UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Maestría en Ciencias Matemáticas

Familias de operadores de Jacobi unitariamente equivalentes

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Maestro en Ciencias

PRESENTA:
Diego Leonardo Hernández Bustos

Luis Octavio Silva Pereyra

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

MÉXICO, D. F. Diciembre 2013.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo se propone un acercamiento a algunas de las propiedades de los operadores de Jacobi relacionadas con las matrices de Jacobi que los representan con respecto a cierta base ortonormal. Dada una matriz de Jacobi $[a]$ y una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, se construye un operador J de tal forma que la matriz $[a]$ es la representación matricial del operador J con respecto a la base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces una pregunta que surge de manera natural es ¿se puede encontrar otra base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$, de modo que el operador J tenga como representación matricial con respecto a la base $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una matriz de Jacobi?. El acercamiento que se propone este trabajo es dar respuesta a la pregunta anterior. Pregunta que no es trivial y su indagación requiere herramientas avanzadas de Análisis Matemático y Análisis Espectral. Los operadores de Jacobi tienen importancia teórica en la teoría espectral de operadores debido a que todo operador auto-adjunto simple es en realidad un operador de Jacobi auto-adjunto. Además de la relevancia teórica, este tipo de operadores tiene aplicaciones en la mecánica cuántica, particularmente en la óptica cuántica, en la física de la materia condensada y mecánica,y en la biomatemática.

Primero se recuerdan algunas propiedades de medida espectral y el teorema espectral, luego se realiza un breve estudio de representación matricial de operadores lineales en espacios de Hilbert, en particular el caso no acotado, que es el caso no trivial y de interés en el desarrollo de este trabajo. A continuación se presenta la definición de un operador simple, la definición de vector generador y la definición de vector cíclico. Se demuestra que dado un operador simple definido en un espacion de Hilbert $\mathcal{H}$, existe una isometría Φ entre el espacio $L^2(\mathbb{R};\mu_g)$ y el espacio $\mathcal{H}$, donde μ_g es una medida que depende de la medida espectral asociada al operador simple, y donde g es un elemento generador de este operador. También se hace una demostración alternativa de la proposición que dice que g es un vector generador de un operador simple A, si y sólo si, $\overline{\text{span}\{(A - zI)^{-1}g\}} = \mathcal{H}$ donde z recorre el conjunto de los números Complejos con parte imaginaria distinta de cero. El trabajo continúa con la definición de matriz de Jacobi. Se observa que a cada matriz de Jacobi se le puede asociar un operador simétrico cerrado J en un espacio de Hilbert separable. Al operador J mencionado anteriormente también se le llama operador de Jacobi. Posteriormente se calculan los índices de deficiencia de este operador J. Uno de los resultados de este trabajo muestra que a un operador J de Jacobi en ciertos casos se le pueden asociar con más de una matriz de Jacobi. Para finalizar la primera parte del trabajo, se muestra que a cada matriz de Jacobi se le puede asociar un problema de momentos y viceversa: a cada problema de momentos se le puede asociar una matriz de Jacobi. Se demuestra que según los índices de deficiencia de un operador J representado por una matriz de Jacobi, el problema de momentos asociado a esta matriz es un problema determinado o un problema indeterminado.

En este trabajo se demuestra que para todo operador simple existe una base ortonormal, tal que, la representación matricial del operador simple con respecto a esa base, es una matriz de Jacobi.

Para la obtención de los resultados principales de este trabajo se toma un operador deJacobi, y se obtiene una serie de conclusiones a partir de las dos siguientes posibilidades:

Si los índices de deficiencia de un operador de Jacobi son $n_+(J) = n_-(J) = 0$, entonces uno de los frutos de este trabajo es la construcción de una familia de bases ortonormales, tal que, la representación matricial de J con respecto a cada una de estas bases en la familia es una matriz de Jacobi, hay que anotar que estas matrices son diferentes entre si. Esta parte del trabajo permite concluir que sí lo índices de deficiencia de un operador de Jacobi son cero, entonces existe una familia de matrices de Jacobi que se pueden asociar con el mismo operador J. O lo que es lo mismo a este operador J lo puedo asociar a una familia de matrices de Jacobi. Mientras que por otro lado, a cada Matriz de Jacobi se le puede asociar solo un operador de Jacobi J. En los pasos para construir esta familia de bases ortonormales se definen por primera vez en la literatura matemática los vectores de Stone de un operador auto-adjunto J, que son vectores cíclicos que se expresan de la forma $e^{-J^2}g$ o de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_J g$, donde g es un vector generador de J. Estos vectores de Stone permiten construir recursivamente una familia de vectores cíclicos de la forma $e^{-nJ^2}g$, o de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J g$, donde n recorre los números naturales. A partir de cada uno de estos vectores cíclicos se obtiene una base ortonormal, y cada una de estas bases permite construir una matriz de Jacobi que representa al operador de Jacobi J. Esta familia de bases ortonormales se llama familia de bases de Stone. Es conocido que por cada matriz de Jacobi se obtiene un problema de momentos, y ese problema de momentos se asocia o relaciona con el operador representado por tal matriz, entonces otra conclución de este trabajo es que para cada base de una familia de bases de Stone se obtiene un problema de momentos determinado asociado a un operador de Jacobi J, donde este operador J está representado por esta familia de matrices de Jacobi, entonces cada familia de bases de Stone genera una familia de problemas de momentos determinados, asociados con el operador J. Una consecuencia importante de este trabajo es la demostración de que dado un operador de Jacobi J auto-adjunto, y una base ortonormal con respecto a la cual este operador J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi, existen condiciones necesarias y suficientes para que exista otra base ortonormal con respecto a la cual el operador J tiene como representación matricial otra matriz de Jacobi. Este resultado también aparece por primera vez en la literatura matemática. La imagen inversa de los vectores de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J g$, bajo la isometría Φ, cumplen las condiciones necesarias del anterior resultado. Sería interesante encontrar una función φ en $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$, que cúmpla las condiciones necesarias del anterior resultado, pero que su imagen bajo Φ no sea de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J g$.

Si los índices de deficiencia del operador J son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, entonces en este trabajo de manera resumida se hace una pequeña tarea en la que se define lo que es un espacio de Hardy, se definine espacio de de Branges, y se observa que un operador de Jacobi con índices de deficiencia $n_+(J) = n_-(J) = 1$ es un operador Entero en el sentido de Krein. Esa tarea se hace con el fin de exhibir el siguiente resultado de este trabajo. Sí los índices de deficiencia de un operador de Jacobi J son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, entonces sólo existe una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, de tal forma que la representación matricial del operador J con respectos a esa base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una matriz de Jacobi. Por lo tanto existe solo una matriz de Jacobi que representa a un operador de Jacobi J, si y solo si, el operador de Jacobi J no es auto-adjunto. También si los índices de deficiencia del operador J son $n_+(J) = n_-(J) = 1$, como fruto de este trabajo, para cada extensión auto-adjunta J_β de este operador J ($J \subset J_\beta$) se construye una matriz de Jacobi que representa a la extensión J_β con respecto a una base ortonormal. El que cada una de estas extensiones J_β sea auto-adjunta, quiere decir que sus índices de deficiencia son $n_+(J_\beta) = n_-(J_\beta) = 0$. Entonces utilizando los resultados anteriores, se llega a la conclusión que por cada una de estas extensiones J_β se obtiene una familia de bases ortonormales y una familia de matrices diferentes que representan dicha extensión. Y como otra consecuencia de este trabajo, resulta que por cada extensión del operador J será posible hallar una familia de problemas de momentos determinados asociada a cada extensión.Como ultimo resultado de este trabajo, que también aparece por primera vez en la literatura matemática es el siguiente: Cada sucesión de la familia de problemas de momentos determinados asociados a una extensión de J, se podrá expresar en términos del problema de momentos indeterminado, asociado al operador J.

Capítulo 2

Nociones preliminares de teoría espectral

El objetivo de este capítulo es establecer la notación que se utilizará en el desarrollo del trabajo. Se enuncián en una breve revisión las propiedades básicas de medida espectral, y se muestran algunas propiedades de representación matricial de operadores.

2.1. Medida espectral y teorema espectral

Tómese dos elementos f y g en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se denota el producto interno entre ellos por $\langle f; g\rangle$, considerándolo antilineal en el primer argumento. Se recuerda que si un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es separable, entonces existe una base ortonormal en dicho espacio. Se indica por $B(\mathcal{H})$ el espacio de Banach de los operadores acotados definidos en todo $\mathcal{H}$, se denota por $S_\infty(\mathcal{H})$ el subespacio de $B(\mathcal{H})$ de operadores compactos. Se denota por A^* el adjunto de un operador A; también se recuerda que un operador densamente definido A es simétrico si su adjunto A^* es una extensión de él mismo ($A \subset A^*$). Se definen los índices de deficiencia de un operador simétrico A como $n_+(A) := \dim\ker(A^* - \overline{\lambda}I)$ si la parte imaginaria de λ es mayor que cero, y $n_-(A) := \dim\ker(A^* - \overline{\lambda}I)$ si la parte imaginaria de λ es menor que cero. $\mathrm{Rank}(T)$ es la dimensión del rango de un operador T y Q denota el operador de multiplicación por la variable independiente en el espacio $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, sin olvidar que su dominio se define como:

$$\mathrm{dom}(Q) = \{\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mu) \ / \ t\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mu)\}.$$

El conjunto de puntos de tipo casi-regular para un operador lineal cerrado T se define como:

$$\widehat{p}(T) := \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \exists\ C_\xi \text{ y } \|(T - \xi I)f\| \geq C_\xi \|f\|, \ \forall f \in \mathrm{dom}(T)\}.$$

Además $\widehat{p}(T)$ es un conjunto abierto y $\dim(\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(T - \xi I))$ es constante para toda ξ en cualquier componente conexa de $\widehat{p}(T)$ ([4;Cap 3]). El conjunto de puntos λ en $\widehat{P}(T)$ tal que $\operatorname{ran}(T - \lambda I) = \mathcal{H}$ es llamado el resolvente de T y se denota como $p(T)$. Se define el espectro de un operador T como el complemento de su resolvente $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus p(T)$, y se define el núcleo espectral como el complemento del conjunto de puntos de tipo casi regular $\widehat{\sigma}(T) := \mathbb{C} \setminus \widehat{p}(T)$. Es fácil observar que $\widehat{\sigma}(T) \subseteq \sigma(T)$.
En el trascurrir de este trabajo las siguientes propiedades serán de gran utilidad, las demostraciones de estas propiedades se pueden encontrar en ([4; Cap 4].)

i Para todo operador simetrico A, $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \subseteq \widehat{p}(A)$.

ii El núcleo espectral de un operador simétrico A está contenido en $\mathbb{R}$, $(\widehat{\sigma}(A)) \subseteq \mathbb{R}$.)

iii Si un operado A es auto-adjunto ($A = A^*$), entonces $p(A) = \widehat{p}(A)$. Donde se recuerda que $p(A) := \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{ran}(A - \xi I) = \mathcal{H}\}$, por lo tanto $\widehat{\sigma}(A) = \sigma(A)$.

iv Un operador simétrico cerrado A es auto-adjunto si y solo si $n_-(A) = n_+(A) = 0$.

A continuación se citan algunos resultados sin demostración (ver [4; Cap 5]) que serán la base para el desarrollo de este trabajo.
Sea $(Y, \mathcal{A})$ un espacio medible, $\mathcal{H}$ un spacio de Hilbert y $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ el conjunto de proyecciones ortogonales en $\mathcal{H}$. Supóngase que $E : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ es una aplicación que satisface las siguientes condiciones:

i Si $\{\Delta_n\}$ es una secuencia contable de conjuntos medibles disjuntos en $\mathcal{A}$ y $\Delta = \bigcup_n \Delta_n$, entonces $E(\Delta) = s\text{-}\sum_n E(\Delta_n)$. (donde $s\text{-}\sum$ es el límite fuerte de la suma)

ii $E(Y) = I$, donde I es el operador identidad en $\mathcal{H}$.

Entonces E es llamada una medida espectral en $\mathcal{H}$.

Para cada f en $\mathcal{H}$ se puede definir una medida escalar μ_f, como $\mu_f(\Delta) := \langle f; E(\Delta) f\rangle$. Por lo tanto toda medida espectral E genera una familia de medidas escalares finitas definidas sobre $\mathcal{A}$, que cumple las siguientes propiedades:

i $\mu_f(\Delta) = \|E(\Delta)f\|^2$, para todo $f \in \mathcal{H}$.

ii Como $E(Y) = I$ entonces $\mu_f(Y) = \|f\|^2$, para todo $f \in \mathcal{H}$.

Ahora sean f y g en $\mathcal{H}$, se puede definir una medida compleja como $\mu_{fg}(\Delta) := \langle g; E(\Delta) f\rangle$, que cumple las siguientes propiedades:

i $\mu_{fg}(\Delta) := \langle g; E(\Delta) f\rangle \leq \|E(\Delta)g\|\|E(\Delta)f\|$, para todos f y g en $\mathcal{H}$.

ii $\mu_{fg}(\Delta) := \overline{\mu_{gf}(\Delta)}$, para todos f y g en $\mathcal{H}$.

Como en el caso escalar la noción μ medible casi donde sea (μ c.d.s.), tiene el mismo significado para una medida espectral E, E medible casi donde sea (E c.d.s.).
Si ϕ es una función a valor real, medible sobre Y se define

$$E\text{-}\sup\phi := \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} \;/\; \phi(y) \leq a \text{ E-c. d. s.}\},$$

y se dice que la función ϕ es E-acotada si $E\text{-}\sup\phi < \infty$.
Definánse los siguientes conjuntos:

i $\Pi(Y, E) := \{\phi \text{ compleja } / \phi \text{ es E-medible y simple}\}$

ii $L_\infty(Y, E) := \{\phi \text{ compleja } / \phi \text{ es E-medible y E-acotada}\}$

iii $S(Y, E) := \{\phi \text{ E-medible } / \phi \text{ es E-c. d. s. finita}\}$.

El conjunto $L_\infty(Y, E)$ dotado con la suma usual de funciones y la norma

$$\|\phi\|_\infty = E\text{-}\sup|\phi(y)|,$$

es un Espacio de Banach.
Ahora sea ϕ en $\Pi(Y, E)$ se define la integral de ϕ con respecto a la medida E como

$$\int \phi dE := \sum_{k\leq n} c_k E(\Delta_k),$$

donde $\phi := \sum_{k\leq n} c_k\chi_{\Delta_k}$, y χ_Δ es la función característica de Δ. Una propiedad muy importante de esta integral es la siguiente:

Teorema 1.
Sea ϕ en $\Pi(Y, E)$; entonces se tiene que $\|\int \phi dE\| = E\text{-}\sup|\phi|$.

Este teorema dice que la integral es una isometría que va de $\Pi(Y, E)$ a $B(\mathcal{H})$. Como en el caso de medidas escalares se puede demostrar que $\overline{\Pi(Y, E)} = L_\infty(Y, E)$, entonces por la isometría mencionada anteriormente se puede definir para ϕ en $L_\infty(Y, E)$ su integral con respecto a la medida E como:

$$\int \phi dE := \text{u-lim}_n \int \phi_n dE,$$

donde $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\Pi(Y, E)$ tal que $\phi_n \to \phi$ con la norma $\|*\|_\infty$, y u-lim es el límite uniforme.
Para ϕ en $S(Y, E)$ se define el siguiente conjunto:

$$\text{dom}_\phi := \{f \in \mathcal{H} \;/ \int |\phi|^2 d\mu_f < \infty\},$$

se puede deducir (no es fácil) que dom_ϕ es un conjunto lineal, y que $\overline{\text{dom}_\phi} = \mathcal{H}$. Tomando los siguientes conjuntos: $\Delta_n = \{y \in Y \;/\; |\phi(y)| \leq n\}$, se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2. **i** *Si ϕ está en $S(Y,E)$, entonces $\chi_{\Delta_n}\phi$ está en $L_\infty(Y,E)$.*

ii *Si f está en dom_ϕ, entonces $\{(\int \chi_{\Delta_n}\phi dE)f\}_{n=1}^{\infty}$ converge.*

El teorema 2 nos permite definir el siguiente operador:
Para todo f que está en dom_ϕ, se define

$$(\int \phi dE)f := \lim_n \{(\int \chi_{\Delta_n}\phi dE)f\}.$$

Se puede observar que $\mathrm{dom}(\int \phi dE) = \mathrm{dom}_\phi$.
Para este operador se pueden demostrar las siguiente propiedades:

i $\langle f; \int \phi dEf\rangle = \int \phi d\mu_f$ para ϕ en $S(Y,E)$.

ii $\|\int \phi dEf\|^2 = \int |\phi|^2 d\mu_f$ para ϕ en $S(Y,E)$.

iii $\langle g; \int \phi dEf\rangle = \int \phi d\mu_{fg}$ para ϕ en $S(Y,E)$.

iv Sea ϕ_n en $S(Y,E)$, y f en dom_{ϕ_n} para todo n en $\mathbb{N}$, si $\phi_n \to \phi$ en $L^2(Y,\mu_f)$, entonces $\int \phi_n dEf \to \int \phi dEf$.

v Sea ϕ en $S(Y,E)$, f en dom_ϕ y $h = \int \phi dEf$ entonces $\mu_h(\Delta) = \int_\Delta |\phi|^2 d\mu_f$.

vi Sea ϕ en $S(Y,E)$, entonces $\mathrm{dom}((\int \phi dE)^*) = \mathrm{dom}_\phi$ y $(\int \phi dE)^* = \int \overline{\phi} dE$.

vii Para toda ϕ en $S(Y,E)$ el operador $\int \phi dE$ es cerrado y normal.

viii Sea ϕ y φ en $S(Y,E)$, entonces $\overline{\alpha\int \phi dE + \beta \int \varphi dE} = \int(\alpha\phi + \beta\varphi)dE$ y $\overline{\int \phi dE \int \varphi dE} = \int \phi\varphi dE$.

ix Si ϕ es real E-c. d. s., entonces $\int \phi dE$ es auto-adjunto

x Si $|\phi|$ es uno E-c. d. s., entonces $\int \phi dE$ es unitario

xi Si E - $\sup|\phi|$ es acotado, entonces $\int \phi dE$ es acotado.

2.1.1. Teorema espectral

El siguiente teorema es una herramienta indispensable en el desarrollo de este trabajo, su demostración se puede consultar en [4; Cap6].

Teorema Espectral 1. *Sea A un operador auto-adjunto en $\mathcal{H}$. Entonces existe una única medida espectral E_A en $\mathcal{H}$ definida sobre la σ-Álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ tal que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} t dE_A(t). \tag{2.1}$$

También se puede demostrar que si un operador auto-adjunto A es representado por (2.1) entonces $\sigma(A) = \operatorname{supp} E_A$, donde $\operatorname{supp} E_A$ es el soporte de la medida E_A.
Se definen funciones de operadores auto-adjuntos como:

$$\phi(A) := \int \phi(s) dE_A(s),$$

donde ϕ esta en $S(Y, E)$.
Para estas funciones de operadores se pueden demostrar las siguientes propiedades:

i El dominio de $\phi(A)$ es denso en $\mathcal{H}$ y es dado por:

$$\operatorname{dom}(\phi(A)) = \{f \in \mathcal{H} \ / \ \int |\phi(s)|^2 d\mu_f(s) < \infty\}.$$

ii El operador $\phi(A)$ es acotado si y sólo si

$$\|\phi(A)\| = E\text{-}\sup |\phi(\lambda)| < \infty,$$

para λ en $\sigma(A)$.

iii El operador $\phi(A)$ es normal y $(\phi(A))^* = \overline{\phi(A)}$. El operador $\phi(A)$ es auto-adjunto si ϕ es real sobre $\sigma(A)$.

2.2. Representación matricial de operadores

Gran parte del trabajo realizado en esta sección está basado en [1; Sec 26] y [1; Sec 47]

2.2.1. Representación matricial de operadores acotados

Sea $\mathcal{H}$ un Espacio de Hilbert separable, tómese $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, sea $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$. Se define la siguiente aplicación lineal U que va del $\operatorname{span}\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ al $\operatorname{span}\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, como:

$$U(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \eta_k) := \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_k, \tag{2.2}$$

es claro que $U(\eta_k) = \delta_k$ y que $U(\operatorname{span}\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}) = \operatorname{span}\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Sea $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k$ entonces por la identidad Pitagórica se tiene que,

$$\begin{aligned} \|Uf\|^2 &= \|U(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k)\|^2 \\ &= \|f\|^2, \end{aligned}$$

por lo tanto U es un operador isométrico. Por la continuidad de U este mismo se puede extender a un operador isométrico que aplique $\mathcal{H}$ en $\ell_2(\mathbb{N})$. Sea T un operador en $B(\mathcal{H})$ y considérese $\widehat{T} := UTU^{-1}$, entonces $\widehat{T}$ está en $\ell_2(\mathbb{N})$, y para φ en $\ell_2(\mathbb{N})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|\widehat{T}\varphi\| &= \|UTU^{-1}\varphi\| \\ &= \|UTf\| \\ &\leq \|T\|\|\varphi\|,\end{aligned}$$

en conclusión $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.
Sea φ en $\ell_2(\mathbb{N})$ y f en $\mathcal{H}$ tal que $U(f) = \varphi$, como $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\ell_2(\mathbb{N})$, se observa que:

$$\begin{aligned}(\widehat{T}\varphi)_j &=< \delta_j ; \widehat{T}\varphi >_{\ell_2(\mathbb{N})} \\ &=< U(\eta_j); UTf >_{\ell_2(\mathbb{N})},\end{aligned}$$

pero como U es isométrico

$$\begin{aligned}(\widehat{T}\varphi)_j &=< \eta_j ; Tf > \\ &=< \eta_j ; T(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\eta_k) > .\end{aligned}$$

Defínase $t_{jk} :=< \eta_j ; T\eta_k >$,entonces por la continuidad del producto interno se tiene que

$$\begin{aligned}(\widehat{T}\varphi)_j &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k < \eta_j ; T\eta_k > \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k t_{jk}.\end{aligned}$$

Si $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\eta_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\delta_k = \varphi = U(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k U(\eta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\delta_k,$$

así $(\widehat{T}\varphi)_j = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t_{jk}$.
Observemos que

$$\begin{aligned}(\widehat{T}\delta_k)_j &=< \delta_j ; \widehat{T}\delta_k >_{\ell_2(\mathbb{N})} \\ &= t_{jk},\end{aligned}$$

entonces $\widehat{T}\delta_k = \sum_{j=1}^{\infty} t_{jk}\delta_j$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\widehat{T}\delta_k\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |t_{jk}|^2 \\ &\leq \|T\| < \infty.\end{aligned}$$

Definición 1. *Se dirá que un operador T en $B(\mathcal{H})$ admite una representación matricial $[t_{jk}]$ con respecto a una base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ si para f en $\mathcal{H}$ y φ en $\ell_2(\mathbb{N})$ tal que $Uf = \varphi$ entonces $(\widehat{T}\varphi)_j = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t_{jk}$.*

Teorema 3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y T en $B(\mathcal{H})$ con representación matricial $[t_{jk}]$ respecto a una base ortonormal; entonces para φ y ψ en $\ell_2(\mathbb{N})$ se tiene que*

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}\varphi_k\right)\overline{\psi_j}\right| \leq \|T\|\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j|^2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}| < \psi; \widehat{T}\varphi > | &\leq \|\psi\|\|\widehat{T}\varphi\| \\ &\leq \|T\|\|\varphi\|\|\psi\|.\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $[t_{jk}]$ una matriz, $M > 0$ tal que*

$$\left|\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} t_{jk}\varphi_k\right)\overline{\psi_j}\right| \leq M\sqrt{\sum_{j=1}^{q}|\psi_j|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{p}|\varphi_k|^2}$$

para todo p y q en los naturales; entonces existe S en $B(\mathcal{H})$ tal que $[t_{jk}]$ es la representación matricial de S.

Demostración. Supóngase que $q > p$ y $p \geq 1$,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{p-1} = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{p-1} = 0,$$

$\varphi_p = 1$ y $\psi_j \neq 0$ para $p \leq j \leq q$.
Entonces si ψ esta en $\ell_2(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{q}(t_{jp})\overline{\psi}_j\right| &\leq M\sqrt{\sum_{j=1}^{q}|\psi|^2} \\ &\leq M\|\psi\|,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left|\sum_{j=p}^{\infty}(t_{jp})\overline{\psi}_j\right| \leq M\|\psi\|. \tag{2.3}$$

Sea $t^* = \underset{1\leq j\leq p-1}{max}\{t_{jp}\}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{p-1}(t_{jp})\overline{\psi_j}\right| &\leq \sum_{j=1}^{p-1}|t_{jp}||\psi_j|\\ &\leq t^*\sum_{j=1}^{p-1}|\psi_j|\\ &\leq t^*\sum_{j=1}^{p-1}|\psi_j|^2\\ &\leq t^*\|\psi\|^2,\end{aligned}$$

lo que permite concluir que

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1}(t_{jp})\overline{\psi_j}+\sum_{j=p}^{\infty}(t_{jp})\overline{\psi_j}\right| \leq t^*\|\psi\|^2+M\|\psi\|.$$

Sea $\psi^* = \underset{1\leq j\leq p-1}{max}\{|\psi_j|\}$, entonces

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1}(t_{jp})\overline{\psi_j}\right| \leq (p-1)t^*\psi^*,$$

pero $(\psi^*)^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j|^2$, lo que implica que $\psi^* \leq \|\psi\|$, y en consecuencia de lo anterior se tiene que

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1}(t_{jp})\overline{\psi_j}\right| \leq (p-1)t^*\|\psi\|,$$

entonces

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1}(t_{jp})\overline{\psi_j}+\sum_{j=p}^{\infty}(t_{jp})\overline{\psi_j}\right| \leq ((p-1)t^*+M)\|\psi\|. \tag{2.4}$$

Para todo $p \in \mathbb{N}$, defínase $\widehat{\ell}_p(\psi) := \sum_{j=1}^{\infty}(t_{jp})\overline{\psi_j}$ para ψ en $\ell_2(\mathbb{N})$, por (2.4) $\widehat{\ell}_p$ es un funcional acotado en $\ell_2(\mathbb{N})$. Aplicando el teorema de representación de Riesz existe α^p en $\ell_2(\mathbb{N})$ definido como $\alpha^p := \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, tal que

$$\widehat{\ell}_p(\psi) = \langle \alpha^p; \psi \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^p \overline{\psi_j}.$$

Por lo tanto para $p \in \mathbb{N}$ y ψ en $\ell_2(\mathbb{N})$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty} (t_{jp}) \overline{\psi_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^p \overline{\psi_j},$$

entonces $t_{jp} = \alpha_j^p$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
De lo anterior se concluye que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |t_{jp}|^2 < \infty. \tag{2.5}$$

Para $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$ se define

$$(\widehat{S}_0(\delta_k))_j := \sum_{p=1}^{\infty} t_{jp} \delta_{kp} = t_{jk}, \tag{2.6}$$

entonces $\widehat{S}_0 \delta_k = \{t_{jk}\}_{j=1}^{\infty}$, de (2.5) se sabe que $\widehat{S}_0 \delta_k$ está en $\ell_2(\mathbb{N})$.
Para $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k \delta_k$ se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{S}_0 \varphi &= \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \widehat{S}_0 \delta_k \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{N} \varphi_k t_{jk} \right\}_{j=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

entonces $(\widehat{S}_0 \varphi)_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k t_{jk}$ para φ en $\ell_{inf}(\mathbb{N})$. Aquí $\ell_{inf}(\mathbb{N})$ es el conjunto de suceciones $\varphi := \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\varphi_j \neq 0$ para un número finito de j's. Ahora por la hipótesis, para φ y ψ en $\ell_{inf}(\mathbb{N})$ se tiene que

$$\left| \langle \widehat{S}_0 \varphi; \psi \rangle \right| = \sum_{j=1}^{q} \overline{\psi_j} \left(\sum_{k=1}^{N} t_{jk} \varphi_k \right) \leq M \|\varphi\| \|\psi\|. \tag{2.7}$$

Entonces por la continuidad del producto interno la desigualdad (2.7) se cumple para todo ψ en $\ell_2(\mathbb{N})$, sí $\psi = \widehat{S}_0 \varphi$, de la desigualdad (2.7) se tiene que

$$\|\widehat{S}_0 \varphi\|^2 \leq M \|\varphi\| \|\widehat{S}_0 \varphi\|,$$

por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$$\|\widehat{S}_0\varphi\| \leq M\|\varphi\|.$$

Luego $\widehat{S}_0$ es acotado, se extiende $\widehat{S}_0$ por continuidad a todo $\ell_2(\mathbb{N})$ y se denota esta extensión por $\widehat{S}$, tal extensión es un operador acotado en $\ell_2(\mathbb{N})$, y

$$\left(\widehat{S}\varphi\right)_j = \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}\varphi_k,$$

entonces para cualquier base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$, y el operador U, definido como en (2.2), se tiene que

$$S := U^{-1}\widehat{S}U$$

es un operador en $B(\mathcal{H})$ con representación matricial $[t]$.

□

Teorema 5. *Sea $\mathcal{H}$ un Espacio de Hilbert separable y $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal, $[t_{jk}]$ una matriz infinita tal que $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{jk}|^2 < \infty$; entonces existe T en $S_\infty(\mathcal{H})$ tal que $[t_{jk}]$ es su representación matricial.*

Demostración. Como $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{jk}|^2 < \infty$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_{jk}|^2 < \infty, \tag{2.8}$$

y también se tiene que

$$\sum_{j=1}^{\infty}|t_{jk}|^2 < \infty.$$

En conclusión $\{t_{jk}\}_{j=1}^{\infty}$ está en $\ell_2(\mathbb{N})$. Si se define un operador $\widehat{T}_0$ como en (2.6) se puede obtener un operador $\widehat{T}$ en $B(\ell_2(\mathbb{N}))$, de tal forma que se obtiene un operador T en $B(\mathcal{H})$ definido de la siguiente manera:

$$T := U^{-1}\widehat{T}U,$$

donde U es como en (2.2).
Sea $P_m : H \to \operatorname{span}\{u_k\}_{k=1}^{m}$, entonces $\operatorname{Rank}(P_m) := \dim(\operatorname{ran}(P_m)) \leq m$, por lo tanto P_m es compacto, como T está en $B(\mathcal{H})$, entonces P_mT está en $S_\infty(\mathcal{H})$.
Sea f en H tal que $Uf = \varphi$, para U como en (2.2), entonces

$$\|(T - P_mT)f\|^2 = \|(I - P_m)Tf\| = \left\|\left(\widehat{I} - \widehat{P}_m\right)\widehat{T}\varphi\right\|^2 = \sum_{s=m+1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} t_{sk}\varphi_k\right|^2.$$

De (2.8) y aplicando la desigualdad de Holder, se tiene que

$$\begin{aligned}\| (T - P_m T) f\|^2 &\leq \sum_{s=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{sk}|^2\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2\\ &\leq \varepsilon\|\varphi\|^2,\end{aligned}$$

porque $\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{sk}|^2 < \infty$, entonces para un s muy grande la suma $\sum_{s=m+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|t_{sk}|^2$ se puede hacer tan pequeña como se quiera. Por lo tanto

$$\|T - P_m T\| \leq \varepsilon,$$

entonces

$$P_m T \xrightarrow{\mu} T.$$

Luego T está en $S_\infty(\mathcal{H})$. Ya que para r en los naturales el conjunto $k_r(\mathcal{H}) := \{T \in B(\mathcal{H})/\,\mathrm{Rank}(T) < r\}$, esta contenido en $S_\infty(\mathcal{H})$. Además para el conjunto $k(\mathcal{H})$ definido como $k(\mathcal{H}) := \bigcup_{r=0}^{\infty} k_r(\mathcal{H})$, su cerradura con respecto a la norma uniforme $\| * \|_\mu$ es el espacio $S_\infty(\mathcal{H})$. $\left(\text{es decir } \overline{k_r(\mathcal{H})^{\mu}} = S_\infty(\mathcal{H})\right)$. $\square$

2.2.2. Representación matricial de operadores simétricos no acotados

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, sea A un operador simétrico cerrado no acotado, $\left(A \subset A^*; A = \overline{A}\right)$, sea $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tal que $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}(A)$, como A es simétrico se recuerda que $\overline{\mathrm{dom}(A)} = \mathcal{H}$.
Sea

$$A\eta_k = c_k \tag{2.9}$$

y

$$\langle \eta_j; A\eta_k\rangle = t_{jk}. \tag{2.10}$$

Sea B un operador lineal definido para η_k por

$$B\eta_k = c_k, \tag{2.11}$$

para todo $k \geq 1$.
El operador B se puede extender por linealidad al espacio $\mathcal{H}$, así $\mathrm{dom}(B) = \mathrm{span}\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, como $t_{jk} = \langle \eta_j; A\eta_k\rangle = \langle A\eta_j, \eta_k\rangle = \overline{\langle \eta_k, A\eta_j\rangle} = \overline{t_{jk}}$, entonces $\langle \eta_j; B\eta_k\rangle = t_{jk}$ y $\overline{\langle \eta_k; B\eta_j\rangle} = \overline{t_{kj}} = \langle B\eta_j; \eta_k\rangle$, de manera que $\langle \eta_j; B\eta_k\rangle = \langle B\eta_j; \eta_k\rangle$. Por lo tanto B es simétrico. Por (2.9) y (2.11) $B \subset A$, y como A es cerrado se tiene que $\overline{B} \subset A$.

Si un operador lineal cerrado tiene representación matricial $[t_{jk}]$ con respecto a la base $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, este operador debe ser el mínimo operador cerrado que cumplen (2.9) y (2.10). Si $\overline{B} = A$, se dice que A es representado por la matriz $[t_{jk}]$ con respecto a la base $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Definición 2. *Una base ortonormal* $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es llamada una base para la representación matricial de un operador simétrico* A*, si:*

1. η_k *en* $\mathrm{dom}\,(A)$ *para todo* $k \geq 1$
2. *Existe un operador cerrado minimal que asuma el valor* $A\eta_k$ *en* η_k *para todo* $k \geq 1$.

Teorema 6. *Sea* A *un operador simétrico cerrado, sea* $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base ortonormal tal que* η_k *está en* $\mathrm{dom}\,(A)$ *para todo* $k \geq 1$, *y* $\langle \eta_j ; A\eta_k \rangle = t_{jk}$, *para* j *y* k $\in \mathbb{N}$ *entonces;* $(Af)_j = \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} f_k$, *para todo* $f \in dom\,(A)\,,$ *donde* $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (Af)_j &= \langle \eta_j , Af \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k t_{jk} \end{aligned}$$

□

Teorema 7. *Sea* A *un operador simétrico cerrado,* $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una base para la representación matricial de* A, *y* $t_{jk} = \langle \eta_j ; A\eta_k \rangle$. *Sea*

$$\mathrm{dom}\,(T) := \left\{ f \in H \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} f_k \right|^2 < \infty \right\},$$

donde $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \eta_k$ *y se define* $(Tf)_j = \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} f_k$ *para* f *en* $\mathrm{dom}\,(T)\,;$ *entonces* $T = A^*$.

Demostración. Primero se demostrará que $A^* \subset T$. Sea g en $dom\,(A^*)\,,$ existe h en $\mathcal{H}$ tal que $\langle Af ; g \rangle = \langle f ; h \rangle$. Tómese $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \eta_k$ y $h = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \eta_j$, entonces,

$$\begin{aligned} h_j &= \langle \eta_j ; h \rangle \\ &= \langle A\eta_i ; g \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k t_{jk}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}$ es separable y $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal completo, se tiene que $\sum_{j=1}^{\infty} |h_j|^2 = \|h\|^2 < \infty$, por lo tanto $\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} g_k \right|^2 < \infty$, entonces $g \in dom\,(T)$

y $Tg = h$, lo que demuestra que $A^* \subset T$. A continuación se demostrará que $T \subset A^*$. Tómese $g \in \operatorname{dom}(T)$, tal que $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \eta_k$, entonces, $\langle g; A\eta_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{g}_k \langle \eta_k; A\eta_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{g}_k t_{kj}$, y además $(Tg)_j = \langle \eta_j; Tg \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} g_k t_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \overline{t_{kj}}$, de manera que $\overline{\langle \eta_j; Tg \rangle} = \langle Tg; \eta_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{g}_k t_{kj}$, por lo tanto $\langle g; A\eta_j \rangle = \langle Tg; \eta_j \rangle$. Entonces para cada f en $\operatorname{span}\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\langle g; Af \rangle = \langle Tg; f \rangle, \tag{2.12}$$

ya que $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base para la representación matricial, la ecuación (2.8) se cumple para todo f en $\operatorname{dom}(A)$, lo que quiere decir que g está en $\operatorname{dom}(A^*)$ y $A^*g = Tg$, entonces $T = A^*$. □

¿Dado un operador simétrico cerrado A es posible encontrar una base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ con respecto a la cual $\overline{B} = A$?

El siguiente teorema afirma que a cada operador simétrico cerrado corresponde una matriz (Hermitiana), la cual representa el operador en términos de alguna base.

Teorema 8. *Existe una base para la representación matricial de cada operador simétrico cerrado A*

Demostración. [1; Sec 49; T 3] □

Teorema 9. *Si la matriz Hermitiana $[t_{jk}]$ satisface la relación*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |t_{jk}|^2 < \infty, \qquad \textit{para } k \in \mathbb{N},$$

entonces esta matriz $[t]_{jk}$ define un operador simétrico cerrado en términos de cada base ortonormal.

Demostración. Es suficiente hacer

$$A\eta_k = \sum_{i=1}^{\infty} t_{ik} \eta_i,$$

para construir el operador $\overline{B}$ descrito al inicio de esta sección. □

Capítulo 3

Operadores simples

En este capítulo se define lo que es un operador simple y un vector generador. Se demuestra el teorema de representación canónica para un operador simple, se demuestra que dado un operador simple existe un vector cíclico, y que todo vector cíclico es un vector generador.

Definición 3. *Sea $\mathcal{H}$ un Espacio de Hilbert y A un operador auto-adjunto en $\mathcal{H}$, A es un operador simple, si existe g en $\mathcal{H}$ tal que $\overline{\operatorname{span}\{E_A(\Delta)g\}} = \mathcal{H}$, donde Δ recorre los borelianos en $\mathbb{R}$.*

Recuérdese que E_A hace referencia a la medida espectral asociada con el operador A en el teorema Espectral. De la definición se sigue que si $\mathcal{H}$ no es separable, operadores auto-adjuntos en $\mathcal{H}$ no pueden ser simples. El vector g de la definición anterior se llamará vector generador.

Teorema 10. *Sea A un operador auto-adjunto simple, g en $\mathcal{H}$ un elemento generador y $\mu_g(t) := \langle g; E_A(-\infty, t)g\rangle$; entonces la fórmula*

$$f := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g \tag{3.1}$$

asocia a cada función $\varphi(t)$ en $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$ con un vector f en $\mathcal{H}$, esta correspondencia es una aplicación isométrica de $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$ sobre todo $\mathcal{H}$.Dicha aplicación transforma $\operatorname{dom}(Q)$ en $\operatorname{dom}(A)$, y si a un f que está en $\operatorname{dom}(A)$ le corresponde la función $\varphi(t)$ en $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$ entonces a Af le corresponde la función $t\varphi(t)$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} \Phi := L^2(\mathbb{R}; \mu_g) &\to \mathcal{H} \\ \varphi(t) &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g. \end{aligned}$$

Sea $f = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g$, entonces

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f; f \rangle \\ &= \int |\varphi(t)|^2 d\mu_g \\ &= \|\varphi(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mu_g)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto Φ es una isometría. Se observa que

$$\Phi(\Pi) = \operatorname*{span}_{\Delta \in \mathfrak{B}} \{E_A(\Delta) g\},$$

aquí $\mathfrak{B}$ denota los borelianos en los números Reales, y se recuerda que Π es el conjunto de funciones simples. Entonces como A es simple

$$\overline{\Phi(\Pi)} = \overline{\operatorname*{span}_{\Delta \in \mathfrak{B}} \{E_A(\Delta) g\}} = \mathcal{H}$$

así que

$$\Phi(L^2(\mathbb{R}; \mu_g)) = \mathcal{H}.$$

Si se tiene f en $\mathcal{H}$, tal que $f = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g$ para $\varphi(t)$ en $L^2(\mathbb{R}; \mu_g)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} s^2 d\mu_f = \int_{\mathbb{R}} s^2 |\varphi|^2 d\mu_g,$$

de manera que

$$f \in dom(A) \Leftrightarrow \varphi(t) \in dom(Q).$$

Sea $\varphi(t)$ en $dom(Q)$, entonces

$$f = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g$$

por lo que

$$Af = \left(\int_{\mathbb{R}} t dE_A \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A \right) g.$$

Como la cerradura del operador $\int_{\mathbb{R}} t dE_A \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A$ es $\int_{\mathbb{R}} t\varphi(t) dE_A$, entonces

$$Af = \int_{\mathbb{R}} t\varphi(t) dE_A g.$$

$\square$

Lema 1. *Sea f en $L^2(\mathbb{R}, dt)$, tal que si $\int_{\mathbb{R}} f(t)t^k e^{-t^2} dt = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$; entonces $f(t) = 0$.*

Demostración. Como f está en $L_2(\mathbb{R}, dt)$ entonces la integral $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2} dt$ es convergente para cada z en $\mathbb{C}$. Ya que $\left(t - \frac{z}{2}\right)^2 = t^2 - zt + \frac{z^2}{4}$, entonces $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2} dt = e^{z^2/4} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-(t-\frac{z}{2})^2} dt$, y $f(t)e^{-(t-\frac{z}{2})^2}$ lo podemos acotar, porque la parte real de $(t - \frac{z}{2})^2$ para un z fijo es positivo siempre que t se aleje del origen. Ahora defínase la función $F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2} dt$ la cual es entera por la regla de Leibniz generalizada [5; Cap 4; T 2.1]. Así se tiene que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(t)t^n e^{-t^2} dt$$

para todo z en $\mathbb{C}$.
De la hipótesis se concluye que $F(z) = 0$ para todo z en $\mathbb{C}$. Como $F(ix) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la transformada de Fourier de $f(t)e^{-t^2}$ es igual a cero, ya que la transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R}, dt)$ es un operador unitario, por lo tanto se concluye que f es igual a cero. $\square$

Teorema 11. *Sea A un operador auto-adjunto, simple en $\mathcal{H}$; entonces existe un vector h en $\mathcal{H}$ tal que h está en dom(A^k) para todo $k \geq 1$, y $\overline{\operatorname{span}_{k\in\mathbb{N}}\{A^k h\}} = \mathcal{H}$.*

Demostración. Por el teorema anterior, defínase $h =: \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_A g$, donde g es un vector generador de A, h está en $\operatorname{dom}(A^k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, ya que e^{-t^2} está en $\operatorname{dom}(Q^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde se define el dominio de Q^k como:

$$\operatorname{dom}(Q^k) := \{\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}; \mu_g) \ / \ t^k \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}; \mu_g)\}.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} A^k h &= \int_{\mathbb{R}} t^k dE_A h \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2} dE_A g. \end{aligned}$$

Considérese f en $\mathcal{H}$, $f \neq 0$ representado como $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g$, y supóngase que es ortogonal a todos los vectores $A^k h$, para $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle f; A^k h \rangle &= \langle f; \int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2} dE_A g \rangle \\ &= \langle \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dE_A g; \int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2} dE_A g \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^k \varphi(t) e^{-t^2} d\mu_g(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $f \neq 0$, entonces $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 d\mu_g(t) \neq 0$.
Sea $\Omega(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)d\mu_g(s) - C$. Observe que $\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)d\mu_g(s)$ es el producto interno entre g y la imagen de g bajo el operador $\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\chi_{(-\infty,t)}dE_A(s)$, y C es una constante, es decir

$$\Omega(t) = \langle g; \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\chi_{(-\infty,t)}dE_A(s) \right) g\rangle - C.$$

Entonces como $d\Omega(t) = \varphi(t)d\mu_g(t)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2} d\Omega(t) = 0. \tag{3.2}$$

Integrando por partes, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2} d\Omega(t) = t^k e^{-t^2} \left[\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)d\mu_g(s) - C \right] \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \Omega(t)(kt^{k-1} - 2t^{k+1})e^{-t^2} dt.$$

Ya que

$$\lim_{t\to\pm\infty} t^k e^{-t^2} \left[\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)d\mu_g(s) - C \right] = 0$$

de (3.2) se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} 2\Omega(t)t^{k+1}e^{-t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} k\Omega(t)t^{k-1}e^{-t^2} dt, \tag{3.3}$$

si $k = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} 2\Omega(t)te^{-t^2} dt = 0. \tag{3.4}$$

Siempre que se considere la constante

$$C = \frac{\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{t} \varphi(s)d\mu_g(s) \right) e^{-t^2} dt}{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt},$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \Omega(t)e^{-t^2} dt = 0.$$

De (3.3) para $k = 1$ se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} 2\Omega(t)t^2 e^{t^{-2}} dt = \int_{\mathbb{R}} \Omega(t)e^{-t^2} dt = 0, \tag{3.5}$$

para $k=2$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} 2\Omega(t)t^3 e^{t^{-2}} dt = \int_{\mathbb{R}} \Omega(t) t e^{-t^2} dt = 0, \tag{3.6}$$

si k es impar, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \Omega(t) t^{k+1} e^{-t^2} dt = 0, \tag{3.7}$$

y si k es par, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \Omega(t) t^{k+1} e^{-t^2} dt = 0.$$

Por lo tanto para todo $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \Omega(t) t^{k} e^{-t^2} dt = 0,$$

pero por el lema 1 $\Omega(t) = 0$, entonces

$$0 \neq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 d\mu_g(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi(t) d\mu_g(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) d\Omega(t) = 0. \tag{3.8}$$

□

Esta demostración es el resultado de un estudio detallado de lo que se presenta en [2; Cap 4; T 4.2.3].

Definición 4. *Un vector h que cumpla las condiciones del teorema anterior se llama vector cíclico.*

Lema 2. *Sea A un operador auto-adjunto y g en $\mathcal{H}$ fijo.*
Si

$$\overline{\underset{\substack{\varphi\in S\\ g\in \mathrm{dom}\{\varphi(A)\}}}{\mathrm{span}} \{\varphi(A)g\}} = \mathcal{H};$$

entonces g es un elemento generador de A

Demostración. Supóngase que g no es generador, entonces existe h en $\mathcal{H}$, $h \neq 0$, tal que $\langle h; E_A(\Delta)g\rangle = 0$ para todo $\Delta \in \mathfrak{B}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{t} d\mu_{gh} = 0$, por lo tanto para toda $\varphi \in S$ tal que $g \in \mathrm{dom}\{\varphi(A)\}$, se tiene que $\langle h, \varphi(A)g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_{gh} = 0$, así

$$\overline{\underset{\substack{\varphi\in S\\ g\in \mathrm{dom}\{\varphi(A)\}}}{\mathrm{span}} \{\varphi(A)g\}} \neq \mathcal{H}$$

□

Teorema 12. *Sea h un elemento cíclico de un operador A auto-adjunto; entonces A es un operador simple y h es un elemento generador*

Demostración. Como $\overline{\text{span}\{A^k h\}} = \mathcal{H}$ y

$$\operatorname*{span}_{\substack{\varphi \in S \\ h \in \text{dom}\{\varphi(A)\}}} \{\varphi(A)h\} \supset \text{span}\{A^k h\},$$

entonces

$$\overline{\operatorname*{span}_{\substack{\varphi \in S \\ h \in \text{dom}\{\varphi(A)\}}} \{\varphi(A)h\}} = \mathcal{H},$$

luego por el lema 2 se obtiene que h es generador. $\square$

Teorema 13. *g es generador de A si y sólo si $\overline{\text{span}\{(A - zI)^{-1}g\}} = \mathcal{H}$, donde z recorre el conjunto de los complejos con parte imaginaria distinta de cero*

Demostración. Como g es generador, supóngase que existe $h \neq 0$ en $\mathcal{H}$ tal que $\langle h; (A - zI)^{-1}g\rangle = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, entonces $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{gh}(t)}{t-z} = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$. De la identidad de polarización se tiene que

$$4\mu_{gh} = \mu_{g+h} + i\mu_{g+ih} - \mu_{g-h} - i\mu_{g-ih},$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{g+h}(t)}{t - z} - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{g-h}(t)}{t - z} = 0,$$

y también

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{g+ih}(t)}{t - z} - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{g-ih}(t)}{t - z} = 0,$$

de las dos últimas ecuaciones y por [1; Sec 59; T 3], se concluye que $\mu_{g+h} - \mu_{g-h} = 0$, y que $\mu_{g+ih} - \mu_{g-ih} = 0$. Entonces para todo Δ en los borelianos de los números Reales, se tiene que

$$\langle g + h; E(\Delta)g + h\rangle - \langle g - h; E(\Delta)g - h\rangle = 0,$$

luego

$$2\langle g; E(\Delta)h\rangle + 2\langle h; E(\Delta)g\rangle = 0,$$

por lo tanto

$$\langle g; E(\Delta)h\rangle + \langle h; E(\Delta)g\rangle = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\overline{\mu_{gh}} + \mu_{gh} = 0,$$

entonces la parte real de la medida μ_{gh} es igual a cero. Y también se tiene que para todo Δ en los borelianos de los números Reales,

$$\langle g + ih; E(\Delta)g + ih\rangle - \langle g - ih; E(\Delta)g - ih\rangle = 0,$$

entonces

$$2\bar{i}\langle g; E(\Delta)h\rangle + 2i\langle h; E(\Delta)g\rangle = 0,$$

que es equivalente a

$$\bar{i}\langle g; E(\Delta)h\rangle + i\langle h; E(\Delta)g\rangle = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\overline{i\mu_{gh}} + i\mu_{gh} = 0,$$

entonces la parte imaginaria de la medida μ_{gh} es igual a cero.
De los argumentos anteriores se concluye que $\langle h; E(\Delta)g\rangle = 0$ para todo Δ en los borelianos de los números Reales, pero esto no puede ser, porque g es un elemento generador. Por lo tanto no existe $h \neq 0$ tal que $\langle h; (A - zI)^{-1}g\rangle, = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$, entonces $\overline{\text{span}\{(A - zI)^{-1}g\}} = \mathcal{H}$.
Ahora, supóngase que $\overline{\text{span}_{z\in\mathbb{C}/\mathbb{R}}\{(A - zI)^{-1}g\}} = \mathcal{H}$, como

$$\operatorname*{span}_{\substack{\varphi\in S \\ g\in\text{dom}\{\varphi(A)\}}}\{\varphi(A)g\} \supset \text{span}\{(A - zI)^{-1}g\},$$

entonces

$$\overline{\operatorname*{span}_{\substack{\varphi\in S \\ g\in\text{dom}\{\varphi(A)\}}}\{\varphi(A)g\}} = \mathcal{H},$$

aplicando el lema 2 se tiene que g es generador. $\square$

Capítulo 4

Operadores de Jacobi y el problema de momentos

A continuación se presenta un conjunto de matrices infinitas, denotado por $\mathfrak{J}$, y luego se muestra que para cada matriz que tomemos de este conjunto $\mathfrak{J}$, existe un operador simétrico cerrado J, el cual tiene como representación matricial, la matriz que se escogió de $\mathfrak{J}$. Después se observa que los índices de deficiencia de estos operadores pueden ser $n_+(J) = n_-(J) = 0$ ó $n_+(J) = n_-(J) = 1$. En seguida se define lo que es un problema de momentos, y en la última parte de este capítulo, se muestra que a cada matriz en $\mathfrak{J}$, se le puede asociar un problema de momentos y viceversa.

4.1. Operadores de Jacobi

Considérese todas las matrices infinitas de la forma

$$[a] = \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & . & \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & . & . & . & \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & . & . & . & & & \\ . & & 0 & b_{n-1} & q_n & b_n & 0 & . \\ & & & & & & & \\ . & . & & & & . & . & . \end{pmatrix}$$

donde $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$, $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto de estas matrices se denota por $\mathfrak{J}$.

Teorema 14. *Si $[a] \in \mathfrak{J}$; entonces existe un operador simétrico cerrado J en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ tal que $[a]$ es su representación matricial con respecto a una base de $\mathcal{H}$.*

Demostración. $[a]$ es hermitiana y $|b_{k-1}|^2 + |q_k|^2 + |b_k|^2 < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces por el teorema 9 existe un espacio de Hilbert separable y una base ortonormal $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$, tal que, $[a]$ representa un operador simétrico cerrado J en $\mathcal{H}$. □

Definición 5. *Al operador J del teorema anterior se le llama operador de Jacobi, y a una matriz $[a]$ en $\mathfrak{J}$ se le llama matriz de Jacobi.*

Los operadores de Jacobi tienen importancia teórica en la teoría espectral de operadores debido a que todo operador auto-adjunto simple es en realidad un operador de Jacobi auto-adjunto. Además de la relevancia teórica, este tipo de operadores tiene aplicaciones en la mecánica cuántica, particularmente en la óptica cuántica [7, 20], en la física de la materia condensada y mecánica [14, 15, 6, 12, 19], y en la biomatemática [3, 8].

Sea $\xi \in \mathbb{C}$, tomemos f en $\ker(J^* - \xi I)$, donde J es un operador de Jacobi, representado por la matriz

$$[a] = \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & . & . & . & \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & . & . & . & \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & & & & & & \\ . & & & & & & & \\ . & & . & . & . & & & \\ & & & & & & & \\ . & & 0 & b_{n-1} & q_n & b_n & 0 & . \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ . & . & & & & . & . & . \end{pmatrix},$$

con respecto a una base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

f lo podemos expresar de la siguiente manera $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \delta_k$. Suponiendo que f es diferente de cero, y como f está en el $\ker(J^* - \xi I)$, entonces, se puede obtener la ecuación de diferencias:

$$b_{n-1} f_{n-1} + a_n f_n + b_n f_{n+1} = \xi f_n,$$

para $n > 1$, con la siguiente condición de frontera:

$$q_1 f_1 + b_1 f_2 = \xi f_1.$$

Si se toma $f_1 = 1$, se sigue de inmediato que $f_2 = \frac{1}{b_1}(\xi - q_1)$ y que $f_n = P_{n-1}(\xi)$, donde P_{n-1} es un polinomio de grado $n-1$. Se sabe por definición que para que este $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \delta_k$, este en $\mathrm{dom}(J^*)$, debe cumplir por el teorema 7 que:

$$\left(\left(\sum_{n=2}^{\infty} |b_{n-1}f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1}|^2 \right) + |q_1 f_1 + b_1 f_2|^2 \right) < \infty,$$

lo que para este caso es equivalente a que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi f_n|^2 < \infty$. De manera que para que f esté en el $\mathrm{dom}(J^*)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe estar en $\ell^2(\mathbb{N})$, que es lo mismo que decir qué $\sum_{n=1}^{\infty} |P_{n-1}(\xi)|^2 < \infty$, donde $P_0(\xi)$ es un polinomio constante.
Se recuerda que para un operador simetrico A, $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \subseteq \widehat{p}(A)$, donde $\widehat{p}(A) := \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \exists\, C_\xi,\ \|(A - \xi I)f\| \geq C_\xi \|f\|,\ \forall f \in \mathrm{dom}(A)\}$.

Teorema 15. *Sea J un operador de Jacobi, sean $\{P_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ los polinomios obtenidos en el argumento anterior. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |P_{n-1}(\xi)|^2 < \infty$ para un ξ en $\mathbb{C}/\mathbb{R}$; entonces $n_-(J) = n_+(J) = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(\xi)|^2 < \infty$ para todo ξ en $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.*

Demostración. Tómese f como en la argumentación anterior ($f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \delta_k$, y supóngase que $f_1 = 1$). Como $\sum_{n=1}^{\infty} |P_{n-1}(\xi)|^2 < \infty$, entonces se tiene que $f \in \mathrm{dom}(J^*)$, y $f \in \ker(J^* - \xi I)$, con $\xi \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$. por la argumentación anterior se tiene que $f = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(\xi)\delta_n$. Si se toma g en $\ker(J^* - \xi I)$, tal que $g_1 = c$, donde $c \neq 0$, entonces $g_1 = cf_1$, $g_2 = \frac{c}{b_1}(\xi - q_1)$, supóngase que hasta n, $g_n = cf_n$, entonces

$$\begin{aligned} b_{n-1}g_{n-1} + q_n g_n + b_n g_{n+1} &= \xi g_n \\ g_{n+1} &= \frac{1}{b_n}(cf_n(\xi - q_n) - cb_{n-1}f_{n-1}) \\ &= \frac{c}{b_n}(f_n(\xi - q_n) - b_{n-1}f_{n-1}) \\ &= cf_{n+1}. \end{aligned}$$

Lo que implica que $\dim\ker(J^* - \xi I) = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{C}_+$, ya que para operadores simetricos $\dim\ker(J^* - \xi I)$ es constante en $\mathbb{C}_+$ y en $\mathbb{C}_-$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(\xi)|^2 < \infty$ para todo ξ en $\mathbb{C}_+$. Además para ξ en $\mathbb{C}_+$, tenemos que

$$\left|P_{k-1}(\bar{\xi})\right|^2 = \left|\overline{P_{k-1}(\xi)}\right|^2 = \left|P_{k-1}(\xi)\right|^2. \tag{4.1}$$

Por lo tanto $\dim\ker(J^* - \overline{\xi} I) = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{C}_-$, y $\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(\xi)|^2 < \infty$ para todo ξ en $\mathbb{C}_-$. ☐

Teorema 16. *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior. Si* $\sum_{n=1}^{\infty}|P_n(\xi)| = \infty$ *para una* $\xi \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ *entonces* $n_-(J) = n_+(J) = 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}|P_n(\xi)|$ *diverge para toda* ξ *en* $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

Como J es cerrado se puede concluir del teorema 16 que J es auto-adjunto.Ya que todo operador simétrico cerrado es auto-adjunto si y solo si sus índices de deficiencia son cero. El resultado de teorema 15 se puede refinar de la siguiente manera:

Teorema 17. *Bajo las mismas hipótesis del teorema 15. Si* $\sum_{n=1}^{\infty}|P_n(\xi)|^2 < \infty$ *para un* ξ *en* $\mathbb{C}/\mathbb{R}$*; entonces* $n_-(J) = n_+(J) = 1$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}|P_n(\xi)|^2 < \infty$ *para todo* ξ *en* $\mathbb{C}$.

La demostración de esta afirmación se encuentra en [2; Cap1; T 1.3.2] y en ella se utilizan nociones que no se introducen en este trabajo. Alternativamente se puede consultar el teorema 3 de [16].
De la teoría de Von Neumann, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 18. *Sea* J *un operador simétrico cerrado, si* $n_-(J) = n_+(J) = 1$, *entonces existen extensiones auto-adjuntas* J_β *de* J, $(J_\beta \subset J^*)$.

Defínanse los siguientes conjuntos:

$$\mathfrak{J}_0 := \{[a] \in \mathfrak{J} \ /[a] \text{ representa un operador } J \text{ auto-adjunto}\}$$
$$\mathfrak{J}_1 := \{[a] \in \mathfrak{J} \ /[a] \text{ representa un operador } J \text{ con } n_-(J) = n_+(J) = 1\}.$$

Obsérvese que $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 \cup \mathfrak{J}_1$ y que $(\mathfrak{J}_1)^c = \mathfrak{J}_0$.

4.2. El problema de los momentos

Supóngase que se tiene una sucesión $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, se quiere saber, si existe una medida ρ tal que

$$\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\rho(t).$$

A este problema se le conoce como el problema de los momentos.

Definición 6. *Si* $\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\rho(t)$ *tiene una única solución, entonces se dice que el problema de los momentos es determinado, en caso contrario el problema de los momentos es indeterminado.*

Considérese una sucesión $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, donde $s_0 = 1$ y tal que

$$D_k := det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_k \\ s_1 & & & \\ & & & \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{2k} \end{pmatrix} > 0, \tag{4.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Al conjunto de estas sucesiones se le denota por $\mathcal{M}$.

El problema de los momentos es un tema clásico de análisis [2]. Hay resultados aquí que se han acumulado en los últimos 140 años, entre estos resultados están los siguientes que se enuncian sin demostración

Teorema 19. *[[2][Cap 2; T 2.1.1]] $S \in \mathcal{M}$ si y sólo si existe una medida ρ tal que $s_k = \int t^k d\rho(t)$.*

Sea $\mathcal{M}_d$ el conjunto de sucesiones en $\mathcal{M}$ tal que el correspondiente problema de momentos es determinado, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{M}_d \cup \mathcal{M}_i$, donde $\mathcal{M}_i = (\mathcal{M}_d)^c$. Claramente $\mathcal{M}_i$ es el conjunto correspondiente a los problemas de momentos indeterminados.

Teorema 20. *[[2]] Si S está en $\mathcal{M}$; entonces existe una solución ρ del correspondiente problema de momentos tal que*

$$\overline{\operatorname{span}\{t^k\}} = L^2(\mathbb{R}; \rho). \tag{4.3}$$

Definición 7. *[2]. Todas las soluciones del problema de momentos que satisface (4.3) se llaman soluciones N-extremales.*

Si $S \in \mathcal{M}_d$, entonces su única solución ρ del correspondiente problema de momentos es tal que la ecuación (4.3) se cumple.

Teorema 21. *Todo operador de Jacobi auto-adjunto es simple.*

Demostración. Tómese $[a]$ en $\mathfrak{J}$ y tómese al operador de Jacobi J que está representado matricialmente por $[a]$ con respecto a una base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces se tiene que

$$J\delta_1 = q_1\delta_1 + b_1\delta_2$$

$$J\delta_n = b_{n-1}\delta_{n-1} + q_n\delta_n + b_n\delta_{n+1},$$

por lo tanto

$$\delta_k = P_{k-1}(J)\delta_1. \tag{4.4}$$

(Nota: es fácil verificar que (4.4) es la realización del algoritmo de Gram-Schmidt sobre $\{\delta_1, J\delta_1, J^2\delta_1, J^3\delta_1, \dots\}$).
Ademas supóngase que J es un operador de Jacobi auto-adjunto en $\mathcal{H}$. Así que de manera trivial por (4.4) se observa que el primer elemento de esta base δ_1, es cíclico, entonces del teorema 12 se tiene que δ_1 es un vector generador. $\square$

Teorema 22. *Toda extensión auto-adjunta J_β de un operador de Jacobi J no auto-adjunto es un operador simple.*

Demostración. Supógase ahora que $n_-(J) = n_+(J) = 1$, entonces el teorema 18 permite tomar una extensión auto-adjunta J_β de J. Es claro que como J_β es extensión de J, entonces $\delta_k = P_{k-1}(J_\beta)\delta_1$. Lo anterior afirma que $\overline{\operatorname{span}_{k\in\mathbb{N}}\{J_\beta^k\delta_1\}} = \mathcal{H}$, lo que quiere decir que δ_1 es un elemento cíclico de J_β. Por lo tanto por el teorema 12 se tiene que J_β es simple y δ_1 un elemento generador. $\square$

La siguiente argumentación permite demostrar el teorema 23. La segunada parte de la demostración se encuentra en [2; Cap 2; T 2.2.4].
Bajo la suposición que $n_-(J) = n_+(J) = 1$, por el teorema 10, J_β que es una extensión auto-adjunta de J (recuerdése J no es auto-adjunto), es isométricamente isomorfo al operador de multiplicación por la variable independiente en $L^2(\mathbb{R}; \mu_{\delta_1})$, donde $\mu_{\delta_1}(t) := \langle \delta_1; E_{J_\beta}(t)\delta_1\rangle$.
Si se toma

$$s_k := \langle \delta_1; J^k\delta_1\rangle = \langle \delta_1; J_\beta^k\delta_1\rangle = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_{\delta_1}(t),$$

donde $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base para la cual J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi, entonces $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ está en $\mathcal{M}$. Como cada extensión J_β genera una solución del problema de momentos correspondiente a $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ (debido a que por el teorema Espectral para cada extensión J_β existe una medida espectral E_{J_β}), entonces tenemos que $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{M}_i$.
Sea J auto-adjunto y

$$s_k := \langle \delta_1; J^k\delta_1\rangle = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_{\delta_1}(t),$$

donde como se menciono anteriormente $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base para la cual J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi, entonces como ya se había anunciado en [2; Cap 2; T 2.2.4] se demuestra que $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ está en $\mathcal{M}_d$, ya que μ_{δ_1} es es la única solución al problema de los momentos.
(Nota: El argumento anterior me esta diciendo que siempre que se tome una matriz en $\mathfrak{J}$ y se asocie con un operador J, sin importar cuales sean los índices de deficiencia de este operador J, a este operador se le puedo asociar un problema de momentos, por lo tanto a una matriz de Jacobi se le puede asociar un problema de momentos.)
De los argumentos anteriores se tiene el siguiente teorema:

Teorema 23. *Sea $[a]$ en $\mathfrak{J}$ y J el operador representado por $[a]$, la sucesión $S := \{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida como $s_k := \langle \delta_1; J^k\delta_1\rangle$ está en $\mathcal{M}$, más aun si $[a]$ está en $\mathfrak{J}_0$, entonces S está en $\mathcal{M}_d$ y si $[a]$ está en $\mathfrak{J}_1$, entonces S está en $\mathcal{M}_i$.*

Ahora se temora una sucesión en $\mathcal{M}$ para demostrar que existe una matriz de Jacobi la cual podemos asociar con la sucesión.

Tómese una sucesión $S \in \mathcal{M}$, entonces por el teorema 20 existe ρ N-extremal tal que

$$s_k = \int t^k d\rho(t) < \infty.$$

Es obvio que $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ está en $L^2(\mathbb{R};\rho)$ y $\overline{\operatorname{span}\{t^k\}} = L^2(\mathbb{R};\rho)$. Aplicando Gram-Schmidt a $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ se obtiene para $L^2(\mathbb{R};\rho)$ una base ortonormal de polinomios $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, donde

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ \cdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

y D_n es como en (4.2). Para $n = 1, 2, \ldots$
Además se cumple que

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}} t^n + R_{n-1}(t),$$

donde $R_{n-1}(t)$ es un polinomio de grado $n-1$.
El polinomio tP_k es de grado $k+1$, por lo tanto lo podemos escribir de la siguiente manera

$$tP_k(t) = a_{k,k+1}P_{k+1}(t) + a_{k,k}P_k(t) + a_{k,k-1}P_{k-1}(t) \cdots + a_{k,0}1, \tag{4.6}$$

de donde se obtiene que

$$\frac{\sqrt{D_{k-1}D_{k+1}}}{D_k} = a_{k,k+1}.$$

Si se calcula el producto interno entre $\langle tP_k(t), P_i(t)\rangle$ con $i = 0, 1, ...k$ y se recuerda que el operador de multiplicación por la variable independiente en $L^2(\mathbb{R};\rho)$ es auto-adjunto, se tiene que

$$\begin{aligned} a_{k,i} &= 0 \ (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k-2), \\ a_{k,k-1} &= \langle tP_k(t), P_{k-1}(t)\rangle, \\ a_{k,k} &= \langle tP_k(t), P_k(t)\rangle. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Sustituyendo la siguiente expresión

$$tP_{k-1}(t) = a_{k-1,k}P_k(t) + R_{k-1}(t)$$

en (4.7), se obtiene que

$$a_{k,k-1} = a_{k-1,k}$$

luego (4.6) tiene la forma

$$tP_k(t) = b_{k-1}P_{k-1}(t) + a_kP_k(t) + b_kP_{k+1}(t),$$

donde

$$b_{-1} = 0; \quad a_k = a_{k,k}; \quad b_k = a_{k,k+1} = \frac{\sqrt{D_{k-1}D_{k+1}}}{D_k}.$$

De esta forma se ha obtenido la ecuación de diferencias

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_ky_k + b_ky_{k+1} = ty_k, \tag{4.8}$$

con la condición inicial

$$(q_0 - t)y + b_0y_1 = 0, \tag{4.9}$$

para la cual podemos encontrar el valor de y_k, con $(k = 1, 2, \ldots)$, si y_0 es dado. Como se tiene que $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R};\rho)$, entonces , por (4.8) y (4.9) los polinomios generan una matriz $[a]$ que está en $\mathfrak{J}$.
Tomando $S := \{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathcal{M}_i$ y suponiendo que la matriz $[a]$ en $\mathfrak{J}$ que se le asocia a S está en $\mathfrak{J}_0$, entonces como S está definida de la forma

$$s_k := \langle P_0(t); t^kP_0(t)\rangle = \langle \Phi^{-1}(P_0(t)); J^k\Phi^{-1}(P_0(t))\rangle,$$

(recuerdese que Φ es la aplicación isométrica del teorema 10), entonces $S := \{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\mathcal{M}_d$. Por lo tanto si S está en $\mathcal{M}_i$ entonces la matriz de Jacobi que se le asocia representa un operador de Jacobi con índices de deficiencia $n_-(J) = n_+(J) = 1$ y si S está en $\mathcal{M}_d$ entonces la matriz de Jacobi que se le asocia representa un operador de Jacobi auto-adjunto.
Por lo tanto tenemos el siguiente teorema:

Teorema 24. *Para toda S en $\mathcal{M}$ existe una matriz $[a]$ en $\mathfrak{J}$ la cual asociamos con la sucesión S, más aún si S está en $\mathcal{M}_d$ entonces $[a]$ está en $\mathfrak{J}_0$ y si S está en $\mathcal{M}_i$ entonces $[a]$ está en $\mathfrak{J}_1$.*

Capítulo 5

Operadores de Jacobi auto-adjuntos

En esta parte del trabajo se desarrolla la idea central del mismo. Tomándose un operador de Jacobi auto-adjunto J se construye una familia de bases ortonormales de un espacio de Hilbert separable, donde para cada base se puede obtener una matriz de Jacobi que representa al operador J. Se demuestra que dado un operador de Jacobi J, y una bases ortonormal con respecto a la cual este operador J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi, existen condiciones necesarias y suficientes para que exista otra base ortonormal con respecto a la cual el operador J, tiene como representación matricial otra matriz de Jacobi. Recuérdese que en el desarrollo de este trabajo, se ha supuesto siempre que se está trabajando sobre un espacio de Hilbert separable y que se continuará de igual manera hasta el final. Del capítulo anterior se puede observar que si un operador auto-adjunto A tiene representación matricial una matriz de Jacobi con respecto a una base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces el operador A es simple.

Teorema 25. *Sea A un operador simple; entonces existe una base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, tal que la representación matricial de A con respecto a $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una matriz de Jacobi.*

Demostración. Como A es simple existe g un elemento generador en $\mathcal{H}$. Defínase η_1 en $\mathcal{H}$ como

$$\eta_1 := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_A g,$$

escogiendo g de manera adecuada se puede suponer que η_1 tiene norma igual a uno. En la demostración del teorema 11 se demuestra que η_1 es un elemento cíclico, por lo tanto generador, como se vio en el teorema 10 existe una aplicación isométrica Φ de $L^2(\mathbb{R};\mu_{\eta_1})$ a $\mathcal{H}$ tal que φ está en el dominio del operador de multiplicación por la variable independiente Q si y sólo si $\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dE_A \eta_1$

está en el dominio del operador A. Esto quiere decir que la isometría Φ le hace corresponder a la sucesión $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión $\{A^k\eta_1\}_{k=0}^{\infty}$.
Aplicando Gram-Schmidt a $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ se obtiene una base ortonormal de polinomios $\{P_{k-1}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ en $L^2(\mathbb{R};\mu_{\eta_1})$, donde cada polinomio P_{k-1} es de grado $k-1$ (ver 4.5). Por lo tanto, por la isometría Φ también existe una base ortonormal $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$, donde

$$\eta_k := \Phi(P_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}} P_{k-1} dE_A \eta_1$$

para cada $k := 1, 2, 3, \ldots$.
Observemos que $P_0 = 1$, porque por la isometría Φ a P_0 le corresponde el elemento $\int_{\mathbb{R}} dE_A\eta_1 = \eta_1$. Siguiendo los argumentos que demuestran el teorema 24 se sigue que

$$a_{jk} := \langle P_{j-1}; tP_{k-1}\rangle$$

genera una matriz de Jacobi. Así se ha obtenido una matriz de Jacobi generada por $\langle \eta_j; A\eta_k\rangle$.
Aún falta demostrar que esta matriz es precisamente la representación matricial de A con respecto a la base $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Para ello se mostrará que el mínimo operador cerrado B generado por esta matriz es un operador auto-adjunto, ya que $B \subset A = A^* \subset B^*$ implicaría que $B = A$. Para demostrar que B es auto-adjunto se puede mostrar que $n_-(B) = n_+(B) = 0$ lo que es equivalente a probar que el rango de $B \pm iI$ es todo $\mathcal{H}$.
Considérese $f \in \mathcal{H}$ ortogonal a todos los vectores $\{(B - iI)\eta_k\}$ donde $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.
Sea $f := \int_{\mathbb{R}} \varphi dE_A g$ y recuérdese que $\eta_1 := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_A g$.
Si

$$\langle f; (B - iI)\eta_k\rangle = 0,$$

entonces

$$\langle f; (B - iI)\eta_k\rangle = \langle f; (A - iI)\eta_k\rangle = \langle f; (A - iI)P_{k-1}(A)\eta_1\rangle = 0.$$

Por lo tanto para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} (t - i)P_{k-1}(t)\overline{\varphi(t)}e^{-t^2} d\mu_g(t) = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\mathbb{R}} (t - i)t^{k-1}\overline{\varphi(t)}e^{-t^2} d\mu_g(t) = 0, \tag{5.1}$$

ya que $\{P_{k-1}\}_{k=0}^{\infty}$ se obtiene de $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ por Gram-Schmidt.
Así, sustituyendo

$$\Omega(t) = \int_{-\infty}^{t} (u + i)\varphi(u)e^{-\frac{1}{2}u^2} d\mu_g(u) - C,$$

en (5.1),con C una constante que se puede determinar de la misma manera que se hizo en el eorema 11. Se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} t^{k-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} \overline{d\Omega} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Haciendo una elección adecuada de C, de (5.2) y usando el lema 1 se pueda concluir que $\Omega(t) = 0$.
Como

$$\int_{\mathbb{R}} |t-i|^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} |\varphi(t)|^2 d\mu_g(t) = \int_{\mathbb{R}} (t+i)\varphi(t)\overline{d\Omega(t)} = 0,$$

y usando el hecho de que $|t-i|^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} > 0$ para todo t real , se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 d\mu_g(t) = 0.$$

Esto quiere decir que $f = 0$, por lo tanto el rango de $B - iI$ es todo $\mathcal{H}$. Siguiendo los mismos argumentos para $B + iI$ se termina la demostración. □

Definición 8. *Los vectores de la forma* $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_A g$ *con* g *un vector generador se llamaran vectores de Stone.*

Teorema 26. *Todo vector de Stone es un vector cíclico.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del teorema 11. □

En el siguiente capítulo (Sec 6,2) se verá que existen vectores cíclicos que no son de la forma $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_A g$, donde g es un vector generador. O lo que es lo mismo: No todo vector cíclico es un vector de Stone.

Teorema 27. *Sea* J *un operador de Jacobi auto-adjunto en* $\mathcal{H}$*; entonces existe una familia de bases ortonormales, con respecto a las cuales* J *siempre tiene como representación matricial una matriz de Jacobi.*

Demostración. Por definición existe $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ base ortonormal con respecto a la cual J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi. Recuérdese de la ecuación (4.4) que como J es un operador simple entonces η_1 es cíclico y por consiguiente generador. Sea $n \in \mathbb{N}$, defínase

$$e_n := \int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J \eta_1,$$

ahora como e_1 es un vector de Stone aplicando el teorema 26 recursivamente se ve que e_n es cíclico y generador, y esto ocurre para todo $n \in \mathbb{N}$. Pues si se define e_2 como $e_2 := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_J e_1$, entonces

$$\begin{aligned} e_2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_J \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dE_J \eta_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2t^2} dE_J \eta_1, \end{aligned}$$

y siguiendo estos mismos pasos se pueden obtener lo demás. Por lo tanto se tiene que $\overline{\operatorname{span}\{J^k e_n\}_{k=0}^{\infty}} = \mathcal{H}$. Ortogonalizando por Gram-Schmidt el conjunto $\{J^k e_n\}_{k=0}^{\infty}$ se obtiene una base ortonormal $\{\eta_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; tales bases están contenidas en el dom(J).
Se define:

$$\begin{aligned} j_{ik}(n) :&= \langle \eta_i(n); J(\eta_k(n)) \rangle \\ &= \langle P_{i-1}; tP_{k-1} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{P_{i-1}(t)} P_{k-1}(t) e^{-nt^2} dE_J \eta_1. \end{aligned}$$

Entonces siguiendo los mismos argumentos del teorema 24, y del teorema 25 por cada una de estas bases $\{\eta_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ se obtiene una matriz $[j(n)]$ de Jacobi que representa al operador J. □

Nótese que el primer elemento de cada una de estas bases es un vector de Stone de norma igual a uno. La medida $\mu_{\eta_1(n)}(t) := \langle \eta_1(n); E_J(-\infty, t)\eta_1(n) \rangle$, se va a denotar por $\mu_{\eta_1^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Colorario 1. *Sea J un operador de Jacobi auto-adjunto en $\mathcal{H}$; entonces existe una familia de matrices de Jacobi diferentes que representa al mismo operador J*

Demostración. Supóngase que $n > m$, y que $\int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\eta_1^n} = \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\eta_1^m}$ entonces

$$\frac{1}{\|e_n\|^2} \int_{\mathbb{R}} t e^{-2nt^2} d\mu_{\eta_1} = \frac{1}{\|e_m\|^2} \int_{\mathbb{R}} t e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1},$$

esto quiere decir que existe una constante k tal que

$$\int_{\mathbb{R}} t e^{-2nt^2} d\mu_{\eta_1} = \int_{\mathbb{R}} k t e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1},$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2nt^2} d\mu_{\eta_1} = \int_{\mathbb{R}} k e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (t-1) e^{-2nt^2} - (t-1) k e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1} &= \int_{\mathbb{R}} (t-1)(e^{-2nt^2} - k e^{-2mt^2}) d\mu_{\eta_1}, \\ &= \int_{\mathbb{R}} (t-1) e^{-2mt^2} (e^{-2(n-m)t^2} - k) d\mu_{\eta_1}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces utilizando el lema 1, se tiene que

$$k = e^{-2(n-m)t^2} \quad \mu_{\eta_1}\text{-c. d. s.}.$$

Contradicción, porque k es una constante. □

Definición 9. *Sea J un operador de Jacobi en $\mathcal{H}$ y $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base ortonormal con respecto a la cual J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi. A la familia de bases ortonormales $\{\eta_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ generada por η_1 de acuerdo al teorema anterior (con n recorriendo los números Natrales) se llamara familia de bases de Stone y se denotara por $\mathfrak{B}(J,\eta_1)$.*

Colorario 2. *A cada familia de bases de Stone le corresponde una familia de sucesiones de momentos en $\mathcal{M}_d$.*

Demostración. Para cada base $\{\eta_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathfrak{B}(J,\eta_1)$ se define la sucesión $s_k(n) = \langle \eta_1(n); J^k\eta_1(n)\rangle$. Debido a que J tiene como representación matricial con respecto a $\{\eta_k(n)\}_{k=1}^{\infty}$ una matriz de Jacobi $[j(n)]$ en $\mathfrak{J}_0$ (ya que $J = J^*$), entonces por el teorema 23 $\{s_k(n)\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\mathcal{M}_d$ y su única solución es $\mu_{\eta_1^n}(t) = \langle \eta_1(n); E_J(-\infty,t)\eta_1(n)\rangle$. □

El colorario anterior dice que para un operador de Jacobi auto-adjunto existe una familia de sucesiones de momentos en $\mathcal{M}_d$, mientras que a cada $[a]$ en $\mathfrak{J}_0$ se le puede asociar sólo una sucesión de momentos en $\mathcal{M}_d$.

Colorario 3. *Sea $\mathfrak{B}(J,\eta_1)$ una familia de bases de Stone y sea $\{\eta_k(n)\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{\eta_k(m)\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathfrak{B}(J,\eta_1)$ para $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$; entonces tenemos que $\mathfrak{B}(J,\eta_1(n)) \subseteq \mathfrak{B}(J,\eta_1(m)) \subseteq \mathfrak{B}(J,\eta_1)$.*

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\eta_1(n)$ es un vector de Stone y $\mathfrak{B}(J,\eta_1(n))$ una familia de Stone. Sea $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal en $\mathfrak{B}(J,\eta_1(n))$ $(\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{B}(J,\eta_1(n)))$; entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta_1 := \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-pt^2} dE_J\eta_1(n)}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2pt^2} d\mu_{\eta_1^n}};$$

se observa también que $\eta_1(n) = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2nt^2} d\mu_{\eta_1}}$, por lo tanto

$$\delta_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-(n+p)t^2} dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2(p+n)t^2} d\mu_{\eta_1}}$$

entonces

$$\delta_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-((n+p)-m)t^2} e^{-mt^2} dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2((n+p)-m)t^2} e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1}}.$$

Pero como $\eta_1(m) = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-mt^2} dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1}}$ se sigue que

$$\delta_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-((n+p)-m)t^2} dE_J\eta_1(m)}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2((n+p)-m)t^2} d\mu_{\eta_1^m}}$$

y como $n \geq m$, se concluye que

$$\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{B}(J,\eta_1(m))$$

□

Teorema 28. *Sea J un operador de Jacobi auto-adjunto en $\mathcal{H}$ y $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base ortonormal con respecto a la cual J tiene como representación matricial una matriz de Jacobi; existe otra base ortonormal $\{\widetilde{\eta}_k\}_{k=0}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ con respecto a la cual la representación matricial de J es otra matriz de Jacobi $[\widetilde{j}]$, si y sólo si existe φ en $L^2(\mathbb{R};\mu_{\eta_1})$ tal que*

i $\left\{\int_{\mathbb{R}} t^k|\varphi|^2 d\mu_{\eta_1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *está en $\mathcal{M}_d$*

ii *si para $\psi \in L^2(\mathbb{R};\mu_{\eta_1})$ tenemos que $\int_{\mathbb{R}} t^k\varphi\psi d\mu_{\eta_1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\psi = 0$*

Demostración. Se empieza por demostrar la necesidad de las condiciones.
Como η_1 es cíclico y generador, entonces por el teorema 10 existe $\varphi \in L^2(\mathbb{R};\mu_{\eta_1})$ de tal forma que se puede tomar $\widetilde{\eta}_1$ como $\widetilde{\eta}_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi dE_J\eta_1$, ahora siguiendo los argumentos del teorema 21 y por (4.4) se tiene que $\widetilde{\eta}_1$ es cíclico y generador , por lo tanto $\widetilde{\eta}_1 \in \mathrm{dom}(J^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Entonces por la representación canonica dada en el teorema 10 se tiene que $\int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_{\widetilde{\eta}_1} < \infty$, que es equivalente a $\int_{\mathbb{R}} t^k|\varphi|^2 d\mu_{\eta_1} < \infty$,lo que quiere decir que la sucesión $\left\{\int_{\mathbb{R}} t^k|\varphi|^2 d\mu_{\eta_1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\mathbb{R}$ y por el teorema 23 está en $\mathcal{M}_d$.
Como $\widetilde{\eta}_1$ es cíclico se tiene que el $\overline{\mathrm{span}\{J^k\widetilde{\eta}_1\}} = \mathcal{H}$. Esto implica que el único f en $\mathcal{H}$ que satisface $\langle f; J^k\widetilde{\eta}_1\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ es $f = 0$. De acuerdo a la representación canónica del teorema 10 se tiene que

$$\langle f; J^k\widetilde{\eta}_1\rangle = \langle \psi; t^k\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} t^k\varphi\psi d\mu_{\eta_1}, \tag{5.3}$$

es decir que la única función ψ que satisface (5.3) para todo $k \in \mathbb{N}$ es $\psi = 0$.
Para la otra implicación se tiene por el teorema 10 que existe un elemento e en $\mathcal{H}$ definido como $e := \int_{\mathbb{R}} \varphi dE_J\eta_1$. De la primera condición se tiene que $\int_{\mathbb{R}} t^k|\varphi|^2 d\mu_{\eta_1} < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que quiere decir que $e \in \mathrm{dom}(J^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por la segunda condición se tiene que $\mathrm{span}\{J^k e\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en $\mathcal{H}$. Entonces se puede aplicar Gram-Schmidt a $\{J^k e\}_{k=1}^{\infty}$ y se obtiene una base ortonormal $\{\widetilde{\eta}_k\}_{k=0}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$. Ahora si se define $\widetilde{j}_{ik} := \langle\widetilde{\eta}_i; J\widetilde{\eta}_k\rangle$ siguiendo los argumentos del teorema 24 se obtiene una matriz de Jacobi. Como la sucesión $\langle\widetilde{\eta}_1; J^k\widetilde{\eta}_1\rangle$ está en $\mathcal{M}_d$ entonces el mínimo operador cerrado representado por esta matriz respecto a la base $\{\widetilde{\eta}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es auto-adjunto y por lo tanto es el operador J. □

Verificar la primera condición i del teorema anterior es muy difícil y se conocen pocos criterios para establecerla. Se mostró anteriormente que si $\varphi = e^{-mt^2}$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces la condición i tiene lugar. Sería interesante encontrar una función que satisfaga la condición i pero que no sea de la forma e^{-mt^2} con $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 29. *Sea J un operador de Jacobi auto-adjunto, y supóngase que dadas dos bases ortonormales $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\widetilde{\eta}_k\}_{k=0}^{\infty}$ tales que $\mathfrak{B}(J,\widetilde{\eta}_1) \cap \mathfrak{B}(J,\eta_1) \neq \emptyset$ entonces $\mathfrak{B}(J,\widetilde{\eta}_1) \subseteq \mathfrak{B}(J,\eta_1)$ ó $\mathfrak{B}(J,\widetilde{\eta}_1) \supset \mathfrak{B}(J,\eta_1)$*

Demostración. Tómese una base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathfrak{B}(J,\widetilde{\eta_1})\cap\mathfrak{B}(J,\eta_1)$, entonces

$$\delta_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_J\widetilde{\eta_1}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2nt^2} d\mu_{\widetilde{\eta_1}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-mt^2} dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1}},$$

pero como J es auto-adjunto por el teorema 10 existe φ en $L^2(\mathbb{R};\mu_{\eta_1})$ tal que $\widetilde{\eta_1} := \int_{\mathbb{R}} \varphi dE_J\eta_1$, entonces

$$\delta_1 = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} \varphi dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2nt^2} |\varphi|^2 d\mu_{\eta_1}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-mt^2} dE_J\eta_1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2mt^2} d\mu_{\eta_1}},$$

por lo tanto $\varphi = Ke^{(n-m)t} \quad \mu_{\eta_1}$ c.d.s..Pero $n-m$ no puede ser positivo ya que estaría contradiciendo el teorema 28. Lo que quiere decir que $\mathfrak{B}(J,\widetilde{\eta_1}) \subseteq \mathfrak{B}(J,\eta_1)$. □

Capítulo 6

Extensiones de operadores de Jacobi no auto-adjuntos

Para poder mostrar el teorema principal de la primera sección (teorema 31)de este capítulo, se observa primero lo que es un espacio de Hardy, un espacio de de Branges, luego se observa que un operador de Jacobi con índices de deficiencia $n_+(J) = n_-(J) = 1$ es un operador entero en el sentido de Krein, y también se observa quien es el módulo de calibración para este operador. Citaremos sin demostración el teorema [17; T 4.6]. Los resultados de la segunda sección se siguen inmediatamente del trabajo realizado en el capítulo anterior.

6.1. Unicidad de la matriz

Un espacio de Hardy el cual se denota por H_2 es el conjunto de funciones f, tales que f es holomorfa en $\mathbb{C}^+$ donde $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C}/ \ \operatorname{Im} z > 0\}$ y f cumple la siguiente condición

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Antes de continuar, se define la operación $\sharp$, para funciones complejas de variable compleja como $f^\sharp(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Una función entera $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es llamada de Hermite-Biehler si $|E(z)| > |E(\overline{z})|$ para todo $z \in \mathbb{C}^+$. Nótese que $E(z)$ no tiene ceros en $\mathbb{C}^+$. Se define el espacio de de Branges generado por E, de la siguiente manera

$$\mathbf{B}(E) := \{f \ \text{ Enteras} \,/ \frac{f}{E}, \frac{f}{E^\sharp} \in H_2\},$$

toda función $f \in \mathbf{B}(E)$ es de tipo exponencial, esto es,

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty.$$

Tómese $[a]$ en $\mathfrak{J}_1$ y sea J el operador de Jacobi representado por $[a]$ con respecto a una base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Del teorema 17 se sigue que $\{P_{n-1}(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}$ está en $\ell_2(\mathbb{N})$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}$ donde P_n son los polinomios que se construyeron en el Capítulo 4 a partir de una matriz en $\mathfrak{J}$, por esta misma construcción se sabe que $\{P_{n-1}(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}$ está en el $\ker(J^* - \zeta I)$. Si se toma δ_1 el primer elemento de la base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ y se le opera el producto interno con $\{P_{n-1}(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}$ claramente siempre pasa que :

$$\langle \delta_1; \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}\rangle = P_0(\zeta) = 1,$$

para todo $\zeta \in \mathbb{C}$. Entonces δ_1 es un vector que no es ortogonal al $\ker(J^* - \zeta I)$ para ninguna $\zeta \in \mathbb{C}$. Cuando un vector tiene esta propiedad se le llama módulo de calibración. Todo operador que tiene módulo de calibración es un operador entero [9, 10, 11, 17, 18]. De esta forma J es un operador entero y δ_1 es su módulo de calibración. Por el trabajo realizado en [17] y [18] se sabe que dado un operador entero en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se puede construir una isometría $\widehat{\Phi}$ de $\mathcal{H}$ en $\mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es un espacio de de Branges y para operadores de Jacobi está dada por

$$(\widehat{\Phi} f)(\zeta) := \langle f; \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}\rangle.$$

Bajo esa isometría el operador entero se convierte en el operador de multiplicación por la variable independiente y el módulo de calibración pasa a ser la función real idénticammente 1 . Si se define $C := \widehat{\Phi}^{-1}\sharp\widehat{\Phi}$ se obtiene una involución en $\mathcal{H}$ (conjugación compleja) y claramente $C\delta_1 = \delta_1$ ya que $\widehat{\Phi}^{-1}\sharp\widehat{\Phi}\delta_1 = \widehat{\Phi}^{-1}1 = \delta_1$.

Teorema 30. *Si un módulo de calibración δ es invariante bajo la conjugación compleja, entonces cualquier otro módulo de calibración $\widehat{\delta}$ es de la forma $\widehat{\delta} = c\delta$, donde c está en $\mathbb{R}$.*

Teorema 31. *Sea J un operador de Jacobi con $n_-(J) = n_+(J) = 1$; entonces existe una sola base ortonormal (módulo reflexión), con respecto a la cual J tiene representación matricial única, una matriz de Jacobi.*

Demostración. De la definición del conjunto $\mathfrak{J}_1$ se sabe que todo operador de Jacobi con índices de deficiencia $n_+(J) = n_-(J) = 1$ está representado matricalmente por elementos en $\mathfrak{J}_1$. Supóngase que existen dos bases ortonormales $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{\widehat{\delta}_k\}_{k=1}^{\infty}$, con respecto a las cuales J tiene como representación matricial dos elementos en $\mathfrak{J}_1$, entonces δ_1 y $\widehat{\delta}_1$ son módulos de calibracion de J. Pero por el teorema anterior se sabe que $\delta_1 = c\widehat{\delta}_1$, lo que implica que $\delta_1 = \pm\widehat{\delta}_1$ ya que δ_1 y $\widehat{\delta}_1$ tienen norma igual a uno.
Si $\delta_1 = \widehat{\delta}_1$, entonces aplicando Gram-Schmidt a $\{\delta_1, J\delta_1\}$ se tiene que

$$\delta_2 = \frac{J\delta_1 - \langle \delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\|J\delta_1 - \langle \delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1\|},$$

y aplicando Gram-Schmidt a $\{\widehat{\delta}_1, J\widehat{\delta}_1\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}_2 &= \frac{J\widehat{\delta}_1 - \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle\widehat{\delta}_1}{\|J\widehat{\delta}_1 - \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle\widehat{\delta}_1\|},\\ &= \frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\|J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1\|},\\ &= \delta_2.\end{aligned}$$

Continuando este argumento puedo concluir que $\delta_n = \widehat{\delta}_n$, para toda n en los enteros mayores o iguales a uno.
Recuérdese que en el Capítulo 4 se dijo que: (4.4) es la realización del algoritmo de Gram-Schmidt sobre $\{\delta_1, J\delta_1, J^2\delta_1, J^3\delta_1, \ \ldots\}$, entonces $\delta_2 = P_1(J)\delta_1$ y también $\widehat{\delta}_2 = \widehat{P}_1(J)\widehat{\delta}_1$, por lo tanto $P_1(J)\delta_1 = \widehat{P}_1(J)\ \widehat{\delta}_1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{b_1} &= \frac{J\widehat{\delta}_1 - \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle\widehat{\delta}_1}{\widehat{b}_1},\\ &= \frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\widehat{b}_1},\end{aligned}$$

donde b_1 es la entrada (1,2) de la matriz que representa a J con respecto a $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, y donde $\widehat{b}_1$ es la entrada (1,2) de la matriz que representa a J con respecto a $\{\widehat{\delta}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Entonces como $\delta_1 = \widehat{\delta}_1$ se tiene que $\widehat{b}_1 = b_1$. Siguiendo esta misma argumentación para todos los otros polinomios P_k y $\widehat{P}_k$ se encuentra que las entradas de las matrices coinciden.
Si $\delta_1 = -\widehat{\delta}_1$, entonces aplicando Gram-Schmidt a $\{\delta_1, J\delta_1\}$ se tiene que

$$\delta_2 = \frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\|J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1\|},$$

y aplicando Gram-Schmidt a $\{\widehat{\delta}_1, J\widehat{\delta}_1\}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}_2 &= \frac{J\widehat{\delta}_1 - \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle\widehat{\delta}_1}{\|J\widehat{\delta}_1 - \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle\widehat{\delta}_1\|},\\ &= \frac{-J\delta_1 + \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\|J(-\delta_1) - \langle-\delta_1; J(-\delta_1)\rangle - \delta_1\|},\\ &= -\delta_2.\end{aligned}$$

Como en el caso anterior, continuando este argumento puedo concluir que $\delta_n = -\widehat{\delta}_n$, para toda n en los enteros mayores o iguales a uno.
Además se tiene que

$$P_1(J)\delta_1 = \frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{b_1},$$

y

$$\begin{aligned}\widehat{P}_1(J)\widehat{\delta}_1 &= \frac{J\widehat{\delta}_1 - \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle\widehat{\delta}_1}{\widehat{b}_1}, \\ &= \frac{-J\delta_1 + \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\widehat{b}_1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto como $\delta_2 = -\widehat{\delta}_2$, y como se recordó en el caso anterior, (4.4) es la realización del algoritmo de Gram-Schmidt sobre $\{\delta_1, J\delta_1, J^2\delta_1, J^3\delta_1, \ \ldots\}$, entonces

$$\begin{aligned}-\widehat{\delta}_2 &= \frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{\widehat{b}_1} \\ &= \frac{J\delta_1 - \langle\delta_1; J\delta_1\rangle\delta_1}{b_1}.\end{aligned}$$

En conclusión $\widehat{b}_1 = b_1$, donde b_1 es la entrada (1,2) de la matriz que representa a J con respecto a $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, y donde $\widehat{b}_1$ es la entrada (1,2) de la matriz que representa a J con respecto a $\{\widehat{\delta}_k\}_{k=1}^{\infty}$. También se observa que como $\delta_1 = -\widehat{\delta}_1$, entonces $\langle\delta_1; J\delta_1\rangle = \langle\widehat{\delta}_1; J\widehat{\delta}_1\rangle$.
Siguiendo toda la argumentación anterior para todos los polinomios P_k y $\widehat{P}_k$ se encuentra que las entradas de las matrices son iguales. □

6.2. Representación matricial de extensiones auto-adjuntas de operadores de Jacobi

Sea [a] una matriz de Jacobi, recuérdese que esta es la representación matricial con respecto a una base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ de un operador J. Si este operador J tiene índices de deficiencia $n_-(J) = n_+(J) = 1$, entonces como se vio en el Capítulo 4 existen extensiones auto-adjuntas que satisfacen $J_\beta \subset J^*$. De la argumentación que demuestra el teorema 22 podemos observar que δ_1 es un vector cíclico de J_β para todo β, pero δ_1 no es un vector de Stone porque entonces J sería un operador auto-adjunto.

Teorema 32. *Sea J un operador de Jacobi no auto-adjunto; entonces para cada extensión auto-adjunta J_β de J existe una base ortonormal con respecto a la cual J_β tiene como representación matricial una matriz de Jacobi.*

Demostración. Por el teorema 22 cada extensión J_β es un operador simple, ahora por el teorema 25 para cada extensión J_β existe una base ortonormal $\{\eta_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ tal que la representación matricial con respecto a esta base $\{\eta_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ es una matriz de Jacobi $[j(\beta)]$. □

Teorema 33. *Sea J un operador de Jacobi no auto-adjunto; entonces para cada extensión auto-adjunta J_β de J existe una familia de bases de Stone generada por $\eta_1(\beta)$ $(\mathfrak{B}(J_\beta, \eta_1(\beta))$.)*

Demostración. La demostración se sigue inmediantamente del teorema 27. □

Recuérdese que para cada base ortonormal $\{\eta_k(n,\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ en $\mathfrak{B}(J_\beta, \eta_1(\beta))$ su primer elemento es de la forma $\eta_1(n,\beta) := \int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE_{J_\beta} \eta_1(\beta)$

Colorario 4. *Sea J un operador de Jacobi no auto-adjunto; entonces para cada extensión auto-adjunta J_β de J existe una familia de problemas de momentos S_β, tal que S_β está en $\mathcal{M}_d$.*

Demostración. Para cada base de la familia $\mathfrak{B}(J_\beta, \eta_1(\beta))$ se define la sucesión:

$$s_k(n,\beta) := \langle \eta_1(n,\beta); J_\beta^k \eta_1(n,\beta) \rangle.$$

Entonces por teorema 23 se tiene que cada $\{s_k(n,\beta)\}_{k=0}^{\infty}$ está en $\mathcal{M}_d$. □

Teorema 34. *Sea J un operador de Jacobi y $[j]$ la matriz de Jacobi que lo representa con respecto a una base $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Si J es no auto-adjuto y $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathcal{M}_i$ es el problema de momentos asociado a el operador J; entonces para los elementos de la sucesión $\{s_k(n,\beta)\}_{k=0}^{\infty}$ que está en S_β se cumple que*

$$s_k(n,\beta) = s_k + \int_{\mathbb{R}} t^k (e^{-2(n-1)t^2}) d\mu_{\delta_1^\beta}.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} \mu_{\eta_1^n(\beta)}(t) &= \langle \eta_1(n,\beta); E_{J_\beta}(-\infty, t) \eta_1(n,\beta) \rangle \\ &= \langle \int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2} dE \eta_1(\beta); \int_{-\infty}^{t} e^{-ns^2} dE \eta_1(\beta) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{t} e^{-2ns^2} d\mu_{\eta_1(\beta)}. \end{aligned}$$

Ahora por el teorema anterior

$$
\begin{aligned}
s_k(n,\beta) &= \langle \eta_1(n,\beta); J_\beta^k \eta_1(n,\beta)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_{\eta_1^n(\beta)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} t^k e^{-2nt^2} d\mu_{\eta_1(\beta)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (t^k + t^k(e^{-2nt^2}-1)) d\mu_{\eta_1(\beta)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_{\eta_1(\beta)} + \int_{\mathbb{R}} t^k(e^{-2nt^2}-1) d\mu_{\eta_1(\beta)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} t^k e^{-2nt^2} d\mu_{\delta_1^\beta} + \int_{\mathbb{R}} t^k(e^{-2nt^2}-1)e^{-2t^2} d\mu_{\delta_1^\beta} \\
&= s_k + \int_{\mathbb{R}} t^k (e^{-2(n-1)t^2}) d\mu_{\delta_1^\beta}.
\end{aligned}
$$

□

Notese que en el teorema anterior $\{s_k\}_{k=0}^\infty$ está en $\mathcal{M}_i$ y $\{s_k(n,\beta)\}_{k=0}^\infty$ está en $\mathcal{M}_d$.

Bibliografía

[1] Akhiezer N.I., Glazman I.M.; 1993 *Theory of linear operators in Hilbert space* (New York:Dover)

[2] Akhiezer N.I.; 1965 *The classical moment problem and Some Related Questions in Analysis* (New York:hafner)

[3] Banasiak J., Lachowicz M. and Moszyński M.; *Topological chaos: when topology meets medicine.* Appl. Math. Lett. , **16** (2003) 303–308.

[4] Birman M.S., Solomjak M.Z.; 1987 *Spectral Theory of self-adjoint operators in Hilbert spece* (Mathematics and Its Applications, Soviet Series)(Dordrecht:Reidel)

[5] Conway J.B.; 1991 *Functions of one complex variable I* (New York:Springer-Verlag)

[6] Gladwell G. M. L. ; *"Inverse Problems in Vibration,"* Second edition, Solid Mechanics and its Applications, **119**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[7] K. M. Ng, C. F. Lo and K. L. Liu. ; *Exact eigenstates of the intensity-dependent Jaynes-Cummings model with the counter-rotating term.* Physica A, **275** (2000) 463–474.

[8] Kimmel M., Swierniak A. and Polanski A.; *Infinite-dimensional model of evolution of drug resistance of cancer cells.* J. Math. Systems Estim. Control, **8** (1998) 1–16.

[9] Krein M.G.; *On Hermitian operators with defect numbers ono* Dokl. Akad. Nauk SSSR 43 (1944) 323-326

[10] Krein M.G.; *On Hermitian operators with defect numbers ono II* Dokl. Akad. Nauk SSSR 44 (1944) 131-134

[11] Krein M.G.; *On one remarkable class of Hermitian operators* Dokl. Akad. Nauk SSSR 44 (1994) 175-179

[12] Ram Y. M. ; *Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system*, SIAM Appl. Math., **53** (1993), 1762–1775.

[13] Remling C.; *Schrödinger operators and de Branges spaces* J. Funct. Anal. 196 (2002) 323-394

[14] R. del Rio, Kudryavtsev M. and Silva L. O. ; *Inverse problems for Jacobi operators III: Mass-spring perturbations of semi-infinite systems.* Inverse Probl. Imaging, 6(4):599–621, 2012.

[15] R. del Rio, Kudryavtsev M, and L. O. Silva.; *Inverse problems for Jacobi operators II: Mass perturbations of semi-infinite mass-spring systems.* Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 9(2):165–190, 2013.

[16] Simon B.; *The Classical moment problem as a self-adjoint finite difference operators* Adv. Math. 137 (1998) 82-203

[17] Silva L.O. ; Toloza J.H.; *On the spectral characterization of entire operators with deficiency indices (1,1)* J.Math. Anal. Appl. 367 (2010) 360-373

[18] Silva L.O. ; Toloza J.H.; *The class of n-entire operators* J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 025202.

[19] Silva L. O. and Weder R. ; *On the two spectra inverse problem for semi-infinite Jacobi matrices*, Math. Phys. Anal. Geom., **9** (2006), 263–290.

[20] Tur E. A.; *Jaynes-Cummings model: A solution without the rotating wave approximation.* Optics and Spectroscopy, **89** (2000) 574–588.