, gas en solución, expansión por gas, drenaje por gravedad e imbibición capilar, pueden ser modelados con simuladores de petróleo negro. Además, las etapas de recuperación secundaria, tales como la inyección de agua o gas, pueden también ser modelado con estos simuladores. Existen mecanismos térmicos de recuperación que implican inyección de vapor o la combustión *in situ*, y el uso de ecuaciones tales como las de conservación de masa y energía. Los simuladores de adición de químicos incluyen inyección de alcalinos, polímeros, y/o espuma y se pueden utilizar para cambiar la relación de movilidad de forma dinámica en el desplazamiento (polímero) o movilizar el aceite residual (surfactantes). Se deben considerar otros efectos tales como la adsorción en la roca, la reducción de la permeabilidad y los fluidos no newtonianos.

2.2.3. Aplicaciones de la Simulación de Yacimientos

La simulación de yacimientos es usualmente aplicada en los siguientes pasos:

- Establecer los objetivos de estudio de la simulación. El primer paso en cualquier estudio de simulación de yacimientos es fijar objetivos claros. Estos objetivos deben ser alcanzables y compatibles con yacimientos disponibles y datos de producción.
- Recopilar y validar los datos de yacimientos. Después de que los objetivos de la simulación se han establecido, se deben obtener datos del yacimiento y la producción. Los datos que cumplan los objetivos son incorporados en el simulador.
- Diseñar el simulador. Una vez que los datos son recogidos y validados, se diseña el simulador. Este paso implica las cuatro etapas principales interrelacionados descritas arriba: la construcción de un modelo físico conceptual, el desarrollo de modelos matemáticos y modelos numéricos así como el diseño de códigos computacionales.
- Validación histórica del simulador. Una vez que el simulador es construido, este debe ser calibrado con datos disponibles de producción ya que gran parte de los datos en un simulador típico necesitan ser verificados.
- Hacer predicciones. En la etapa final de aplicación, se evalúan diversos planes de desarrollo y producción llevándose a cabo un análisis de sensibilidad de diversos parámetros de producción en el yacimiento.

Mientras que la simulación de yacimientos es el método más completo, los métodos clásicos de ingeniería de yacimientos se encuentran todavía en uso para predecir el comportamiento de los yacimientos. Estos métodos clásicos se pueden utilizar para generar datos de entrada para simuladores de yacimientos. Por ejemplo, un análisis de

acumulación de presión se puede utilizar, en la caracterización del yacimiento, para obtener la permeabilidad del dominio de estudio, mientras que los métodos de balance de materiales proporcionan información sobre la intrusión de agua y el tamaño del acuífero durante la validación histórica.

2.3. Términos Usados en la Simulación Numérica

- **Método numérico.**- Un método numérico para resolver problemas de ecuaciones diferenciales consiste en discretizar el problema, que tiene un número infinito de grados de libertad, para producir un problema discreto, que tiene un número finito de grados de libertad y pueda ser resuelto utilizando una computadora. Existen diferentes métodos numéricos, entre ellos diferencias finitas, volúmenes finitos, y el método de elementos finitos.
- **Estructura de malla.**- Es la geometría de una malla que se utiliza para la simulación numérica de un yacimiento. Esta puede ser cartesiana, radial, logarítmica o distorsionada y 1D, 2D o 3D.
- **Malla 2D.**- Es una estructura hecha para mirar hacia abajo en el yacimiento. Para un sistema de coordenadas cartesianas, es una división del yacimiento en las direcciones $x_1 - x_2$ y utilizando pasos espaciales h_1 y h_2 , **figura 2.2**.

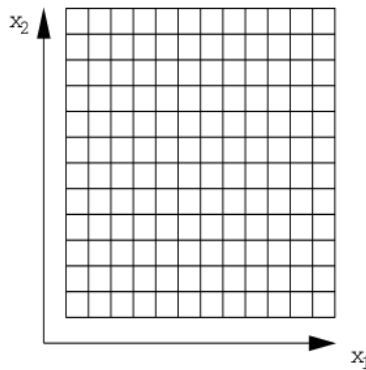


Figura 2.2: Malla para un área en 2D.

- **Modelo en sección transversal 2D.**- Es una estructura que se impone a un corte vertical a través del yacimiento. Para un sistema cartesiano, es una división del yacimiento en las direcciones x_1 y x_3 utilizando pasos espaciales h_1 y h_3 , como se muestra en la **figura 2.3**. Este tipo de modelos se emplean para evaluar el efecto de la estratificación vertical en el yacimiento.

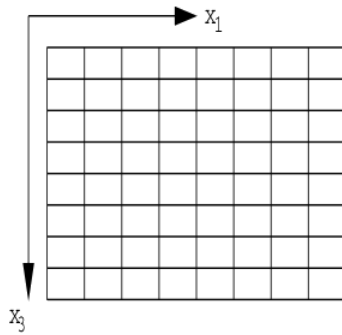


Figura 2.3: Corte transversal para un dominio 2D.

- **Transmisibilidad.**- La transmisibilidad entre dos bloques adyacentes de una malla mide la facilidad con la que fluye un fluido entre ellos.
- **Discretización espacial.**- Se refiere al proceso de dividir el dominio de estudio en pequeños subdominios con pasos espaciales h_1 , h_2 y h_3 para después modelar el flujo a través de un método numérico. En la simulación numérica de yacimientos, siempre se divide el yacimiento en bloques de malla y luego se modela el flujo de fluidos entre los bloques.
- **Discretización temporal.**- Se refiere al proceso de dividir un intervalo de tiempo de interés en subintervalos con pasos de tiempo Δt y avanzar la simulación en tiempo.
- **Dispersión numérica.**- Dispersión numérica es la propagación de un frente de inyección en un proceso de desplazamiento, como sucede en la inyección de agua en medios porosos. Este fenómeno es debido a efectos numéricos. En concreto, es debido a la discretización en tiempo y espacio o a consecuencia de un error de truncamiento que surge del mallado del dominio. Este frente de propagación tiende a conducir a la irrupción temprana de agua y otros errores en la recuperación. La gravedad del error depende del proceso de recuperación de fluidos que está siendo simulado (por ejemplo, inyección de agua e inyección alternada de agua y gas), de los pasos de tiempo y espacio así como de los métodos numéricos utilizados.
- **Conservación de masa.**- Es un principio general que se utiliza para verificar la exactitud de un método numérico en la simulación de yacimientos. Se limita a lo siguiente:

$$(masa\ dentro\ del\ bloque) - (masa\ fuera\ del\ bloque) = acumulación\ de\ masa\ dentro\ del\ bloque.$$

Los modelos de simulación de yacimientos se componen básicamente de la conservación de masa y la ley de Darcy, en relación a la velocidad del fluido a un

2. SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS

gradiente de presión. En los métodos térmicos también se añade la conservación de energía. El Balance de materiales es un término usado en ingeniería para la conservación de masa en un volumen fijo, que es normalmente un yacimiento de hidrocarburos.

Capítulo 3

Modelo Conceptual

3.1. Formación del Aceite y Gas

El Petróleo es una mezcla de hidrocarburos que en forma natural se encuentran en la corteza terrestre como gas, líquido o sólido y puede existir en una o varias fases en el mismo lugar. Contiene cantidades menores de Nitrógeno, Oxígeno, Sodio, Azufre, etc., como impurezas, ver [30].

Un yacimiento es la acumulación natural en la corteza terrestre de aceite y/o gas de la misma composición, comprendida en los mismos límites y sometida a un mismo sistema de presión en una trampa petrolera. La roca generadora debe estar enterrada a una profundidad suficiente, generalmente mayor a 1000 m, para que la materia orgánica contenida pueda madurar hasta convertirse en aceite y/o gas. Es necesario que la roca generadora se encuentre dentro de una Cuenca Sedimentaria que sufra procesos de subsidencia (hundimiento por su propio peso) y enterramiento, con un aporte suficiente de sedimentos, **figura 3.1**.

Dentro de la roca generadora, no toda la materia orgánica se transforma en petróleo, se estima que el 70 % permanece como residuo orgánico insoluble, por lo que el rendimiento promedio de las rocas generadoras es de aproximadamente 30 %. Sin embargo, este porcentaje no es el petróleo que finalmente obtenemos, pues se estima que sólo el 1 % del petróleo generado es capaz de migrar hacia la roca almacén y acumularse en ella, mientras que el 99 % no llega a migrar o se pierde debido a que no existe un sello que impida que el crudo o el gas escape de la roca almacén.

Por otra parte, se tiene el problema de la cantidad de petróleo recuperable con rendimiento económico de los yacimientos, por lo general menor al 60 %.

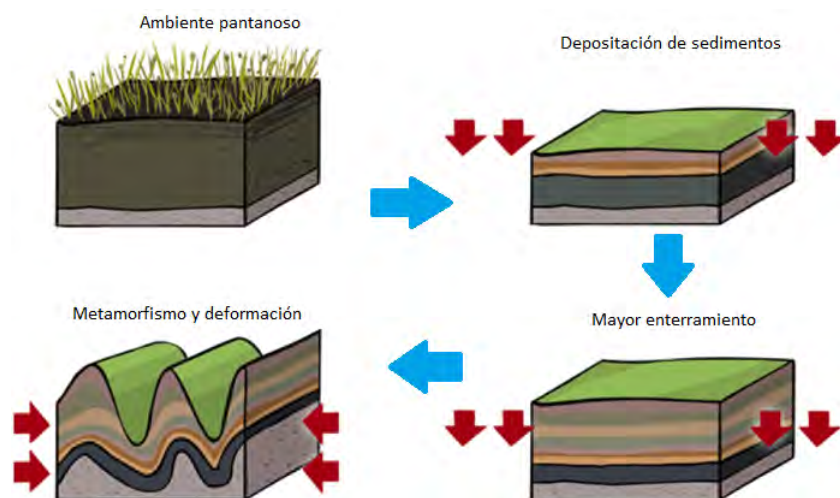


Figura 3.1: Depositación de la materia orgánica en ambientes reductores y su posterior sepultamiento en la cuenca sedimentaria.

3.1.1. Transformación de la Materia Orgánica

La materia orgánica acumulada en ambientes reductores, es decir, aquellos que favorecen su preservación, se cubren por sepultamiento dando lugar a una serie de cambios junto con los sedimentos que contienen a dicho material orgánico. Estos procesos se llaman Diagénesis, Catagénesis y Metagénesis, ver [30].

- **Diagénesis.**- Es el proceso mediante el cual los compuestos orgánicos constituyentes de los seres vivos, tales como carbohidratos, proteínas, etc., son sometidos a un ataque microbiano, que se realiza a poca profundidad (con presiones litostáticas entre cero y 300 bares) y bajas temperaturas (entre 0°C y 50°C). El hidrocarburo generado durante esta etapa es el metano y compuestos como el CO₂ y H₂O. En esta etapa, se presenta generalmente la consolidación del sedimento, es decir, las fracciones sueltas se convierten en rocas sedimentarias y la mayor parte de la materia orgánica que se conserva se transforma en kerógeno, que es la fracción insoluble y en menor proporción se forma betumen que corresponde a la parte soluble.
- **Catagénesis.**- Los sedimentos con materia orgánica se sepultan rápida o lentamente en función de las características propias de la cuenca sedimentaria, de la tasa de sedimentación y de su entorno. Cuando la roca generadora alcanza profundidades mayores a 1 km inicia la catagénesis, es decir, inicia la ventana de generación debido al incremento en la presión y la temperatura. Las temperaturas que se alcanzan en esta etapa son del orden de 50°C y hasta 225°C aproximadamente, mientras que la presión varía de 300 a 1500 bares. A los 2.6 km de profundidad y 100°C se alcanza el máximo pico de generación de hidrocarburos

líquidos y termina a los 175°C. Entre los 3 y 3.5 km se produce menos aceite y más gas.

- **Metagénesis.**- Es la tercera y última etapa en la transformación de la materia orgánica. Ésta se desarrolla a temperaturas mayores a los 225°C, siendo aquí la mayor generación de gas. La generación de metano acaba a los 315°C, con profundidades cercanas a los 8 km, es decir, presiones litostáticas mayores a 1500 bares. La porosidad de las rocas en estas condiciones disminuye notablemente, por lo que es difícil que se formen a estas profundidades yacimientos con rendimiento económico. Cuando el sepultamiento es mayor a los 10 km, el kerógeno residual se transforma en grafito y es imposible considerar la producción aún mínima de hidrocarburos gaseosos.

3.2. Sistema Petrolero

El llamado Sistema Petrolero constituye un sistema natural que incluye elementos y procesos geológicos que intervienen en la formación de un yacimiento de hidrocarburos. El sistema petrolero es un modelo dinámico que estudia las entradas de materia orgánica a la cuenca sedimentaria, la transformación de dicha materia, la generación de hidrocarburos y su acumulación en una trampa petrolera. Por otra parte, el sistema petrolero esta compuesto por los siguientes subsistemas que deben estar concatenados en tiempo y espacio para que se forme una acumulación natural de petróleo en la corteza terrestre, susceptible de ser explotada con rendimiento económico, ver [12].

- **Roca Generadora.**- Éste tipo de roca debe ser rica en materia orgánica y preferentemente de gran espesor, a condiciones adecuadas de presión y temperatura se forman el aceite y el gas, los cuales se acumulan en la trampa petrolera.
- **Migración.**- Es el movimiento de los hidrocarburos en los poros o a través de las discontinuidades de las rocas, tales como fallas y fracturas. Éste proceso describe el desplazamiento desde la roca generadora hasta su acumulación en la trampa petrolera.
- **Roca Almacén.**- Éste tipo de roca debe ser porosa, permeable y tener continuidad lateral y vertical. Las rocas almacenadoras permiten el flujo de fluidos dentro de ellas debido a la intercomunicación de los poros. Se dice que una roca tiene una permeabilidad adecuada para permitir el paso de los hidrocarburos si posee poros interconectados y de tamaño supercapilar.
- **Roca Sello.**- Para que los hidrocarburos puedan quedar confinados en las rocas almacenadoras, es necesario que las paredes del depósito estén selladas de manera efectiva. Éste tipo de rocas deben contar con escasa permeabilidad o, por contener

poros de tamaño subcapilar, no permiten el paso del petróleo, sirviendo como cierre en su migración o desplazamiento. Debido a que los yacimientos petroleros están asociados a zonas de actividad tectónica, las rocas sello, deben tener comportamiento plástico, de manera que respondan a los esfuerzos mecánicos deformándose en el campo dúctil, formando pliegues y no fracturándose. El espesor de la roca sello es variable, siendo reducido si tiene una excelente calidad o de espesor mediano o grueso si la calidad de la roca es mediana o mala.

- **Entrampamiento.**- La trampa petrolera es una característica geológica que permite que el aceite y el gas se acumulen y conserven de manera natural durante un cierto periodo de tiempo. Se tratan de receptáculos cerrados en la corteza terrestre que cuentan con rocas almacenadoras y rocas sello en posición tal que permiten se acumulen los hidrocarburos. Las trampas petroleras tienen una determinada forma, tamaño y geometría.
- **Sincronía.**- Involucra la sincronización en tiempo y espacio de los elementos anteriormente citados, la **figura 3.2** muestra estos elementos coexistiendo en sincronía. Algunas trampas presentan características adecuadas para almacenar hidrocarburos, con buena relación entre la roca almacenadora y la roca sello; sin embargo se encuentran vacías, siendo las principales causas: ausencia de roca generadora, los hidrocarburos no alcanzaron la trampa, el petróleo se destruyó o bien, la trampa se formó tardíamente.

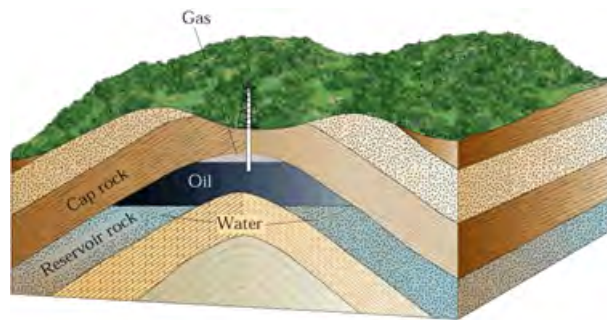


Figura 3.2: Trampa típica con sincronía de los distintos elementos del Sistema Petrolero.

3.3. Propiedades de la Roca y los Fluidos en el Yacimiento

3.3.1. Propiedades de la Roca

- **Poros.**- Son pequeños pasajes interconectados existentes en una roca permeable. Las conexiones entre los poros se conocen como “garganta de poro” y son éstas

las que controlan la presión capilar de entrada en un proceso de drenaje. Sus dimensiones van desde 1 a 200 μm .

- **Porosidad.**- La porosidad es una medida de la capacidad de almacenamiento de fluidos que posee una roca y se define como el porcentaje del volumen poroso de la roca respecto al volumen total de la misma. De acuerdo a su conectividad, **figura 3.3**, la porosidad puede clasificarse como **porosidad total**, la cual incluye a los poros interconectados y a los que se encuentran aislados; y la **porosidad efectiva**, que incluye solo los poros interconectados y es en realidad la que interesa para la estimación del hidrocarburo en sitio.

La porosidad total la denotamos como:

$$\phi = \frac{\text{Volumen del espacio del poro}}{\text{Volumen representativo}}$$

y la porosidad efectiva

$$\phi_e = \frac{\text{Volumen del espacio del poro disponible}}{\text{Volumen representativo}}$$

en general

$$\phi_e \leq \phi$$

La porosidad está en función de la presión debido a la compresibilidad de la roca, la cual comúnmente se asume constante y presenta valores que oscilan entre 10^{-6} y los 10^{-7} psi^{-1} . La compresibilidad de la roca la expresamos como

$$C_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

integrando es posible expresar a la porosidad de la siguiente manera

$$\phi = \phi^0 e^{C_R(p-p^0)}$$

donde ϕ^0 es la porosidad a la presión de referencia p^0 , la cual comúnmente es la atmosférica. Podemos hacer una expansión en series de Tylor y despreciando los términos de alto orden para una roca ligeramente compresible obtenemos

$$\phi \approx \phi^0 (1 + C_R(p - p^0)) .$$

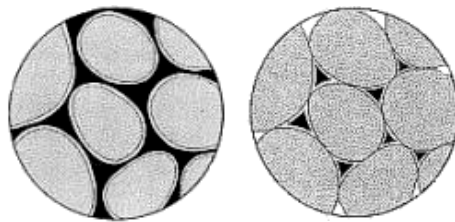


Figura 3.3: A la izquierda, observamos poros interconectados y poros aislados a la derecha.

- **Conductividad hidráulica.**- Las interacciones entre fluidos y matriz porosa se relacionan a través de la conductividad hidráulica que expresamos

$$\mathbf{K} = k_{r\alpha} \underline{k} \frac{\rho_{\alpha} g}{\mu_{\alpha}}.$$

En esta relación, \underline{k} es la permeabilidad intrínseca de la roca y $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α . La viscosidad queda denotada como μ_{α} . La densidad la denotamos con ρ , que es el cociente de la masa de un cuerpo entre su volumen. La gravedad esta expresada por g .

- **Permeabilidad.**- La permeabilidad de una roca es la capacidad que conducir fluidos a través de sus poros interconectados, se le conoce también como permeabilidad absoluta y se mide en mili-darcy (md). La permeabilidad se encuentra muy ligada a la porosidad, **figura 3.4**. A continuación se muestra una tabla con distintos valores de permeabilidad para rocas en yacimientos petroleros.

Clasificación	Rango de Permeabilidad en (md)
Pobre	1-15
Moderada	15-20
Buena	50-250
Muy buena	250-1000
Excelente	mayores a 1000

Tabla 3.1: Clasificación de permeabilidad de rocas

Generalmente los sistemas continuos son anisótropos, para un caso 3D y donde el sistema coordenado coincide con las direcciones de flujo se tiene entonces que

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$$

Si el medio es isotrópico: $k_{11} = k_{22} = k_{33}$.

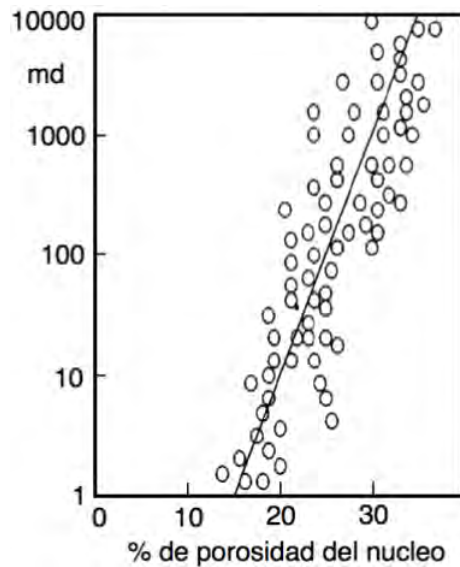


Figura 3.4: Correlación permeabilidad-porosidad

3.3.2. Propiedades de los Fluidos

- **Fase.**- Es la región químicamente homogénea de un fluido que se separa de otras regiones por una interfase. Las fases que generalmente se emplean en simulaciones de yacimientos son aceite (o), agua (w) y gas (g).

- **Componente.**- Es una especie química que puede estar contenida en una fase. Por ejemplo, la fase acuosa (w) contiene componentes agua (H₂O), cloruro de sodio (NaCl), y oxígeno disuelto (O₂), mientras que la fase aceite puede contener cientos de componentes por ejemplo Nitrógeno, Oxígeno, Sodio, Azufre, etc.

- **Tipos de fluidos en el yacimiento.**- En general, agua, aceite y gas pueden existir simultáneamente en un yacimiento petrolero. Estos fluidos pueden ser clasificados como incompresibles, ligeramente compresibles y compresibles, dependiendo de como responden a la presión, **figura 3.5**. Un **fluido incompresible** es aquel que tiene compresibilidad cero, es decir, su densidad no depende de la presión. El agua y el aceite sin gas disuelto se consideran incompresibles. Un **fluido ligeramente compresible** es aquel que presenta una pequeña compresibilidad que se mantiene constante, típicamente se encuentra en el rango de 10^{-5} a 10^{-6} psi⁻¹, el agua y el aceite sin gas, a condiciones de yacimiento, pueden ser considerados ligeramente compresibles. Un **fluido compresible** tiene una compresibilidad típica en el rango de 10^{-3} a 10^{-4} psi⁻¹; de modo que la densidad incrementa a medida que incrementa la presión pero se estabiliza a presiones altas. A condiciones de yacimiento el gas es compresible.

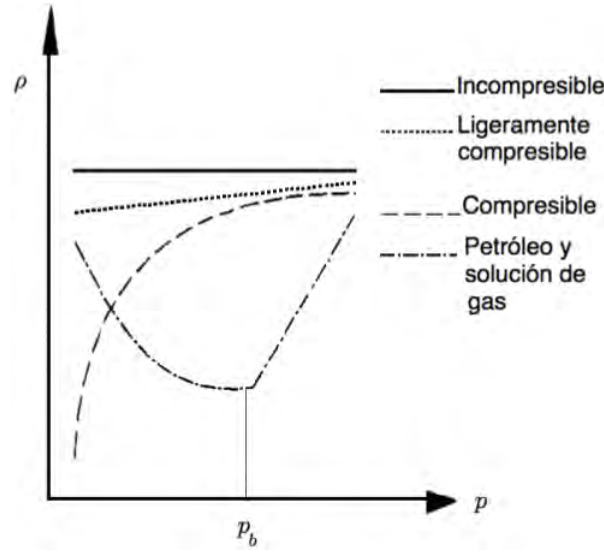


Figura 3.5: Relación densidad-presión.

- **Compresibilidad.**- Se define como el cambio de volumen (V) o densidad (ρ) en función de la presión para una temperatura (T) dada.

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T$$

integrando la ecuación anterior tenemos que la densidad se expresa como

$$\rho = \rho^0 e^{c_f(p-p^0)}$$

donde ρ^0 es la densidad a una presión de referencia p^0 . Usando una expansión en series de Taylor y truncando los términos no lineales obtenemos una buena aproximación para la densidad en función de la presión para fluidos ligeramente compresibles:

$$\rho \approx \rho^0 (1 + c_f(p - p^0)).$$

- **Factor de solubilidad del gas.**- El factor de solubilidad del gas R_{so} es el volumen de gas, medido a condiciones estándar, disuelto a presión y temperatura del yacimiento por unidad de almacenamiento de aceite.

$$R_{so} = \frac{V_{Gs}}{V_{Os}} \quad (3.1)$$

El subíndice s denota que el volumen es a condiciones estándar, mientras que las letras G y O representan las componentes gas y aceite respectivamente. Usualmente las unidades se expresan en SCF/STB (standard cubic feet / stock tank barrels). Nótese que

$$V_{Os} = \frac{W_O}{\rho_{Os}} \quad , \quad V_{Gs} = \frac{W_G}{\rho_{Gs}}$$

de modo que la ecuación (3.1) se convierte en

$$R_{so} = \frac{W_G \rho_{Os}}{W_O \rho_{Gs}}$$

- **Factor de formación de volumen.**- Describe la razón del volumen V de una fase medida a condiciones de yacimiento, entre el volumen V_s de la fase medida a condiciones estándar. Sus unidades están dadas por RB/STB para líquidos y RB/SCF para gases, donde RB es "reservoir barrels". Para una fase (α), el factor en función de la densidad es:

$$B_\alpha(p, T) = \frac{\rho_{\alpha,s}}{\rho_\alpha}$$

Para el aceite que tiene gas disuelto observemos que

$$V_o = \frac{W_O + W_G}{\rho^0}$$

de manera que el factor de formación de volumen esta dado por

$$B_o = \frac{(W_O + W_G) \rho_{Os}}{W_O \rho_o}$$

- **Densidad del fluido.**- La densidad de una fase (agua, aceite o gas) está dada por

$$\rho = \frac{\rho_s}{B}$$

Las fracciones de masa de aceite y gas disuelto en aceite son respectivamente:

$$C_{Oo} = \frac{W_O}{W_O + W_G} = \frac{\rho_{Os}}{B_o \rho_o},$$

$$C_{Go} = \frac{W_G}{W_G + W_G} = \frac{R_{so} \rho_{Gs}}{B_o \rho_o}.$$

Tomando $C_{Oo} + C_{Go} = 1$ obtenemos la densidad de la fase aceite

$$\rho_o = \frac{R_{so} \rho_{Gs} + \rho_{Os}}{B_o}$$

- **Viscosidad.**-Se denota con la letra μ y es una medida de la energía disipada cuando el fluido está en movimiento resistiendo una fuerza de corte aplicada, sus dimensiones son (fuerza/área · tiempo) y sus unidades $\text{Pa}\cdot\text{s} = \text{poise}$. En un fluido gaseoso, las moléculas están muy separadas y presentan baja resistencia a fluir a consecuencia del comportamiento aleatorio de las mismas. Por otra parte, un fluido denso presenta gran resistencia a fluir debido a la naturaleza

cercana de sus moléculas. La viscosidad del agua a condiciones estándar es de 1 cp (centipoise). En general, la viscosidad depende de la presión, la temperatura y de las componentes de cada fase. En la tabla 3.2 se muestran las viscosidades típicas a condiciones de yacimiento (4000-6000 psi y 200°F) de los diferentes tipos de aceite.

Clasificación	Rango de Viscosidad en (cp)
Aceite ligero	0.3 - 1
Aceite intermedio	1 - 6
Aceite moderado	6 - 50
Aceite muy viscoso	50 - 1000
Aceite pesado	mayores a 1000

Tabla 3.2: Valores típicos de viscosidad en aceites.

3.4. Mojabilidad

El desempeño de un yacimiento se ve afectado por el hecho de que la roca sea preferencialmente mojabable por agua o por aceite, particularmente en las técnicas de inyección de agua y recuperación mejorada de hidrocarburos. La mojabilidad es la preferencia de un sólido por estar en contacto con un fluido en lugar de otro. Una gota de un fluido preferentemente mojanter va a desplazar a otro fluido dispersándose por la superficie, por el contrario un fluido no mojanter formará gotas, disminuyendo su contacto con la superficie del sólido, **figura 3.6**.

- **Mojabilidad por agua.**- La fase agua es la mojanter y forma una película sobre las paredes del poro aún incluso en aquellos que contienen aceite.
- **Mojabilidad por aceite.**- La fase mojanter es el aceite y forma una capa sobre la superficie de la roca, aún en los poros que contienen agua.
- **Mojabilidad intermedia.**- Las fases agua y aceite son mojanter hasta cierto grado en la matriz porosa. El equilibrio de estos casos creará un ángulo de contacto θ entre los fluidos de la superficie que está determinado por el equilibrio de fuerzas resultante de la interacción de las tensiones intersticiales.



Figura 3.6: A la izquierda un fluido no mojanter, al centro una fluido de mojabilidad intermedia y a la derecha un fluido mojanter.

3.5. Procesos de Desplazamiento de Fluidos

- **Imbibición.**- Es el proceso de desplazamiento de un fluido que ocurre cuando la fase mojadora se incrementa.
- **Drenaje.**- Proceso de desplazamiento de un fluido cuando la fase no mojadora se incrementa.
- **Imbibición espontánea.**- Este proceso ocurre cuando una fase mojadora invade un medio poroso en ausencia de fuerzas externas. La fase mojadora invade bajo la acción de fuerzas superficiales. La **figura 3.7** muestra los procesos de drenaje e imbibición.

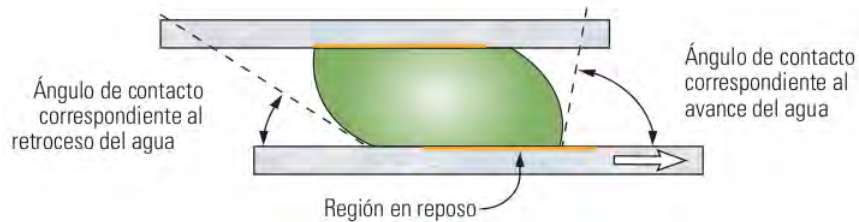


Figura 3.7: Procesos de drenajes e imbibición

3.6. Interacción Roca-Fluidos

- **Saturación.**- La saturación (S) de una fase ya sea agua, aceite o gas, se define como la fracción de el espacio de poro que ésta ocupa, de esta manera, en un sistema trifásico tenemos que

$$S_w + S_o + S_g = 1$$

La expresión anterior significa que las tres fases llenan completamente el espacio poroso. La presión capilar, la permeabilidad relativa entre otras, dependen fuertemente de la saturación.

- **Saturación residual.**- Denotada por S_{ar} , la saturación residual de una determinada fase α es la cantidad de dicha fracción que queda atrapada en la matriz porosa o es irreducible. La fase no mojadora residual es atrapada en los poros por fuerzas capilares. Sin embargo, la cantidad de fluido atrapado depende de la permeabilidad y mojabilidad de la roca.
- **Presión capilar.**- Cuando dos fluidos inmiscibles están en contacto dentro de los poros, una superficie curvada se forma entre los dos. Por ejemplo, para las fases agua y aceite, la presión en el lado del fluido no-mojante de la interfase (p_o),

3. MODELO CONCEPTUAL

es mayor que la presión para el lado del fluido mojanete (p_w). Esta diferencia de presiones se define como presión capilar (p_c).

$$p_c = p_o - p_w.$$

La presión capilar depende de la saturación de la fase mojadora y de la dirección de cambio de ésta (drenaje o imbibición), **figura 3.8**. Cabe señalar que la p_c depende también de la tensión superficial σ , la porosidad ϕ , la permeabilidad k y el ángulo θ de contacto con la superficie de la roca de la fase mojadora, el cual depende a su vez de la temperatura y de la composición del fluido. En un flujo de tres fases, se requieren de dos presiones capilares, a saber:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad p_{cgo} = p_g - p_o,$$

es posible obtener una tercera expresión de presión capilar haciendo

$$p_{cgw} = p_g - p_w = p_{cow} + p_{cgo}.$$

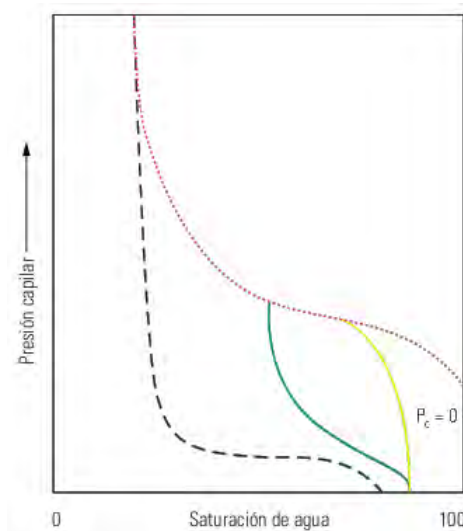


Figura 3.8: En rojo se muestra la curva de drenaje primario e imbibición en negro y delimitan el comportamiento de la presión capilar. En verde p_c para una saturación intermedia, en amarillo una inversión de los valores para la línea verde.

- **Permeabilidad relativa.**- Denotada por $k_{r\alpha}$, mide la habilidad de una fase para fluir en una formación porosa y en presencia de otras fases, pues la presencia de más de una fase en un sistema inhibe el flujo.
- **Movilidad.**- Se define como la razón de la permeabilidad relativa entre su viscosidad. En un sistema trifásico (w, o, g) tenemos

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w}, \quad \lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o}, \quad \lambda_g = \frac{k_{rg}}{\mu_g}.$$

y denotaremos a la movilidad total como

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o + \lambda_g.$$

- **Flujo fraccional.**- Determina la razón de flujo volumétrico fraccional de una fase bajo un gradiente de presiones dado, en presencia de otra fase:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda}, f_o = \frac{\lambda_o}{\lambda}, f_g = \frac{\lambda_g}{\lambda},$$

3.7. Etapas de la Recuperación de Hidrocarburos

La explotación de un yacimiento de petróleo ocurre básicamente en tres etapas. En las dos primeras etapas se logra recuperar en promedio del 25 % a 30 % del crudo, con lo cual el yacimiento contiene todavía un estimado de 60-80 % de hidrocarburos, quedando atrapado en los poros de la estructura del reservorio debido a la viscosidad y efectos de capilaridad.

- **Recuperación Primaria.**- En esta etapa se aprovecha la presión natural del yacimiento que lleva los hidrocarburos hasta la superficie debido a la diferencia de presión entre el yacimiento y la presión atmosférica. Cuando la presión del medio se hace inadecuada, o cuando se están produciendo cantidades importantes de otros fluidos (agua y gas, por ejemplo) termina la primera etapa. La tasa de recuperación durante la fase primaria es del 12-15 % de los hidrocarburos en el yacimiento.
- **Recuperación Secundaria.**- Es toda actividad encaminada a la recuperación de hidrocarburos adicional a la que se obtendría con la energía propia del yacimiento (producción primaria). Consiste en inyectar dentro del yacimiento un fluido menos costoso que el crudo para mantener un gradiente de presión adecuado de modo que la producción vuelva a ser económicamente rentable. La recuperación secundaria básicamente consiste en la inyección de agua (**figura 3.9**) en el yacimiento o la inyección de un gas natural en la cima de la estructura, con el propósito fundamental de mantener la presión, o bien, de desplazar los hidrocarburos de la zona de aceite, mediante arreglos específicos de pozos inyectoros y productores. En esta etapa se produce alrededor del 15 al 20 % adicional del petróleo.
- **Recuperación Terciaria o Mejorada.**- Después de las recuperaciones primaria y secundaria, el yacimiento contiene todavía un estimado del 60 % del crudo. Numerosos métodos han sido estudiados para la recuperación, al menos parcial, de estas grandes cantidades de crudo remanente en los pozos. Los procesos de Recuperación Mejorada surgen como una alternativa para incrementar la recuperación de hidrocarburos, modificando las características de los fluidos y las fuerzas capilares que actúan sobre ellos. La Recuperación Mejorada se

3. MODELO CONCEPTUAL



Figura 3.9: Inyección de agua en yacimientos petroleros.

fundamenta principalmente en técnicas sofisticadas en la operación; suele ser de alto costo, pero muy efectivas, así pues, la Recuperación Mejorada de hidrocarburos se define como la producción de aceite, mediante la inyección de un fluido que, además de desplazar el aceite, modifica favorablemente los mecanismos de recuperación de hidrocarburos. Existen otros métodos pertenecientes a la tercera fase de recuperación con aditivos químicos, sin embargo en ocasiones han sido desechados principalmente argumentando la baja rentabilidad del proceso, debido principalmente a los costos de los aditivos. También, bajo condiciones óptimas, una solución de surfactantes inyectada al reservorio tiene el potencial de solubilizar el crudo, dispersándolo de manera efectiva en forma de una emulsión. Durante esta etapa el yacimiento entrega un rendimiento cercano el 70 %.

Capítulo 4

Modelos Matemáticos

4.1. Formulación Axiomática

En este capítulo se obtendrán las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de transporte de fluidos a través de una matriz porosa aplicando la formulación axiomática, véase [27]. Dicha formulación consiste en identificar las propiedades intensivas y extensivas del fenómeno de estudio aplicando balances de ellas para un volumen que denotaremos como $B(t)$ y que representa un sistema continuo. Las propiedades extensivas son aquellas funciones de variable escalar o vectorial que podemos representar por medio de una integral de cuerpo,

$$E(B(t), t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x},$$

donde \underline{x} representa la posición y t el tiempo. El integrando de la expresión anterior es la propiedad intensiva representada por $\psi(\underline{x}, t)$. Esta ecuación integral establece una correspondencia biunívoca, es decir, a cada propiedad intensiva sobre un dominio que ocupa cualquier cuerpo $B(t)$ le corresponde una y solo una propiedad extensiva. El cambio temporal en una propiedad extensiva E es debido a su generación dentro del sistema continuo o a que se importa por la frontera, esta relación se escribe como:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x} = \int_{B(t)} q(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{S(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS, \quad (4.1)$$

donde $q(\underline{x}, t)$ y $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ son la *generación* y el vector de *flujo* de la propiedad extensiva respectivamente. Una representación de un medio continuo $B(t)$ se muestra en la **figura 4.1**, donde \underline{n} es el vector normal a la superficie $S(t)$, y ds es una diferencial de superficie.

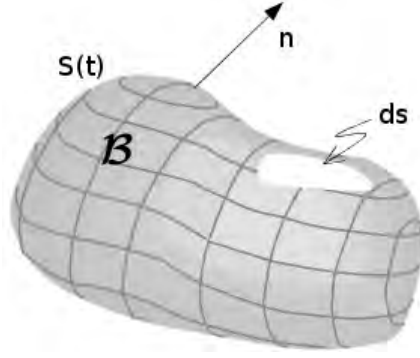


Figura 4.1: Representación esquemática de un medio continuo

La ecuación (4.1) se satisface para cada cuerpo $B(t)$ de un sistema. Aplicando varios resultados matemáticos a la ecuación (4.1) se obtiene:

$$\int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) \right\} d\underline{x} = \int_{B(t)} q d\underline{x} + \int_{B(t)} \nabla \cdot \underline{\tau} d\underline{x}. \quad (4.2)$$

La expresión anterior trae como consecuencia que podamos escribir una ecuación diferencial de balance local para la propiedad extensiva ψ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) = q + \nabla \cdot \underline{\tau}. \quad (4.3)$$

4.2. Forma Conservativa de las Ecuaciones de Balance

Las ecuaciones de balance abordadas anteriormente pueden ser escritas en su forma conservativa. Se requiere definir una función de flujo $\underline{F} = \underline{v}\psi - \underline{\tau}$, de modo que ahora la ecuación (4.2) la expresamos como:

$$\int_{B(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\underline{x} + \int_{B(t)} \nabla \cdot \underline{F} d\underline{x} = \int_{B(t)} q d\underline{x}, \quad (4.4)$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{F} = q. \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.4) y (4.5) son la forma conservativa de las ecuaciones (4.2) y (4.3) respectivamente. El teorema de Gauss puede ser aplicado a la ecuación (4.4), obteniendo:

$$\int_{B(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\underline{x} + \int_{S(t)} \underline{F} \cdot \underline{n} dS = \int_{B(t)} q d\underline{x}, \quad (4.6)$$

4.3. Modelo Matemático para Sistemas Multifásicos

Al igual que en el modelo de una fase, en los sistemas multifásicos la propiedad extensiva es la masa de cada una de las fases α , y lo denotamos como:

$$E = \int_{B(t)} \phi \rho_\alpha S_\alpha d\underline{x} ,$$

para una porosidad del medio ϕ y donde ρ_α y S_α son la densidad y la saturación de la fase α (agua (w), aceite (o) o gas (g)) respectivamente. La propiedad intensiva asociada al sistema es

$$\psi_\alpha = \phi \rho_\alpha S_\alpha .$$

Para un sistema donde no hay difusión ($\tau = 0$) y aplicando la ecuación (4.3), obtenemos la ecuación de balance local para la masa de fluido de la fase α , que escribimos como:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \phi \rho_\alpha S_\alpha) = q_\alpha .$$

La velocidad de Darcy para una fase α se denota por $\underline{v}_\alpha = \underline{v} \phi S_\alpha$, de modo que la ecuación de balance de masa para la fase α , que forma parte de un sistema multifásico se expresa como:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{v}_\alpha) = q_\alpha . \quad (4.7)$$

La Ley de Darcy para sistemas multifásicos es:

$$\underline{v}_\alpha = - \frac{\underline{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \underline{g}) , \quad (4.8)$$

donde $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α . La viscosidad se denota por μ_α , la presión es p_α y la densidad se expresa por ρ_α . Sustituyendo la ecuación (4.8) en (4.7) y definiendo la movilidad de la fase α como:

$$\lambda_\alpha = \frac{\underline{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} ,$$

llegamos a:

$$\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_\alpha \lambda_\alpha \underline{k} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \underline{g})) = q_\alpha . \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) es un sí un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y en general no lineales. Se emplean también en los modelos matemáticos ecuaciones constitutivas, en particular para un sistema multifásico totalmente saturado, se usan las siguientes ecuaciones constitutivas

$$\sum_{\alpha=1}^N S_\alpha = 1 , \quad (4.10)$$

$$p_{c\alpha_1\alpha_2} = p_{\alpha_1} - p_{\alpha_2} ; \alpha_1 \neq \alpha_2. \quad (4.11)$$

Para N número de fases, además α_1 y α_2 son las fases no-mojadora y mojadora respectivamente. Las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11) forman un sistema de ecuaciones fuertemente acopladas.

4.4. Formulación Presión-Saturación para Flujos Bifásicos

El modelo de dos fases para un flujo que se desplaza en un medio poroso hace uso de la siguientes suposiciones :

- El sistema consta de las fases agua (w) y aceite (o),
- Las fases se consideran incompresibles,
- La porosidad ϕ de la roca es constante.

Bajo las suposiciones anteriores y a partir de la ecuación (A.8), ver apéndice A, llegamos a:

$$-\nabla \cdot \lambda \underline{k} [f_w \nabla p_w + f_o \nabla p_o - (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \underline{g}] - (Q_w + Q_o) = 0. \quad (4.12)$$

Obtendremos una ecuación en términos de la presión del aceite, por lo que usaremos $p_c = p_{cow} = p_o - p_w$ para eliminar p_w en la ecuación (4.12):

$$-\nabla \cdot (\lambda \underline{k} \nabla p_o) + \nabla \cdot (\lambda_w \underline{k} \nabla p_c) + \nabla \cdot (\underline{k} (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) \underline{g}) - (Q_w + Q_o) = 0.$$

En problemas de este tipo, es usual que la presión capilar dependa de la saturación de agua, por lo que resulta conveniente expresar el gradiente de la presión capilar como sigue:

$$\nabla p_c(S_w) = \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w. \quad (4.13)$$

Haciendo uso de la ecuación anterior, obtenemos la siguiente ecuación para la presión del aceite:

$$-\nabla \cdot (\underline{k} \lambda \nabla p_o) + \nabla \cdot \left(\underline{k} \lambda_w \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w \right) + \nabla \cdot (\underline{k} (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) \underline{g}) = Q_w + Q_o. \quad (4.14)$$

A fin de obtener una ecuación de saturación para la fase agua, partimos de la ecuación (A.9) y tomando en cuenta las suposiciones al inicio de esta sección, obtenemos

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}_w = Q_w. \quad (4.15)$$

Sustituimos ahora en la ecuación (4.15) la Ley de Darcy para la fase acuosa, la ecuación $p_c = p_{cow} = p_o - p_w$ con el objeto de eliminar p_w y la relación (4.13), de modo que ahora llegamos a:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\underline{k}\lambda_w \nabla p_o) + \nabla \cdot \left(\underline{k}\lambda_w \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w \right) + \nabla \cdot (\underline{k}\lambda_w \rho_w \underline{g}) = Q_w. \quad (4.16)$$

Las ecuaciones (4.14) y (4.16) se resolverán numéricamente en el capítulo 5.

4.5. Método de Líneas de Corriente

La idea en SLS es aproximar los cálculos tridimensionales del flujo y transporte de las diferentes fases, mediante la solución de las ecuaciones de transporte en una dimensión a lo largo de las líneas de corriente. La solución unidimensional hace que este enfoque sea extremadamente rápido y efectivo para modelar flujos en yacimientos en donde existen muchas heterogeneidades. La geometría y la densidad de las líneas de corriente reflejarán el impacto geológico sobre los caminos preferenciales del flujo, introduciendo mayor densidad de líneas en regiones de alta porosidad y permeabilidad, véase [16]. La técnica de SLS ha sido aplicada con éxito en la inyección de agua y gases, ver [5], tales como CO₂, en yacimientos naturalmente fracturados donde los efectos de las mallas son un problema numérico importante, especialmente cuando existen múltiples arreglos de pozos inyectores y productores.

4.5.1. Conceptos Fundamentales

- **Líneas de Corriente (*Streamline*).**- Las Líneas de Corriente son curvas tangentes en cada uno de sus puntos al campo de velocidad local, **figura 4.2**. Sólo la dirección de la velocidad del fluido es importante, no su magnitud. En un campo de velocidad variante en el tiempo las líneas de corriente se trazan para un instante de tiempo en particular. Un concepto relacionado es la *línea de flujo* y se denomina así a la trayectoria seguida por una partícula de un fluido móvil. En general, a lo largo de la línea de flujo, la velocidad de la partícula varía tanto en magnitud como en dirección. Si todo elemento que pasa por un punto dado sigue la misma trayectoria que los elementos precedentes, se dice entonces que se trata de un flujo estacionario. Para una velocidad constante, las líneas de flujo y las líneas de corriente describen la misma trayectoria. En sistemas con velocidad variable, las líneas de corriente son una representación de un campo de velocidad instantáneo, no una trayectoria física. Como consecuencia, las líneas de corriente nunca se cruzan entre ellas a diferencia de las líneas de flujo.

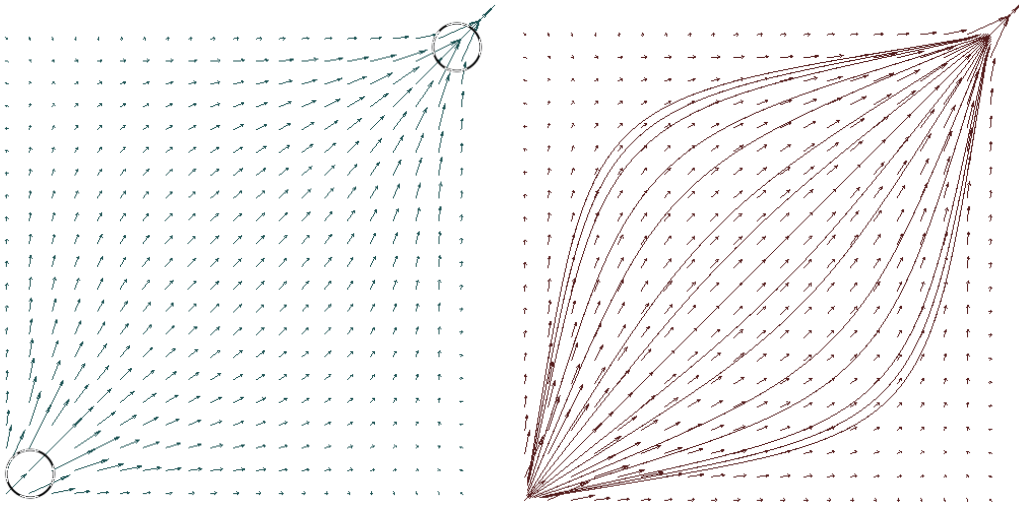


Figura 4.2: A la izquierda, el campo de velocidad en un dominio dado. A la derecha observamos las líneas de corriente tangentes al campo de velocidad local. Imágenes obtenidas con OpenDx.

- **Tubos de Corriente (*Streamtube*)**.- En dos dimensiones, un tubo de corriente es la región comprendida entre dos líneas de corriente, **figura 4.3**. De la definición de la línea de corriente se deduce que no pasa fluido a través de las paredes laterales de un tubo de corriente. Dentro de cada tubo, tenemos una descripción 1D del flujo, así mismo, se cumple la ecuación de continuidad en cualquier sección normal al tubo. Además, tubos con suficiente espacio corresponden a flujos lentos, mientras que tubos estrechos presentan flujos rápidos.

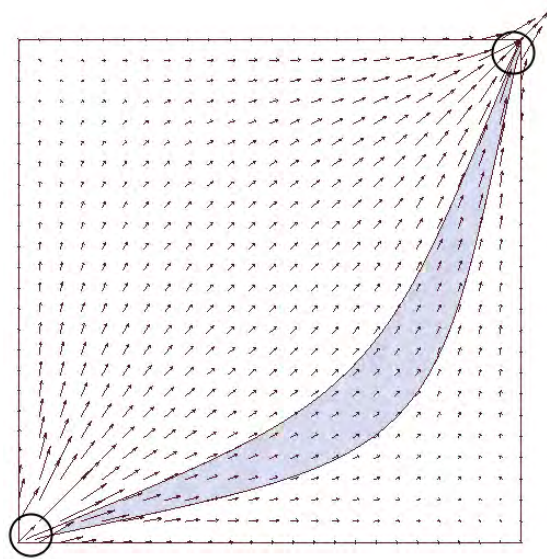


Figura 4.3: Tubo de corriente. Imágenes obtenidas con OpenDx.

- Tiempo de Vuelo (*Time of Flight*).**- Introduzca una partícula en un pozo de inyección y deje que la partícula se mueva de acuerdo a la velocidad intersticial instantánea y mida el tiempo que le toma a la partícula en llegar a un punto determinado, esa es la definición de tiempo de vuelo $\tau(x, y, z)$ para dicho punto, (**figura 4.4**). El tiempo de vuelo se usa como coordenada espacial, en otras palabras, la distancia desde la entrada de un sistema se mide por este tiempo, no por la distancia Euclidiana. En simulación con líneas de corriente, usar el tiempo de vuelo como coordenada espacial es fundamental.

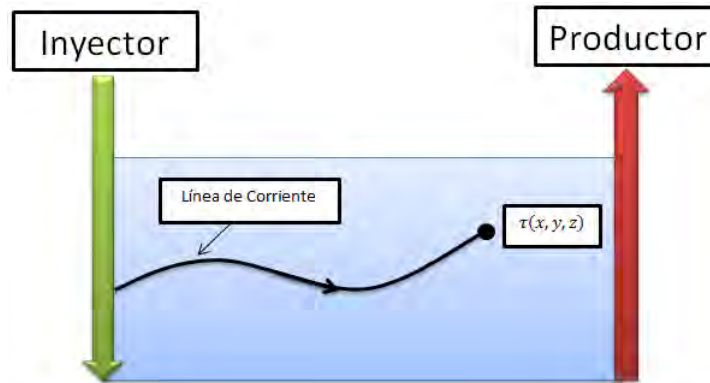


Figura 4.4: Tiempo de vuelo τ para una partícula de prueba.

- Funciones de Corriente (*Streamfunction*).**- Es posible determinar la velocidad de Darcy de un fluido a partir del gradiente de presión. Para flujo de fluidos en 2D es posible determinar la velocidad a partir de la derivada de una función llamada *función de corriente*. Una construcción gráfica de la función de corriente se muestra en la **figura 4.5**, dados una velocidad de Darcy, dos puntos y una trayectoria que conecta ambos puntos. Se trata de una función escalar, como la presión, y como ésta, la función de corriente se determina en relación a un punto de referencia, en este caso, el punto A , $\psi_A = 0$. Para determinar la función de corriente en el punto B , dibujamos una trayectoria arbitraria del punto A al B y calculamos el flujo total de Darcy que cruza dicha trayectoria. La función de corriente en el punto B , es definida como el flujo volumétrico normalizado por unidad de espesor. Del teorema de la divergencia, esta integral, y por lo tanto la derivada de la función de corriente entre los puntos ψ_A y ψ_B es independiente de la trayectoria, siempre que la trayectoria no cruce alrededor de un pozo. Por definición, dado que no hay flujo que cruce una línea de corriente, la función de corriente es constante a lo largo de una línea de corriente. Como consecuencia, cuando la función de corriente es conocida, los contornos de dicha función pueden ser usados para determinar las líneas de corriente. El concepto de función de corriente puede ser extendido a 2 y 3 dimensiones usando funciones de corriente dobles. Esta teoría puede ser extendida también a flujos compresibles usando una densidad efectiva.

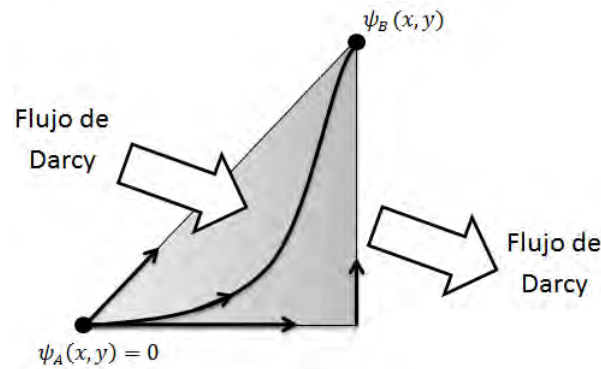


Figura 4.5: Una función de corriente no depende de la definición de la trayectoria.

■ Simulación con Líneas de Corriente

En un tubo de corriente, la velocidad del fluido es igual al flujo volumétrico por unidad de área. El flujo es constante a lo largo del tubo y el área de la sección transversal del tubo se calcula explícitamente. En una simulación con líneas de corriente, se calcula la velocidad a través de diferencias finitas y se trazan las líneas de corriente usando dicha velocidad. Al igual que en los tubos de corriente, se asocia un flujo volumétrico a cada línea de corriente. Es posible obtener el área transversal efectiva a lo largo de la línea de corriente dividiendo el flujo volumétrico por la velocidad; por lo tanto, la geometría espacial es *implícita*. Resumiendo, los tubos de corriente calculan *explícitamente* la sección transversal de un tubo e *implícitamente* calculan la velocidad, mientras que, en contraste, las líneas de corriente hacen lo opuesto. Para grandes cambios en un fluido en movimiento, la velocidad es actualizada periódicamente, nuevas líneas de corriente son determinadas y saturaciones remuestreadas.

4.5.2. Líneas de Corriente

Como se mencionó en el apartado anterior, las líneas de corriente son curvas que son localmente tangentes a la dirección de la velocidad. Las componentes del vector velocidad \underline{v} son v_x , v_y , y v_z para el caso tridimensional. El vector local de longitud dr tiene componentes dx , dy y dz . De acuerdo a la **figura 4.6**, la pendiente de la línea de corriente en cualquier punto está dada por el cociente de las componentes de la velocidad para un instante de tiempo t_0 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y, z, t_0)}{v_x(x, y, z, t_0)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{v_z(x, y, z, t_0)}{v_x(x, y, z, t_0)}. \quad (4.17)$$

Estas ecuaciones diferenciales pueden ser integradas analítica o numéricamente desde un punto (x_0, y_0, z_0) y resolver para $y(x)$ y $z(x)$ a fin de determinar las líneas de corriente que corren a través del punto de partida. Alternativamente, es posible expresar estas mismas ecuaciones en su forma paramétrica:

$$dt = \frac{dx}{v_x(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t_0)}, \quad (4.18)$$

y determinar $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

La ecuación de una trayectoria física (*pathline*) es muy similar, excepto que el campo de velocidad puede ser independiente del tiempo.

$$dt = \frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \quad (4.19)$$

Esta diferencia nos recuerda que una línea de corriente es definida como una línea en el espacio obtenida trazando el campo de velocidad instantáneo. Es importante recalcar algunos aspectos, es posible definir líneas de corriente para cualquier velocidad, y si la velocidad en la ecuación (4.17) varía con el tiempo, entonces las líneas de corriente cambiarán con el tiempo. Para las condiciones de estado no estacionario, se emplean campos de velocidad instantánea para un tiempo de interés. A menudo, se aproximan problemas de estado no-estacionario como series de campos de velocidad de estado estacionario. Para definir líneas de corriente, la permeabilidad del medio puede ser homogénea o heterogénea, isotrópico o anisótropo y los fluidos pueden ser compresibles o incompresibles.

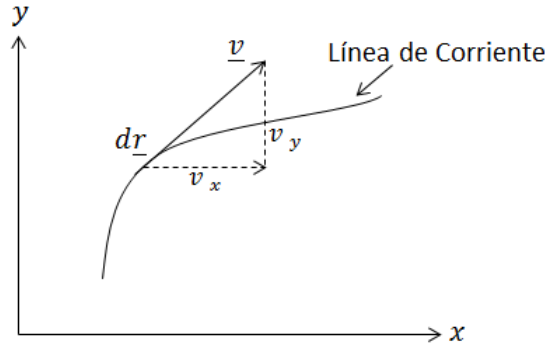


Figura 4.6: Una función de corriente no depende de la definición de la trayectoria.

Existe una relación entre el potencial y las líneas de corriente que se obtiene a partir de la Ley de Darcy de una fase:

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla \Phi, \quad (4.20)$$

donde Φ denota el potencial del fluido, para nuestro caso en particular se trata de la presión. Matemáticamente, $d\underline{r} \times \underline{u} = 0$. Para un medio poroso isotrópico, donde el tensor de la permeabilidad es un escalar, tenemos que:

$$d\underline{r} \times \nabla \Phi = 0.$$

Por lo tanto, los contornos del potencial son ortogonales a las líneas de corriente para un medio isótropo.

4.5.3. Funciones de Corriente en 2D

Consideremos un flujo multifásico incompresible dentro de un medio permeable y no-deformable en ausencia de la fuerza de gravedad y los efectos de capilaridad. La velocidad total se define como la suma de las velocidades de Darcy para cada fase j , esto es:

$$\underline{u} = \sum_j \underline{u}_j = -\lambda \nabla P. \quad (4.21)$$

La movilidad total está definida por $\lambda = \sum_j \lambda_j$, y la fuente o sumidero total como $q_t = \sum_j q_j$. La condición de compresibilidad requiere que:

$$\nabla \cdot \underline{u} = q_t, \quad (4.22)$$

que se puede utilizar para obtener la ecuación diferencial para la presión:

$$\nabla \cdot (-\lambda \nabla P) = q_t. \quad (4.23)$$

Para flujos incompresibles, no hay una dependencia temporal explícita en la ecuación (4.22) ya que \underline{u} es una velocidad instantánea. A medida que q_t varía, o se produzcan cambios en la saturación que provoquen que los coeficientes en la ecuación (4.23) cambien, \underline{u} también cambia, de otra manera, permanece fija.

Consideremos ahora la velocidad total lejos de fuentes y sumideros, es decir, $q_t = 0$. Para fluidos en dos dimensiones, la ecuación (4.22) la resolvemos si representamos la velocidad en términos de la función de corriente de Lagrange $\psi(x, y)$.

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Si la velocidad \underline{u} es conocida, puede ser expresada como una integral para $\psi(x, y)$:

$$\psi(x, y) - \psi_0 = \int_0^x d\psi = \int_0^x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_0^x (u_x dy - u_y dx). \quad (4.25)$$

La diferencia $\psi(x, y) - \psi_0$ es el flujo total que fluye a través de una línea arbitraria trazada desde (x, y) a un punto inicial. Por ejemplo, en la **figura 4.7** observamos una trayectoria que va de 0 a A y de A a (x, y) . La primera porción de la trayectoria es a lo largo de una línea de corriente donde $u_y = 0$. De la ecuación (4.25), ningún flujo cruza la línea. Para la segunda porción de la trayectoria, $\partial \psi / \partial y = u_x > 0$, la función de corriente incrementa. En otras palabras, ψ es una coordenada de flujo. La diferencia entre dos valores de la función de corriente es igual a la tasa de flujo volumétrico entre

las dos líneas de corriente definida por estos valores. Esto define un tubo de corriente en 2D. De la ecuación (4.24) podemos observar que las unidades para ψ son de flujo volumétrico por unidad de espesor.

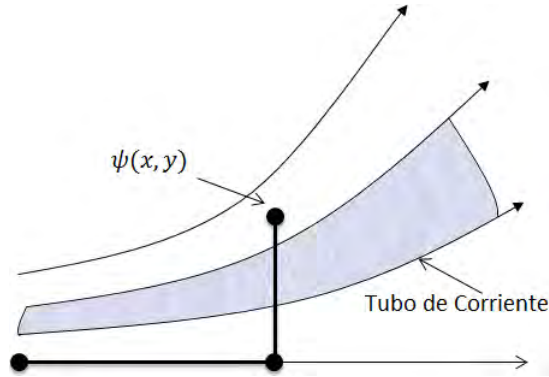


Figura 4.7: Líneas de corriente, función de corriente y tubo de corriente en 2D.

La función de corriente tiene un valor constante a lo largo de las líneas de corriente. Por lo tanto, una manera de trazar líneas de corriente en dos dimensiones será calculando la función de corriente y simplemente trazar sus contornos. La ecuación (4.25) definirá la función de corriente ψ si la velocidad es conocida. Por el contrario, si la velocidad no es conocida, en su lugar podemos resolver para ψ , y luego obtener la velocidad de la ecuación (4.24). La ecuación de la función de corriente se obtiene de la ecuación (4.21) mediante la integración del gradiente de presión alrededor de un bucle cerrado. Tal integral de línea debe anularse, independientemente de la función de presión. A esta condición se le conoce como “irrotacionalidad” y es un requisito para la existencia de un potencial de velocidad. Esto es,

$$\int dP = 0,$$

o en su forma diferencial:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \nabla \cdot (\lambda^{-1} \nabla \psi). \quad (4.26)$$

Esta es la ecuación diferencial para la función de corriente. A diferencia de la solución en líneas de fuentes y sumideros, no está limitada a medios porosos homogéneos, pues la movilidad total (λ) puede depender de la posición.

4.5.4. Funciones de Corriente y Líneas de Corriente en 3D

Las funciones de corriente en 3D representan dos familias de superficies cuyas intersecciones definen las líneas de corriente. Es posible representar cualquier campo de velocidad en 3D en términos de tres funciones; ρ , ψ y χ .

$$\rho \underline{u} = \nabla \psi \times \nabla \chi. \quad (4.27)$$

Las funciones ψ y χ son conocidas como bifunciones de corriente. La “porosidad efectiva” ρ es importante en la descripción de los fluidos compresibles. Por el momento $\rho = 1$, hasta que se trate a fondo la compresibilidad más adelante.

$$\underline{u} = \nabla \psi \times \nabla \chi. \quad (4.28)$$

Las bifunciones de corriente tienen muchas de las ventajas de las funciones de corriente en dos dimensiones. Del cálculo vectorial llegamos a que $\nabla \cdot (\nabla \psi \times \nabla \chi) = 0$. Es importante hacer notar que cualquier velocidad que se puede expresar de acuerdo a la ecuación (4.28), debe ser incompresible, esto es, que satisfaga:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0. \quad (4.29)$$

Esta formulación es lo suficientemente general para describir el flujo de fluidos tanto en 2D como en 3D, aunque se requieren dos funciones de corriente para tal propósito. Puesto que \underline{u} se trata de una velocidad instantánea, tanto ψ como χ son funciones de corriente instantáneas. Si \underline{u} presenta una dependencia temporal, entonces, ψ y χ variarán también.

A fin de obtener la función de corriente en dos dimensiones de la que hemos estado hablando, hacemos $\psi = \psi(x, y)$ y $\chi = z$. Expandiendo la ecuación (4.28) encontramos que la componente z de la velocidad es cero y que las componentes x y y están dados por la ecuación (4.24).

El campo de velocidad obtenido de las ecuaciones (4.27) o (4.28) tiene una interpretación geométrica. Tanto ψ como χ son funciones en el espacio. Consideremos ahora las superficies definidas por $\psi = \text{constante}$ y por $\chi = \text{constante}$, la intersección de ambos planos define una línea, que es la línea de corriente trazada por la velocidad \underline{u} . Es posible obtener diferentes líneas de corriente seleccionando diferentes valores constantes para ψ y χ . En la **figura 4.8**, se muestran dos superficies definidas por ψ y otras dos por χ , las cuatro juntas definen un tubo en el espacio, con líneas de corriente a lo largo de sus bordes.

Las trayectorias de las partículas nunca cruzan las superficies de corriente; el flujo total que entra al tubo de corriente permanece en él.

La ecuación (4.28) se puede integrar sobre el área del tubo,

$$\Delta Q = \Delta \psi \Delta \chi = \iint \underline{u} \cdot \hat{n} \, da \approx \underline{u} \cdot \delta \underline{a}, \quad (4.30)$$

Esto muestra que la rapidez $|\underline{u}|$ variará inversamente a la sección transversal del área del tubo $|\delta \underline{a}|$. La relación inversa entre el área y la velocidad es fundamental en el modelado con tubos de corriente. Dicha ecuación también demuestra la relación

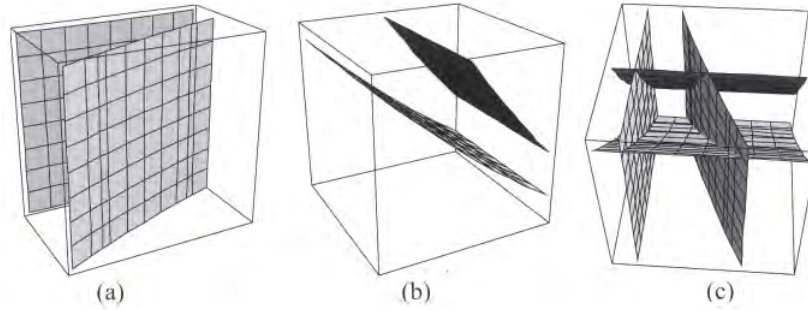


Figura 4.8: Dos superficies de corriente en (a) y en (b) y sus intersecciones en (c) definen un tubo de corriente. Los bordes del tubo de corriente son líneas de corriente.

explícita entre el flujo total y las diferencias en ψ y χ . En la práctica, nunca será necesario calcular ψ o χ , pero el flujo a lo largo de un tubo de corriente se calcula a partir de la ecuación (4.30), de esta misma ecuación es posible observar las unidades para ψ y χ , por ejemplo, si Q esta dada en bbl/D , entonces ψ tendrá unidades de bbl/D/ft y χ unidades de ft (pies). Al igual que la función de corriente en dos dimensiones, las ecuaciones para ψ y χ pueden ser obtenidas integrando el gradiente de presión $\int dP = 0$ alrededor de una curva cerrada. En su forma diferencial tenemos que:

$$0 = \nabla \times (-\nabla P) = \nabla \times \left(\frac{1}{\lambda} (\nabla\psi \times \nabla\chi) \right).$$

En contraste con la ecuación (4.26) en dos dimensiones de una sola incógnita $\psi(x, y)$, éstas son ahora tres ecuaciones acopladas (uno en cada dirección) para dos funciones desconocidas, ψ y χ en tres dimensiones. En contraste a la utilidad de la función de corriente en dos dimensiones, no existe manera obvia de resolver estas ecuaciones acopladas.

Esta es una construcción formal de las bifunciones de corriente, que se deduce de las ecuaciones diferenciales para la trayectoria, como se indica en la ecuación (4.17). Podemos integrar estas dos ecuaciones independientes para derivar dos funciones de (x, y, z) que no dependen del tiempo t . De nuevo, este es un enfoque complicado sin beneficios evidentes en comparación con el cálculo numérico de la velocidad. Generalmente, las bifunciones de corriente no son útiles como un medio de resolver para la velocidad. Sin embargo, son muy útiles como parte de la formulación de tiempo de vuelo, que abordaremos en la siguiente sección.

4.5.5. Líneas de Corriente y Tiempo de Vuelo

El tiempo de vuelo se refiere a una coordenada en específico que se usa a lo largo de las líneas de corriente. El uso del tiempo de vuelo como una coordenada espacial es especialmente efectiva representando los efectos de la heterogeneidad del medio en el flujo.

A partir de un campo instantáneo de velocidad, es posible definir las funciones $\psi(x, y, z)$ y $\chi(x, y, z)$, tal y como se propuso en la sección anterior. El tiempo de vuelo lo denotamos como $\tau(x, y, z)$, podemos colocar una serie de trazadores en cada pozo inyector y determinar el tiempo que le toma a las partículas alcanzar una determinada posición en el yacimiento. Para que esto sea el tiempo de tránsito real, el trazador debe moverse a la velocidad intersticial, no la velocidad de Darcy. Por lo tanto, el tiempo de vuelo se puede representar con la siguiente integral:

$$\tau = \int_0^{\xi} \frac{\phi}{|\underline{u}|} d\xi, \quad (4.31)$$

La partícula de prueba se mueve con velocidad intersticial \underline{u}/ϕ , y ξ es la distancia espacial a lo largo de la línea de corriente. Durante una simulación con líneas de corriente, el cálculo del tiempo de vuelo no requiere un cálculo explícito de las bifunciones de corriente, $\psi(x, y, z)$ y $\chi(x, y, z)$. Una aproximación de la integral en la ecuación (4.31) es basada en un esquema de diferencias finitas para el campo de velocidad. La ecuación (4.31) puede ser reescrita como una relación diferencial:

$$\underline{u} \cdot \nabla \tau = \phi, \quad (4.32)$$

o de otra forma,

$$\frac{u}{\phi} = \frac{\Delta \xi}{\Delta \tau}. \quad (4.33)$$

Aunque el tiempo de vuelo se mide en unidades de tiempo, por ejemplo días, se usará como una coordenada espacial.

Ahora veamos la transformación espacial del dominio (x, y, z) a (τ, ψ, χ) . El Jacobiano de la transformación relaciona los elementos de volumen en ambos espacios coordenados,

$$\left\| \frac{\partial(\tau, \psi, \chi)}{\partial(x, y, z)} \right\| = |(\nabla \psi \times \nabla \chi) \cdot \nabla \tau| = |\underline{u} \cdot \nabla \tau| = \phi, \quad (4.34)$$

en términos de volumen tenemos que:

$$\phi \, dx \, dy \, dz = d\tau \, d\psi \, d\chi. \quad (4.35)$$

Una unidad de volumen en las coordenadas de tiempo de vuelo corresponde a una unidad de volumen de poro en el espacio físico. La ecuación (4.35) muestra un importante vínculo entre la discretización espacial en diferencias finitas y la simulación con líneas de corriente.

Los gradientes espaciales a lo largo de líneas de corriente también tienen una forma muy simple en las coordenadas de tiempo de vuelo. Usando las coordenadas (τ, ψ, χ) , el operador gradiente se expresa ahora como:

$$\nabla = (\nabla \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} + (\nabla \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} + (\nabla \chi) \frac{\partial}{\partial \chi}. \quad (4.36)$$

Ya que \underline{u} es ortogonal tanto a ψ como a χ , podemos escribir,

$$\underline{u} \cdot \nabla = \phi \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) representa una relación importante en la simulación con líneas de corriente, ya que servirá para transformar ecuaciones del espacio físico a coordenadas de tiempo de vuelo de líneas de corriente.

4.5.5.1. Tiempo de Vuelo como Coordenada Espacial

La principal ventaja de la coordenada τ se hace evidente si tenemos en cuenta la ecuación de conservación para la fase agua en un flujo incompresible en dos fases, lejos de fuentes y sumideros,

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (F_w \underline{u}_t) = 0.$$

En la ecuación anterior se han despreciado por ahora los efectos de la aceleración gravitacional y la capilaridad. F_w representa el flujo fraccional y lo denotamos como $F_w = \lambda_w/\lambda$. Usando las ecuaciones (4.29) y (4.37) tenemos que:

$$\nabla \cdot (F_w \underline{u}_t) = \underline{u}_t \cdot \nabla F_w = \phi \frac{\partial F_w}{\partial \tau}.$$

Nótese el uso del operador identidad de la ecuación (4.29) para transformar del espacio físico a coordenadas de tiempo de vuelo, por lo tanto;

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial F_w}{\partial \tau} = 0. \quad (4.38)$$

Esta transformación de coordenadas descompone el flujo del fluido tridimensional en series de ecuaciones 1D para la saturación a lo largo de las líneas de corriente. Esta ecuación es válida para una, dos y tres dimensiones, así como para medios homogéneos y heterogéneos. Lo que se requiere para la implementación es el campo de velocidad y el cálculo de la integral de línea en la ecuación (4.31).

4.5.5.2. Cálculo del Tiempo de Vuelo y Líneas de Corriente en 2D y 3D

La única característica de los simuladores basados en el método de líneas de corriente es el uso del tiempo de vuelo como una coordenada espacial. Para el cálculo del tiempo de vuelo $\tau(x, y, z)$ se sigue una construcción de las líneas de corriente que se conoce como el algoritmo de Pollock, en el cual, el tiempo de tránsito de un punto inicial a un punto del espacio se calcula una celda a la vez.

En la aproximación de líneas de corriente, comenzamos con una solución numérica de la ecuación de presión. Para flujos incompresibles, por ejemplo, primero se obtiene la

distribución de presión en el yacimiento con un esquema adecuado de discretización como el de volumen finito. Una vez conocida la distribución de la presión, es posible calcular los flujos volumétricos usando la Ley de Darcy.

Para ilustrar el algoritmo de trazado de líneas de corriente, consideremos una malla en bloques de volumen finito de la ecuación de presión, como se muestra en la **figura 4.9**. La solución numérica nos proporciona la presión al centro del volumen de control y la velocidad del flujo en las caras del volumen. El algoritmo de Pollock usa una submalla de modelo de velocidad que se deriva de la suposición de que cada componente de la velocidad varía linealmente entre los valores para el par correspondiente de caras del volumen. Esto quiere decir que la velocidad en el eje x varía linealmente sólo en la dirección del eje x y es independiente de las velocidades en las otras direcciones.

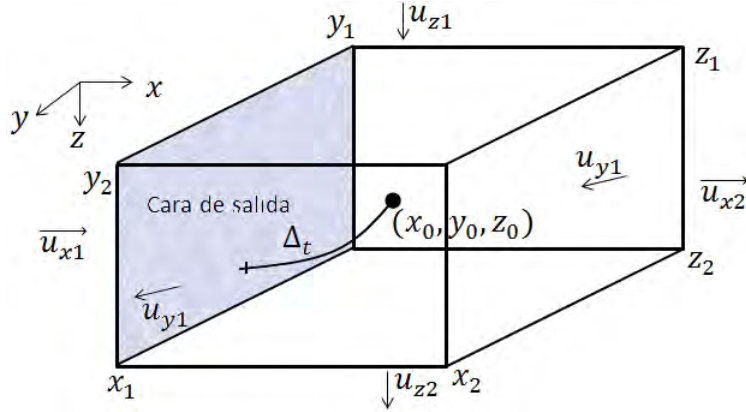


Figura 4.9: Bloque de volumen finito para el cálculo del tiempo de vuelo.

Esto conduce al siguiente modelo de velocidad por celdas:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + c_x(x - x_1), \\ u_y &= u_{y1} + c_y(y - y_1), \\ u_z &= u_{z1} + c_z(z - z_1), \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde los coeficientes dependen de la diferencia de las velocidades de Darcy en las caras del volumen,

$$\begin{aligned} c_x &= (u_{x2} - u_{x1})/\Delta x, \\ c_y &= (u_{y2} - u_{y1})/\Delta y, \\ c_z &= (u_{z2} - u_{z1})/\Delta z. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Las trayectorias de las líneas de corriente serán hipérbolas dentro de los volúmenes, las asíntotas se alcanzan cuando $u_x = 0$, $u_y = 0$ ó $u_z = 0$. De la ecuación (4.40) obtenemos que:

$$\nabla \cdot u = \sum_{j=1}^3 c_j = c_x + c_y + c_z. \quad (4.41)$$

Este es un resultado importante ya que hemos comprobado que si la solución discreta conserva el flujo, también lo hace la velocidad local dentro de la celda. Por lo tanto, para flujos incompresibles, lejos de fuentes y sumideros, la solución numérica proporcionará $c_x + c_y + c_z = 0$. Sin embargo, para flujos compresibles la suma es diferente de cero porque el fluido y la compresibilidad de la roca actúan como términos fuente. El modelo de velocidad es útil para generar líneas de corriente para fluidos compresibles e incompresibles. Las líneas de corriente y el tiempo de vuelo dentro de cada celda pueden ser calculados a través de la integración directa de las velocidades como se discutió en la ecuación (4.18).

$$\frac{d\tau}{\phi} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (4.42)$$

Para las velocidades lineales del juego de ecuaciones (4.40), dichas ecuaciones pueden ser integradas de manera explícita e independiente de cada dirección. Considérese una partícula en un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0) dentro de un volumen de control como se muestra en la **figura 4.9**. La partícula puede salir del volumen a través de cualquiera de las 6 caras. Integrando la ecuación (4.42) obtenemos el tiempo de vuelo a cada una de las seis caras,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau_{xi}}{\phi} &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{u_{x0} + c_x(x - x_0)} = \frac{1}{c_x} \ln \left(\frac{u_{xi}}{u_{x0}} \right), \\ \frac{\Delta\tau_{yi}}{\phi} &= \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{u_{y0} + c_y(y - y_0)} = \frac{1}{c_y} \ln \left(\frac{u_{yi}}{u_{y0}} \right), \\ \frac{\Delta\tau_{zi}}{\phi} &= \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{u_{z0} + c_z(z - z_0)} = \frac{1}{c_z} \ln \left(\frac{u_{zi}}{u_{z0}} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

El índice $i = 1, 2$ indica las caras del volumen en cada dirección. el algoritmo de Pollock especifica la cara de salida correcta la cual requiere de un tiempo de tránsito mínimo y positivo. Por lo tanto, el tiempo de vuelo para una partícula estará dado por el mínimo sobre los bordes permisibles, esto es:

$$\Delta\tau = \text{MinPositivo} (\Delta\tau_{x1}, \Delta\tau_{x2}, \Delta\tau_{y1}, \Delta\tau_{y2}, \Delta\tau_{z1}, \Delta\tau_{z2}), \quad (4.44)$$

consideramos únicamente los valores positivos para seleccionar el mínimo. Conociendo el tiempo de vuelo de la partícula, sus coordenadas de salida pueden ser ahora calculadas si reordenamos las ecuaciones (4.44):

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + u_{x0} \left(\frac{e^{c_x \Delta\tau/\phi} - 1}{c_x} \right) = x_0 + u_{x0} \cdot \eta_x, \\
 y &= y_0 + u_{y0} \left(\frac{e^{c_y \Delta\tau/\phi} - 1}{c_y} \right) = y_0 + u_{y0} \cdot \eta_y, \\
 z &= z_0 + u_{z0} \left(\frac{e^{c_z \Delta\tau/\phi} - 1}{c_z} \right) = z_0 + u_{z0} \cdot \eta_z.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

El término en paréntesis incrementa con el tiempo y puede ser pensado como pseudotiempo η . Las ecuaciones (4.46) definen la ecuación paramétrica de una línea de corriente hiperbólica, aunque en términos de η tienen una forma lineal.

Cuando la velocidad es constante a través del volumen en una dirección dada, por ejemplo en la dirección x , entonces $c_x = 0$. En el límite,

$$\frac{1}{c_x} \ln \left(\frac{u_x}{u_{x0}} \right) \rightarrow \frac{x - x_0}{u_{x0}}, \tag{4.46}$$

$$\eta_x = \left(\frac{e^{c_x \Delta\tau/\phi} - 1}{c_x} \right) \rightarrow \frac{\Delta\tau}{\phi}, \tag{4.47}$$

$$x = x_0 + u_{x0} \Delta\tau/\phi. \tag{4.48}$$

Como se espera, la posición varía linealmente para una velocidad constante. Es fácil identificar las líneas y los puntos de estancamiento basándonos en el algoritmo de Pollock. Cada vez que cualquiera de las velocidades interpoladas cambia de signo a través de una celda, significa que en algún lugar dentro de dicha celda la velocidad es cero. Cuando esto ocurre, el tiempo de vuelo calculado a través de una celda en esa dirección será infinito. El tiempo de vuelo en las otras direcciones aún puede ser finito todavía, sin embargo, si todas las velocidades cambian de signo, entonces tendremos un punto de estancamiento.

Una vez descrito el algoritmo para el tiempo de vuelo, se ilustrará con un ejemplo simple en 2D, **figura 4.10**. Supongamos una partícula p situada en el punto (x_p, y_p) en un tiempo t que entra a una celda (i, j) en el plano (x, y) . El primer paso es calcular el tiempo de vuelo de acuerdo a la ecuación (4.44). De acuerdo con la **figura 4.11**, el tiempo en las caras y_1 y x_2 estará dado por la intersección de la trayectoria con la extensión de dichas caras de las celdas (en líneas punteadas). Para y_1 el tiempo será negativo, basándonos en la dirección del flujo. El tiempo para la cara x_1 es cero porque es ahí donde la partícula entra en la celda. Por lo tanto, el tiempo de vuelo mínimo será en la cara y_2 , que es la cara de salida de la partícula, una vez conocido el tiempo de vuelo, podemos calcular la coordenada de salida usando (4.46).

El tiempo al cual la partícula abandona la celda está dado por $t = t_p + \Delta\tau$. Esta secuencia de cálculos se repite y los tiempos de tránsito serán acumulados a lo largo de

las múltiples celdas, llevando eventualmente a un productor, o rastrear hacia atrás a un inyector, **figura 4.12**. La **figura 4.13** muestra una línea de corriente en un sistema tridimensional.

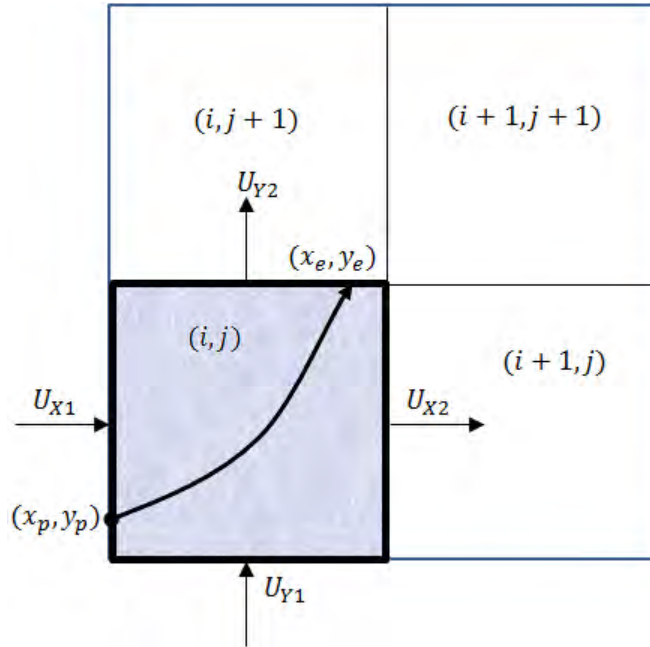


Figura 4.10: Partícula en un esquema de celdas 2D para el cálculo del tiempo de vuelo.

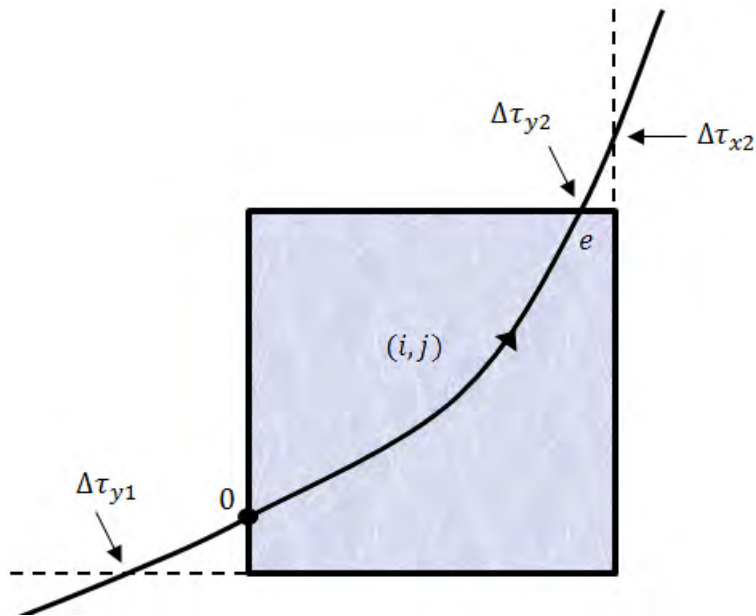


Figura 4.11: Cálculo del tiempo de vuelo para una sola celda.

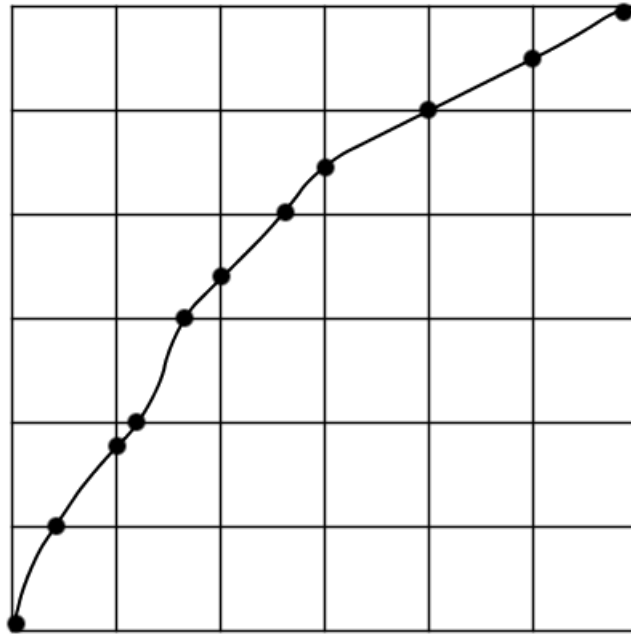


Figura 4.12: Representación del algoritmo de Pollock en 2D.

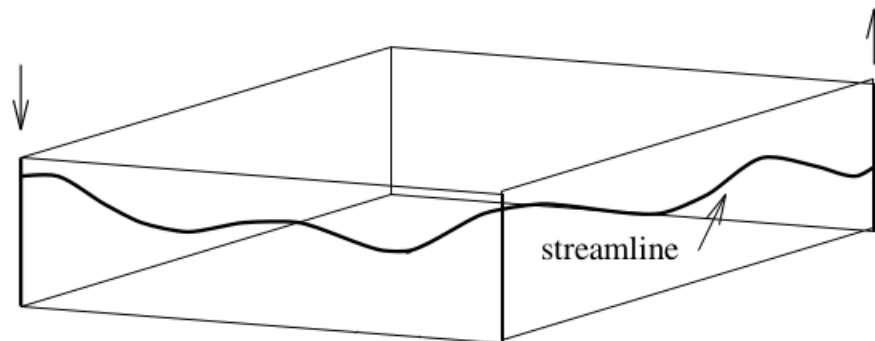


Figura 4.13: Línea de corriente en un sistema 3D.

Este es el algoritmo usado para calcular el tiempo de vuelo hacia un pozo productor para un punto arbitrario dentro del dominio. Para calcular el tiempo de vuelo al pozo inyector, se utiliza el mismo enfoque, excepto que ahora se hace el seguimiento de la partícula hacia atrás, es decir, para τ negativa.

Capítulo 5

Modelo Numérico

5.1. Método de Volumen Finito (MVF)

En esta sección se obtiene la solución numérica de las ecuaciones (4.14) y (4.16) mediante el Método de Volumen Finito (MVF). El MVF se deriva a partir de la forma conservativa de las ecuaciones de balance. En este método, el dominio de estudio se divide en un número de volúmenes de control que no se traslapan, de tal manera que hay un volumen rodeando a cada punto de la malla, **figura 5.1**. Luego, se integra la ecuación de balance (4.5) sobre cada volumen, lo cual es equivalente a aplicar la ecuación de balance (4.4) sobre cada volumen de control. Los flujos a través de las caras de los volúmenes se aproximan usando esquemas numéricos apropiados, y esto da como resultado un conjunto de ecuaciones discretas, una para cada volumen de control, las cuales deben resolverse para obtener una solución numérica aproximada. Las ecuaciones discretas que resultan usando esta estrategia, expresan el principio de conservación para la propiedad extensiva correspondiente en cada volumen de control. De la misma forma, la ecuación diferencial expresa el mismo principio para un volumen de control infinitesimal. Esta característica es válida para cualquier número de volúmenes sobre la malla y no solamente para un número grande de ellos. Por lo tanto, aún una solución en una malla gruesa exhibirá un balance *exacto* o *físicamente realista*, aunque para obtener una buena precisión se requiere de un número grande de volúmenes o esquemas de alto orden. Esta clara relación entre el algoritmo numérico y el principio físico de conservación es una de las mayores atracciones del MVF. Se dice que el MVF es un método *conservativo*. En las secciones siguientes se adoptará por simplicidad la siguiente notación; $p_o = p$ y $S_w \equiv S$.

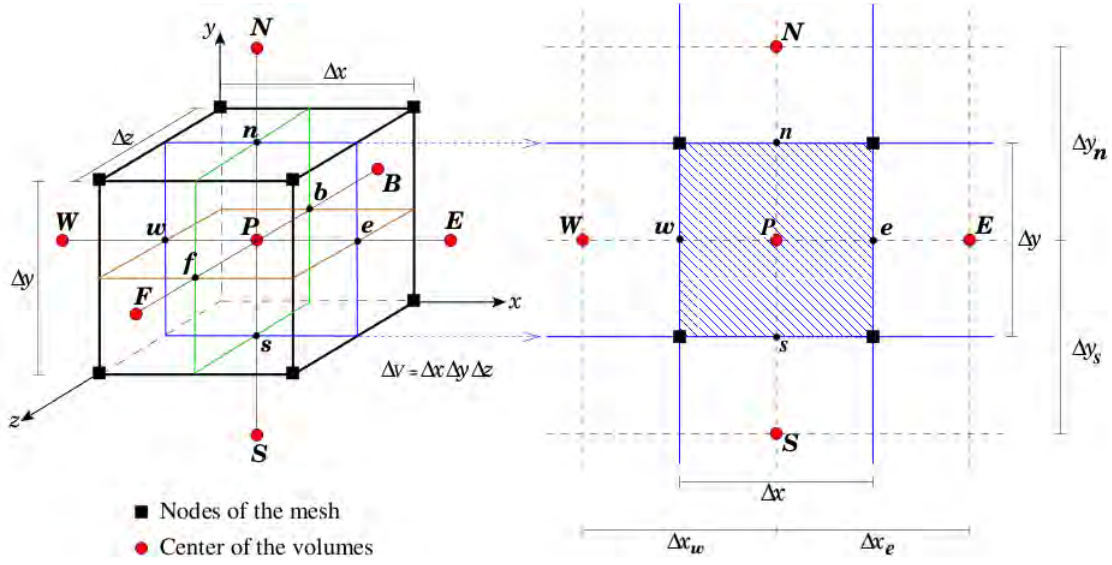


Figura 5.1: Volumen de control en tres dimensiones. Las letras mayúsculas representan los centros de los volúmenes de control, mientras que las minúsculas las caras de dichos volúmenes.

5.2. Modelo Discreto de Flujo en dos Fases con MVF

En esta sección se aplica el MVF a las ecuaciones (4.14) y (4.16) descritas en la sección 3.5 del capítulo 3 correspondientes al modelo de flujo en dos fases.

5.2.1. Discretización de la Ecuación de Presión

A fin de discretizar la ecuación (4.14) definimos como *función de flujo*:

$$\underline{F} = -\underline{k}\lambda\nabla p + \underline{k}\lambda_w \frac{dp_c}{dS} \nabla S. \quad (5.1)$$

Tomamos el tensor de la permeabilidad sólo con valores distintos en la diagonal principal, como se muestra a continuación,

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix},$$

con $k_{11} \neq k_{22} \neq k_{33}$, así pues, las componentes de la función de flujo son:

$$\begin{aligned}
 F_x &= -k_{11} \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda_w \frac{dp_c}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} \right), \\
 F_y &= -k_{22} \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial y} - \lambda_w \frac{dp_c}{dS} \frac{\partial S}{\partial y} \right), \\
 F_z &= -k_{33} \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial z} - \lambda_w \frac{dp_c}{dS} \frac{\partial S}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.14) se escribe ahora como,

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = Q_w + Q_o. \quad (5.2)$$

Aplicamos ahora la ecuación de balance (4.1) a la expresión anterior, de modo que,

$$\int_{\Delta V} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \int_{\Delta V} (Q_w + Q_o) dV, \quad (5.3)$$

para $dV = dx dy dz$, la integración se realiza sobre un volumen de control como el mostrado en la **figura 5.1**, por lo que $B(t) \equiv \Delta V$. El volumen de control de dicha figura representa un hexaedro donde sus ejes son paralelos a los ejes coordenados de un sistema cartesiano, por lo que favorece la aproximación de las integrales de la ecuación (5.3).

Con base en el volumen de control mostrado en la **figura 5.1**, el primer término del lado izquierdo de la ecuación integra como:

$$\int_b^f \int_s^n \int_w^e \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz = ((F_x)_e - (F_x)_w) A_x, \quad (5.4)$$

donde $A_x = \Delta y \Delta z$ es el área de aquellas caras del volumen de control paralelas al plano yz . En la notación $(F_x)_e$ significa que F_x se debe evaluar en la cara e del volumen de control. Aplicamos el mismo desarrollo al resto de los miembros de la ecuación integral (5.3), obteniendo:

$$((F_x)_e - (F_x)_w) A_x + ((F_y)_n - (F_y)_s) A_y + ((F_z)_f - (F_z)_b) A_z = (\bar{Q}_w + \bar{Q}_o) \Delta V, \quad (5.5)$$

donde $A_y = \Delta x \Delta z$, $A_z = \Delta x \Delta y$ y $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. \bar{Q}_w y \bar{Q}_o son promedios de Q_w y Q_o dentro del volumen de control, respectivamente. Ahora veamos la evaluación de F_x en la cara e :

$$\begin{aligned}
 (F_x)_e &= -k_{11} \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda_w \frac{dp_c}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} \right)_e, \\
 &= k_{11} \left((-\lambda)_e \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e + \left(\lambda_w \frac{dp_c}{dS} \right)_e \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_e \right), \\
 &= k_{11} \left((-\lambda)_e \left(\frac{p_E - p_P}{\Delta x_e} \right) + \left(\lambda_w \frac{dp_c}{dS} \right)_e \left(\frac{S_E - S_P}{\Delta x_e} \right) \right),
 \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales son aproximadas a través del método de diferencias finitas centrales y los subíndices E y P indican que la variable se evalúa en el centro del volumen de control correspondiente. Cuando evaluamos F_x en la cara w se hace de forma similar, por lo que el primer término de la ecuación (5.5) quedaría expresado por,

$$((F_x)_e - (F_x)_w)A_x = (c)A_x + (v)A_x,$$

donde

$$c = k_{11} \left((-\lambda)_e \left(\frac{p_E - p_P}{\Delta x_e} \right) + \left(\lambda_w \frac{dp_c}{dS} \right)_e \left(\frac{S_E - S_P}{\Delta x_e} \right) \right),$$

y

$$v = k_{11} \left((-\lambda)_w \left(\frac{p_P - p_W}{\Delta x_w} \right) + \left(\lambda_w \frac{dp_c}{dS} \right)_w \left(\frac{S_P - S_W}{\Delta x_w} \right) \right),$$

donde $\Delta x_w = x_P - x_W$, $\Delta x_e = x_E - x_P$, esto mismo aplica para las dos direcciones, y y z . Las componentes F_y y F_z se evalúan de la misma manera en las caras correspondientes. Sustituyendo las evaluaciones en la ecuación (5.5) y ordenando términos obtenemos la ecuación discreta de la presión para el volumen de control P .

$$a_{PPP} = a_{EP}p_E + a_{WP}p_W + a_{NP}p_N + a_{SP}p_S + a_{FP}p_F + a_{BP}p_B + q_P, \quad (5.6)$$

donde los coeficientes se definen como:

$$\begin{aligned}
 a_E &= \frac{k_{11}(\lambda)_e A_x}{\Delta x_e} \equiv T_E, \\
 a_W &= \frac{k_{11}(\lambda)_w A_x}{\Delta x_w} \equiv T_W, \\
 a_N &= \frac{k_{22}(\lambda)_n A_y}{\Delta y_n} \equiv T_N, \\
 a_S &= \frac{k_{22}(\lambda)_s A_y}{\Delta y_s} \equiv T_S, \\
 a_F &= \frac{k_{33}(\lambda)_f A_z}{\Delta z_f} \equiv T_F, \\
 a_B &= \frac{k_{33}(\lambda)_b A_z}{\Delta z_b} \equiv T_B,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_F + a_B \equiv T_P; \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
 q_P &= \left(T_e \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_e + T_w \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_w + T_n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_n + T_s \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_s + T_f \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_f + T_b \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_b \right) S_P - \\
 &\quad \left(T_e \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_e S_E + T_w \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_w S_W + T_n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_n S_N + T_s \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_s S_S + \right. \\
 &\quad \left. T_f \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_f S_F + T_b \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_b S_B \right) + (\bar{Q}_w + \bar{Q}_o) \Delta V;
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde los coeficientes están definidos como:

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{k_{11}(\lambda)_e A_x}{\Delta x_e}, \\
 T_w &= \frac{k_{11}(\lambda)_w A_x}{\Delta x_w}, \\
 T_n &= \frac{k_{22}(\lambda)_n A_y}{\Delta y_n}, \\
 T_s &= \frac{k_{22}(\lambda)_s A_y}{\Delta y_s}, \\
 T_f &= \frac{k_{33}(\lambda)_f A_z}{\Delta z_f}, \\
 T_b &= \frac{k_{33}(\lambda)_b A_z}{\Delta z_b}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

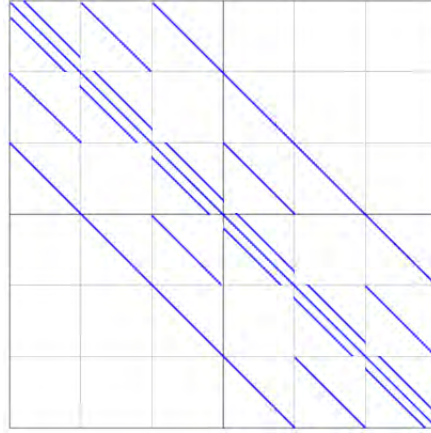


Figura 5.2: La matriz resultante presenta 7 bandas en el caso tridimensional.

Los coeficientes T_{NB} y T_{nb} se conocen como *transmisibilidades* de cada volumen de control, donde $NB = P, E, W, N, S, F, B$ y $nb = e, w, n, s, f, b$, deben ser calculadas adecuadamente o de lo contrario se introducen errores numéricos en la solución.

Las transmisibilidades son dependientes de la movilidad total λ así como de la movilidad del agua λ_w y del cambio de la presión capilar p_c respecto a la saturación S . Estas cantidades, al igual que la saturación, deben ser evaluadas en las caras $(\lambda)_{nb}$, $(\lambda_w)_{nb}$ y $(dp_c/dS)_{nb}$.

Las ecuaciones discretas para todos los volúmenes de control de la malla arroja un sistema lineal de ecuaciones que consta de 7 bandas distintas de cero para el caso tridimensional, **figura 5.2**. Se trata de un sistema diagonalmente dominante dada la forma de los coeficientes, por lo que se ha empleado el método iterativo de gradiente conjugado en la solución del sistema, ver apéndice B.

Las ecuaciones diferenciales (4.14) y (4.16) están acopladas, ésta última tiene dependencia temporal, por lo tanto, la ecuación discreta (5.6) se resolverá para cada paso de tiempo a fin de obtener p^{n+1} , usando información de la saturación del paso anterior S^n .

5.2.2. Discretización de la Ecuación de Saturación

Busquemos ahora discretizar la ecuación de saturación (4.16), al igual que en la ecuación de presión, definimos una *función de flujo*:

$$\underline{F} = -\underline{k}\lambda_w \nabla P + \underline{k}\lambda_w \frac{dp_c}{dS} \nabla S. \quad (5.11)$$

A diferencia de la ecuación (5.1), en el primer término del lado derecho aparece la movilidad del agua λ_w en lugar de la movilidad total λ . La obtención de las componentes F_x , F_y y F_z es similar a como se hizo para la ecuación de presión. Tomando la definición (5.11), la ecuación de la saturación (4.16) la escribimos como:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{F} = \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = Q_w. \quad (5.12)$$

En términos de la ecuación de balance (4.1), la ecuación anterior la denotamos como,

$$\int_{\Delta V} \phi \frac{\partial S}{\partial t} dV + \int_{\Delta V} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \int_{\Delta V} Q_w dV, \quad (5.13)$$

donde ΔV es el volumen de control de la **figura 5.1**, y $B(t) \equiv \Delta V$.

Las derivadas con dependencia temporal se tratan, en el MVF, haciendo una integral de toda la expresión en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Así pues, integramos la ecuación (5.13) en dicho intervalo, obteniendo:

$$\int_n^{n+1} \left[\int_{\Delta V} \left(\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - Q_w \right) dV \right] dt = 0. \quad (5.14)$$

El término de la derivada temporal lo aproximamos como se muestra a continuación:

$$\phi \int_{\Delta V} \int_n^{n+1} \left(\frac{\partial S}{\partial t} dV \right) dt = \phi \int_{\Delta V} (S^{n+1} - S^n) dV. \quad (5.15)$$

Es necesario conocer la forma de S como función de \underline{x} para poder aproximar la integral del lado derecho, esto se puede llevar a cabo mediante funciones lineales o de mayor orden, pero la saturación en el centro del volumen de control representa un promedio de todo el volumen, S_P , por lo tanto tenemos que:

$$\phi \int_{\Delta V} \int_n^{n+1} \left[\frac{\partial S}{\partial t} dV \right] dt = \phi (S_P^{n+1} - S_P^n) \Delta V. \quad (5.16)$$

El resto de los términos de la ecuación (5.14) se aproximan de forma parecida a como se hizo para la ecuación de presión, obteniendo,

$$\int_n^{n+1} \int_{\Delta V} (\nabla \cdot \underline{F} - Q_w) dV dt = \int_n^{n+1} \left(b_{PP} - (b_{PE} + b_{PW} + b_{PN} + b_{PS} + b_{PF} + b_{PB} + q_P) \right) dt, \quad (5.17)$$

donde los coeficientes b son similares a los coeficientes a de la ecuación (5.6), sólo que en esta ocasión usamos la movilidad del agua λ_w en sustitución de la movilidad total λ , incluso el término q_P es similar al mostrado en la ecuación (5.9), exceptuando

que en el último término sólo tenemos el promedio de la fuente de agua \bar{Q}_w .

En el algoritmo IMPES, la ecuación discreta de la saturación se resuelve de manera explícita, aplicando el esquema θ a la ecuación (5.17) obtenemos lo siguiente:

$$\int_n^{n+1} \int_{\Delta V} (\nabla \cdot F - q_w) dV dt = \left(b_P^n p_P^n - (b_E^n p_E^n + b_W^n p_W^n + b_N^n p_N^n + b_S^n p_S^n + b_F^n p_F^n + b_B^n p_B^n + q_P^n) \right) \Delta t. \quad (5.18)$$

Sustituyendo (5.16) y (5.18) en (5.14) y reordenando términos obtenemos la relación explícita para la saturación:

$$S_P^{n+1} = S_P^n - \left(b_P^n p_P^n - (b_E^n p_E^n + b_W^n p_W^n + b_N^n p_N^n + b_S^n p_S^n + b_F^n p_F^n + b_B^n p_B^n + q_P^n) \right) \frac{\Delta t}{\phi \Delta V}, \quad (5.19)$$

de modo que los coeficientes quedan expresados como:

$$\begin{aligned} b_E^n &= \frac{k_{11}(\lambda_w)_e^n \Delta t}{\Delta x_e \phi \Delta x}, \\ b_W^n &= \frac{k_{11}(\lambda_w)_w^n \Delta t}{\Delta x_w \phi \Delta x}, \\ b_N^n &= \frac{k_{22}(\lambda_w)_n^n \Delta t}{\Delta y_n \phi \Delta y}, \\ b_S^n &= \frac{k_{22}(\lambda_w)_s^n \Delta t}{\Delta y_s \phi \Delta y}, \\ b_F^n &= \frac{k_{33}(\lambda_w)_f^n \Delta t}{\Delta z_f \phi \Delta z}, \\ b_B^n &= \frac{k_{33}(\lambda_w)_b^n \Delta t}{\Delta z_b \phi \Delta z}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$b_P^n = b_E^n + b_W^n + b_N^n + b_S^n + b_F^n + b_B^n; \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\phi \Delta V} q_P^n &= \left(b_E^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_e^n + b_W^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_w^n + b_N^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_n^n + b_S^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_s^n + \right. \\ & b_F^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_f^n + b_B^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_b^n \left. \right) S_P^n - \\ & \left(b_E^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_e^n S_E^n + b_W^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_w^n S_W^n + b_N^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_n^n S_N^n + b_S^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_s^n S_S^n + \right. \\ & \left. b_F^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_f^n S_F^n + b_B^n \left[\frac{dp_c}{dS} \right]_b^n S_B^n \right) + \frac{\bar{Q}_w^n}{\phi}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Las transmisibilidades T_e son iguales a la definidas para la ecuación de presión. Ecuaciones como la (5.19) se derivan para cada volumen de control de la malla, pero a diferencia de la ecuación de presión, aquí no es necesario resolver ningún sistema lineal ya que todos los términos del lado derecho son conocidos.

5.2.3. Algoritmo IMPES

Las ecuaciones (4.14) y (4.16) representan un problema no lineal y fuertemente acoplado, de modo que es preciso establecer una estrategia de linealización. Bajo la formulación presentada aquí, se empleará el método IMPES (*IMplicit Pressure Explicit Saturation*) vease [14], el cual se describe en el algoritmo 1.

Algoritmo 1 IMPES

- 1: Definir condiciones iniciales y de frontera del problema $S^0, p^0, T_{max}, \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$.
 - 2: **while** $t < T_{max}$ **do**
 - 3: calcular los coeficientes de la ecuación de presión usando (5.8), (5.9) y (5.11).
Dichos coeficientes se calculan usando valores de la saturación del paso anterior.
 - 4: Resolver la ecuación de presión (5.6) de manera explícita usando un método iterativo.
 - 5: Calcular los coeficientes de la ecuación de saturación usando (5.21) y (5.22).
 - 6: Resolver la ecuación de saturación (5.19) de manera explícita.
 - 7: $t \leftarrow t + \Delta t$
 - 8: **end while**
-

5.3. Condiciones Iniciales y de Frontera

Las ecuaciones de presión y transporte requieren, para su solución, la especificación de condiciones de contorno asociadas a los límites del medio y de condiciones iniciales que proporcionen información sobre los campos iniciales de presión y saturación. Imponiendo las condiciones adecuadas nos aseguramos de tener un problema bien planteado con solución única. En el caso de estudio, se han impuesto condiciones tipo Neumann de no flujo en las fronteras del dominio y las siguientes condiciones iniciales.

	Presión	Saturación
Condiciones iniciales	$p(t_0) = 1e + 07 \text{ Pa}$	$S(t_0) = 0$

Tabla 5.1: Condiciones iniciales para la presión y la saturación.

El modelo tiene en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se desprecian los efectos de la fuerza de gravedad.

- No hay fuentes ni sumideros.
- Los fluidos son incompresibles e inmiscibles.

En este problema definimos la saturación efectiva como:

$$S_{ef} = \frac{S - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}}, \quad (5.23)$$

y las permeabilidades relativas como:

$$k_{rw} = S_{ef}^\sigma, \quad k_{ro} = (1 - S_{ef})^\sigma. \quad (5.24)$$

El exponente σ vale 1 en el caso lineal y 2 para el caso cuadrático. Las saturaciones residuales del agua y del aceite son S_{rw} y S_{ro} respectivamente. Para evaluar los coeficientes definidos en (5.8) determinamos el valor de λ en las caras $\mathbf{nb}=\mathbf{e}, \mathbf{w}, \mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{f}, \mathbf{b}$ del volumen de control. Hacemos uso de las relaciones (5.23) y (5.24), la movilidad total (λ) se define como la suma de las movilidades de cada fase:

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o,$$

o bien

$$\lambda = \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o}, \quad (5.25)$$

sustituyendo el valor de las permeabilidades relativas en función de la saturación efectiva tenemos que:

$$\lambda = \frac{S_{ef}^\sigma}{\mu_w} + \frac{(1 - S_{ef})^\sigma}{\mu_o}.$$

Haciendo las respectivas sustituciones y reduciendo términos obtenemos:

$$\lambda = \frac{1}{(1 - S_{rw} - S_{ro})^\sigma} \left(\frac{(S - S_{rw})^\sigma}{\mu_w} + \frac{(1 - S_{ro} - S)^\sigma}{\mu_o} \right). \quad (5.26)$$

Si suponemos conocidos los valores de S para el instante n , podemos calcular λ para el mismo instante de tiempo de la siguiente manera:

$$(\lambda)_{nb}^n = \frac{1}{(1 - S_{rw} - S_{ro})^\sigma} \left(\frac{(S_{nb}^n - S_{rw})^\sigma}{\mu_w} + \frac{(1 - S_{ro} - S_{nb}^n)^\sigma}{\mu_o} \right). \quad (5.27)$$

Para calcular los coeficientes de la ecuación (5.21) necesitamos el el valor de λ_w en las caras del volumen de control, calculamos dicho valor con las relaciones (5.23) y (5.24) como se muestra a continuación:

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_o} = \frac{S_{ef}^\sigma}{\mu_w} = \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{S - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}} \right)^\sigma. \quad (5.28)$$

Así pues, el valor de λ_w en las caras del volumen de control, para un instante de tiempo n , lo calculamos como:

$$(\lambda_w)_nb^n = \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{S_{nb}^n - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{ro}} \right)^\sigma. \quad (5.29)$$

5.4. Cálculo de la Saturación en las Caras

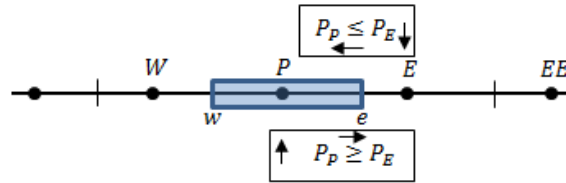
En las ecuaciones (5.27) y (5.29) notamos la necesidad de calcular los valores de la saturación en las caras de los volúmenes de control. El valor de la saturación es conocido en todos los centros de los volúmenes, mismos que provienen de la solución de la ecuación (4.16), de modo que requerimos de un esquema que interpole adecuadamente dicho valor a las caras. Se presenta el esquema Upwind para tales fines.

- **Upwind.**- Se comparan los valores de presión en los puntos vecinos a la cara del volumen de control donde se desea evaluar la saturación S^n tomándose el valor de la saturación del punto donde la presión es mayor.

```

if ( $p_P^n \leq p_E^n$ ) then
   $S_e^n = S_E^n$ 
else
   $S_e^n = S_P^n$ 
end if

```



Esta es una aproximación lineal donde se asumen conocidos los valores de presión para el instante n . Produce dispersión numérica, aunque se trata de un esquema estable, por lo que es recomendable usar un número considerablemente grande de volúmenes de control.

5.5. Cálculo del Transporte a lo largo de las Líneas de Corriente

Hemos visto que el principio básico de simulación mediante líneas de corriente es descomponer las ecuaciones de transporte multidimensionales en una serie de ecuaciones 1D a lo largo de las líneas de corriente.

En secciones previas se revisó la formulación numérica del cálculo de las líneas de corriente y el tiempo de vuelo. Tratemos ahora en este apartado, la solución 1D de la ecuación de saturación a lo largo de cada línea de corriente usando el tiempo de vuelo como coordenada espacial dada en la ecuación (4.38).

5.5.1. Discretización de la Ecuación de Saturación 1D

Tomaremos la discretización 1D en volumen finito de la ecuación (4.38):

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial F_w}{\partial \tau} = 0,$$

donde F_w se define cómo:

$$F_w = \frac{\lambda_w}{\lambda}. \quad (5.30)$$

En términos de la ecuación de balance tenemos que:

$$\underbrace{\int_{\Delta\tau} \frac{\partial S_w}{\partial t} d\tau}_1 + \underbrace{\int_{\Delta\tau} \frac{\partial F_w}{\partial \tau} d\tau}_2 = 0.$$

⇒ Discretización de 1:

integrando todo en el intervalo $[t, t + \Delta t]$;

$$\int_n^{n+1} \left(\int_{\Delta\tau} \frac{\partial S_w}{\partial t} d\tau \right) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta\tau} \int_n^{n+1} \frac{\partial S_w}{\partial t} d\tau dt &= \int_{\Delta\tau} (S^{n+1} - S^n) d\tau, \\ &= (S_p^{n+1} - S_p^n) \Delta\tau. \end{aligned}$$

⇒ Discretización de 2:

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \int_w^e \frac{\partial F_w}{\partial \tau} dt d\tau &= \int_n^{n+1} [(F_w)_e - (F_w)_w] dt, \\ &= [(F_w)_e^n - (F_w)_w^n] \Delta t. \end{aligned}$$

Reacomodando términos:

$$S_p^{n+1} = S_p^n - [(F_w)_e^n - (F_w)_w^n] \frac{\Delta t}{\Delta\tau}. \quad (5.31)$$

Finalmente, empleando la relación (5.30) obtenemos la ecuación discreta de la saturación sobre las líneas de corriente:

$$S_p^{n+1} = S_p^n - \left[\left(\frac{\lambda_w}{\lambda} \right)_e^n - \left(\frac{\lambda_w}{\lambda} \right)_w^n \right] \frac{\Delta t}{\Delta\tau}. \quad (5.32)$$

En el capítulo siguiente abordaremos la codificación para la solución computacional de la ecuación anterior y, en general, de las ecuaciones discretas de presión y saturación.

Capítulo 6

Modelo Computacional y Resultados Numéricos

Los modelos matemáticos y numéricos abordados en capítulos anteriores necesitan ser resueltos a través de la codificación de un conjunto de algoritmos especializados a fin de obtener una solución numérica del problema que sea precisa, estable y eficiente. En el presente trabajo se utilizará el software TUNAM (Templates Units for Numerical Applications and Modeling), ver [18], el cual contiene algoritmos para el MVF y que fue adaptado para dar solución al Método de Líneas de Corriente.

6.1. Software TUNAM

TUNAM es un software desarrollado en un principio para resolver problemas de convección natural en dominios rectangulares mediante el método de volumen finito. En su construcción se hizo uso de los paradigmas de programación orientada a objetos (POO) y programación genérica, de modo que es posible utilizar las herramientas de TUNAM para resolver problemas de otras áreas de estudio. Sus componentes están hechas en el lenguaje de programación C++ haciendo uso intensivo de *templates* que proveen una herramienta efectiva para desarrollar programas genéricos. Hace uso también de la biblioteca Blitz++, para el manejo de arreglos multidimensionales, véase [11]. En TUNAM se hace uso de las siguientes definiciones:

Definición 1 Una *generalización* (Generalization) propone la existencia de un conjunto de elementos con características comunes, por ejemplo sus atributos y operaciones.

Definición 2 Una *especialización* (*Specialization*) se trata de un caso particular de una entidad general que adiciona y/o redefine características tales como atributos y operaciones especiales.

Definición 3 Un *adaptador* (*Adaptor*) es una implementación particular de un mismo concepto o algoritmo.

Tales definiciones pueden ser empleadas en el uso de templates, pues permiten implementaciones alternativas de un mismo concepto a fin de generar código optimizado. En la **figura 6.1** se muestra un esquema general de TUNAM. Teniendo en cuenta, los modelos conceptuales, físicos, matemáticos y numéricos mostrados en los capítulos anteriores, es posible identificar:

- Generalizaciones :
GeneralMesh<> : Representa cualquier tipo de malla, por ejemplo la **figura 5.1**.
GeneralEquation<> : Representa la ecuación general discretizada, por ejemplo ecuación (5.6), junto con sus respectivos coeficientes.
GeneralMatrix<> : Representa una matriz en general.

- Especializaciones :
StructuredMesh<> : Representa mallas estructuradas como que se muestra en la **figura 5.1**.
TwoPhaseEquation<> : Son ecuaciones diferenciales particulares para flujo bifásico.
SparseMatrix<> : Representa matrices ralas o dispersas, [41, 46].

- Adaptadores :
Uniform, NonUniform<> : Definen mallas uniformes y no uniformes en dominios rectangulares.
CDS, Upwind, Quick<> : Definen los esquemas numéricos apropiados que se emplearán en el cálculos de los coeficientes de volumen finito.
Diagonal<> : Define matrices ralas en formato diagonal.

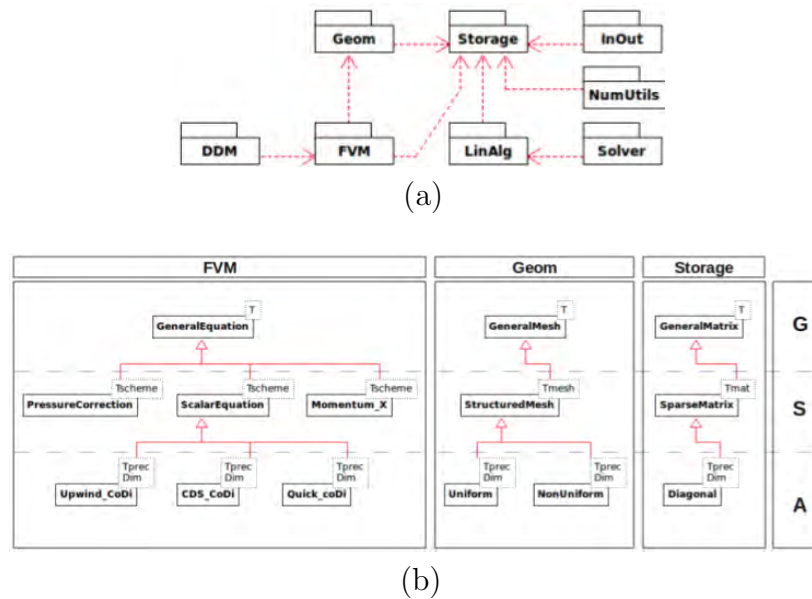


Figura 6.1: (a) Arquitectura general de TUNAM. (b) Los paquetes **FVM** y **Geom** se muestran de manera esquemática: las letras G, S y A, a la derecha de la figura, significan *Generalization*, *Specialization* y *Adaptor*, respectivamente.

Se ha desarrollado un módulo nuevo para la simulación mediante líneas de corriente.

Los objetos en TUNAM que interactúan con el fin de resolver un problema se definen y crean de la siguiente manera:

```
Specialization<Adaptor<prec_t, dim>> object(arg1, ..., argN);
```

El compilador de C++ analiza la declaración y genera el código de acuerdo con la implementación de la especialización y el adaptador correspondientes. Donde `object` es un objeto perteneciente a la clase `Specialization<Adaptor<prec, dim>>` y además `arg1, ..., argN` son empleados en la construcción de `object`. El parámetro `prec_t` define la precisión de los resultados, es decir `float`, `double` o `long double`, el parámetro `dim` define la dimensión del problema.

6.2. Implementación

6.2.1. Calibración 1D con el modelo de Buckley- Leverett

Las primeras pruebas para calibrar el método de líneas de corriente se harán sobre un modelo 1D de Buckley- Leverett, el cual describe el desplazamiento de aceite por agua en un dominio horizontal como el que se muestra en la **figura 6.2**. Se han contemplado las siguientes suposiciones:

- Se desprecian los efectos de la presión capilar.
- Se considera despreciable la acción de la fuerza de gravedad.
- No hay fuentes ni sumideros.
- Los fluidos son incompresibles e inmiscibles.
- El medio poroso es homogéneo.



Figura 6.2: Medio homogéneo de 300 m de longitud, en un principio saturado de aceite.

En este caso, se contempla la inyección de agua a una razón de flujo constante en el extremo izquierdo del dominio, el agua desplazará al aceite al extremo derecho donde la presión se mantiene constante. Con las suposiciones anteriores, las ecuaciones (4.14) y (4.16) se transforman en

$$-\nabla \cdot (\underline{k}\lambda\nabla p) = 0, \quad (6.1)$$

y

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot (\underline{k}\lambda_w \nabla p) = 0, \quad (6.2)$$

para $p_o = p$ y $S_w = S$.

A continuación se muestran los modelos discretos 1D de Buckley-Leverett, (6.3) y líneas de corriente, (6.4) para el cálculo de la saturación, ambas discretizaciones son en volumen finito.

$$S_w^{n+1} = S_w^n - \left[\frac{k[\lambda_w]_e^n}{\Delta x} P_E^n + \frac{k[\lambda_w]_w^n}{\Delta x} P_W^n - \left[\frac{k[\lambda_w]_p^n}{\Delta x} + \frac{k[\lambda_w]_w^n}{\Delta x} \right] P_P^n \right] \frac{\Delta t}{\phi \Delta x}, \quad (6.3)$$

$$S^{n+1} = S^n \left[\left(\frac{\lambda_w}{\lambda} \right)_e^n - \left(\frac{\lambda_w}{\lambda} \right)_w^n \right] \frac{|\bar{u}| \Delta t}{\phi \Delta \xi}. \quad (6.4)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

	Presión	Saturación
Condiciones iniciales	$p(t_0) = 1e + 07 \text{ Pa}$	$S(t_0) = 0$
Condiciones de frontera	$(g_p^{in})_A = 3.4722e - 07 \text{ m/s}$	$(S^{in})_A = 0.8$
	$(p^{out})_B = 1e + 07 \text{ Pa}$	$(S^{out})_B = 0$

Tabla 6.1: Condiciones iniciales y de frontera para la presión y la saturación.

Las condiciones de frontera para la saturación son de tipo Dirichlet, mientras que para la presión, tenemos condiciones tipo Dirichlet a la salida y una condición tipo Neumann a la entrada dada en términos de la velocidad de inyección.

En este ejemplo se ha puesto una línea de corriente que parte del extremo izquierdo, donde inicia la inyección, y termina en el extremo derecho, coincidente en sus puntos con los centros de los volúmenes de control, lo que nos permite hacer una comparación puntual entre ambos métodos. La **figura 6.3** muestra una comparación de la solución para la ecuación de saturación 1D con MVF en verde y SLS en rojo. Nótese que la solución es muy similar, por lo que ambos métodos resuelven adecuadamente la ecuación de transporte.

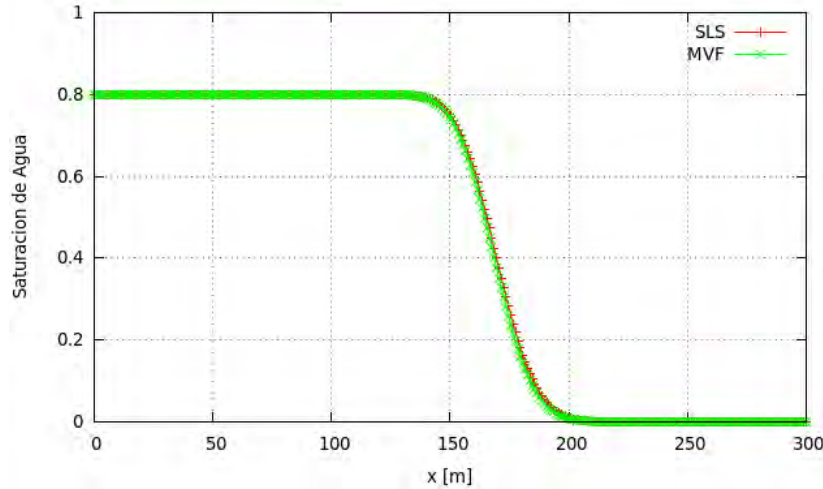


Figura 6.3: Saturación obtenida mediante líneas de corriente en rojo y con volumen finito en verde.

Una manera de cuantificar el error de la aproximación de ambas soluciones es obteniendo el error cuadrático medio, el cual lo denotamos como:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left(S_i^{(mvf)} - S_i^{(sls)} \right)^2}{N}}, \quad (6.5)$$

el valor obtenido para las curvas de la figura anterior es de $387.59e-6$, lo que refleja que la solución a la ecuación de transporte mediante líneas de corriente es una buena aproximación en una simulación de este tipo.

6.2.2. Estudio de Caso

En esta sección se resuelven numéricamente las ecuaciones (5.6) y (5.19) que corresponden a la discretización en volúmenes finitos de las ecuaciones (4.14) y (4.16) respectivamente. En esta sección se analiza un problema conocido como *Five Spots Pattern*, la geometría del dominio de muestra en la **figura 6.4**. Se tienen cuatro pozos productores en las esquinas por uno inyector en el centro del dominio. En las fronteras del dominio de estudio se impone una condición de no flujo. Los datos del problema se muestran en la **tabla 6.2**. Se contempla un dominio en tres dimensiones inicialmente saturado de aceite y un flujo bisáfico.

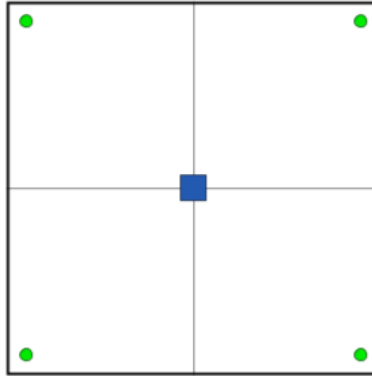


Figura 6.4: Geometría del dominio del caso de cinco pozos.

Parámetros	Valores	Unidades en SI
dimensión x	182.76	[m]
dimensión y	182.76	[m]
dimensión z	9.14	[m]
Razón de inyección de agua (Q_w)	3.86e-04	[m^3/s]
Permeabilidad absoluta (\underline{k})	0.9869e-15	[m^2]
Porosidad (ϕ)	0.2	-
Viscosidad del agua (μ_w)	1.0e-03	[$Pa \cdot s$]
Viscosidad del aceite (μ_o)	1.0e-03	[$Pa \cdot s$]
Saturación residual del agua (Sr_w)	0	-
Saturación residual del aceite (Sr_o)	0.2	-

Tabla 6.2: Datos para el caso de estudio.

6.2.3. Caso homogéneo (MVF)

Para este caso se requiere de una especialización particular de la ecuación general que tome en cuenta el medio poroso y las dos fases del fluido. La clase `TwoPhaseEquation` hereda de `GeneralEquation` todos los atributos y operaciones para describir un flujo en dos fases.

Para calcular los coeficientes de la discretización se requieren de varias definiciones particulares, tanto para la ecuación de presión como para la de saturación. El cálculo de la saturación en las caras de los volúmenes de control se aproximó mediante el esquema Upwind. El código a continuación es un fragmento de la implementación del problema en dos fases. Se definen los arreglos donde se almacenarán la solución e información durante la simulación. Dichos arreglos son de Blitz++, por lo que TUNA define una interfaz a estos arreglos.

```
1 typedef TunaArray<double,3>::huge ScalarField3D;
```

lo anterior define el tipo `ScalarField3D` como una clase para construir arreglos tridimensionales de doble precisión. Enseguida, se define la malla para el problema, se hace como se muestra a continuación:

```
2 StructuredMesh<Uniform<double, 3> > mesh(length_x, num_nodes_x,
3                                     length_y, num_nodes_y,
4                                     length_z, num_nodes_z);
5 double dx = mesh.getDelta(X);
6 double dy = mesh.getDelta(Y);
7 double dz = mesh.getDelta(Z);
8 mesh.print();
```

El código anterior define una malla estructurada 3D, uniforme y de precisión doble. El objeto `mesh` es construido a partir de los argumentos de entrada `length_x`, `length_y`, `length_z` los cuales representan las longitudes del dominio en las direcciones x , y y z , los parámetros `num_nodes_x`, `num_nodes_y` y `num_nodes_z` el número de nodos en cada dirección. Los datos son definidos por el usuario. El objeto `mesh` nos puede proporcionar información de la malla. En las líneas 5, 6 y 7 obtenemos el tamaño de la malla en las direcciones x , y y z . Dicho objeto también realiza acciones como la impresión a salida estándar en la línea 8. Es posible obtener información de la malla en términos de los nodos y de los volúmenes de control, resulta de utilidad para crear arreglos que almacenarán la solución del problema y otros que sean definidos sobre la malla. La siguiente fracción del código implementa estas características y define las condiciones iniciales:

```
9 ScalarField3D p ( mesh.getExtentVolumes() );
10 ScalarField3D Sw ( mesh.getExtentVolumes() );
11 ScalarField3D p_n ( mesh.getExtentNodes() );
12 ScalarField3D Sw_n( mesh.getExtentNodes() );
13 ScalarField3D u1 ( mesh.getExtentVolumes() );
14 ScalarField3D u2 ( mesh.getExtentVolumes() );
15 ScalarField3D u3 ( mesh.getExtentVolumes() );
16 Sw = 0; // Initial condition
17 p = pres_out; // Initial condition
18 Range all = Range::all();
19 NumUtils::interpolateToNodes(p_n, p);
```

6. MODELO COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

```
20 InOut::writeToFile_DX(p_n, 0, "./DataFS3D/pres.", dx, dy, dz);
21 NumUtils::interpolateToNodes(Sw_n, Sw);
22 InOut::writeToFile_DX(Sw_n, 0, "./DataFS3D/satu.", dx, dy, dz);
```

En las líneas 9 y 11 se generan arreglos `p` y `p_n` para la presión en términos de la extensión de los volúmenes y los nodos respectivamente, para las líneas 10 y 12 los arreglos `Sw` y `Sw_n` almacenarán la información concerniente a la saturación en términos de los volúmenes para el primero y en términos de los nodos para el segundo. Luego, las líneas 13 a 15 definen el campo de velocidad del dominio almacenando la información para cada dirección x , y y z . Por otra parte, las líneas 16 y 17 observamos las condiciones iniciales para la saturación y de la presión. La línea 18 utiliza una herramienta de BLITZ++ para definir un rango de un arreglo. Las líneas 20 y 22 representan la salida a un archivo con formato OpenDX, ver [35], para su posterior visualización, ambas corresponden de la interpolación a los nodos de la malla para la presión y la saturación que se hace en las líneas 19 y 21 respectivamente. A fin de definir el sistema lineal que contendrá los coeficientes de la discretización producto del MVF del sistema de ecuaciones diferenciales hacemos lo siguiente:

```
23 SparseMatrix< Diagonal<double, 3> > A(num_nodes_x, num_nodes_y, num_nodes_z);
24 ScalarField3D b(num_nodes_x, num_nodes_y, num_nodes_z);
```

La discretización en MVF produce una matriz dispersa, en el caso tridimensional contiene entradas distintas de cero que caen en 7 diagonales como lo muestra la **figura 5.2**. La clase `SparseMatrix` es una especialización de `GeneralMatrix`, mientras que `Diagonal` es un adaptador que hace de esta especialización una implementación óptima para las matrices requeridas por el MVF. En la línea 23 se define un arreglo que almacenará la matriz diagonal de 7 bandas, la línea 24 define el vector del lado derecho del sistema lineal, el cual está mapeado a cada punto de la malla. Ya definidos los objetos `p`, `A`, `b` y `mesh` construimos las ecuaciones a resolver, comencemos por describir la ecuación de presión:

```
25 TwoPhaseEquation< FSIP1<double, 3> > pressure(p, A, b, mesh.getDeltas());
```

donde `TwoPhaseEquation` es una especialización de `GeneralEquation` y `FSIP1` es un adaptador para calcular los coeficientes de MVF de la ecuación (5.6). El objeto `pressure` representa la ecuación discreta (5.6) y es posible *enviarle mensajes* para que ejecute acciones para definir características del problema, tales como las condiciones de frontera, como se muestra a continuación:

```
26 pressure.setDeltaTime(dt);
27 pressure.setPermeability(permeability);
28 pressure.setPorosity(porosity);
29 pressure.setSrW(SrW);
30 pressure.setSro(Sro);
31 pressure.setViscosity_w(mu_w);
32 pressure.setViscosity_o(mu_o);
33 pressure.setInjection(injection);
34 pressure.setNeumann(LEFT_WALL);
35 pressure.setNeumann(RIGHT_WALL);
36 pressure.setNeumann(TOP_WALL);
37 pressure.setNeumann(BOTTOM_WALL);
38 pressure.setNeumann(FRONT_WALL);
```

```

39 pressure.setNeumann (BACK_WALL);
40 pressure.setSaturation(Sw);
41 pressure.print();

```

en la línea 26 se define el paso de tiempo dt que se empleará en la solución de la evolución temporal del problema. Las siguientes líneas de código (27-33) establecen los valores de permeabilidad, porosidad, saturación residual del agua, del aceite, la viscosidad del agua, la del aceite y la tasa de inyección de agua. Es importante mencionar que los valores de permeabilidad y porosidad para este caso son homogéneas en el dominio de estudio. Las líneas 34-40 establecen las condiciones de frontera, tipo Neumann, para la presión. De manera similar, construimos ahora la ecuación de saturación con sus respectivos parámetros y condiciones de frontera:

```

42 TwoPhaseEquation< FSES1<double, 3> > saturation(Sw, A, b, mesh.getDeltas());
43 saturation.setDeltaTime(dt);
44 saturation.setPermeability(permeability);
45 saturation.setPorosity(porosity);
46 saturation.setSrw(Srw);
47 saturation.setSro(Sro);
48 saturation.setInjection(injection);
49 saturation.setViscosity_w(mu_w);
50 saturation.setViscosity_o(mu_o);
51 saturation.setNeumann (LEFT_WALL);
52 saturation.setNeumann (RIGHT_WALL);
53 saturation.setNeumann (TOP_WALL);
54 saturation.setNeumann (BOTTOM_WALL);
55 saturation.setNeumann (FRONT_WALL);
56 saturation.setNeumann (BACK_WALL);
57 saturation.setPressure(p);
58 saturation.print();

```

Ahora, con el problema bien planteado resolvemos con:

```

59 while (t <= Tmax) {
60     pressure.calcCoefficients();
61     Solver::TDMA3D(pressure, tolerance, tdma_iter, 1.0);
62     pressure.update();
63     saturation.calcCoefficients();
64     Solver::solExplicit3D(saturation);
65     saturation.update();
66     t += dt;
67 }

```

Las líneas 59-67 implementan el algoritmo IMPES. En el ciclo del código anterior, se hacen iteraciones desde $t=0$ hasta T_{max} con incrementos de paso de tiempo dt . La función `calcCoefficients` llena la matriz A y el vector b , mientras que `Solver::TDMA3D` es una función que implementa el algoritmo descrito en el apéndice B para resolver sistemas lineales. En la línea 62 se actualiza la presión. De manera análoga, se calculan los coeficientes de la ecuación discreta de la saturación en la línea 63 y se actualiza el valor de la saturación en la línea 65. Nótese que la presión se resuelve de manera implícita (línea 61) mientras que la saturación es resuelta de manera explícita mediante la función `Solver::solExplicit3D` (línea 64). La **figura 6.5** muestra un cuarto del dominio de estudio y la evolución del frente de saturación del agua. La simulación se llevó a cabo para un tiempo de 1000 días con incrementos de 1 hora.

6. MODELO COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

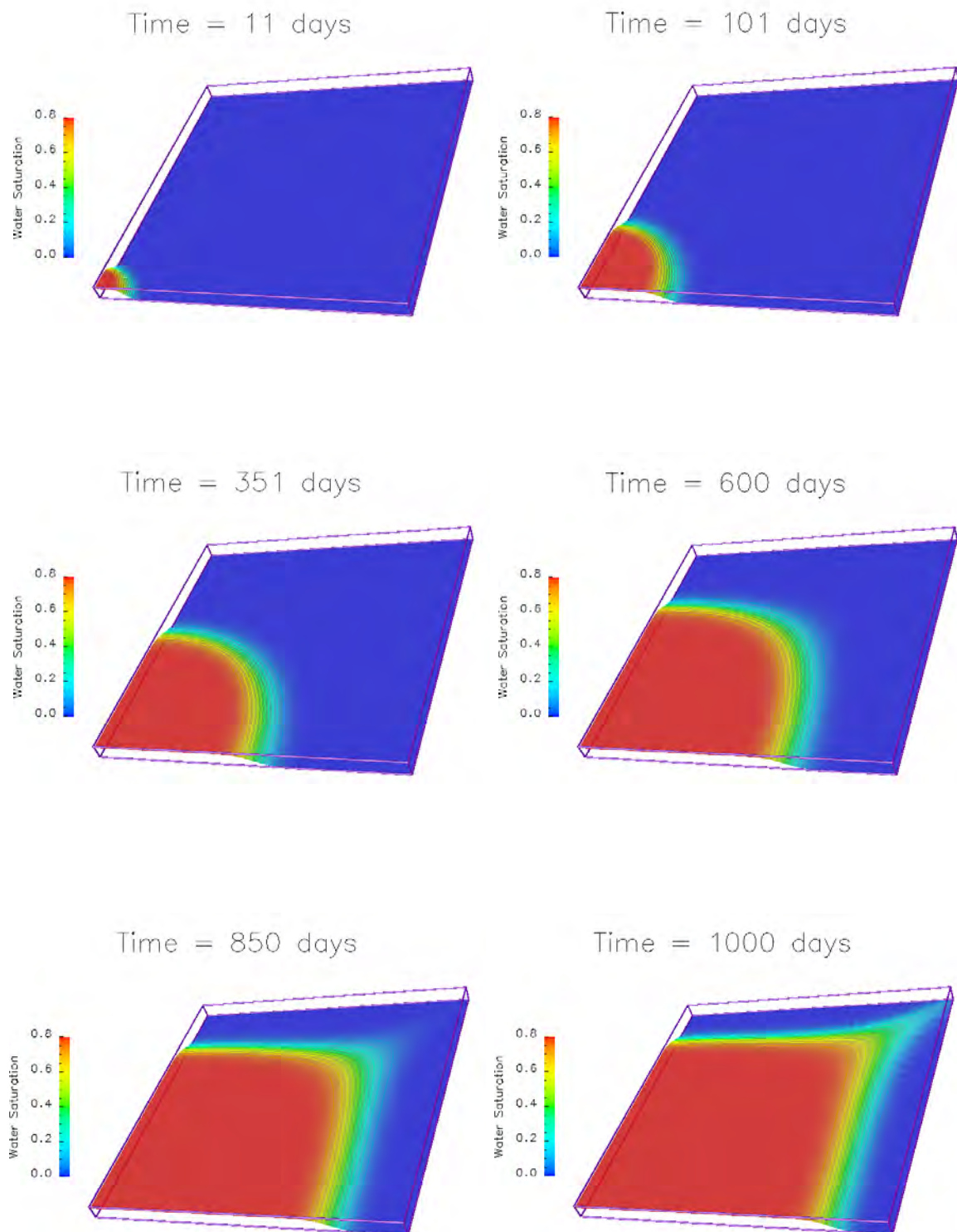


Figura 6.5: Evolución del frente de saturación para un medio homogéneo.

En la figura anterior, observamos el frente de saturación para distintos días de la simulación. Éste evoluciona de manera geométrica, pues el medio es homogéneo e isotrópico, es decir, tiene las mismas características de porosidad y permeabilidad en todas las direcciones.

6.2.4. Caso no-homogéneo (MVF)

En esta sección abordaremos la implementación del caso heterogéneo, es decir, con permeabilidad variable en el dominio de estudio, **figura 6.6**. Se han introducido valores aleatorios en las 3 direcciones; x , y y z , así como un *cuerpo* de baja permeabilidad al centro del dominio.

La forma de solucionar este problema es igual que el anterior, sólo hay que modificar la manera en la que se calculan los coeficientes de la presión y la saturación para el caso 3D y teniendo en cuenta que leeremos un valor aleatorio de permeabilidad en cada nodo de la malla.

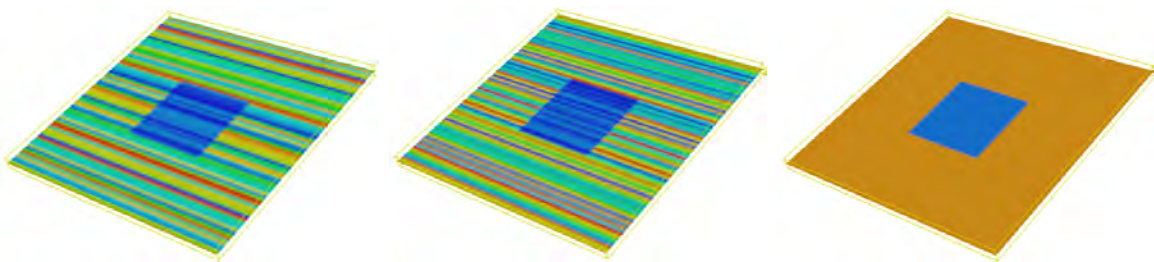


Figura 6.6: Valores de permeabilidad en el dominio de estudio, de izquierda a derecha: permeabilidad en dirección x , y y z .

Primero hay que modificar la especialización `TwoPhaseEquation` agregando los nuevos campos escalares para las tres direcciones distintas como se muestra a continuación:

```
inline void setPermeabilityV_11(ScalarField & p) {perme_11.reference(p);}
inline void setPermeabilityV_22(ScalarField & p) {perme_22.reference(p);}
inline void setPermeabilityV_33(ScalarField & p) {perme_33.reference(p);}
```

y agregando dichos campos en los atributos públicos

```
public:
  ScalarField perme_11;
  ScalarField perme_22;
  ScalarField perme_33;
```

Modificamos ahora los adaptadores donde se calculan los coeficientes de la presión y la saturación. Para la presión modificamos a `FSIP1` en la sección donde se calculan los coeficientes 3D como lo muestra el siguiente extracto del código:

6. MODELO COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

```

mult_o_11 = perme_11(i, j, ki) / ( (1 - Srw - Sro) * mu_o );
mult_o_22 = perme_22(i, j, ki) / ( (1 - Srw - Sro) * mu_o );
mult_o_33 = perme_33(i, j, ki) / ( (1 - Srw - Sro) * mu_o );
mult_w_11 = perme_11(i, j, ki) / ( (1 - Srw - Sro) * mu_w );
mult_w_22 = perme_22(i, j, ki) / ( (1 - Srw - Sro) * mu_w );
mult_w_33 = perme_33(i, j, ki) / ( (1 - Srw - Sro) * mu_w );

aE ( i, j, ki ) = ( (1 - Sro - Sw_e) * mult_o_11 + (Sw_e - Srw) * mult_w_11 ) * dydz_dx;
aW ( i, j, ki ) = ( (1 - Sro - Sw_w) * mult_o_11 + (Sw_w - Srw) * mult_w_11 ) * dydz_dx;
aN ( i, j, ki ) = ( (1 - Sro - Sw_n) * mult_o_22 + (Sw_n - Srw) * mult_w_22 ) * dxdz_dy;
aS ( i, j, ki ) = ( (1 - Sro - Sw_s) * mult_o_22 + (Sw_s - Srw) * mult_w_22 ) * dxdz_dy;
aF ( i, j, ki ) = ( (1 - Sro - Sw_f) * mult_o_33 + (Sw_f - Srw) * mult_w_33 ) * dxdy_dz;
aB ( i, j, ki ) = ( (1 - Sro - Sw_b) * mult_o_33 + (Sw_b - Srw) * mult_w_33 ) * dxdy_dz;
aP ( i, j, ki ) = aE ( i, j, ki ) + aW ( i, j, ki ) +
                 aN ( i, j, ki ) + aS ( i, j, ki ) +
                 aF ( i, j, ki ) + aB ( i, j, ki );

```

Para el cálculo de los coeficientes de la ecuación de saturación modificamos el adaptador FSES1, al igual que en el código anterior, dichas modificaciones se realizan en el apartado 3D como se muestra a continuación:

```

multx = perme_11(i, j, ki) * dt / ( porosity * dx * dx * (1 - Srw - Sro) * mu_w );
multy = perme_22(i, j, ki) * dt / ( porosity * dy * dy * (1 - Srw - Sro) * mu_w );
multz = perme_33(i, j, ki) * dt / ( porosity * dz * dz * (1 - Srw - Sro) * mu_w );
aE ( i, j, ki ) = (Sw_e - Srw) * multx;
aW ( i, j, ki ) = (Sw_w - Srw) * multx;
aN ( i, j, ki ) = (Sw_n - Srw) * multy;
aS ( i, j, ki ) = (Sw_s - Srw) * multy;
aF ( i, j, ki ) = (Sw_f - Srw) * multz;
aB ( i, j, ki ) = (Sw_b - Srw) * multz;
aP ( i, j, ki ) = aE ( i, j, ki ) + aW ( i, j, ki ) +
                 aN ( i, j, ki ) + aS ( i, j, ki ) +
                 aF ( i, j, ki ) + aB ( i, j, ki );

```

Concluidas las adaptaciones al código para llevar a cabo el cálculo de los coeficientes 3D de las ecuaciones de presión y saturación, implementamos el cálculo de la permeabilidad variable en el dominio de estudio como se muestra en la siguiente fracción de código:

```

1 ScalarField3D k_11( mesh.getExtentNodes() ); // valores de permeabilidad
2 ScalarField3D k_22( mesh.getExtentNodes() ); // valores de permeabilidad
3 ScalarField3D k_33( mesh.getExtentNodes() ); // valores de permeabilidad
4 double xmin = num_nodes_x / 3;
5 double xmax = 2 * num_nodes_x / 3;
6 double ymin = num_nodes_y / 3;
7 double ymax = 2 * num_nodes_y / 3;
8 double zmin = 0;
9 double zmax = num_nodes_z;
10 for (int i = 0; i < num_nodes_x; i++){
11     for (int j = 0; j < num_nodes_y; j++){
12         for (int k = 0; k < num_nodes_z; k++){
13             if ( i < num_nodes_x / 2 ) { srand(i*2); }
14             else srand(i*2);
15             k_11(i,j,k) = permeability * rand();
16             if ( i >= num_nodes_x / 2 ) { srand(j*3); }
17             else srand(j*3);
18             k_11(i,j,k) = permeability * rand();
19             if ( j < num_nodes_y / 2 ) { srand(i+3); }
20             else srand(i+3);
21             k_22(i,j,k) = permeability * rand();
22             if ( j >= num_nodes_y / 2 ) { srand(j*2); }

```

```

23     else srand(j*2);
24     k_22(i,j,k) = permeability * rand();
25     srand(k*2);
26     k_33(i,j,k) = permeability * rand();
27     if (i > xmin && i < xmax && j > ymin && j < ymax && k > zmin && k < zmax) {
28         k_11(i, j, k) *= 0.12457;
29         k_22(i, j, k) *= 0.1;
30         k_33(i, j, k) *= 0.1;
31     }
32 }
33 }
34 }

```

La permeabilidad es un campo que se ha guardado de manera independiente para cada dirección, pues el tensor de permeabilidad presenta cambios en las 3 direcciones principales, por ello, en las líneas 1 a 3 definimos campos 3D que almacenen los valores de permeabilidad por nodo para cada componente. Las variables declaradas en las líneas 4-9 nos servirán en la construcción del *cuerpo anómalo*, **figura 6.6**. El loop que inicia en la línea 10 y concluye en la 34, barre las dimensiones del dominio de estudio, mientras que los condicionales de las líneas 13, 16, 19, 22 y 27 establecen las condiciones necesarias para la construcción de dicho cuerpo y su permeabilidad interna (líneas 27-30) y la permeabilidad aleatoria del resto del dominio.

Una vez que la permeabilidad ya es variable y los coeficientes tienen en cuenta éstos valores, se incorpora en el código el llamado a los valores de permeabilidad, líneas 51-53 para la presión y 73-75 para la saturación y resolvemos como se hizo en el caso homogéneo, los resultados se muestran en la **figura 6.7**.

```

32 SparseMatrix< Diagonal<double, 3> > A(num_nodes_x, num_nodes_y, num_nodes_z);
33 ScalarField3D b(num_nodes_x, num_nodes_y, num_nodes_z);
34 TwoPhaseEquation< FSIP1<double, 3> > pressure(p, A, b, mesh.getDeltas());
35 pressure.setDeltaTime(dt);
36 pressure.setPermeability(permeability);
37 pressure.setPorosity(porosity);
38 pressure.setSrw(Srw);
39 pressure.setSro(Sro);
40 pressure.setViscosity_w(mu_w);
41 pressure.setViscosity_o(mu_o);
42 pressure.setInjection(injection);
43 pressure.setNeumann(LEFT_WALL);
44 pressure.setNeumann(RIGHT_WALL);
45 pressure.setNeumann(TOP_WALL);
46 pressure.setNeumann(BOTTOM_WALL);
47 pressure.setNeumann(FRONT_WALL);
48 pressure.setNeumann(BACK_WALL);
49 pressure.setSaturation(Sw);
50 pressure.setPorosityV(phi);
51 pressure.setPermeabilityV_11(k_11);
52 pressure.setPermeabilityV_22(k_22);
53 pressure.setPermeabilityV_33(k_33);
54 pressure.print();

```

6. MODELO COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

```
56 TwoPhaseEquation< FSES1<double, 3> > saturation(Sw, A, b, mesh.getDeltas());
57 saturation.setDeltaTime(dt);
58 saturation.setPermeability(permeability);
59 saturation.setPorosity(porosity);
60 saturation.setSrw(Srw);
61 saturation.setSro(Sro);
62 saturation.setInjection(injection);
63 saturation.setViscosity_w(mu_w);
64 saturation.setViscosity_o(mu_o);
65 saturation.setNeumann(LEFT_WALL);
66 saturation.setNeumann(RIGHT_WALL);
67 saturation.setNeumann(TOP_WALL);
68 saturation.setNeumann(BOTTOM_WALL);
69 saturation.setNeumann(FRONT_WALL);
70 saturation.setNeumann(BACK_WALL);
71 saturation.setPressure(p);
72 saturation.setPorosityV(phi);
73 saturation.setPermeabilityV_11(k_11);
74 saturation.setPermeabilityV_22(k_22);
75 saturation.setPermeabilityV_33(k_33);
76 saturation.print();
```

A continuación se muestran imágenes a distintos tiempos de la simulación.

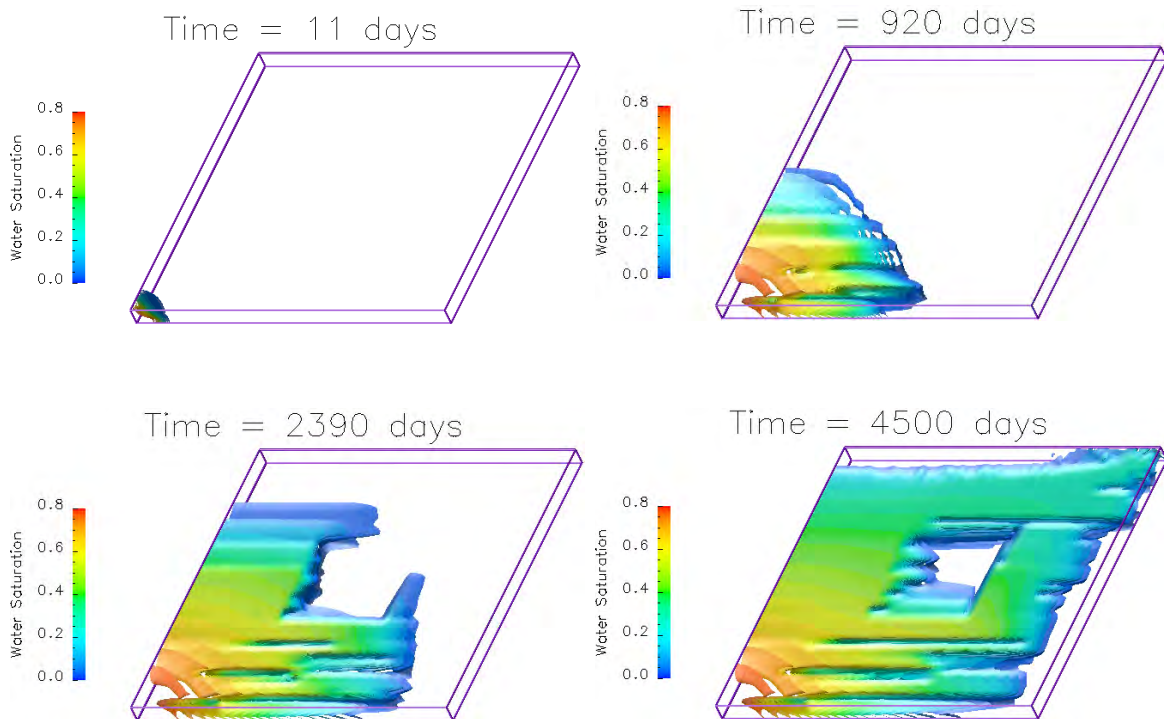


Figura 6.7: Evolución del frente de saturación para un medio de permeabilidad variable.

La imagen anterior nos muestra un frente de saturación, que a diferencia del caso anterior, ya no evoluciona de manera geométrica, esto es por la heterogeneidad del medio al introducir una permeabilidad aleatoria en el dominio de estudio. Dado que el agua encuentra más *difícil* su recorrido por el dominio, observamos que los días de

simulación son más, del orden de 4800 días, a diferencia de los mil del caso anterior, para llegar al pozo extractor. Nótese que el cuerpo de baja permeabilidad impacta directamente sobre el frente de saturación, el agua se ve obligada a rodear el cuerpo y muy poca penetra en él.

6.2.5. Líneas de Corriente caso no-homogéneo

En la simulación con líneas de corriente es importante calcular el campo de velocidad en todo el dominio, pues las líneas de corriente son tangentes en cada punto al campo local. En este apartado se resolverá el problema con los datos de la **tabla 6.2** para un medio no-homogéneo. A continuación la implementación en TUNAM.

```
1 typedef TunaArray<double,3>::huge ScalarField3D;
2 typedef TunaArray<double,1>::huge ScalarField1D;
```

A diferencia de la codificación para volumen finito, en la simulación con líneas de corriente, además de declarar un arreglo 3D es necesario definir uno unidimensional, (línea 2), pues recordemos que la saturación se resolverá sobre cada línea de corriente. Como en los casos anteriores, creamos una malla numérica de la siguiente manera:

```
3 StructuredMesh<Uniform<double, 3> > mesh(length_x, num_nodes_x,
4                                           length_y, num_nodes_y,
5                                           length_z, num_nodes_z);
6 mesh.print();
```

La malla sigue siendo del mismo número de nodos, el dominio tiene 80 nodos en las direcciones x y y y 4 en la dirección z .

```
13 ScalarField3D p ( mesh.getExtentVolumes() );
14 ScalarField3D p_n( mesh.getExtentNodes() );
15 ScalarField3D u1(num_nodes_x, num_vols_y, num_vols_z);
16 ScalarField3D u2(num_vols_x, num_nodes_y, num_vols_z);
17 ScalarField3D u3(num_vols_x, num_vols_y, num_nodes_z);
18 ScalarField3D u1_n( mesh.getExtentNodes() );
19 ScalarField3D u2_n( mesh.getExtentNodes() );
20 ScalarField3D u3_n( mesh.getExtentNodes() );
```

En las líneas 13-20 vemos la declaración de los campos escalares que almacenarán la información concernientes tanto a la presión como a la velocidad. Hay que hacer una distinción especial para el campo de la velocidad, ya que los campos con nomenclatura $u1$, $u2$ y $u3$ son atribuidos a cada centro de volumen de control de la malla, de modo que hay que interpolar a los nodos y para eso reservamos un espacio en memoria con los nombres $u1_n$, $u2_n$ y $u3_n$.

```
21 // Inicializamos campos para el calculo sobre las lineas de corriente
22 ScalarField1D SwSLS[NlinesSLS];
```

En la línea 22 declaramos el campo unidimensional que almacenará la solución de la ecuación de saturación sobre las líneas de corriente. En la sección anterior, se hizo el cálculo variable de la permeabilidad, así que incorporamos esos valores en el cálculo de la velocidad (líneas 24-67) como se muestra en el siguiente fragmento de código, una visualización del cálculo se observa en la **figura 6.8**.

```

24 // Calculo de la velocidad
25
26 double Sef = (Sw(i, j, kk)-Srw)/(1-Srw-Sro);
27 double krw = Sef;
28 double kro = 1-Sef;
29 double lam_T = (krw/mu_w) + (kro/mu_o);
30 double lam_w = krw / mu_w;
31
32 for(int i = bi; i <= ei; ++i){
33     for(int j = bj; j <= ej; ++j){
34         for(int k = bk; k <= ek; ++k){
35             Sef = (Sw(i, j, kk)-Srw)/(1-Srw-Sro);
36             krw = Sef;
37             kro = 1-Sef;
38             lam_T = (krw/mu_w) + (kro/mu_o);
39             lam_w = krw / mu_w;
40             u1(i,j,k) = -k_11(i, j, k) * lam_T * ((p(i+1,j,k)-p(i-1,j,k)) / (2*dx));
41         }
42     }
43 }
44 for(int i = bi; i <= ei; ++i){
45     for(int j = bj; j <= ej; ++j){
46         for(int k = bk; k <= ek; ++k){
47             Sef = (Sw(i, j, kk)-Srw)/(1-Srw-Sro);
48             krw = Sef;
49             kro = 1-Sef;
50             lam_T = (krw/mu_w) + (kro/mu_o);
51             lam_w = krw / mu_w;
52             u2(i,j,k) = -k_22(i, j, k) * lam_T * ((p(i,j+1,k)-p(i,j-1,k)) / (2*dy));
53         }
54     }
55 }
56 for(int i = bi; i <= ei; ++i){
57     for(int j = bj; j <= ej; ++j){
58         for(int k = bk; k <= ek; ++k){
59             Sef = (Sw(i, j, kk)-Srw)/(1-Srw-Sro);
60             krw = Sef;
61             kro = 1-Sef;
62             lam_T = (krw/mu_w) + (kro/mu_o);
63             lam_w = krw / mu_w;
64             u3(i,j,k) = -k_33(i, j, k) * lam_T * ((p(i,j,k+1)-p(i,j,k-1)) / (2*dz));
65         }
66     }
67 }

```

La velocidad se calcula en tres secciones de bucles, uno para cada componente de la velocidad, u_1 , u_2 y u_3 para las direcciones x , y y z respectivamente. Dichos valores se encuentran en los volúmenes de control, pero habrán de ser interpolados a los nodos de la malla para fines de visualización, a continuación las líneas de código que llevan a cabo dicha interpolación.

```

68 NumUtils::interpolateToNodesUs(u1_n, u1);
69 NumUtils::interpolateToNodesVs(u2_n, u2);
70 NumUtils::interpolateToNodesWs(u3_n, u3);

```

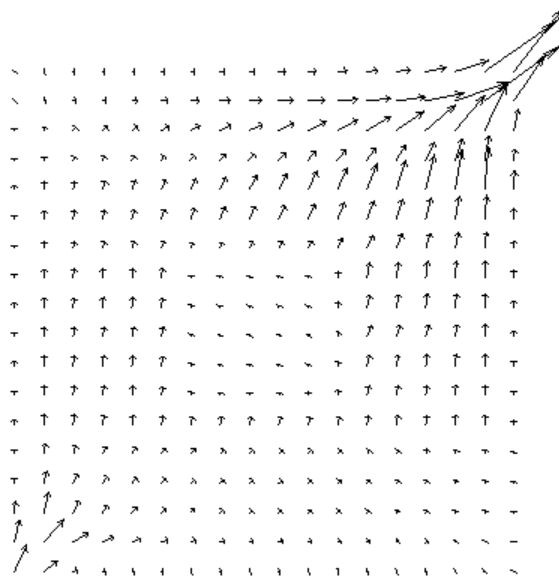


Figura 6.8: Campo de velocidad para el dominio con permeabilidad variable.

La imagen anterior muestra el resultado del cálculo de la velocidad con la permeabilidad variable. Al centro del dominio observamos una zona de baja velocidad que corresponde al cuerpo insertado de baja permeabilidad, dado que la velocidad de Darcy depende de la permeabilidad, ésta se ve reflejada en los valores que adquiere sobre el flujo de los fluidos al centro del dominio, donde esperamos poca penetración del frente de agua pues la velocidad es prácticamente cero. Finalmente impactará en el cálculo de la saturación sobre las líneas de corriente, ver [29]; dicho cálculo corresponde a la siguiente codificación:

```

71 double Sef_s1, krw_s1, kro_s1, lam_T_s1, lam_w_s1 ;
72 double Sef_s2, krw_s2, kro_s2, lam_T_s2, lam_w_s2 ;
73 for(int i = 0; i < NlinesSLS; i++) {
74     for(int j = 1; j < NpointsSLS-1; j++) {
75         Sef_s1 = (SwSLS[i](j)-Srw)/(1-Srw-Sro);
76         krw_s1 = Sef_s1;
77         kro_s1 = (1-Sef_s1);
78         lam_T_s1 = (krw_s1/mu_w) + (kro_s1/mu_o);
79         lam_w_s1 = krw_s1 / mu_w;
80
81         Sef_s2 = (SwSLS[i](j-1)-Srw)/(1-Srw-Sro);
82         krw_s2 = Sef_s2;
83         kro_s2 = (1-Sef_s2);
84         lam_T_s2 = (krw_s2/mu_w) + (kro_s2/mu_o);
85         lam_w_s2 = krw_s2 / mu_w;
86
87         Dtao = calcDtao(u1_n,u2_n,u3_n, xsls, ysls, zsls, porosity, dx, dy, dz, i, j);
88         SwSLS[is](js) = SwSLS[is](js) - ((lam_w_s1/lam_T_s1) - (lam_w_s2/lam_T_s2))
89             * (dt/Dtao);
90         if (SwSLS[is](js) < 1.0e-10) SwSLS[is](js) = 0.0;
91         if (SwSLS[is](js) > 0.8) SwSLS[is] = 0.8;
92     }
93 }
```

En el listado de las líneas 71-93 observamos el cálculo de la saturación sobre las líneas de corriente. En particular, la línea 87 hace un llamado a la función, `calcDtao`, que es la encargada de calcular el tiempo de vuelo para cada línea de corriente, a continuación su implementación:

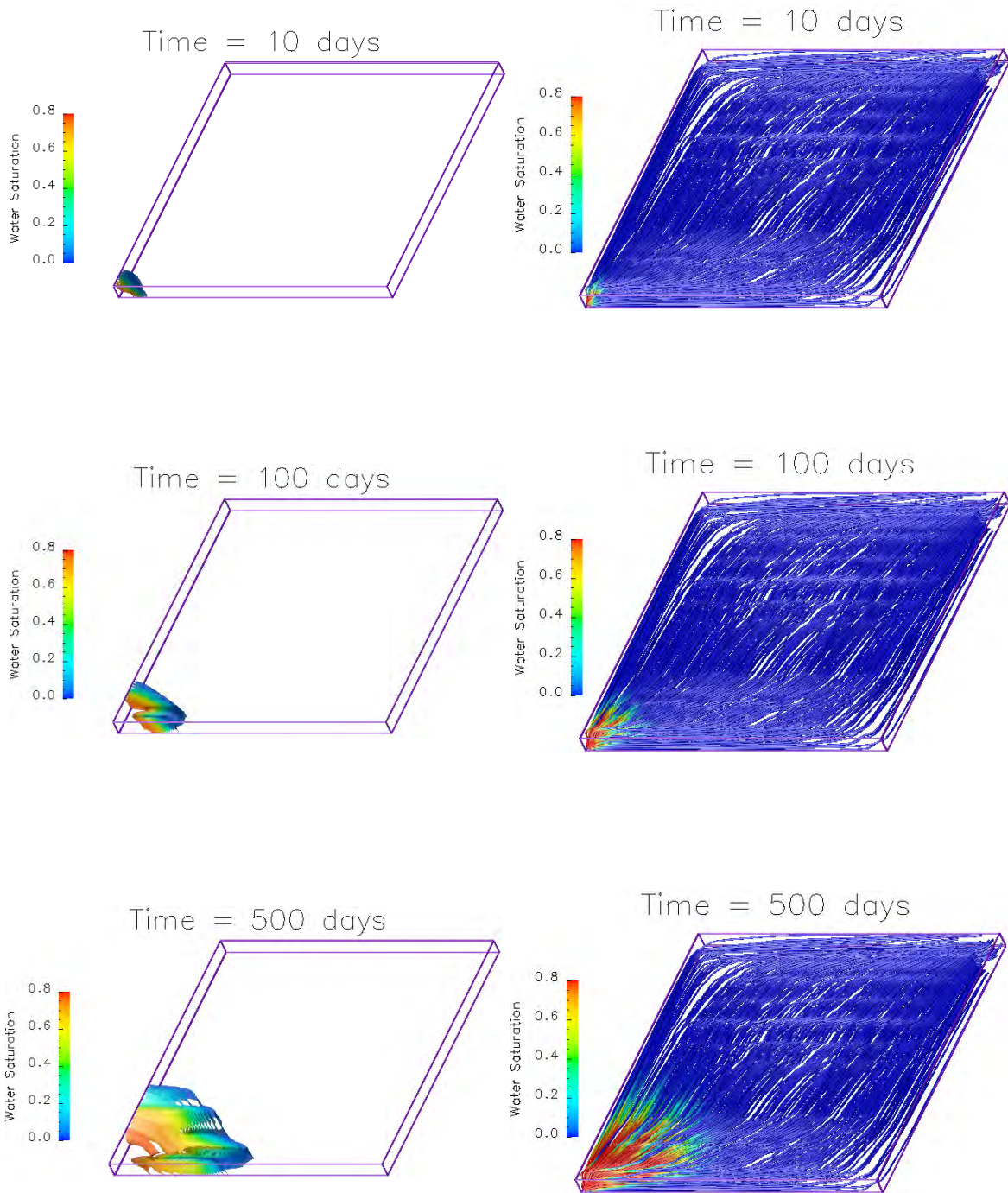
```

double calcDtao(ScalarField3D& u1, ScalarField3D& u2, ScalarField3D& u3,
               double **xsls, double **ysls, double **zsls, double porosity,
               double dx, double dy, double dz, int i, int j)
{
double a = xsls[i][j] / dx;
double b = ysls[i][j] / dy;
double c = zsls[i][j] / dz;
int I = static_cast<int>(a);
int J = static_cast<int>(b);
int K = static_cast<int>(c);
double alpha = a - I;
double beta = b - J;
double gamma = c - K;
double UI, VI, WI;
UI = ( ( u1(I, J, K) * (1 - alpha) +
        u1(I+1, J, K) * alpha ) * (1 - beta) +
        ( u1(I, J+1, K) * (1 - alpha) +
          u1(I+1, J+1, K) * alpha ) * beta ) * (1 - gamma) +
        ( ( u1(I, J, K+1) * (1 - alpha) +
          u1(I+1, J, K+1) * alpha ) * (1 - beta) +
          ( u1(I, J+1, K+1) * (1 - alpha) +
            u1(I+1, J+1, K+1) * alpha ) * beta ) * gamma;
VI = ( ( u2(I, J, K) * (1 - alpha) +
        u2(I+1, J, K) * alpha ) * (1 - beta) +
        ( u2(I, J+1, K) * (1 - alpha) +
          u2(I+1, J+1, K) * alpha ) * beta ) * (1 - gamma) +
        ( ( u2(I, J, K+1) * (1 - alpha) +
          u2(I+1, J, K+1) * alpha ) * (1 - beta) +
          ( u2(I, J+1, K+1) * (1 - alpha) +
            u2(I+1, J+1, K+1) * alpha ) * beta ) * gamma;
WI = ( ( u3(I, J, K) * (1 - alpha) +
        u3(I+1, J, K) * alpha ) * (1 - beta) +
        ( u3(I, J+1, K) * (1 - alpha) +
          u3(I+1, J+1, K) * alpha ) * beta ) * (1 - gamma) +
        ( ( u3(I, J, K+1) * (1 - alpha) +
          u3(I+1, J, K+1) * alpha ) * (1 - beta) +
          ( u3(I, J+1, K+1) * (1 - alpha) +
            u3(I+1, J+1, K+1) * alpha ) * beta ) * gamma;

double Dxi = sqrt ( ( xsls[i][j] - xsls[i][j-1])*(xsls[i][j] - xsls[i][j-1]) +
                   ( ysls[i][j] - ysls[i][j-1])*(ysls[i][j] - ysls[i][j-1]) +
                   ( zsls[i][j] - zsls[i][j-1])*(zsls[i][j] - zsls[i][j-1]) );
double Dtao = ( Dxi * porosity ) / sqrt(UI*UI + VI*VI + WI*WI);
return Dtao;
}

```

Recibe como argumentos los campos escalares de velocidad para las componentes x , y y z , las coordenadas de las líneas, la porosidad y los deltas espaciales en cada dirección. Se trata de una interpolación trilineal del campo de velocidad local a la posición j de la línea i en cuestión. La velocidad interpolada de los nodos de la malla a los puntos de cada línea de corriente se hace por componentes, de modo que UI , VI y WI son los valores para la dirección x , y y z respectivamente. Esta función es para calcular el tiempo de vuelo según la ecuación (4.33). Los resultados que se muestran en la **figura 6.9** son una comparación cualitativa de los métodos MVF y SLS.



6. MODELO COMPUTACIONAL Y RESULTADOS NUMÉRICOS

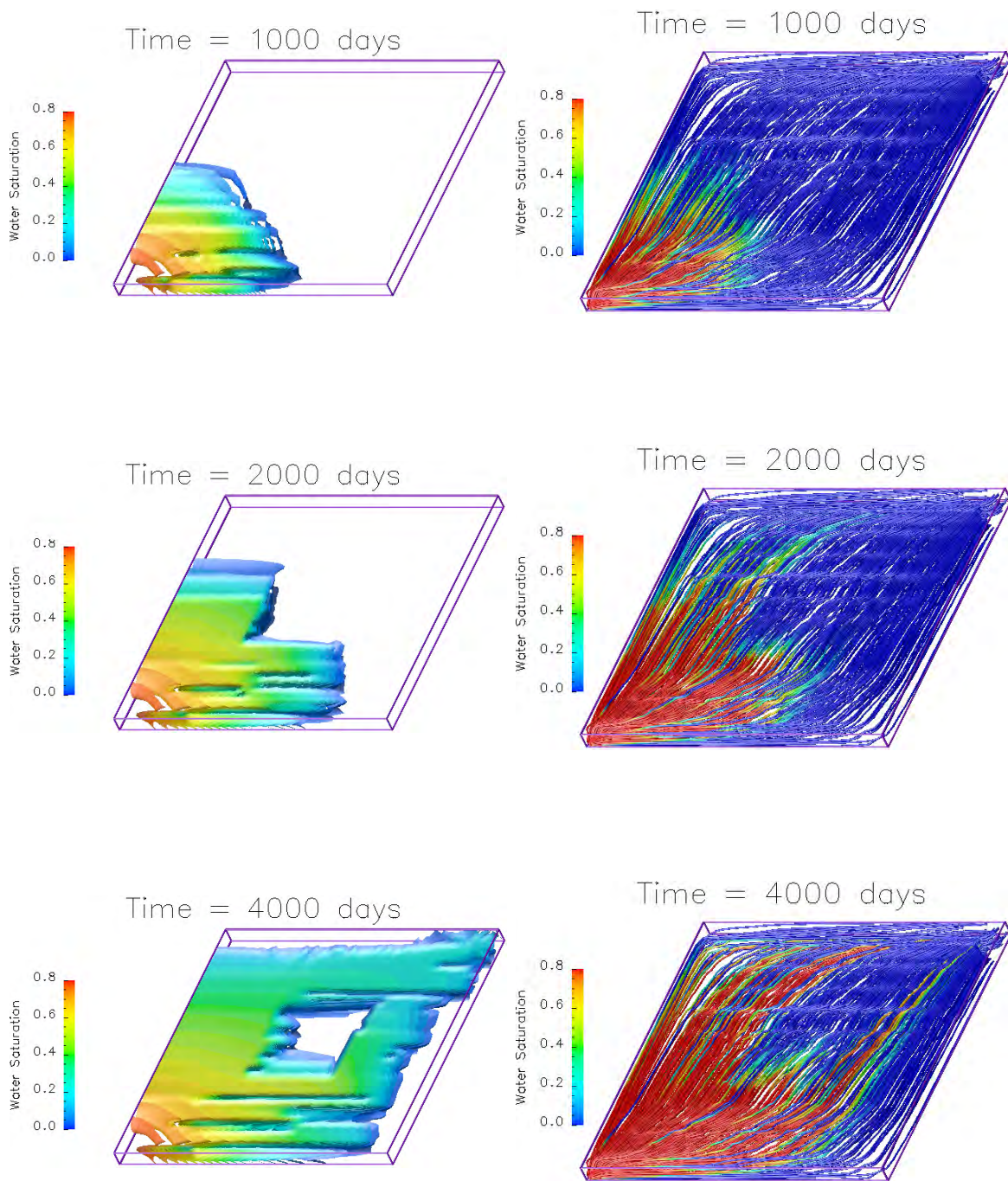


Figura 6.9: Comparación de los métodos MVF y SLS en los mismos días de la simulación.

En principio podemos observar que ambos métodos son sensibles al cambio de permeabilidad, en particular para el cuerpo anómalo al centro del dominio. La baja velocidad de esta zona repercute en el frente de saturación de los dos métodos, identificando zonas de drenado pobre de hidrocarburos.

Capítulo 7

Conclusiones

En el presente trabajo se describieron los modelos matemáticos a partir de la formulación axiomática y los modelos computacionales para describir un flujo de dos fases a través de un medio poroso.

Se realizaron adaptaciones al software TUNAM para realizar cálculos de velocidad sobre medios de permeabilidad variable y resolver la ecuación de saturación sobre líneas de corriente. Se llevaron a cabo simulaciones usando los métodos de volumen finito y líneas de corriente a fin de comparar los resultados de cada uno. Contrastando los métodos de MVF y SLS, observamos un comportamiento cualitativo similar para los pasos de tiempo inferiores a los 2000 días de simulación. Aunque ambos métodos son sensibles al cambio en la permeabilidad del cuerpo al centro del dominio con bajos valores de esta propiedad, observamos que el frente de saturación de agua en las líneas de corriente evoluciona de manera distinta al método MVF, una posible causa son las interpolaciones que se hacen de la malla numérica, es decir, de los centros de los volúmenes de control a los nodos, y de la propia velocidad a las líneas de corriente. Estas interpolaciones acarrear errores de aproximación que se acumulan con el paso del tiempo en los días de simulación, introduciendo un desajuste en el cálculo de la saturación del agua. Queda realizar una interpretación cuantitativa de este fenómeno, llevando el valor de la saturación de cada línea de corriente a la malla numérica y poder hacer una comparación al respecto contra los resultados mostrados con el método de MVF.

El método de líneas de corriente se muestra como un método para identificar zonas de drenado pobre de hidrocarburos pues la evolución de los frentes de inyección y su interacción con las heterogeneidades del yacimiento pueden ser visualizadas fácil y rápidamente, y por lo tanto proveen de una manera natural e intuitiva para caracterizar dinámicamente un yacimiento. La optimización de la locación de Pozos basada en el modelo geológico permite reflejar la geometría y heterogeneidad de los reservorios más

7. CONCLUSIONES

detalladamente. La aportación del presente trabajo deja un código computacional en el lenguaje de programación C++ que es de carácter abierto y queda a disposición de la comunidad el mejorarlo, adaptarlo y compartirlo, pues cabe señalar que existen simuladores comerciales de carácter general que incorporan este procedimiento, sin embargo, no son accesibles a todo público. El problema computacional es de gran escala y se recomienda paralelizar los cálculos de la saturación sobre las líneas de corriente y el gradiente conjugado para resolver el sistema lineal. Los modelos numéricos que se utilizan para la simulación de la extracción mejorada de petróleo están concebidos para que puedan adaptarse a sistemas de cómputo paralelo.

Apéndice A

Formulación Presión-Saturación

Un sistema de N fases para un flujo fraccional provoca que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales se desacople. En un sistema desacoplado tenemos una ecuación para la presión y $N - 1$ ecuaciones de transporte para las saturaciones. Para resolver sistemas de ecuaciones donde éstas se encuentran débilmente acopladas, empleamos métodos iterativos. Bajo esta formulación, la ecuación de presión se resuelve de manera independiente de la de saturación, de modo que los resultados obtenidos de la ecuación de presión se usan para resolver las ecuaciones de transporte para la saturación. Como consecuencia, los resultados de la ecuación de saturación se insertan en la ecuación de presión a fin de obtener la solución en el paso de tiempo siguiente. Dicho proceso iterativo se repetirá para un número de pasos de tiempo previamente definido. Las siguientes secciones muestran la manera de obtener una formulación presión-saturación para sistemas multifásicos.

A.1. Ecuación de Presión

La ecuación de presión se deriva a partir de la ecuación (4.7), para ello, dividimos por ρ_α , obteniendo:

$$\frac{1}{\rho_\alpha} \left[\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha) - q_\alpha \right] = 0,$$

sumando ahora para todas las fases del sistema,

$$\sum_\alpha \left\{ \frac{1}{\rho_\alpha} \left[\frac{\partial(\phi \rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha) - q_\alpha \right] \right\} = 0,$$

desarrollando la derivada temporal se tiene que:

$$\sum_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left[\rho_{\alpha} S_{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \rho_{\alpha} \phi \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial t} + \rho_{\alpha} \nabla \cdot \underline{u}_{\alpha} + \underline{u}_{\alpha} \cdot \nabla \rho_{\alpha} - q_{\alpha} \right] \right\} = 0,$$

reordenando términos y aplicando la ecuación (4.10) obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot \underline{u}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left[\phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \underline{u}_{\alpha} \cdot \nabla \rho_{\alpha} \right] - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} = 0. \quad (\text{A.1})$$

La velocidad total del sistema se define como:

$$\underline{u} = \sum_{\alpha} \underline{u}_{\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

aplicando el operador divergencia obtenemos:

$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \cdot \sum_{\alpha} \underline{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \nabla \cdot \underline{u}_{\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Insertando (A.3) en (A.1) llegamos a la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left[\phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \underline{u}_{\alpha} \cdot \nabla \rho_{\alpha} \right] - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} = 0. \quad (\text{A.4})$$

De la definición de la Ley de Darcy para un flujo multifásico tenemos que:

$$\underline{u} = \sum_{\alpha} \underline{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left[-\underline{k} \lambda_{\alpha} (\nabla \cdot p_{\alpha} - \rho_{\alpha} \underline{g}) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Definamos ahora una función de flujo fraccional para la fase α , de manera que,

$$f_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda} \implies \lambda_{\alpha} = f_{\alpha} \lambda, \quad (\text{A.6})$$

donde $\lambda = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}$ representa la movilidad total y como consecuencia se cumple que $\sum_{\alpha} f_{\alpha} = 1$. Sustituyendo la ecuación (A.6) en (A.5) llegamos a:

$$\underline{u} = -\lambda \underline{k} \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla p_{\alpha} - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \rho_{\alpha} \underline{g} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Con esta expresión de la velocidad total, la ecuación (A.4) se transforma en una ecuación para la presión que denotaremos como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \lambda \underline{k} \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla p_{\alpha} - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \rho_{\alpha} \underline{g} \right] + \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left[\phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \underline{u}_{\alpha} \cdot \nabla \rho_{\alpha} \right] - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} = 0. \quad (\text{A.8})$$

A.2. Ecuación de Saturación

Al dar solución a la ecuación (A.8), obtenemos la presión que ayudará a calcular la velocidad que emplearemos para la ecuación de saturación. Es posible calcular la saturación directamente de la ecuación (4.7). En un sistema de dos fases; agua y aceite, se utiliza la presión del aceite a fin de generar una ecuación para la presión, mientras que la ecuación de saturación de la fase agua se expresa como

$$\frac{\partial(\phi\rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \underline{u}_w) = q_w, \quad (\text{A.9})$$

Hay que hacer notar que tanto la ecuación (A.8) como la ecuación (4.7) fueron formuladas en términos de una presión de fase (la del aceite por ejemplo).

Apéndice B

Gradiente Conjugado para Sistemas Lineales Dispersos

El método de gradiente conjugado (CGM) por sus siglas en inglés, es un método efectivo para sistemas simétricos y positivo-definidos, esto es $\underline{A} = \underline{A}^T$ y $\underline{u}^T \underline{A} \underline{u} > 0$ respectivamente, [37].

Descrito en una frase, el método es una realización de una técnica de proyección ortogonal sobre el subespacio de Krylov $\mathcal{K}(\underline{r}^{(0)}, \underline{A})$, donde $\underline{r}^{(0)}$ es el residuo inicial. La idea esencial del método consiste en construir una base de vectores ortogonales en dicho subespacio y emplearla para realizar la búsqueda iterativa de la solución. El vector solución puede ser expresado como:

$$\underline{x}^{(j+1)} = \underline{x}^{(j)} + \alpha^{(j)} \underline{p}^{(j)}.$$

Con el fin de ajustarse a la notación estándar que se utiliza en la literatura para describir el algoritmo, el índice de los vectores \underline{p} ahora comienza en cero en lugar de uno, como solía acostumbrarse. Ahora bien, en CGM los vectores residuales deben satisfacer la recurrencia,

$$\underline{r}^{(j+1)} = \underline{r}^{(j)} - \alpha^{(j)} \underline{A} \underline{p}^{(j)}. \quad (\text{B.1})$$

Si se requiere que los vectores $\underline{r}^{(j)}$ sean ortogonales, entonces es necesario que $(\underline{r}^{(j)} - \alpha^{(j)} \underline{A} \underline{p}^{(j)}, \underline{r}^{(j)}) = 0$ y, como resultado:

$$\alpha^{(j)} = \frac{(\underline{r}^{(j)}, \underline{r}^{(j)})}{(\underline{A} \underline{p}^{(j)}, \underline{r}^{(j)})}. \quad (\text{B.2})$$

Además, es conocido que la siguiente dirección de búsqueda $\underline{p}^{(j+1)}$ es una combinación lineal de $\underline{r}^{(j+1)}$ y $\underline{p}^{(j)}$, después ajustando la base de los vectores \underline{p} apropiadamente, se deduce que,

$$\underline{p}^{(j+1)} = \underline{r}^{(j+1)} - \beta^{(j)} \underline{p}^{(j)}. \quad (\text{B.3})$$

Por lo tanto, una primera consecuencia de la relación anterior es que,

$$\left(\underline{A}\underline{p}^{(j)}, \underline{r}^{(j)} \right) = \left(\underline{A}\underline{p}^{(j)}, \underline{p}^{(j)} - \beta^{(j-1)} \underline{p}^{(j-1)} \right) = \left(\underline{A}\underline{p}^{(j)}, \underline{p}^{(j)} \right),$$

porque $\underline{A}\underline{p}^{(j)}$ es ortogonal a $\underline{p}^{(j-1)}$. Entonces (B.2) se convierte en:

$$\alpha^{(j)} = \frac{\left(\underline{r}^{(j)}, \underline{r}^{(j)} \right)}{\left(\underline{A}\underline{p}^{(j)}, \underline{p}^{(j)} \right)},$$

Por otra parte, escribiendo $\underline{p}^{(j+1)}$ como se definió en (B.3) y dado que es ortogonal a $\underline{A}\underline{p}^{(j)}$, tenemos que:

$$\beta^{(j)} = -\frac{\left(\underline{r}^{(j+1)}, \underline{A}\underline{p}^{(j)} \right)}{\left(\underline{p}^{(j)}, \underline{A}\underline{p}^{(j)} \right)}.$$

Nótese que de (B.1), tenemos que:

$$\underline{A}\underline{p}^{(j)} = -\frac{1}{\alpha^{(j)}} \left(\underline{r}^{(j+1)} - \underline{r}^{(j)} \right),$$

y, por lo tanto

$$\beta^{(j)} = \frac{1}{\alpha^{(j)}} \frac{\left(\underline{r}^{(j+1)}, \left(\underline{r}^{(j+1)} - \underline{r}^{(j)} \right) \right)}{\left(\underline{A}\underline{p}^{(j)}, \underline{p}^{(j)} \right)} = \frac{\left(\underline{r}^{(j+1)}, \underline{r}^{(j+1)} \right)}{\left(\underline{r}^{(j)}, \underline{r}^{(j)} \right)}.$$

Poniendo todas estas relaciones juntas da como resultado un algoritmo iterativo, como se muestra a continuación:

Algoritmo 2 CGM

- 1: Calcular $\underline{r}^{(0)} = b - \underline{A}\underline{x}^{(0)}$, $\underline{p}^{(0)} = \underline{r}^{(0)}$
 - 2: **for** $j = 0, 1, \dots$, *hasta converger* **do**
 - 3: $\alpha^{(j)} = \left(\underline{r}^{(j)}, \underline{r}^{(j)} \right) / \left(\underline{A}\underline{p}^{(j)}, \underline{p}^{(j)} \right)$
 - 4: $\underline{x}^{(j+1)} = \underline{x}^{(j)} + \alpha^{(j)} \underline{p}^{(j)}$
 - 5: $\underline{r}^{(j+1)} = \underline{r}^{(j)} - \alpha^{(j)} \underline{A}\underline{p}^{(j)}$
 - 6: $\beta^{(j)} = \left(\underline{r}^{(j+1)}, \underline{r}^{(j+1)} \right) / \left(\underline{r}^{(j)}, \underline{r}^{(j)} \right)$
 - 7: $\underline{p}^{(j+1)} = \underline{r}^{(j+1)} - \beta^{(j)} \underline{p}^{(j)}$
 - 8: **end for**
-

En este algoritmo, (\cdot, \cdot) es el producto interno adecuado al sistema lineal en particular. Se debe considerar, en términos de memoria, almacenar 4 vectores (\underline{x} , \underline{p} , \underline{Ap} y \underline{r}), la solución aproximada será $\underline{x}^{(j+1)}$ y el vector residual es $\underline{r}^{(j+1)}$.

La gran ventaja del Método de Gradiente Conjugado radica en que cuando se utiliza este procedimiento basta con asegurar la ortogonalidad de un nuevo miembro con respecto al último que se ha construido, para que automáticamente esta condición se cumpla con respecto a todos los anteriores.

Apéndice C

Aplicación del Método de Volumen Finito

En este apéndice se describe la aplicación del MVF a problemas de una fase, siendo extensible a más fases en un sistema.

- Se construye una malla con volúmenes que no se traslapen como se muestra en la **figura 5.1(a)**.
- Integramos en el espacio del volumen de control de la **figura 5.1(b)**, y en el tiempo del instante t al tiempo $t + \Delta t$, equivalentes a los pasos de tiempo n y $n + 1$ respectivamente.

$$\int_s^n \int_w^e \int_n^{n+1} \frac{\partial p}{\partial t} dt dx dy = \int_n^{n+1} \int_s^n \int_w^e \Gamma \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) dx dy dt.$$

donde $\Gamma = k/\phi\mu c_T$.

- Se aproximan las integrales

$$\begin{aligned}
 (p_P^{n+1} - p_P^n)\Delta x\Delta y &= \Gamma \int_n^{n+1} \left(\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_w^e \Delta y + \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_s^n \Delta x \right) dt \\
 &= \Gamma \int_n^{n+1} \left(\left(\frac{p_E - p_P}{\Delta x_e} - \frac{p_P - p_W}{\Delta x_w} \right) \Delta y \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{p_N - p_P}{\Delta y_n} - \frac{p_P - p_S}{\Delta y_s} \right) \Delta x \right) dt \\
 &= \int_n^{n+1} \left(a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S \right. \\
 &\quad \left. - (a_E + a_W + a_N + a_S) p_P \right) dt.
 \end{aligned}$$

donde $a_E = \Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x_e}$; $a_W = \Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x_w}$; $a_N = \Gamma \frac{\Delta x}{\Delta y_n}$; $a_S = \Gamma \frac{\Delta x}{\Delta y_s}$.

La integral temporal se aproxima usando el esquema θ :

Dada una función $f(\underline{x})$, la integral de n a $n+1$ de dicha función, se aproxima de la siguiente manera

$$\int_n^{n+1} f dt = [\theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n] \Delta t,$$

donde para $\theta = 0$ se tiene un esquema explícito ($f^n \Delta t$) y para $\theta = \frac{1}{2}$ se tiene un esquema conocido como de Crank-Nicolson ($[f^{n+1} + f^n] \frac{\Delta t}{2}$).

Usando un esquema implícito ($\theta = 1$) se tiene que

$$a_P p_P^{n+1} = a_E p_E^{n+1} + a_W p_W^{n+1} + a_N p_N^{n+1} + a_S p_S^{n+1} + s_P p_P^n,$$

donde $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$ y $s_P = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$.

- Para cada volumen de control de la malla se obtiene una ecuación discreta, lo que genera un sistema lineal de ecuaciones. Dicho sistema tiene la forma mostrada en la **figura 5.2**. La matriz del sistema es rala, simétrica y positivo definida. Existen varios algoritmos para resolver este tipo de sistemas, en este trabajo se empleó el método de gradiente conjugado, ver apéndice B.

Referencias

- [1] ABOU-KASSEM, J. H., FAROUQ, S. M., RAFIQ, M., “*Petroleum Reservoir Simulation. A Basic Approach.*”, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 2006.
- [2] ALLEN, M. B., HERRERA, I., PINDER, G., “*Numerical Modeling in Science and Engineering.*”, 1988.
- [3] AL-ZAWAWI, A. S., ET AL, “*Using Streamline and Reservoir Simulation to Improve Waterflood Management*”, Saudi Aramco Journal of Technology, 2011.
- [4] AMES, W. F., “*Numerical Methods for Partial Differential Equations.*”, Academic Press, INC., 1977.
- [5] BAKER, R., “*Streamline Technology: Reservoir History Matching and Forecasting = Its Success, Limitations, and Future*”, Distinguished Author Series, Journal of Canadian Petroleum Technology, volumen 40 No. 4.
- [6] BATYCKY, R.P., THIELE, M. R., BLUNT, M. J., “*A Streamline-Based Reservoir Simulator of the House Mountain Waterflood.*”, SCRF, 1997.
- [7] BATYCKY, R.P., “*A three-dimensional two-phase field scale streamline simulator.*”, Stanford University, Ph D. Thesis. 1997.
- [8] BATYCKY, R.P., FÖRSTER, M., THIELE, M.R., STÜBEN, K., “*Parallelization of a Commercial Streamline Simulator and Performance on Practical Models.*”, Society of Petroleum Engineers, 2010.
- [9] BERRE, I., DAHLE, H. K., KARLSEN, K. H., NORDHAUG, H. F., “*A Streamline Front Tracking Method for Two- and Three-Phase Flow Including Capillary Forces.*”, American Mathematical Society, 2000.
- [10] BJØRLYKKE, KNUT., “*Petroleum Geoscience: From Sedimentary Environments to Rock Physics.*”, Springer, 2010.

- [11] BLITZ++: Object-oriented library for scientific computing.
<http://www.oonumerics.org/blitz/>.
- [12] CHAPMAN, R.E., “*Petroleum Geology*”, Elsevier, 1983.
- [13] CHEN, Z., “*Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery*”, SIAM, 2007.
- [14] CHEN, Z., HUAN, G., y MA ,Y., “*Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*”, SIAM, 2006.
- [15] DATTA-GUPTA, A. y KING, M., “*Streamline Simulation, A current perspective*”, Texas A&M University, 1998.
- [16] DATTA-GUPTA, A. y KING, M., “*Streamline Simulation: Theory and Practice*”, SPE, 2006.
- [17] DE LA CRUZ, L., “*Flujo en una y dos fases en medios porosos: modelos matemáticos, numéricos y computacionales*”, Reportes Internos 2012-04 Instituto de Geofísica UNAM, 2012.
- [18] DE LA CRUZ, L., “*Tunam: Template units for numerical applications and modeling.*”
<http://code.google.com/p/tunam/>
- [19] DURRAN, D. R. “*Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics.*”, Springer, 2da Ed. 2010.
- [20] ECONOMIDES, M. J., NOLTE, K. G. “*Reservoir Stimulation*”, Wiley, 3er Ed. 2010.
- [21] FERZIGER, J. H., PERIĆ, M. “*Computational Methods for Fluid Dynamics.*”, Springer, 3er Ed. 2002.
- [22] GLOWINSKI, R., NEITTAANMÄKI, P. “*Partial Differential Equations, Modeling and Numerical Simulation.*”, Springer, 2008.
- [23] GOLUB, H., VAN LOAN, C. “*Matrix Computations*”, The Johns Hopkins University Press, 3er Ed. 1996.
- [24] HÆGLAND, HÅKON “*Streamline methods with application to flow and transport in fractured media.*”, Ph. D. Thesis, University of Bergen. 2009.
- [25] HANTSCHER, T., KAUEAUF, A. I. “*Fundamentals of Basin and Petroleum Systems Modeling*”, Springer, 2009.
- [26] HASLE, G., LIE, K., QUAK, E. “*Geometric Modelling, Numerical Simulation, and Optimization.*”, Springer, 2007.

-
- [27] HERRERA, I. y PINDER, G., “*Mathematical Modeling in Science and Engineering: An Axiomatic Approach*”, John Wiley and Sons, 2012.
- [28] ISKE, A., RANDEN, T. “*Mathematical Methods and Modelling in Hydrocarbon Exploration and Production.*”, Springer, 2000.
- [29] KLAUSEN, R. A., RASMUSSEN, A. F., STEPHANSEN A. F., “*Velocity interpolation and streamline tracing on irregular geometries.*”, Computational Geosciences, Volume 16, 2012.
- [30] LAVORSEN, A. I., “*Geology of Petroleum*”, segunda edición, Freeman, 1967.
- [31] LEVEQUE, R. J., “*Finite-Difference Methods for Differential Equations*”, University of Washington, 2005.
- [32] LEVEQUE, R. J., “*Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*”, segunda edición, Freeman, 1967.
- [33] MIJÁILOV, V. P., “*Ecuaciones diferenciales en Derivadas Parciales*”, Editorial Mir Moscú, 1978.
- [34] OpenMP Web Site: www.openmp.org
- [35] OpenDX Homepage: www.opendx.org
- [36] PEACEMAN, D. W., “*Fundamentals of numerical reservoir simulation.*”, ELSEVIER, 1977.
- [37] SAAD, Y., “*Iterative Methods for Sparse Linear Systems*”, segunda edición, SIAM, 2003.
- [38] SELLEY, R. C., “*Elements of Petroleum Geology*”, segunda edición, Academic Press, 1998.
- [39] SHAPIRA, Y., “*Solving PDEs in C++. Numerical Methods in a Unified Object-Oriented Approach.*”, SIAM, 2006.
- [40] SHONKWILER, R. W., LEFTON, L., “*An introduction to Parallel and Vector Scientific Computation.*”, Cambridge University Press, 2006.
- [41] STEWART, G. W., “*Matrix Algorithms. Volume I: Basic Decompositions.*”, SIAM, 1998.
- [42] THIELE, M. R., BATYCKY, R. P. y FENWICK, D. H. “*Streamline Simulation for Modern Reservoir-Engineering Workflows*”, Distinguished Author Series, SPE, 2010.

- [43] VASCO, D. W, YOON, S., DATTA-GUPTA, A., “*Integrating Dynamic Data Into High-Resolution Reservoir Models Using Streamline-Based Analytic Sensitivity Coefficients* ”, SPE, 1999.
- [44] VELTEN, K., “*Mathematical Modeling and Simulation. Introduction for Scientists and Engineers*”, Wiley-VCH, 2009.
- [45] VERSTEEG, H. K, MALALASEKERA, W., “*An introduction to fluid dynamics. The finite volume method.*”, Longman Scientific & Technical, 1995.
- [46] WATKINS, D. S., “*Fundamentals of Matrix Computations*”, Segunda Edición, Wiley-Interscience, 2002.
- [47] WHITE, R., “*Computational Mathematics*”, Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [48] YOON, S., MALALLAH, A. H., DATTA-GUPTA, A., VASCO, D. W., BEHRENS, R. A., , “*A Multiscale Approach to Production-Data Integration Using Streamline Models.*”, SPE, 2001.
- [49] ZHAO, C., HOBBS, B. E., ORD, A., “*Fundamentals of Computational Geoscience. Numerical Methods and Algorithms.*”, Springer, 2009.
- [50] ZHONG, H., YOON, S., DATTA-GUPTA, A., “*Streamline-Based Production Data Integration With Gravity and Changing Field Conditions.*”, SPE, 2002.