



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

VOLATILIDAD EN EL MERCADO ACCIONARIO MEXICANO
DESDE LA PERSPECTIVA DEL CAPM:
UN MODELO GARCH MULTIVARIADO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN ECONOMÍA

PRESENTA:

JOSÉ ERNESTO ALDANA VIZCAÍNO

ASESOR: DR. CLEMENTE RUIZ DURÁN



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F. DICIEMBRE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, Rocío y Ernesto

*Essentially, all models are wrong,
but some are useful.*

- George E. P. Box

*[...] The market, unwittingly,
obeys a law which governs it:
The Law of Probability.*

- Louis Bachelier

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y a mis abuelos, por su incondicional apoyo y confianza ante cualquier proyecto que he emprendido a lo largo de mi vida.

Doy gracias también a mis amigos, en particular a Carlos, Lalo, Sonia, Luciana e Irene. Debo mucho de lo que soy a lo aprendido a su lado, dentro y fuera de la Facultad.

Especialmente a Andrea, mi constante compañera. Sin su ayuda, este trabajo no estaría terminado. Gracias por tu inagotable paciencia, y por tolerar mis inoportunos temas de conversación.

Extiendo un especial agradecimiento al Dr. Clemente Ruiz Durán, por su invaluable apoyo a lo largo de mi licenciatura, y en particular para la culminación de este trabajo.

Contenido

Introducción.....	7
1. El mercado accionario mexicano.....	12
1.1 Principales indicadores del mercado.....	13
1.2 La Bolsa Mexicana en el mundo.....	20
1.3 El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC).....	23
2. Teoría de carteras.....	27
2.1 Selección de carteras.....	27
2.1.1 Aversión al riesgo.....	28
2.1.2 La frontera eficiente.....	36
2.1.3 La línea del mercado de capitales (CML).....	41
2.2 El Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM).....	48
2.2.1 Supuestos del CAPM.....	50
2.2.2 Desarrollo del CAPM.....	51
3. Metodología Econométrica para el Estudio de los Mercados Financieros.....	55
3.1 Modelaje del Rendimiento de los Activos Financieros.....	56
3.1.1 La distribución normal.....	57
3.1.2 Distribuciones estables.....	59
3.2 Modelos de Volatilidad Financiera.....	61
3.2.1 Modelos univariados.....	62
3.2.1.1 El modelo ARCH.....	62
3.2.1.2 Modelo GARCH.....	62
3.2.2 Modelos multivariados.....	63
3.2.2.1 Modelo VECH.....	64
3.2.2.2 Modelo BEKK.....	65
3.2.2.3 Modelo de correlaciones constantes.....	65
3.2.2.4 MGARCH con correlaciones variables (VC-MGARCH).....	66
3.2.2.4.1 Desarrollo del VC-MGARCH.....	67
3.2.3 Cálculo de las betas condicionales.....	70
4. Datos y Resultados.....	71
4.1 Datos.....	71

4.2 Estimación y resultados	77
4.3 Gráficas de las betas condicionales.....	81
Conclusiones.....	89
Bibliografía.....	93

Introducción

Los mercados financieros constituyen un elemento fundamental en el sistema económico global contemporáneo. Nadie que esté ligeramente al tanto de los sucesos económicos recientes puede negarlo. En ellos se gestó la crisis global de 2008, además de los problemas de deuda soberana que aún enfrentan algunos países europeos. En el contexto mexicano, las crisis de deuda en la década de 1980, y lo acontecido en 1995 constituyen dos importantes ilustraciones acerca de las consecuencias que la dinámica de los activos financieros puede traer con sí. Por supuesto, estos episodios son solo los ejemplos más recientes de la importancia que el comportamiento de las variables financieras tiene sobre los agentes económicos.

Es debido a la gran relevancia que poseen, que desde la ciencia económica (y desde otras disciplinas) se han realizado numerosos esfuerzos dirigidos a la explicación científica de las interacciones entre las variables inherentes a los mercados financieros. Un gran avance se dio en 1952, cuando Harry Markowitz postuló los fundamentos de lo que hoy es conocido como el Modelo de Valuación de Activos de Capital, o CAPM por sus siglas en inglés. Este modelo ha sido, desde su incorporación al estudio de los mercados financieros, una herramienta enormemente utilizada por académicos y profesionistas para explicar el comportamiento de los activos con base en su rendimiento y el riesgo incorporado en ellos.

De acuerdo con el CAPM, el rendimiento de un activo puede ser expresado como una función lineal de su riesgo. El riesgo está representado en el modelo por la variable llamada beta, que se define como la razón entre la covarianza del rendimiento de cada activo con respecto al portafolio de mercado y la varianza del rendimiento del portafolio de mercado. Estas betas constituyen una medida de volatilidad¹ usada ampliamente en la práctica financiera. Es pertinente remarcar que en el CAPM, el riesgo inherente a un activo queda completamente definido por su beta.

Uno de los principales inconvenientes que presenta este modelo para su aplicación empírica, es que es un modelo estático, en el sentido de que solo considera un periodo en el

¹ A lo largo del trabajo, las palabras “riesgo” y “volatilidad” se utilizan indistintamente.

tiempo. Para el Modelo de Valuación de Activos de Capital, los parámetros que definen la distribución de los activos (vector de rendimientos y matriz de varianzas y covarianzas) están dados, y permanecen sin cambio hasta el final del periodo. Esto implica una gran limitante, puesto que los inversionistas en los mercados financieros generalmente se ven ante la necesidad de tomar decisiones en innumerables ocasiones incluso dentro de un mismo día.

Las primeras demostraciones empíricas de este modelo poseían un gran inconveniente técnico: la metodología econométrica disponible limitaba a los investigadores, puesto que las series de tiempo financieras presentan comportamientos que las hacen incompatibles con los métodos de estimación tradicionales. No obstante, los avances introducidos al campo de las series de tiempo financieras por Robert F. Engle y sus colaboradores, a saber, los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH por sus siglas en inglés), han ofrecido resultados más confiables para las estimaciones que del CAPM se han hecho para diversos mercados.

Esta familia de modelos econométricos es especialmente útil en el modelaje de la volatilidad de los activos financieros. En el marco del CAPM, son especialmente útiles los modelos GARCH multivariados, que capturan interacciones entre distintos activos. Estos ofrecen formas funcionales para los elementos de la matriz de varianzas y covarianzas, partiendo del supuesto de que las relaciones en la volatilidad de los activos son cambiantes en el tiempo. El modelo ocupado en este trabajo es el GARCH multivariado con correlaciones condicionales variables, propuesto por Tse y Tsui en 2002.

La literatura referente al estudio de los mercados financieros desde la perspectiva del CAPM es bastante extensa. Una útil reseña de los estudios teóricos y empíricos más relevantes sobre el Modelo de Valuación de Activos de Capital puede ser encontrada en el artículo de (Fama & French, The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, 2004), que cuenta con utilísimas referencias. Algunos experimentos econométricos del CAPM aplicado a mercados bursátiles de distintos países emergentes pueden consultarse en (Md Isa, Pua, & Yong, 2008) para el caso del mercado accionario de Malasia; (Yang & Xu, 2006) para el caso de China; y (Ali, Islam, & Chowdhury, 2010), en donde se aplica el CAPM al mercado accionario de Dhaka.

En el caso de México, destacan los trabajos de (Gómez Monge, 2004), que analiza los rendimientos históricos de la bolsa mexicana en el marco del CAPM; y (Sansores Guerrero, 2008), quien concluye que la aplicación del Modelo de Valuación de Activos de Capital al mercado mexicano resulta inadecuada para explicar el comportamiento observado por el mercado mexicano entre 1997 y 2006.

En cuanto a la aplicación empírica de modelos de la familia GARCH a los mercados bursátiles en países emergentes, el artículo de (Guzmán Plata, 1998) utiliza un modelo ARCH-M para el cálculo de las betas de 33 acciones mexicanas. La principal diferencia entre este trabajo y la presente tesis yace en la naturaleza univariada del ARCH-M, además de que las betas calculadas en este caso no son dinámicas. Otro trabajo similar al realizado en esta tesis es el de (Godeiro, 2013), el cual lleva a cabo el cálculo de betas dinámicas para las acciones del principal índice brasileño, mediante el modelo MGARCH con correlaciones condicionales dinámicas (DCC-MGARCH), que el autor confunde con el VC-MGARCH de Tse y Tsui. El autor brasileño comete un error al calcular las betas utilizando las correlaciones entre los activos y el índice, en lugar de sus covarianzas.

Esta tesis se plantea como objetivo el estudio de la volatilidad en el mercado accionario mexicano, medida, de acuerdo con el CAPM, por las betas de los activos. Se hace especial énfasis en el carácter dinámico que tiene esta volatilidad, y que no es capturado por los supuestos del Modelo de Valuación de Activos de Capital. Para ello, se realiza la estimación de un modelo VC-MGARCH de orden (1,1). A partir de los parámetros estimados, se estiman las varianzas y correlaciones condicionales de cada activo financiero. Estas variables son utilizadas para el cálculo de las covarianzas dinámicas, y consecuentemente, de las betas condicionales de cada acción.

La tesis está estructurada en 4 capítulos. En el primero, se ofrece una descripción general del mercado accionario mexicano, tomando en cuenta información que hace referencia a la estructura y el tamaño del mismo. También se analiza el desenvolvimiento reciente del mercado, mediante el estudio de la trayectoria y los rendimientos de su principal indicador, el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Posteriormente se presenta un comparativo internacional, con el objetivo de colocar a la bolsa mexicana en un contexto global, y evaluar su estructura y comportamiento en comparación con otros mercados bursátiles de

distintas partes del mundo. En la última sección del capítulo se explica cómo está estructurado el Índice de Precios y Cotizaciones.

El segundo capítulo consiste en la fundamentación teórica del Modelo de Valuación de Activos de Capital. Se inicia con la descripción de conceptos microeconómicos básicos para el entendimiento de la teoría financiera, como son elección racional, actitudes hacia el riesgo y utilidad esperada. Posteriormente, se hace una exposición del procedimiento seguido por la teoría de portafolios para la obtención de la frontera eficiente. Se procede con la formulación y explicación de la Línea del Mercado de Capitales, para concluir el capítulo con el modelo financiero que ocupa directamente a este trabajo: el Modelo de Valuación de Activos de Capital y su representación gráfica, la SML o Línea del Mercado de Valores.

En el tercer capítulo se enumeran y describen algunos métodos econométricos utilizados para el estudio de los mercados financieros. Se comienza por el modelaje del rendimiento de los activos, haciendo referencia a distintos postulados realizados acerca de la distribución probabilística de éstos. En seguida, se explican algunos métodos utilizados para la modelación de la volatilidad (tema que constituye el principal interés de esta tesis). Esta descripción se centra en la familia de modelos GARCH, comenzando por procesos univariados, para después ofrecer una breve descripción de algunos modelos GARCH multivariados. Se brinda un especial énfasis al modelo GARCH multivariado con correlaciones variables (VC-MGARCH), que es el utilizado para modelar la volatilidad en este trabajo. El capítulo concluye con la explicación de la metodología para el cálculo de las betas condicionales dinámicas, el cual constituye la parte central de esta investigación.

El cuarto y último capítulo describe las series de tiempo financieras se ocupa de la descripción de la información estadística utilizada para la estimación del modelo, y la presentación de los resultados del ejercicio econométrico. Se analizan los estadísticos descriptivos de los rendimientos de las series accionarias, y se realizan observaciones al respecto. Posteriormente, se describe el procedimiento llevado a cabo para la estimación y se hacen comentarios acerca de algunas peculiaridades encontradas durante el mismo. Los resultados son presentados en un cuadro-resumen del modelo. Al final del capítulo se

presentan gráficamente las betas condicionales calculadas para cada serie accionaria, y se ofrece una interpretación acerca del comportamiento de éstas.

La hipótesis que este trabajo se plantea es que la volatilidad de los rendimientos de los activos financieros (medida por las betas de los activos) no es fija, sino que sigue un comportamiento dinámico, i.e. varía con el transcurso del tiempo. Para su contrastación, se recurre a la estimación de un modelo VC-MGARCH, en el que se asumen comportamientos dinámicos para cada elemento de la matriz de varianzas y covarianzas. El que cada entrada de la matriz sea variable, invalida las conclusiones obtenidas a partir de una interpretación estática del Modelo de Valuación de Activos del Capital. Las conclusiones son presentadas al final del trabajo.

La relevancia de esta tesis consiste principalmente en su vinculación con la validez del Modelo de Valuación de Activos de Capital. Por otro lado, constituye la primera aplicación empírica del GARCH multivariado con correlaciones variables realizada para el caso del mercado mexicano. El trabajo contribuye, mediante los resultados de la estimación, al estudio econométrico de los mercados financieros, tanto en México como en otros países. Además, las betas condicionales calculadas como producto de la estimación del modelo ofrecen una alternativa para el análisis de la volatilidad en los mercados, y una herramienta cuya utilidad en la toma de decisiones de inversión deberá ser puesta a prueba en futuras investigaciones al respecto.

1. El mercado accionario mexicano

Cuando el objetivo de la investigación es poner a prueba la forma en que el Modelo de Valuación de Activos de Capital trata a la volatilidad del rendimiento de los activos en el mercado accionario mexicano, es menester poseer cierto conocimiento estructural sobre éste antes de hacer cualquier aseveración sobre las variables relacionadas con él. De otro modo, se estaría incurriendo en una irresponsabilidad no tan infrecuente en la literatura: abordar la investigación desde una perspectiva meramente cuantitativa, ocasionando así que el análisis de los resultados quede restringido por el acotado enfoque de la investigación. Si bien en el trabajo se plantea el modelaje de la volatilidad del rendimiento de las series accionarias en términos cuantitativos, los resultados no deben explicarse únicamente haciendo referencia a los valores de los estadísticos de prueba. Es necesario ofrecer una visión más amplia de las razones por las que el mercado accionario mexicano cumple (o no) con ciertas características que hacen pertinente la utilización del Modelo de Valuación de Activos de Capital.

El presente capítulo tiene como objetivo ofrecer una breve pero ilustrativa descripción de un elemento central de esta investigación: el mercado accionario de nuestro país. Sería imprudente poner a prueba un modelo de valuación de activos de capital cuando no se poseen siquiera nociones básicas sobre las condiciones del mercado en que estos se intercambian. Es debido a ello que en esta sección se ofrecen indicadores básicos sobre el mercado mexicano de acciones que permitan identificar el contexto en que el presente estudio tiene lugar.

En primera instancia, se ofrecerá una revisión de los principales indicadores del mercado mexicano, e.g. valor de capitalización, rendimiento, operatividad. Así, se planea comprender la estructura del mercado de valores en nuestro país, como preámbulo para poner a prueba el Modelo de Valuación de Activos de Capital. Dicha exposición es sucedida por una comparación internacional de algunos de los indicadores presentados. La importancia de identificar el rol desempeñado por nuestro país en el escenario internacional es primordial: estudiar los mercados financieros sin siquiera considerar el componente externo es, en nuestros días, una necesidad.

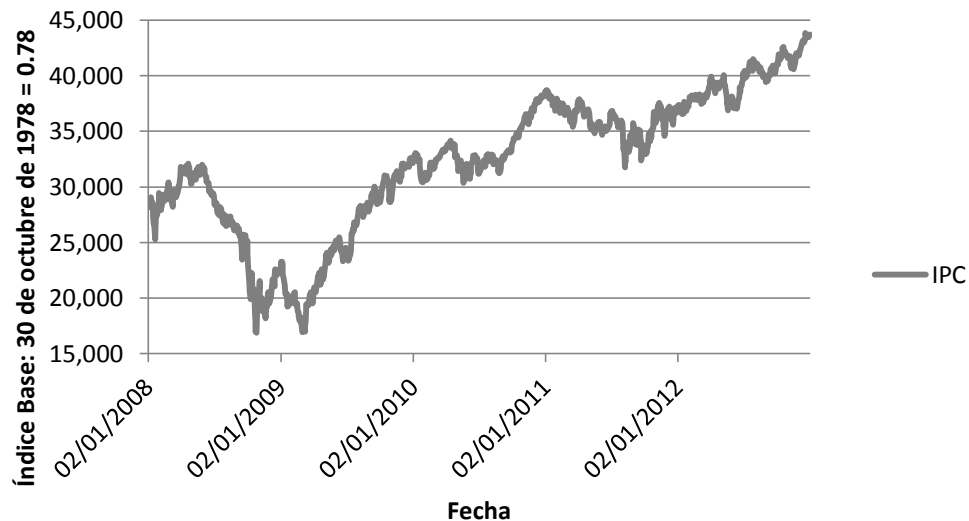
El capítulo concluye con un esbozo de la metodología y composición corriente del principal indicador del dinamismo del mercado accionario: el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Podría pensarse que los detalles metodológicos sobre la construcción de un índice resultarían intrascendentes para un trabajo como éste. Sin embargo, como se verá más adelante, en el marco del CAPM, el IPC cobra vital importancia al estar integrado por una muestra representativa del mercado: el Índice de Precios y Cotizaciones será utilizado como equivalente empírico del concepto de *portafolio de mercado*. La explicación que en esta sección se da sobre su metodología y composición tiene el propósito de ofrecer sustento a la hipótesis de que el IPC es representativo del mercado accionario mexicano y, por tanto, puede ser utilizado como una variable *proxy* del *portafolio (cartera) de mercado*.

Los conocimientos estructurales ofrecidos en este capítulo ofrecerán al lector las nociones básicas del mercado accionario que le permitirán visualizar en un amplio sentido la aplicación del modelo en éste y, posteriormente, entender las condiciones que llevan a los resultados obtenidos.

1.1 Principales indicadores del mercado

Lo primero que debe tenerse en cuenta al analizar la situación actual del mercado de valores, es su comportamiento. Para ello, recurriremos a su más representativo indicador: el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). Entre el principio de 2008 y el final de 2012, el Índice ha observado, en general, una tendencia alcista (interrumpida claramente durante la segunda mitad de 2008 y el principio del año subsiguiente). Se aprecian fácilmente 3 ciclos en la gráfica uno que termina el 27/10/2008, día en que el índice observa el valor más bajo del periodo (16,891.03) para después iniciar una ínfima recuperación que alcanzaría su cénit los primeros días del 2009, solo para volver a caer tan rápido como había sido el *boom*, llegando a un nuevo mínimo a principios de marzo. A partir de entonces, comienza un nuevo ciclo cuya tendencia alcista no termina aún, y que ha llevado al índice a asumir niveles máximos históricos durante las últimas semanas del 2012, y las iniciales del 2013 (CNN, 2013). Por supuesto, la caída, pequeña recuperación y reajuste que tuvieron lugar entre 2008 y 2009 corresponden a la coyuntura global sufrida por los mercados reales y financieros durante el periodo. A partir de entonces el mercado accionario no ha dejado de subir, hasta colocarse, a finales de 2012, cerca de los 45,000 pts.

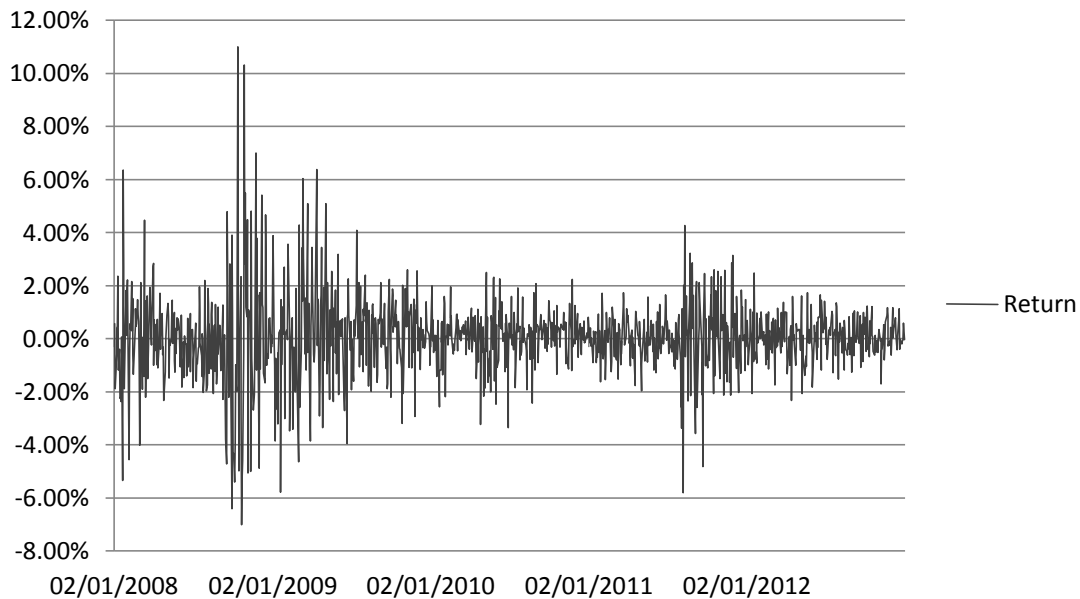
Gráfico 1.1
Índice de Precios y Cotizaciones
02.01.08 - 31.12.12



Fuente: Yahoo! Finance.

La gráfica del rendimiento diario del índice durante el mismo periodo, arroja un valor mínimo de -7%, y un punto máximo de 11%. Ambos rendimientos extraordinarios fueron presentados por el mercado durante el periodo de alta volatilidad (como puede apreciarse por los dramáticos altibajos en la gráfica) comprendido entre los últimos meses de 2008 y la mitad del 2009. Puede observarse que a partir de entonces, y hasta finales de 2011, el comportamiento general del mercado abandona en muy pocas ocasiones el rango con límite inferior -2% y superior de 2%. Posteriormente, debido a la incertidumbre global generada por el conocimiento de las irresponsabilidades fiscales de algunos gobiernos europeos, el índice muestra de nuevo abruptos altibajos, para volverse a estabilizar a partir del segundo trimestre de 2012. El rendimiento promedio diario observado por el mercado accionario mexicano durante el periodo que comprende los años entre 2008 y 2012 es de 0.04%. El signo positivo de este estadístico, es producto de la tendencia alcista que observó el índice durante el periodo.

Gráfico 1.2
Rendimiento diario del IPC
03.01.08 - 31.12.12



Fuente: Elaboración propia con base en Yahoo! Finance.

Es preciso, a continuación, exponer una variable de suma importancia para entender el desenvolvimiento del mercado accionario durante los últimos años: el valor de capitalización del mercado. Esta variable es el producto resultante de multiplicar el número de acciones en circulación por su precio de mercado. Lo que el valor de capitalización en realidad nos dice es el tamaño del mercado, es el producto de precio por cantidad, por lo que lo que resulta es, por llamarlo de alguna manera, el valor económico total de las empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores

Cuadro 1.1
 Valor de capitalización del mercado accionario mexicano
 2007-2011
 (Millones de pesos y de dólares)

Año	Empresas inscritas	Series inscritas	Capitalización		Variación porcentual	
			Pesos	Dólares	Pesos	Dólares
2007	125	153	4,340,886.00	399,485.00		
2008	125	153	3,220,900.19	237,910.00	-25.80%	-40.45%
2009	125	153	4,596,094.34	351,957.00	42.70%	47.94%
2010	130	161	5,603,894.43	453,496.00	21.93%	28.85%
2011	128	155	5,703,430.00	407,667.00	1.78%	-10.11%

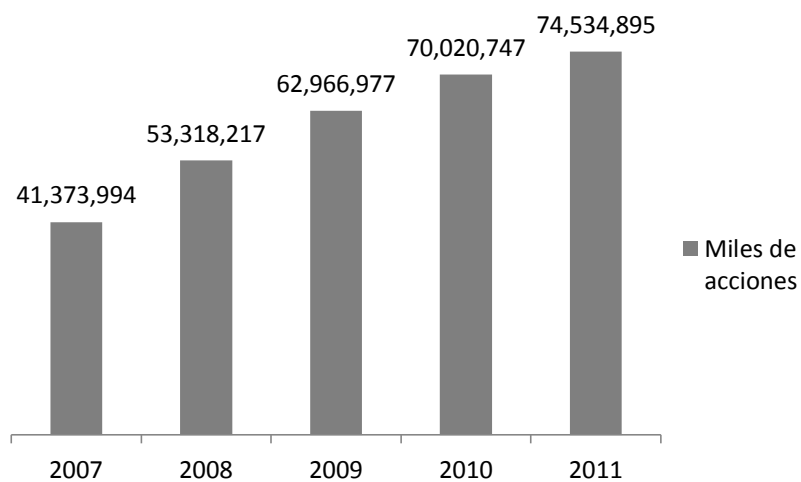
Fuente: (Bolsa Mexicana de Valores, 2012)

El cuadro expone la evolución del valor de capitalización de mercado, tanto en pesos como en dólares, para el periodo comprendido entre 2007 y 2011. La caída presentada en 2008 coincide con el declive del mercado ya mencionado y corroborado con los datos presentados anteriormente. 2009 representó un año de importante recuperación. Para 2010, el ritmo de crecimiento seguía siendo considerable, aunque menor que el año anterior. En 2011 se observa un crecimiento ínfimo comparado con años anteriores. Este es el año que precede al segmento de tendencia alcista más pronunciada del Índice de Precios y Cotizaciones. Además, al final del año, las revelaciones sobre la crisis europea mantuvieron al mercado cauteloso. Otro factor que influye en el pobre crecimiento presentado en este año es la salida del mercado de 2 Emisoras y 6 series accionarias: al haber menos acciones, el valor de capitalización del mercado disminuye, *ceteris paribus*.

En términos de volumen operado, se observa un crecimiento en el periodo, al pasar de 41 a 74 millones de acciones entre 2007 y 2011. Sin embargo, cabe señalar que el ritmo (la tasa) al que este crecimiento ha ocurrido año con año, observa una gradual disminución: en 2008 la tasa de crecimiento del volumen operado fue de 28.87%, mientras que en 2011 se redujo hasta 6.45%. Ello puede explicarse mediante muchos factores, entre los que se encuentran el número de emisoras que cotizan durante el año en cuestión, la cantidad de transacciones

realizadas en el año, grandes volúmenes intercambiados debido a fusiones, ventas o escisiones, y otros. Es preciso obviar que el volumen operado es una variable de cantidad. Al incorporar precios a éste, se obtiene el importe operado. El cuadro 1.1 presenta los importes operados en pesos y en dólares durante el mismo periodo.

Gráfico 1.3
Volumen operado
2007-2011



Fuente: (Bolsa Mexicana de Valores, 2012)

Cuadro 1.2
Importe operado en el mercado accionario
(Millones de pesos y de dólares)

Año	Importe operado		T.C.*
	Pesos	Dólares	
2007	1,414,774	129,528	
2008	1,411,289	128,912	-0.25%
2009	1,477,441	110,351	4.69%
2010	2,098,449	166,204	42.03%
2011	2,097,204	169,537	-0.06%

Fuente: (Bolsa Mexicana de Valores, 2012)

*Tasa de crecimiento del importe operado en pesos

Mientras que el volumen operado ha crecido todos los años, el importe no lo ha hecho así. En 2008, la caída de los precios de las acciones ocasionada por la crisis internacional ocasionó una caída de un cuarto de punto porcentual en el importe operado. Asimismo, mientras que el valor de capitalización observó una fuerte recuperación en 2009, el importe operado no lo hizo sino hasta 2010. La explicación de esto puede yacer en el hecho de que aunque los precios de las acciones se recuperaron en 2009, el público inversionista se mantuvo cauteloso y sin hacer cambios considerables en su portafolio, conservando las acciones de emisoras más costosas, con la esperanza de una posible revaluación de las mismas. En 2011, el poco dinamismo en el mercado de valores, aunado al lento crecimiento del volumen operado, trajo como consecuencia una ligera disminución en el importe operado en la Bolsa Mexicana de Valores.

Sin duda un elemento de vital importancia para comprender estructuralmente a la bolsa de valores, es la participación en el mercado de las más grandes emisoras en cuanto a valor de capitalización. Digamos, la parte del pastel que corresponde a los gigantes del mercado accionario mexicano. El siguiente cuadro muestra a las principales emisoras ordenadas de acuerdo a su peso relativo en el mercado.

Cuadro 1.3
Principales emisoras en el mercado accionario
(Millones de pesos y de dólares)

Emisora	Serie	Valor de capitalización		Participación porcentual en el mercado	Acumulado
		Pesos	Dólares		
AMX	L	835,497	59,719	14.65	14.65
WALMEX	V	678,498	48,497	11.9	26.55
ELEKTRA	*	335,550	23,984	5.88	32.43
GMEXICO	B	283,919	20,294	4.98	37.41
PE&OLES	*	243,052	17,373	4.26	41.67
FEMSA	UBD	209,677	14,987	3.68	45.35
GFINBUR	O	171,076	12,228	3	48.35
TLEVISA	CPO	151,165	10,805	2.65	51
BIMBO	A	133,900	9,571	2.35	53.35
GMODELO	A	129,141	9,231	2.26	55.61

Fuente: (Bolsa Mexicana de Valores, 2012)

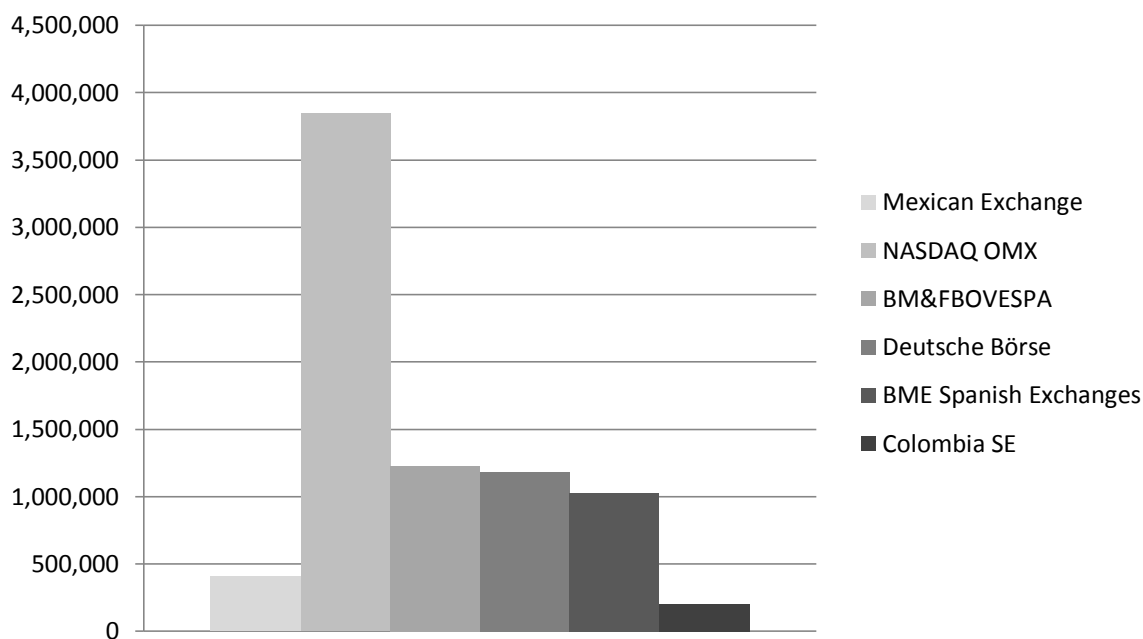
Basta solo un vistazo a la tabla para percatarse del alto grado de concentración que presenta el mercado accionario. Solo 10 emisoras, de entre más de 150, controlan más del 55% del mercado. Proviene de diversos sectores: telecomunicaciones, consumo frecuente, minería y financiero. Esta concentración es una característica bastante peculiar del mercado. En las páginas siguientes, cuando se expongan los pesos relativos de las emisoras que integran el Índice de Precios y Cotizaciones, se podrá llegar a la misma conclusión: como muchos mercados en México, el accionario puede considerarse como oligopólico.

Una vez expuestos los indicadores que caracterizan a la Bolsa Mexicana de Valores, es preciso proceder a situarlos dentro de un contexto internacional, para que el lector pueda adquirir una noción relativa de las cantidades que se han presentado hasta ahora.

1.2 La Bolsa Mexicana en el mundo

Para poder comprender el papel que juega el mercado accionario mexicano en el contexto global, resulta indispensable tomar en consideración su tamaño. Para nuestro propósito, la mejor manera de medir el tamaño de un mercado accionario es mediante el valor de capitalización. La siguiente gráfica permite comparar esta variable en mercados de distintas partes del mundo, a saber, Estados Unidos, Brasil, Alemania, España, y Colombia.

Gráfico 1.4
Valor de capitalización de distintas bolsas
2011
(millones de USD)



Fuente: <http://www.world-exchanges.org/>

*BME Spanish Exchanges: Bolsas de Bilbao, Barcelona, Valencia y Madrid

La gráfica es bastante ilustrativa: el mercado mexicano solo supera, en valor de capitalización, a la bolsa colombiana. España, Brasil y Alemania tienen una capitalización de mercado más de 2 veces mayor a la de la Bolsa Mexicana, mientras que el mercado NASDAQ es considerablemente más grande que todos los mercados considerados para el comparativo internacional.

Otra posible forma de medir el tamaño de un mercado accionario, es mediante el número de empresas que cotizan en él. En este rubro, la Bolsa Mexicana se presenta, igual que cuando se consideró el valor de capitalización, como el segundo mercado accionario más pequeño de los incorporados al análisis. Un elemento a destacar es el número de compañías listadas en el mercado español: con tantas empresas cotizando en bolsa, uno esperaría un valor de capitalización mucho más alto, sin embargo, este no es el caso. Evidentemente, la capitalización de mercado de las empresas en el mercado español es mucho menor a la de aquellas que se transan en Alemania o Brasil.

Cuadro 1.4
Número de empresas listadas
2011

Mercado	Compañías listadas
Mexican Exchange	128
NASDAQ OMX	2383
BM&FBOVESPA	366
Deutsche Börse	670
BME Spanish Exchanges	3241
Colombia SE	79

Fuente: <http://www.world-exchanges.org/>

En cuanto al número de transacciones, los datos, también para el año 2011, son los siguientes:

Cuadro 1.5
Número de operaciones
2011

Mercado	Miles de operaciones
Mexican Exchange	10,817.4
NASDAQ OMX	1,702,749.6
BM&FBOVESPA	119,491.5
Deutsche Börse	129,154.0
BME Spanish Exchanges	45,673.3
Colombia SE	842.5

Fuente: <http://www.world-exchanges.org/>

El número de transacciones realizadas en México durante 2011 es mucho menor al que observaron en el mismo año los mercados accionarios de Brasil, Alemania, e incluso España. Como en los rubros anteriores, el NASDAQ presenta el valor más alto, mientras que Colombia se ubica al final de la lista. Este indicador puede interpretarse como una señal del dinamismo de un mercado accionario, pues toma en cuenta el número de compraventas que se llevaron a cabo durante el año: el número de transacciones nos muestra el grado de bursatilidad en un mercado durante el periodo en cuestión.

En conclusión, los indicadores anteriores muestran que, en comparación con lo ocurrido en otros países, las acciones en la Bolsa Mexicana de Valores conforman un mercado pequeño y poco dinámico. Es indispensable tener en cuenta lo anterior al momento de comparar los resultados de esta investigación con aquellos que hayan sido obtenidos mediante metodologías similares en otros países.

1.3 El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)

El indicador más representativo de la dinámica del mercado de valores mexicano es el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). De acuerdo con su nota metodológica, publicada por el Grupo BMV, el índice es una expresión del rendimiento del mercado accionario con base en “[...] las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de Emisoras cotizadas en la Bolsa [...]” (Grupo BMV, 2012).

Esta muestra balanceada, ponderada y representativa se obtiene sometiendo a todas las emisoras a una serie de filtros, que se suceden uno al otro para seleccionar un grupo de aquellas acciones que, por sus características, permitan rastrear continuamente el desenvolvimiento del mercado. La muestra es revisada cada año en el mes de agosto para verificar que las emisoras incluidas sigan cumpliendo los criterios o, si existen, identificar otras que por su reciente comportamiento deban sustituirlas. Además, se llevan a cabo revisiones trimestrales de la muestra, con el objetivo estricto de considerar la pertinencia corriente de los pesos relativos que fueron asignados a las emisoras que conforman el índice y, si es el caso, modificarlos.

El índice está compuesto por 35 emisoras, siendo la serie accionaria más bursátil de cada una de ellas la que se considera para integrar la muestra. En ocasiones, debido a fusiones, escisiones, o alguna otra circunstancia extraordinaria, el número de series en la muestra puede variar durante el intervalo entre la modificación y la siguiente revisión anual. La base del índice es 30 de octubre de 1978 = 0.78. A continuación, se esbozarán los criterios de selección de las Emisoras que integran el IPC.

En primer lugar, las emisoras elegibles deben haber operado continuamente al menos durante los 3 meses calendario previos a la fecha en que se revisa la muestra. Esto permite que las emisoras incorporadas al índice, al haber cotizado en Bolsa ya por un tiempo considerable, sean realmente representativas de los movimientos de precios (y rendimientos) en el mercado. Se evitan así emisoras que observen poca relación con el mercado debido al natural ajuste después de su Oferta Pública Inicial (OPI) u otros factores inherentes a series accionarias de reciente emisión.

Como segundo criterio, se fija un mínimo porcentaje de acciones flotantes. De este modo, la elegibilidad queda restringida para aquellas emisoras con un porcentaje de acciones flotantes de al menos 12%, o, en su defecto, con un valor de capitalización flotado mínimo de 10 mil millones de pesos. Acciones flotantes son aquellas que no están en manos de la misma empresa, directivos, propietarios con más del 30% de las acciones listadas, o cualquier otro agente que tenga como objetivo mantener esos títulos indefinidamente, i.e., aquéllas que están disponibles para el frecuente intercambio en el mercado bursátil. (Grupo BMV, 2012) El valor de capitalización flotado es el producto del número de acciones flotantes, por el precio de mercado de éstas. Este criterio permite seleccionar series accionarias pertenecientes a emisoras que se encuentran realmente sujetas a los movimientos del mercado, dejando afuera aquéllas que, aunque listadas, se caracterizan por un grado bajo de liquidez (bursatilidad).

El tercer filtro de selección consiste en que el valor de capitalización flotado de cada emisora sea de al menos 0.1% del valor de capitalización flotado del total de la muestra del IPC. Este criterio discrimina de una manera simple a emisoras que, por su tamaño, no resulten representativas del mercado accionario. El cuarto criterio consiste en elegir, de entre las que satisficieron los 3 filtros anteriores, a las 45 emisoras con el mayor factor de rotación. La rotación es “el valor que resulta de dividir el número de acciones negociadas en un periodo entre el número de acciones flotantes de la emisora” (Grupo BMV, 2012). Así, se llega a una lista de las 45 series accionarias más bursátiles del mercado.

Quedan aún 10 por eliminar. Esto se hace calificando cada una de las emisoras restantes de acuerdo a tres criterios: factor de rotación, valor de capitalización flotado, e importe operado durante los últimos doce meses. Las 35 emisoras con mejor calificación ocupan un lugar dentro del índice.

Una vez que se han seleccionado nominalmente las emisoras que conformarán el índice, es necesario asignar a las series accionarias de cada una de ellas los pesos relativos que ocuparán dentro del mismo. Para ello, simplemente se utiliza la participación del valor de capitalización flotado de cada serie en el valor de capitalización flotado total del IPC. Existen, además, límites para los pesos relativos; ello con el objetivo de evitar una gran concentración, que pudiera convertirse en causa de pérdida de representatividad en el

índice. Ninguna serie puede tener un peso relativo mayor a 25%, mientras que las 5 series más importantes del índice no deben sobrepasar, en conjunto, el 60%. Si estos límites son superados, los excedentes se distribuyen proporcionalmente entre todas las emisoras que conforman la muestra. En el cuadro 1.6 se muestran las series accionarias que integran el IPC actualmente, junto con sus respectivos pesos relativos.

Como anuncia el cuadro, se cumplen los límites a los pesos relativos: la emisora más importante, América Móvil S.A.B. de C.V. (AMX), tiene un peso de apenas 22.06%, mientras que las 5 emisoras más grandes dentro del índice alcanzan un peso relativo conjunto de poco más del 55%. Aun cuando formalmente (de acuerdo a los límites determinados en la metodología) la muestra no presenta un alto grado de concentración, el hecho de que el comportamiento de 5 emisoras (de entre 35) represente más de la mitad de los movimientos del Índice de Precios y Cotizaciones, solo puede entenderse dentro de un mercado fuertemente concentrado. Ésta es una realidad en la Bolsa Mexicana de Valores: gran parte de los movimientos en el mercado son causados por operaciones en las que las acciones que se transan pertenecen a un número bastante reducido de emisoras.

Cuadro 1.6
Pesos relativos del IPC

Emisora	Serie	ω	Acumulado
AMX	L	22.06	22.06
WALMEX	V	11.45	33.51
FEMSA	UBD	8.71	42.22
GMEXICO	B	6.52	48.74
TLEVISA	CPO	6.27	55.01
GFNORTE	O	6.17	61.18
CEMEX	CPO	3.89	65.07
ALFA	A	3.84	68.91
KOF	L	3.37	72.28
PE&OLES	*	3.07	75.35
GFINBUR	O	2.85	78.20
MEXCHEM	*	2.78	80.98
GMODELO	C	2.63	83.61
KIMBER	A	1.83	85.44
AC	*	1.81	87.25
BIMBO	A	1.71	88.96
ELEKTRA	*	1.63	90.59
LIVEPOL	C-1	0.96	91.55
MFRISCO	A-1	0.87	92.42
LAB	B	0.86	93.28
COMPARC	*	0.78	94.06
GAP	B	0.75	94.81
ASUR	B	0.73	95.54
ICA	*	0.63	96.17
ICH	B	0.57	96.74
ALPEK	A	0.53	97.27
BOLSA	A	0.47	97.74
OHLMEX	*	0.41	98.15
AZTECA	CPO	0.33	98.48
GEO	B	0.30	98.78
ALSEA	*	0.29	99.07
HOMEX	*	0.27	99.34
GRUMA	B	0.25	99.59
CHDRAUI	B	0.22	99.81
URBI	*	0.17	99.98

Fuente: (Bolsa Mexicana de Valores, 2012)

Nota: La suma difiere de 100% debido al redondeo.

2. Teoría de carteras

La razón de ser de este capítulo consiste en exponer de manera breve el marco teórico que envuelve al Modelo de Valuación de Activos de Capital. Para ello, se expondrán algunas ideas provenientes de la teoría microeconómica, como las actitudes hacia el riesgo, la utilidad esperada y el problema de elección intertemporal. Una vez que se hayan esclarecido estos conceptos, y se haya configurado, mediante la enunciación de los supuestos correspondientes, el mundo hipotético en que se desenvuelven los modelos que se expondrán en este capítulo, se procederá con la exposición del procedimiento para la obtención de la frontera eficiente para el caso en que existen N activos riesgosos. Posteriormente, se expondrá el mismo desarrollo para el caso de N títulos riesgosos y un activo libre de riesgo, que concluye con la derivación de la Línea del Mercado de Capitales (CML). Por último, se partirá de los planteamientos y la metodología característicos de la teoría de carteras, para derivar el modelo que constituye la esencia de la presente investigación: el Modelo de Valuación de Activos de Capital (mejor conocido como CAPM) y su representación gráfica, la Línea del Mercado de Valores (SML por sus siglas en inglés).

2.1 Selección de carteras

Para Harry Markowitz, Premio Nobel de Economía 1990, la selección de un portafolio o cartera consiste de dos etapas: una en la que, con base en la observación, se forman “creencias” acerca del comportamiento de los activos; y otra en la que estas creencias se utilizan para seleccionar el portafolio (Markowitz, 1952). Puesto de otra forma, cualquier inversionista (o administrador de inversiones) constituye su portafolio de inversión (o lo selecciona de entre todos los posibles) de acuerdo con lo que él “cree” que sucederá con los activos que lo integran.

Dicho lo anterior, es preciso determinar qué es aquello que hay que observar para formar creencias en las que se basen las decisiones de inversión. ¿Qué significa el comportamiento de los activos? Markowitz (1952) comienza considerando la idea de que el problema de optimización del inversionista consiste en maximizar los rendimientos esperados descontados, que inmediatamente descarta por carecer de argumentos que expliquen la

diversificación dentro de un portafolio. Es entonces cuando introduce la noción de media-varianza, que él llama la regla “rendimiento esperado – varianza del rendimiento”. (Markowitz, 1952)

2.1.1 Aversión al riesgo

Para una comprensión integral de las implicaciones y el desarrollo de la teoría de carteras, es requisito indispensable el conocimiento de las características propias de los inversores con aversión al riesgo.

Los agentes eligen un portafolio de inversión bajo condiciones inciertas: realizan su selección sin conocer cuál será el rendimiento efectivo de esa particular combinación de activos. Es consecuente pensar que los inversionistas deben tomar en cuenta las probabilidades de que el rendimiento de un activo tenga un valor determinado u otro en el futuro. Este proceso es parte de la formación de creencias de la que habla Markowitz en su artículo de 1952. El inversionista utiliza la información que posee (rendimientos históricos, probabilidad de que ocurra alguna aberración en el mercado, etc.) para determinar *ex ante* qué rendimiento espera obtener de cada activo o cartera.

Cabe señalar que los inversionistas no difieren, esencialmente, de los demás consumidores. El inversionista no es más que un consumidor que intercambia consumo presente por consumo futuro, de acuerdo a sus preferencias. Los postulados que la teoría económica hace con referencia a los consumidores, son válidos también para los inversores. Dicho esto, el inversionista también se enfrenta al problema de la maximización de la utilidad. La diferencia es que la función objetivo del inversionista es la utilidad del consumo al final del periodo, y no la utilidad en el presente (como ocurre en el caso tradicional). En esta sección, se utilizarán indistintamente los términos “consumidor” e “inversionista” para referirse a los agentes maximizadores de la utilidad.

Bajo condiciones de incertidumbre, el problema de optimización requiere de la incorporación de las probabilidades de ocurrencia de los distintos eventos que tendrán influencia sobre la utilidad del consumidor al final del periodo. Si, por ejemplo, existen dos distintos escenarios de consumo excluyentes -es decir que la ocurrencia de uno implica la no ocurrencia del otro-, y $[u(c_1), u(c_2)]$ son los niveles de utilidad que el inversionista

obtiene en los escenarios 1 y 2, respectivamente; y las probabilidades de que cada uno de estos eventos tenga lugar son π_1 y π_2 , correspondientemente, sería posible plantear la función de utilidad del consumidor de la siguiente forma:

$$u(c_1, c_2, \pi_1, \pi_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \quad (2.1)$$

Estadísticamente, la expresión anterior es igual al valor esperado o esperanza de la utilidad derivada del consumo. De hecho, esta forma particular de función de utilidad es denominada, generalmente, como *función de utilidad esperada*, o en su defecto, *función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern* (Varian, 2006).

En resumen, el consumidor maximiza su utilidad esperada, que es la suma de las utilidades obtenidas en los distintos escenarios, ponderadas por la probabilidad de que cada uno de éstos efectivamente ocurra. No es redundante decir que el valor de la utilidad esperada no es necesariamente igual a la utilidad del valor (de consumo) esperado, es decir:

$$\pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \neq u(\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2)$$

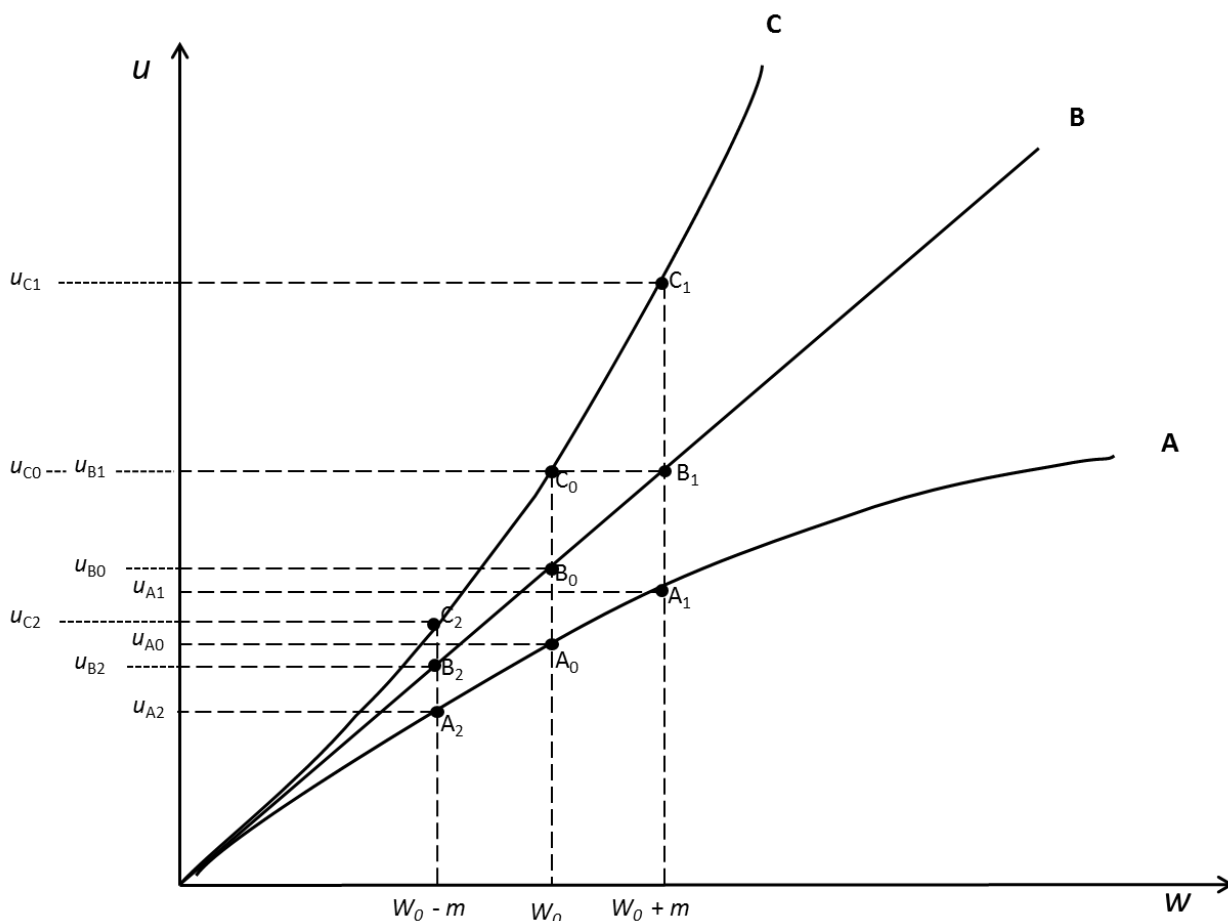
El que estos valores sean o no equivalentes, dependerá de la actitud hacia el riesgo que asuma el inversionista. Los agentes económicos pueden asumir una de tres posibles actitudes hacia el riesgo, a saber: aversión, indiferencia y amor. El inversionista amante del riesgo elegirá, de entre dos situaciones de resultados equivalentes, la que más riesgo conlleve. El consumidor adverso al riesgo optará por la alternativa más segura. El indiferente ante el riesgo elegirá cualquiera de las dos. Podría pensarse, por sentido común, que un agente racional es adverso al riesgo, por el simple hecho de que la actitud opuesta se advierte como inconcebible: ¿por qué alguien preferiría no tener la certeza de obtener cierta utilidad, cuando es posible estar seguro de ello?

Pero además de esta intuitiva conjetura, existe otra explicación para la asunción de una actitud contraria al riesgo: la naturaleza decreciente de la utilidad marginal. Esta característica de la función de utilidad, implica que el agente resienta más una pérdida de lo que valora una ganancia de la misma, cuando estas dos variaciones son de la misma magnitud. Un consumidor cuya utilidad marginal del consumo sea decreciente, optará por

mostrarse adverso al riesgo. Si concebimos a la riqueza (W) como condición necesaria para el consumo (y por tanto para la obtención de utilidad), no es incongruente pensar en la utilidad como función de la riqueza.

Gráfica 2.1

Actitudes hacia el riesgo y utilidad



La gráfica muestra posibles funciones de utilidad para consumidores con cada una de las diferentes actitudes hacia el riesgo. Un análisis de posibles cambios en W nos permitirá comprender mejor las implicaciones para cada tipo de agente. Supongamos que al principio del periodo, cada inversionista posee w_0 unidades de riqueza. Los inversionistas con actitudes adversa, indiferente y amante del riesgo se ubican, en este momento, en los puntos

A_0 , B_0 y C_0 , respectivamente. Partiendo de estas condiciones iniciales, los inversionistas, a futuro, se enfrentan a dos posibilidades: 1) que su riqueza se vea incrementada por una cantidad m , o 2) que ésta decrezca por la misma cantidad m . El primer escenario posible está representado en la gráfica por los puntos A_1 , B_1 y C_1 , en los que cada consumidor posee un nivel de riqueza equivalente a w_0+m . El otro escenario corresponde a los puntos A_2 , B_2 y C_2 , y al nivel de riqueza w_0-m .

Como se observa, aunque en los dos escenarios la cantidad en que varía la riqueza es igual (m), para la utilidad esto solo se cumple en la curva B, correspondiente a un inversionista indiferente al riesgo. En los demás casos, un aumento y disminución de la misma magnitud en los niveles de riqueza tienen efectos de diferente intensidad en la utilidad del consumidor. En la función de utilidad A, que es propia de un agente adverso al riesgo, un aumento de la riqueza en m unidades implica un aumento menos que proporcional en el nivel de utilidad (de u_{A0} a u_{A1}), mientras que una disminución de las mismas m unidades de riqueza ocasiona una dramática caída de la utilidad de u_{A0} a u_{A2} . En el caso de la función de utilidad C, ocurre lo contrario: la disminución en el nivel de utilidad ocasionada por una baja de m unidades en el nivel de riqueza es mucho menor que el incremento en la utilidad originado por m unidades adicionales de riqueza. Esta situación corresponde a un agente amante del riesgo.

En términos coloquiales, podría decirse que ante un posible aumento o disminución de la riqueza de una magnitud m , el consumidor adverso al riesgo tendrá poco que ganar y mucho que perder, mientras que al amante al riesgo corresponderá el razonamiento contrario. Para el inversionista indiferente no existe una divergencia significativa, por lo que ponderará con la misma intensidad tanto la ganancia como la pérdida de estas m unidades de riqueza.

¿Por qué asumir que los inversionistas son adversos al riesgo? Es posible resolver esta pregunta con un ejemplo. Digamos que w_0 resulta apenas suficiente para satisfacer las necesidades básicas para la subsistencia del consumidor, lo que implica que con w_0-m unidades de riqueza sería imposible la satisfacción de éstas. El nivel de riqueza w_0+m permite al inversionista elevar su nivel de consumo por encima de lo esencial. Bajo estos supuestos, es claro que las m unidades de riqueza resultan mucho más considerables en

caso de una pérdida que en el de una ganancia, puesto que no contar con ellas significaría carecer de los productos más necesarios y sufrir una importante pérdida del bienestar. Por otro lado, una ganancia de m unidades beneficiará al individuo, que sin embargo, ya era capaz de consumir lo necesario para su subsistencia. Resulta evidente que, en este caso, el consumidor asignará más importancia a las m unidades que, en caso de ser perdidas, le impedirían satisfacer sus requerimientos esenciales que a las m unidades de riqueza que le permitirían un nivel de consumo mayor.

A partir de la gráfica 2.1, puede inferirse que la función de utilidad (U) de la riqueza de un inversionista adverso al riesgo tiene las siguientes características: 1) $U' > 0$; y 2) $U'' < 0$. Teniendo esto en cuenta, se expone a continuación la serie de Taylor de segundo grado de la función de utilidad en torno al valor esperado de la riqueza al final del periodo:

$$U(\tilde{W}_1) = U(E[\tilde{W}_1]) + U'(E[\tilde{W}_1]) \cdot (\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1]) + \frac{1}{2} U''(E[\tilde{W}_1]) \cdot (\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1])^2 \quad (2.2)$$

Calculando el valor esperado de ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$E[U(\tilde{W}_1)] = E \left[U(E[\tilde{W}_1]) + U'(E[\tilde{W}_1]) \cdot (\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1]) + \frac{1}{2} U''(E[\tilde{W}_1]) \cdot (\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1])^2 \right]$$

Haciendo uso de la linealidad de las expectativas (ley de expectativas iteradas), y dado que $E[\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1]] = 0$, la expresión anterior resulta en la siguiente:

$$E[U(\tilde{W}_1)] = U(E[\tilde{W}_1]) + \frac{1}{2} U''(E[\tilde{W}_1]) \cdot E[(\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1])^2]$$

El término $E[(\tilde{W}_1 - E[\tilde{W}_1])^2]$ equivale a “la esperanza del error cuadrático”. Si retomamos los conceptos de estadística descriptiva, este elemento de la ecuación anterior no es otra cosa sino la varianza de la riqueza (σ_W^2), de tal forma que es posible su exposición como:

$$E[U(\tilde{W}_1)] = U(E[\tilde{W}_1]) + \frac{1}{2} U''(E[\tilde{W}_1]) \cdot \sigma_W^2 \quad (2.4)$$

Retomando las características de la función de utilidad esperada de los consumidores adversos al riesgo, en particular respecto a los signos de sus derivadas ($U' > 0$; $U'' < 0$), es posible advertir, en la expresión anterior, que la utilidad esperada: 1) incrementa cuando el valor esperado de la riqueza ($E[\tilde{W}_1]$) aumenta; y 2) guarda una correlación negativa con la varianza de la riqueza (σ_W^2).

Asumiendo que la riqueza al final del periodo depende del rendimiento de una inversión que el consumidor realiza al principio del periodo, su valor esperado puede ser representado como $E[\tilde{W}_1] = W_0(1 + E[\tilde{R}])$, mientras que la varianza de la riqueza queda determinada por $\sigma_W^2 = W_0^2 \cdot \sigma_R^2$. De esta forma, la utilidad esperada se ha transformado en una función del rendimiento esperado y la varianza del rendimiento de la inversión realizada.

Si la utilidad esperada está descrita por estas dos variables ($E[\tilde{R}]$ y σ_R^2) es posible representar las distintas combinaciones de una y otra que permiten al individuo obtener un nivel de utilidad determinado. Para ello, recurriremos a las curvas de indiferencia del individuo, que en el plano riesgo-rendimiento ($\sigma_R, E[\tilde{R}]$) se definen como el lugar geométrico de las combinaciones de rendimiento esperado ($E[\tilde{R}]$) y desviación estándar del rendimiento (σ_R) que proporcionan un mismo nivel de utilidad esperada.

Una manera de determinar la forma que estas funciones de isoutilidad adquieren en el plano en cuestión, es mediante el diferencial total de la función de utilidad esperada. Recordemos que $E[U(\tilde{W}_1)] = u(E[\tilde{R}], \sigma_R)$, puesto que $\sqrt{\sigma_R^2} = \sigma_R$. Entonces, el diferencial total de $E[U(\tilde{W}_1)]$ se obtiene de la siguiente forma:

$$dE[U(\tilde{W}_1)] = \frac{\partial E[U(\tilde{W}_1)]}{\partial E[\tilde{R}]} dE[\tilde{R}] + \frac{\partial E[U(\tilde{W}_1)]}{\partial \sigma_R} d\sigma_R \quad (2.5)$$

La condición de primer orden queda entonces como sigue:

$$U'(E[\tilde{W}_1]) \cdot W_0 \cdot dE[\tilde{R}] + U''(E[\tilde{W}_1]) \cdot W_0^2 \sigma_R \cdot d\sigma_R = 0$$

Lo que puede reescribirse como:

$$\frac{dE[\widetilde{R}]}{d\sigma_R} = -\frac{U''(E[\widetilde{W}_1])}{U'(E[\widetilde{W}_1])} \cdot W_0 \sigma_R > 0 \quad (2.6)$$

La expresión anterior representa el cambio en el rendimiento esperado ante un cambio en la desviación estándar del rendimiento, i.e. el tradeoff entre riesgo y rendimiento para un nivel constante de utilidad esperada (garantizado por la condición de primer orden). En otras palabras, este resultado no es otra cosa que la pendiente de la función de isoutilidad en el espacio media-desviación estándar. Si, para el caso de un inversionista adverso al riesgo, tenemos que $U'(E[\widetilde{W}_1]) > 0$, y $U''(E[\widetilde{W}_1]) < 0$, en la expresión precedente se cumple $-\frac{U''(E[\widetilde{W}_1])}{U'(E[\widetilde{W}_1])} > 0$ y dado que la riqueza inicial es siempre positiva (ya que si fuera nula estaríamos ante una situación de arbitraje) y la desviación estándar también (dado que $\sqrt{\sigma_R^2} = \sigma_R$), es evidente que la curva de indiferencia se caracteriza por una pendiente positiva en el plano $(\sigma_R, E[\widetilde{R}])$. Cabe señalar que mientras mayor sea el valor de $-\frac{U''(E[\widetilde{W}_1])}{U'(E[\widetilde{W}_1])}$, más adverso al riesgo será el agente, y mayor será la pendiente de sus curvas de indiferencia, lo que puede observarse en la gráfica 2, en la que el individuo B (cuyas curvas de indiferencia son b_0 , b_1 y b_2) es menos adverso al riesgo que el individuo A.

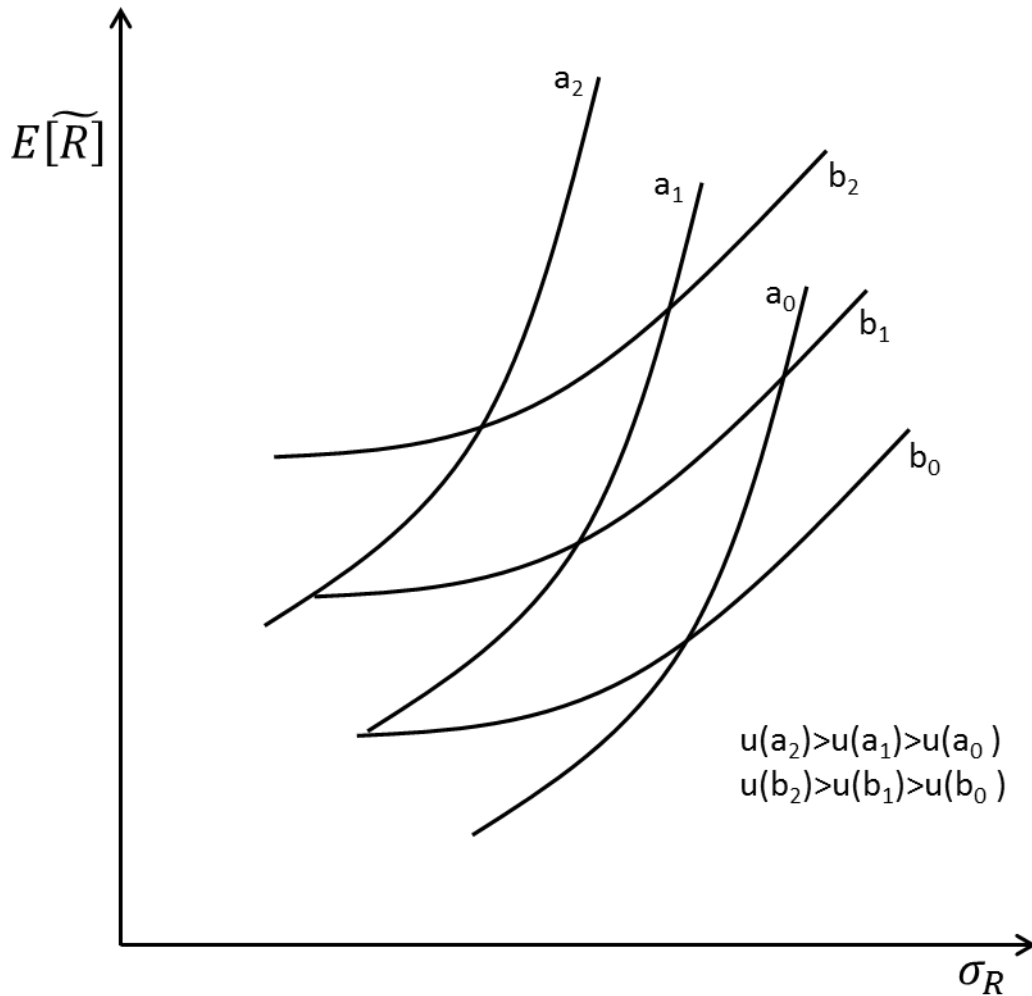
Al derivar una vez más, obtenemos:

$$\frac{d^2E[\widetilde{R}]}{d\sigma_R^2} = -\frac{U''(E[\widetilde{W}_1])}{U'(E[\widetilde{W}_1])} \cdot W_0 > 0 \quad (2.7)$$

Debido a que la segunda derivada es también positiva (por las mismas razones expuestas para el caso de la primera derivada), la pendiente de las curvas de indiferencia es positiva y creciente, por lo que su representación en el plano es la de una función convexa.

Gráfica 2.2

Curvas de indiferencia de agentes con distinto grado de aversión al riesgo



Como se aprecia en la gráfica, las curvas de indiferencia representan un nivel de utilidad mayor mientras se encuentren más arriba y a la izquierda en el plano. Los puntos que muestran esta tendencia representan combinaciones de altos rendimientos esperados con bajos riesgos. Esto es exactamente lo que el inversionista adverso al riesgo está buscando.

Como se ha reiterado en párrafos anteriores, la utilidad del inversionista aumenta con el rendimiento y disminuye con el riesgo, y por ello es claro que el objetivo de éste es encontrar un portafolio que para un alto nivel de rendimiento ofrezca un bajo riesgo, y/o

viceversa. Esto implica un problema de optimización que consiste en minimizar el riesgo para un grado de rendimiento determinado, o maximizar el rendimiento dado el nivel de riesgo. Este proceso conduce a la construcción de carteras eficientes.

2.1.2 La frontera eficiente

El caso de N activos riesgosos

Antes de explicar el desarrollo del modelo de selección de carteras eficientes, es preciso exponer la configuración que hace posible dicho procedimiento. Los supuestos de los que la teoría de carteras hace uso para establecer el marco propicio para el desarrollo teórico de los modelos que desembocan en la frontera eficiente, son:

1. Los inversionistas son adversos al riesgo
2. Existen únicamente 2 puntos en el tiempo: el principio y el final del periodo de la inversión
3. Los inversionistas consumen su riqueza al final del periodo.
4. Los inversores maximizan la utilidad esperada de su riqueza al final del periodo.
5. Los activos riesgosos siguen una distribución normal multivariada, de manera que los rendimientos esperados de un activo se encuentran totalmente descritos por su media y su desviación estándar.

Son estos supuestos los que permiten el desarrollo del modelo de media-varianza, desarrollado en primera instancia por Harry Markowitz en su seminal publicación de 1952. Cabe señalar que el hecho de que los agentes inviertan sus fondos durante un solo periodo, implica que las variables tomadas en cuenta para el problema de optimización al principio del periodo permanecerán constantes durante todo el periodo de inversión. Así, la matriz de varianzas y covarianzas introducida en el modelo no sufre cambios una vez que se elige el portafolio. Esta implicación, como se verá más adelante, es muy relevante para los objetivos de este trabajo.

En un universo de N activos, llamaremos a μ_i el rendimiento esperado del activo i , $i = 1, 2, \dots, N$; mientras que σ_{ij} será la covarianza entre los rendimientos de los activos i y j , $1 \leq i, j \leq N$. Asimismo, μ será el vector que incluya los rendimientos esperados de los N activos : $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)'$; y Σ representará la matriz de varianzas y covarianzas entre los

rendimientos de los N activos: $\Sigma = [\sigma_{ij}]$. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ ' será el vector que contenga los pesos $[\omega_i]$ de cada activo i dentro del portafolio. De esta forma, el rendimiento esperado y la varianza del portafolio son, respectivamente, $\mu_p = \omega' \mu$ y $\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$.

Adoptando el enfoque de eficiencia en la varianza, se dice que una cartera es eficiente cuando para un nivel dado de rendimiento μ_p , ningún otro portafolio posee una varianza σ_p^2 menor. Para encontrar este portafolio, el inversionista se enfrenta al siguiente problema:

$$\min_{\omega} \quad \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \quad (2.8)$$

$$s. a. \quad \omega' \mu = \mu_p; \quad \omega' l = 1 \quad (2.9)$$

La fracción en la función objetivo funciona como constante de escala. En la última restricción, $l = (1, 1, \dots, 1)$ ' es un vector con N unos, de manera que la suma de los pesos $[\omega_i]$, i.e. de la fracción de riqueza invertida en cada activo, sea igual a uno. Esta restricción es habitualmente denominada como *restricción presupuestal* y permite asegurar que toda la riqueza del inversionista sea incorporada en el portafolio. Evidentemente, el problema puede ser resuelto mediante el método de multiplicadores de Lagrange:

$$L(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega + \lambda_1 (\mu_p - \omega' \mu) + \lambda_2 (1 - \omega' l) \quad (2.10)$$

Donde L es la función lagrangiana, mientras que λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange.

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega}(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \Sigma \omega - \lambda_1 \mu - \lambda_2 l = \vec{0} & \Rightarrow \omega \\ & = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} l \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \mu_p - \omega' \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_p = \omega' \mu \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - \omega' l = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \omega' l \quad (2.13)$$

Cabe mencionar que en la derivada parcial de L con respecto a ω , el resultado es un vector: Σ es una matriz de $N \times N$, mientras que ω es un vector de $N \times 1$; la multiplicación de éstos da como resultado un vector de $N \times 1$; λ_1 y λ_2 son escalares que multiplican respectivamente a μ y a 1 (ambos vectores de $N \times 1$). Dicho esto, es claro que el cero del lado derecho de la condición de primer orden es en realidad un vector de N ceros, por lo que aparece coronado con una flecha. En las demás condiciones de primer orden, las operaciones son entre escalares, por lo que los ceros del lado derecho de las ecuaciones son también escalares (y no vectores como en el primer caso).

Antes de proceder, es necesario recalcar que tanto $\omega' \mu = \mu' \omega$ como $\omega' l = l' \omega$ se cumplen. Esto con el objetivo de evitar posibles confusiones en la exposición del procedimiento de resolución del problema al que se enfrenta el inversionista.

Sustituyendo (2.11) en (2.12) y (2.13) tenemos:

$$\mu_p = \mu' \omega = \lambda_1 \mu' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \mu' \Sigma^{-1} l \quad (2.14)$$

$$1 = l' \omega = \lambda_1 l' \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 l' \Sigma^{-1} l \quad (2.15)$$

(2.14) y (2.15) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos variables (λ_1 y λ_2) que a continuación se resolverá. Con el motivo de facilitar la exposición del procedimiento podemos, sin ocasionar distorsión alguna, utilizar las siguientes “abreviaciones”:

$$A = l' \Sigma^{-1} \mu = \mu' \Sigma^{-1} l \quad ; \quad B = \mu' \Sigma^{-1} \mu \quad ; \quad C = l' \Sigma^{-1} l$$

Nuestro sistema queda entonces planteado de la siguiente manera:

$$\mu_p = \lambda_1 B + \lambda_2 A$$

$$1 = \lambda_1 A + \lambda_2 C$$

Del cual es posible obtener los multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{C \mu_p - A}{BC - A^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - A\mu_p}{BC - A^2}$$

Al sustituir éstos en (2.11) obtenemos:

$$\omega = \frac{C\mu_p - A}{BC - A^2}\Sigma^{-1}\mu + \frac{B - A\mu_p}{BC - A^2}\Sigma^{-1}l$$

Y a partir de esta última expresión, factorizando y agrupando términos, se obtiene el vector de pesos que genera el portafolio de mínima varianza con rendimiento esperado μ_p :

$$\omega = \frac{B\Sigma^{-1}l - A\Sigma^{-1}\mu}{BC - A^2} + \frac{C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}l}{BC - A^2}\mu_p$$

En aras de lograr una exposición más sencilla, abreviaremos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\omega = g + h \cdot \mu_p \quad (2.16)$$

Donde

$$g = \frac{B\Sigma^{-1}l - A\Sigma^{-1}\mu}{BC - A^2}$$

$$h = \frac{C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}l}{BC - A^2}$$

Es pertinente aclarar que g y h son vectores de $N \times 1$, puesto que tanto $\frac{B}{BC-A^2}$ como $\frac{A}{BC-A^2}$ y $\frac{C}{BC-A^2}$ son escalares que multiplican a los vectores de $N \times 1$ $\Sigma^{-1}l$ y $\Sigma^{-1}\mu$ que resultan de la multiplicación de una matriz de $N \times N$ (Σ^{-1}) y dos vectores de $N \times 1$ (l y μ).

La expresión (2.16) representa el portafolio óptimo, i.e. con la mínima varianza, para cada nivel de rendimiento esperado. Todos los portafolios representados por (2.16) se encuentran en –y de hecho constituyen– la frontera eficiente, que es el lugar geométrico de los portafolios de mínima varianza en el plano riesgo-rendimiento (σ_p, μ_p) . (Markowitz, 1952)

(Brun & Moreno, 2008) Para obtener la ecuación de la frontera eficiente, es preciso calcular la varianza del portafolio expresado en (2.16). Dado que $\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$, y $\omega = g + h \cdot \mu_p$,

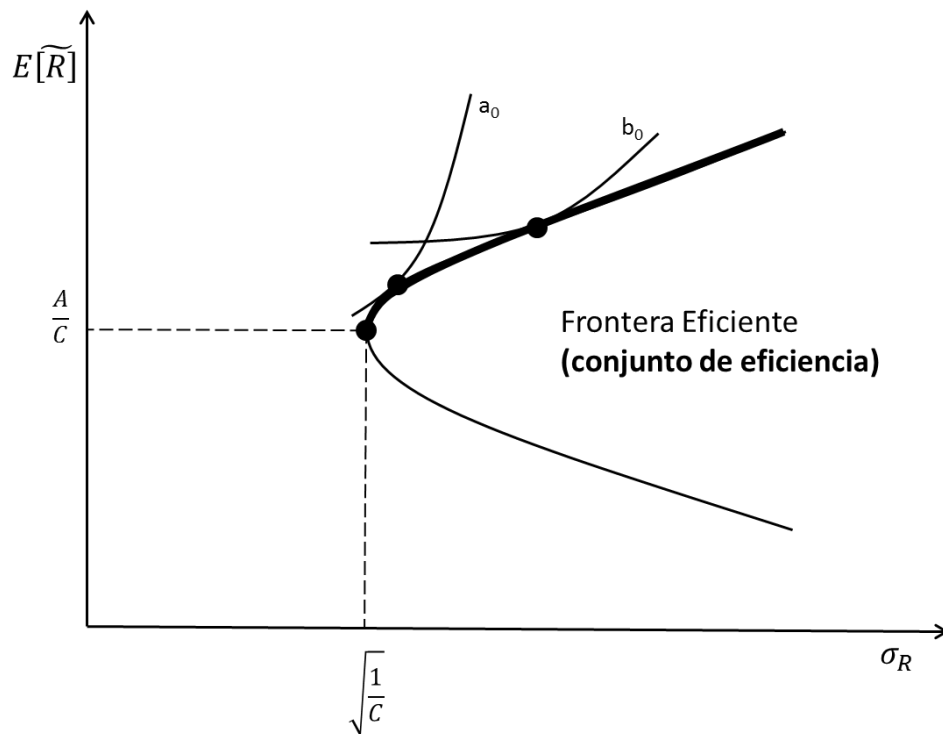
$$\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega = (g + h \cdot \mu_p)' \Sigma (g + h \cdot \mu_p)$$

de donde obtenemos que

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{BC - A^2} \left(\mu_p - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C} \quad (2.17)$$

En la expresión anterior observamos que la regla de correspondencia entre σ_p^2 y μ_p es una parábola. Sin embargo, como se ha dicho antes, la frontera eficiente generalmente se traza en el plano riesgo-rendimiento, en el que el riesgo se representa con la desviación estándar (σ_p) en vez de la varianza (σ_p^2). Esto tiene como consecuencia que la representación más usual de la frontera eficiente sea una hipérbola en el plano media-desviación estándar (σ_p, μ_p). (Best, 2010, pág. 28)

Gráfica 2.3
Frontera eficiente



El portafolio que cada inversionista seleccionará será aquél ubicado en el punto en que la frontera eficiente es tangente a la curva de indiferencia del inversionista, i.e. aquél en que la tasa marginal de sustitución (pendiente de la función de isoutilidad) es igual a la relación marginal de transformación (*tradeoff* entre riesgo y rendimiento expresado en la pendiente de la frontera eficiente). Nótese que las opciones de portafolios óptimos quedan limitadas a la parte superior de la frontera eficiente. La explicación yace en el hecho de que, aun cuando los puntos en la frontera eficiente por debajo del portafolio de mínima varianza - determinado por el punto $\left(\sqrt{\frac{1}{C}}, \frac{A}{C}\right)$ - resultan óptimos en el sentido de que minimizan la varianza para un nivel dado de rendimiento, ningún inversionista los elegiría, puesto que es posible obtener, exponiéndose al mismo riesgo, un rendimiento más alto al invertir en la parte superior de la frontera. Esta sección de la hipérbola (su parte superior) es llamada *conjunto de eficiencia* (Weston & Copeland, 1992, pág. 426)

2.1.3 La línea del mercado de capitales (CML)

El modelo del que surge la línea del mercado de capitales (CML por sus siglas en inglés: Capital Market Line) es de hecho una variación de aquél que concluye en la frontera eficiente. La modificación consiste en añadir al problema una nueva clase de activo, que se distingue de todos los demás por la cualidad de poseer varianza nula, i.e. de no implicar riesgo alguno. A continuación se expone la optimización que lleva a cabo el inversionista cuando se agrega al universo de oportunidades de inversión un activo libre de riesgo.

El problema queda entonces planteado de la siguiente manera:

$$\min_{\omega} \quad \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \quad (2.18)$$

$$s. a. \quad \omega' \mu + (1 - \omega' l) R_f = \mu_p \quad (2.19)$$

Donde $\omega' l$ es la parte de la riqueza total del agente que es invertida en los activos riesgosos, $1 - \omega' l$ es la fracción de la riqueza utilizada para la adquisición del activo libre de riesgo, y R_f es el rendimiento esperado de este activo. Evidentemente, la varianza inherente a este nuevo tipo de activo es $\sigma_p^2 = 0$. Es de notar que en este caso no es necesario incluir la restricción presupuestal, puesto que ésta queda implícita en (2.18): $\omega' l + 1 - \omega' l = 1$.

Nuevamente, el problema es resoluble fácilmente mediante el método de multiplicadores de Lagrange. La función lagrangiana a optimizar es entonces:

$$L(\omega, \lambda) = \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega + \lambda (\mu_p - \omega' \mu - (1 - \omega' l) R_f) \quad (2.20)$$

y sus condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial \omega}(\omega, \lambda) = \Sigma \omega - \lambda(\mu - l R_f) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \omega = \lambda \Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\omega, \lambda) = \mu_p - \omega' \mu - (1 - \omega' l) R_f = 0 & \quad \Rightarrow \quad \mu_p - R_f \\ & = \omega'(\mu - l R_f) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para obtener el multiplicador lagrangiano λ , sustituimos (2.21) en (2.22):

$$\mu_p - R_f = \lambda \left(\Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \right)' (\mu - l R_f) = \lambda (\mu - l R_f)' \Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \quad (2.23)$$

En esta última ecuación, $(\mu - l R_f)' \Sigma^{-1}(\mu - l R_f)$ es un escalar que resulta de la multiplicación de un vector transpuesto de $N \times 1$ $(\mu - l R_f)'$ por una matriz de $N \times N$, y posteriormente por el mismo vector de $N \times 1$ (esta vez sin transponer). Para facilitar la exposición, de ahora en adelante esta expresión será denominada θ .

Incorporando la abreviación anterior, y resolviendo para λ , la expresión adopta la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{\mu_p - R_f}{\theta} \quad (2.24)$$

Para obtener el portafolio de mínima varianza – y resolver el problema de optimización –, es necesario sustituir el valor de λ en (2.21):

$$\omega = \Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \frac{\mu_p - R_f}{\theta} \quad (2.25)$$

Lo que da como resultado un vector de Nx1, dado que $\frac{\mu_p - R_f}{\theta}$ es un escalar que multiplica al producto de una matriz de NxN por un vector de Nx1.

Para obtener la varianza del portafolio óptimo para un nivel dado de rendimiento esperado, sustituimos ω en $\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega &= \left(\frac{\mu_p - R_f}{\theta} \Sigma^{-1}(\mu - l R_f)' \right) \Sigma \left(\frac{\mu_p - R_f}{\theta} \Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \right) \\ \sigma_p^2 &= \frac{(\mu_p - R_f)^2}{\theta^2} (\mu - l R_f)' \Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Puede apreciarse en la última expresión, que de nuevo aparece $(\mu - l R_f)' \Sigma^{-1}(\mu - l R_f)$, que una vez más abreviaremos como θ , de tal manera que la varianza del portafolio óptimo quede expresada como sigue:

$$\sigma_p^2 = \frac{(\mu_p - R_f)^2}{\theta} \quad (2.27)$$

Este resultado nos permite obtener la regla de correspondencia entre riesgo y rendimiento en el plano media - desviación estándar (σ_p, μ_p) :

$$\sigma_p = \begin{cases} \frac{\mu_p - R_f}{\sqrt{\theta}} & \forall \mu_p \geq R_f \\ -\frac{\mu_p - R_f}{\sqrt{\theta}} & \forall \mu_p < R_f \end{cases}$$

Lo que expresado en términos de μ_p se convierte en:

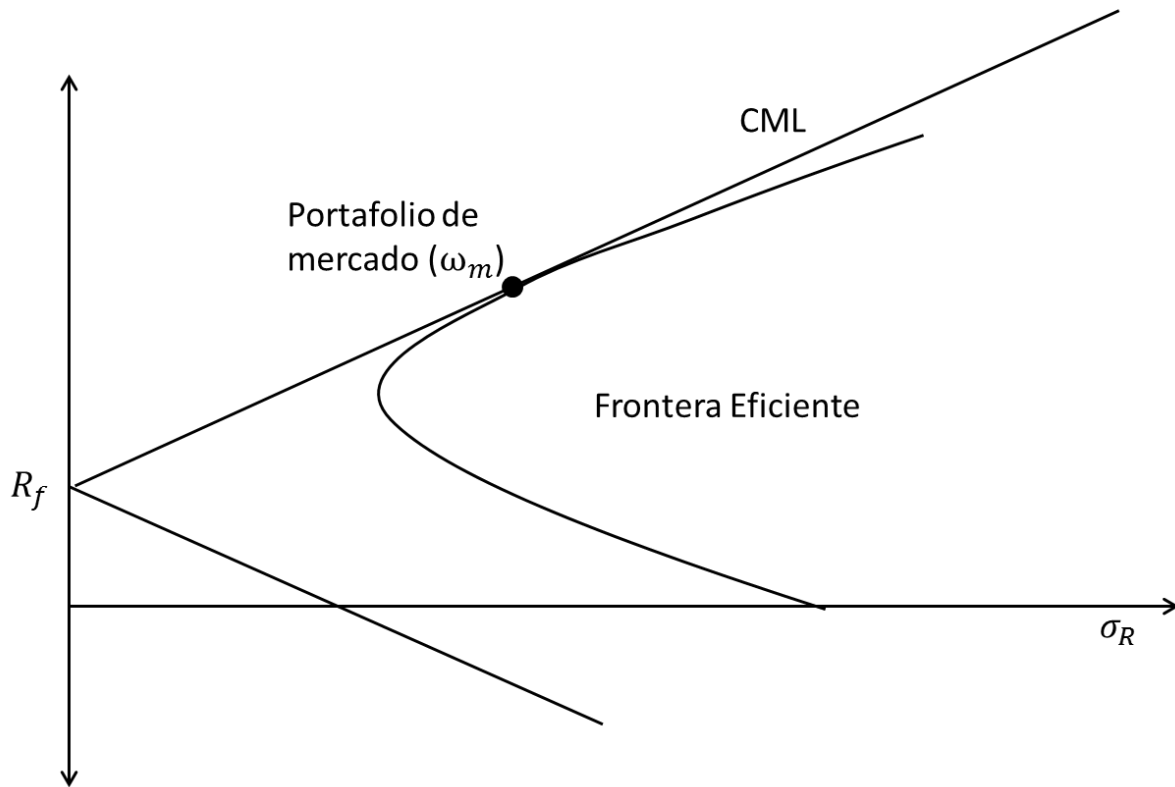
$$\mu_p = \begin{cases} R_f + \sigma_p \sqrt{\theta} & \forall \mu_p \geq R_f \\ R_f - \sigma_p \sqrt{\theta} & \forall \mu_p < R_f \end{cases}$$

Lo anterior representa el lugar geométrico de los portafolios de mínima varianza en el plano media - desviación estándar, i.e. la frontera eficiente, cuando se incluye un activo libre de

riesgo. La relación consta de dos segmentos de recta con el rendimiento del activo libre de riesgo (R_f) como ordenada al origen, y con pendientes de $\pm\sqrt{\theta}$.

Gráfica 2.4

Línea del mercado de capitales y frontera eficiente



A partir de la gráfica, es posible extraer algunas observaciones. En primer lugar, es pertinente notar que la frontera eficiente cuando se ha incluido un activo libre de riesgo ofrece mejores oportunidades de inversión, i.e. proporciona un mayor rendimiento esperado o una menor desviación estándar, que en el caso en que existen únicamente activos riesgosos.

Como segunda observación, el segmento con ordenada al origen en R_f y pendiente $-\sqrt{\theta}$ es ineficiente, puesto que la parte superior de la frontera incluye, para cada valor de σ_p , portafolios con un rendimiento esperado mayor. De modo que el conjunto de eficiencia, en el caso de N activos riesgosos y uno libre de riesgo, está determinado por el segmento $R_f + \sigma_p\sqrt{\theta}$. Otra manera de llegar a esta conclusión es considerando que ningún

inversionista racional invertiría sus fondos en un portafolio en que se cumpliera que $\mu_p < R_f$, simplemente porque preferiría invertir la totalidad de su riqueza en R_f , puesto que esta opción ofrece un rendimiento esperado mayor con la mínima varianza, que para este caso es 0. Entonces ningún inversionista se situará en la recta $R_f - \sigma_p\sqrt{\theta}$.

En tercera instancia, existen dos puntos sobre la frontera eficiente cuyo ahondamiento ofrecerá una percepción más ilustrativa de las diferencias entre los dos casos (con y sin activo libre de riesgo). El primero de éstos es el punto $(0, R_f)$. Nótese que este punto se encuentra sobre la frontera y, por lo tanto, es una opción de inversión eficiente. Además, en este punto se obtiene un rendimiento de R_f al asumir un riesgo de 0, convirtiéndose éste en el portafolio de mínima varianza. Los inversionistas situados en este punto son aquéllos que han invertido la totalidad de sus fondos en el activo libre de riesgo, i.e. su portafolio está integrado en su totalidad por el risk-free asset.

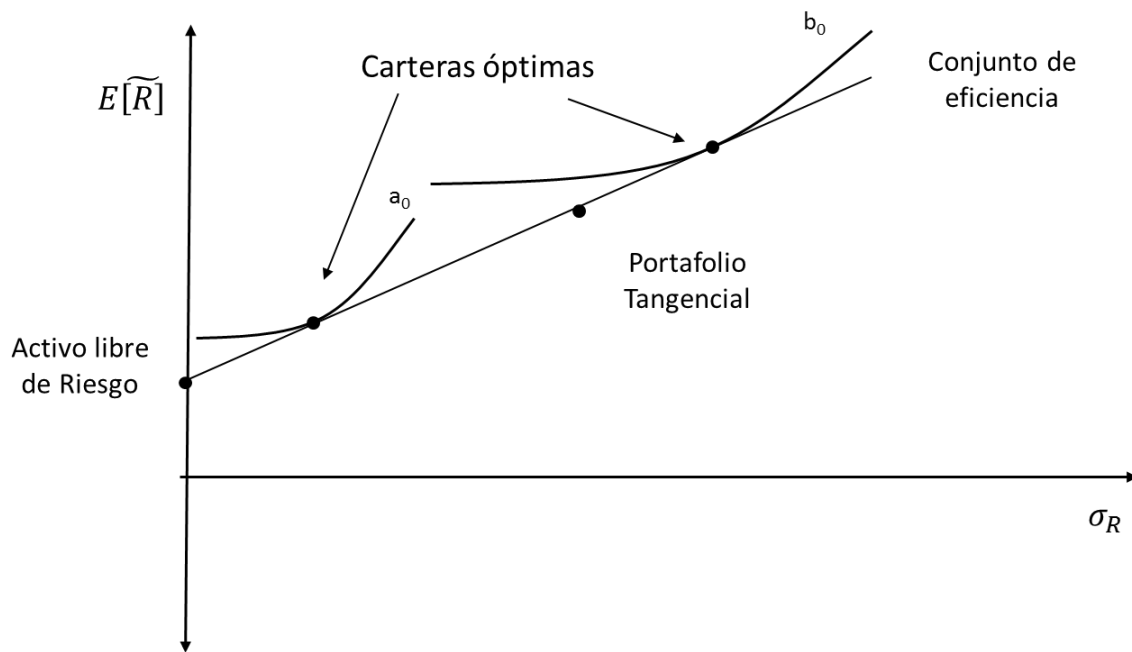
El otro punto relevante para el análisis es aquél en que la frontera eficiente con un activo libre de riesgo es tangente a la hipérbola resultante del caso de N activos riesgosos. Este punto es, de hecho, el único que es eficiente tanto en el caso de N activos riesgosos como en el de N activos riesgosos más uno libre de riesgo. Debido a que forma parte de la frontera eficiente para el caso en que no se incluye un activo libre de riesgo, puede inferirse que el portafolio representado por este punto está constituido en su totalidad por activos riesgosos. Existe entonces un punto sobre la frontera eficiente en el caso presente (N activos riesgosos y uno libre de riesgo) que representa la situación en que el inversionista emplea todos sus fondos en la adquisición de activos riesgosos. Este portafolio tangencial, en una situación de equilibrio, i.e. cuando la oferta iguala a la demanda y el mercado se vacía, incluye todos los activos riesgosos disponibles en el mercado, y es denominado, por ello, *portafolio de mercado*.

Dicho lo anterior, es evidente que los puntos ubicados sobre la frontera eficiente que se encuentran entre R_f y el portafolio de mercado (en adelante ω_m) son carteras integradas por combinaciones de los portafolios R_f y ω_m . La proporción de fondos invertidos en cada una de estas dos alternativas dependerá de la aversión al riesgo del inversionista (representada en la forma de sus curvas de isoutilidad). Aquéllos inversionistas cuyo nivel

de aversión al riesgo los coloque en posición de buscar un rendimiento esperado mayor al que ofrece el portafolio de mercado, tendrán una posición negativa en R_f , lo que se logra al pedir prestado a la tasa libre de riesgo e invertir los fondos obtenidos mediante el crédito en ω_m , i.e. efectuando una venta en corto de R_f (Best, 2010, pág. 47)

Gráfica 2.5

CML y portafolios óptimos



Habiendo definido el concepto de portafolio de mercado, es posible representar la frontera eficiente de un modo que facilita la comprensión teórica y un mejor entendimiento de los desarrollos ulteriores en este mismo capítulo.

Volviendo a la condición de primer orden (2.21), a saber $\omega = \lambda \Sigma^{-1}(\mu - l R_f)$, al obtener el producto escalar de ambos lados por $(\mu - l R_f)$, resulta:

$$(\mu - l R_f)' \omega = \lambda (\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f) \quad (2.28)$$

Si en el portafolio de mercado no hay inversión en el activo libre de riesgo, i.e. $1 - \omega' l = 0$, entonces:

$$\omega_m' l = 1 = l' \omega_m ; \quad \omega_m' \mu = \mu_m = \mu' \omega_m$$

Al sustituir en (2.28), se obtiene:

$$\mu' \omega_m - R_f l' \omega_m = \lambda (\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f)$$

$$\mu_m - R_f = \lambda (\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f)$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{1}{\lambda}$:

$$\frac{\mu_m - R_f}{\lambda} = (\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f)$$

Y elevando toda la ecuación a la $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{\frac{\mu_m - R_f}{\lambda}} = \sqrt{(\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f)} = \frac{\sqrt{\mu_m - R_f}}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.29)$$

Regresando a (2.28), obtenemos ahora el producto escalar de ambos lados por $\Sigma \omega_m$:

$$\omega_m' \Sigma \omega_m = \lambda \Sigma^{-1} \Sigma \omega_m (\mu - l R_f) = \lambda \omega_m' (\mu - l R_f) = \lambda (\omega_m' \mu - \omega_m' l R_f)$$

$$\sigma_m^2 = \lambda (\mu_m - R_f)$$

Al obtener la raíz cuadrada en ambos lados de la expresión obtenemos

$$\sqrt{\sigma_m^2} = \sqrt{\lambda (\mu_m - R_f)} = \sigma_m = \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\mu_m - R_f}$$

Y resolviendo para $\sqrt{\lambda}$:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\mu_m - R_f}} \quad (2.30)$$

Al sustituir (2.30) en (2.29) se obtiene

$$\frac{\sqrt{\mu_m - R_f} \sqrt{\mu_m - R_f}}{\sigma_m} = \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m} = \sqrt{(\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f)}$$

Dado que $(\mu - l R_f)' \Sigma^{-1} (\mu - l R_f) = \theta$,

$$\frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m} = \sqrt{\theta}$$

De modo que, sustituyendo, podemos expresar la frontera eficiente de la siguiente manera:

$$\mu_p = R_f + \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m} \sigma_p \quad (2.31)$$

Esta última es la expresión más habitual de la llamada *Línea del Mercado de Capitales*, mejor conocida por sus siglas en inglés CML (Capital Market Line), que no es otra cosa que el lugar geométrico de los portafolios eficientes cuando existen en el mercado N activos riesgosos y un activo libre de riesgo.

2.2 El Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM)

El CAPM constituye, de hecho, la parte central de este trabajo. Incluso podría decirse que el desarrollo del mismo por William Sharpe, John Lintner y Jack Treynor en la década de 1960, constituye el pináculo de la teoría financiera, dada la influencia que este modelo ha tenido tanto en académicos como en profesionales de las finanzas. Este modelo se ha convertido en el modelo de valuación de activos por antonomasia –al menos en la enseñanza de la teoría de los mercados de capitales-. Como mencionan (Fama & French, *The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence*, 2004), el CAPM suele ser el único modelo de valuación de activos comprendido en un programa MBA de inversiones. Esto no quiere decir, sin embargo, que el CAPM sea la verdad absoluta sobre el precio de los activos. De hecho, como concluyen algunas pruebas empíricas, podría estar muy lejos de

serlo.² Incluso el presente trabajo arrojará algunos indicadores sobre la pertinencia de la utilización de este modelo para explicar el mercado financiero.

La simplicidad del modelo constituye, quizás, su mayor atractivo –y posiblemente la razón por la cual su relevancia persiste a pesar de numerosos estudios que rechazan su validez-. Por otra parte, podría concluirse que ésta misma es la fuente, además, de su debilidad. El CAPM pretende explicar el rendimiento de un activo (o en su defecto, un conjunto de activos), con base en su Beta (β), que está definida como:

$$\beta_i = \frac{cov(\mu_i, \mu_m)}{var(\mu_m)} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \quad (2.32)$$

Donde:

β_i = Beta del activo i

σ_{im} = Covarianza de los rendimientos esperados del activo i y el portafolio de mercado,

σ_m^2 = Varianza del rendimiento esperado del portafolio de mercado.

De tal manera, β “mide la sensibilidad o la variación de la rentabilidad de un activo con respecto a la variación de la rentabilidad del portafolio de mercado” (Brun & Moreno, 2008, pág. 66) Es entonces evidente que el portafolio de mercado tiene una β con valor de 1. Las β de los demás activos (y/o portafolios) asumirán valores absolutos cercanos a 0 si su comportamiento no está gravemente influido por el portafolio de mercado; cercanos a 1 si los rendimientos de los activos observan una fuerte correlación con la cartera del mercado; y mayores a 1 si el activo en cuestión tiende a “exagerar” el comportamiento del mercado, es decir, replica (total o parcialmente) el comportamiento de la cartera de mercado multiplicado por algún factor, e.g. si el mercado sube 1%, el activo cuya beta sea 2 se elevará en 2%. El signo de la beta indica si el rendimiento del activo en cuestión se correlaciona directa o inversamente con el portafolio de mercado.

² Al respecto, (Fama & French, The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, 2004) ofrecen un extenso recuento de pruebas empíricas realizadas al CAPM desde finales de la década de 1960, y algunas consideraciones pertinentes sobre la posibilidad (o imposibilidad) de realizar pruebas al CAPM. (Weston & Copeland, 1992, pág. 472) ofrecen una síntesis de los puntos en que coinciden varios estudios empíricos sobre el modelo.

2.2.1 Supuestos del CAPM

Como todo modelo, el CAPM asume como dadas ciertas condiciones sobre los mercados y los inversionistas -algunas de ellas meramente hipotéticas- que permiten crear el marco propicio para el desarrollo del modelo.

De acuerdo con (Weston & Copeland, 1992), el CAPM parte de los siguientes supuestos:

1. Los inversionistas son individuos que tienen aversión al riesgo y maximizan la utilidad esperada de su riqueza al final de periodo.
2. Los inversionistas son tomadores de precios y tiene expectativas homogéneas acerca de los rendimientos de activos, mismos que tienen una distribución normal multivariada.
3. Existe un activo libre de riesgo tal que los inversionistas pueden pedir prestados o prestar montos ilimitados a la tasa libre de riesgo.
4. Las cantidades de todos los activos riesgosos son fijas. Todos los activos son transables y perfectamente divisibles.
5. Los mercados de activos están libres de fricciones. No existen costos ni asimetrías de información.
6. No existen imperfecciones de mercado como impuestos, leyes o restricciones sobre las ventas en corto.

(Brun & Moreno, 2008) anexan, además, algunos supuestos referentes a los inversionistas, que son propios de la teoría de carteras ya estudiada en este capítulo:

7. Los inversionistas invierten toda su riqueza en los activos del mercado. (Lo que es equivalente a la restricción presupuestaria en el problema de optimización en las secciones anteriores de este capítulo).
8. Las preferencias de los inversores son de tipo media-varianza, lo que significa que maximizan su utilidad esperada con base en las variables riesgo y rendimiento. (Esto tiene su base en el modelo de selección de carteras de (Markowitz, 1952).
9. El objetivo de los inversionistas es elegir las carteras que maximicen la utilidad esperada de su riqueza final.

De estos supuestos se puede inferir que los inversionistas utilizarán sus fondos para la adquisición de portafolios que sean eficientes en el sentido media-varianza, y que la diferencia entre el portafolio que elija uno u otro agente será determinada no por sus expectativas (pues éstas son homogéneas) sino por su nivel individual de aversión al riesgo.

Si bien considerar al Modelo de Valuación de Activos de Capital como una representación realista de los mercados de capitales puede resultar un tanto ingenuo, sería imprudente negar su importancia como punto de partida para el estudio de éstos. Es la labor del investigador ver cuáles supuestos difieren mayormente de la realidad, para posteriormente relajar gradualmente éstos y llegar a escenarios modelísticos que arrojen resultados más acordes con lo observado.

2.2.2 Desarrollo del CAPM

A continuación se expone el procedimiento mediante el cual, a partir del problema de optimización propio de la teoría de carteras, -particularmente para el caso de N activos riesgosos y uno libre riesgo- se obtiene la ecuación del Modelo de Valuación de Activos de Capital.

Se parte, una vez más, de (2.21), la condición de primer orden para el problema de optimización del inversionista en el caso de N activos riesgosos y uno libre de riesgo:

$$\omega = \lambda \Sigma^{-1}(\mu - l R_f) \quad (2.33)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por Σ , y teniendo en cuenta que, al estar tratando con el portafolio de mercado, $\omega = \omega_m$, obtenemos

$$\Sigma \omega_m = \lambda (\mu - l R_f)$$

O lo que es lo mismo

$$\lambda \mu = \Sigma \omega_m + \lambda l R_f$$

Al multiplicar ambos lados de la expresión por $\frac{1}{\lambda}$:

$$\mu = lR_f + \frac{1}{\lambda} \Sigma \omega_m \quad (2.34)$$

Calculando el producto escalar de ambos lados por ω_m ,

$$\mu' \omega_m = l' \omega_m R_f + \frac{1}{\lambda} \omega_m' \Sigma \omega_m$$

Dado que $\mu' \omega_m = \mu_m$, $l' \omega_m = 1$, y $\omega_m' \Sigma \omega_m = \sigma_m^2$, la expresión anterior se convierte en

$$\mu_m = R_f + \frac{\sigma_m^2}{\lambda} \quad \therefore \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m^2}$$

Y al substituir en (2.34), se obtiene

$$\mu = lR_f + \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m^2} \Sigma \omega_m \quad (2.35)$$

Sea \tilde{R}_i la variable aleatoria cuyo valor es el rendimiento del activo i , y $E[\tilde{R}_i] = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, el componente i -ésimo de (2.35) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mu_i = R_f + \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m^2} (\sigma_{i1} \omega_{m1} + \sigma_{i2} \omega_{m2} + \dots + \sigma_{in} \omega_{mn}) \quad (2.36)$$

Expresemos ahora el rendimiento del portafolio de mercado como $\tilde{R}_m = \omega_{m1} \tilde{R}_1 + \omega_{m2} \tilde{R}_2 + \dots + \omega_{mn} \tilde{R}_n$. Teniendo en cuenta esto último, y analizando la ecuación (2.35), y particularmente la expresión $(\sigma_{i1} \omega_{m1} + \sigma_{i2} \omega_{m2} + \dots + \sigma_{in} \omega_{mn})$, se observa que el término en cuestión no es otra cosa que la covarianza de \tilde{R}_i con el rendimiento del portafolio de mercado ($cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) = \sigma_{im}$), puesto que éste consiste en la multiplicación de cada término de la fila i de Σ , i.e. la covarianza del activo i con cada uno de los demás activos, por el peso respectivo de cada activo en el portafolio de mercado.

Dicho lo anterior, la ecuación (2.36) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\mu_i = R_f + \frac{\mu_m - R_f}{\sigma_m^2} \sigma_{im} \quad (2.37)$$

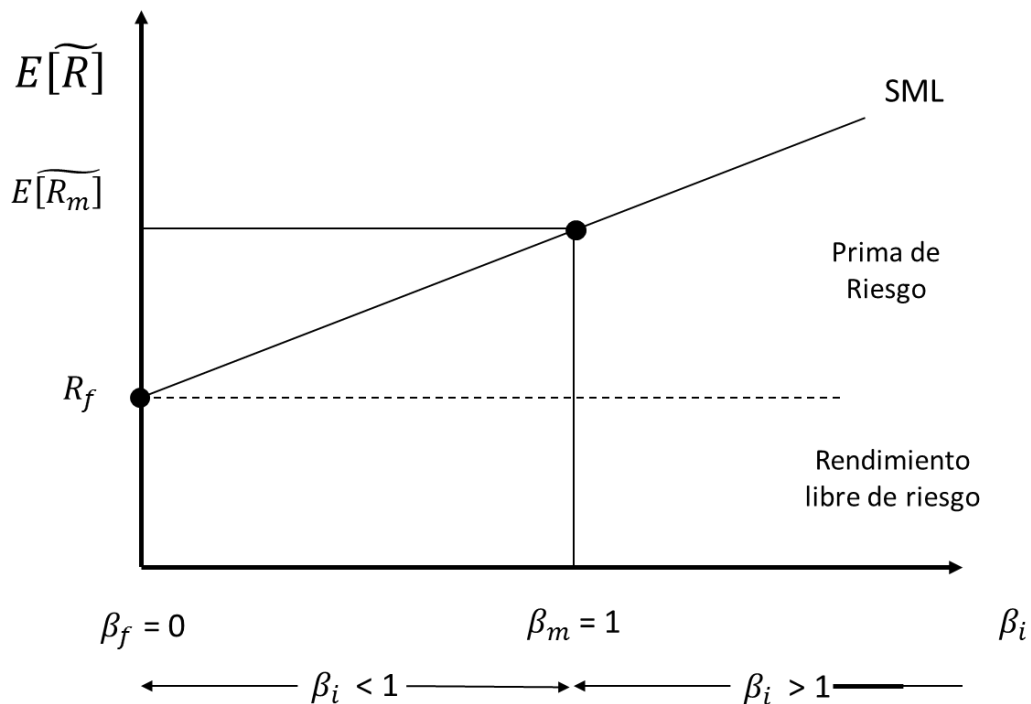
Al retomar la definición de beta mencionada al principio de esta sección, a saber $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, (2.37) puede ser reescrita como

$$\mu_i = R_f + (\mu_m - R_f)\beta_i \quad (2.38)$$

La anterior es la ecuación del Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM). De acuerdo con este modelo, el rendimiento esperado del activo i (μ_i), es igual a la tasa libre de riesgo más la prima de riesgo del mercado (la diferencia entre el rendimiento del portafolio de mercado y la tasa libre de riesgo: $\mu_m - R_f$) multiplicada por el valor de β del activo. Como se aprecia, la ecuación (2.38) es una recta en el espacio (β_i, μ_i) con pendiente $(\mu_m - R_f)$ y ordenada al origen R_f . Esta recta es denominada *Línea del Mercado de Valores*, y es generalmente referida utilizando sus siglas en inglés: SML (Security Market Line). La siguiente figura es la representación gráfica del Modelo de Valuación de Activos de Capital o CAPM.

Gráfica 2.6

Línea del mercado de valores



La SML es el lugar geométrico de los portafolios eficientes en el plano (β_i, μ_i) . Como en el caso de la línea del mercado de capitales, estos portafolios están constituidos por diferentes combinaciones del activo libre de riesgo y la cartera de mercado. El grado de aversión del inversionista, i.e. la forma de sus curvas de indiferencia, determinará el punto sobre la línea del mercado de valores en que este se ubicará, o lo que es lo mismo, el valor de β que su portafolio de inversión asumirá.

3. Metodología Econométrica para el Estudio de los Mercados Financieros

Una vez que los elementos necesarios para la comprensión de la teoría de carteras han quedado esbozados en el capítulo anterior, es preciso ofrecer una descripción concisa de los fundamentos del análisis empírico a llevarse a cabo en este trabajo. El presente capítulo servirá al lector para obtener nociones técnicas indispensables para un correcto entendimiento de ciertos análisis de series de tiempo financieras, como el que ocupa a esta tesis.

Desde la perspectiva del Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM), los activos financieros están descritos por dos elementos: el rendimiento y el riesgo. Esto puede apreciarse claramente en el desarrollo de dicho modelo que se hace al final del capítulo anterior. Recordando la ecuación (2.38), tenemos que

$$\mu_i = R_f + (\mu_m - R_f)\beta_i$$

En donde están presentes los rendimientos esperados (tanto del activo i , como variable dependiente) como del portafolio de mercado. El rendimiento del activo libre de riesgo está dado. El hecho de que los rendimientos del activo i y del portafolio de mercado sean esperados, implica que es posible que su valor realizado (aquel que efectivamente poseen, y que solo es observable *ex post*), difiera de aquél considerado para estimar el modelo. Es por ello que otro elemento importante dentro de la ecuación es el riesgo o volatilidad, denotado por la Beta del activo i , que en realidad es una medida del riesgo relativo del activo i con respecto al riesgo del portafolio de mercado.

Es esta volatilidad (o riesgo) lo que ocupa principalmente a este trabajo, que de hecho se propone el cálculo de las betas, con el objetivo de demostrar que las correlaciones y varianzas no son constantes en el tiempo, sino que varían condicionalmente. Si las correlaciones varían en cada punto del tiempo, también lo harán las covarianzas, que constituyen el numerador de las Betas. Si el riesgo varía, entonces, de acuerdo con el CAPM, también lo hará el rendimiento esperado.

Estos dos elementos son indispensables para el estudio de los mercados financieros, y para una correcta comprensión del uno, es imperativo contar al menos con nociones del comportamiento del otro. Naturalmente, lo que interesa al inversionista es el rendimiento, y es por ello que he optado por incluir un breve bosquejo de los intentos que desde la ciencia económica se han hecho para describirlo estadísticamente. Por otro lado, la historia ha dejado claro que menospreciar la importancia del riesgo en la conformación de portafolios de inversión puede traer consecuencias funestas. Debido a ello, los economistas, de la mano con científicos de muchas otras disciplinas, han demostrado un creciente interés en el estudio de la volatilidad, como demuestra la mera existencia de este trabajo.

En la primera parte del capítulo se presenta una revisión de distintos modelos empleados para describir el comportamiento de los rendimientos de los activos, además de la pertinencia de cada uno de ellos dentro de la ciencia financiera. Posteriormente, se abordan algunos métodos que han sido propuestos para el modelaje de la volatilidad, en particular aquéllos que pertenecen a la familia de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH), comenzando por procesos univariados, y finalizando en modelo GARCH multivariado con correlaciones condicionales variables de (Tse & Tsui, 2002) que es el utilizado en este trabajo para el cálculo de las Betas condicionales de los activos estudiados. Los datos utilizados y los resultados de la estimación serán discutidos en el capítulo siguiente.

3.1 Modelaje del Rendimiento de los Activos Financieros

La incesante curiosidad del hombre por conocer las leyes subyacentes que gobiernan los fenómenos que acontecen en el medio natural y social se encuentra en el origen de toda ciencia y arte. Es esta misma curiosidad la que nos llevó, como especie, a preguntarnos cómo podríamos enfrentar situaciones de cuyos resultados no estamos seguros. ¿Cómo actuar ante la incertidumbre? Uno de los primeros en ofrecer (o al menos intentar ofrecer) una respuesta formal a esta pregunta, fue un médico italiano de nombre Gerolamo Cardano, quien en 1526, motivado por su afición a las apuestas, escribió, para sí, un libro que fundaría una larga tradición de estudios probabilísticos.³ En general, el juego y el dinero siguieron alimentando a la teoría de la probabilidad, puesto que los juegos de azar

³ Para una descripción un tanto anecdótica de los orígenes de la teoría de la probabilidad, véase **Invalid source specified.**

generalmente tienen un número fijo de posibles resultados. Sin embargo, fue hasta finales del siglo XIX, cuando esta incipiente disciplina se aplicó al estudio de los mercados financieros. El pionero fue Louis Bachelier, un matemático francés que tituló a su tesis doctoral *The Theory of Speculation*.⁴ Bachelier propuso que la teoría probabilística puede usarse para explicar el vaivén de los precios de activos en el mercado de valores, una idea que sigue vigente hasta nuestros días.

A continuación, se describen algunas de las explicaciones que se han dado acerca del comportamiento de los mercados financieros. En realidad, estas explicaciones no son otra cosa que hipótesis sobre la distribución de probabilidad que siguen los rendimientos de los activos.

3.1.1 La distribución normal

Aunque la *Teoría de la Especulación* (Bachelier, 1900) abordaba operaciones financieras bastante complejas (lo que hoy denominaríamos operaciones con productos derivados), la idea básica detrás de todas las formulaciones que aparecen en esta seminal obra, es que los precios de los activos financieros siguen lo que él llama la “Ley de Gauss”⁵, que no es otra cosa que la distribución normal o gaussiana.

No obstante, las ideas de Bachelier persisten no por su veracidad, sino por su carácter de pioneras. Proponer que los precios de los activos siguen una distribución normal, equivale a decir que éstos pueden asumir el valor de cualquier número real, independientemente de qué tan probable sea la ocurrencia de determinado evento. Dado que el precio nominal de un bien, o en este caso un activo, no puede ser menor a cero, es un hecho que los precios de los activos no siguen una distribución normal. Maury Osborne llegó a esta conclusión, y en un relevante artículo⁶ propone que no son los precios, sino los rendimientos de los activos los que siguen una distribución normal. Las ideas de Osborne son aparentemente más plausibles, puesto que si los rendimientos (que son la diferencia de los logaritmos de los precios) siguen una distribución normal, los precios se distribuyen log-normalmente, lo que implica que no pueden tomar valores negativos.

⁴ Véase (Bachelier, 1900)

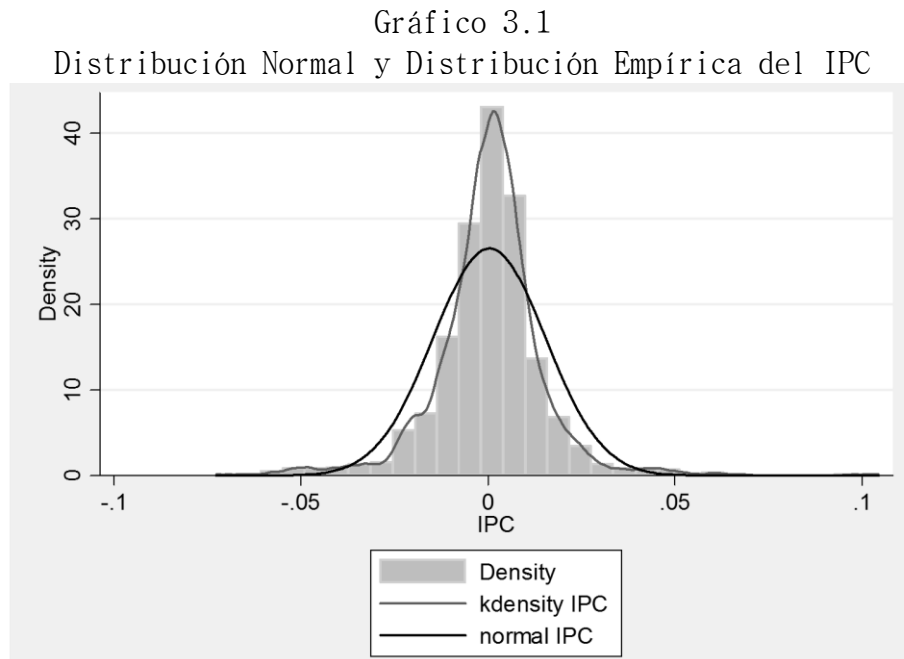
⁵ (Bachelier, 1900, pág. 13)

⁶ **Invalid source specified.**

Para evaluar la pertinencia de la aplicación de esta distribución al estudio de los mercados financieros, se expondrán primero sus características. La función de densidad de probabilidad de la distribución normal o gaussiana se expresa de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

donde μ es la media y σ la desviación estándar de la variable aleatoria x . El coeficiente de asimetría de una variable que sigue esta distribución es 0, mientras que el de curtosis tiene un valor de 3. La siguiente gráfica contrasta la distribución normal teórica con la distribución observada de los rendimientos del IPC entre 2008 y 2012.



Como puede apreciarse, la curva de probabilidad estimada con los datos del Índice de Precios y Cotizaciones es leptocúrtica, lo que queda demostrado con su coeficiente de curtosis, que es mayor a 9. Otra característica apreciable es que las colas de la distribución son más grandes, i.e. los valores extremos tienen una ocurrencia más frecuente que lo que la distribución normal supone. Por otro lado, el coeficiente de asimetría del IPC es de .2028, lo que demuestra la existencia de una ligera asimetría a la derecha.

Es evidente que la distribución normal, si bien en su momento ofrecía una explicación teórica plausible para el comportamiento de los rendimientos financieros, resulta

insuficiente para capturar el comportamiento real de esta variable. Esta contrastación es relevante para el presente trabajo, pues el CAPM, siguiendo los supuestos clásicos de la teoría de carteras, supone que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal. Sin embargo, estas características de la distribución normal no constituyen el objeto de estudio primordial de esta investigación.

3.1.2 Distribuciones estables

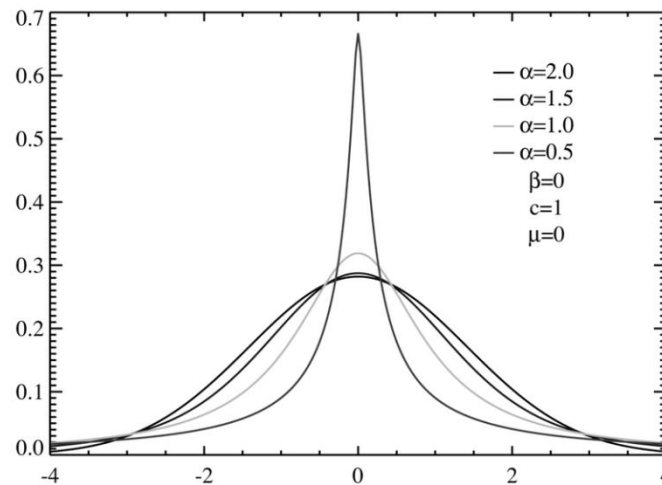
Pocos años más tarde de la publicación de los hallazgos de Osborne, aparecería otra propuesta para explicar el comportamiento de los rendimientos de los activos financieros. Esta vez el encargado fue un matemático polaco de nombre Benoit Mandelbrot. Él había estado estudiando los precios históricos del comercio del algodón, y había llegado a la conclusión de que la distribución normal no describía el comportamiento financiero de esta *commodity*. Él trató de aplicar una distribución de Cauchy a los precios del algodón, pero los resultados no eran los óptimos. Intuitivamente, concluyó que la distribución de las variaciones del precio del algodón se encontraba en un punto intermedio entre la curva normal y la de Cauchy.

Esta solución, como lo postularía en (Mandelbrot, 1963) yacía en la familia de las llamadas distribuciones estables. Las funciones dentro de este grupo se caracterizan por cuatro parámetros: uno de forma (relacionado con el tamaño de las colas), uno de asimetría, uno de locación y uno de escala. Lo interesante para Mandelbrot era el parámetro de forma, representado como alfa (α). El valor de α para la distribución normal es 2, mientras que la distribución de Cauchy cuenta con un alfa de 1.⁷ Ambas pertenecen a la familia de distribuciones estables.

⁷ Véase **Invalid source specified.**

Gráfico 3.2

Funciones de Densidad de Probabilidad para distintos valores de α



La gráfica permite obtener una noción de la forma que toman las funciones de densidad para diferentes miembros de la familia de distribuciones estables. Es evidente que todas ellas (con excepción de la normal, que es el caso extremo), son leptocúrticas. Dado que el coeficiente de asimetría (β) es 0, las densidades en la gráfica son todas simétricas. De acuerdo con lo visto anteriormente, el comportamiento de variables financieras (como el IPC) se asemeja más –tanto en el centro como en las colas- a la forma teórica de las distribuciones estables con $\alpha < 2$ que a la distribución normal.

Por este motivo, podría decirse que las distribuciones estables ofrecen una alternativa importante para el estudio de los mercados financieros. Sin embargo, estas distribuciones no poseen una expresión definida (salvo en el caso de las distribuciones normal y de Cauchy), lo que significa que ciertos momentos de la distribución no existen.⁸ Ello imposibilita la realización de inferencia estadística, y por tanto limita considerablemente el uso generalizado de este tipo de funciones para el estudio de los mercados financieros.

Además de las distribuciones normal, log-normal y estables, se han desarrollado otros métodos para tratar de explicar la dinámica de los rendimientos de distintos activos financieros. Sin embargo, la exposición de todos ellos trasciende el alcance de este trabajo, cuyo objeto central de estudio es otra variable del Modelo de Valuación de Activos de Capital: el riesgo.

⁸ *Ibidem.*

3.2 Modelos de Volatilidad Financiera

Las distribuciones de probabilidad descritas en los párrafos previos pueden ser utilizadas para inferir posibles valores que puede asumir el rendimiento de un activo, y determinar la probabilidad con que cada uno de estos valores ocurrirá. Por supuesto, estos elementos no son otra cosa que expectativas sobre eventos que podrían o no acontecer en el futuro: siempre existe la posibilidad de obtener un resultado distinto a lo esperado. En algunas ocasiones, se obtendrán mejores rendimientos, pero en otras cuantas, pueden obtenerse resultados menores a lo esperado, o incluso negativos.

Esta incertidumbre acerca del desenvolvimiento de cierta variable aleatoria (en este caso el rendimiento) a través del riesgo, es lo que llamaremos riesgo. La medida más simple del riesgo o volatilidad es la desviación estándar, que equivale a la raíz cuadrada de la varianza, que es el promedio de las variaciones respecto de la media al cuadrado. En finanzas, se utilizan muchos métodos para medir la volatilidad (como el VaR, la volatilidad implícita, entre otras), pero en este trabajo nos centraremos en la medida relevante para el Modelo de Valuación de Activos de Capital: las betas (β) de los activos financieros.

Los parámetros de la distribución normal son su media y desviación estándar, y ello es la razón por la que el CAPM toma al riesgo como un valor dado. En la ecuación (2.38) se aprecia que el rendimiento de un activo es función directa del valor de su Beta, que es la medida de su volatilidad. Pero si asumimos que la volatilidad no es constante, entonces esta no se define mediante un parámetro (como es la desviación estándar en el caso de la distribución normal), sino mediante un modelo.

Una forma de describir las variaciones en la volatilidad es mediante los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresivos. Estos métodos han sido utilizados frecuentemente en el estudio de los mercados de activos, pues capturan relativamente bien ciertas características de las series de tiempo financieras, como son: grandes colas, *volatility clustering*, distribución simétrica, segundo momento convergente, y correlación negativa entre retornos y variaciones en la volatilidad (Sánchez Vargas & Reyes Martínez, 2006).

A lo largo de esta sección, describiremos algunos de los métodos pertenecientes a esta familia, comenzando por los procesos univariados, para continuar con los multivariados,

dentro de los cuales se encuentra el modelo MGARCH con correlaciones variables propuesto por (Tse & Tsui, 2002), que es el utilizado para la estimación de las Betas condicionales en este trabajo.

3.2.1 Modelos univariados

3.2.1.1 El modelo ARCH

La primera aproximación formal al modelaje de la varianza condicional de una variable financiera fue el modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresivo, propuesto por Robert Engle como método para estimar el comportamiento de la varianza de la inflación en el Reino Unido (Engle R. , 1982). La idea esencial de este modelo es que existe cierta correlación serial en la volatilidad del rendimiento de los activos financieros, i.e. los cambios grandes son precedidos por cambios grandes, mientras que las variaciones pequeñas anteceden a variaciones pequeñas. Esta clase de comportamiento en una serie de tiempo es conocida como *volatility clustering* (Sánchez Vargas & Reyes Martínez, 2006, pág. 161) .

Engle (1982) propone que la dependencia condicional en un proceso $\{X_t\}$ puede ser descrita por una función cuadrática de sus valores rezagados (Tsay, 2005, pág. 103). $\{X_t\}$ es un proceso con heterocedasticidad condicional autorregresiva de orden q , o ARCH (q), si

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad , \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (3.2)$$

donde se asume que α_0 es estrictamente positivo, $\alpha_i \geq 0$ para todo $i > 0$, y el término de error (ε_t) es i.i.d. con $E[\varepsilon_t] = 0$, y $Var(\varepsilon_t) = 1$. Cabe señalar también que q es el número de rezagos que se incluyen en la estimación del modelo.

3.2.1.2 Modelo GARCH

Con el objetivo de flexibilizar el modelo de Engle, y hacerlo más parsimonioso en cuanto al número de rezagos, Tim Bollerslev propuso en (Bollerslev, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, 1986) una generalización del mismo: el modelo condicional autorregresivo generalizado con heterocedasticidad, mejor conocido como GARCH. Siguiendo una exposición congruente con la anterior, diremos que $\{X_t\}$ es un proceso GARCH (p, q), si se comporta de la siguiente manera:

$$X_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad , \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.3)$$

De nuevo, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0 \quad \forall \quad i \in (0, q]$. Además, β_j es no negativo para $i = 1, \dots, p$. Una vez más se asume que el término de error (ε_t) es i.i.d. con $E[\varepsilon_t] = 0$, y $Var(\varepsilon_t) = 1$. En este caso, p representa el número de rezagos de la varianza condicional que se incluyen en el modelo.

La diferencia fundamental entre los dos modelos descritos hasta ahorita consiste en que el GARCH, a diferencia de su antecesor, enuncia que la varianza condicional depende de los valores rezagados tanto de $\{X_t\}$ como de la misma varianza condicional.

Existen otros modelos univariados de heterocedasticidad condicional autorregresivos que son ampliamente utilizados para el estudio de series de tiempo financieras. Por motivos de espacio, este trabajo solo aborda los propuestos por Engle (1982) y Bollerslev (1986), que ofrecen las nociones necesarias para la comprensión de los modelos multivariados que se describen a continuación.⁹

3.2.2 Modelos multivariados

Dada la popularidad de los modelos GARCH univariados en su aplicación al modelaje de la volatilidad de activos financieros, es natural el surgimiento de una extensa colección de modelos multivariados que poseen características que los vinculan con los descritos en este capítulo. Considerar volatilidades multivariadas es de gran importancia especialmente para estudios empíricos relacionados con la teoría de portafolios, además de la práctica profesional en el ámbito financiero, puesto que resulta imperativo tener en cuenta las relaciones existentes entre distintos activos cuando se pretende formular observaciones consistentes sobre el desenvolvimiento de los mercados.

En el marco del Modelo de Valuación de Activos de Capital, los modelos multivariados resultan de vital importancia, y en particular en lo referente a las betas. Al ser éstas una medida del riesgo relativo de un activo con respecto a la volatilidad del mercado, es evidente que un abordaje multivariado que considere simultáneamente la volatilidad tanto

⁹ Para mayor referencia sobre modelos de la familia GARCH véanse **Invalid source specified.** y **Invalid source specified.** Es conveniente consultar también el muy didáctico (Bollerslev, 2011).

del activo como del mercado resulta adecuado. Por otro lado, como lo demuestra la teoría de carteras, los inversionistas observarían una conducta irracional si retuvieran en sus portafolios un solo activo, puesto que estarían despreciando los beneficios que ofrece la diversificación en cuanto a la reducción del riesgo. Ante esto, los agentes económicos sostienen diversos activos, cuyas correlaciones pueden variar a lo largo del tiempo. Precisamente para modelar estos cambios resultan útiles los modelos multivariados de heterocedasticidad condicional autorregresivos.

A continuación, se ofrece una modesta descripción de los modelos GARCH multivariados más frecuentemente utilizados en el estudio de los mercados financieros. De ninguna manera se pretende ahondar en los detalles y especificidades de cada uno de ellos. Para los lectores que pretendan conocer más sobre estos modelos y otros similares, se recomienda consultar (Kroner & Ng, 1993), además del ya citado (Bollerslev, 2011).

3.2.2.1 Modelo VECH

La primera especificación de un modelo GARCH multivariado se encuentra en (Bollerslev, Engle, & Wooldridge, 1988), que de hecho desarrolla dentro del marco del CAPM. Estos autores modelan cada elemento de la matriz de varianzas y covarianzas con un GARCH univariado. El artículo plantea un Modelo de Valuación de Activos de Capital, en el que la volatilidad sigue el siguiente comportamiento:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \text{vech}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-i} \boldsymbol{\epsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}) \quad (3.4)$$

Se asume que $\boldsymbol{\epsilon}_t$ sigue una distribución normal con media 0 y varianza \mathbf{H}_t . En la expresión anterior, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ es un vector de choques o innovaciones de $N \times 1$, \mathbf{C} es un vector de $1/2N(N+1) \times 1$, y tanto \mathbf{A}_i como \mathbf{B}_j son matrices de $1/2N(N+1) \times 1/2N(N+1)$. $\text{vech}(\cdot)$ es el operador que vectoriza los elementos que se encuentran tanto en la diagonal como por debajo de ella en una matriz simétrica.

Aunque el modelo VECH destaca por su simplicidad, el que cada elemento siga un proceso GARCH sin restricción alguna, hace que una matriz de covarianzas positiva definida no esté garantizada, i.e. deja abierta la posibilidad de que algunas de las varianzas sean negativas, lo cual carece absolutamente de sentido, pues éstas son un número elevado al

cuadrado. Además, el modelo descarta cualquier dependencia dinámica entre las series de volatilidad. Como la proposición de Bachelier sobre el rendimiento de los activos, el modelo de Bollerslev y compañía destaca, principalmente, por su carácter de pionero.

3.2.2.2 Modelo BEKK

Ante el inconveniente que representaba el no poder garantizar una matriz de varianzas y covarianzas positiva definida, Engle y Kroner idearon el modelo BEKK¹⁰, llamado así por las iniciales de sus desarrolladores: Bollerslev, Engle, Kraft y Kroner. El problema fue resuelto al utilizar formas cuadráticas, en vez de los elementos individuales de la matriz de varianzas y covarianzas. La especificación del modelo es como sigue:

$$\Sigma_t = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i (\epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}) \mathbf{A}'_i + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \Sigma_{t-j} \mathbf{B}'_j \quad (3.5)$$

Donde \mathbf{A} es una matriz triangular inferior, mientras que \mathbf{A}_i y \mathbf{B}_j son matrices de $k \times k$. Esta forma funcional prácticamente garantiza que Σ_t sea positiva definida, debido a los múltiples productos que incorpora, generando así lo que podría denominarse como las formas cuadráticas de cada matriz.

Además de esta ventaja, el modelo permite la existencia de dependencia dinámica entre distintas series de volatilidad, a diferencia del modelo VECH. No obstante, esta forma funcional presenta algunas complicaciones considerables. Tsay (2005) enumera algunas desventajas de este modelo,¹¹ de entre las cuales destaca el gran número de parámetros a calcular, lo que lo vuelve muy poco práctico para estudios empíricos de los mercados financieros.

3.2.2.3 Modelo de correlaciones constantes

Esta alternativa, propuesta por Bollerslev en 1990, también garantiza, bajo ciertas restricciones razonables, una matriz de covarianzas positiva definida, lo que la vuelve atractiva para su aplicación a los mercados financieros. En (Bollerslev, 1990), se expone un

¹⁰ La referencia primaria para este modelo es (Engle & Kroner, Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, 1995)

¹¹ (Tsay, 2005, pág. 452)

modelo en el que cada la varianza del rendimiento de cada activo es un proceso GARCH(p,q) univariado, mientras que la covarianza entre los diferentes pares de activos está dada por el producto de un coeficiente de correlación constante por las desviaciones estándar de los retornos. El modelo puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_{iit}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} \epsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} \sigma_{i,t-j}^2 \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{ii,t} \sigma_{jj,t}} \quad (3.7)$$

Cabe señalar que la expresión (3.6) es para las varianzas condicionales, mientras que (3.7) explica las covarianzas condicionales. Es claro que ρ_{ij} es el coeficiente de correlación constante que da nombre al modelo.

Por supuesto, la principal desventaja de esta especificación de las varianzas y covarianzas de los activos financieros, es que asume correlaciones constantes. El mismo Bollerslev pone en tela de juicio la validez de este supuesto (Bollerslev, 1990, pág. 499). Por otro lado, el modelo representa relativa parsimonia en cuanto al número de parámetros a estimar.

3.2.2.4 MGARCH con correlaciones variables (VC-MGARCH)

(Tse & Tsui, 2002) presentan una alternativa viable al modelo VECH presentado por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988). El GARCH multivariado con correlaciones variables (Varying-correlation MGARCH) garantiza una matriz de correlaciones condicionales positiva definida, lo que justifica en parte su elección por encima del VECH tradicional. Otra ventaja relativa de este modelo es, entre otras, que permite una mayor parsimonia en los parámetros, por lo que resulta más fácilmente computable, lo que vuelve más sencilla la interpretación del mismo, por lo que, al menos teóricamente, debería resultar más atractivo que el modelo BEKK de Engle y Kroner (1995).¹²

Por otro lado, aunque el VC-MGARCH implica la estimación de 2 parámetros más que el modelo de correlaciones constantes de Bollerslev (1990), su utilización puede considerarse preferible a la de este último, debido a lo restrictivo que puede resultar el supuesto de un coeficiente de correlación constante.

¹² Al respecto véase (Tse & Tsui, 2002)

La característica diferenciadora de este modelo respecto a otros es que, además de recurrir al VECH diagonal para obtener las varianzas condicionales de cada activo incluido en el modelo, plantea una ecuación para obtener una matriz de correlaciones condicionales. Las restricciones en cuanto a los parámetros de esta última ecuación, actúan como garantía para obtener, al final de la optimización, una matriz de correlaciones positiva definida.

3.2.2.4.1 Desarrollo del VC-MGARCH

Se tiene una serie de tiempo multivariada compuesta por observaciones $\{y_t\}$, $t = 1, \dots, T$, cada una de las cuales posee K elementos, de modo que $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})$. Sin perder generalidad, y con el único objetivo de simplificar la exposición del modelo, se asume que las observaciones tienen media cero o conocida.

En este modelo, se asume que la varianza condicional de y_t observa el siguiente comportamiento en el tiempo:

$$\text{Var}(y_t | \Phi_{t-1}) = \Omega_t, \quad (3.8)$$

Donde Φ_t es la información disponible en el momento t . Las varianzas incluidas en Ω_t son representadas por σ_{it}^2 , $i = 1, \dots, K$, mientras que las covarianzas se expresan como σ_{ijt} , $1 \leq i < j \leq K$. Sea D_t la matriz diagonal de $K \times K$ que tiene como i -ésimo elemento de la diagonal a σ_{it} , $\varepsilon_t = D_t^{-1}y_t$. Así, ε_t no es otra cosa que el error residual estándar, el cual, se asume, está serial e independientemente distribuido, con media cero y matriz de varianzas $\Gamma_t = \{\rho_{ijt}\}$. Γ_t es también la matriz de correlaciones de y_t , de modo que $\Omega_t = D_t\Gamma_tD_t$, puesto que $\sigma_{ijt} = \rho_{ijt}\sigma_{it}\sigma_{jt}$.

La especificación de la varianza condicional de y_t es acorde con el VECH diagonal tradicional, cuyos fundamentos se encuentran en (Bollerslev, Engle, & Wooldridge, A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances, 1988), i.e. cada término de varianza condicional sigue un proceso GARCH (p, q) univariado, tal y como indica la siguiente: expresión

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \sum_{h=1}^p \alpha_{ih} \sigma_{i,t-h}^2 + \sum_{h=1}^q \beta_{ih} y_{i,t-h}^2, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.9)$$

ω_i , α_{ih} y β_{ih} son no negativos, y $\sum_{h=1}^p \alpha_{ih} + \sum_{h=1}^q \beta_{ih} < 1$, para $i = 1, \dots, K$.

Como se ha mencionado anteriormente, el VC-MGARCH de (Tse & Tsui, 2002) se distingue de otros modelos de MGARCH en que ellos se enfocan en la matriz de correlaciones condicionales, en lugar de asumir el proceso anterior tanto para varianzas como para covarianzas condicionales. Dicho esto, los autores incluyen una ecuación explícita para Γ_t en su modelo, misma que se expone a continuación.

$$\Gamma_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\Gamma + \theta_1\Gamma_{t-1} + \theta_2\Psi_{t-1}, \quad (3.10)$$

Donde $\Gamma = \{\rho_{ij}\}$ es una matriz de parámetros constantes de $K \times K$ en la que cada término de la diagonal principal es igual a 1, y Ψ_{t-1} es una matriz de $K \times K$ cuyos elementos $\{\psi_{ij,t-1}\}$ son funciones de los rezagos de y_t . Se asume que $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, y que además $\theta_1 + \theta_2 \leq 1$. De lo anterior se sigue que Γ_t es un promedio ponderado de Γ , Γ_{t-1} y Ψ_{t-1} , por lo que mientras Ψ_{t-1} sea una matriz de correlaciones (positiva definida con $\psi_{ii,t-1} = 1$), Γ_t también será una matriz de correlaciones con las mismas características cualitativas que Γ y Ψ_{t-1} .

La forma funcional para cada elemento de Ψ_{t-1} se define a continuación:

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{h=1}^M \varepsilon_{i,t-h} \varepsilon_{j,t-h}}{\sqrt{(\sum_{h=1}^M \varepsilon_{i,t-h}^2)(\sum_{h=1}^M \varepsilon_{j,t-h}^2)}}, \quad 1 \leq i < j \leq K \quad (3.11)$$

Como puede apreciarse en la expresión anterior, Ψ_{t-1} es la matriz muestral de correlaciones de $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-M}$.

Al definir E_{t-1} como una matriz de $K \times M$ cuyos elementos están dados por $E_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-M}\}$, y B_{t-1} como una matriz diagonal de $K \times M$ cuyo i -ésimo elemento de la diagonal principal es $\sqrt{(\sum_{h=1}^M \varepsilon_{i,t-h}^2)}$, $i = 1, \dots, K$, podemos expresar Ψ_{t-1} como sigue:

$$\Psi_{t-1} = B_{t-1}^{-1} E_{t-1} E_{t-1}' B_{t-1}^{-1} \quad (3.12)$$

Es pertinente abundar que para que Ψ_{t-1} sea una matriz de correlaciones, i.e. para que satisfaga la condición de ser positiva definida, es necesario que se cumpla que $M \geq K$, es decir, que el número de rezagos del error residual estándar sea al menos tan grande como el número de variables en el modelo.

El modelo VC-MGARCH queda especificado por (3.9), (3.10) y (3.12). Bajo el supuesto de normalidad, $y_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, D_t \Gamma_t D_t)$, la función de máxima verosimilitud condicional de cada observación y_t está dada por

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln |D_t \Gamma_t D_t| - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} y_t \quad (3.13)$$

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln |\Gamma_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \ln \sigma_{it}^2 - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} y_t \quad (3.14)$$

A partir de la expresión (3.14), se puede obtener la función de máxima verosimilitud para la muestra completa: $\ell = \sum_{t=1}^T \ell_t$. Se da por hecho, sin que esto afecte la distribución del estimador de máxima verosimilitud (MLE), que y_0 , Γ_0 y Ψ_t están dados. Si llamamos $\theta = (\omega_1, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p}, \beta_{11}, \dots, \beta_{1q}, \omega_2, \dots, \beta_{Kq}, \rho_{12}, \dots, \rho_{K-1,K}, \theta_1, \theta_2)$ al vector que contiene los parámetros del modelo, el MLE de θ (al que llamaremos $\hat{\theta}$) se obtiene al maximizar ℓ con respecto a θ .

3.2.3 Cálculo de las betas condicionales

El modelo GARCH multivariado con correlaciones condicionales variables, una vez estimado, permite el cálculo de las varianzas estimadas de los rendimientos de los activos incorporados al mismo. Además, a partir de los resultados de la estimación es posible también obtener los coeficientes de correlación de cada activo para cada punto en el tiempo. Si se cuenta con esta información, es posible obtener las covarianzas entre cada activo simplemente multiplicando el coeficiente de correlación por las desviaciones estándar de cada pareja de títulos financieros.

La estimación de las betas suele realizarse mediante una regresión simple en la que el rendimiento del activo es la variable dependiente, y el rendimiento del mercado es la variable explicativa. De esta manera, el coeficiente que multiplica al rendimiento del mercado se considera un estimador de la beta del activo. Cabe señalar que este abordaje del problema ofrece una Beta para todo el periodo considerado, por lo que no permite visualizar el aparente dinamismo de la volatilidad de los activos en el mercado.

El cálculo de las betas condicionales en este trabajo, se realiza siguiendo la fórmula

$$\beta_i = \frac{cov(\mu_i, \mu_m)}{var(\mu_m)} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

en la que se evalúan los valores que arroja el modelo VC-MGARCH. Esto permite la obtención de una beta para cada punto en el tiempo, lo que a la vez permite la observación de los cambios en la volatilidad.

4. Datos y Resultados

En los capítulos anteriores se han expuesto los fundamentos teóricos y metodológicos que justifican los procedimientos realizados en esta investigación. Además, se presentó al principio del trabajo información que permite la formación de una perspectiva general sobre el desenvolvimiento reciente del mercado accionario mexicano, así como el lugar que ocupa en el mundo de acuerdo a distintos parámetros.

Ahora, es preciso concentrarnos particularmente en la parte empírica, que es el principal elemento de la presente investigación. El presente capítulo tiene como objetivo la descripción general de la información estadística utilizada para el modelaje de la volatilidad en el mercado mexicano, además de la presentación de los resultados de dicha estimación.

En la primera sección se hará una descripción de los datos, además de justificar la elección de la muestra utilizada. Se ofrecerán las estadísticas descriptivas para cada variable incorporada al estudio, y se presentará la correspondiente interpretación. En el apartado subsiguiente se muestran los resultados de la estimación del modelo GARCH multivariado con correlaciones condicionales variables, además de la explicación de éstos. Al final, se grafican las betas condicionales para cada acción, y se analiza el comportamiento de la volatilidad de cada uno de los activos.

4.1 Datos

La información estadística utilizada para este trabajo consiste en los precios de cierre diarios de 25 acciones comprendidas en el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) en diciembre de 2012, de acuerdo con lo establecido en (Bolsa Mexicana de Valores, 2012). El intervalo temporal cubierto por la muestra va del 2 de enero de 2008 al 31 de diciembre de 2012. Se eligió este periodo por ser relativamente reciente, cosa siempre importante en el estudio de los mercados financieros. Por otro lado, el intervalo seleccionado incorpora los efectos de periodos de crisis y recuperación de la actividad económica, por lo que fue considerado por el autor como idóneo para estudiar cambios significativos en la volatilidad del mercado. Si bien estadísticamente esto podría generar resultados un tanto aberrantes, considero que descartar el estudio de un periodo por sus características coyunturales resulta irresponsable, puesto que éstas están presentes en cualquier variable, para cualquier periodo

de la historia. En el cuadro 4.1 se presenta un listado de las 25 series accionarias que se estudiaron para este trabajo, además del sector e industria a los que pertenecen.

Como puede apreciarse en el cuadro, la muestra seleccionada está integrada en su mayoría por series accionarias del sector productor de bienes de consumo, categoría que cuenta con 7 miembros de los 25 incorporados al estudio. El segundo sector con más preponderancia dentro de las acciones consideradas es el de servicios. Podría postularse que las acciones de las empresas de un mismo sector observan comportamientos estadísticos similares, lo que podrá verificarse mediante el análisis de las estadísticas descriptivas de cada serie que se hará más adelante en el capítulo.

Cuadro 4.1
Series accionarias analizadas

Emisora	Serie	Sector	Industria
AC	*	Bienes de consumo	Bebidas – Refrescos
ALFA	A	Materiales básicos	Químicos
ALSEA	*	Servicios	Restaurantes
AMX	L	Tecnología	Comunicaciones inalámbricas
ASUR	B	Servicios	Servicios aéreos
BIMBO	A	Bienes de consumo	Alimentos
CEMEX	CPO	Bienes industriales	Materiales generales de construcción
ELEKTRA	*	Servicios	Tiendas departamentales
FEMSA	UBD	Bienes de consumo	Bebidas – Refrescos
GAP	B	Servicios	Servicios aéreos
GEO	B	Bienes industriales	Construcción residencial
GFINBUR	O	Financiero	Banca
GFNORTE	O	Financiero	Banca
GMEXICO	B	Materiales básicos	Minería y metales industriales
GMODELO	C	Bienes de consumo	Bebidas – Cervezas
GRUMA	B	Bienes de consumo	Alimentos
HOMEX	*	Bienes industriales	Construcción residencial
ICA	*	Bienes industriales	Contratistas generales
ICH	B	Materiales básicos	Hierro y acero
KIMBER	A	Bienes de consumo	Productos personales
KOF	L	Bienes de consumo	Bebidas - Refrescos
MEXCHEM	*	Materiales básicos	Químicos
TLEVISA	CPO	Servicios	Radiodifusión - Televisión
URBI	*	Bienes industriales	Construcción residencial
WALMEX	V	Servicios	Supermercados - Tiendas de descuento

Fuente: Yahoo! Finance y BMV.

Cabe señalar que además de la muestra de 25 acciones, fue necesario analizar los valores diarios de cierre del Índice de Precios y Cotizaciones. Ello debido a que se realizó el supuesto de que este indicador bursátil constituye el portafolio de mercado, elemento indispensable para realizar investigaciones financieras desde la perspectiva del Modelo de Valuación de Activos de Capital, tal y como se plantea en el primer capítulo. Los datos fueron obtenidos de Yahoo! Finance, y de la página de internet de la Bolsa Mexicana de Valores.

Se depuró la muestra para lograr congruencia entre el número de observaciones en cada serie. La matriz de precios resultante cuenta con 26 variables (25 series accionarias más el Índice de Precios y Cotizaciones), cada una con 1214 observaciones comprendidas entre el 2 de enero de 2008 y el 31 de diciembre de 2012.

Para la estimación del modelo, se calcularon los rendimientos logarítmicos de cada serie accionaria. Debido a que éstos equivalen a la primera diferencia del logaritmo de los precios de cada acción, la matriz de rendimientos cuenta con una observación menos que la de precios, i.e. 1213. Todos los estadísticos presentados en este capítulo fueron elaborados con base en las series de rendimientos logarítmicos de los activos financieros incluidos en la muestra. El cuadro 4.2 es un resumen estadístico de las series de los rendimientos logarítmicos (expresados como porcentajes) de las 26 variables.

Cuadro 4.2

Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos de los activos financieros

Serie	Media	Mínimo	Máximo	Desviación Estándar	Asimetría	Curtosis
IPC	0.03%	-7.27%	10.44%	1.50%	0.2028	9.4343
AC	0.16%	-8.59%	55.10%	2.09%	15.1862	395.3689
ALFAA	0.31%	-17.19%	229.29%	7.12%	27.4733	883.3242
ALSEA	0.05%	-14.28%	21.82%	2.58%	0.6429	11.5036
AMXL	0.06%	-13.67%	69.31%	2.86%	11.7469	285.8327
ASURB	0.08%	-13.66%	10.42%	2.14%	-0.3244	7.2712
BIMBOA	0.18%	-10.04%	139.56%	4.51%	24.4665	756.9884
CEMEXCPO	-0.06%	-21.01%	23.81%	3.74%	0.1166	8.7335
ELEKTRA	0.05%	-21.44%	19.04%	2.88%	-0.1159	11.7094
FEMSAUBD	0.10%	-14.11%	12.55%	2.04%	-0.2008	10.2391
GAPB	0.06%	-14.37%	12.01%	2.05%	-0.2799	8.3260
GEOB	-0.06%	-18.31%	16.17%	3.12%	-0.3273	8.1094
GFINBURO	0.15%	-8.49%	66.41%	3.01%	9.1326	198.1593
GFNORTEO	0.05%	-24.24%	27.00%	3.08%	0.0969	14.5377
GMEXICOB	0.16%	-18.42%	109.25%	4.33%	13.1546	335.4571
GMODELOC	0.08%	-10.90%	17.78%	2.03%	0.4835	10.5826
GRUMAB	0.01%	-89.38%	25.78%	3.89%	-9.5604	235.9959
HOMEX	-0.10%	-26.16%	25.07%	3.28%	-0.1695	12.3155
ICA	-0.07%	-27.69%	29.57%	2.89%	-0.0600	21.5225
ICHB	0.06%	-16.22%	12.86%	2.21%	-0.1970	7.4357
KIMBERA	0.21%	-11.63%	112.69%	3.76%	22.1891	663.9408
KOFL	0.11%	-18.24%	10.30%	2.24%	-0.5030	9.3591
MEXCHEM	0.23%	-19.87%	108.63%	4.02%	16.1490	441.3396
TLEVISACPO	0.03%	-8.13%	15.02%	1.97%	0.6751	8.8335
URBI	-0.12%	-25.35%	17.21%	3.27%	-0.9482	13.5742
WALMEXV	0.13%	-15.39%	71.22%	2.89%	12.1036	303.9562

Lo que más llama la atención de entre los elementos del cuadro anterior, son los coeficientes de curtosis que presentan algunas series. Destacan particularmente, en este ámbito, los rendimientos logarítmicos de ALFAA, y BIMBOA. Si se comparan contra la distribución normal, que tiene un coeficiente de curtosis de 3, el comportamiento presentado por estas dos series resulta exorbitante. Coeficientes tan altos denotan una alta concentración de observaciones alrededor de los valores centrales de la distribución. Esto

también puede considerarse como un indicador del tamaño de las colas de la distribución. Cabe resaltar que todas las series consideradas en la muestra son leptocúrticas, lo cual es congruente con las propiedades habituales de las series financieras.

Los coeficientes de asimetría presentan comportamientos distintos para distintos grupos de series. La gran mayoría de las variables presentan un coeficiente con un coeficiente de asimetría con valor absoluto menor a uno. Esto podría considerarse como un indicador de que éstas poseen distribuciones simétricas en forma de campana, lo cual también es consistente con las características de series de tiempo financieras enunciadas por (Sánchez Vargas & Reyes Martínez, 2006). De nuevo, ALFAA y BIMBOA sobresalen por el valor de su coeficiente, ahora de asimetría. Esto no es raro si se observa con más cuidado la columna de valores máximos en el cuadro: hubo un día en que el rendimiento diario de ALFAA fue de 229.29%, un valor a todas luces extraordinario. El menor rendimiento diario obtenido de entre todas las series fue de -89.38%, observado por GRUMAB. Este valor tiene efectos sobre la forma de la distribución de esta variable, cuyo coeficiente de asimetría es también el menor de entre todas las series accionarias: -9.56.

Por otro lado, las empresas pertenecientes a un mismo sector muestran comportamientos dispares, por lo que no puede decirse que la semejanza en sus actividades productivas sea motivo para que su desempeño en el mercado accionario muestre patrones similares. Por ejemplo, en el sector de bienes de consumo, se encuentran AC, BIMBO, FEMSAUBD, GMODELOC, GRUMAB, KIMBERA y KOFL. Aunque las dos primeras series de este grupo presentan características cualitativamente similares (coeficientes altos de asimetría y curtosis), FEMSAUBD posee un coeficiente de asimetría negativo y con bajo valor absoluto, mientras que el coeficiente de asimetría de GRUMAB es el más bajo de entre todas las series. Si se buscan similitudes en el comportamiento estadístico de series pertenecientes a la misma industria, tampoco se alcanzan resultados concluyentes: aunque FEMSAUBD y KOFL (ambas dedicadas a la producción de refrescos) presentan estadísticos descriptivos muy parecidos, AC (también refresquera), observa un dinamismo discorde respecto de sus competidores.

Como es posible apreciar, mientras que la mayoría de las series observan comportamientos regularmente hallados en las series de tiempo financieras, existen algunas de ellas que

registran desenvolvimientos muy irregulares, lo que tiene como consecuencia que sus momentos disten mucho de los valores que podrían esperarse. A continuación, se muestran los resultados de la prueba de diagnóstico de Box-Pierce, cuya hipótesis nula es que la variable testada se comporta como ruido blanco.

Cuadro 4.3
Prueba de Box-Pierce de Ruido Blanco

Serie	Q1(40)	P-VALUE	Q2(40)	P-VALUE
IPC	107.3830	0.0000 *	1686.3378	0.0000 *
AC	38.3646	0.5440	0.6894	1.0000
ALFAA	7.2262	1.0000	0.0468	1.0000
ALSEA	82.4964	0.0001 *	657.4768	0.0000 *
AMXL	34.9614	0.6962	0.0730	1.0000
ASURB	42.9150	0.3473	421.5411	0.0000 *
BIMBOA	10.8180	1.0000	0.0636	1.0000
CEMEXCPO	105.1050	0.0000 *	1170.2622	0.0000 *
ELEKTRA	110.1665	0.0000 *	244.0771	0.0000 *
FEMSAUBD	70.0749	0.0023 *	735.4773	0.0000 *
GAPB	84.7736	0.0000 *	390.8432	0.0000 *
GEOB	114.5715	0.0000 *	1398.5664	0.0000 *
GFINBURO	40.4272	0.4514	0.5336	1.0000
GFNORTEO	102.9985	0.0000 *	937.6767	0.0000 *
GMEXICOB	24.0165	0.9786	0.0481	1.0000
GMODELOC	58.1720	0.0315 *	148.8655	0.0000 *
GRUMAB	61.3010	0.0167 *	10.4298	1.0000
HOMEX	65.3315	0.0069 *	780.3598	0.0000 *
ICA	119.1289	0.0000 *	818.7989	0.0000 *
ICHB	82.3009	0.0001 *	438.9628	0.0000 *
KIMBERA	14.5134	0.9999	0.0676	1.0000
KOFL	54.2742	0.0655	435.6331	0.0000 *
MEXCHEM	89.5151	0.0000 *	4.0064	1.0000
TLEVISACPO	103.0272	0.0000 *	516.1613	0.0000 *
URBI	70.0485	0.0023 *	337.1692	0.0000 *
WALMEXV	22.6951	0.9874	0.1206	1.0000

Nota: Q1(40) es la prueba de Box-Pierce aplicada para 40 rezagos de los rendimientos logarítmicos de las series accionarias. Análogamente, Q2(40) es la misma prueba, pero aplicada a los rendimientos logarítmicos cuadrados

El estadístico de Box-Pierce aplicado para los coeficientes de autocorrelación de hasta 40 rezagos muestra que, con un nivel de confianza del 95%, 16 series de rendimientos logarítmicos no se comportan como ruido blanco, lo que implica que es posible la existencia de correlación serial. Por otro lado, la misma prueba aplicada al cuadrado de los rendimientos logarítmicos demuestra que, para cualquier nivel de significancia, 16 series muestran señales de correlación serial en la varianza, lo que justifica su abordaje con modelos de heterocedasticidad condicional autorregresivos. Aunque para algunas series se rechaza la hipótesis nula tanto para los rendimientos como para los rendimientos al cuadrado, existen otras que aparentan tener correlación serial en la media, pero no en la varianza, y viceversa. Es preciso considerar estos elementos para un correcto análisis de los resultados de la aplicación del modelo GARCH multivariado de correlaciones condicionales variables, cuyos resultados se muestran a continuación.

4.2 Estimación y resultados

Para la contrastación de la hipótesis de que la volatilidad varía a lo largo del tiempo, se utilizaron los datos descritos en la sección anterior para la estimación de un modelo GARCH multivariado con correlaciones variables, siguiendo lo propuesto en (Tse & Tsui, 2002). La media condicional fue estimada mediante un modelo VAR de primer orden, mientras que la matriz de varianzas y covarianzas condicionales se modeló mediante un VC-MGARCH(1,1). La ecuación asumida de la media condicional, para cada variable i , queda entonces definida como sigue:

$$\mu_{i,t} = \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} \mu_{j,t-1}$$

Donde r es el número de variables en el modelo.

Las variables sometidas a este ejercicio econométrico fueron las que mostraron alguna evidencia de correlación serial en la varianza, de acuerdo con el estadístico de Box-Pierce calculado con los rendimientos logarítmicos al cuadrado [Q2(40)]. De esta manera, se procedió a la estimación del modelo para las 16 variables siguientes: IPC, ALSEA, ASURB, CEMEXCPO, ELEKTRA, FEMSAUBD, GAPB, GEOB, GFNORTEO,

GMODELOC, HOMEX, ICA, ICHB, KOFL, TLEVISACPO, y URBI. El paquete de software utilizado para todas las estimaciones en este trabajo fue STATA 12.

Debido a limitaciones físicas relacionadas con la capacidad de proceso de equipos de cómputo convencionales, además de otras relacionadas con la especificación del modelo, el número de parámetros a estimar y el número de observaciones en la muestra, se optó por calcular 15 diferentes modelos, cada uno de 2 variables (el IPC y cada una de las series accionarias), en vez de uno solo que incorporara las 16 series. Ello es congruente con los objetivos de este trabajo, puesto que para el cálculo de las betas se necesitan únicamente las correlaciones entre cada activo y el portafolio de mercado (cuyo rol, según hemos asumido, desempeña el IPC), además de la varianza de éste último. Estos elementos se encuentran todos en la primera fila y en la diagonal de la matriz de varianzas y covarianzas. Esto tiene como corolario el que cualquier variable que se incorpore a más de un modelo, posea varias ecuaciones diferentes tanto de media condicional como de varianza condicional. Éste es el caso del IPC. Para el cálculo de las betas de cada activo, fue utilizada la ecuación de varianza del IPC correspondiente al modelo que relaciona al índice con la serie accionaria en cuestión.

El cálculo de cada elemento de la matriz de varianzas y covarianzas resulta entonces prescindible, aunque sería negligente asegurar que no se obtendrían ventajas estadísticas de la estimación de un solo modelo que capturara la interacción entre todas las series accionarias. Dicho lo anterior, el vector de parámetros a estimar en cada modelo bivariado es entonces $\theta = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \omega_1, \alpha_{11}, \beta_{11}, \omega_2, \alpha_{21}, \beta_{21}, \rho_{12}, \theta_1, \theta_2)$.

Algunas de los modelos fueron imposibles de calcular debido a problemas con la optimización del estimador de máxima verosimilitud del vector de parámetros. En la mayoría de los casos problemáticos, la función de máxima verosimilitud era discontinua, o entraba en regiones planas que impidieron el alcance de un máximo que satisficiera el proceso de optimización. Los modelos que enfrentaron problemas de este tipo fueron: FEMSAUBD, GAPB, GEOB, y KOFL. En estos casos, la estimación resultó imposible, por lo que fue necesario excluir estos modelos tanto de la presentación de resultados, como del cálculo de las betas condicionales.

Las variables ELEKTRA y CEMEXCPO registraron un peculiar inconveniente: el óptimo era inalcanzable si se calculaba el modelo tal y como fue especificado. Sin embargo, se probó correr la estimación sin definir ecuaciones de media condicional, lo que permitió la consecución del óptimo en la función de máxima verosimilitud. Es claro que estos constituyen casos especiales, y la interpretación que pueda realizarse sobre los resultados de estos modelos debe abordarse con cautela.

El cuadro 4.4 muestra los resultados de la estimación de los 11 modelos que pudieron ser calculados.

Cuadro 4.4
Resultados de la estimación de los modelos VC-MGARCH(1,1)

	γ_{i1}	γ_{i2}	β	α	ω	θ_1	θ_2	ρ
IPC	0.0032 * (0.0323)	0.0426 (0.0157)	0.0782 (0.0125)	0.9115 (0.0128)	0.0000 (0.0000)	0.0274 (0.0083)	0.9483 (0.0176)	0.5401 (0.0653)
ALSEA	0.0593 * (0.0495)	0.0369 * (0.0337)	0.0703 (0.0148)	0.9222 (0.0164)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0443 * (0.0323)	-0.0009 * (0.0169)	0.0852 (0.0130)	0.9069 (0.0126)	0.0000 (0.0000)	0.0570 (0.0188)	0.8164 (0.0672)	0.4196 (0.0365)
ASURB	0.0997 (0.0427)	-0.0293 * (0.0319)	0.0349 (0.0074)	0.9577 (0.0089)	0.0000 (0.0000)			
IPC			0.0740 (0.0112)	0.9086 (0.0124)	0.0000 (0.0000)	0.0136 (0.0064)	0.9560 (0.0201)	0.6913 (0.0290)
CEMEXCPO			0.0724 (0.0123)	0.9098 (0.0146)	0.0000 (0.0000)			
IPC			0.0860 (0.0128)	0.9048 (0.0125)	0.0000 (0.0000)	0.0027 * (0.0040)	0.9875 (0.0172)	0.4674 (0.0470)
ELEKTRA			0.1449 (0.0162)	0.8684 (0.0117)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0441 * (0.0339)	-0.0202 (0.0121)	0.0819 (0.0130)	0.9037 (0.0136)	0.0000 (0.0000)	0.0223 (0.0061)	0.9633 (0.0122)	0.6930 (0.0992)
GFNORTEO	0.1078 * (0.0708)	0.0071 * (0.0325)	0.1243 (0.0252)	0.8509 (0.0290)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0329 * (0.0311)	0.0091 * (0.0176)	0.0835 (0.0127)	0.9089 (0.0124)	0.0000 (0.0000)	0.0159 (0.0056)	0.9793 (0.0086)	0.5370 (0.1760)
GMODELOC	-0.0955 (0.0406)	0.0117 * (0.0310)	0.1239 (0.0171)	0.8864 (0.0137)	0.0000 (0.0000)			

IPC	0.0403 *	0.0011 *	0.0779	0.9091	0.0000	0.0927 (0.0330)	0.7113 (0.1385)	0.5983 (0.0275)
HOMEX	0.1854 (0.0687)	0.0468 * (0.0351)	0.0795 (0.0191)	0.9022 (0.0259)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0487 *	-0.0147 *	0.0807	0.9072	0.0000	0.0767 (0.0255)	0.4396 (0.1905)	0.6369 (0.0198)
ICA	0.0167 * (0.0672)	0.0273 * (0.0394)	0.0877 (0.0139)	0.8909 (0.0181)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0411 *	-0.0083 *	0.0789	0.9099	0.0000	0.0400 (0.0203)	0.7794 (0.1479)	0.5106 (0.0268)
ICHB	0.1674 (0.0512)	0.0117 * (0.0357)	0.0607 (0.0124)	0.9153 (0.0180)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0474 *	0.0035 *	0.0694	0.9185	0.0000	0.0616 (0.0162)	0.7887 (0.0544)	0.6351 (0.0250)
TLEVISACPO	0.0100 * (0.0475)	-0.0218 * (0.0226)	0.0543 (0.0148)	0.9233 (0.0196)	0.0000 (0.0000)			
IPC	0.0155 *	0.0206	0.0931	0.8958	0.0000	0.0290 (0.0094)	0.9334 (0.0234)	0.5171 (0.0392)
URBI	-0.0153 * (0.0461)	0.0727 (0.0363)	0.2260 (0.0343)	0.7820 (0.0277)	0.0000 (0.0000)			

*Estadísticamente no significativos en un intervalo de confianza del 90%. Los errores estándar de los estimadores aparecen entre paréntesis.

En primer lugar, es visible que ω_i , α_{ih} y β_{ih} son no negativos, y $\sum_{h=1}^p \alpha_{ih} + \sum_{h=1}^p \beta_{ih} < 1$, por lo que se cumplen las condiciones que (Tse & Tsui, 2002) plantean acerca de la ecuación de varianza condicional. Se cumplen también las condiciones sobre los parámetros θ_1 y θ_2 , a saber, que sean no negativos y que sumados sean menores a 1.

Es notable el hecho de que todos los parámetros estimados del modelo VC-MGARCH(1,1) son estadísticamente significativos al 10% de significancia. La única excepción es el coeficiente θ_1 en la ecuación de varianza de ELEKTRA. El hecho de que todos los coeficientes de las ecuaciones de varianza sean estadísticamente diferentes de cero sugiere que los activos financieros presentan varianzas condicionales que varían a lo largo del tiempo. Por otro lado, el que en todos los modelos (excepto el que incorpora a ELEKTRA) los estimadores de θ_1 y θ_2 sean estadísticamente significativos rechaza la hipótesis de que las correlaciones entre los activos financieros (en este caso entre cada acción y el portafolio de mercado) sean constantes. Estos resultados son congruentes con la hipótesis planteada en esta tesis, i.e. que la volatilidad en los mercados financieros varía a lo largo del tiempo,

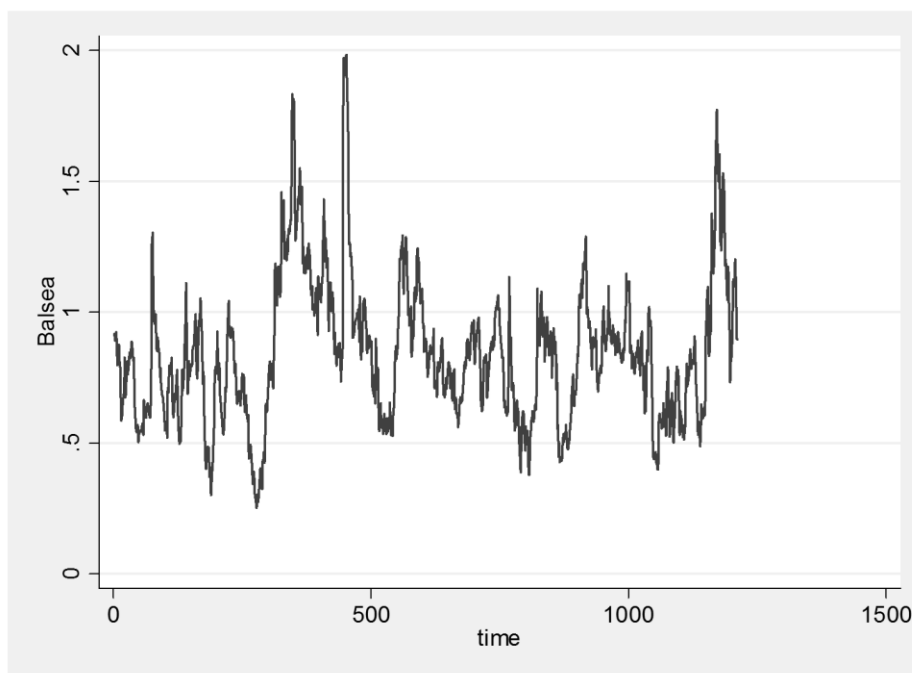
por lo que la utilización del CAPM estáticamente resulta inadecuada para una correcta evaluación del comportamiento de las variables financieras.

Por otra parte, el cuadro 4.4 demuestra que los modelos especificados para el cálculo de las medias condicionales de cada activo resultaron impertinentes. Únicamente para ocho de los 36 estimadores γ se rechaza la hipótesis de que el parámetro es igual a cero. En definitiva, el modelo VAR de primer orden sugerido para el modelaje de las medias condicionales de las series accionarias incluidas en el análisis no satisface de modo alguno las condiciones para ser considerado adecuado para el estudio de los rendimientos accionarios en el mercado mexicano.

4.3 Gráficas de las betas condicionales

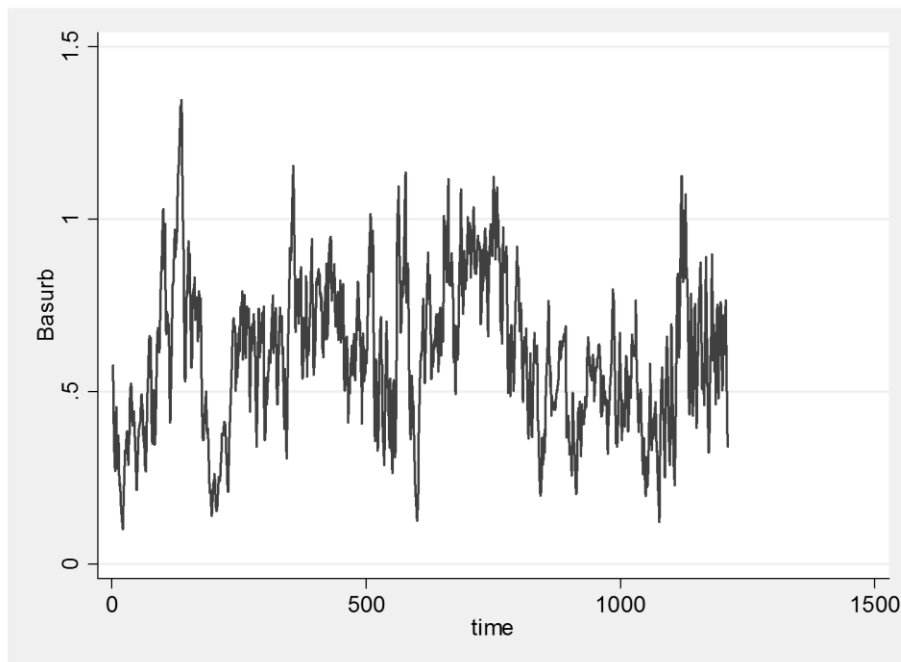
Una vez realizada la estimación de los modelos, fue posible utilizar los parámetros estimados para el cálculo de las varianzas y correlaciones condicionales de cada activo. Esto, mediante el procedimiento explicado al final del capítulo anterior, permitió la obtención de las betas condicionales. A continuación se presentan gráficamente los resultados de esta estimación.

Gráfica 4.1
Evolución diaria de la beta condicional de ALSEA, 2008–2012



Gráfica 4.2

Evolución diaria de la beta condicional de ASURB, 2008-2012



Gráfica 4.3

Evolución diaria de la beta condicional de CEMEXCPO, 2008-2012

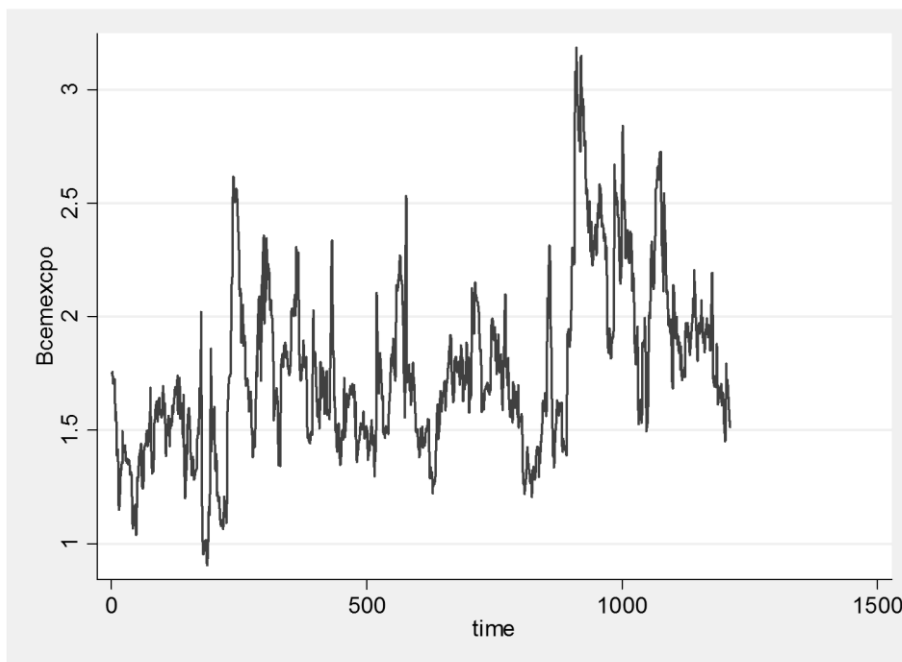


Gráfico 4.4

Evolución diaria de la beta condicional de ELEKTRA, 2008-2012

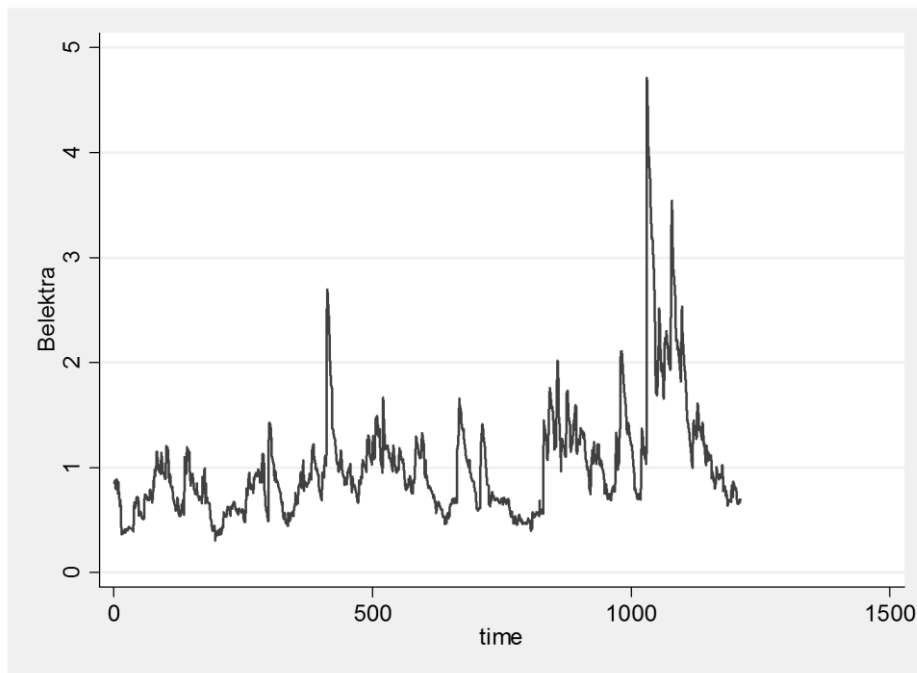


Gráfico 4.5

Evolución diaria de la beta condicional de GFNORTEO, 2008-2012

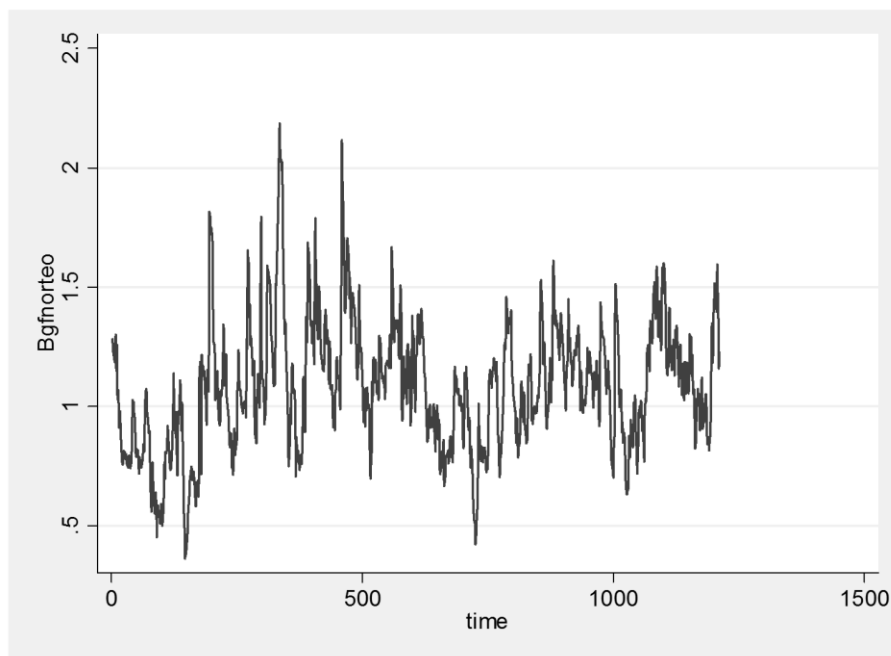


Gráfico 4.6
Evolución diaria de la beta condicional de GMODELLOC, 2008-2012

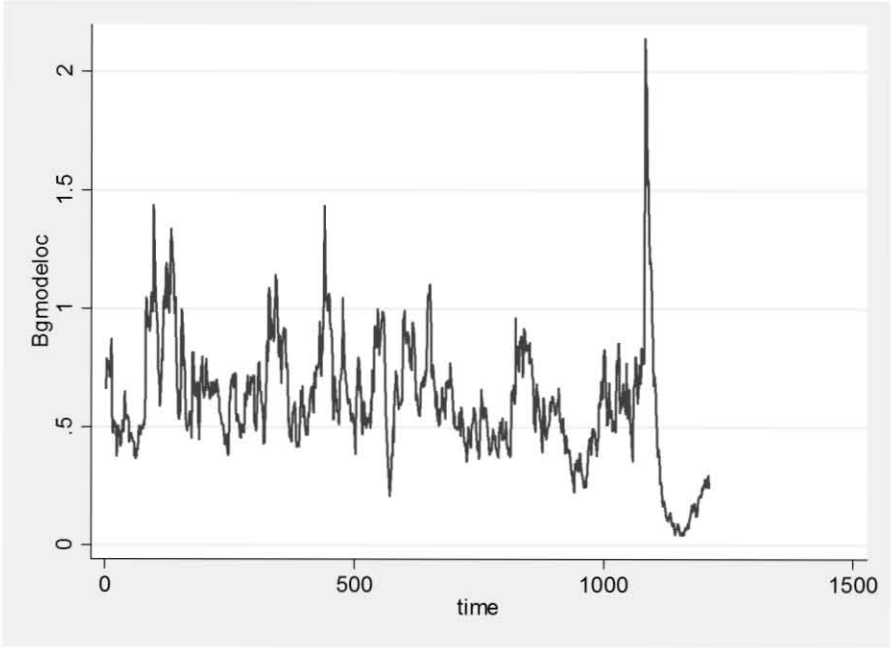


Gráfico 4.7
Evolución diaria de la beta condicional de HOMEX, 2008-2012

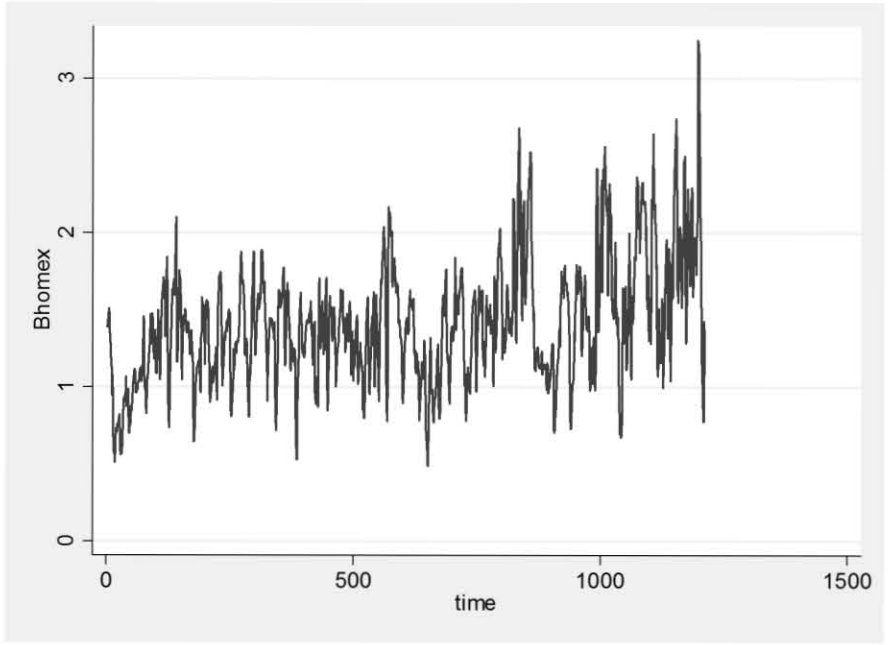


Gráfico 4.8
Evolución diaria de la beta condicional de ICA, 2008-2012

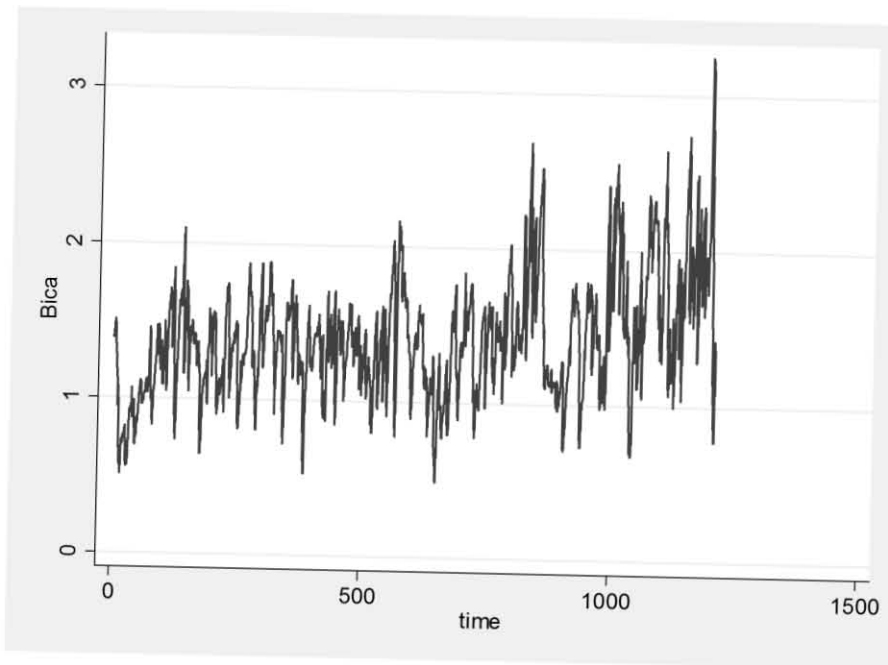


Gráfico 4.9
Evolución diaria de la beta condicional de ICHB, 2008-2012

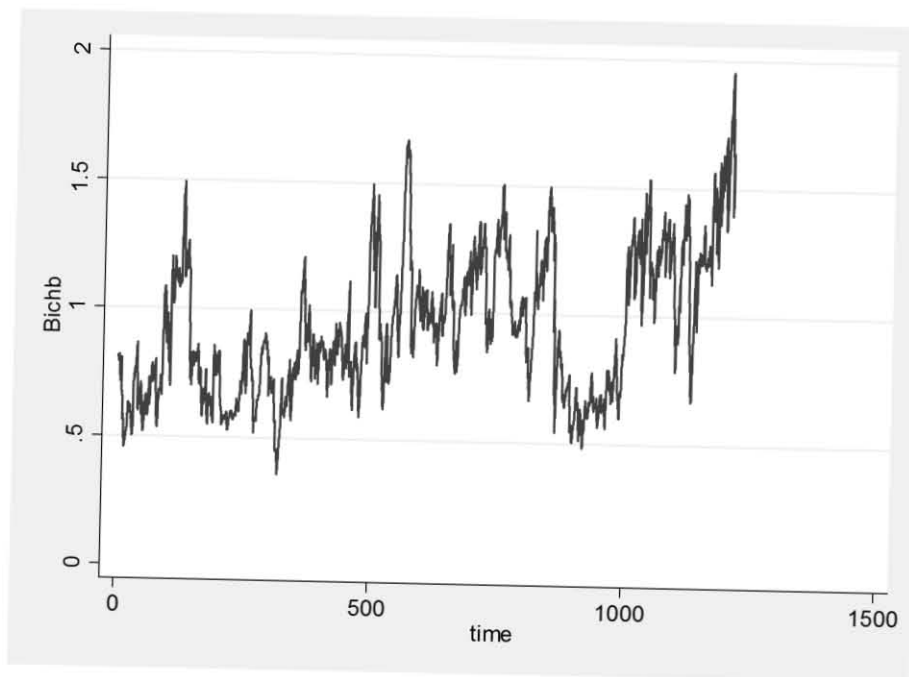


Gráfico 4.10

Evolución diaria de la beta condicional de TLEVISACPO, 2008-2012

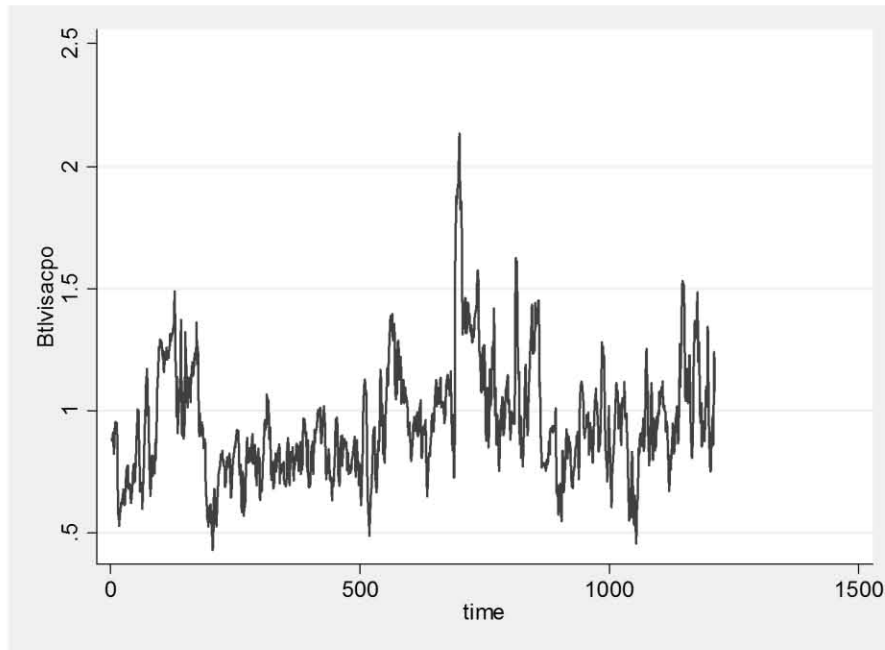
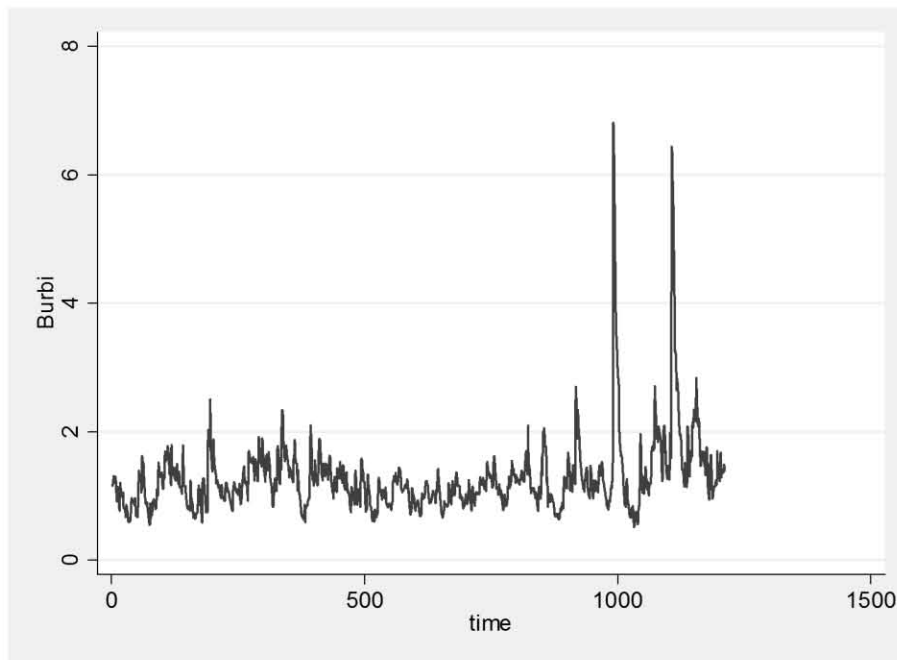


Gráfico 4.11

Evolución diaria de la beta condicional de URBI, 2008-2012



En general, se observa que las betas condicionales de las 11 acciones para las cuales fue posible la estimación de las mismas, presentan un comportamiento considerablemente errático a lo largo del periodo. Por otra parte, es preciso recalcar que la mayoría de ellas oscila alrededor de 1, hecho que no debería resultar sorprendente, puesto que estas acciones están comprendidas en el Índice de Precios y Cotizaciones, por lo que su comportamiento debe ser, en mayor o menor grado, representativo del presentado por el mercado.

Sobresale sin duda alguna, el caso de la beta condicional de ELEKTRA, misma que alcanza un pico cercano a 5. Una beta de 5 es inherente a un activo extremadamente riesgoso, puesto que por cada variación que ocurra en el mercado, el activo reflejará el mismo cambio, pero multiplicado por 5. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el modelo arrojó un coeficiente no significativo en la ecuación de correlaciones de ELEKTRA. Por ello, deben guardarse enormes reservas cuando se analicen los postulados que esta investigación arroje acerca de esta serie accionaria.

Otros activos que alcanzan altos niveles de volatilidad son HOMEX e ICA, los cuales al final del periodo presentan valores de beta por encima de 3. Por su lado, CEMEXCPO también presenta una volatilidad elevada, e incluso con mayor frecuencia que las otras series accionarias. Pero ninguna de las acciones consideradas en la investigación alcanza los valores de beta condicional que URBI llega a tener: por encima de 6. Es curioso que estas 4 empresas, además de los esporádicos periodos de alta volatilidad, tienen en común que su giro está de una u otra manera relacionado con la construcción: HOMEX y URBI son desarrolladores de proyectos residenciales, mientras que ICA se desenvuelve principalmente como contratista en proyectos de desarrollo de infraestructura. CEMEX por su parte, es productor de un bien industrial indispensable para la construcción: el cemento. ¿Qué tanto puede sostenerse esta aseveración? Es una pregunta que estará vigente para futuras investigaciones.

Destaca, además, el comportamiento de la beta condicional de GMODELOC., la cual presenta un mínimo muy cercano a 0 casi al final del periodo de estudio. Esto implica que por alguna razón, la acción del grupo cervecero se tornó altamente segura en 2012, puesto que una beta de tan bajo valor representa una relativa inmunidad ante los movimientos experimentados por el mercado accionario.

Estas gráficas, junto con los resultados de la estimación de los parámetros de las ecuaciones de varianzas y correlaciones condicionales de los distintos modelos VC-MGARCH(1,1) estimados como parte de este trabajo, demuestran lo que la tesis se proponía en un principio: que la volatilidad en el mercado accionario mexicano es cambiante en el tiempo. Por supuesto, esta conclusión no está exenta de duda, principalmente debido a la imposibilidad del cálculo del modelo para algunos activos, además de la mala especificación realizada de las ecuaciones de media condicional.

Conclusiones

La hipótesis planteada en esta tesis, a saber, que la volatilidad de los rendimientos de los activos financieros (medida por las betas de los activos) no es fija, sino que sigue un comportamiento dinámico, es confirmada por los resultados presentados en el último capítulo.

Los coeficientes de las ecuaciones de varianzas y correlaciones condicionales son todos estadísticamente significativos al nivel de confianza establecido (90%), lo que señala que el planteamiento realizado para estas ecuaciones resulta adecuado para el modelaje de la volatilidad, al menos para el periodo y variables utilizadas en el estudio. Los activos analizados muestran una correlación positiva con el portafolio de mercado (que está representado por el Índice de Precios y Cotizaciones), como muestran los coeficientes de correlación medios estimados por el modelo.

Hay sin embargo, una excepción: la ecuación de correlaciones condicionales para la serie accionaria ELEKTRA. Corresponde a futuras investigaciones estudiar detenidamente las potenciales explicaciones fundamentales o estadísticas para esta aberración en el modelo.

Mientras las ecuaciones modeladas mediante el modelo GARCH multivariado con correlaciones condicionales variables arrojan resultados consistentes, el modelo VAR que se utilizó para estimar las ecuaciones de media condicional resulta inadecuado para el estudio de estas series de tiempo financieras. Los coeficientes estimados en estas ecuaciones carecen de significancia estadística, lo que sugiere que la especificación de la forma funcional para la media es errónea. Para investigaciones posteriores, convendría probar la estimación de las medias condicionales con modelos de otra naturaleza. Podría, por ejemplo, modelarse la media condicional mediante un modelo ARCH-M.

Las betas condicionales calculadas a partir de las ecuaciones estimadas mediante el modelo VC-MGARCH(1,1) de nuevo presentan evidencia a favor de la aceptación de la hipótesis sobre el comportamiento cambiante de la volatilidad en el mercado accionario mexicano. Las once gráficas presentadas en la última sección del cuarto capítulo permiten observar los numerosos cambios sufridos por la volatilidad de cada una de las series accionarias.

A grandes rasgos puede apreciarse que las series de volatilidad suelen oscilar alrededor de 1, lo que es consistente con el hecho de que estas acciones, al estar incluidas en el Índice de Precios y Cotizaciones, son representativas de los movimientos del mercado. Por otro lado, algunas series presentan picos o caídas considerables. Las series que alcanzan altos valores de volatilidad son HOMEX, ICA, ELEKTRA, y CEMEXCPO. Sin embargo, los resultados para ELEKTRA no pueden ser considerados concluyentes, puesto que un parámetro de la ecuación de correlaciones no es estadísticamente significativo, lo que indica que la beta calculada para esta serie podría poseer un sesgo considerable.

URBI presenta los valores de volatilidad más altos de entre todas las series dentro del periodo de tiempo considerado. Su gráfica permite observar dos grandes picos de volatilidad, que sobresalen dramáticamente del resto de la serie, que tiende a oscilar entre los valores de beta 1 y 2 durante la mayor parte del periodo. Futuras investigaciones deberán buscar explicaciones a comportamientos extremos en las betas condicionales, como los presentados en los casos de ELEKTRA y URBI.

Otro aspecto a considerar, es que tres de las series que se distinguen por alcanzar altos valores de beta durante el periodo, pertenecen al sector de la construcción: HOMEX, ICA (dedicada a proyectos de infraestructura, y URBI. Resultaría interesante considerar el cálculo de betas condicionales para índices sectoriales, y ver si efectivamente las empresas de este sector observan en conjunto una volatilidad elevada, o si estas 3 series representan un caso aislado. Otra manera de abordar este problema sería mediante la investigación de otras variables relacionadas con la construcción, además del precio de las acciones de las empresas constructoras. Es posible que la explicación a comportamientos de este tipo recaiga sobre la dinámica de otras variables económicas referentes al sector, tales como empleo o producción.

Es pertinente mencionar que aunque esta tesis es un estudio de la volatilidad desde la perspectiva del CAPM, en el sentido de que esta volatilidad es medida mediante las betas de los activos, no es un estudio empírico del Modelo de Valuación de Activos de Capital. Sin embargo, sí establece un precedente que hace posible un estudio de ese tipo en el futuro. Una forma de evaluar los efectos que sobre el CAPM tendrían los movimientos de las betas obtenidos a través del VC-MGARCH(1,1) hecho en este trabajo, sería calcular la

ecuación del CAPM para cada punto en el tiempo, de forma que se obtendrían los rendimientos teóricos que postula el modelo. Posteriormente, habría que comparar estos rendimientos teóricos con los rendimientos realizados durante el mismo periodo, para determinar mediante inferencia estadística si son iguales o distintos. Una investigación de tal índole permitiría esclarecer qué tan útil resulta la incorporación de betas dinámicas al CAPM.

Otro aspecto importante que conviene mencionar, es la utilización del Índice de Precios y Cotizaciones como el equivalente empírico del portafolio de mercado en el Modelo de Valuación de Activos de Capital. (Fama & French, The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, 2004) dedican la última parte de su artículo a reseñar la controversia acerca de la posibilidad de someter a prueba el CAPM, debido a la inexistencia de un elemento que satisfaga las características teóricas del portafolio de mercado. Por supuesto, esta tesis fue realizada bajo la hipótesis de que el IPC refleja verazmente los movimientos en el mercado accionario, y por tanto, constituye una adecuada variable *proxy* del portafolio de mercado.

La presente investigación utiliza un modelo de la familia GARCH. Los miembros de este grupo de modelos tiene características que permiten una descripción del comportamiento de las series de tiempo financieras mejor de la ofrecida por modelos de otra naturaleza. Se optó por la utilización del modelo GARCH multivariado con correlaciones variables debido a que garantiza una matriz de varianzas y covarianzas positiva definida (por lo que es preferible al modelo VECH de (Bollerslev, Engle, & Wooldridge, A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances, 1988). Otro motivo por el cual se seleccionó este modelo es su relativa parsimonia en cuanto al número de parámetros, lo que lo vuelve superior al modelo BEKK de (Engle & Kroner, Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, 1995). Además, como lo muestra el presente trabajo, el permitir a las correlaciones variar en el tiempo permite capturar efectos que el modelo de correlaciones constantes de (Bollerslev, 1990) no logra explicar.

El trabajo realizado es el primer experimento empírico sobre el modelo VC-MGARCH de (Tse & Tsui, 2002) realizado con datos del mercado mexicano, por lo que la tesis marca un preámbulo para futuros estudios. De ninguna manera los resultados ofrecidos son

definitivos. Es necesario realizar futuros estudios que pongan a prueba las conclusiones y postulados de éste y otros trabajos relacionados, de forma que podamos avanzar, como disciplina, hacia un mejor entendimiento de los mercados financieros.

Bibliografía

- Adcock, C., & Clark, E. (1999). Beta lives - some statistical perspectives on the capital asset pricing model. *The European Journal of Finance*, 5(3), 213-224.
- Ali, M. H., Islam, S., & Chowdhury, M. M. (2010, noviembre-diciembre). Test of CAPM in Emerging Stock Markets: A study on Dhaka Stock Exchange. *The Cost and Management*, 34-41.
- Bachelier, L. (1900). *The Theory of Speculation*. (D. May, Trans.)
- Best, M. J. (2010). *Portfolio Optimization*. Londres: CRC Press.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 307-327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *Review of Economics & Statistics*, 72(3), 498-505.
- Bollerslev, T. (2011). Glossary to ARCH (GARCH). In T. Bollerslev, J. Russell, & M. Watson (Eds.), *Volatility and Time Series Econometrics. Essays in Honor of Robert F. Engle*. .
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1).
- Bolsa Mexicana de Valores. (2012). Informe Anual 2011.
- Bolsa Mexicana de Valores. (2012, Noviembre 30). Pesos Relativos Oficiales de Inicio. *Rebalanceo de los Pesos Relativos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)*.
- Bowerman, B., & O'Connell, R. T. (2006). *Pronósticos, Series de Tiempo y Regresión. Un enfoque Aplicado*. Cengage: THOMSON.
- Brooks, C. (2002). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge.

- Brun, J., & Moreno, M. (2008). *Análisis y selección de inversiones en mercados Financieros*. Barcelona: Bresca Editorial.
- Buchanan, M. (2013). *Forecast*. Nueva York: Bloomsbury.
- Campbell, J., Lo, A., Adamek, P., & Viceira, L. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.
- CNN. (2013, Enero 7). La BMV toca nuevo máximo histórico. *Expansión*.
- Cochrane, J. H. (2005). *Asset Pricing*. Princeton: Princeton University Press.
- Del Castillo-Spíndola, J. (2006). A non-parametric test of the conditional CAPM for the Mexican economy. *Estudios Económicos*(21), 275-297.
- Dobbins, Witt, & Fielding. (1994). *Portfolio Theory and Investment Management* (2da ed.). Oxford: Blackwell.
- Engel, C., & Rodrigues, A. P. (1989, abril-junio). Tests of International CAPM with Time-Varying Covariances. *Journal of Applied Econometrics*, 4(2), 119-138.
- Engle, R. (1982, Julio). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), pp. 987-1007.
- Engle, R. F., & Kroner, K. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11, 122-150.
- Engle, R. F., Lilien, D. M., & Robins, R. P. (1987, marzo). Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The Arch-M Model. *Econometrica*, 55(2), 391-407.
- Errunza, V., & Losq, E. (1985, marzo). International Asset Pricing under Mild Segmentation: Theory and Test. *The Journal of Finance*, 40(1), 105-124.
- Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25-46.
- Fama, E. F., & MacBeth, J. D. (1973, mayo - junio). Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 607-636.

- Godeiro, L. L. (2013). Testing the CAPM for the Brazilian Stock Market Using Multivariate GARCH between 1995 and 2012. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 3(2), 253-275.
- Gómez Monge, R. (2004, noviembre). Análisis de la rentabilidad de la Bolsa Mexicana de Valores mediante del modelo de Capital Asset Pricing Model (CAPM), 1988-2003. *Realidad Económica*(18).
- Grupo BMV. (11 de abril de 2012). *Nota Metodológica del Índice de Precios y Cotizaciones*. Bolsa Mexicana de Valores. México: Grupo BMV.
- Gujarati, D., & Porter, D. C. (2010). *Econometría*. México: McGraw Hill.
- Guzmán Plata, M. d. (1998). Los modelos CAPM y ARCH-M. Obtención de los coeficientes beta para una muestra de 33 acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores. *Economía Teoría y Práctica*(9).
- Hafner, C., & Herwartz, H. (1998). Time varying market price of risk in the CAPM approaches, empirical evidence and implications. *Revue de l'Association Francaise de Finance*, 19, 93-112.
- Jensen, M. C., Black, F., & Scholes, M. S. (1972). The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. In M. C. Jensen, *Studies in the theory of capital markets*. New York: Praeger.
- Kroner, K., & Ng, V. (1993). *Modelling the Time Varying Comovement of Asset Returns*. University of Arizona and International Monetary Fund.
- Makridakis, S. (1988). *Forecasting: methods and applications*. Nueva York: Wiley.
- Mandelbrot, B. (1963, Octubre). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4), pp. 394-419.
- Markowitz, H. (1952, Marzo). Portfolio Selection. 7(1), 77-91.
- Md Isa, A., Puah, C.-H., & Yong, Y.-K. (2008). Risk and Return Nexus in Malaysian Stock Market: Empirical Evidence from CAPM. Universiti Malaysia Sarawak.

- Qian, E. E., Hua, R. H., & Sorensen, E. H. (2007). *Quantitative Equity Portfolio Management. Modern Techniques and Applications*. Londres: Chapman & Hall / CRC.
- Sánchez Vargas, A., & Reyes Martínez, O. (2006, julio-octubre). Regularidades probabilísticas de las series financieras y la familia de modelos GARCH. *Ciencia Ergo Sum*, 13(2), 149-156.
- Sansores Guerrero, E. (2008). El modelo de valuación de activos de capital aplicado a mercados financieros emergentes. El caso de México 1997-2006. *Contaduría y Administración*(226).
- Sharpe, W. (2000). *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw Hill.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series* (2nd ed.). Hoboken: Wiley-Interscience.
- Tse, Y., & Tsui, A. (2002, Julio). A multivariate GARCH model with time-varying correlations. *Journal of business & Economic Statistics*, 20(3), 351-362.
- Varian, H. R. (2006). *Microeconomía Intermedia* (7a ed.). Barcelona: Antoni Bosch.
- Wang, K. Q. (2003, febrero). Asset Pricing with Conditioning Information: A New Test. *The Journal of Finance*, 58(1), 161-196.
- Weston, J., & Copeland, T. (1992). *Finanzas en Administración* (8 ed., Vol. 1). (J. Gómez Mont, Trans.) México: Mc Grall Hill.
- Yang, X., & Xu, D. (2006). Testing the CAPM Model - A study of the Chinese Stock Market. UMEA University.