Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Consecuencias de agregar reales de Cohen

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Cepeda Morales Rodrigo Edmundo

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto

Diciembre de 2013

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Cepeda
   Morales
   Rodrigo Edmundo
   55-32-08-48
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   305023331

2. Datos del tutor
   Dr.
   Osvaldo
   Téllez
   Nieto

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Roberto
   Pichardo
   Mendoza

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Ulises Ariet
   Ramos
   García

5. Datos del sinodal 3
   Mat.
   Luis Jesús
   Turcio
   Cuevas

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   David
   Meza
   Alcántara

7. Datos del trabajo escrito
   Consecuencias de agregar reales de Cohen
   69p, 2013

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

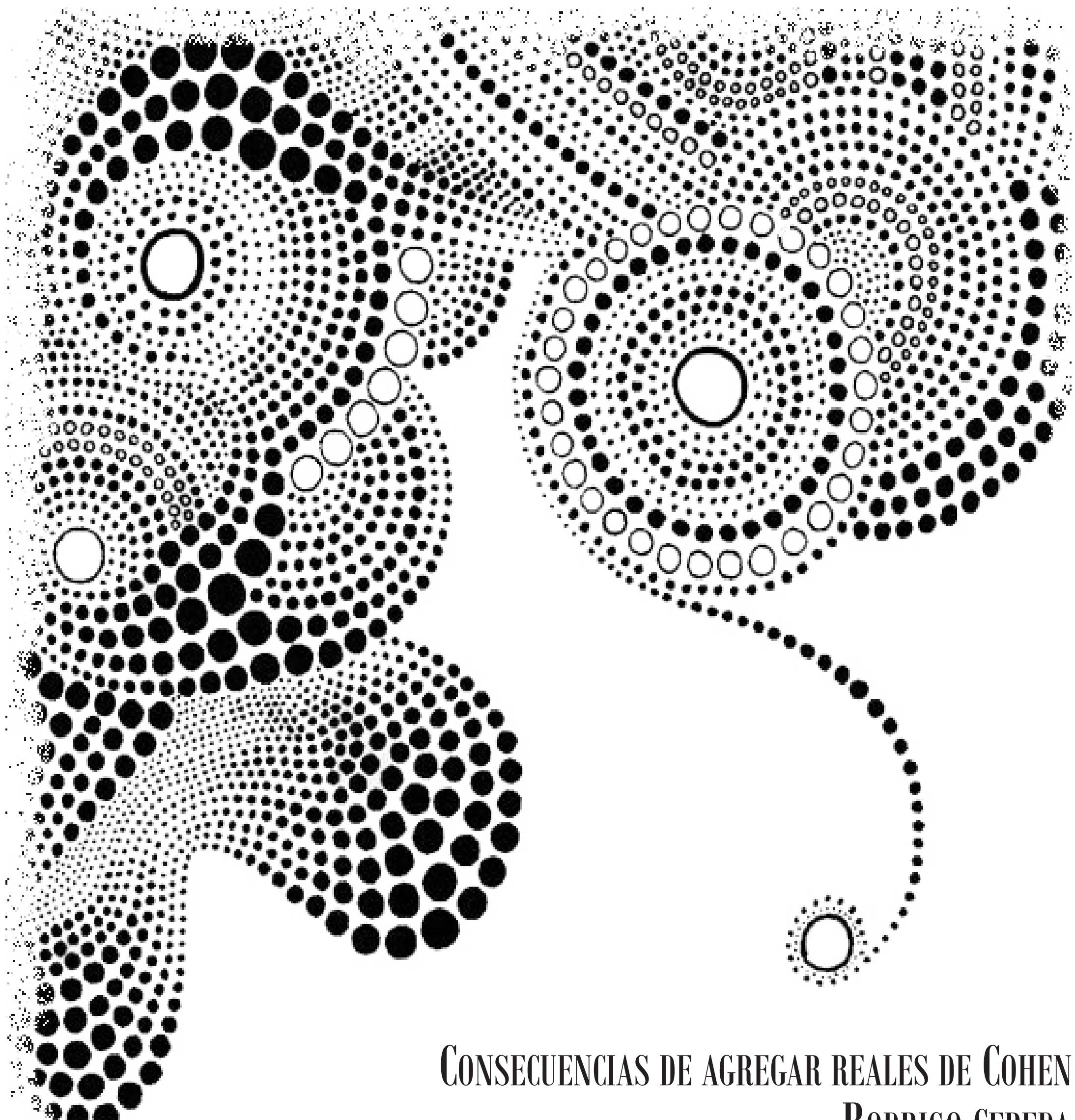
FACULTAD DE CIENCIAS

Consecuencias de agregar reales de Cohen

AUTOR
RODRIGO CEPEDA

DIRECTOR DE TESIS
DR. OSVALDO ALFONSO TÉLLEZ NIETO

APROBADO POR
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA
DR. ULISES ARIET RAMOS GARCÍA
DR. DAVID MEZA ALCÁNTARA
MAT. LUIS JESÚS TURCIO CUEVAS



Consecuencias de agregar reales de Cohen

Rodrigo Cepeda

Aquellos que creen que la axiomática de la Teoría de Conjuntos es consistente, no comprenden que la construcción de lo que hemos acordado que sea un conjunto, es sumamente más complicada que unos cuantos axiomas. Estos tan sólo son una ligera aproximación a los procedimientos matemático-cognitivos. Claro, una aproximación por demás fascinante.

Contenido

Prólogo

Without bearing the historical weight of an earlier turn to logic in set theory and proceeding from "ordinary mathematics" to algebraitize truth and existence together, Cohen was able to cut through to a constuction that actuates a *new way of thinking.* In Kantian terms, Cohen provided an *organon*, an instrument for the generation of new knowledge. [1]

Akihiro Kanamori - "Cohen and Set Theory".

En 1872 G. Cantor, matemático alemán, demostró la no numerabilidad del conjunto de los números reales (denominado el continuo y con cardinalidad denotada por $\mathfrak{c}$). Posteriormente, tras haber probado que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, Cantor conjeturó la famosa *Hipótesis del Continuo* que afirma $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

La Hipótesis del Continuo es un enunciado que resultó ser *independiente* de la axiomática usual de la Teoría de Conjuntos, es decir, ni ella ni su negación pueden ser demostradas a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Para probar que un enunciado es independiente debe demostrarse que son consistentes tanto su negación como su afirmación.

La demostración de la consistencia de la Hipótesis del Continuo fue realizada por K. Gödel en 1938, sin embargo, la otra parte de la independencia es sumamente más interesante, ya que requirió de una nueva técnica llamada *forcing*, debida al matemático estadounidense Paul Joseph Cohen.

En 1963 Paul Cohen, haciendo uso del método de forcing, pudo demostrar la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo. El forcing es una técnica que nos permite, a partir de V, un modelo transitivo y numerable de una parte lo suficientemente amplia de los axiomas de ZFC, obtener $V[G]$, un nuevo modelo transitivo y numerable de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, que a su vez sea extensión de V.

[1] Libre de la carga histórica que habría significado el especializarse tempranamente en lógica y teoría de conjuntos y partiendo de "matemáticas ordinarias" para algebrizar a la vez verdad y existencia, Cohen tuvo la habilidad para arribar prontamente a una construcción que implica una forma nueva de pensar. En términos Kantianos, Cohen produjo un *organon*, un sistema de principios por los cuales puede fundamentarse conocimiento nuevo.

Es natural entender por qué Cohen obtuvo la extensión agregando reales nuevos; el interés inicial era que $V[G]$ no modelase la Hipótesis del Continuo. Estos reales agregados son conocidos como *reales de Cohen,* el presente trabajo pretende ser una adecuada introducción a las consecuencias de agregar reales de Cohen.

Las consecuencias de agregar reales de Cohen no se restringen a la Hipótesis del Continuo, de hecho, cubren un amplio espectro en la matemática. En este trabajo hacemos una selección pertinente de los resultados que se obtienen a partir de agregar reales de Cohen. Nuestra recopilación está basada únicamente en los que creemos que son los temas más representativos.

A fin de que el lector sepa qué esperar de esta tesis, resumiremos el contenido de la misma. El primer capítulo trata de los preliminares; comenzamos con una breve introducción al método de forcing, el lector que conozca su construcción puede omitir la lectura de la sección. En la segunda sección mostramos que algunas propiedades topológicas de 2^ω, visto como un espacio topológico y no como el cardinal $\mathfrak{c}$, pueden ser traducidas a propiedades del conjunto $2^{<\omega}$, es fundamental el estudio de este tema debido a que son frecuentemente utilizados sus resultados a lo largo del texto, en especial cuando caractericemos topológicamente a los reales de Cohen. En la tercera sección se presentan algunos invariantes cardinales utilizados en el tercer capítulo. Para concluir, en la última sección demostramos el Lema del Δ-sistema.

El segundo capítulo presenta con formalidad el forcing de Cohen, a partir del cual se obtiene la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo, después se definen los reales de Cohen, que como es de suponer es la noción central de la tesis.

Posteriormente elegimos cuatro consecuencias principales de agregar reales de Cohen. La primera de ellas es la determinación del tamaño de diversos invariantes cardinales; veremos que existen subconjuntos de números reales cuya cardinalidad es estrictamente mayor que ω, pero que también es estrictamente menor que $\mathfrak{c}$.

El segundo tema que trabajamos es el Axioma de Martin, resulta que este axioma no se cumple en la extensión de Cohen, sin embargo, restringiremos este axioma a cierta clase de ordenes parciales, el axioma restringido será cierto en el modelo de Cohen.

En el Capítulo 5 exhibiremos la construcción, en el modelo de Cohen, de un árbol de Suslin, la hipótesis que niega su existencia resultó ser otro enunciado independiente de la Teoría de Conjuntos.

La última consecuencia que trabajamos en el texto es la consistencia de la negación de la Conjetura de Borel, esta sección es un ejemplo de las aplicaciones de los reales de Cohen a problemas del Análisis Clásico. Además, mostramos dos maneras distintas de trabajar con los reales de Cohen.

Para que el estudio de este trabajo sea provechoso se requiere que el lector posea cierta madurez matemática, además de dominar las nociones básicas de la Teoría de Conjuntos, tales como ordinales y cardinales. Para tener solvencia en el tema invitamos a consultar [Al07] y [Hz03]. De igual manera, para el Capítulo 6, se requerirá conocer algunos conceptos básicos del Análisis Matemático, el texto clásico al que remitimos es [Ru76].

Debo agradecer la culminación de este trabajo, en primera instancia, a mi tutor el Dr. Osvaldo Téllez Nieto, mi primer profesor de forcing y con quien comencé a trabajar esta tesis. Además, me dio la oportunidad de servir como su ayudante en la Facultad de Ciencias. Mi labor académica está íntimamente relacionada con la elaboración de este texto.

De igual manera agradezco a mi sinodales, cuyas observaciones dieron mejor vista a mi trabajo: David Meza Alcántara, Ulises Ariet Ramos García y Luis Jesús Turcio Cuevas. También debo mencionar a Osvaldo Guzmán González quien desinteresadamente me otorgó los primeros comentarios acerca de esta tesis.

La motivación para mejorar este trabajo la obtuve gracias a mi compañero Alonso Lenin Celis. Durante el estudio de la excelente tesis que elaboró Lenin, comprendí que mi objetivo era entregar una referencia útil para mis compañeros del área.

Deseo expresar un especial agradecimiento al Dr. Roberto Pichardo Mendoza, pues trascendiendo su papel de sinodal y dedicándome cuantioso tiempo y esfuerzo, contribuyó significativamente para que este trabajo no haya sido tan sólo un tramite académico.

Rodrigo Cepeda - Ciudad Universitaria, Diciembre 2013.

Capítulo I

Preliminares de Forcing, Topología y Combinatoria Infinita

1.1. Forcing

El método de forcing es una técnica general para producir una gran variedad de modelos de la teoría usual de conjuntos que satisfagan diversas propiedades.

En términos generales, el forcing consiste en comenzar con un modelo transitivo V, de una parte lo suficientemente grande de ZFC, que satisfaga una cantidad suficiente de axiomas y a partir de él construir una extensión del mismo que cumpla ciertos enunciados.

Nosotros podemos considerar un modelo transitivo y numerable, V, de cualquier lista finita de axiomas de ZFC. Un modelo de cada uno de los axiomas de ZFC no es posible construirlo dentro de ZFC en virtud del Segundo Teorema de Incompletud de Gödel. A V lo llamaremos *modelo base*.

En este capítulo haremos la construcción de este modelo transitivo N de ZFC, tal que $V \subseteq N$ y $ON \cap N = ON \cap V$, (ON es la clase de todos los ordinales). Una N obtenida de este modo la llamaremos *extensión genérica de V*.

El lector que conozca la construcción del modelo por forcing puede omitir la lectura de esta sección.

A lo largo de nuestro texto V será un modelo transitivo y numerable de un fragmento amplio de los axiomas de ZFC.

Definición 1.1. *Un* orden parcial *es una pareja* $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ *tal que* $\mathbb{P} \neq \emptyset$ *y* $\leqslant$ *es una relación en* $\mathbb{P}$ *que es reflexiva y transitiva.*

Ésta no es la definición usual de orden parcial, sin embargo, a lo largo de este texto será la que utilizaremos.

Cuando $p \leqslant q$ diremos que p *extiende* a q.

Definición 1.2. *Diremos que* p *y* q *son* incompatibles *si sucede que no existe* $r \in \mathbb{P}$ *tal que* $r \leqslant p$ *y* $r \leqslant q$. *Denotaremos este hecho con* $p \perp q$.

Definición 1.3. *Por* noción de forcing *entenderemos una terna* $\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle$ *donde* $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ *es un orden parcial y* $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ *es el elemento máximo de* $\mathbb{P}$, *es decir, para todo* $p \in \mathbb{P}$ *se tiene que* $p \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$.

Haremos algunos abusos de notación: escribiremos $\mathbb{P}$ cuando nos refiramos a $\langle \mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle$. En consecuencia, $\mathbb{P} \in V$ significará que $\mathbb{P} \in V$, $\leqslant \in V$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in V$.

A los elementos de $\mathbb{P}$ les llamaremos *condiciones*.

Definición 1.4. *Sean* $\mathbb{P}$ *una noción de forcing ,* $D \subseteq \mathbb{P}$ *y* $p_0 \in \mathbb{P}$, *entonces,*

1) Diremos que D *es* denso *en* $\mathbb{P}$ *si para todo* $p \in \mathbb{P}$ *existe* $q \in D$ *tal que* $q \leqslant p$.

2) Diremos que D *es* denso por debajo de p_0 *si para todo* $r \leqslant p_0$, *existe* $d \in D$ *tal que* $d \leqslant r$.

Definición 1.5. *Sea* $\mathbb{P}$ *una noción de forcing y* $G \subseteq \mathbb{P}$. *Diremos que* G *es un* filtro *en* $\mathbb{P}$ *si:*

(a) Para todo $p, q \in G$ *existe* $r \in G$ *tal que* $r \leqslant p$ *y* $r \leqslant q$.

(b) Para todo $p \in G$ *y para todo* $q \in \mathbb{P}$ *si sucede que* $p \leqslant q$ *entonces* $q \in G$.

Definición 1.6. *Sea* $\mathbb{P}$ *una noción de forcing.* G *es* $\mathbb{P}$-genérico *sobre* V *si* G *es un filtro en* $\mathbb{P}$ *y para cualquier denso* $D \subseteq \mathbb{P}$ *que* *pertenezca al modelo base, se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$.*

El primer resultado que demostraremos, el cual es conocido como el Lema de Rasiowa-Sikorski, muestra la importancia de que V sea numerable; siempre podremos encontrar un filtro G que sea $\mathbb{P}$-genérico sobre V y que contenga a un elemento dado de $\mathbb{P}$.

Lema 1.7. *Sean $\mathbb{P} \in V$ y $p \in \mathbb{P}$. Existe un filtro G el cual es $\mathbb{P}$-genérico sobre V y tal que $p \in G$.*

Prueba: Debido a que V es numerable, contiene a lo más una cantidad numerable de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$. Sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ una enumeración de todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que son elementos de V. Observemos que $\mathbb{P}$ siempre es denso en sí mismo y, por ende, siempre hay un denso en $\mathbb{P}$ que es elemento de V.

Definamos por recursión sobre ω una sucesión $\{p_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{P}$ de la siguiente manera:

Sea $p_0 \in D_0$ tal que $p_0 \leqslant p$. Esto es posible, pues D_0 es denso en $\mathbb{P}$. Supongamos definido p_n y sea $p_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leqslant p_n$.

Sea G el filtro generado por $\{p_n : n \in \omega\}$, es decir,

$$G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n\, (p_n \leqslant q)\},$$

tenemos en consecuencia que G es un filtro con $p \in G$ y además para toda $n \in \omega$, $G \cap D_n \neq \emptyset$. $\boxtimes$

Como mencionamos, a lo largo de nuestro texto, V será un modelo numerable de un fragmento amplio de los axiomas de ZFC, es decir, para cada proposición que demostremos, V será modelo numerable de los axiomas de la Teoría de Conjuntos requeridos para la prueba en cuestión.

A continuación mostraremos una condición tal que si una noción de forcing la cumple, entonces los filtros $\mathbb{P}$-genéricos no pertenecen a V.

Definición 1.8. *Sean $\mathbb{P}$ una noción de forcing y $p \in \mathbb{P}$. Diremos que p es un* átomo *si no existen $q, r \in \mathbb{P}$ tales que $r, q \leqslant p$ y $q \perp r$.*

Diremos que $\mathbb{P}$ es no atómico *si no tiene átomos, es decir, para todo $p \in \mathbb{P}$ existen $q, r \in \mathbb{P}$ extensiones de p tales que $q \perp r$.*

Lema 1.9. *Sean $\mathbb{P} \in V$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V. Si $\mathbb{P}$ es no atómico, entonces $G \notin V$.*

Prueba: Supongamos lo contrario para obtener una contradicción, es decir, supongamos que $G \in V$. Esto implica que $D = (\mathbb{P} \setminus G) \in V$.

Afirmamos que D es denso. Sea $p \in \mathbb{P}$ y $q, r \leqslant p$ tales que $q \perp r$. Entonces q, r no pueden estar los dos en G, ya que G es un filtro, por lo que p tiene una extensión en D. Además, $G \cap D = \emptyset$, entonces G no es $\mathbb{P}$-genérico sobre V. ⊠

Lema 1.10. *Sean $\mathbb{P} \in V$ y $E \subseteq \mathbb{P}$ con $E \in V$. Entonces para cualquier G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V se cumplen:*

1) $G \cap E \neq \emptyset$ ó existe $q \in G$ tal que $r \perp q$ para todo $r \in E$.

2) Si $p \in G$ y E es denso por debajo de p, entonces $G \cap E \neq \emptyset$.

Prueba: Para demostrar el inciso (1) definamos $D = E_0 \cup E_1$, donde

$$E_0 = \{r \in \mathbb{P} : \forall x \in E\,(x \perp r)\} \text{ y } E_1 = \{r \in \mathbb{P} : \exists x \in E\,(r \leqslant x)\}.$$

Afirmamos que D es denso en $\mathbb{P}$. Efectivamente, sea $p \in \mathbb{P}$. Si sucede que $p \in E_0$ hemos terminado debido a que siempre se tiene que $p \leqslant p$. Si por el contrario $p \notin E_0$, entonces existe $x_0 \in E$ de tal modo que x_0 y p son compatibles, sea pues $q_0 \in \mathbb{P}$ de tal forma que $q_0 \leqslant p, x_0$. Por lo tanto $q_0 \in E_1$, esto asegura la densidad de D debido a que q_0 extiende a p.

Observemos que D es elemento de V pues todas las variables libres de la fórmula que lo define también son elementos de V. Como G es $\mathbb{P}$-genérico sobre V, $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap D$. Si $p \in E_1$, se sigue que $p \leqslant r$ para algún $r \in E$, pero al ser G filtro tenemos que $r \in G$. Esto es $G \cap E \neq \emptyset$. Por otra parte, si $p \in E_0$, el resultado se sigue de manera inmediata.

Demostremos ahora el inciso (2). Supongamos, buscando una contradicción, que para alguna $p \in G$ con E denso por debajo de p, sucede que $G \cap E = \emptyset$. Por el inciso (1), existe $q \in G$ de tal manera que q es incompatible con cada elemento de E. Pero G es un filtro, así que $t \in G$ tal que $t \leqslant p, q$. Puesto que E es denso por debajo de p, $r \leqslant t$ para alguna $r \in E$, de donde $r \leqslant q$, lo cual es una contradicción pues q es incompatible con r. ⊠

Nuestro interés es construir otro modelo transitivo numerable para ZFC, llamado $V[G]$, que satisfará que $V \subseteq V[G]$, $ON \cap V = ON \cap V[G]$ y $G \in V[G]$.

$V[G]$ será la mínima extensión de V que sea modelo transitivo numerable de ZFC y que contenga a G.

Observamos, a partir del Lema 1.9, que $G \in V[G]$ implicará que $V \neq V[G]$ en las extensiones obtenidas por nociones de forcing no atómicas.

Cada elemento de $V[G]$ tendrá un *nombre* en V que nos dirá cómo fue construido a partir de G.

Formalizando lo anterior enunciamos la siguiente definición recursiva.

Definición 1.11. *τ es un* $\mathbb{P}$-nombre *si τ es una relación binaria y para todo $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$ se tiene que σ es un* $\mathbb{P}$-nombre *y $p \in \mathbb{P}$.*

Para ejemplos de la definición anterior ver [Ku80, VII.2].

Denotaremos con $\mathsf{V}^{\mathbb{P}}$ a la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres, además si V es un modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{P} \in V$, entonces $V^{\mathbb{P}}$ será igual a la intersección de $\mathsf{V}^{\mathbb{P}}$ y V. Notemos que $V^{\mathbb{P}} \subseteq V$.

La idea subyacente de esta definición es hacer una descripción parcial de un conjunto de la extensión que pretendemos construir.

Definición 1.12. *Si $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ y $G \subseteq \mathbb{P}$, entonces definimos por recursión*

$$val(\tau, G) = \{val(\sigma, G) : \exists p \in G (\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}.$$

Otra forma en la que denotaremos $val(\tau, G)$ será τ_G.

Definición 1.13. *Si $\mathbb{P} \in V$ y $G \subseteq \mathbb{P}$, entonces definimos $dom(\tau) = \{\sigma : \exists p (\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$ y*

$$V[G] = \left\{\tau_G : \tau \in V^{\mathbb{P}}\right\}.$$

Veamos que $V[G]$ es la mínima extensión que extiende a V y contiene a G.

Cuando denotemos φ^V nos referiremos a la relativización de la fórmula φ con respecto a V. Para detalles sobre relativización de fórmulas invitamos a consultar [Ku80, IV.2].

Lema 1.14. *Si N es un modelo transitivo de ZFC con $V \subseteq N$ y $G \in N$, entonces $V[G] \subseteq N$.*

Prueba: Si $x \in V[G]$ entonces $x = \sigma_G$ para cierto $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$. Como $\sigma, G \in N$, concluimos que $x = \sigma_G = (\sigma_G)^N \in N$. ⊠

Hacemos hincapié en que la última parte de la prueba anterior utilizamos: $\sigma_G = (\sigma_G)^N$ para modelos transitivos de ZFC.

Observemos que $val(\{\langle \sigma_i, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle : i \in I\}, G) = \{val(\sigma_i, G) : i \in I\}$, donde $\sigma_i \in V^{\mathbb{P}}$ para toda $i \in I$. A partir de esto podemos afirmar que cada $x \in V$ es representado de forma canónica por un nombre. Denotaremos a este nombre por $\check{x}$. Así justificamos la siguiente definición.

Definición 1.15. *Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing. Definimos el $\mathbb{P}$-*nombre canónico *para $x \in V$ de manera recursiva por:*

$$\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle : y \in x\}.$$

Lema 1.16. *Si $\mathbb{P}$ una noción de forcing en V y G un filtro no vacío en $\mathbb{P}$, entonces:*

(a) Para todo $x \in V$ se tiene que $\check{x} \in V^{\mathbb{P}}$ y además $x = \check{x}_G$.
(b) $V \subseteq V[G]$.

Prueba: La demostración del primer enunciado es por $\in$-inducción y la del segundo es consecuencia inmediata de (a). ⊠

Para probar que $G \in V[G]$ construiremos un nombre que lo represente. Para este propósito enunciamos la siguiente definición.

Definición 1.17. *Si $\mathbb{P}$ es una noción de forcing, definimos:*

$$\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}.$$

Lema 1.18. *Bajo las hipótesis del lema anterior, $\Gamma_G = G$.*

Prueba: $\Gamma_G = \{(\check{p})_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$. ⊠

Resulta ser que $V[G]$ es un modelo transitivo y numerable de ZFC, sin embargo, no es del interés de esta tesis probar este hecho. Para las demostraciones detalladas referimos al lector a [Ku80, VII.4.2].

Para concluir esta sección definiremos la noción de *forzar*, que es la base de las demostraciones de los siguientes capítulos.

Definición 1.19. *Sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula con las variables libres indicadas. Sean $\mathbb{P}$ una noción de forcing en V y $\tau_1, ..., \tau_n \in V^{\mathbb{P}}$. Decimos que p* fuerza *φ ($p \Vdash$"$\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$") si para todo G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, y $p \in G$, se tiene que*

$$V[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G).$$

Donde $\models$ denota la noción de satisfacción usual para un modelo y una fórmula.

El siguiente resultado es fundamental en el desarrollo de la teoría de extensiones genéricas, sin embargo, la demostración no aporta nada relevante al desarrollo de nuestro texto. Para una demostracción del mismo ver [Ku80, VII.3.6].

Teorema 1.20. *Sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula con las variables libres indicadas. Sean $\mathbb{P} \in V$, una noción de forcing, y $\tau_1, ..., \tau_n \in V^{\mathbb{P}}$.*

Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, entonces

$$V[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G) \text{ si y sólo si existe } p \in G \text{ tal que } p \Vdash\text{“}\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\text{”}.$$

El teorema anterior también es conocido como el *Lema de Forcing*.

A partir de ahora aplicaremos el Lema de Forcing de la siguiente manera: si queremos probar que $V[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G)$, bastará con que demostremos que existe $p \in G$ tal que $p \Vdash$"$\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$".

Para mostrar la existencia de dicho p utilizaremos que G es $\mathbb{P}$-genérico, es decir, que intersecta a todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que son elementos de V, por lo tanto nos bastará mostrar que:

$\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \text{“}\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\text{”}\}$ es denso y que es elemento de V.

Ahora daremos un resultado que será necesario cuando trabajemos con elementos de $\check{\omega}$. Omitimos su prueba; ésta puede verse en [Ku80, VII.3.7].

Teorema 1.21. *Sean $\mathbb{P} \in V$ y $\dot{X}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$. Sea $\varphi(y_0, ..., y_n)$ una fórmula cuyas variables libres son $y_0, ..., y_n$. Si $p \in \mathbb{P}$ y*

$$p \Vdash \text{“}\exists x(x \in \dot{X} \ \&\ \varphi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”} ,$$

entonces existen $r \in \mathbb{P}$ y $\dot{x} \in dom\left(\dot{X}\right)$ de tal modo que $r \leqslant p$ y $r \Vdash \text{“}\varphi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”}$.

Corolario 1.22. *Sean $\mathbb{P}, x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n$ y $\varphi(y_0, ..., y_n)$ como en el teorema anterior. Si $p \in \mathbb{P}$ y*

$$p \Vdash \text{“}\exists x(x \in \check{\omega} \ \&\ \varphi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”} ,$$

entonces existen $r \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$ de tal modo que $r \leqslant p$ y

$$r \Vdash \text{“}\varphi(\check{n}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”}.$$

Prueba: Se sigue del Teorema 1.21 que existen $r \in \mathbb{P}$ y $\dot{x} \in dom(\check{\omega})$ de modo que $r \leqslant p$ y $r \Vdash \text{“}\varphi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”}$. Luego, sabemos que $\check{\omega} = \{(\check{n}, \emptyset) : n \in \omega\}$, de modo que $\dot{x} \in dom(\check{\omega})$ implica $\dot{x} = \check{n}$ para algún $n \in \omega$. Por lo tanto, $r \Vdash \text{“}\varphi(\check{n}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”}$. ⊠

Hemos dado los preliminares del método de forcing, sin embargo, debemos recordar una última vez que este trabajo no es acerca del desarrollo de este método. Lo que nosotros trataremos son las consecuencias de agregar *reales de Cohen*, que serán definidos en el Capítulo 2.

Concluiremos esta sección con un resultado útil, el *Lema de Congruencia*, en el cual hacemos un inofensivo abuso de notación.

Lema 1.23. *Sean $p, q \in \mathbb{P}$ si $p \Vdash \text{“}\varphi\text{”}$ y $q \leqslant p$, entonces $q \Vdash \text{“}\varphi\text{”}$.*

Prueba: Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V tal que $q \in G$. Como por hipótesis $q \leqslant p$ y debido a que suponemos que G es filtro, se tiene que $p \in G$, entonces $V[G] \models \varphi$ pues $p \Vdash \text{“}\varphi\text{”}$ y por lo tanto $q \Vdash \text{“}\varphi\text{”}$. ⊠

1.2. Nociones Básicas de la Topología de 2^ω.

En esta sección presentaremos algunas nociones básicas de topología que serán útiles en capítulos posteriores.

Mostraremos que algunas propiedades topológicas de 2^ω pueden ser traducidas a propiedades combinatorias del conjunto numerable $2^{<\omega}$, tales como conjunto cerrado y conjunto denso en ninguna parte.

Definición 1.24. 2^ω *es el conjunto de todas la funciones de* ω *en* 2*,*

$$2^\omega = \{0,1\}^\omega = \{f : f \ es \ función \ \& \ f : \omega \to \{0,1\}\}$$

A partir de ahora consideraremos a 2^ω como espacio topológico: $2 = \{0,1\}$ tendrá la topología discreta y 2^ω la topología producto.

Definición 1.25. *Le llamaremos* $2^{<\omega}$ *al conjunto de sucesiones finitas en 2, es decir,*

$$2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n,$$

donde 2^n *son las sucesiones en* 2 *con dominio* n*.*

Para cada sucesión $s \in 2^{<\omega}$ *le llamaremos* longitud *de* s *a su dominio.*

Definición 1.26. Sea $A \subseteq 2^{<\omega}$*. Diremos que* A *es un* árbol *si para todo* $s \in A$ *y* $n \leqslant |s|$[2] *se tiene que* $s \restriction_n \in A$*.*

Definición 1.27. *Una* rama *en un árbol* A *es una sucesión* $x \in 2^\omega$ *tal que para todo* $n \in \omega$ *se sigue que* $x \restriction_n \in A$*.*

Representaremos con $[A]$ al conjunto de todas las ramas en el árbol A, es decir,

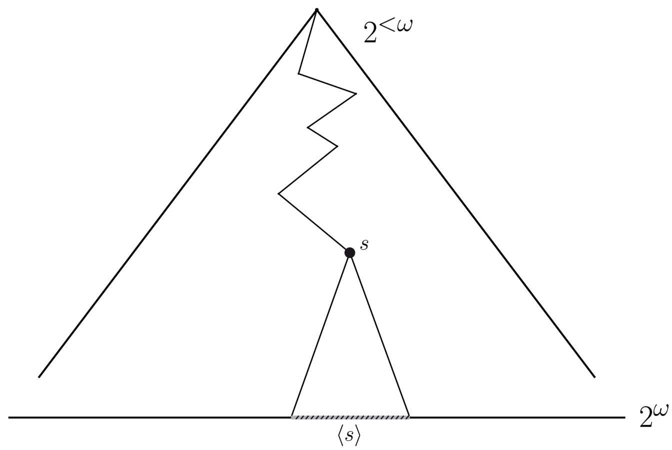
$$[A] = \{x \in 2^\omega : \forall n \in \omega \, (x \restriction_n \in A)\}.$$

Definición 1.28. *Sean* A *un árbol y* $s \in A$*. El* cono *de* s *está definido por:*

$$\langle s \rangle = \left\{x \in 2^\omega : x \restriction_{|s|} = s\right\}$$

[2]Si $s \in 2^\omega$, entonces $|s|$ coincide con el dominio de s pues estamos suponiendo que $s \subseteq \omega \times 2$.

El cono de s



Equivalentemente, $\langle s\rangle = \{x \in 2^\omega : s \subseteq x\}$.

Observemos que el conjunto $\{\langle s\rangle : s \in 2^{<\omega}\}$ es una base de vecindades de 2^ω.

El siguiente teorema es una herramienta útil para caracterizar a los conjuntos cerrados de 2^ω.

Lema 1.29. *$X \subseteq 2^\omega$ es cerrado si y sólo si existe un árbol $A \subseteq 2^{<\omega}$ tal que $[A] = X$.*

Prueba. Sea A un árbol. Demostraremos que si $[A] = X$, entonces X es cerrado. Equivalentemente, mostraremos que $2^\omega \setminus X$ es abierto.

Sea $x \in 2^\omega \setminus X$. Entonces existe un $n \in \omega$ tal que $x \restriction_n \notin A$. Sea $B = \langle x \restriction_n\rangle$. Luego, para todo $y \in B$, $y \restriction_n = x \restriction_n \notin A$ y por lo tanto $y \notin X$, es decir, $B \subseteq 2^\omega \setminus X$, entonces $2^\omega \setminus X$ es abierto y en consecuencia X es cerrado.

Por otro lado, supongamos que $X \subseteq 2^\omega$ es un conjunto cerrado. Sea

$$A = \{x \restriction_n : x \in X \ \&\ n \in \omega\},$$

es claro que A es un árbol contenido en $2^{<\omega}$.

Veamos que $[A] = X$, para lo cual probaremos que $[A] \subseteq X$, (la otra contención se sigue de la definición de A).

Sea $x \in [A]$. Mostraremos que $x \in \bar{X}$ y como X es cerrado, se obtendrá el resultado. Para mostrar que $x \in \bar{X}$ sea $s \in 2^\omega$ tal que $\langle s \rangle$ es vecindad de x, es decir, $x \in \langle s \rangle$, equivalentemente $x \restriction_{|s|} = s$.

Ahora, como $x \in [A]$ se sigue que $x \restriction_{|s|} \in A$ y por lo tanto existe $y \in X$ tal que $y \restriction_{|s|} = x \restriction_{|s|} = s$. Entonces $y \in \langle s \rangle$, lo cual significa que toda vecindad de x contiene elementos de X, es decir, $x \in \bar{X}$. ⊠

Recordemos la siguiente definición básica de topología general.

Definición 1.30. *Sea X un espacio topólogico y $A \subseteq X$. Decimos que A es* denso en ninguna parte *(nwd, por sus siglas en inglés) si int $\left(\overline{A}\right) = \emptyset$.*

Ahora continuaremos con una definición referente a árboles más que a topología.

Definición 1.31. *Un árbol $A \subseteq 2^{<\omega}$ es* no denso *si para todo $s \in A$ existe $t \in 2^{<\omega}$ tal que $t \restriction_{|s|} = s$ y además $t \notin A$. ND es la abreviatura correspondiente.*

Aclaramos que no estamos tratando a $2^{<\omega}$ como espacio topológico sino como conjunto; la definición de *no denso* corresponde a una propiedad de los árboles.

Enunciamos otro teorema que de igual manera que el anterior será de gran utilidad en el siguiente capítulo. Éste relaciona de manera adecuada la noción de no denso con la de denso en ninguna parte.

Teorema 1.32. *$X \subseteq 2^\omega$ es cerrado nwd si y sólo si existe un árbol $A \subseteq 2^{<\omega}$, tal que A es ND y $[A] = X$.*

Prueba. Supongamos que X es cerrado *nwd*. Por el lema anterior existe un árbol $A \subseteq 2^{<\omega}$, tal que $[A] = X$.

Afirmamos que A es ND. En efecto, sea $s \in A$. Ya que X es *nwd*, tenemos que $\langle s \rangle \nsubseteq \bar{X} = X$, por lo que existe $x \in \langle s \rangle$ tal que $x \notin X = [A]$. En consecuencia existe $m \in \omega$ tal que $x \restriction_m \notin A$. Observemos que $m > |s|$, pues A es un árbol.

Sea $t = x \restriction_m$. Entonces $t \notin A$ porque $x \restriction_m$ no es elemento de A.

Por otro lado, supongamos $X = [A]$, donde A es árbol ND. En virtud del lema anterior basta que veamos que X es *nwd*.

Sea $s \in A$. Demostraremos que $\langle s \rangle \nsubseteq X$. Para ello consideremos $x \in 2^\omega$ de tal manera que $x \upharpoonright_{|t|} = t$, donde t es tal que $t \upharpoonright_{|s|} = s$ y $t \notin A$. Se tiene que $x \upharpoonright_{|s|} = t \upharpoonright_{|s|} = s$, por lo tanto $x \in \langle s \rangle$; sin embargo, $x \notin [A]$ porque A es árbol. Esto muestra que $\langle s \rangle \nsubseteq X$. ⊠

1.3. Invariantes Cardinales del Continuo

Históricamente, uno de los resultados clásicos que sobresale de la Teoría de Conjuntos es aquel que afirma $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, es decir, que la cardinalidad del continuo es estrictamente mayor que la del conjunto de los números naturales. Esta distinción entre los cardinales ω y $\mathfrak{c}$ encontró rápidamente aplicaciones en el Análisis Real donde los conjuntos numerables tiene muchas propiedades que no pueden ser extendidas a conjuntos de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Es bien conocido que $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ y que $|\mathbb{N}| < |\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. La primera pregunta que surge es sobre la existencia de subconjuntos de números reales cuya cardinalidad sea mayor que $\aleph_0$ y menor que $\mathfrak{c}$. La respuesta es trivial si se asume la Hipótesis del Continuo. Sin embargo, utilizando técnicas de *forcing* podemos construir modelos donde existan subconjuntos de reales cuya cardinalidad sea mayor que la de ω pero menor que la del continuo.

Decimos que κ cardinal es un *invariante cardinal del continuo*, si es definible en ZFC y satisface que $\aleph_1 \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$. A continuación presentamos algunos invariantes cardinales que trabajaremos en el Capítulo 3.

Los primeros invariantes cardinales están en términos de funciones de ω en ω.

Definición 1.33. *Dadas dos funciones $f, g \in \omega^\omega$, escribiremos $f \leqslant^* g$ si existe $m \in \omega$ tal que para toda $n \geqslant m$, se tiene que $f(n) \leqslant g(n)$.*

Definición 1.34. *Una familia $\mathcal{D} \subseteq \omega^\omega$ es* dominante *si para cada $f \in \omega^\omega$ existe una $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leqslant^* g$.*

El número de dominación $\mathfrak{d}$ *es la mínima cardinalidad de una familia dominante,*

$$\mathfrak{d} = \textit{mín}\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \textit{ es dominante}\}.$$

Es bastante sencillo probar que existe una familia dominante, basta que consideremos $\mathcal{D} = \omega^\omega$, debido a que toda función de ω en ω es dominada por sí misma.

Esto nos asegura que $\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \textit{ es dominante}\}$ es una colección no vacía. Por lo tanto, en virtud del Principio del Mínimo Ordinal, $\mathfrak{d}$ existe. Esta es la técnica que utilizaremos para garantizar la existencia de los invariantes cardinales de la sección.

Definición 1.35. *Una familia $\mathcal{B}$ es* no acotada *si no existe $f \in \omega^\omega$ tal que $g \leqslant^* f$ para toda $g \in \mathcal{B}$.*

El número de acotamiento $\mathfrak{b}$ *es la mínima cardinalidad de una familia no acotada,*

$$\mathfrak{b} = \textit{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \textit{ es no acotada}\}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{B} = \omega^\omega$ es una familia no acotada. Para $f \in \omega^\omega$, $f + 1 \nleqslant^* f$. En consecuencia, $\mathfrak{b}$ existe.

El conjunto $[\omega]^\omega = \{x \subseteq \omega : |x| = \omega\}$ nos sirve para definir otros invariantes cardinales del continuo. Para el primero de ellos, introducimos el siguiente orden.

Dados $A, B \in \wp(\omega)$, diremos que $A \subseteq^* B$ si $|A \setminus B| < \omega$. Se cumple que $[\omega]^\omega$ es un conjunto parcialmente ordenado con respecto a $\subseteq^*$. También diremos que $A =^* B$ si $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$.

Definición 1.36. *Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es* casi ajena *si $A \cap B =^* \emptyset$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$.*

Si $\mathcal{A}$ es casi ajena y maximal con respecto a la contención en la colección de todas las familias casi ajenas, diremos que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal*. MAD es la abreviatura correspondiente.*[3]

A la mínima cardinalidad de una familia MAD la denotamos con $\mathfrak{a}$, es decir,

$$\mathfrak{a} = \textit{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \textit{ es MAD}\}.$$

[3]Tomada del idioma inglés: *Maximal Almost Disjoint*

Para asegurar la existencia de $\mathfrak{a}$ precisamos de una importante equivalencia del Axioma de Elección conocida como el Lema de Tukey-Teichmüller. Invitamos a consultar la demostración de este resultado en [Hz03, 8.8] .

Definición 1.37. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Diremos que $\mathcal{F}$ es una* familia de carácter finito *si para cada conjunto A, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A pertenece a $\mathcal{F}$.*

Lema 1.38. *Toda familia no vacía de carácter finito tiene un elemento maximal con respecto a la inclusión.*

Teorema 1.39. *Existe una familia MAD.*

Prueba: Sea $\mathcal{A} = \{A : A\ es\ familia\ casi\ ajena\}$. Observemos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ debido a que $\emptyset \in \mathcal{A}$ por vacuidad. Para encontrar una familia casi ajena maximal necesitaremos demostrar que $\mathcal{A}$ es de carácter finito.

Por un lado, sea $A \in \mathcal{A}$. Es un inmediato comprobar que todo subconjunto finito de A es familia casi ajena.

Probemos la implicación restante. Sea B, tal que $[B]^{<\omega} \subseteq \mathcal{A}$. Vamos a demostrar que $B \in \mathcal{A}$. Sea $x \in B$, debemos mostrar que x es un subconjunto infinito de ω, en efecto, $\{x\} \in [B]^{<\omega}$, entonces $\{x\} \in \mathcal{A}$. Esto es, $\{x\} \subseteq [\omega]^{\omega}$. Por último veamos que cualesquiera dos elementos de B son casi ajenos. Sean $x, y \in B$ distintos. Como $\{x, y\} \in \mathcal{A}$, se sigue que $\{x, y\}$ es familia casi ajena. Por tanto, $|x \cap y| < \omega$. ⊠

Definición 1.40. *Sean $A, B \in [\omega]^{\omega}$. Diremos que A* parte *a B si $|A \cap B| = |B \setminus A| = \aleph_0$. En otro caso diremos que A* no parte *a B.*

Otro invariante definido con base en el conjunto $[\omega]^{\omega}$ es $\mathfrak{s}$.

Definición 1.41. *$\mathcal{S} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es* "splitting" *si para todo $A \in [\omega]^{\omega}$ existe $S \in \mathcal{S}$ tal que S parte a A.*

$$\mathfrak{s} = mín\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S}\ es\ splitting\}.$$

Dado A, conjunto numerable, es sencillo construir B subconjunto de A de tal manera que $|A \setminus B| = \omega$. Para llevar a cabo este procedimiento consideremos f, biyección de ω en A. Bastará si definimos

$$B = \{f(m) : m = 2n \ \& \ n \in \omega\}.$$

Teniendo presente la construcción anterior, es inmediato probar que $[\omega]^\omega$ es splitting.

Las siguientes definiciones sirven para establecer el número de pseudointersección.

Definición 1.42. *Sea $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$. Decimos que $X \in [\omega]^\omega$ es una* pseudointersección *de $\mathcal{F}$ si $X \subseteq^* F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.43. *Una familia $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ será llamada* torre *si $(\mathcal{T}, \supseteq^*)$ es un conjunto bien ordenado y $\mathcal{T}$ no tiene pseudointersecciones.*

$$\mathfrak{t} = mín\{|\mathcal{T}| : \mathcal{T} \text{ es una torre}\}$$

Teorema 1.44. *Existe una torre.*

Prueba: Consideremos $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración sin repeticiones de $[\omega]^\omega$.

Probaremos inductivamente que existe $\mathcal{T} = \{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ para alguna $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$, de tal manera que cumple lo siguiente:

(1) Para cada $\alpha < \kappa$, $\mathcal{A}_\alpha \nsubseteq^* T_\alpha$
(2) Para $\alpha, \beta < \kappa$, si $\beta < \alpha$, entonces $T_\alpha \subseteq^* T_\beta$.

Para el paso base, consideremos una partición de $\mathcal{A}_0$ en dos conjuntos infinitos y definamos T_0 como uno de ellos. Con esto se cumple la propiedad (1) para T_0 y $\mathcal{A}_0$, la propiedad (2) se cumple por vacuidad.

Supongamos que para $\alpha < \mathfrak{c}$ hemos construido $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ que cumple las propiedades (1) y (2).

Si $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ no tiene pseudointersección, entonces es una torre y podemos detener la construcción. En este caso $\kappa = \alpha < \mathfrak{c}$.

Por otro lado, si existe $S \in [\omega]^\omega$ tal que $S \subseteq^* T_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, entonces consideramos dos casos:

Caso 1: Si $\mathcal{A}_\alpha \nsubseteq^* S$, en tal caso hacemos $T_\alpha = S$. Observemos que se cumplen (1) y (2).

Caso 2: Si $\mathcal{A}_\alpha \subseteq^* S$, consideremos un conjunto infinito $B \in [\mathcal{A}_\alpha]^\omega$ tal que $|\mathcal{A}_\alpha \setminus B| = \omega$ y definamos $T_\alpha = B$. Nuevamente se cumplen (1) y (2).

En este caso $\{T_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una torre. En efecto, por construcción se cumple que está bien ordenado por $\supseteq^*$, pues la condición (2) induce un isomorfismo de $\mathfrak{c}$ en $\{T_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, y para cualquier $S \in [\omega]^\omega$ existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $S = \mathcal{A}_\alpha$. Por lo tanto, $S \nsubseteq^* T_\alpha$. En otras palabras, S no es pseudointersección para $\mathcal{T}$. ⊠

En el Capítulo 3 estudiaremos la relación del siguiente invariante cardinal del continuo con una variación del Axioma de Martin, $MA_{\sigma-centrados}$.

Definición 1.45. *Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos infinitos es* centrada *si cada subfamilia finita no vacía tiene intersección infinita.*

Definición 1.46. *El* número de pseudointersección $\mathfrak{p}$ *es la mínima cardinalidad de una familia centrada pero sin pseudointersección.*

$$\mathfrak{p} = \text{mín}\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ es centrada } \& \nexists X \in [\omega]^\omega\, (\forall F \in \mathcal{F}\, (X \subseteq^* F))\}$$

Toda torre es una familia centrada. Luego, $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{p}$ existe.

Teorema 1.47. *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ centrada y numerable. Entonces $\mathcal{A}$ tiene pseudointersección.*

Prueba. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$ definamos $J_n = \bigcap_{i \leqslant n} A_n$; es claro que $J_{n+1} \subseteq J_n$ para toda $n \in \omega$, y que cada J_n es infinito por ser $\mathcal{A}$ centrada.

Definimos $X = \{x_n : n \in \omega\}$ recursivamente como sigue: sea x_0 elemento arbitrario de J_0 y $x_{n+1} \in J_{n+1} \setminus \{x_i : i \leqslant n\}$ arbitrario para toda $n \in \omega$.

Entonces, es claro que $X \subseteq A_0$ y que para cada $n \in \omega$ se cumple que $X \setminus A_{n+1} \subseteq \{x_k : k \leqslant n\}$. Por lo tanto X es una pseudointersección para $\mathcal{A}$. ⊠

Del teorema anterior es inmediato deducir que $\mathfrak{p} > \aleph_0$.

Para concluir esta sección notemos que, por definición, ningún invariante cardinal definido puede exceder el continuo.

En suma, $\aleph_0 < \mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{s}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$. [4]

1.4. Lema del Δ-sistema

En esta sección presentamos un principio combinatorio utilizado en diversas ocasiones en el texto. A este principio se le conoce como el Lema del Δ-sistema y fue probado por Shanin en 1946.

El Lema del Δ-sistema es una generalización del *Principio de Casilleros*:

Si A es infinito y $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{j} B_i$, entonces existe un número natural m tal que $m \leqslant j$ y $|B_j| \geqslant \omega$

Definición 1.48. *Una colección Z de conjuntos es llamada un* Δ-sistema *si existe un conjunto s tal que para cualesquiera $x, y \in Z$ distintos, se tiene que $x \cap y = s$. A s se le llama convencionalmente* raíz del sistema*.*

A continuación la prueba del Lema del Δ-sistema.

Teorema 1.49. *Sea W un colección no numerable de conjuntos finitos. Entonces existe un conjunto $Z \subseteq W$ no numerable tal que Z es un Δ-sistema.*

Prueba: Sin pérdida de generalidad supongamos que $|W| = \aleph_1$. Ya que W es una colección de conjuntos finitos, podemos asegurar que:

$$W = \bigcup_{n\in\omega} W_n, \text{ donde } W_n = \{x \in W : |x| = n\}.$$

Probemos que necesariamente $|W_i| = \aleph_1$ para alguna $i \in \omega$. En efecto, supongamos lo contrario para obtener un contradicción, es decir, supongamos que para toda $n \in \omega$ se tiene que $|W_n| \leqslant \aleph_0$; entonces se tiene lo siguiente: $\left|\bigcup_{n\in\omega} W_n\right| = \aleph_0$, lo cual es una contradicción pues $|W| = \left|\bigcup_{n\in\omega} W_n\right|$ y por hipótesis habíamos supuesto que $|W| = \aleph_1$. Por lo tanto, existe una $i \in \omega$ de tal manera que $|W_i| = \aleph_1$.

[4] Para mayor información sobre estas desigualdades consultar en el Capítulo 3 el diagrama de E. van Douwen.

Ahora bien, afirmamos que si $\mathcal{B}$ es una familia de tamaño $\aleph_1$ tal que existe $n \in \omega$ de tal forma que para todo $b \in \mathcal{B}$, $|b| = n$. Entonces, $\mathcal{B}$ contiene un Δ-sistema.

A partir de ahora el resto de la prueba consistirá en probar esta afirmación. Demostraremos la afirmación por medio de inducción matemática sobre n.

Para $n = 1$ tenemos que todos los elementos de $\mathcal{B}$ son disjuntos debido a que la cardinalidad de cualquier $x \in \mathcal{B}$ es igual a uno: siempre que $x, y \in \mathcal{B}$ tienen intersección no vacía, se sigue que $x = y$.

Debido a que todos los elementos de $\mathcal{B}$ son disjuntos, tenemos que $\mathcal{B}$ es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$.

Enunciemos ahora nuestra hipótesis inductiva: supongamos que para toda familia $\mathcal{B}$ de tamaño $\aleph_1$, con $|x| = n$ para todo $x \in \mathcal{B}$, existe $\mathcal{C} \subseteq B$ tal que $|\mathcal{C}| = \aleph_1$, y $\mathcal{C}$ forma un Δ-sistema.

Consideremos $\mathcal{B}'$, familia con cardinalidad igual a $\aleph_1$, tal que $|x| = n + 1$ para todo $x \in \mathcal{B}'$. Tenemos los siguientes casos:

Caso (1) Existe $B \subseteq \mathcal{B}'$, de cardinalidad $\aleph_1$ y $z \in \bigcup B$ de tal manera que para toda $x \in B$ se tiene que $z \in x$. Sea entonces

$$B' = \{x \setminus \{z\} : x \in B\}.$$

Notemos que $|B| = |B'| = \aleph_1$ y además para toda $y \in B'$ se tiene que $|y| = n$, por lo tanto, por la hipótesis inductiva, se tiene que existe $\mathcal{C} \subseteq B'$, $|\mathcal{C}| = \aleph_1$ tal que $\mathcal{C}$ forma un Δ-sistema. Sea pues

$$\mathcal{C}' = \{x \cup \{z\} : x \in \mathcal{C}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{C}'$ forma un Δ-sistema con raíz $r \cup \{z\}$ donde r es la raíz de $\mathcal{C}$. En efecto, primero notemos que debido a que $|\mathcal{C}| = \aleph_1$ se sigue inmediatamente que $|\mathcal{C}'| = \aleph_1$; luego sean $x, y \in \mathcal{C}'$ con $x \cup \{z\} \neq y \cup \{z\}$, es inmediato que $x \neq y$. En consecuencia, $x \cap y = r$, y así $(x \cup \{z\}) \cap (y \cup \{z\}) = r \cup \{z\}$.

Caso (2) El caso (1) falla, es decir, para toda $z \in \bigcup B$ y para toda $B \in [\mathcal{B}']^{\omega_1}$ existe $x \in B$ tal que $z \notin x$.

En este caso construiremos recursivamente una sucesión

$$\mathcal{X} = \{X_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{B}'$$

de manera que para cualesquiera $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $\alpha \neq \beta$, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. Comencemos fijando $X_0 \in B$ arbitrario; luego para definir

X_β supongamos definido X_α para toda $\alpha < \beta$, debido a que $\alpha, \beta < \omega_1$ se tiene lo siguiente:

$$\left|\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha\right| \leqslant sup\,(|\{X_\alpha : \alpha < \beta\}|) \cdot |\beta| = \aleph_0.$$

Por lo anterior, podemos indexar por medio de naturales al siguiente conjunto:

$$\bigcup_{\alpha<\beta} X_\alpha = \{k_i : i \in \omega\}.$$

Definimos entonces:

$$B_i = \{x \in B : k_i \in x\}.$$

Probemos que para toda $i \in \omega$, $|B_i| \leqslant \aleph_0$; en efecto, si sucediese que $|B_i| = \aleph_1$ entonces $B_i \in [\mathcal{B}']^{\omega_1}$ y para todo $x \in B_i$, $k_i \in x$, lo cual contradice la hipótesis inicial del caso (2).

Por lo anterior, $\left|\bigcup_{i\in\omega} B_i\right| = \aleph_0$.

Debido a que $|B| = \aleph_1$, se sigue que

$$B \setminus \bigcup_{i\in\omega} B_i \neq \emptyset.$$

Sea entonces $X_\beta \in B \setminus \bigcup_{i\in\omega} B_i$ un elemento arbitrario. Como $X_\beta \notin \bigcup_{i\in\omega} B_i$ tenemos que para toda $\alpha < \beta$: $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, pues si sucediese que $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ entonces existiría $i \in \omega$ de tal forma que $k_i \in X_\alpha \cap X_\beta$, de donde $X_\beta \in B_i$ lo cual es una contradicción pues como vimos $X_\beta \notin \bigcup_{i\in\omega} B_i$.

Por lo tanto $\mathcal{X} = \{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un colección de conjuntos disjuntos por pares, en particular forma un Δ-sistema con raíz $\emptyset$.

Esto concluye la demostración. ⊠

Capítulo II
Forcing de Cohen

2.1. Construcción del Modelo de Cohen para la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo

En 1963 Paul Cohen probó que la negación de la Hipótesis del Continuo es consistente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel. El resultado de Cohen significa que es consistente la existencia de cardinales κ tales que $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$.

En esta sección probaremos con toda formalidad este resultado haciendo uso del forcing.

Definición 2.1. *Dados dos conjuntos I y J, definimos el siguiente conjunto:*

$$Fn\,(I,J) = \{p : |p| < \omega \ \& \ p \ es \ función \ \& \ p \subseteq I \times J\}$$

Dotaremos al conjunto anterior con el siguiente orden:

$$p \leqslant q \text{ si y sólo si } p \supseteq q.$$

Observemos que en este caso $p \leqslant \emptyset$ para todo $p \in Fn\,(I,J)$. Por lo tanto, $\emptyset$ es el elemento máximo de $Fn\,(I,J)$. En consecuencia,

$\mathbb{P} = \langle Fn\,(I,J)\,, \leqslant, \emptyset \rangle$ es una noción de forcing en el sentido de la Definición 1.3. Además, es inmediato comprobar que para $p, q \in Fn\,(I,J)$, p es compatible con q si y sólo si $p \cup q$ es función.

Recordemos que V es un modelo transitivo y numerable de un fragmento amplio de los axiomas de ZFC. A V también se le conoce como el *modelo base.*

Teorema 2.2. *Sean $I, J \in V$ con I infinito y $J \neq \emptyset$. Si G es un filtro $Fn\,(I,J)$-genérico sobre V. Entonces $\bigcup G$ es una función sobreyectiva de I en J.*

Prueba. Primeramente comprobemos que $\bigcup G$ es función. Bastará mostrar que $\bigcup G$ es un sistema de funciones compatibles, es decir, que dados $p, q \in G$, $p \cup q$ es una función. Efectivamente, $p, q \in G$ implica que existe $r \leqslant p, q$, y así $p \cup q \subseteq r$.

Denotemos con g a la función $\bigcup G$. Veamos que $dom(g) = I$ y $ran(g) = J$.

Para verificar que $dom\,(g) = I$ observemos que la contención de izquierda a derecha es inmediata. Para la contención restante definimos, para cada $i \in I$, el siguiente conjunto:

$$D_i = \{p \in Fn\,(I,J) : i \in dom\,(p)\}.$$

Como todas las variables libres de D_i están en V, pues $Fn\,(I,J) \in V$ y $i \in V$ debido a que $i \in I \in V$ y V es transitivo, concluimos que $D_i \in V$.

Afirmamos que D_i es denso en $Fn\,(I,J)$ para toda $i \in I$. Sea $p \in Fn\,(I,J)$. Si $p \in D_i$ no hay nada que probar. Por otro lado, si $p \notin D_i$, como $J \neq \emptyset$ entonces existe $j \in J$ y así $p \cup \{(i,j)\} \in D_i$. Es claro que $p \cup \{(i,j)\} \leqslant p$, de donde se tiene que D_i es denso para toda $i \in I$.

Por lo tanto $G \cap D_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I$. Sea $p \in G \cap D_i$. Como $p \subseteq g$, esto implica que $i \in dom\,(g)$.

Ahora queremos argumentar que g es sobreyectiva, en otros palabras, queremos ver que $ran\,(g) = J$. Nuevamente la contención de izquierda a derecha es inmediata. Para asegurar la igualdad por cada $j \in J$ consideremos la siguiente colección:

$$E_j = \{p \in Fn\,(I,J) : j \in ran\,(p)\}.$$

De manera similar a la argumentación de que $D_i \in V$ para toda $i \in I$, se demuestra que $E_j \in V$ para toda $j \in J$.

Afirmamos que para toda $j \in J$, E_j es un subconjunto denso. En efecto, sea $p \in \mathbb{P}$, si $j \in ran\,(p)$, por definición se sigue que $p \in E_j$. Por otra parte, si $j \notin ran\,(p)$, debemos utilizar el hecho de que $|I| \geqslant \omega$ para asegurar la existencia de $i \in I \setminus dom\,(p)$. Definamos $q = p \cup \{(i, j)\}$. Es claro que q es una extensión de p que pertenece a E_j. Por lo tanto, E_j es denso en $\mathbb{P}$.
Para terminar tomemos $p \in G \cap E_j$; luego, $p \subseteq g$ y en consecuencia $j \in ran\,(p) \subseteq ran\,(g)$. ⊠

Corolario 2.3. *Sean $\mathbb{P} = Fn\,(\omega, 2)$, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, y $x = \bigcup G$. Entonces $x \notin V$.*

Prueba: Del Teorema 2.2, x es una función de ω en 2. Veamos que $G = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\,(x \restriction_n \leqslant p)\}$.

Sea $p \in G$. Entonces $p \subseteq \bigcup G = x$. Así, existe $a \in [\omega]^{<\omega}$ de tal forma que $p = x \restriction_a$. Consideremos $n_0 = max\,(a)$, la contención se verifica debido a que $x \restriction_{n_0} \leqslant x \restriction_a = p$.

Probemos la contención remanente. Definamos

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom\,(p)\}, \text{ para cada } n \in \omega.$$

Demostremos que D_n es un subconjunto denso de V. Sea $p \in \mathbb{P}$, supongamos $p \notin D_n$ (el otro caso es inmediato), como $n \notin dom\,(p)$, establezcamos $m = max\,(dom\,(p) \cup \{n+1\})$. Sea $r : m \to 2$ de la siguiente forma:

$$r\,(i) = \begin{cases} p\,(i) & i \in dom\,(p)\,, \\ 0 & i \notin dom\,(p)\,. \end{cases}$$

De este modo, r es la extensión de p que pertenece a D_n.

Ahora bien, sea $p \in \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\,(x \restriction_n \leqslant p)\}$, entonces $x \restriction_{n_0} \leqslant p$ para alguna $n_0 \in \omega$. Consideremos D_{n_0}, el cual ya hemos probado que es un conjunto denso en $\mathbb{P}$ y que además pertenece a V.

De lo anterior, $G \cap D_{n_0} \neq \emptyset$. Sea $p_0 \in G \cap D_{n_0}$. En consecuencia, $n_0 \in dom\,(p_0)$, de donde $p_0 = x \restriction_{dom(p_0)} \leqslant x \restriction_{n_0} \leqslant p$. Dado que G es filtro, se sigue que $p \in G$.

Por otra parte, el orden $Fn(\omega, 2)$ es no atómico. Para verificar esto último, sea $p \in Fn(\omega, 2)$; entonces $|p| < \omega$ y $dom(p) \subseteq \omega$, por lo cual podemos escoger $n \in \omega \setminus dom(p)$. Entonces,

$$p \cup \{(n, 0)\} \text{ y } p \cup \{(n, 1)\}$$

son extensiones de p incompatibles entre sí.

En suma, podemos garantizar que si G es filtro $Fn(\omega, 2)$-genérico sobre V, entonces $\bigcup G \in V[G] \setminus V$. En efecto, si sucediese que $\bigcup G \in V$, debido a que $G = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\, (x \restriction_n \leqslant p)\}$, se tendría que $G \in V$, puesto que todas las variables libres de G serían elementos de V. Esto contradice el Lema 1.9. ⊠

En la siguiente sección veremos que la función $x = \bigcup G$ recibe el nombre de *real de Cohen*. Cuando construyamos $V[G]$, mediante G, un filtro $Fn(\omega, 2)$-genérico, será usual decir que se agregó un real de Cohen.

La noción de forcing que añade un real de Cohen tiene otra propiedad importante que enunciamos a continuación.

Lema 2.4. *$Fn(\omega, 2)$ da la misma extensión genérica que cualquier noción de focing numerable y sin átomos.*

De este modo, hacer forcing con una noción numerable y no atómica es equivalente a hacer forcing con $Fn(\omega, 2)$. Probar este resultado requiere de una extensa teoría. Recomendamos, a los interesados en una adecuada introducción al estudio de este resultado, consultar [Le13, 2.3].

Definición 2.5. *Diremos que $A \subseteq \mathbb{P}$ es* anticadena *si para cualesquiera $x, y \in A$ distintos, $x \perp y$.*

Un orden parcial $\mathbb{P}$ cumple la condición de la cadena contable *(ccc es la abreviatura correspondiente) si para toda $A \subseteq \mathbb{P}$ anticadena, se tiene que $|A| \leqslant \aleph_0$.*

Una noción de forcing $\mathbb{P}$, tal que $(\mathbb{P}$ *cumple la ccc*$)^V$, no *colapsa cardinales*. Es decir, si $\kappa \in V$, entonces, $(\kappa$ *es un cardinal*$)^V$ si y sólo si $(\kappa$ *es un cardinal*$)^{V[G]}$. Ver la demostración en [Ku80, VII.5.10].

Lema 2.6. *Si I es arbitrario y J es a lo más numerable. Entonces $Fn(I, J)$ tiene la condición de la cadena contable.*

Prueba. Sea $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{P}$ una enumeración sin repeticiones. Sabemos que A no es anticadena si existen $p, q \in A$ tales que $p \neq q$ y p es compatible con q. Por lo tanto, bastará demostrar que existen $\alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $\alpha \neq \beta$ y $p_\alpha \cup p_\beta$ es función. Equivalentemente, probaremos que para toda $x \in dom\,(p_\alpha) \cap dom\,(p_\beta)$, se tiene que $p_\alpha\,(x) = p_\beta\,(x)$.

Sea $\mathcal{A} = \{dom\,(p_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$, es claro que $|\mathcal{A}| \leqslant \aleph_1$. Veamos que no puede suceder que $|\mathcal{A}| \leqslant \omega$. Supongamos, buscando una contradicción, que $|\mathcal{A}| \leqslant \omega$. Entonces, por construcción, existe $a \in \mathcal{A}$ de tal manera que $|\{\alpha < \omega_1 : dom\,(p_\alpha) = a\}| = \aleph_1$. Si $dom\,(p_\alpha) = a$, se sigue que $p_\alpha : a \to J$; luego $p_\alpha \in J^a$. Ahora, sean $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $dom\,(p_\alpha) = a = dom\,(p_\beta)$, así $p_\alpha \neq p_\beta$, y $p_\alpha, p_\beta \in J^a$. Por tanto, $\{p_\alpha : dom\,(p_\alpha) = a\} \subseteq J^a$, pero $|a| < \omega$, por ende J^a es a lo más numerable. Lo cual es una contradicción.

Como $|\mathcal{A}| = \aleph_1$, es factible aplicar el Lema del Δ-sistema (Teorema 1.49). En consecuencia, existe $B \in [\omega_1]^{\omega_1}$ de tal manera que $\{dom\,(p_\alpha) : \alpha \in B\}$ es un Δ-sistema con raíz r.[5]

Observamos que $p_\alpha \subseteq I \times J$ implica que $p_\alpha \subseteq dom\,(p_\alpha) \times J$. De donde $p_\alpha : dom\,(p_\alpha) \to J$, es decir, $p_\alpha \in J^{dom(p_\alpha)}$.

Luego, tenemos que $|J^r| = \omega$, pues J es numerable y r es finito. Entonces el conjunto

$$\{p_\alpha \restriction_r : \alpha \in B\}$$

es numerable debido a que es un subconjunto de J^r.

Sea

$$h : B \to J^r, \text{ definida por } \alpha \mapsto p_\alpha \restriction_r.$$

Por el principio de los casilleros (ver Sección 1.4), h no puede ser inyectiva. Por lo tanto, existen $\alpha, \beta \in B$ distintos tales que $p_\alpha \restriction_r = p_\beta \restriction_r$. En consecuencia $p_\alpha \cup p_\beta$ es una función ya que la intersección de los dominios es r. ⊠

A lo largo de este trabajo, haremos uso de la siguiente abreviación: $\omega_1 = (\omega_1)^V$ y $\omega_2 = (\omega_2)^V$.

Considerando la noción de forcing $Fn\,(\omega_2 \times \omega, 2)$ obtendremos un modelo en el cual la Hipótesis del Continuo es falsa.

[5] Formalmente el Δ-sistema que obtenemos es elemento de $[\mathcal{A}]^{\omega_1}$, no obstante, nuestro procedimiento es legítimo debido a que $\mathcal{A}$ está indexado por ω_1.

Cuando $\mathbb{P} = Fn(\kappa \times \omega, 2)$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, $V[G]$ es usualmente conocido como el *modelo de Cohen* (para κ). El siguiente teorema justifica, en un primer acercamiento, el por qué entendemos a $V[G]$ como el modelo que resulta de añadir ω_2 reales de Cohen (revisar Lema 1.9).

Teorema 2.7. *Si $\kappa \in V$, con $(\kappa$ es cardinal no numerable$)^V$, y G es un filtro $Fn(\kappa \times \omega, 2)$-genérico sobre V, entonces $(\mathfrak{c} \geqslant |\kappa|)^{V[G]}$*

Prueba. Sea $\mathbb{P} = Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Si G es filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, entonces $\bigcup G : \kappa \times \omega \to 2$ es una función sobreyectiva por el Teorema 2.2. Denotemos $g = \bigcup G$. Ahora podemos definir una κ-sucesión de funciones de ω en 2 de la siguiente manera:

$$\text{para cada } \alpha < \kappa,\ g_\alpha : \omega \to 2 \text{ está dada por } g_\alpha(n) = g(\alpha, n).$$

Notemos que la sucesión $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$ está en $V[G]$.
Tenemos que demostrar que para α y β distintas, $g_\alpha \neq g_\beta$. Si probamos esto,

$$f : \kappa \to 2^\omega \text{ definida mediante } f(\alpha) = g_\alpha \text{ para cada } \alpha < \kappa,$$

sería una función inyectiva y en consecuencia $(|\kappa| \leqslant \mathfrak{c})^{V[G]}$.

Para $\alpha, \beta < \kappa$ distintos establezcamos:

$$D_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega((\alpha, n), (\beta, n) \in dom(p)\ \& \\ p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}.$$

Es fácil verificar que las variables libres de $D_{\alpha,\beta}$ son elementos de V y por lo tanto $D_{\alpha,\beta} \in V$. Comprobemos ahora que $D_{\alpha,\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Por ser elemento del orden parcial $dom(p)$ es finito y por lo tanto existe $m \in \omega$ de tal manera que $(\alpha, m), (\beta, m) \notin dom(p)$. Entonces, la extensión de p que pertenece a $D_{\alpha,\beta}$ es la siguiente:

$$q = p \cup \{((\alpha, m), 0), ((\beta, m), 1)\}.$$

Debido a que $D_{\alpha,\beta}$ es denso en $\mathbb{P}$, $D_{\alpha,\beta} \cap G \neq \emptyset$. Tomemos $p \in D_{\alpha,\beta} \cap G$. Dado que $p \in D_{\alpha,\beta}$, existe $n \in \omega$ tal que $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$. Luego, $p \in G$ implica que $p \subseteq g$. Entonces, para $x \in dom(p)$, $p(x) = g(x)$. Por lo tanto, $g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)$. En otras palabras, $g_\alpha(n) \neq g_\beta(n)$. ⊠

El siguiente resultado es la prueba de la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo.

Corolario 2.8. *Sean V y G como en el teorema anterior. Entonces $V[G] \models \mathfrak{c} \geqslant \aleph_2$.*

Prueba. Tomando $\kappa = (\omega_2)^V$ bastará ver que $V[G]$ no colapsa cardinales, es decir, que para todo $\beta \in ON \cap V$ se tiene que $(\beta\ es\ cardinal)^V$ si y sólo si $(\beta\ es\ cardinal)^{V[G]}$. Para ello es suficiente demostrar que $(Fn(\omega_2 \times \omega, 2)\ tiene\ la\ ccc)^V$, pero esto último se sigue del Lema 2.6. ⊠

Ahora que hemos demostrado la consistencia de la Hipótesis del Continuo es conveniente que calculemos el tamaño exacto del continuo en el modelo que se obtiene mediante el orden parcial $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$. Resulta ser que $V[G] \models \mathfrak{c} = \aleph_2$. Notemos que bastará probar que $V[G] \models \mathfrak{c} \leqslant \aleph_2$. Dado $X \in V$, la técnica será introducir *buenos nombres* para subconjuntos de X en la extensión genérica, y después contar esos nombres.

Recordemos que $\check{X} = \{(\check{x}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}) : x \in X\}$, y que para todo G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, $\check{x}_G = x$.

Reconoceremos el siguiente resultado como el *Lema de los buenos nombres*.

Lema 2.9. *Para todo $X \in V$ y $\mu \in V^{\mathbb{P}}$ existe $\{A_x : x \in X\}$ familia de anticadenas, de tal manera que si*

$$\tau = \bigcup_{x\in X} (\{\check{x}\} \times A_x).$$

Entonces, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ "$\mu \subseteq \check{X} \rightarrow \mu = \tau$".

Prueba: Recordemos que V es modelo de una parte los suficientemente grande de ZFC, en particular V modela el Lema de Kuratowski-Zorn. Sea $x \in X$, afirmamos que existe $\{A_x : x \in X\} \in V$, de tal manera que en V se tiene:

(1) Para todo $q \in A_x$, $q \Vdash$ "$\check{x} \in \mu$",
(2) A_x es anticadena, y
(3) A_x es maximal con respecto a (1) y (2).

Para probar nuestra afirmación, consideremos

$$\Sigma = (\{B \subseteq \mathbb{P} : B \; satisface \; (1) \; \& \; (2)\})^V.$$

La siguiente argumentación se debe enteder relativizada al modelo base.

Observemos que $\emptyset \in \Sigma$ por vacuidad y así $\Sigma \neq \emptyset$. Ahora comprobemos que $\langle \Sigma, \subseteq \rangle$ satisface las hipótesis del Lema de Kuratowski-Zorn. Sea $\mathcal{C}$ cadena de $\langle \Sigma, \subseteq \rangle$; veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es un elemento de Σ que la acota superiormente. En efecto, es claro que $\bigcup \mathcal{C}$ es cota superior respecto a la inclusión. Bastará que demostremos que $\bigcup \mathcal{C}$ satisface (1) y (2). Para ello, sean $p, q \in \bigcup \mathcal{C}$ distintos; entonces existen $z, y \in \mathcal{C}$ tales que $p \in z$ y $q \in y$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $z \subseteq y$; se sigue que $p \in y$. Como $y \in \Sigma$, $p \perp q$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ cumple (2).

Ahora bien, sea $p \in \bigcup \mathcal{C}$, entonces existe $z \in \mathcal{C}$ tal que $p \in z$ y por lo tanto $p \Vdash$"$\check{x} \in \mu$".

Debido a que $V \models AC$, en particular modela la equivalencia de Kuratowski-Zorn, existe $A_x \in \Sigma$ de tal modo que $(A_x \; es \; maximal \; en \; \langle \Sigma, \subseteq \rangle)^V$.

Ahora comprobemos que $\tau = \bigcup_{x \in X} (\{\check{x}\} \times A_x) \in V$. En efecto, como $\check{X} \in V$ se tiene que $dom\left(\check{X}\right) \in V$ por ser V transitivo. Luego, sea

$$f : dom\left(\check{X}\right) \to (\wp(\mathbb{P}))^V \text{ dada por } \check{x} \mapsto A_x.$$

De esta manera $f \in V$ por el Esquema de Reemplazo. Entonces, $\{\check{x}\} \times f(\check{x}) \in V$ y de esta forma se sigue que $\bigcup_{x \in X} (\{\check{x}\} \times f(\check{x})) \in V$.

Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$"$\mu \subseteq \check{X}$", demostraremos que $p \Vdash$"$\mu = \tau$". Equivalentemente, si $p \in G$ donde G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, y $\mu_G \subseteq X_G$, tenemos que probar $\mu_G = \tau_G$.

$\mu_G \subseteq \tau_G$: Sea $x \in \mu_G$, se sigue por hipótesis, que $x \in X$. Distingamos dos casos:

Caso 1. $A_x \cap G \neq \emptyset$. Existe $q \in A_x \cap G$, por lo que $(\check{x}, q) \in \tau$ y $\check{x}_G \in \tau_G$. Por lo tanto $x \in \tau_G$.

Caso 2. $A_x \cap G = \emptyset$. Veamos que este caso no puede suceder. En efecto, según el Lema 1.10, como $A_x \subseteq \mathbb{P}$, se sigue que existe $r \in G$ de tal modo que para todo $y \in A_x$, $y \perp r$.

Por otro lado, $\check{x}_G \in \mu_G$. En consecuencia, por el Teorema 1.20, existe $t \in G$ tal que $t \Vdash$"$\check{x} \in \mu$". Debido a que G es filtro, existe

$q \in G$ de tal forma que $q \leqslant t, r$. Es fácil comprobar que para todo $y \in A_x$, $y \perp q$.

De lo anterior se concluye que $A_x \cup \{q\}$ cumple las condiciones (1) y (2), pero esto contradice la maximalidad de A_x.

$\tau_G \subseteq \mu_G$: Si $x \in \tau_G$, existe $(\check{x}_0, q) \in \tau$ tal que $q \in G$ y $x = (\check{x}_0)_G$. Como $(\check{x}_0, q) \in \tau$, tenemos que $q \in A_n$; entonces, por (1), $q \Vdash$ "$\check{x}_0 \in \mu$". Además, debido a que $q \in G$, se sigue que $(\check{x}_0)_G \in \mu_G$, pero $x = (\check{x}_0)_G$. Por lo tanto, $x \in \mu_G$. ⊠

Teorema 2.10. *Sean $\mathbb{P} = Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, entonces $V[G] \models \mathfrak{c} \leqslant ((\aleph_2)^\omega)^V$.*

Prueba: Es fácil probar que $V \models |\mathbb{P}| = \aleph_2$. Denotemos $\kappa = ((\omega_2)^\omega)^V$. Entonces, $V \models \left|[\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}\right| = \kappa$. Luego, $V \models \left|\left([\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}\right)^\omega\right| = \kappa$.

Tenemos que exhibir una función sobreyectiva

$$f : \left([\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}\right)^\omega \to (\wp(\omega))^{V[G]} .$$

Para ello definamos

$$f(\{a_n : n \in \omega\}) = val\left(\bigcup_{n\in\omega}(\{\check{n}\} \times a_n), G\right), \text{ donde } a_n \in [\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}.$$

Como $\bigcup_{n\in\omega}(\{\check{n}\} \times a_n)$ es un $\mathbb{P}$-nombre, la regla de correspondencia esta bien definida.

Como $\check{n}_G = n$, se tiene que $ran(f) \subseteq (\wp(\omega))^{V[G]}$. Ahora demostraremos que f es sobreyectiva. En efecto, sea $X \in V[G]$ subconjunto de ω; entonces existe $\mu \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mu_G = X$. Luego, por el lema anterior, existe $\{A_n : n \in \omega\}$, sucesión de anticadenas, tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$"$\mu \subseteq \check{\omega} \to \mu = \bigcup_{n\in\omega}(\{\check{n}\} \times A_n)$".

Como $X \subseteq \omega$, debido al Teorema 1.20, existe $p_0 \in G$ de tal modo que $p_0 \Vdash$"$\mu \subseteq \check{\omega}$". Entonces, $p_0 \Vdash$"$\mu = \bigcup_{n\in\omega}(\{\check{n}\} \times A_n)$". Además, $p_0 \in G$ implica que $\mu_G = \left(\bigcup_{n\in\omega}(\{\check{n}\} \times A_n)\right)_G$, por lo que $X = \left(\bigcup_{n\in\omega}(\{\check{n}\} \times A_n)\right)_G$.

Para terminar, en virtud del Lema 2.6, $A_n \in [\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}$. Concluimos que $X = f(\{A_n : n \in \omega\})$. ⊠

En 1938 Kurt Gödel probó que es consistente la Hipótesis del Continuo. Es así como podemos asegurar la existencia de V, un modelo de ZFC de tal suerte que $V \models CH$. Además, también se puede demostrar que si V modela la Hipótesis del Continuo,

$$V \models (\aleph_2)^\omega = \aleph_2$$

(la demostración puede consultarse en [Am11, 4.51]).

En resumen, el Corolario 2.8 y el Teorema 2.10 implican que

$$V[G] \models \mathfrak{c} = \aleph_2 > \aleph_1.$$

Es decir, la consistencia de ZFC implica la consistencia de ZFC+$\neg$CH.

2.2. Reales de Cohen

En abril de 1963 Paul Joseph Cohen pudo, introduciendo el concepto de forcing en la Teoría de Conjuntos, construir modelos de ZFC en donde $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Hasta ese entonces la única manera de construir modelos nuevos a partir de un modelo dado, era mediante la técnica de modelos internos, por ejemplo, el universo constructible de Gödel ($\mathsf{V} = L$). Como hemos comprobado, el modelo de Cohen tiene que ser obtenido agregando reales a los modelos de ZFC, pero preservando cardinales.

En el periodo en que Cohen realizó su trabajo original ya se habían previsto diversas maneras de agregar reales a los modelos de la Teoría de Conjuntos, sin embargo, los reales originales de Cohen siguen teniendo un papel central en la teoría.

Invitamos al lector, interesado en ahondar más en los detalles históricos del trabajo de Cohen, a consultar [Ka08]

Para tener solvencia en los siguientes conceptos y resultados sugerimos repasar la topología de 2^ω (Sección 1.2).

Definición 2.11. *Sean $x \in 2^\omega$ y V un modelo transitivo y numerable. Decimos que x es un* real de Cohen *sobre V si para todo $N \in V$, la hipótesis $V \models N$ es cerrado nwd en 2^ω, implica que $x \notin N$.*

La definición anterior pide que los cerrados *nwd* sean elementos del modelo base; ésta no es una petición banal. Para verificarlo consideremos $\{x\}$, donde x es un real de Cohen. Observemos que $\{x\}$ es un cerrado *nwd* en 2^ω al que pertenece x, sin embargo, el Corolario 2.3 muestra que $\{x\} \notin V$.

Enunciamos a continuación el resultado que es conocido como la *caracterización topológica del real de Cohen*.

Teorema 2.12. *Sea $\mathbb{P} = Fn\,(\omega, 2)$. Entonces se cumplen:*

(1) *Si x es real de Cohen sobre V, entonces existe G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, tal que $x = \bigcup G$.*

(2) *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V tal que $x = \bigcup G$, entonces x es real de Cohen sobre V.*

Prueba: Probemos el inciso (1). Sea $x \in 2^\omega$ un real de Cohen sobre V. Comprobemos que

$$G = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega\,(x \restriction_n \leqslant p)\}$$

es un filtro. Veamos que cualesquiera dos elementos de G son compatibles. En efecto, si $p, q \in G$, entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $x \restriction_n \leqslant p$ y $x \restriction_m \leqslant q$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \leqslant m$, así $x \restriction_m \supseteq x \restriction_n$, se sigue que $x \restriction_m \supseteq p$. Por tanto, $x \restriction_m \leqslant p$.

Ahora bien, probemos la segunda condición necesaria para que G sea filtro. Sean $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leqslant q$. Como $p \in G$, existe $n \in \omega$ de tal manera que $x \restriction_n \supseteq p$, pero $p \supseteq q$ y por lo tanto $x \restriction_n \supseteq q$. De este modo, $q \in G$.

Para comprobar la genericidad de G consideremos $D \in V$ un denso en $\mathbb{P}$. Definimos

$$E = \{t \in 2^{<\omega} : \exists p \in D\,(p \subseteq t)\}.$$

Afirmamos que E es denso en $\mathbb{P}$. Efectivamente, si $p \in \mathbb{P}$, entonces existe $s \in D$ de tal manera que $s \leqslant p$. Bastará con que definamos $t \in 2^{<\omega}$ de la siguiente forma:

$$t : max\,(dom\,(s)) + 1 \to \omega \text{ dada por } t\,(n) = \begin{cases} s\,(n) & n \in dom\,(s) \\ 0 & n \notin dom\,(s) \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que $t \supseteq s$ y $t \in E$.

Ahora establezcamos la siguiente colección:

$$N = \{s \in 2^{<\omega} : \forall n \leqslant |s|\,(s \restriction_n \notin E)\}.$$

Veamos que N es un árbol (Definición 1.26). Sean $s \in N$ y $m \leqslant |s|$. En virtud de que $s \restriction_m \notin E$, tenemos que demostrar que para toda $n \leqslant m$, $(s \restriction_m) \restriction_n \notin E$. Pero $(s \restriction_m) \restriction_n = s \restriction_n$, y debido a que $n \leqslant |s|$, se sigue que $(s \restriction_m) \restriction_n \notin E$.

Aseguramos que N es ND, en el sentido de la Definición 1.31. Sea $s_0 \in N$, ya que $2^{<\omega} \subseteq \mathbb{P}$, tenemos que $s_0 \in \mathbb{P}$. Luego, existe $t_0 \in E$ de tal manera que $t_0 \leqslant s_0$. Así, $t_0 \notin N$ pues $t_0 \restriction_{|t_0|} = t_0 \in E$. Concluimos que N es ND.

Resaltemos que $N \in V$ y de este modo $[N]$ es realmente $[N]^V$.

Estamos listos para probar que G es $\mathbb{P}$-genérico. Por el Teorema 1.32, $[N]$ es nwd, y por hipótesis $x \notin [N]$. Entonces existe $m \in \omega$ tal que $x \restriction_m \notin N$. Por construcción, existe $k \leqslant m$ de tal manera que $(x \restriction_m) \restriction_k \in E$. Equivalentemente, $x \restriction_k \in E$. De este modo, existe $p \in D$ tal que $p \geqslant x \restriction_k$. Por último, $x \restriction_k \in G$ implica que $p \in G$. Por tanto, $p \in G \cap D$.

Para concluir el inciso (1) tenemos que mostrar que $x = \bigcup G$. La contención de izquierda a derecha es inmediata, pues $\{x \restriction_n : n \in \omega\} \subseteq G$.

Para la otra contención consideramos $y \in \bigcup G$. Por definición existen $p_0 \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$ tales que $x \restriction_n \leqslant p_0$ y $y \in p_0$. Entonces $p_0 \subseteq x \restriction_n \subseteq x$ y así concluimos que $y \in x$.

Demostremos ahora el inciso (2). Para esto sean G y x como la hipótesis lo pide. Nuevamente por el Teorema 1.20, existe $r \in G$ de tal modo que $r \Vdash$"$\dot{x} = \bigcup \Gamma$" (ver Definición 1.17).

Consideremos el siguiente argumento relativizado a V. Dado $X \subseteq 2^\omega$ cerrado nwd tal que $X \in V$, por el Teorema 1.32, existe $A \subseteq 2^{<\omega}$ árbol ND tal que $[A] = X$. Mostraremos que $\bigcup G \notin [A]$.

Afirmamos que:

$$D = \{q \in \mathbb{P} : q \Vdash \text{“}\dot{x} \notin \left[\check{A}\right]\text{”}\} \text{ es denso por debajo de } r.$$

Si la afirmación es cierta, por el Lema 1.10, existe $q \in D \cap G$. Debido a que $q \in D$, $q \Vdash$"$\dot{x} \notin \left[\check{A}\right]$", pero $q \in G$. Entonces, en $V[G]$ sucede que $x \notin [A]$.

Para probar la afirmación tomamos $p \in \mathbb{P}$ con $p \leqslant r$. Nuevamente, es fácil definir $t \in 2^{<\omega}$ tal que $p \subseteq t$. Luego, existe $q \in 2^{<\omega} \setminus A$ de tal manera que $t \subseteq q$.

Ahora bien, siempre se cumple que $q \Vdash$"$\check{q} \in \Gamma$"[6] y en particular para el forcing de Cohen tenemos que $q \Vdash$"$\check{q} \subseteq \bigcup \Gamma$"[7]. Pero $q \leqslant r$, haciendo uso del Lema de Congruencia, $q \Vdash$"$\dot{x} = \bigcup \Gamma$".

De lo anterior, $q \Vdash$ "$\check{q} \subseteq \dot{x}$". En consecuencia, $q \Vdash$"$\dot{x} \restriction_{|q|} = \check{q} \notin \check{A}$". Esto último implica que $q \Vdash$"$\dot{x} \notin \left[\check{A}\right]$". Lo anterior exhibe que D es denso por debajo de r. ⊠

Definición 2.13. *Sea X un espacio topólogico y $M \subseteq X$. Decimos que M es* magro *si $M \subseteq \bigcup_{n \in \omega} N_n$, donde N_n es nwd para toda $n \in \omega$.*

A partir de la definición anterior podemos establecer

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ } es \text{ } magro\}.$$

De hecho, se puede demostrar que $\mathcal{M}$ es lo que se conoce como un σ-ideal sobre $\mathbb{R}$. Omitiremos esta prueba por ser irrelevante para los objetivos de la sección.

Entonces podemos observar que x es un real de Cohen sobre V si y sólo si $x \notin \bigcup (\mathcal{M})^V$.

Para finalizar acordemos cierta notación, si G es un filtro $Fn(\omega, 2)$-genérico, denotaremos con $V[\gamma]$ a la extensión genérica $V[G]$. Recordemos que, por el Corolario 2.3, este modelo agrega un real de Cohen, por lo que la notación $V[\gamma]$ enfatiza que se ha agregado γ, una función nueva de ω en 2.

[6]En general; si K es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, siempre se tiene que $q \Vdash$ "$\check{q} \in \Gamma$". En efecto, $q \in K$ implica que $(\check{q})_K \in \left\{(\check{p})_K : p \in K\right\} = \Gamma_K$. Por lo tanto, $q = (\check{q})_K \in \Gamma_K = K$.

[7]Si $q \in K$, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, $q \subseteq \bigcup K$. Entonces $(\check{q})_K \subseteq (\bigcup \Gamma)_K$.

Capítulo III
Invariantes Cardinales del Continuo

Consecuencias de agregar reales de Cohen en los Invariantes Cardinales del Continuo

Eric van Douwen, matemático holandés, propuso el siguiente diagrama que relaciona las desigualdades de los invariantes definidos en la Sección 1.3. Las flechas del diagrama denotan desigualdades, por ejemplo, entenderemos $\mathfrak{t} \to \mathfrak{s}$ como $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{s}$. Las pruebas de estas desigualdades son demostrables en ZFC, no las probaremos debido a que el interés de este capítulo se refiere solamente a las consecuencias de agregar reales de Cohen. Para el lector interesado en las pruebas de las desigualdades del diagrama referimos a [Hr] y [Bl03].

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} & \\
\mathfrak{a} \arrow[ur] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[ur] & & \mathfrak{s} \arrow[ul] \\
 & \mathfrak{t} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \mathfrak{p} \arrow[u] & \\
 & \aleph_1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Es relevante mencionar que recientemente los matemáticos M. Malliaris y S. Shelah probaron que es demostrable en ZFC la igualdad entre $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{p}$ (ver [SPM12]).

Comenzaremos demostrando que agregando un real de Cohen se obtiene la igualdad $\mathfrak{a} = \aleph_1$. Con este interés damos el primer resultado de la sección.

Lema 3.1. *Cada familia MAD es no numerable.*

Prueba: Argumentaremos que si una familia casi ajena es numerable, no puede ser maximal. Sea $\mathcal{A} = \{A_k : k \in \omega\}$ una familia casi ajena. Para cada $n \in \omega$ tenemos

$$\left|A_n \cap \bigcup_{i<n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i<n} (A_n \cap A_i)\right| < \omega.$$

Entonces, por recursión sobre ω, sea $x_n \in A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$. Definimos $A = \{x_n : n \in \omega\}$.

Se sigue que $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{A\}$ es una familia casi disjunta. Efectivamente,

$$\{x_i : n < i\} \cap A_n = \emptyset \text{ para cada } n \in \omega.$$

Además, $\mathcal{A}'$ contiene propiamente a $\mathcal{A}$. ⊠

La idea central de la siguiente prueba es conseguir una lista exhaustiva de nombres para subconjuntos de ω en la extensión genérica dada por el forcing de Cohen. En particular, obtendremos una familia MAD que sea *Cohen-indestructible*, con esto nos referimos a un familia del modelo base que sea MAD, y tal que esta cualidad se preserva después de añadir un real de Cohen, de ahí el adjetivo de indestructible.

Teorema 3.2. *Sean $V \models CH$ y $\mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$. Si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre V, entonces en $V[G]$ existe una familia MAD de tamaño $\aleph_1$. Equivalentemente, $V[G] \models \mathfrak{a} = \aleph_1$.*

Prueba: Sea $\mathcal{W} = \{\{W_n : n \in \omega\} : W_n$ *es anticadena en* $\mathbb{P}$ *para cada* $n \in \omega\}$. Vamos a estimar la cardinalidad de $\mathcal{W}$. Consideremos W, anticadena en $\mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ es ccc (ver Lema 2.6), se sigue que $W \in [\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}$. Por lo tanto $\mathcal{W} \subseteq \left([\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}\right)^{\omega}$.

Tenemos que

$$|\mathcal{W}| \leqslant \left|\left([\mathbb{P}]^{\leqslant\omega}\right)^{\omega}\right| = (\omega^{\omega})^{\omega} = \omega^{\omega^2} = \omega^{\omega} = \mathfrak{c}.$$

Ahora bien, debido a que V modela la Hipótesis del Continuo,

$$|\mathbb{P} \times \mathcal{W}| = |\mathbb{P}| \cdot |\mathcal{W}| \leqslant |\mathbb{P}| \cdot \mathfrak{c} = |\mathbb{P}| \cdot \omega_1.$$

De lo anterior, $|\mathbb{P} \times \mathcal{W}| \leqslant \omega_1$. Esto nos permite dar la siguiente enumeración:

$$\mathbb{P} \times \mathcal{W} = \left\{\left(p_\xi, \left\{W_n^\xi : n \in \omega\right\}\right) : \xi < \omega_1\right\}.$$

Definimos $\dot{x}_\xi = \bigcup_{n\in\omega} \left(\{\check{n}\} \times W_n^\xi\right)$ para cada $\xi < \omega_1$.

Por recursión sobre ω_1 construiremos $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \omega_1\}$ de tal forma que sea un familia MAD Cohen-indestructible.

Si $\xi < \omega_1$, supongamos definidos A_η para $\eta < \xi$. Probaremos que es posible escoger A_ξ, con A_ξ numerable para todo $\xi < \omega_1$, de tal manera que:

(1) $|A_\eta \cap A_\xi| < \omega$, para toda $\eta < \xi$.

(2) Si $p_\xi \Vdash$“$|\dot{x}_\xi| = \check{\omega}$” y $p_\xi \Vdash$“$\left|\dot{x}_\xi \cap \check{A}_\eta\right| < \check{\omega}$”, para cada $\eta < \xi$, entonces, para cada $n \in \omega$ y para todo $q \leqslant p_\xi$, existen $r \leqslant q$ y $m \geqslant n$, tales que

$$m \in A_\xi \text{ y } r \Vdash\text{“}\check{m} \in \dot{x}_\xi\text{”}.$$

Consideremos dos casos:

Caso (i) $p_\xi \nVdash$“$|\dot{x}_\xi| = \check{\omega}$” o $p_\xi \nVdash$“$\left|\dot{x}_\xi \cap \check{A}_\eta\right| < \check{\omega}$” para alguna $\eta < \xi$. De ser así, $\{A_\eta : \eta < \xi\}$ es una familia casi disjunta numerable, así que del Lema 3.1 se sigue que existe $A_\xi \in [\omega]^\omega$ de tal manera que para toda $\eta < \xi$, $A_\xi \cap A_\eta =^* \emptyset$ (ver Sección 1.3).

Caso (ii) $p_\xi \Vdash$“$|\dot{x}_\xi| = \check{\omega}$” y $p_\xi \Vdash$“$\left|\dot{x}_\xi \cap \check{A}_\eta\right| < \check{\omega}$”, para cada $\eta < \xi$. Para este caso enumeramos con $(B_i)_{i\in\omega}$ a la colección $\{A_\eta : \eta < \xi\}$ y con $(n_i, p_i)_{i\in\omega}$ al conjunto $\omega \times \{q : q \leqslant p_\xi\}$. En virtud de las hipótesis del caso en cuestión, para cada $i \in \omega$,

$$q_i \Vdash\text{“}\left|\dot{x}_\xi \setminus \left(\textstyle\bigcup_{j\leqslant i} B_j\right)\right| = \check{\omega}\text{”}.$$

Equivalentemente, para toda $i \in \omega$, $q_i \Vdash$“$\left(\dot{x}_\xi \setminus \left(\bigcup_{j\leqslant i} B_j\right)\right) \setminus \check{n}_i \neq \emptyset$”. Entonces,

$$q_i \Vdash \text{“}\exists \dot{y} \in \check{\omega}[\dot{y} \in \dot{x}_\xi \setminus \left(\bigcup_{j \leqslant i} B_j\right) \ \&\ \dot{y} \geqslant \check{n}_i]\text{”}.$$

Aplicando el Corolario 1.22, existen $r_i \leqslant q_i$ y $m_i \in \omega$ tales que

$$r_i \Vdash \text{“}\check{m}_i \in \dot{x}_\xi \setminus \left(\bigcup_{j \leqslant i} B_j\right)\text{”} \ \&\ m_i \geqslant n_i.$$

La recursión termina al establecer $A_\xi = \{m_i : i \in \omega\}$. En efecto, primero comprobemos la condición (1). Si $\eta_0 < \xi$, entonces $A_{\eta_0} = B_{j_0}$ para alguna $j_0 \in \omega$. Mostraremos que $A_\xi \cap A_{\eta_0} =^* \emptyset$ exhibiendo que para cada $k \geqslant j_0$, $m_k \notin B_{j_0}$. Dado $k \in \omega \setminus j_0$, tenemos que $r_k \Vdash \text{“}\check{m}_k \in \dot{x}_\xi \setminus \left(\bigcup_{j \leqslant k} B_j\right)\text{”}$, en particular $m_k \notin \bigcup_{j \leqslant k} B_j$. En consecuencia, $m_k \notin B_{j_0}$.

Ahora bien, para comprobar la condición (2) sean $n \in \omega$ y $q \leqslant p_\xi$. Debido a nuestra enumeración, existe $i_0 \in \omega$ de modo que $n = n_{i_0}$ y $q = q_{i_0}$. De lo anterior, $r_{i_0} \Vdash \text{“}\check{m}_{i_0} \in \dot{x}_\xi\text{”}$ y $m_{i_0} \geqslant n$, y por nuestra construcción, $m_{i_0} \in A_\xi$.

Finalmente verifiquemos que esta recursión asegura que $\mathcal{A}$ es familia MAD en $V[G]$. Es claro, debido a la construcción recursiva, que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena. Para demostrar que $\mathcal{A}$ es maximal en $V[G]$ supongamos, buscando una contradicción, que existe $a \in \left([\omega]^\omega\right)^{V[G]}$ de tal manera que para todo $\xi \in \omega_1$, $a \cap A_\xi =^* \emptyset$.

Así, existen $\dot{a} \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in G$ tales que $(\dot{a})_G = a$ y

$$p \Vdash \text{“}\dot{a} \in [\omega]^\omega \ \&\ \forall \xi \in \omega_1 \left(\dot{a} \cap \check{A}_\xi =^* \emptyset\right)\text{”},$$

por el Lema 2.9 existe $\{W_n : n \in \omega\}$, una sucesión de anticadenas, de tal forma que:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\dot{a} \subseteq \check{\omega} \to \dot{a} = \bigcup_{n \in \omega} (\{\check{n}\} \times W_n)\text{”}.$$

Dado que $p \Vdash \text{“}\dot{a} \in [\omega]^\omega\text{”}$, se sigue que $p \Vdash \text{“}\dot{a} = \bigcup_{n \in \omega} (\{\check{n}\} \times W_n)\text{”}$. Sea $\xi \in \omega_1$ tal que $p = p_\xi$ y $\dot{x}_\xi = \bigcup_{n \in \omega} (\{\check{n}\} \times W_n)$. Entonces $p_\xi \Vdash \text{“}\dot{a} = \dot{x}_\xi\text{”}$, en particular $p_\xi \Vdash \text{“}|\dot{x}_\xi| = \check{\omega}\text{”}$. Por tanto, $p_\xi \Vdash \text{“}\left|\dot{x}_\xi \cap \check{A}_\xi\right| < \check{\omega}\text{”}$.

Nuevamente, por el Corolario 1.22, existen $q \leqslant p_\xi$ y $n \in \omega$ de tal modo que

$$q \Vdash \text{“}\dot{x}_\xi \cap \check{A}_\xi \subseteq \check{n}\text{”}.$$

En virtud de la condición (2), existen $r \leqslant q$ y $m \geqslant n$ tales que $m \in A_\xi$ y $r \Vdash$"$\check{m} \in \dot{x}_\xi$". Se sigue que $r \Vdash$"$\check{m} \in \check{A}_\xi$". Además, $r \Vdash$ "$\dot{x}_\xi \cap \check{A}_\xi \subseteq \check{n}$" debido a que r es extensión de q.

De lo anterior, $r \Vdash$"$\check{m} \in \check{n}$", lo cual implica que $m \in n$, pero esto es una contradicción. Concluimos que no existe tal $a \in \left([\omega]^\omega\right)^{V[G]}$. Por lo tanto $\{A_\xi : \xi < \omega_1\}$ es una familia MAD en $V[G]$. ⊠

Ahora, dado G un filtro $Fn\,(\omega_2 \times \omega)$-genérico sobre V, se puede demostrar que la extensión genérica modela la igualdad $\mathfrak{s} = \aleph_1$ (ver [Bl03]). Por nuestra parte, demostraremos que $V[G] \models \mathfrak{b} = \aleph_1$, por lo que, en virtud del Diagrama de Van Douwen, $V[G] \models \mathfrak{t} = \aleph_1 = \mathfrak{p}$.

Resulta oportuno mencionar que si $V[G] \models \mathfrak{b} = \aleph_1$, en esta extensión genérica será cierta la siguiente desigualdad: $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$.

Lema 3.3. *Sea $\mathbb{P} = Fn\,(\omega, 2)$, si $\dot{f}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para una función de ω en ω y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, entonces existe $g \in \omega^\omega \cap V$ tal que $V[G] \models g \nleqslant^* f$.*

Prueba: Sea $D = \{p_n : n \in \omega\}$ denso en $\mathbb{P}$. Este denso existe porque $|\mathbb{P}| = \omega$ o si, en cambio, deseamos uno que sea propio, basta con considerar $2^{<\omega}$.

Sea $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\dot{f}_G = f \in \omega^\omega$. Definimos para cada $n \in \omega$,

$$g(n) = mín\left\{k \in \omega : \exists q \leqslant p_n \left(q \Vdash \text{“}\dot{f}(\check{n}) = \check{k}\text{”}\right)\right\} + 1.$$

Notemos que $g \in \omega^\omega \cap V$. Ahora, ya que deseamos probar que $g \nleqslant^* f$, supongamos lo contrario para obtener un contradicción: asumamos que existe $q \in G$ tal que $q \Vdash$ "$\check{g} \leqslant^* \dot{f}$". Equivalentemente,

$$q \Vdash \text{“}\exists x (x \in \check{\omega} \ \& \ \forall n \in \check{\omega} \setminus x \left(\check{g}(n) \leqslant \dot{f}(n)\right)\text{”}.$$

A partir del Corolario 1.22, existen $p \leqslant q$ y $N \in \omega$ con $p \in G$ y

$$p \Vdash \text{“}\forall n \in \check{\omega} \setminus N \left(\check{g}(n) \leqslant \dot{f}(n)\right)\text{”}.$$

Sea $m = mín\{k \in \omega : k > N \ \& \ p_k \leqslant p\}$. La definición de $g(m)$ produce una condición $r \leqslant p_m$ de tal modo que

$$r \Vdash \text{“}\dot{f}(m) = \check{g}(m) - 1\text{”}$$

y por ende $r \Vdash$ "$\dot{f}(m) < \check{g}(m)$". Pero esto es una contradicción ya que, por el Lema de Congruencia, p debe forzar lo mismo que r. Esto concluye la demostración del lema. ⊠

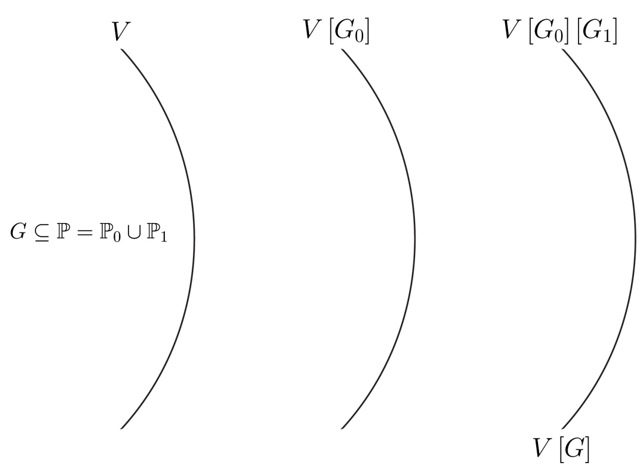
Para continuar con nuestro objetivo precisamos de un resultado concerniente al forcing iterado. A fin de que el ritmo de la lectura no se vea afectado, enunciaremos la factorización del forcing de Cohen omitiendo la respectiva prueba, su estudio a detalle puede ser realizado mediante la bibliografía correspondiente (ver [Ku80]).

Supongamos $I \in V$ y definamos $\mathbb{P} = Fn(I, 2)$. A continuación vamos a dividir el orden parcial $\mathbb{P}$ en dos partes; sean $I_0 \subseteq I$ y $I_1 = I \setminus I_0$. Así, obtenemos dos ordenes parciales: $\mathbb{P}_0 = Fn(I_0, 2)$ y $\mathbb{P}_1 = Fn(I_1, 2)$.

De acuerdo con [Ku80, VIII, 2.1], si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, entonces $G_0 = G \cap \mathbb{P}_0$ es un filtro $\mathbb{P}_0$-genérico sobre V y $G_1 = G \cap \mathbb{P}_1$ es un filtro $\mathbb{P}_1$-genérico sobre $V[G_0]$ (observemos que $\mathbb{P}_1 \in V \subseteq V[G_0]$), de tal modo que $V[G_0][G_1] = V[G]$. Lo anterior significa que hacer forcing mediante G_0 y después a través de G_1, es equivalente a hacer forcing mediante el filtro $\mathbb{P}$-genérico, G.

Para comprender por qué a este resultado, a veces, se le llama la *factorización del forcing de Cohen,* ilustremos el párrafo anterior con el siguiente diagrama. Se debe interpretar como sigue: cada línea curva representa un modelo de ZFC, y cada modelo está contenido en el modelo representado por la línea curva a su derecha. Así,

$$V \subseteq V[G_0] \subseteq V[G_0][G_1] = V[G].$$



Teorema 3.4.- *Sea* V*, un modelo de la Hipótesis del Continuo,* $\mathbb{P} = Fn\,(\omega_2 \times \omega, 2)$ *y* G*, un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* V*. Entonces* $V\,[G] \models \mathfrak{b} = \aleph_1$.

Prueba: Sea $B = \omega^\omega \cap V$. Es claro que $|B| = \aleph_1$. Si mostramos que B es no acotada, por definición, tendríamos que $\mathfrak{b} = \aleph_1$.

Dado $f \in V\,[G] \cap \omega^\omega$ sabemos que existen $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in G$ de tal manera que $p \Vdash$"$\dot{f} \in \omega^\omega$", y por consiguiente $p \Vdash$"$\dot{f} \subseteq \omega \times \omega$". Debido a que $X = \omega \times \omega \in V$, por el Lema 2.9, existe $\{A_x : x \in X\}$ de tal modo que para cada $x \in X$, A_x es una anticadena en $\mathbb{P}$, y

$$\tau = \bigcup_{x \in X} (\{\check{x}\} \times A_x),$$

implica que $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \Vdash$"$\tau = \dot{f}$".

Definamos la siguiente colección:

$$I_0 = \bigcup_{x \in X} \{dom\,(q) : q \in A_x\} \cup dom\,(p) \cup (\omega \times \omega).$$

Es fácil convencerse de que I_0 es numerable. Siguiendo la idea expuesta en párrafos anteriores, establecemos $\mathbb{P}_0 = Fn\,(I_0, 2)$.

Afirmamos que $\tau \in V^{\mathbb{P}_0}$. Efectivamente, $\check{x} \in V^{\mathbb{P}_0}$ debido a un argumento inductivo, y a que $\emptyset \in \mathbb{P}_0$. Luego, si $q \in A_x$ se sigue que $dom\,(q) \subseteq I_0$, y así $q \in \mathbb{P}_0$. Por lo tanto, τ es un $\mathbb{P}_0$-nombre.

Sea $G_0 = G \cap \mathbb{P}_0$, en virtud de la factorización del forcing de Cohen, G_0 definido de esta manera es un filtro $\mathbb{P}_0$-genérico sobre V.

Ahora veamos que $f = \tau_{G_0}$. Para esto, observemos que bastará con demostrar la siguiente igualdad: $\tau_G = \tau_{G_0}$.

$\tau_{G_0} \subseteq \tau_G$: Esta contención es inmediata puesto que $G_0 \subseteq G$.

$\tau_G \subseteq \tau_{G_0}$: Si $z \in \tau_G$, existen $r \in G$ y $x \in X$ tales que $(\check{x}, r) \in \tau$ y $z = \check{x}_G$. Como $r \in A_x \subseteq \mathbb{P}_0$, se tiene que $r \in G \cap \mathbb{P}_0 = G_0$. Por tanto, $(\check{x}, r) \in \tau$ implica que $\check{x}_{G_0} \in \tau_{G_0}$. Así, aplicando el Lema 1.16, se tiene la consiguiente igualdad: $\check{x}_{G_0} = x = \check{x}_G = z$.

Notemos que lo anterior implica que $f \in \omega^\omega \cap V\,[G_0]$. Luego, como $\mathbb{P}_0$ es una noción de forcing numerable y sin átomos, es factible aplicar el lema anterior.[8] Entonces, existe $g \in \omega^\omega \cap V$ tal que $V\,[G_0] \models g \nleq^* f$.

[8] $Fn\,(I_0, 2)$ produce la misma extensión genérica que $Fn\,(\omega, 2)$.

Es importante señalar que hasta este momento solamente hemos garantizado que B es no acotada en $V[G_0]$, sin embargo, lo que deseamos argumentar es que tampoco lo es en $V[G]$.

Sabemos que en $V[G_0]$, f no domina a g , es decir,

$$A = \{n \in \omega : f(n) < h(n)\}$$

es infinito en $V[G_0]$. Ahora bien, debido a que $V[G_0] \subseteq V[G]$, $A \in V[G]$. Lo prueba estará concluida si mostramos que $V[G] \models \omega \leqslant |A|$, pero esto se sigue a partir de que la fórmula $\varphi := \omega \leqslant |A|$ es absoluta hacia arriba, es decir, $(\varphi)^{V[G_0]}$ implica que $(\varphi)^{V[G]}$. $\boxtimes$

Ahora determinaremos el valor de $\mathfrak{d}$ en la extensión dada por $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$.

Teorema 3.5.- *Si $\mathbb{P} = Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V. Entonces $V[G] \models \mathfrak{d} = \aleph_2$.*

Prueba: El espíritu de la prueba es mostrar que una familia de ω_1 funciones de ω en ω en la extensión no puede ser dominante. Esta prueba depende íntimamente de la factorización del forcing de Cohen.

Sea $\varphi \in V[G]$ de tal modo que $\varphi : \omega_1 \to \omega^\omega$. Por el Lema de Forcing, existen $\dot{\varphi} \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in G$ de tal manera que $p \Vdash$ "$\dot{\varphi} : \omega_1 \to \omega^\omega$". Debemos observar lo siguiente: $\varphi = \{\varphi_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, es decir, para cada $\alpha < \omega_1$, $\varphi_\alpha \in \omega^\omega \cap V[G]$ y existe $\dot{\varphi}_\alpha \in V^{\mathbb{P}}$ de tal modo que $(\dot{\varphi}_\alpha)_G = \varphi_\alpha$.

Ahora bien, como $\omega \times \omega \in V$, por el Lema de los buenos nombres, para cada $\alpha < \omega_1$, existe $\{A_x^\alpha : x \in \omega \times \omega\}$ familia de anticadenas de tal manera que $\tau_\alpha = \bigcup_{x \in \omega \times \omega} (\{\check{x}\} \times A_x^\alpha)$ implica que $p \Vdash$ "$\tau_\alpha = \dot{\varphi}_\alpha$".

Definamos la siguiente colección:

$$I = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \left(\bigcup_{x \in \omega \times \omega} \{dom(q) : q \in A_x^\alpha\} \right) \cup dom(p).$$

Como $|I| \leqslant \aleph_1$, existe $\delta < \omega_2$ tal que $I \subseteq \delta \times \omega_2$. Establezcamos $I_0 = \delta \times \omega_2$, $\mathbb{P}_0 = Fn(I_0, 2)$ y $G_0 = G \cap \mathbb{P}_0$. Notemos que la elección de I_0 no fue arbitraria, el interés era que $\varphi \in V[G_0]$.

Definamos $\mathbb{P}_1 = Fn(\{\delta\} \times \omega, 2)$ y $G_1 = \mathbb{P}_1 \cap G$. Luego, tal como hemos enunciado ([Ku80, VIII, 2.1] , G_1 es un filtro $\mathbb{P}_1$-genérico sobre $V[G_0]$.

Consideremos ahora la noción de forcing $Fn(\{\delta\} \times \omega, \omega)$, conforme con [Le13, Teorema 2.15], a partir de G_1 podemos obtener

H, un filtro $Fn(\{\delta\} \times \omega, \omega)$-genérico de tal forma que $V[G_0][G_1] = V[G_0][H]$.

Por el Lema 2.2, $c = \bigcup H : \{\delta\} \times \omega \to \omega$. Como δ es fija, establezcamos $c^* : \omega \to \omega$, donde $c^*(n) = c(\delta, n)$ para cada $n \in \omega$. Aseguramos que para toda $\alpha < \omega_2$, $c^* \nleq^* \varphi_\alpha$. Para ello es suficiente demostrar que $|\{n \in \omega : \varphi_\alpha(n) < c^*(n)\}| = \omega$ para cada $\alpha < \omega_2$.

Sea $\alpha < \omega_2$. Veamos que $\{n \in \omega : \varphi_\alpha(n) < c^*(n)\}$ no es acotado. Efectivamente, dado $k \in \omega$ procedamos a definir la siguiente colección:

$$D_k = \{q \in Fn(\{\delta\} \times \omega, \omega) : \exists n > k\,(q \Vdash \text{“}\dot{\varphi}_\alpha(n) < \dot{c}^*(n)\text{”})\}\ .$$

Si mostramos que D_k es denso en $Fn(\{\delta\} \times \omega, \omega)$, habremos justificado la afirmación. Consideremos $p_0 \in Fn(\{\delta\} \times \omega, \omega) \setminus D_k$ y

$$k_0 = max\,\{n \in \omega : (\delta, n) \in dom\,(p)\} + k,$$

la extensión que buscamos es:

$$q = p_0 \cup \{(\delta, k_0 + 1)\,, \varphi_\alpha(k_0 + 1) + 1\}.$$

Afirmamos que $q \in D_k$. En efecto, primero notemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$“$\bigcup \Gamma : \{\check{\delta}\} \times \check{\omega} \to \check{\omega}$”. Por ende, para toda $n \in \omega$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$“$\dot{c}^*(n) = (\bigcup \Gamma)(\delta, n)$”. En particular, $q \Vdash$ “$\dot{c}^*(n) = (\bigcup \Gamma)(\delta, n)$” para toda $n \in \omega$. Entonces

$$q \Vdash \text{“}\dot{c}^*(k_0 + 1) = (\textstyle\bigcup \Gamma)(\delta, k_0 + 1)\text{”}$$

Luego, si $q \in K$ con K un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V, se sigue que $q \subseteq \bigcup K$. Así, $(\check{q})_K \subseteq (\bigcup \Gamma)_K$. Además, $(\delta, k_0 + 1) \in dom\,(q)$.

Por otro lado, $q \in K$ implica que $c^*(k_0 + 1) = (\bigcup K)(\delta, k_0 + 1)$.

Los párrafos anteriores nos justifican la siguiente desigualdad:

$$\varphi_\alpha(k_0 + 1) < \varphi_\alpha(k_0 + 1) + 1 = q(\delta, k_0 + 1) = (\textstyle\bigcup K)(\delta, k_0 + 1) = c^*(k_0 + 1).$$

Concluimos que $q \Vdash$ “$\dot{\varphi}_\alpha(n) < \dot{c}^*(n)$”.

La densidad de D_k implica que $\{n \in \omega : \varphi_\alpha(n) < c^*(n)\}$ no es acotado en $V[G_0][H]$. Entonces, $V[G_0][H] \models c^* \nleq^* \varphi_\alpha$.

Para culminar la prueba, en virtud de la factorización del forcing de Cohen, tendremos que completar la partición de $\mathbb{P}$ haciendo $\mathbb{P}_2 = Fn((\omega_2 \setminus \delta) \times \omega, 2)$.

Hemos terminado la demostración debido a que

$$V[G_0][H][G_2] = V[G_0][G_1][G_2] = V[G].\ \boxtimes$$

Capítulo IV
El Axioma de Martin

Consecuencias de agregar un real de Cohen en una restricción del Axioma de Martin

El Axioma de Martin (MA) es un enunciado de tipo combinatorio que afirma que para cualquier cardinal κ menor que el continuo y para cualquier familia de a lo más κ subconjuntos densos en un orden parcial, que tenga la condición de la cadena contable (Definición 2.5), existe un filtro genérico en el sentido de intersectar a todos estos subconjuntos densos.

De acuerdo con [Hz03, 11.2], el Axioma de Martin fue introducido por Kunen en 1968, Martin y Solovay en 1970 y Solovay junto con Tennenbaum en 1971.

En esta sección trabajaremos brevemente los resultados del Axioma de Martin y su relación con el modelo de Cohen. Resultará que el Axioma de Martin no se satisface en nuestra extensión, por lo que el interés será restringir el famoso axioma.

Definición 4.1. *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$. Decimos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un* filtro $\mathcal{D}$-genérico *si satisface las siguientes condiciones:*

(i) Para todo $p \in G$ y para todo $q \in \mathbb{P}$ si sucede que $p \leqslant q$ entonces $q \in G$

(ii) Para todo $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.
(iii) Para cualquier $D \in \mathcal{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$.

Definición 4.2. *MA_κ denota el siguiente enunciado: Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial no vacío que tiene la ccc, y $\mathcal{D}$ es una familia de a lo más κ subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, entonces existe G un filtro $\mathcal{D}$-genérico.*

El Axioma de Martin *es el enuciado que afirma que para todo κ, cardinal menor que $\mathfrak{c}$, es cierto MA_κ. Equivalentemente, si $\mathbb{P}$ es un orden parcial no vacío que satisface la ccc, y $\mathcal{D}$ es una colección de menos de $2^{\aleph_0}$ subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro G que es $\mathcal{D}$-genérico.*

Obtenemos de manera inmediata el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *$MA_{\aleph_0}$ es cierto.*

Prueba: La prueba es la misma que la empleada en el Lema de Rasiowa–Sikorski (Lema 1.7). ⊠

Como $MA_{\aleph_0}$ siempre es cierto, se sigue que el Axioma de Martin es una consecuencia de la Hipótesis del Continuo.

Teorema 4.4. *$MA_{2^{\aleph_0}}$ es falso.*

Prueba: Sea $\mathbb{P} = 2^{<\omega}$. Para $p, q \in \mathbb{P}$ definimos $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$. Notemos que $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial en el sentido de la Definición 1.2. Además, p y q son compatibles si lo son como funciones, es decir, si y sólo si $p \cup q$ es función.

Ahora, debido a que $|\mathbb{P}| = \aleph_0$ se sigue que $\mathbb{P}$ satisface la ccc.

Para cada $n \in \omega$ definamos la siguiente colección:

$$E_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom\,(p)\}.$$

Afirmamos que cada E_n es denso en $\mathbb{P}$. En efecto, sea $p \in \mathbb{P} \backslash E_n$ para alguna $n \in \omega$. Se tiene que $n \notin dom\,(p)$ por lo que definimos

$$q : n + 1 \to 2,$$

mediante que $q\,(k) = p\,(k)$ para cada $k \in dom\,(p)$ y $q\,(m) = 0$ para cada $dom\,(q) < m \leqslant n$; así $q \leqslant p$ y $q \in E_n$.

Definamos para cualquier $h \in 2^\omega$ el siguiente conjunto:

$$D_h = \{p \in \mathbb{P} : p \neq h \restriction_{dom(p)}\}.$$

Veamos que cada D_h es denso, para ello, sea $p \in \mathbb{P} \setminus D_h$ para alguna $h \in 2^\omega$. Consideremos $n \in \omega \setminus dom\,(p)$ y establezcamos $q : n+1 \to 2$ de la siguiente manera: $q \restriction_{dom(p)} = p$, $q\,(m) = 0$ para $dom\,(q) < m < n$ y $q\,(n) = 1 - h\,(n)$. Es fácil comprobar que $q \leqslant p$ y $q \in D_h$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in 2^\omega\}$. Así, $\mathcal{D}$ es una familia de $2^{\aleph_0}$ subconjuntos densos en $\mathbb{P}$.

Para demostrar que $MA_{2^{\aleph_0}}$ es falso supongamos lo contrario para obtener una contradicción. Sea G, un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Como G es un sistema compatible de funciones, entonces: $\bigcup G$ es una función. Además, debido a que $G \cap E_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, $dom\,(\bigcup G) = \bigcup_{f \in G} dom\,(f) = \omega$.

De lo anterior, $g = \bigcup G$ es una función de ω en 2. Consideremos D_g, como G es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, se sigue que $G \cap D_g \neq \emptyset$, y así $g = \bigcup G \neq g$. Claramente esto es una contradicción. ⊠

Corolario 4.5. *$MA_{\aleph_1}$ implica que la Hipótesis del Continuo es falsa.*

Prueba: Recordemos que la Hipótesis del Continuo afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Se sigue inmediatamente del teorema anterior que si sucede $MA_{\aleph_1}$, entonces $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$. ⊠

El Teorema de Solovay-Tenenbaun muestra que MA es consistente con ZFC + ¬CH, debido a que esta prueba está fuera del alcance de este trabajo, para su demostración referiremos a [Ro10, 43].

También es sabido que MA implica que todos los invariantes cardinales definidos en la Sección 1.3 son iguales a $\mathfrak{c}$. Para probar esto bastará, debido al diagrama de Van Douwen, que demostremos la igualdad $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Teorema 4.6. MA implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Prueba: Supongamos que $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$es centrada y además $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$.

Para encontrar una pseudointersección para $\mathcal{F}$ aplicaremos MA al siguiente orden parcial $\mathbb{P}$: un elemento de $\mathbb{P}$ es una pareja (s, F) donde $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $F \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$.

Definimos $(s', F') \leqslant (s, F)$ si y sólo si s es un segmento inicial de s' (si $x \in s$, $y \in s'$ y $x < y$, entonces $x \in s'$), $F \subseteq F'$ y para toda $A \in F$ se tiene que $(s' \setminus s) \subseteq A$.

Este orden parcial es una noción de forcing muy especial llamada *el forcing de Mathias* con respecto a $\mathcal{F}$

Veamos que cualesquiera elementos de $\mathbb{P}$ con la misma primera componente son compatibles. Efectivamente, si $(s, F), (s, H) \in \mathbb{P}$ entonces $(s, F \cup H) \in \mathbb{P}$ y extiende a ambos.

Afirmamos que para cada $A \in \mathcal{F}$, el conjunto:

$$D_A = \{(s, F) \in \mathbb{P} : A \in F\}$$

es denso. En efecto, sea $(s, F) \in \mathbb{P}$. Basta con considerar $p = (s, F \cup \{A\})$ para obtener que $p \in D_A$ y $p \leqslant (s, F)$.

Ahora, para cada $n \in \omega$ sea:

$$E_n = \{(s, F) \in \mathbb{P} : |s| > n\}$$

el cual también es denso pues dado $(s, F) \in \mathbb{P}$ sea $X = \bigcap \mathcal{F} \setminus s$ infinito, éste existe por ser familia centrada. Definimos $s' = s \cup A$, donde $A \in [X]^{n+1}$. De este modo, $(s' \setminus s) = A \subseteq X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$ y por lo tanto $(s', F) \leqslant (s, F)$.

MA asegura que existe un filtro G que intersecta a todos estos subconjuntos densos. Sea

$$X = \bigcup \left\{ s : \exists F \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \left((s, F) \in G \right) \right\},$$

es claro que este conjunto es infinito debido a que G intersecta a todos los E_n.

Para ver que está casi contenido en cada $A \in \mathcal{F}$ fijemos $(s_0, F_0) \in D_A \cap G$. Afirmamos que $(X \setminus s_0) \subseteq A$. En efecto, para todo $k \in X \setminus s_0$, $k \in s \setminus s_0$ para algún $(s, F) \in G$, y como G es filtro existe $(s', F') \in G$ tal que $(s', F') \leqslant (s, F)$ y $(s', F') \leqslant (s_0, F_0)$. Entonces, $k \in (s \setminus s_0) \subseteq (s' \setminus s_0) \subseteq A$, pues $A \in F_0$, tal como queríamos demostrar. ⊠

Por lo tanto, en el modelo de Cohen no se cumple el Axioma de Martin, ya que en el capítulo anterior probamos que en este modelo la siguiente desigualdad es cierta: $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{b} = \omega_1 < \omega_2 = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

La cuestión que surge de manera inmediata es determinar alguna restricción de dicho axioma que sí se cumpla en la extensión.

Definición 4.7. *Decimos que* X *un subconjunto de un orden parcial* $\mathbb{P}$ *es* centrado *si para cualesquiera* $p, q \in X$ *existe* $r \in X$ *tal que* $r \leqslant p, q$.

Decimos que $\mathbb{P}$ *es* σ-centrado *si existe* $\{P_n : n \in \omega\}$ *tal que* $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} P_n$*, donde cada* P_n *es centrado.*

La siguiente definición restringirá el Axioma de Martin a los ordenes parciales σ-centrados.

Definición 4.8. *Dado* κ *cardinal,* $MA\,(\kappa)_{\sigma-centrado}$ *abrevia el siguiente enunciado: para cualquier orden parcial* σ*-centrado* $\mathbb{P}$ *y cualquier familia* $\mathcal{D}$ *de a lo más* κ *subconjuntos densos de* $\mathbb{P}$*, existe un filtro* $\mathcal{D}$*-genérico.*

Lema 4.9. Para cada cardinal $\kappa < \mathfrak{p}$, el enunciado $MA\,(\kappa)_{\sigma-centrado}$ se satisface, pero $MA\,(\mathfrak{p})_{\sigma-centrado}$ falla.

La prueba puede consultarse en [Ku11, III.3.61.]

De esta manera tenemos que $\mathfrak{p}$, además de ser la mínima cardinalidad de una familia centrada en $[\omega]^\omega$ sin pseudointersección, también es mínimo cardinal κ para el cual no se satisface la afirmación $MA\,(\kappa)_{\sigma-centrado}$. Utilizaremos ambas definiciones de $\mathfrak{p}$ indistintamente en el resto del capítulo.

La siguiente proposición afirma que en el modelo de Cohen se satisface la restricción del Axioma de Martin para ordenes parciales σ-centrados.

Teorema 4.10. *Sea un cardinal* $\kappa < \mathfrak{p}$*. Si* $V \models MA\,(\kappa)_{\sigma-centrado}$ *y* γ *es un real de Cohen sobre* V*, entonces* $V\,[\gamma] \models MA\,(\kappa)_{\sigma-centrado}$.

Equivalentemente, $\mathfrak{p}^V \leqslant \mathfrak{p}^{V[\gamma]}$.

La prueba de la desigualdad es obra de Judith Roitman, como la prueba puede consultarse en [Ma13, pag. 12], sería poco provechoso que la incluyésemos en este texto. Baste mencionar que esta prueba utiliza la siguiente noción de forcing: $\langle 2^{<\omega}, \supseteq, \emptyset\rangle$, es decir, $p \in 2^{<\omega}$ si y sólo si existe un natural n de tal modo que $p : n \to \{0, 1\}$, y $2^{<\omega}$ queda ordenado mediante $p \leqslant q$ si y sólo si $p \supseteq q$.

En este sentido, lo que nos resta probar es que $\langle 2^{<\omega}, \leqslant, \emptyset \rangle$ es una noción de forcing numerable y sin átomos (ver Lema 2.4). En efecto, es inmediato que $2^{<\omega}$ es numerable. Por otro lado, dado $p \in 2^{<\omega}$, sus extensiones incompatibles son:

$$p \cup \{(dom\,(p)\,, 0)\} \text{ y } p \cup \{(dom\,(p)\,, 1)\}.$$

Capítulo V
Árboles de Suslin

Agregar un real de Cohen, agrega un árbol de Suslin

Sabemos que a los conjuntos linealmente ordenados, que poseen subconjuntos densos numerables, se les llama *separables*. También es bien conocido que $\mathbb{R}$ es un conjunto separable, de hecho, el teorema siguiente nos da una caracterización como tipo de orden.

Teorema 5.1. *Cualquier orden lineal denso, sin extremos, completo y separable es isomorfo a* $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

La prueba se debe a G. Cantor. Para consultar una demostración ver [Am11, 1.44].

En 1920, en el primer número de *Fundamenta Mathematicae*, M. Y. Suslin formuló una conjetura acerca de la posibilidad del debilitamiento de la condición de ser separable, sustituyéndola por la *condición de la cadena contable* para espacios topológicos, que definimos a continuación.

Definición 5.2. *Sea* $\langle X, \leqslant \rangle$ *un conjunto linealmente ordenado. Si cada colección de intervalos abiertos ajenos por pares es a lo más* *numerable, entonces se dice que X satisface (tiene) la* condición de la cadena contable (*c.c.c.*) .

Cualquier conjunto linealmente ordenado que sea separable satisface la *c.c.c.*, tal como lo prueba el siguiente lema.

Lema 5.3. *Si $\langle X, \leqslant\rangle$ es separable, entonces $\langle X, \leqslant\rangle$ tiene la c.c.c..*

Prueba: Probemos este resultado por contrapositiva. Supongamos que $\langle X, \leqslant\rangle$ no tiene la *c.c.c.*, es decir, supongamos que $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una colección de intervalos abiertos no vacíos tal que para cualesquiera $\alpha < \beta < \omega_1$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

Ahora, sea $D \subseteq X$ denso. Así, podemos escoger:

$$d_\alpha \in U_\alpha \cap D \text{ , para todo } \alpha < \omega_1.$$

Luego, $\{d_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq D$ es una colección tal que para α y β distintos, $d_\alpha \neq d_\beta$. Entonces, $|D| \geqslant \aleph_1$, lo que significa que X no tiene densos numerables. ⊠

Así, el problema de Suslin es el siguiente: si S es un conjunto linealmente ordenado, denso en sí mismo, sin extremos, completo y tal que satisface la *c.c.c.*. ¿Es S isomorfo a la recta real?.

Un conjunto S que sea denso y satisfaga la *c.c.c.* pero que no sea separable le llamamos *línea de Suslin*.

Podemos ahora definir la hipótesis de Suslin.

Hipótesis de Suslin: *(HS) No existen líneas de Suslin.*

La Hipótesis de Suslin es un enunciado independiente de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel. Para probar la consistencia de HS es necesario $MA_{\aleph_1}$ (ver [Ku80, II, 5.14]). Por otra parte, haciendo uso de un real de Cohen se obtiene la consistencia de la negación de la Hipótesis de Suslin. Demostrar este hecho es el objetivo del capítulo.

Debido a que una línea de Suslin proporciona un contraejemplo para la HS, construiremos una línea de Suslin, en particular, nos interesará la construcción de un árbol de Suslin que definimos a continuación.

Definición 5.4. *Un* árbol *es un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, <\rangle$ tal que para todo $x \in A$, el segmento*

$$A_x = \{a \in A : a < x\}$$

está bien ordenado por la relación $<$.

Si $x \in A$*, le llamamos* altura de x $(alt_A(x))$ *al ordinal* α*, tal que* $\alpha \cong A_x$*. Dado* $\alpha \in ON$ *se le llama* nivel α-ésimo *de* A *al conjunto:*

$$Niv_\alpha(A) = \{x \in A : alt_A(x) = \alpha\}.$$

Se llama altura de un árbol A (alt_A) *al mínimo ordinal* α *tal que* $Niv_\alpha(A) = \emptyset$ *.*

Hay que darnos cuenta de que en árboles se cumple que todo orden lineal es un buen orden.

Definición 5.5. *Si* A *es árbol, decimos que* $A^* \subseteq A$ *con el orden inducido es un* subárbol *si para todo* $x \in A^*$, $A_x \subseteq A^*$.

Definición 5.6. *Un* árbol de Aronszajn *es un árbol* A *tal que tiene altura* $\aleph_1$*, todos sus niveles tienen cardinalidad numerable y cuyas cadenas son a lo más numerables.*

Definición 5.7. *Un* árbol de Suslin *es un árbol de Aronszajn tal que sus anticadenas son todas numerables.*

El primer paso para la solución del problema de Suslin lo dio Đuro Kurepa en 1935 al dar un enunciado equivalente en términos de árboles:

Teorema 5.8. *Existe un línea de Suslin si y sólo si existe un árbol de Suslin.*

Prueba: Ver [Ku80, II.5.13] ⊠

Tal como hemos adelantado: agregar un real de Cohen, agrega un árbol de Suslin.

Lo anterior fue probado primero por S. Shelah en 1984, posteriormente simplificado por D. Velleman. Sin embargo, la prueba que presentamos se debe al argumento presentado por S. Todorcevic en 1991.

El proceso de construcción de nuestro árbol de Suslin requiere primero demostrar la existencia de un árbol de Aronszajn, a lo cual nos dedicaremos en lo sucesivo.

Lema 5.9. *Existe una sucesión* $\{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ *tal que:*

1. $e_\alpha : \alpha \to \omega_1$ *es una función inyectiva para todo* $\alpha < \omega_1$,
2. $|\{\xi < \beta : e_\alpha(\xi) \neq e_\beta(\xi)\}| < \aleph_0$ *para toda* $\beta < \alpha$, *y*
3. $|\omega \setminus ran(e_\alpha)| = \aleph_0$ *para* $\alpha < \omega_1$.

Prueba: Definamos en $\omega_1^{<\omega_1}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$s \approx t \text{ si y sólo si } dom(s) = dom(t) \text{ y } |\{\xi < dom(s) : s(\xi) \neq t(\xi)\}| < \omega.$$

Construiremos la sucesión requerida por recursión sobre α. Sea $e_0 = \emptyset$. Supongamos definido e_α. Bastará que tomemos cualquier $n \in \omega \setminus ran(e_\alpha)$ y definamos: $e_{\alpha+1} = e_\alpha \cup \{(\alpha, n)\}$. Es inmediato verificar que $e_{\alpha+1}$ cumple las condiciones requeridas.

Ahora, supongamos definido e_α para todo $\alpha < \gamma$, donde γ es un ordinal límite menor que ω_1. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ un sucesión cofinal creciente en γ, tal que $sup\{\alpha_n : n \in \omega\} = \gamma$. Nuestro objetivo será definir un sucesión de funciones inyectivas $\{t_n : n \in \omega\}$ tal que $t_n : \alpha_n \to \gamma$, donde $t_0 = e_0$ y para todo $n \in \omega$ $t_n \approx e_{\alpha_n}$ y $t_{n+1} \restriction_{\alpha_n} = t_n$.

Supongamos definidas t_i para todo $i \leqslant n$, y definamos $t_{n+1} : \alpha_{n+1} \to \omega_1$ de la siguiente forma:

$$t_{n+1}(\beta) = \begin{cases} t_n(\beta) & \beta < \alpha_n, \\ e_{\alpha_{n+1}}(\beta) & \alpha_n \leqslant \beta \ \&\ e_{\alpha_{n+1}}(\beta) \notin ran(t_n), \\ mín\left(\omega \setminus \left(ran(t_n) \cup ran\left(e_{\alpha_{n+1}}\right)\right)\right) & \alpha_n \leqslant \beta \ \&\ e_{\alpha_{n+1}}(\beta) \in ran(t_n). \end{cases}$$

Afirmamos que $e_{\alpha_{n+1}} \approx t_{n+1}$. En efecto, observemos que debido a que e_{α_n} coincide con t_n salvo un número finito de casos, ocurre que $e_{\alpha_{n+1}}(\beta) \in ran(t_n)$ en un número finito de casos, se tiene entonces la afirmación.

Sea $t = \bigcup_{n\in\omega} t_n$, es claro que t es una función inyectiva tal que $t : \gamma \to \omega$. Definimos $e_\gamma : \gamma \to \omega$ como:

$$e_\gamma(\beta) = \begin{cases} t(\alpha_{2n}) & \beta = \alpha_n \\ t(\beta) & \beta \neq \alpha_n \end{cases}, \text{ para alguna } n \in \omega.$$

Debido a que t es inyectiva, e_γ también lo es, para ver que

$$|\{\xi < \alpha : e_\alpha(\xi) \neq e_\gamma(\xi)\}| < \aleph_0 \text{ para toda } \alpha < \gamma,$$

consideremos α menor que γ. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $\alpha < \alpha_n$, luego entonces $e_\gamma \upharpoonright_\alpha \approx t_n \upharpoonright_\alpha$ ya que se diferencian por construcción a lo más en $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$. Por lo anterior, $e_\gamma \upharpoonright_\alpha \approx e_{\alpha_{n+1}} \upharpoonright_\alpha \approx e_\alpha$.

Por último, $\{t(\alpha_{2n+1}) : n \in \omega\} \subseteq (\omega \setminus ran(e_\gamma))$ lo que demuestra que se cumple la ultima propiedad para el ordinal γ. ⊠

En lo que resta del capítulo supondremos a $\omega^{<\omega_1}$ ordenado por la contención. Es sencillo verificar que $\omega^{<\omega_1}$ es un árbol de altura ω_1 que cumple la siguiente propiedad: para $\alpha < \omega_1$, $Niv_\alpha(\omega^{<\omega_1}) = \omega^\alpha$. También es útil resaltar que $\omega^{<\omega_1}$ no es un árbol de Aronszajn, puesto que para $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$, $|\omega^\alpha| > \omega$.

Lema 5.10. *Si* $A = \{s \in \omega^{<\omega_1} : s \text{ es inyectiva}\}$, entonces A es un subárbol de $\omega^{<\omega_1}$.

Prueba: Es claro que $A \subseteq \omega^{<\omega_1}$. Vamos a comprobar que para $x \in A$, $(\omega^{<\omega_1})_x \subseteq A$. Efectivamente, dado $x \in A$, existe un ordinal α menor que ω_1 de tal manera que $x : \alpha \to \omega$ es una función inyectiva. Si $y \in A_x$, $y \subseteq x$ y en consecuencia y es una función inyectiva de β en ω, para algún $\beta \leqslant \alpha$. ⊠

Lema 5.11. *$alt_A = \aleph_1$ y A no tiene cadenas no numerables.*

Prueba: Para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que $Niv_\alpha(A) \neq \emptyset$, en consecuencia, $alt_A = \aleph_1$.

Ahora bien, supongamos que existe $\mathcal{C} \subseteq A$ una cadena no numerable. Entonces $f = \bigcup \mathcal{C}$ es una función pues los elementos de $\mathcal{C}$ son compatibles por pares. Por otra parte, $dom(f) = \bigcup_{c \in \mathcal{C}} dom(c) = \omega_1$, por ende $f : \omega_1 \to \omega$, pero esto es una contradicción ya que por construcción f es inyectiva. ⊠

Sin embargo, A no es un árbol de Aronszajn debido a que sus niveles son no numerables. Definimos el que efectivamente será:

$$A^* = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \{t \in Niv_\alpha(A) : t \approx e_\alpha\},$$

donde $\{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es la colección construida en el Lema 5.9.

Lema 5.12. *A^* es un subárbol de A.*

Prueba: Sean $x \in A^*$ y $y \in A_x$. Supongamos que $alt_A(x) = \alpha$ y $alt_A(y) = \beta$, entonces $x \approx e_\alpha$. Luego, por el Lema 5.9, $y = x \restriction_\beta \approx (e_\alpha) \restriction_\beta \approx e_\beta$. Por lo tanto, $y \in A^*$. ⊠

Teorema 5.13. *Existe un árbol de Aronszajn.*

Prueba: Demostraremos que A^* es un árbol de Aronszajn. En efecto, primero veamos que $alt_A = \aleph_1$, pero esto es inmediato, solamente observemos que para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que $e_\alpha \in Niv_\alpha(A^*)$.

Debido a los Lemas 5.11 y 5.12, como A no tiene cadenas no numerables, entonces A^* tampoco las tiene. Por último:

$$Niv_\alpha(A^*) = \{t \in \omega^\alpha : t \approx e_\alpha \ \& \ inyectiva\} =$$

$$\bigcup_{x \in [\alpha]^{<\omega}} \left\{t \in \omega^\alpha : t \restriction_{\alpha \setminus x} = (e_\alpha) \restriction_{\alpha \setminus x}\right\} .$$

Notemos que $\left|\bigcup_{x \subset \alpha} \left\{t \in^\alpha \omega : t \restriction_{\alpha \setminus x} = (e_\alpha) \restriction_{\alpha \setminus x}\right\}\right| = \omega$ por ser unión numerable de conjuntos numerables. Concluimos que A^* es un árbol de Aronszajn. ⊠

A partir de ahora haremos unas ligeras modificaciones en la notación. Sea $\{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ la colección la construida en el Lema 5.9, a partir de ella definimos el siguiente conjunto:

$$T_\alpha = \{f : \alpha \to \omega_1 : f \approx e_\alpha\},$$

luego sea:

$$T = \bigcup_{\alpha < \omega_1} T_\alpha.$$

De esta manera resulta que T es una forma equivalente de denotar al árbol A^*.

A pesar de que T es un árbol de Aronszajn, no resulta ser un árbol de Suslin, tal como lo probamos en el siguiente lema.

Lema 5.14. *T no es un árbol de Suslin.*

Prueba: Debemos comprobar que T no es *ccc*, es decir, debemos exhibir una anticadena no numerable.

Para cada $n \in \omega$ sea

$$E_n = \{s \in T : \exists \alpha < \omega_1 (dom\,(s) = \alpha + 1 \ \&\ s\,(\alpha) = n)\}.$$

Afirmamos que T_n es anticadena. Supongamos, por el contrario, que existen $t, s \in E_n$ distintos tales que $s \subseteq t$. Entonces, existen $\beta < \alpha$ de tal forma que $dom\,(s) = \beta + 1$ y $dom\,(t) = \alpha + 1$, esto implica que $t\,(\alpha) = n = t\,(\beta)$, lo cual es una contradicción puesto que t es inyectiva.

Ahora bien, sea

$$T^+ = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Niv_{\alpha+1}\,(T).$$

Probemos que $T^+ \subseteq \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Para ello sea $s \in T^+$, entonces $s : \alpha + 1 \to \omega$ para alguna $\alpha < \omega_1$, por lo que existe $k \in \omega$ tal que $s\,(\alpha) = k$, así $s \in T_k$.

De acuerdo con el párrafo anterior, T^+ es unión numerable de anticadenas. Afirmamos que una de estas anticadenas debe ser no numerable, pues de lo contrario $|T^+| = \omega$, lo cual es una contradicción debido a que T árbol de Aronszajn implica que $\bigcup_{\alpha<\omega_1} Niv_{\alpha+1}\,(T)$ es no numerable. Como la anticadena está contenida en T, se tiene el resultado. ⊠

Para cada $f \in T$ tenemos que $f : \alpha \to \omega$, para alguna $\alpha < \omega_1$. Ahora, dada $r : \omega \to \omega$ definimos

$$T_r = r \circ T = \{r \circ f : f \in T\}.$$

En el Lema 5.15 probaremos que $|T_r| = \aleph_1$ y que T_r es un árbol.

Antes de continuar enunciamos las siguientes propiedades de T_r:

(1) Si r es un función constante, entonces $T_r \cong \langle \omega_1, < \rangle$.

(2) Si r es la función identidad, entonces $T_r \cong T$; en particular es un árbol de Aronszajn, esto lo hemos probado en el Teorema 5.13.

Lema 5.15. *Para cada $r \in \omega^\omega$, T_r es un árbol de tamaño $\aleph_1$.*

Prueba: Consideremos $\alpha \in \omega_1$. Para cada $f \in T_\alpha$ la función $r \circ f$ pertenece a T_r. De hecho, $r \circ (f \restriction_\beta)$ pertenece a T_r para cada $\beta \in \alpha$ debido a que $r \circ (f \restriction_\beta) \approx r \circ e_\beta$. ⊠

Antes de concluir con la prueba del teorema central de la sección, requerimos de un último lema.

Lema 5.16. *Sea* $\mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$*. Si* $\dot{\mathrm{X}}$ *es un* $\mathbb{P}$*-nombre para un conjunto no numerable de elementos del modelo base* V*, entonces existen* $p \in \mathbb{P}$ *y* Y *un conjunto no numerable tales que* $p \Vdash$"$\check{\mathrm{Y}} \subseteq \dot{\mathrm{X}}$".

Prueba: [FaTo, 4.6, pag. 38] ⊠

Teorema 5.17. *Si* r *es un real de Cohen sobre* V*, entonces*

$$V[r] \models T_r \text{ es un árbol de Suslin.}$$

Prueba: En esta prueba se han omitido algunos pasos que pueden se revisados en [Ba95, 3.3.7].

Comencemos observando que, en virtud del Lema 5.15, bastará probar que T_r tiene la propiedad de Suslin, es decir, que no existen anticadenas no numerables.

Sea $\mathcal{A} \subseteq \omega_1$ no numerable. Por el Lema 5.16, podemos asumir que $\mathcal{A}$ está en el modelo base.

Sea $\mathcal{S} = \{f_\xi \in T : \xi \in \mathcal{A}\}$ de tal manera que para cada $\xi \in \mathcal{A}$, $dom(f_\xi) = \alpha_\xi$ y si $\xi_0 < \xi_1$ entonces $\alpha_{\xi_0} \leqslant \alpha_{\xi_1}$.

Tenemos que demostrar que

$$\{r \circ f_\xi : \xi \in \mathcal{A}\}$$

no es anticadena, para ello debemos probar que dado $p \in \mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$, existe $q \leqslant p$ de tal suerte que

$$q \Vdash \text{“}\exists \xi_0, \xi_1 \in \mathcal{A}\,(r \circ f_{\xi_0} \subseteq r \circ f_{\xi_1})\text{”}.$$

Equivalentemente, tenemos que probar que el conjunto

$$D_{\mathcal{A}} = \{q \in \mathbb{P} : \exists \xi_0, \xi_1 \in \mathcal{A}\,(q \Vdash \text{“}r \circ f_{\xi_0} \subseteq r \circ f_{\xi_1}\text{”})\}$$

es denso en $\mathbb{P}$.

Observemos que $p \Vdash$"$r \circ f_{\xi_0} \subseteq r \circ f_{\xi_1}$" si

$$\text{para todo } \varepsilon < \xi_0 \text{ si } f_{\xi_0}(\varepsilon) \neq f_{\xi_1}(\varepsilon) \text{ y } f_{\xi_0}(\varepsilon), f_{\xi_1}(\varepsilon) \in dom(p) \\ \text{entonces } p(f_{\xi_0}(\varepsilon)) = p(f_{\xi_1}(\varepsilon)),$$

a esta afirmación la llamaremos (Ψ).

Supongamos que $dom(p) = \{0, 1, 2, ..., n\}$. Para cada $\xi \in \mathcal{A}$ sea el conjunto

$$\mathcal{E}_\xi = f_\xi^{-1}[n] = \{\gamma \in \alpha_\xi : f_\xi(\gamma) < n\},$$

es claro que $\mathcal{E}_\xi$ es finito ya que f_ξ es inyectiva.

Notemos que $\{\mathcal{E}_\xi : \xi \in \mathcal{A}\}$ es una familia de conjuntos finitos de cardinalidad $\aleph_1$. Por el Lema del Δ-sistema (ver Sección 1.4), existen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y B de tal modo que $\mathcal{B}$ no es numerable y $\{\mathcal{E}_\xi : \xi \in \mathcal{B}\}$ forma un Δ-sistema con raíz B.

Sin perder la generalidad, podemos suponer que para toda $x \in B$ y para todo $\xi_0, \xi_1 \in \mathcal{B}$ con $\xi_0 < \xi_1$, se sigue que $f_{\xi_0}(x) = f_{\xi_1}(x)$. Todo lo anterior se justifica mediante un argumento de cardinalidad.

De igual manera, por cardinalidad, podemos suponer que $(\mathcal{E}_{\xi_1} \setminus B) \cap$ $dom\,(f_{\xi_0}) = \emptyset$.

Definimos $\mathcal{F} = \{\gamma \in \alpha_{\xi_0} : f_{\xi_0}(\gamma) \neq f_{\xi_1}(\gamma)\}$, afirmamos que $\mathcal{F}$ es finito pues $f_{\xi_0} \approx e_{\alpha_{\xi_0}}$, $f_{\xi_1} \approx e_{\alpha_{\xi_1}}$ y $e_{\alpha_{\xi_0}} \approx e_{\alpha_{\xi_1}}$.

Fijemos $q \subseteq p$ de tal manera que

$$q = p \cup \{\langle f_{\xi_1}(\gamma), p(f_{\xi_0}(\gamma))\rangle : \gamma \in \mathcal{F}\}.$$

Observemos que lo único que falta por probar es que $f_{\xi_1}(\gamma) \geqslant n$. Para ello sea $\gamma \in \mathcal{F}$. Debemos considerar los siguientes casos:

1) Si $\gamma \in B$, terminamos debido a que f_{ξ_0} y f_{ξ_1} coinciden en B.

2) Si $\gamma \in \mathcal{E}_{\xi_0} \setminus B$, entonces $\gamma = f_{\xi_0}^{-1}(k)$ para alguna $k < n$. Se sigue que $f_{\xi_1}(\gamma) \geqslant n$ pues de otra manera $\gamma \in \mathcal{E}_{\xi_1}$ y en consecuencia $\gamma \in (\mathcal{E}_{\xi_1} \setminus B) \cap dom\,(f_{\xi_0})$, lo cual es una contradicción.

3) Si $\gamma \notin \mathcal{E}_{\xi_0}$, entonces $f_{\xi_0}(\gamma) \geqslant n$ por definición y en tal caso $f_{\xi_1} \geqslant n$ pues si no, $\gamma \in (\mathcal{E}_{\xi_1} \setminus B) \cap dom\,(f_{\xi_0})$ y por tanto $f_{\xi_1}(\gamma) \geqslant n$.

Nuestra q satisface (Ψ). Esto concluye la prueba del teorema. ⊠

Capítulo VI
La Conjetura de Borel

La consistencia de la negación de la Conjetura de Borel utilizando reales de Cohen

En el Análisis Matemático una medida es una función que asigna a determinados conjuntos un número real positivo o cero y que satisface ciertos axiomas. En 1919 Émile Borel intentó clasificar todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida cero. En su trabajo, Borel introdujo la clase de conjuntos de medida fuertemente cero y enunció la conjetura que lleva su nombre.

Un estudio completo de la conjuntos de medida cero y de los de medida fuertemente cero escapa al alcance de nuestro trabajo, lo relevante es que la conjetura de Borel (CB) resultó ser un enunciado independiente de los axiomas de ZFC.

Probar que ZFC$+\neg CB$ es consistente no requiere técnicas de forcing, es consecuencia de la Hipótesis del Continuo ([Hz, 4.15]). No obstante, en esta sección demostraremos este resultado agregando reales de Cohen.

La parte que demuestra que ZFC$+CB$ es consistente requiere de otra noción de forcing debida a Richard Laver, matemático estadounidense, que realizó su trabajo en 1976. Debido a que nuestro interés es solamente lo referente a las consecuencias agregar reales de Cohen, omitiremos la prueba de Laver. Para los interesados referimos a [Ba95, 8.3].

Definición 6.1. *Decimos que* $X \subseteq \mathbb{R}$ *es de* medida de Lebesgue cero *si dado* $\varepsilon > 0$*, existe una sucesión* $\{I_n : n \in \omega\}$ *de intervalos abiertos tales que* $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ *y* $\sum_{n\in\omega} l\left(I_n\right) < \varepsilon$*.*[9]

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es de medida cero}\}.^{10}$$

Definición 6.2. *Un conjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *es de* medida fuertemente cero *si para cada sucesión* $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ *de reales positivos, existe una cubierta* $\{I_n : n \in \omega\}$ *de* X *por intervalos tales que*

$$l(I_n) < \varepsilon_n, \text{ para toda } n \in \omega.$$

Denotaremos con $\mathcal{SN}(\mathbb{R})$ al conjunto de todos los subconjuntos de números reales que son de medida fuertemente cero .

Teorema 6.3. $\mathcal{SN}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbb{R})$*. Además,* $[\mathbb{R}]^{\leqslant\omega} \subseteq \mathcal{SN}(\mathbb{R})$*.*

Prueba: Veamos que $\mathcal{SN}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbb{R})$. Sean $X \in \mathcal{SN}(\mathbb{R})$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Definimos $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ para cada $n \in \omega$. Entonces, existe $\{I_n : n \in \omega\}$ sucesión de intervalos tales que cubren X, y además

$$\textstyle\sum_{n\in\omega} l\left(I_n\right) < \sum_{n\in\omega} \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Ahora bien, para ver que todo $X \subseteq \mathbb{R}$ numerable pertenece a $\mathcal{SN}(\mathbb{R})$ consideremos $X = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$.

Sea $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{R}^+$, definamos para toda $n \in \omega$ el intervalo $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon_n}{3}, x_n + \frac{\varepsilon_n}{3}\right)$, así $l\left(I_n\right) < \varepsilon_n$ para cualquier natural n. Por último, es claro que $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$. ⊠

Se puede probar que $\mathcal{SN}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{N}(\mathbb{R})$. El testigo de este resultado es el conjunto de Cantor, éste se define recursivamente de la siguiente manera:

$$C_0 = [0,1],$$

$$C_n = C_{n-1} \setminus \left[\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3^n}\right) \cup \ldots \cup \left(\tfrac{3^n-2}{3^n}, \tfrac{3^n-1}{3^n}\right)\right].$$

[9] $l\left(I_n\right)$ denota la longitud del intervalo I_n.

[10] Se utiliza la letra $\mathcal{N}$ para denotar a esta colección debido a que también se les conoce a los conjuntos de medida cero como *nulos*.

El conjunto de Cantor es $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\omega} C_n$. Como dijimos, se puede demostrar que $\mathcal{C}$ es de medida cero (ver [Wi94, 12.7]). Para verificar que $\mathcal{C} \notin \mathcal{SN}(\mathbb{R})$ invitamos a consultar [Ba95, 8.1.5].

Ahora sabemos que tiene sentido hablar de los conjuntos de medida fuertemente cero como clase distinta de los conjuntos de medida cero. E. Borel conjeturó una propiedad importante referente a estos conjuntos.

Conjetura de Borel: *Todo conjunto de números reales de medida fuertemente cero es numerable.*

La conjetura de Borel resultó ser independiente de la axiomatica de Zermelo Fraenkel.

Para probar que no es cierta la conjetura de Borel debemos construir un modelo donde exista un subconjunto de números reales no numerable que sea de medida fuertemente cero. Resultará que el modelo buscado es $V[G]$, donde G es un filtro $Fn(\omega, 2)$-genérico, es decir, el modelo que se obtiene al agregar un real de Cohen.

Para realizar este objetivo precisamos de una caracterización de los conjuntos de medida fuertemente cero en términos combinatorios.

Recordemos que dado un subconjunto A de un espacio métrico, el *diámetro* de A es la mínima cota superior de las distancias entre los puntos de A. Denotaremos por $\delta(A)$ al diámetro de A.

Definición 6.4. *Dado (Y, d), espacio métrico, decimos que $X \subseteq Y$ es de* medida fuertemente cero *si para cada $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{R}^+$, existe una cubierta $\{x_n : n \in \omega\}$ de X tal que $\delta(x_n) < \varepsilon_n$, para cada $n \in \omega$.*

$$\mathcal{SN}(Y) = \{A \subseteq Y : A \text{ es de medida fuertemente cero}\}.[11]$$

Definamos en 2^ω la siguiente métrica:

$$d(x, y) = \sum_{n\in\omega} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^{n+1}}.$$

La comprobación de que efectivamente es métrica se sigue de las propiedades del valor absoluto y de la convergencia de la serie.

[11] Siglas tomadas del nombre en inglés *Strong Null*.

A partir de esta definición podemos dar una importante equivalencia de los conjuntos de medida fuertemente cero en el espacio métrico $(2^\omega, d)$.

Lema 6.5. $\delta(\langle s\rangle) = \frac{1}{2^{|s|}}$.

Prueba: Sean $x, y \in \langle s\rangle$. Entonces $s \subseteq x \cap y$ y en consecuencia,

$$d(x,y) = \sum_{n\in\omega} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{n+1}} = \sum_{n<|s|} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{n+1}} + \sum_{n\geqslant|s|} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n\geqslant|s|} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n\geqslant|s|} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{|s|}}.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2^{|s|}}$ es cota superior de las distancias entre los elementos de $\langle s\rangle$, el lema estará demostrado si verificamos que $\frac{1}{2^{|s|}}$ es la mínima cota superior.

Sean $f, g : |s|+1 \to \omega$ las funciones constantes de unos y ceros respectivamente, definimos $x = s \cup f$ y $y = s \cup g$, es inmediato que

$$d(x,y) = \sum_{n\geqslant|s|} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{n+1}} = \sum_{n\geqslant|s|} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{|s|}}.$$

Concluimos que $\frac{1}{2^{|s|}} = \delta(\langle s\rangle)$. ⊠

Sea $T : 2^\omega \to [0,1]$ definida como:

$$T(x) = \sum_{n\in\omega} \frac{x(n)}{2^{n+1}}$$

La convergencia de la serie $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^{n+1}}$ nos asegura que T está bien definida.

Lema 6.6. *Para cualquier $X \subseteq 2^\omega$ se tiene que $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$ si y sólo si $T[X] \in \mathcal{SN}([0,1])$.*

Prueba: Sean $x, y \in 2^\omega$. Afirmamos que $|T(x) - T(y)| \leqslant d(x,y)$. En efecto,

$$\left|\sum_{n\in\omega} \frac{x(n)}{2^{n+1}} - \sum_{n\in\omega} \frac{y(n)}{2^{n+1}}\right| = \left|\sum_{n\in\omega} \frac{x(n)-y(n)}{2^{n+1}}\right| \leqslant \sum_{n\in\omega} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^{n+1}}.$$

Ahora, sea $A \subseteq 2^\omega$, procedamos a calcular $\delta(T[A])$. Para ello sean $s, t \in T[A]$, entonces existen $x, y \in A$ de tal modo que $s = T(x)$ y $t = T(y)$, en consecuencia

$$|s-t| = |T(x) - T(y)| \leqslant d(x,y) \leqslant \delta(A).$$

Concluimos que $\delta(T[A]) \leqslant \delta(A)$.

Sea X un subconjunto de 2^ω de medida fuertemente cero. Luego, sea $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión arbitraria de números reales positivos. Por hipótesis existe $\{X_n : n \in \omega\}$, sucesión de cubiertas de X, con la propiedad de que para cada $n \in \omega$, $\delta(X_n) \leqslant \varepsilon_n$. Entonces, $T[X] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} T[X_n]$ y para cualquier $n \in \omega$,

$$\delta(T[X_n]) \leqslant \delta(X_n) < \varepsilon_n.$$

Así, $T[X]$ es de medida fuertemente cero en $[0,1]$.

Para probar el recíproco, definamos para cada $s \in 2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, la función $s^* : \omega \to 2$ de la siguiente manera: $s^* \restriction_{|s|} = s$ y $s^*(n) = 0$ para cualquier $n \in \omega \setminus |s|$. A partir de la anterior función podemos establecer el siguiente intervalo contenido en $[0,1]$:

$$I_s := (T(s^*), T((s \cup \{(|s|, 1)\})^*)).$$

Afirmamos que para cada $s \in 2^{<\omega}$, $l(I_s) = \frac{1}{2^{|s|+1}}$. En efecto,

$$T(s^*) = \sum_{n\in\omega} \tfrac{s^*(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n\leqslant|s|-1} \tfrac{s^*(n)}{2^{n+1}} = \tfrac{k}{2^{|s|}}, \text{ para algún } k < 2^{|s|}.$$

Luego, $T((s \cup \{(|s|, 1)\})^*) = \frac{k}{2^{|s|}} + \frac{1}{2^{|s|+1}} = \frac{2k+1}{2^{|s|+1}}$. Por lo tanto,

$$l(I_s) = T((s \cup \{(|s|, 1)\})^*) - T(s^*) = \tfrac{2k+1}{2^{|s|+1}} - \tfrac{k}{2^{|s|}} = \tfrac{1}{2^{|s|+1}}.$$

Ahora bien, sea $D = \{\frac{k}{2^n} : k \in \omega \; \& \; k \leqslant 2^n\}$. Tenemos dos afirmaciones relevantes:

(1) Si $\frac{k}{2^m} \in D$, aseguramos que existe $s \in {}^m2$ de tal forma que $T(s^*) = \frac{k}{2^m}$. Procedamos por inducción matemática sobre la variable m. Para el paso base basta con considerar $s = \langle 1 \rangle \in {}^12$. Enunciamos la hipótesis inductiva; supongamos que para $m \in \omega$ y $a \leqslant 2^m$ existe $s \in {}^m2$ de tal modo que $T(s^*) = \frac{a}{2^m}$. Sea $t = s \cup \{(|s|, 1)\}$, tenemos que $t \in {}^{m+1}2$ y

$$T(t^*) = \sum_{n\in\omega} \tfrac{t(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n\leqslant|s|} \tfrac{t(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n<|s|} \tfrac{t(n)}{2^{n+1}} + \tfrac{t(|s|)}{2^{m+1}} = \tfrac{a}{2^m} + \tfrac{1}{2^{m+1}}.$$

Esto concluye la prueba de la afirmación. [12]

[12] $\frac{a}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}$ es el punto medio del intervalo $\left(\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right)$.

(2) Se puede probar que para cualquier $r \in [0,1] \setminus D$ y para cualesquiera $a, b \in [0,1]$ tales que $a < r < b$, se sigue que existe $s \in 2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de tal forma que: $r \in I_s \subseteq (a,b)$.

Ahora bien, sea $X \subseteq 2^\omega$ de tal modo que $T[X] \in \mathcal{SN}([0,1])$. Entonces $T[X] \setminus D \in \mathcal{SN}([0,1])$. Luego, dada $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{R}^+$, para cada $n \in \omega$ existe $k_n \in \omega$ de tal forma que $\frac{1}{2^{k_n+1}} < \varepsilon_n$. Sea $\{J_n : n \in \omega\}$ una sucesión de intervalos tales que $l(J_n) < \frac{1}{2^{k_n+1}} < \varepsilon_n$.

Luego, para cada $n \in \omega$ existe I_{s_n} con $l(I_{s_n}) = \frac{1}{2^{k_n+1}} < \varepsilon_n$ de tal manera que $J_n \subseteq I_{s_n}$. Efectivamente , dado J_n solamente pueden suceder dos casos:

i) $J_n \subseteq I_{s_n}$, para algún $n_0 \in \omega$ tal que $I_{s_n} = \left(\frac{n_0}{2^{k_n}}, \frac{n_0+1}{2^{k_n}}\right)$.

ii) $J_n \subseteq I_{s_n} \cup I'_{s_n}$, donde para algún $n_0 \in \omega$, $I_{s_n} = \left(\frac{n_0}{2^{k_n}}, \frac{n_0+1}{2^{k_n}}\right)$ y $I'_{s_n} = \left(\frac{n_0+1}{2^{k_n}}, \frac{n_0+2}{2^{k_n}}\right)$, en tal caso $J_n \subseteq I_{s_{n+1}}$.

Por tanto, existe $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$ tal que $\delta(\langle s_n \rangle) \leqslant l(I_{s_n}) < \varepsilon_n$. Además, $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \langle s_n \rangle$. Con esto concluimos que $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$. ⊠

Teorema 6.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$

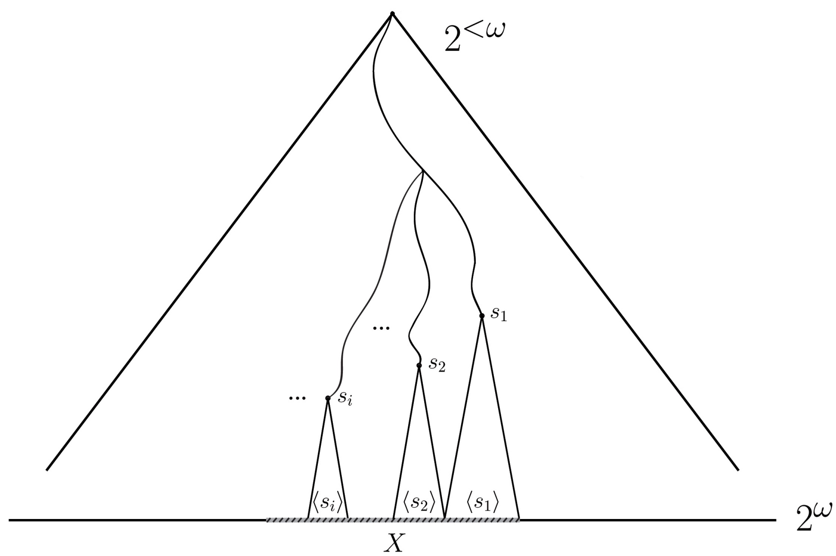
(2) Para cada $f \in \omega^\omega$ *existe* $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$*, de tal manera que para cada* $n \in \omega$, $|s_n| = f(n)$ *y además* $X \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \langle s_n \rangle$.

Prueba: Probemos que el inciso (1) implica el inciso (2). Dados $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$ y $f \in \omega^\omega$, definamos la siguiente sucesión $\left\langle \frac{1}{2^{f(n)}} : n \in \omega \right\rangle$. Entonces, por el Lema 6.6, $T[X] \in \mathcal{SN}[(0,1)]$. Nuevamente, siguiendo la prueba del Lema 6.6, se puede construir $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$ con las propiedades deseadas.

Ahora comprobemos que (2) implica (1). Dada $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{R}^+$, existe $f \in \omega^\omega$ tal que $\frac{1}{2^{f(n)}} < \varepsilon_n$, para cada $n \in \omega$. Luego, por (2) existe $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq 2^\omega$ con $\delta(\langle s_n \rangle) = \frac{1}{2^{f(n)}} < \varepsilon_n$, para cualquier n natural. Además, $\{\langle s_n \rangle : n \in \omega\}$ es una cubierta para X. Por tanto, $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$. ⊠

Ilustremos el Teorema 6.7 con la siguiente imagen.

Caracterización combinatoria de los elementos de $\mathcal{SN}(2^\omega)$



En el Teorema 6.3 probamos que los conjuntos numerables son de medida fuertemente cero, ahora demostraremos nuevamente este resultado haciendo uso del Teorema 6.7, el fin de realizar la prueba de nueva cuenta es habituarnos al uso de la caracterización combinatoria.

Teorema 6.8. *Sea* $X \subseteq 2^\omega$ *numerable, entonces* $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$.

Prueba: Sean $f \in \omega^\omega$ y $X = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq 2^\omega$. Para cada $n \in \omega$ definamos $s_n = x_n \restriction_{f(n)}$. Así, es inmediato que $|s_n| = f(n)$ para todo número natural n.

Por otro lado, para $m \in \omega$, se tiene que $x_m \in \langle s_m \rangle$. Por lo tanto, $X \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \langle s_n \rangle$. En virtud del Teorema 6.7, $X \in \mathcal{SN}(2^\omega)$. ⊠

Concluiremos esta sección demostrando que añadir un real de Cohen hace que los reales del modelo base sean de medida fuertemente cero.

Teorema 6.9. *Sea* $\mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$. *Si* G *es un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* V*, entonces* $V[G] \models 2^\omega \cap V \in \mathcal{SN}(2^\omega)$.

Prueba: Si $f \in \omega^\omega \cap V[G]$, entonces existen $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in G$ tales que $\left(\dot{f}\right)_G = f$ y $p \Vdash$"$\dot{f} \in \omega^\omega$".

Definamos para cada $k \in \omega$ el siguiente conjunto:

$$D_k = \{q \in \mathbb{P} : |q| \geqslant k \ \& \ \exists l_k \in \omega (q \Vdash \text{``}\dot{f}(k) = l_k\text{''})\}.$$

Afirmamos que para cualquier $k \in \omega$, D_k es denso por debajo de p. Efectivamente, sea $r \leqslant p$, entonces $r \Vdash$ "$\dot{f} \in \omega^\omega$" por congruencia. Por el Corolario 1.22, existen $q_0 \leqslant r$ y $l_k \in \omega$ tales que $q_0 \Vdash$ "$\dot{f}(k) = l_k$". Sea $q_1 = q_0 \cup \{(i,0) : i \in k \setminus dom(q_0)\}$, entonces $q_1 \in D_k$ y $q_1 \leqslant r$. Esto muestra que D_k es denso por debajo de p y por el Lema 1.10, $G \cap D_k \neq \emptyset$.

Sea $\dot{c} \in V^{\mathbb{P}}$, tal que $(\dot{c})_G = \bigcup G = c$, es decir, $\dot{c}$ es un nombre para el real de Cohen. Consideremos $q \in G \cap D_k$. Por una parte, como q es elemento de G, se tiene que $q \subseteq \bigcup G = c$. Así, existe $m \in \omega$ de tal manera que $q \subseteq c \restriction_m$. Luego, como q también es elemento de D_k, entonces $|k| \leqslant |q| \leqslant |c \restriction_m|$. Por ende, $c \restriction_m \in D_k$ y en consecuencia podemos definir el siguiente número natural:

$$m_k = min\{m \in \omega : c \restriction_m \in D_k\}.$$

Por ende, $c \restriction_{m_k} \in D_k$ y esto, a su vez, implica que $m_k \geqslant k$ y que existe $l_k \in \omega$ de tal forma que $c \restriction_{m_k} \Vdash$ "$\dot{f}(k) = l_k$". Establezcamos la siguiente colección de funciones finitas de ω en 2: para cada $k \in \omega$ definimos $s_k \in 2^{<\omega}$ de tal manera que $|s_k| = l_k$, y $s_k(j) = c(m_k + j)$ para todas las $j < k$.

Por el Teorema 6.7, la prueba estará terminada si mostramos que $2^\omega \cap V \subseteq \bigcup_{k \in \omega} \langle s_k \rangle$. Efectivamente, sea $x \in 2^\omega \cap V$, sabemos que existen $r_0 \in G$ y $\check{x} \in V^{\mathbb{P}}$ de tal forma que $r_0 \Vdash$"$\check{x} \in \omega^\omega$. Sea $k_0 > max(dom(r_0))$ consideremos $s : m_{k_0} + l_{k_0} \to \omega$ de la siguiente manera:

$$s(n) = \begin{cases} c \restriction_{m_{k_0}} (n) & n < m_{k_0} \\ x(j) & j \in \omega \ \& \ n = m_{k_0} + j \end{cases}.$$

Observemos que $s \leqslant c \restriction_{m_{k_0}} \leqslant r_0$, así que de las propiedades del forcing de Cohen se sigue que $s \Vdash$ "$\check{s} \subseteq \bigcup \Gamma = \ddot{c}$". De donde, $s_{k_0}(j) = c(m_{k_0} + j) = s(m_{k_0} + j) = x(j)$ para toda $j < l_{k_0}$. Esto último implica que $x \in \langle s_{k_0} \rangle$. ⊠

Bibliografía

[Al07] J. A. Alonso Jiménez, J. Borrego Díaz, M. de J. Pérez Jiménez, J. L Ruiz Reina, *Curso Práctico de Teoría de Conjuntos*, Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Sevilla, Obra bajo una licencia Reconocimiento-No comercial-CompartirIgual 2.5 Spain de Creative Commons, 2007.

[Am11] J.A. Amor Montaño, G. Campero Arena, F. E. Miranda Perea, *Teoría de conjuntos, curso intermedio*, Coordinación de Servicios Estudiantiles, Facultad de Ciencias UNAM, 2011.

[Ba95] T. Bartoszynski, H. Judah, *Set Theory, On the Structure of the Real Line*, A K Peters, Wesley Massachusetts, 1995.

[Bl03] A. Blass, *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum,* The Handbook of Set Theory, ed. Matthew Foreman, M. Foreman, M. Magidor y A. Kanamori, Springer, 2003.

[Ca10] F. Casarrubias Segura, A. Tamariz Mascarúa, Elementos de Topología de Conjuntos, Manuscrito 2010.

[FaTo] I. Farah, S. Todorcevic, *Forcing - Version of May, 2010,* Notas para curso avanzado de forcing.

[Hr] M. Hrusak, *Invariantes cardinales del continuo*, Notas para curso semestral de maestría en Ciencias Matemáticas.

[Hz] F. Hernández-Hernández, A. Flores Ferrer, C. Martínez Lázaro, Luis. Martínez Pérez, A. Torres Ayala, *Conjuntos especiales de números reales*, "Prepint" descargable en http://www.fismat.umich.mx/~fhernandez/.

[Hz03] F. Hernández-Hernández, *Teoría de conjuntos, una introducción*, Segunda edición, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[Iv11] C. Ivorra Castillo, *Pruebas de consistencia*, Texto en formato electrónico para descarga gratuita a través de http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Conjuntos.pdf, 2011.

[Je02] T. Jech, *Set Theory*, Springer, 2002.

[Ka08] A. Kanamori, *Cohen and the set theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, Volumen 14, Number 3, 2008.

[Ku11] K.Kunen, *Set Theory*, Studies in Logic, Mathemathical Logic and Foundations Volumen 34, College Publications 2011.

[Ku80] K.Kunen, *Set Theory, an introducction to independence proofs,* North Holland, 1980.

[Le13] A. L. Celis Martínez, *Encajes entre nociones de Forcing*, Tesis que para obtener el título de Matemático, presenta Alonso Lenin Celis Martínez; asesor Dr. Roberto Pichardo Mendoza, Facultad de Ciencias UNAM, 2013.

[Ma13] M. Lara Mary, *Propiedades combinatorias sobre árboles*, Tesis que para obtener el título de Maestro en Ciencias, presenta Manuel Alejandro Lara Mary, Centro de Ciencias Matemáticas UNAM, Campus Morelia, Manuscrito 2013.

[Ro79] J. Roitman, *Adding a random or a Cohen real: topological consequences and the effect on Martin's axiom,* Fundamenta Mathematicae 103.1 (1979): 47-60.

[Ro10] J. Roitman, *Notes on Forcing,* Notes for an advanced graduate class in forcing, 2010.

[Ru76] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third edition, Mc Graw-Hill, 1976.

[SPM12] SPM Bulletin, Issue number 34, August 2012, Cornell University Library, http://arxiv.org/pdf/1208.5631.pdf.

[St93] J. Steprans, *Combinatorial consecuences of adding Cohen reals*, Israel J. Math 6, pag. 583-617, 1993.

[Wi94] H. J. Wilcox, D. L. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series,* Dover Books on Mathematics,1994.