

U . N A M

D. E. P. F. I.

" TEORIAS DEL CONTROL OPTIMO "

MAESTRÍA EN INGENIERÍA (CONTROL)

MARINO SANCHEZ PARRA

Julio de 1984.

T. UNAM
1984
SAN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE GENERAL

- CAPITULO I TEORIA CLASICA.
- CAPITULO II LA PROGRAMACION DINAMICA Y EL
CALCULO DE VARIACIONES.
- CAPITULO III ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN.
- CAPITULO IV TEORIA DEL REGULADOR CON FUNCIONAL
CUADRATICA.
- CAPITULO V EL PRINCIPIO DEL MAXIMO.
- CAPITULO VI TEORIA DE KALMAN-CARATHEODORY PARA
EL CONTROL OPTIMO.

REFERENCIAS.

0906

INTRODUCCION

Teorías del Control Óptimo, es el título del presente trabajo cuyo objetivo principal es el de mostrar un panorama general de teorías diferentes que, habiendo aparecido en diversas épocas históricas, conducen a resultados equivalentes, resaltando la consistencia de tales equivalencias.

Para lograr el objetivo señalado se elaboraron seis capítulos siendo su contenido el siguiente:

En el Capítulo I se resumen los resultados principales de la Teoría Clásica del Cálculo de Variaciones, definiéndose los problemas de Lagrange, Mayer y Bolza. A continuación, en el Capítulo II se expone la Optimización del Control por Programación Dinámica y el Principio de Optimalidad de Bellman, obteniéndose los resultados del Cálculo de Variaciones al aplicar la ecuación funcional de la Programación Dinámica. En el Capítulo III se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi usando la Programación Dinámica por lo que se le llama ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. La teoría del regulador con funcional cuadrática se expone en el Capítulo IV y se desarrolla bajo dos enfoques diferentes que conducen a los mismos resultados, que son: La teoría del Cálculo de Variaciones y la Programación Dinámica. En el Capítulo V se resume la teoría de Pontryagin que bajo el nombre de " Principio del Máximo " establece la solución al problema de control óptimo. Por último en el Capítulo VI se resume un trabajo elaborado por R. Kalman quien usando la teoría de Carathéodory, resuelve el problema del regulador con funcional cuadrática haciendo aportaciones de gran valor.

Los capítulos se estructuraron de tal forma que cada uno contiene:

- i) una introducción, en donde se explica a grandes rasgos el contenido.
- ii) Los detalles del contenido, como lo son las definiciones, desarrollos, etc.
- iii) Las conclusiones, orientadas a mostrar la relación con las otras teorías haciendo énfasis en sus posibles ventajas y/o desventajas.

Para elaborar el trabajo se consultaron (con diversos grados de profundidad) las referencias señaladas al final.

Ciudad Universitaria, D. F., Julio de 1984.

Marino Sánchez Parra.

Tesis
Control
(Ing. Eléctrica)

C A P I T U L O I

T E O R I A C L A S I C A

Contenido

- 1.- INTRODUCCION.
- 2.- RESUMEN DE LA TEORIA CLASICA DEL
CALCULO VARIACIONAL.
- 3.- PROBLEMA ISOPERIMETRICO.
- 4.- PROBLEMAS DE MAYER Y BOLZA.
- 5.- CONCLUSIONES.

I. Introducción.

El objetivo del capítulo es el de presentar en forma resumida los resultados fundamentales del Cálculo de Variaciones que propiamente tiene su inicio al final del Siglo XVII cuando I. Bernoulli formuló el problema de la Braquistócrona. En principio se mencionan las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange para una funcional con bordes fijos; luego se generaliza el problema considerando el caso de bordes móviles, estableciéndose las condiciones de transversalidad. A continuación se mencionan las condiciones suficientes de extremo: las condiciones de Jacobi, Weierstrass, y de Legendre, respectivamente. Enseguida se pasa a un breve análisis que conduce al establecimiento de la ecuación de Hamilton-Jacobi, [6].

Para terminar el capítulo, se describe brevemente el Problema Isoperimétrico, después el Problema de Lagrange y por último los problemas de Mayer y de Bolza [4], definiéndose éste último [7]. La parte dedicada a conclusiones está orientada fundamentalmente a comentar la relación de algunos de los aspectos mencionados con los tratamientos (teorías) que se expondrán posteriormente.

2. Resumen de la Teoría clásica del Cálculo Variacional.

Las extremales, funciones continuas que hacen extremo el valor de la funcional

$$\text{(con } y \in \mathbb{R}^n\text{), } y' = \frac{dy}{dx} \quad J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

necesariamente satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}(F_{y'_i}) - F_{y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Problemas con fronteras o bordes móviles. Si

en la funcional (1) se considera que los puntos de borde $(x_0, y(x_0))$ y $(x_1, y(x_1))$ se pueden desplazar, entonces se deberá considerar

$$1) \quad [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=x_1} = 0 \quad (3.1)$$

donde $y_1 = \varphi(x_1)$ es la curva a lo largo de la cual se desplaza el punto $(x_1, y(x_1))$. También:

$$ii) \quad [F + (\psi' - y') F_{y'}]_{x=x_0} = 0 \quad (3.2)$$

donde $y_0 = \psi(x_0)$ es la curva de desplazamiento del borde inicial $(x_0, y(x_0))$.

(3.1) y (3.2) son LAS CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD.

Condiciones Suficientes de Extremo:

$$a) \text{ La ecuación } (F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'})u - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} u') = 0 \quad (4)$$

$$\text{donde } u = \partial Y(x, c) / \partial c \quad (4.1)$$

(siendo $y(x, c)$ una familia de curvas paramétricas) establece la CONDICION DE JACOBI

b) **CONDICION DE WEIERSTRASS.** Si en la funcional (1) se cumple la condición de Jacobi, entonces la curva extremal C que pasa por los puntos $(x_0, y(x_0))$ y $(x_1, y(x_1))$ puede ser incluida en un campo central con inclinación $p(x, y(x))$. Entonces se define la función $E(x, y, y', p)$ tal que

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p) \quad (5)$$

llamada Función de Weierstrass, sea

$$E \geq 0 \quad (5)$$

para que la funcional (1) tenga un mínimo en la curva C.

c) **CONDICION DE LEGENDRE.** Debido a que el estudio del signo de la función E causa serias dificultades, la condición (6) se puede reemplazar por la condición equivalente:

$$F_{y'y'} \geq 0 \quad (7)$$

llamada "condición de Legendre". La interpretación de (7) se logra como se muestra en el cuadro siguiente. [6] p. 369.

Para un	la condición	se puede sustituir por:	observación
mínimo débil	$E \geq 0$	$F_{y'y'} > 0$	En la extremal C.
mínimo fuerte	$E^B \geq 0$	$F_{y'y'} \geq 0$	En puntos $(x, y(x))$ próximos a C

Ecuación de Hamilton-Jacobi (problema variacional).

a) Ecuaciones Canónicas. Para derivar la Ecuación de Hamilton-Jacobi, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtendrá su forma canónica; luego, y a partir de éstas se obtendrá la formulación de H-J.

Sea x una variable independiente real e y un vector, $y \in \mathbb{R}^n$.

$$J = J(x, y, y') = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

Considérese el problema de minimizar J. Planteando las ecs. de Euler

Lagrange:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

llamando

$$q_k = F_{y'_k}, \quad k=1, \dots, n$$

resulta de (8): $\frac{dq_k}{dx} = \frac{d}{dx} F_{y'_k} = F_{y_k}$ (9)

calculando las y'_k en función de x, y, q_i : $y'_k = y'_k(x, y_i, q_i) \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n \end{matrix}$

definiendo

$$H(x, y_i, q_i) = \sum_{j=1}^n y'_j q_j - F(x, y_i, q_i) \quad (10)$$

es inmediato que

$$\left. \begin{aligned} y'_j &= \partial H / \partial q_j \\ q'_j &= - \partial H / \partial y_j \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} j=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \quad (11)$$

Las ecuaciones (11) se llaman forma canónica ó forma Hamiltoniana de las ecs. de Euler-Lagrange. Esto es debido a la analogía con las ecs. de Hamilton de la mecánica.†

b) Transformaciones Canónicas. Ecuación de Hamilton-Jacobi.

Considérense las transformaciones $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T: \{y_i, q_i\} \rightarrow \{\alpha_i, \beta_i\}$ (12)

Definición. Sea la transformación T descrita en (12), donde

$$q_i = q_i(\alpha, \beta), \quad y_i = y_i(\alpha, \beta) \quad i=1, \dots, n; \quad \text{con } \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

entonces se dice que la transformación es canónica, de $\{y, q\}$ a $\{\alpha, \beta\}$ si -- las nuevas variables satisfacen las ecs. de Hamilton transformadas

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dx} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i} & i=1, \dots, n \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} & i=1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

la función $\bar{H} = \bar{H}(\alpha_i, \beta_i, x)$ se denomina Hamiltoniano del Sistema Transformado.

TEOREMA: La condición necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica, es que $T: \{y, q\} \rightarrow \{\alpha, \beta\}$ satisfaga

$$\left[\sum_{i=1}^n q_i y_i' - H(x, y, q) \right] - \left[\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i' - \bar{H}(x, \alpha, \beta) \right] = \frac{dS}{dx} \quad (14)$$

donde S se llama función generatriz y puede escribirse de una de cuatro formas

- 1) $S = S(q, \beta, x)$ en cuyo caso $y_i = -\partial S / \partial q_i$ $\alpha_i = \partial S / \partial \beta_i$
- 2) $S = S(y, \beta, x)$ " " " $q_i = \partial S / \partial y_i$ $\alpha_i = \partial S / \partial \beta_i$
- 3) $S = S(q, \alpha, x)$ " " " $y_i = -\partial S / \partial q_i$ $\beta_i = -\partial S / \partial \alpha_i$ (15)
- 4) $S = S(y, \alpha, x)$ " " " $q_i = \partial S / \partial y_i$ $\beta_i = -\partial S / \partial \alpha_i$

y además
$$\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial x} \quad (16)$$

La virtud de este teorema radica en la posibilidad de transformar las coordenadas (y los momentos generalizados) de un sistema en otras donde cumplan -- con alguna condición.

c) Ecuación de Hamilton*Jacobi. Supóngase ahora que en el problema variacional se efectúa un cambio de variable tal que tenga la forma (9); de las --

ecs. (15): $S = S(y, \beta, x), \quad q_i = \frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad \alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i} \quad i=1, \dots, n$

y de acuerdo a (16): $\bar{H} = H + \frac{\partial S}{\partial x}$

Si se impone la condición $\bar{H} \equiv 0$ (coordenadas cíclicas) $\Rightarrow H(y_i, \frac{\partial S}{\partial y_i}, x) + \frac{\partial S(y, \beta, x)}{\partial x} = 0$

se obtiene
$$H(y, \frac{\partial S}{\partial y}, x) + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

La ec. dif. (17) se satisface con una función S (función generatriz); depende de n+1 variables: x, y1, y2, ..., yn y se denomina Ecuación de Hamilton-Jacobi.

† También son llamadas (en [13]-Cap.5)⁴ "Ecs. Canónicas de Euler-Lagrange".

3.- Problema Isoperimétrico

Se llama Problema Isoperimétrico a aquel que establece que la integral definida de F se minimice mientras que al mismo tiempo una segunda integral definida dependiente de $y(x)$ o $y'(x)$ tome un cierto valor C. Consecuentemente, el conjunto de curvas admisibles está limitado a las curvas que satisfacen

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = C \quad (1)$$

El problema puede tener otro tipo de condiciones de borde. Por ejemplo, en el caso multidimensional en el que se dan n funciones $y_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$; una condición de borde típica especifica alguna relación del tipo

$$G(x; y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) = 0 \quad (2)$$

en este caso el problema ya no es del tipo simple, siendo conocido como EL PROBLEMA DE LAGRANGE.

Los valores admisibles de $y(x)$ o $y'(x)$ pueden ser limitados en cada valor de x por restricciones de desigualdad, como

$$h_1(y(x)) \leq g_1(x) \quad (a)$$

$$h_2(y'(x)) \leq g_2(x) \quad (b)$$

$$h_3(y(x), y'(x)) \leq g_3(x) \quad (c)$$

4.- Problemas de Mayer y Bolza.

Otra forma de enunciar el problema es cuando una función de control $u(t) \in R^m$, $t \geq t_0$, determina un conjunto de n funciones $x(t) \in R^n$, definidas para $t \geq t_0$, por las ecuaciones diferenciales $\dot{x}(t) = f(x, u)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.

Se llamará trayectoria controlada a cualquier conjunto de funciones $x(t)$ correspondiente a alguna función de control $u(t)$. En el Problema de Mayer se escoge tal que una función $\Phi(x, t)$ tome su valor extremo cuando es evaluada en un tiempo final T, donde T se determina implícitamente al satisfacer el conjunto de condiciones terminales $\Psi_j(x, t)$, $j=1, 2, \dots, p \leq n$.

Tal problema se llama "problema de control terminal" ya que el criterio central establece que una función Φ es evaluada en el tiempo terminal T. En la terminología clásica este caso es un PROBLEMA DE MAYER.

Finalmente, cuando se combinan ambos tipos de criterios, el de la integral y el terminal, se tiene el problema llamado PROBLEMA DE BOLZA. Es conveniente establecer la siguiente definición: Se llama Problema de Bolza al de determinar una función de control $u(t; x)$ tal que haga extremo el valor del funcional de evolución en tiempo final $t_f \in T$, fijo o variable, dependiendo de T y del estado final $x(T)$, de la forma:

$$J[x, u] = \varphi[x(T), T] + \int_{t_0}^T F(t, x, u) dt \quad (1)$$

sujeto a que $x(t)$ y $u(t)$ satisfagan las ED de ligazón de la dinámica (SDO en general no-autónomo) con condiciones de valores iniciales $x(t_0) = x_0: \dot{X} = f(t, x, u)$
 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$), con las hipótesis de φ y F continuas y derivadas parciales continuas.

Las condiciones necesarias para que $u^*(t, x)$ sea extremante del funcional de costo general (1) con $t_f = T$ fijo, es que con la función Hamiltoniana con n multiplicadores $\lambda_i(t)$

$$\mathcal{H}(t, x, u) \triangleq -F(t, x, u) + (\lambda \cdot f) \quad (\lambda \in (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T)$$

se cumplen
$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} \right)_{u_i = u_i^*} = 0, \quad \dot{\lambda}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad \lambda_k(T) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)_{t=T}$$

5.- Conclusiones.

La funcional (1.1) corresponde al llamado "problema simple del cálculo de variaciones". En el caso de las Condiciones de Transversalidad se -- consideró el desplazamiento de un punto a lo largo de una curva; la generalización dimensional de este caso corresponde a una hipersuperficie, por lo -- que las ecs. (1.3.1) y (1.3.2) son generalizables, como se verá en el Cap. V al analizar la Teoría de Pontryagin.

También se vió como poner el problema variacional en términos de -- la formulación canónica Hamiltoniana, y esta última como el problema de re-- solver la ec. (1.17) de Hamilton-Jacobi.

En el Cap. VI se verá que al considerarse la funcional de Bolza y el Lema de Carathéodory (Teoría de Kalman-Carathéodory) para el control ópti-- mo, se obtiene como consecuencia la condición de Weierstrass.

Respecto a la teoría de H-J, en el Cap. III se obtendrá la ec. del mismo nombre usando el método de la Programación Dinámica de Bellman y poste-- riormente, en el Cap. VI, al aplicar el Lema de Carathéodory con la funcio-- nal de Bolza (ec. VI-(4.7)).

El Sistema Hamiltoniano de ecs. se deducirá en el Cap. IV al anali-- zar el problema del regulador y también en el Cap. V como resultado de la -- formulación del Teorema 1 en la Teoría de Pontryagin.

Por último, motivado por el enfoque de la Programación Dinámica, -- en el problema isoperimétrico considérese que (sección 3), al valor de y co-- rrespondiente a una x se le llamará "estado" y a la y la "decisión".

C A P Í T U L O I I

LA PROGRAMACION DINAMICA Y EL CALCULO DE VARIACIONES.

Contenido

- 1.- Introducción.
- 2.- Procesos de control de etapas múltiples.
- 3.- El Principio de Optimalidad.
- 4.- Formulación matemática. Proceso determinístico discreto.
- 5.- Formulación del problema de extremo en Programación Dinámica y el Cálculo de Variaciones.
- 6.- Conclusiones.

1.- Introducción.

Considérese un sistema el cual es descriptible a través de un conjunto numerable de estados discretos x_i , $i= 1,2,\dots$ y de un conjunto numerable de funciones de control: u_i , $i= 1,2,\dots$; además, el sistema evoluciona según la ley

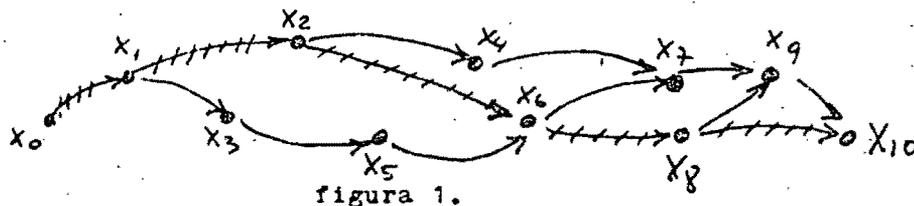
$$X_{k+1} = f(X_k, u_k) \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Para que la relación (1) se satisfaga, es necesario que dos etapas cualesquiera x_i, x_j , posean la propiedad de transición $i \rightarrow j$, si siendo $x_i = x_k$, entonces existe u_k tal que

$$X_j = X_{k+1} = f(X_k, u_k) = f(X_i, u_k) \quad (2)$$

para cada transición $x_i \rightarrow x_j$ existe un número real positivo J_{ij} , llamado costo de transición, denotándose en general por $J_{k,k+1}$ al costo de transición de estado $x_k \rightarrow x_{k+1}$.

En un proceso de control de etapas múltiples, sección 2, la transición $x_i \rightarrow x_j$ implica una serie de transiciones intermedias y sus correspondientes trayectorias, siendo una de éstas óptima en el sentido de hacer extremo el costo de transición J , figura 1.



Entonces el problema que se formula, enfocándolo como un problema de control, es: encontrar una sucesión de controles u_0, u_1, \dots, u_n tal que se pueda transitar desde un estado x_0 hasta un estado x_n cualquiera, de forma que $X_1 = f(X_0, u_0)$, $X_2 = f(X_1, u_1)$, \dots , $X_N = f(X_{N-1}, u_{N-1})$.

$$\text{y } J_{QN} = \sum_{i=0}^{N-1} J_{i,i+1} \quad \text{sea mínimo} \quad (3)$$

respecto a la figura 1, supóngase que la trayectoria marcada es la óptima.

En un contexto general, el problema enunciado se podrá resolver aplicando el PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD, sección 3, el cual será utilizado para desarrollar la Teoría de la Programación Dinámica en una formulación que considera un Proceso Determinístico Discreto, sección 4. Posteriormente se aplicará la P.D. al análisis de problemas de decisión de etapas múltiples del tipo continuo, por lo que éstos serán caracterizados por medio de la ecuación funcional de la P.D., sección 5, y posteriormente se aplicará la ec. funcional para formular el problema de extremo en P.D. y así obtener la Ec. de Bellman-Dreyfus cuya aplicación, conjuntada con ciertas consideraciones, conducirá a la obtención de los resultados de la Teoría Clásica mostrados en el Cap. 1. Esto se desarrollará en la sección 3.

2.-Procesos de Control de Etapas Múltiples.

Considérese un proceso de distribución de etapas múltiples que posee algunos elementos comunes a una variedad de procesos que se presentan en el análisis matemático, como en el cálculo ordinario y el cálculo de variaciones, así como en campos aplicados como la Economía Matemática y en el estudio de los sistemas de Ingeniería de Control.

Primeramente se formulará el problema bajo un enfoque clásico que ilustrará algunas de las dificultades de esta aproximación. Para eliminar tales dificultades se introducirá la idea central del método, que consiste en incluir cualquier problema particular dentro de una familia de problemas similares.

Esto permitirá reemplazar el problema de maximización, originalmente multidimensional, por el problema de resolver un sistema de ecuaciones de recurrencia que impliquen funciones de menor dimensión.

Como una aproximación a la solución de un sistema de ecuaciones funcionales, se obtendrá una ecuación funcional simple, que es:

$$f(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))] \quad (1)$$

Al ser considerados procesos complejos, que impliquen un gran rango de aplicaciones, se discutirán procesos dependientes del tiempo derivándose algunas analogías multidimensionales de (1), provenientes de procesos de etapas múltiples que requieren de un gran número de decisiones.

Primero se considerará el caso sencillo de un proceso de una etapa. Supóngase que se tiene una cantidad X que se dividirá en dos partes, no negativas, y y $X-y$, obteniéndose de la primera cantidad y un retorno $g(y)$ y de la segunda un retorno $h(x-y)$. Si se desea realizar esta división de forma tal que se maximice el retorno total entonces se plantea el problema analítico de determinar el máximo de una función.:

$$R_1(x, y) = g(y) + h(x-y) \quad (2)$$

para toda y en el intervalo $[0, X]$. Supóngase que g y h son funciones continuas de X para toda $X > 0$, tal que el máximo siempre existirá.

Considérese ahora un proceso de dos etapas. Supóngase que el costo para obtener la cantidad $g(y)$, originalmente y , se reduce a ay , donde a es una constante entre 0 y 1 , $0 \leq a \leq 1$, y similarmente $X-y$ se reduce a $b(x-y)$, $0 \leq b \leq 1$, o sea el costo para obtener $h(x-y)$. Con el total restante, $ay + b(x-y)$, se repite el proceso. Hagamos

$$ay + b(x-y) = x_1 = y_1 + (x_1 - y_1) \quad (3)$$

para $0 \leq y_1 \leq x_1$ obténgase como resultado de esta nueva distribución el retorno $g(y_1) + h(x_1 - y_1)$ en la segunda etapa.

El retorno total para el proceso de dos etapas es:

$$R_2(x, y, y_1) = g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) \quad (4)$$

El retorno máximo se obtiene maximizando esta función de y y y_1 sobre la región bi-dimensional determinada por las desigualdades

$$\begin{aligned} \text{a. } & 0 \leq y \leq X \\ \text{b. } & 0 \leq y_1 \leq x_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Considérese ahora un proceso de N etapas donde repetiremos en sucesión N veces la anterior operación de distribución.

El retorno total del proceso de N etapas será entonces

$$R_N(x, y, y_1, \dots, y_{N-1}) = g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + \dots + g(y_{N-1}) + h(x_{N-1} - y_{N-1}) \dots \quad (6)$$

donde las cantidades obtenibles para la distribución subsecuente al final de la primera, segunda, ..., (N-1)-ava etapa están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= ay + b(x-y) \quad , \quad 0 \leq y \leq x \quad , \\ x_2 &= ay_1 + b(x_1 - y_1) \quad , \quad 0 \leq y_1 \leq x_1 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{N-1} &= ay_{N-2} + b(x_{N-2} - y_{N-2}) \quad , \quad 0 \leq y_{N-2} \leq x_{N-2} \quad , \\ & \quad 0 \leq y_{N-1} \leq x_{N-1} \end{aligned} \quad (6)$$

El retorno máximo se obtendrá maximizando la función R_N sobre la región N-dimensional en el espacio de las variables y, y_1, \dots, y_{N-1} , descrito por las relaciones en (6).

Aproximación a la Ecuación Funcional.-- Tomando como objetivo la preservación de la unidimensionalidad, procederemos como sigue. Obsérvese que en un proceso de N etapas el retorno total máximo depende solamente de N y de la cantidad inicial X . Entonces se define la función

$$f_N(x) = \text{Máximo retorno obtenido para un proceso de N etapas con condición inicial } X, \text{ para } N=1, 2, 3, \dots \text{ y } X \geq 0. \quad (7)$$

se tiene que

$$f_N(x) = \text{Max}_{\{y, y_1\}} R_N(x, y, \dots, y_{N-1}), \quad N=2, 3, \dots \quad (8)$$

con

$$f_1(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y)] \quad (9)$$

El primer objetivo es el de obtener una ecuación para $f_2(x)$ en términos de $f_1(x)$. Considerando un proceso de 2 etapas, vemos que el retorno total será igual al retorno de la primera etapa más el retorno de la segunda etapa, en la que se tiene una cantidad $ay + b(x-y)$ para ser distribuida. Es claro que cualquiera que sea el valor de y seleccionado inicialmente, la cantidad restante, --- $ay + b(x-y)$, se usará de la mejor forma posible para la etapa anterior, si se desea obtener una distribución que maximice 2 etapas.

La observación anterior es la clave del análisis matemático siguiente. Se notará que como resultado de una distribución inicial de y obtenemos un retorno total $f_1(ay + b(x-y))$ de la segunda etapa del proceso de dos etapas, si y_1 se escogió óptimamente. Consecuentemente, para el retorno total del proceso de dos etapas, resultante de la distribución inicial y , se tiene la expresión:

$$R_2(x, y, y_1) = g(y) + h(x-y) + f_1(ay + b(x-y)) \quad (10)$$

Si se escoge la y que da el máximo de esta expresión, entonces se obtiene la relación

$$f_2(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + f_1(ay + b(x-y))] \quad (11)$$

que conecta las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Usando la misma argumentación para el proceso de N etapas, se obtendrá la siguiente ecuación funcional:

$$f_N(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + f_{N-1}(ay + b(x-y))] \quad (12)$$

para $N \geq 2$, con $f_1(x)$ definida en (9).

Empezando con $f_1(x)$, determinada por (9), se usará (12) para calcular $f_2(x)$, la cual repite el proceso obteniéndose así $f_3(x)$ y así sucesivamente. En cada paso del cálculo obtenemos, no solamente $f_k(x)$, sino también $y_k(x)$ o sea la distribución óptima que se tomará al inicio de la k-ésima etapa del proceso, empezando con una cantidad X .

Entonces, la solución consiste de la tabulación de una secuencia de funciones $\{Y_k(x)\}$ y $\{f_k(x)\}$ para $X \geq 0$, $k=1,2,\dots$

Dada la secuencia de funciones $\{Y_k(x)\}$, la solución de un problema específico implicando una N dada y también una X dada, tiene la forma:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= Y_N(x) \\ \bar{Y}_1 &= Y_{N-1}(a\bar{Y} + b(x-\bar{Y})), \\ \bar{Y}_2 &= Y_{N-2}(a\bar{Y}_1 + b(x_1-\bar{Y}_1)), \\ &\vdots \\ \bar{Y}_{N-1} &= Y_1(a\bar{Y}_{N-2} + b(x_{N-2}-\bar{Y}_{N-2})) \end{aligned} \quad (13)$$

donde $(\bar{Y}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{N-1})$ es el conjunto de distribuciones que maximiza el retorno total de N etapas.

Comentario: Es importante hacer notar que se ha intentado resolver un problema de maximización que implica un valor particular de X y un valor particular de N , resolviendo primero el problema general que implica un valor arbitrario de X y un valor arbitrario de N . En otros términos, se ha incluido el problema original dentro de una familia de problemas similares. La principal ventaja que presenta esta aproximación es -- que un problema N -dimensional se ha convertido en una secuencia de N problemas unidimensionales.

3.- El Principio de Optimalidad.

En cada proceso, la ecuación funcional que lo gobierna se puede obtener mediante la aplicación de una idea intuitiva, formulada por R. Bellman [1], que se conoce como EL PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD y que se puede expresar de la siguiente forma:

"Una política óptima posee la propiedad de que cualesquiera que sean el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes constituirán una política óptima respecto al estado resultante de la primer decisión".

En términos de la Teoría del Control la frase "política óptima" del enunciado anterior corresponde a "política de control óptima" o "estrategia óptima de control".

4. Formulación Matemática. Proceso Determinístico Discreto.

Considérese ahora un proceso determinístico, lo que significa que el resultado de una decisión está determinado únicamente por la decisión, y supóngase que el estado del sistema, dependiente del tiempo, en cualquier etapa está descrito por un vector de dimensión N , $p = (p_1, \dots, p_N)$ restringido a una región D .

Sea $T = \{T_q\}$ donde cualquier q pertenece a un conjunto S el cual puede ser finito, enumerable, compuesto de una combinación de conjuntos de este tipo, T puede ser un conjunto de transformaciones con la propiedad de que $p \in D$ implica - que $T_q(p) \in D \quad \forall q \in S$.

El término discreto significa que se tiene un proceso consistente de un número finito o infinito-numerable, de etapas.

Primero se considerará el proceso finito. Entonces la estrategia consiste de una selección de N transformaciones ordenadas, $P = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ que dan sucesivamente la secuencia de estados

$$\begin{aligned} p_1 &= T_1(p) \\ p_2 &= T_2(p_1) \\ &\vdots \\ p_N &= T_N(p_{N-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

Estas transformaciones se escogen para maximizar una función R , del estado - final p_N .

Observe que el valor máximo de $R(p_N)$, determinado por una estrategia óptima, será función solamente del vector inicial p y el número de etapas N . Esto define a las funciones auxiliares básicas

$$f_N(p) = \text{Max}_P R(p_N) \quad (2)$$

= El retorno de la N -ésima etapa obtenida al empezar con el estado inicial y usando una estrategia óptima.

Esta secuencia está definida para $N = 1, 2, \dots$, y para $p \in D$.

Para resolver el problema original que implica un proceso de etapas múltiples (con un número finito de etapas, N), con vector inicial p , ahora se considerará todo el conjunto de problemas de maximización obtenidos de valores arbitrarios de p y de una cantidad arbitraria de etapas.

Entonces el proceso original ha sido incluido dentro de una familia de procesos similares; por lo que en vez de intentar determinar las características de una política óptima para un proceso aislado, se intentará deducir las propiedades comunes del conjunto de políticas óptimas de los miembros de la familia.

Para obtener una relación de recurrencia que conecte a los miembros de la secuencia $\{f_N(p)\}$, se empleará el Principio de Optimalidad. Supóngase que se selecciona alguna transformación T_q como resultado de la primer decisión, obteniéndose de esta forma un nuevo vector de estado $T_q(p)$; el retorno máximo de las siguientes $N-1$ etapas es, por definición, $f_{N-1}(T_q(p))$. Esto significa que si se desea maximizar el retorno total de las N etapas, deberá escogerse para maximizar estos $N-1$ retornos. El resultado da una relación de recurrencia básica.

$$f_N(p) = \text{Max}_{q \in S} f_{N-1}(T_q(p)) \quad (3)$$

para $N \geq 2$, con

$$f_1(p) = \text{Max}_{q \in S} R(T_q(p)) \quad (4)$$

Obsérvese que $f_N(p)$ es única, pero la q que maximiza no lo es necesariamente. Así se ha determinado el retorno máximo, pero pueden haber muchas políticas óptimas que den este retorno.

En el caso de un proceso no acotado, la secuencia $\{f_N(p)\}$ se reemplaza por una sola función $f(p)$, el retorno total obtenido al usar una política óptima a

partir del estado p y la relación de recurrencia se reemplaza por la ecuación funcional

$$f_1(p) = \text{Max}_q f(T_q(p)) \quad (5)$$

5.- Formulación del problema de extremo en Programación Dinámica y el Cálculo de Variaciones.

Inicialmente se considera el problema simple de extremos de funcionales. Se sigue el razonamiento de Bellman por el cual se reformula el Cálculo Variacional.

Se desea determinar la curva y que conecte a los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) tal que la integral a lo largo de la curva de una función dada $F(x, y, y')$ sea mínima.

A continuación se introduce la función $S(x, y)$ de las variables x e y por medio de la relación

$$S(x, y) = \min_{\{y\}} \int_{(x, y)}^{(x_1, y_1)} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

La condición es que $S(x_1, y_1) = 0$. Ahora se escribe la representación funcional

$$S(x, y) = \min_{y'} \left\{ F(x, y, y') \Delta + S(x + \Delta, y + y' \Delta) \right\} + o(\Delta) \quad (2)$$

que establece que el valor de la integral de cualquier punto (x, y) al punto final, es igual a la integral de x a $x + \Delta x$, más el mínimo valor de la integral del nuevo punto $(x + \Delta, y + y' \Delta)$ al punto final; escogiéndose la dirección inicial $y'(x)$ para minimizar la suma. Esta es una aplicación particular del Principio de Optimalidad. $o(\Delta)$ es el error asociado.

$$S(x, y) = \min_{y'} \left\{ F(x, y, y') \Delta + S(x, y) + \frac{\partial S}{\partial x} \Delta + \frac{\partial S}{\partial y} y' \Delta + \dots \right\} \quad (3)$$

haciendo que $\Delta \rightarrow 0$; en el límite se obtiene la Ecuación Diferencial Parcial

$$0 = \min_{y'} \left\{ F(x, y, y') + \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} \right\} \quad (4)$$

llamada de Bellman-Dreyfus. Esta es la EDP que se satisface por la función del valor óptimo.

$$-\frac{\partial S}{\partial x} = \min_{y'} \left[F(x, y, y') + y' \frac{\partial S}{\partial y} \right] \quad (5)$$

a) La Ecuación de Euler.

La ecuación (5.4) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$F_{y'} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$F + \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

diferenciando (1) con respecto a x da

$$\frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' = 0 \quad (3)$$

la diferenciación parcial de (2) con respecto a y da

$$F_y + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

estas dos últimas ecuaciones, combinadas con (1) dan la ecuación de Euler clásica del Cálculo de Variaciones.

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0 \quad (5)$$

b) La condición de Legendre.

Se ha usado el hecho de que la derivada de la función (5.4) es cero en el mínimo. El requisito adicional de que la segunda derivada de (5.4) con respecto a y' debe ser positiva, para dar un mínimo, conduce a la desigualdad:

$$F_{y'y'} > 0 \quad (1)$$

que es la condición de Legendre (fuerte) clásica del Cálculo de Variaciones.

c) La condición de Weierstrass.

Puesto que si se tiene un mínimo relativo la condición de Legendre no es suficiente para asegurar la existencia de un mínimo absoluto se debe de tener la desigualdad

$$F(x, y, y') + \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} \leq F(x, y, Y') + \frac{\partial S}{\partial x} + Y' \frac{\partial S}{\partial y} \quad (1)$$

para toda función $Y' = Y'(x, y)$,

$$F(x, y, Y') - F(x, y, y') + (Y' - y') \frac{\partial S}{\partial y} \geq 0 \quad (2)$$

la que, usando la ec. (5a.1) da

$$F(x, y, Y') - F(x, y, y') - (Y' - y') F_{y'} \geq 0 \quad (3)$$

NOTA: Comparar con las ecs. (5) y (6) de la página 3.

d) Generalizaciones.

Los argumentos expuestos anteriormente se pueden generalizar para considerar el caso de varias funciones $y_i(x)$, así como el caso donde se incluyen derivadas de mayor orden. Entonces:

$$F = F(x, y_1, y_2, \dots, y_m; y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$$

$$S = S(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))$$

siendo $y_1(x) = y_1$, $y_2(x) = y_2$, ..., $y_m(x) = y_m$

Seguendo el planteamiento de la sección 5, para obtener la ec. --

(5.4) ahora se obtiene la ecuación

$$0 = \min_{y_1, \dots, y_n} \left\{ F + \frac{\partial S}{\partial x} + \sum_{j=1}^n y_j' \frac{\partial S}{\partial y_j} \right\} \quad (1)$$

que proporcionan las ecuaciones

$$F_{y_i} + \frac{\partial S}{\partial y_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

$$F + \frac{\partial S}{\partial x} + \sum_{j=1}^n y_j' \frac{\partial S}{\partial y_j} = 0 \quad (3)$$

de estas ecuaciones, como en (a), se obtienen las ecuaciones: *Derivando primero respect a x:*

$$\frac{d}{dx} F_{y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial x} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_j} y_j' = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (4)$$

tomando derivadas parciales respecto a y_i ,

$$F_{y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_j'} \frac{\partial y_j'}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y_i} + \sum_{j=1}^n y_j' \frac{\partial^2 S}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial y_j} \frac{\partial y_j'}{\partial y_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (5)$$

obteniéndose así las ecs. de Euler-Lagrange del cálculo variacional:

$$\frac{d}{dx} F_{y_i} - F_{y_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (6)$$

si F es una función de derivadas de segundo orden (o mayores) el problema se reduce a uno que implique solamente derivadas de primer orden sujetas a restricciones, por medio de una simple sustitución y efectuándose la demostración de igual forma. Por ejemplo, si se desea minimizar

$$J(y) = \int_x^b F(y, y', y'', x) dx,$$

sobre todas las y que satisfacen $y(x) = y_1$, $y'(x) = y_2$, se introducen las nuevas variables: $y_1(x) = y(x)$, $y_2 = y'(x)$. Entonces se obtiene el problema de minimizar

$$J(y_1, y_2) = \int_x^b F(x; y_1, y_1', y_2) dx$$

con las restricciones $y_1' = y_2$, $y_1(x) = c_1$, $y_2(x) = c_2$.

e).- Problema Isoperimétrico en la formulación de Bellman.

Recuérdese la restricción clásica

$$\int_x^{x_1} G(x, y, y') dx = z \quad (1)$$

Dónde z es un valor fijo dado. Bellman considera a z variable de modo que el valor del mínimo ahora es una función dependiente de tres variables x, y, z .

Por lo que se tiene el problema de

$$S(x, y, z) = \min_{\{Y\}} \int_{(x,y)}^{(x,y)} F(x, y, y') dx \quad (2)$$

sujeto a la restricción (1) en el sentido generalizado de Bellman.

Estableciendo una analogía con

$$S(x, y, z) = \min_{y'} \left\{ F(x, y, y') \Delta + S(x+\Delta, y+y'\Delta, z - G(x, y, y') \Delta) \right\} \quad (3)$$

al desarrollar en serie de potencias

$$S(x, y, z) = \min_{y'} \left\{ F(x, y, y') \Delta + S(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial x} \Delta + \frac{\partial S}{\partial y} y' \Delta - G(x, y, y') \frac{\partial S}{\partial z} \Delta \right\}$$

y haciendo $\Delta \rightarrow 0$, en el límite se obtiene

$$0 = \min_{y'} \left\{ F(x, y, y') + \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} - G(x, y, y') \frac{\partial S}{\partial z} \right\} \quad (4)$$

que da

$$0 = F_{y'} + \frac{\partial S}{\partial y} - G_{y'} \frac{\partial S}{\partial z} \quad (5)$$

$$y \quad 0 = F + \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} - G \frac{\partial S}{\partial z} \quad (6)$$

al combinar la derivación de (5) con la derivación parcial de (6) respecto a y se obtiene

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \left(F - \frac{\partial S}{\partial z} G \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(F - \frac{\partial S}{\partial z} G \right) = 0 \quad (7)$$

la derivación parcial de (6) con respecto a z da los siguientes resultados:

$$0 = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} + y' \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} - G \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \text{CONSTANTE (MULTIPLICADOR DE Lagrange)} \quad (10)$$

f).- Multiplicador de Lagrange.

La ec. (e-7) es la ec. de Euler en la formulación que incluye al multiplicador de Lagrange. También se ha mostrado que $\frac{\partial S}{\partial z}$ es un multiplicador de Lagrange junto con el hecho, conocido también, de que es constante; es decir, que en el problema isoperimétrico es independiente de x.

g).- Condiciones naturales de frontera.

Supóngase que y(a) no está especificada. El valor inicial óptimo de y posee la propiedad de que el cambio en el valor mínimo de la integral al punto final (b, y(b)) causado por un cambio en el punto inicial y(a) es --

cero. De otra forma existirá un punto inicial mejor. Por consiguiente

$$\left. \frac{\partial S}{\partial y} \right|_{x=a} = 0 \quad (1)$$

o bien, por la ecuación (a-1)

$$\left. F_{y'} \right|_{x=a} = 0 \quad (2)$$

Esta es la condición natural de frontera asociada con un valor de frontera no especificado.

h).- Condición de Transversalidad.

Se recuerda la condición para el caso de valores de bordes móviles. Supóngase que la curva minimal obtenida $y(x)$ empieza en algún lugar sobre una curva dada $y = g(x)$. Entonces el valor inicial no está especificado ni restringido a la línea $x=a$, como en el punto anterior. El razonamiento empleado es el siguiente: Para la curva óptima, el cambio en S cuando el punto inicial varía a lo largo de dicha curva debe ser cero. Esto es equivalente a establecer que en el punto inicial

$$\frac{\partial S}{\partial x} + g' \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

por (a-2)

$$F + y' \frac{\partial S}{\partial y} - g' \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

y por (a-1)

$$F + (g' - y') F_{y'} = 0 \quad (3)$$

Esta condición para la derivada inicial y' en términos del punto inicial (x, y) y la pendiente de $g(x)$ es la condición de transversalidad clásica señalada en el Cap. 1.

i).- Condiciones de Pico.

Anteriormente se consideró que $\frac{\partial S}{\partial x}$ y $\frac{\partial S}{\partial y}$ son continuas sobre la curva óptima. Esto se hizo al calcular

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' \quad (1)$$

(que se utilizó en (a-4))

se obtiene

$$F_y + \frac{d}{dx} \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

así

$$\frac{\partial S}{\partial y} = - \int^x F_y dx \quad (3)$$

que es continua aunque y' sea discontinua. Entonces al examinar (a-1) se ve que

$$F_y \in C \quad (4)$$

a través de la discontinuidad, y al examinar (a-2) se ve que

$$F - y' F_{y'} \in C \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) son las condiciones de pico de Erdmann.

j).- Los problemas de Mayer y Bolza.

Hasta ahora se ha considerado el Problema de Lagrange. Considérese ahora un problema más general:

dados (a) un conjunto de condiciones iniciales $y_i(t) = c_i$ ($i=1, \dots, N$)

(b) un conjunto de ecuaciones diferenciales $\dot{y}_i(t) = g_i(y, z, t)$

(c) un conjunto de condiciones finales $y_i(T) = d_j$, donde j es algún subconjunto de los enteros $1, \dots, N$ y T no está definida.

Encuéntrese la función $z(t)$ que minimice T . Es decir, transfórmense ciertos estados iniciales en estados finales deseados en un tiempo mínimo. Si ninguna función $y(t)$ es monótona, la variable tiempo no se puede eliminar del problema en favor de cualquier otra variable independiente, por lo que el problema no se puede transformar en uno del tipo de Lagrange. Para deducir la naturaleza de la solución, primero se define la función $S(y, t)$ de $N+1$ variables:

$S(y, t) =$ El tiempo mínimo para transformar el estado inicial $y_i(t) = c_i$ ($i=1, \dots, N$) a un estado final de valores d_j ($j=1, \dots, N$) - donde $g_i(y, z, t) = \dot{y}_i$ y $z(t)$ se deberá escoger óptima.

Aplicando el Principio de Optimalidad:

$$S(y, t) = \min_z \{ \Delta t + S(y + g \Delta t, t + \Delta t) \} \quad (1)$$

desarrollando en serie, como se hizo antes:

$$0 = \min_z \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N S_{y_i} g_i + S_t \right\} \quad (2)$$

que da

$$0 = \sum_{i=1}^N S_{y_i} \left(\frac{\partial g_i}{\partial z} \right) \quad (3)$$

y

$$0 = 1 + \sum_{i=1}^N S_{y_i} g_i + S_t \quad (4)$$

al examinar las ecs. (3) y (4) se obtienen las siguientes conclusiones:

a) $S_t|_{t=T} = 0$. Por la definición de $S(y, t)$.

b) $\sum S_{y_i}(T) g_i(T) = -1$ de (4) y (a).

c) Si las funciones $g_i = g_i(y, z)$, entonces $\sum_{i=1}^N S_{y_i} g_i = -1$ a lo largo de la trayectoria óptima.

d) Para las $y_k(T)$ no dadas, $S_{y_k}(T) = 0$. Por la definición de $S(y, t)$.

e) En la literatura clásica, las funciones S_{y_i} se llaman λ_i , funciones multiplicadoras.

Si los multiplicadores S_{y_i} se conocen en un punto, las ecs. anteriores permitirán determinar la decisión óptima z en tal punto. Para tal fin considérese la expresión

$$\frac{d}{dt} S_{y_j} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} S_{y_j} \right) \frac{dy_i}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} S_{y_j} \right) g_i = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} S_{y_i} \right) g_i \quad (5)$$

En el caso, muy importante, en el que las ecs. diferenciales de la condición (b) no varían con el tiempo, o sea $y_i = g_i(y, z)$; al obtener la derivación parcial de (4) respecto a y_i da:

$$0 = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} S_{y_i} \right) g_i + \sum_i S_{y_i} \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} + \frac{\partial g_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_j} \right) \quad (6)$$

combinando (5) y (6), con la ayuda de (3); se obtienen las ecs. de Euler para las derivadas, respecto al tiempo, de los multiplicadores.

$$\frac{d}{dt} S_{y_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_i}{\partial y_j} S_{y_j} = 0 \quad (7)$$

las N ecs. diferenciales de primer orden para las funciones multiplicadoras, junto con las N ecs. de restricciones

$$\dot{y}_i = g_i(x, z, t) \quad (8)$$

y la ec. (3), forman un conjunto de $2N+1$ ecs. que se pueden resolver para -- las N funciones multiplicadoras, las N variables y_1, \dots, y_N y la función extremal $z(t)$. Las 2N constantes de integración son determinadas a partir de -- los N valores iniciales de y , los valores finales de y , así como las condi-- ciones anotadas en (d).

El problema descrito es del tipo conocido como Problema de Mayer y el restringido de Lagrange; con mayor generalidad, es posible combinar los problemas de Mayer y de Lagrange buscando minimizar a la integral de una -- función más otra función evaluada en el punto extremal final. Donde, esta -- función evaluada en el punto final contiene algunas variables cuyos valores finales no se especifican. Este problema general es llamado el Problema de Bolza, por cuanto en él se trata del extremo de una funcional general de Bolza (Cap. 1). Se sabe que los tres problemas, el de Lagrange, el de Mayer y -- el de Bolza son equivalentes, en el sentido de tener el mismo grado de generalidad. Además de que se puede pasar de una formulación a otra.

k).- Restricciones de desigualdad.

En algunas aplicaciones se presentan problemas en donde hay res-- tricciones de desigualdad en las variables de decisión. Con referencia al -- problema del punto anterior, supóngase que la función z está sujeta a la res-- tricción de desigualdad

$$h(y, z) \leq 0 \quad (1)$$

en la frontera, la ec. (j-3) falla y (j-7) es en este caso

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \frac{\partial S}{\partial y_j} + \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial y_j} \right) \frac{\partial z}{\partial y_i} = 0 \quad (2)$$

en la frontera se tiene

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} = 0 \quad (3)$$

entonces (2) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial y_i} = - \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial h}{\partial y_i} \quad (4)$$

donde

$$\lambda_j = \frac{\partial S}{\partial y_j} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial y_j}}{\frac{\partial h}{\partial z}} \quad (6)$$

6.- Conclusiones.

Los procesos de decisión de etapas múltiples (sección 2) presentan las siguientes características:

a) Se cuenta siempre con un sistema físico el cual se caracteriza -- en cada etapa por un conjunto de parámetros, las Variables de Estado.

b) En cada etapa de un proceso se deben de escoger un número de decisiones.

c) El efecto de una decisión es una transformación de las variables de estado.

d) La historia pasada del sistema no es de importancia en la determinación de acciones futuras.

e) El propósito del proceso es el de hacer extremal alguna función -- de las variables de estado.

Es conveniente, por las aplicaciones posteriores, el dar las siguientes definiciones:

Se llama política de control a una sucesión de controles que producen una trayectoria, y política óptima a la sucesión de controles u_1^* , u_2^* , ... que producen una trayectoria óptima.

Es importante también mencionar que, siendo el Principio de Optimalidad de naturaleza heurística, posee propiedades de aplicación en muy diversos campos de la actividad humana, tal y como lo menciona Pontryagin [13] al compararlo con el Principio del Máximo, como se verá en el Cap. V.

El análisis de la sección 5 mostró que la aproximación por medio de la ec. funcional proporciona, de manera intuitiva, derivaciones formales que permiten obtener los resultados clásicos del cálculo de variaciones. Finalmente, en el Cap. III se usará la caracterización por medio de la ec. funcional para obtener la ec. diferencial parcial de Hamilton-Jacobi de la mecánica -- clásica.

C A P I T U L O I I I

ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Contenido

- 1.- Introducción.
- 2.- El problema de control óptimo.
- 3.- Relación de recurrencia. El --
Principio de Inclusión.
- 4.- La ecuación de Hamilton-Jacobi-
Bellman.
- 5.- Ejemplo.
- 6.- Conclusiones.

1.- Introducción.

Al enunciar el Principio de Optimalidad aparentemente resulta ser trivial y obvio, sin embargo las aplicaciones potenciales del Principio de Optimalidad resultan ser mucho más poderosas que algunas teorías estrictamente probadas. En el presente capítulo se muestra como se usa el P. de O. para construir el esquema de Programación Dinámica en su versión continua: las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B), [11].

En principio, usando la funcional general de Bolza y la ecuación diferencial (vectorial) representativa de un proceso dinámico, se enuncia el Problema de Control Óptimo, sección 2.

Posteriormente y aprovechando el P. de O., la Programación Dinámica, que se ocupa del caso discreto implementa una relación de recurrencia (sección 3) para la determinación de la secuencia óptima de estados, y consecuentemente de los controles, llamada "Principio de Inclusión", el cual expresa que:

" El costo mínimo de transición de las últimas K etapas de un proceso de N etapas ($N > K$), a partir del estado X_{N-K} es el mismo que el de un proceso de K etapas a partir de ese mismo estado".

Al aplicar la Programación Dinámica para obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en la sección 4, se considera que la condición de borde superior ψ en la funcional de Bolza es fija.

Para terminar la exposición del capítulo se plantea un ejemplo el cual considera a un sistema dinámico escalar lineal con una funcional cuadrática.

1.- El Problema de Control Óptimo.

Considérese el Proceso Dinámico descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

y la funcional J:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2)$$

en donde $x(t)$ es el vector de estado; $u(t)$ es el vector de control, llamado también vector de entradas, y f es una función vectorial con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, siendo $t_0 \leq t \leq t_f$, $t \in \mathbb{R}$, t_0 y t_f constantes.

Problema: Encontrar un control admisible $u(t)$ que cause que al sistema (1) le corresponda una trayectoria admisible $x(t)$ que minimice a la funcional (2).

Es decir:

$$J^* \triangleq h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t) dt$$

$$\leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (3)$$

La desigualdad (3) establece que el valor de la funcional óptima J^* , correspondiente al control óptimo $u^*(t)$ y su trayectoria $x^*(t)$, debe ser menor (o igual) que el valor de la funcional J correspondiente a cualquier otro control admisible $u(t)$ y su trayectoria $x(t)$.

En los términos establecidos, el problema es:

Encontrar $u^*(t)$ tal que

$$J^* = J(x^*(t), u^*(t), t) = \min_{u(t)} J(x(t), u(t), t)_{t_0 \leq t \leq t_f}$$

donde $x^*(t)$ es la evolución de estados $x(t)$ que resulta de aplicar el control $u^*(t)$ al sistema (1).

2.- Relación de Recurrencia.

Considerando el proceso definido en (1.1-2), ahora se buscará obtener una relación de recurrencia para aplicar la Programación Dinámica al control de dicho proceso.

Primeramente se aproximará el sistema continuo definido en (1.1) por un sistema discreto considerando N incrementos de tiempo igualmente espaciados en el intervalo $0 \leq t \leq t_f$, $t_0 = 0$.

de (1.1)

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t), u(t)) \quad (2)$$

$$\text{para } t = k \Delta t \text{ con } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

$x(k\Delta t)$ es el k -ésimo valor de x denotado por $x(k)$. Entonces la ecuación de diferencias se puede escribir

$$x(k+1)\Delta t = x(k\Delta t) + (\Delta t) f(x(k\Delta t), u(k\Delta t))$$

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t f(x(k), u(k)) \quad (4)$$

representándose por

$$x(k+1) \triangleq f_D(x(k), u(k)) \quad (5)$$

Ahora se aproximará la funcional (1.2) por la suma

$$J = h(x(N\Delta t)) + \int_0^{\Delta t} g dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} g dt + \dots + \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} g dt \quad (6)$$

para Δt muy pequeñas.

$$J = h(x(N\Delta t)) + g(0)\Delta t + g(\Delta t)\Delta t + \dots + g((N-1)\Delta t)\Delta t$$

$$J = h(x(N\Delta t)) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x(k), u(k)) \quad (7)$$

que se representará por

$$J = h(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(x(k), u(k)) \quad (8)$$

habiendo discretizado el problema ahora se requiere que el control óptimo $u^*(x(0), 0), u^*(x(1), 1), \dots, u^*(x(N-1), N-1)$ sea determinado para el sistema (5) que corresponde a la funcional (8). Una vez hechas tales consideraciones, ahora se obtendrá la ecuación de recurrencia, empezando por definir

$$J_{NN}(x(N)) \triangleq h(x(N)) \quad (9)$$

J_{NN} es el costo para alcanzar el valor de estado final $x(N)$. También se define

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) &\triangleq g_D(x(N-1), u(N-1)) + h(x(N)) \\ &= g_D(x(N-1), u(N-1)) + J_{NN}(x(N)) \end{aligned} \quad (10)$$

$J_{N-1,N}$ es el costo de operación durante el intervalo $(N-1)\Delta t \leq t \leq N\Delta t$. Adviértase que $J_{N-1,N}$ corresponde al costo de una etapa del proceso con estado inicial $x(N-1)$.

Como $x(N)$ está relacionado con $x(N-1)$ y $u(N-1)$ por medio de la ecuación de estado (5),

$$J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) = g_D(x(N-1), u(N-1)) + J_{NN}(f_D(x(N-1), u(N-1))) \quad (11)$$

entonces el costo óptimo es

$$J_{N-1,N}^*(x(N-1)) \triangleq \min_{u(N-1)} \left\{ g_D(x(N-1), u(N-1)) + J_{NN}(f_D(x(N-1), u(N-1))) \right\} \quad (12)$$

La selección óptima de $u(N-1)$ dependerá de $x(N-1)$ de tal forma que el control minimizante se denotará por $u^*(x(N-1), N-1)$.

El costo de operación en los dos últimos intervalos está dado por.

$$\begin{aligned} J_{N-2,N}(x(N-2), u(N-2), u(N-1)) &= \\ g_D(x(N-2), u(N-2)) + g_D(x(N-1), u(N-1)) + h(x(N)) &= \\ g_D(x(N-2), u(N-2)) + J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) & \end{aligned} \quad (13)$$

La estrategia óptima durante los dos últimos intervalos es

$$J_{N-2,N}^*(x(N-2)) \triangleq \min_{u(N-2), u(N-1)} \left\{ g_D(x(N-2), u(N-2)) + J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1)) \right\} \quad (14)$$

El Principio de Optimalidad establece para este proceso de dos etapas qué: " cualesquiera que sean el estado inicial $x(N-2)$ y la decisión inicial $u(N-2)$, las decisiones restantes $u(N-1)$ serán óptimas respecto al valor de $x(N-1)$ que resulte de la aplicación de $u(N-2)^*$, consiguiendo:

$$J_{N-2,N}^*(x(N-2)) = \min_{u(N-2)} \left\{ g_D(x(N-2), u(N-2)) + J_{N-1,N}^*(x(N-1)) \right\} \quad (15)$$

como $x(N-1)$ está relacionado con $x(N-2)$ y $u(N-2)$ por medio de la ecuación de estado, $J_{N-2,N}^*$ depende solamente de $x(N-2)$; así

$$J_{N-2,N}^*(x(N-2)) = \min_{u(N-2)} \left\{ g_D(x(N-2), u(N-2)) + J_{N-1,N}^*(f_D(x(N-2))) \right\} \quad (15a)$$

al considerar el costo de operación sobre las tres etapas finales o sea un proceso de tres etapas con estado inicial $x(N-3)$, es posible aplicar el mismo razonamiento que conjujo de la ec. (13) a la (15a) para obtener:

$$J_{N-3,N}^*(x(N-3)) = \min_{u(N-3)} \left\{ g_D(x(N-3), u(N-3)) + J_{N-2,N}^*(f_D(x(N-3), u(N-3))) \right\} \quad (16)$$

de esta manera, continuando el análisis "hacia atrás", se obtiene, para un proceso de k -etapas el resultado

$$J_{N-k,N}^*(x(N-k)) = \min_{u(N-k), u(N-k+1), \dots, u(N-1)} \left\{ h(x(N)) + \sum_{R=N-k}^{N-1} g_D(x(R), u(R)) \right\} \quad (17)$$

al aplicar el Principio de Optimalidad

$$J_{N-k,N}^*(x(N-k)) = \min_{u(N-k)} \left\{ g_D(x(N-k), u(N-k)) + J_{N-(k-1),N}^*(f_D(x(N-k), u(N-k))) \right\} \quad (18) \quad K=1, 2, \dots, N$$

La ecuación (18) es la Ecuación de Recurrencia y su derivación ha revelado un concepto muy importante: EL PRINCIPIO DE INCLUSION.

Comentario:

$J_{N-k,N}^*(x(N-k))$ es el mínimo costo posible de las k -etapas finales de un proceso de N -etapas con un valor del estado igual a $x(N-k)$ al inicio de la $(N-k)$ -ésima etapa; sin embargo, $J_{N-k,N}^*(x(N-k))$ también es el mínimo costo posible para un proceso de k -etapas cuyo estado inicial es numéricamente igual al valor $x(N-k)$. Esto significa que la estrategia óptima y los costos mínimos del proceso de k etapas están contenidos (o incluidos) en los resultados del proceso de N etapas, considerando que $N > k$.

3.- La Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Anteriormente se aproximó a sistemas continuos por medio de sistemas discretos. Esta aproximación condujo a una relación de recurrencia que es ideal para ser implementada en una computadora digital.

En esta sección se presentará otra aproximación que conduce a una ecuación diferencial parcial no-lineal, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Considérese el proceso dinámico descrito por la ec. diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

y la funcional J :

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(z), u(z), z) dz \quad (2)$$

en donde x es el vector de estados; u el vector de entradas, ambos con componentes reales; f es una función vectorial con $x \in R^n$, $u \in R^m$, $t_0 \leq t \leq t_f$ con $t \in R$, t_0 y t_f constantes; z es una variable muda.

Se usará el Principio de Inclusión para incluir este problema en una clase mayor de problemas, considerando

$$J(x(t), t, u(z)) = h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(z), u(z), z) dz \quad (3)$$

donde t puede tomar cualquier valor menor o igual a t_f y $x(t)$ puede ser cualquier estado admisible. Nótese que el valor de J en (3) dependerá de los valores numéricos para $x(t)$ y t así como la estrategia de control óptimo en el intervalo $[t, t_f]$.

Para determinar el control que minimice a (3), para toda $x(t)$ admisible, y para todo $t \leq t_f$, considérese la función de costo mínima:

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(z)} \left\{ \int_t^{t_f} g(x(z), u(z), z) dz + h(x(t_f), t_f) \right\} \quad (4)$$

subdividiendo el intervalo de integración se obtiene

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(z)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g dz + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g dz + h(x(t_f), t_f) \right\} \quad (5)$$

el Principio de Optimalidad requiere que

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(z)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g dz + J^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\} \quad (6)$$

donde $J^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ es el costo mínimo del proceso para el intervalo de tiempo $t+\Delta t \leq z \leq t_f$ con "estado inicial" $x(t+\Delta t)$. Suponiendo que J^* tiene segundas derivadas parciales es posible expandir $J^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ en una serie de Taylor alrededor del punto $(x(t), t)$ obteniéndose:

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(z)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g dz + J^*(x(t), t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) \right] \Delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t), t) \right]^T [x(t+\Delta t) - x(t)] + (\text{Términos de mayor orden}) \right\} \quad (7)$$

para una Δt pequeña, $\Delta t \rightarrow 0$:

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(t)} \left\{ g(x(t), u(t), t) \Delta t + J^*(x(t), t) + J_t^*(x(t), t) \Delta t + J_x^{*T}(x(t), t) [f(x(t), u(t), t)] \Delta t + O(\Delta t) \right\} \quad (8)$$

en donde, $J_x^* \triangleq \frac{\partial J^*}{\partial x} = \left[\frac{\partial J^*}{\partial x_1} \quad \frac{\partial J^*}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial J^*}{\partial x_m} \right]^T$ y $J_t^* \triangleq \frac{\partial J^*}{\partial t}$

de la minimización se obtiene:

$$0 = J_t^*(x(t), t) \Delta t + \min_{u(t)} \left\{ g(x(t), u(t), t) \Delta t + J_x^{*T}(x(t), t) [f(x(t), u(t), t)] \Delta t + O(\Delta t) \right\} \quad (9)$$

dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, da

$$0 = J_t^*(x(t), t) + \min_{u(t)} \left\{ g(x(t), u(t), t) + J_x^{*T}(x(t), t) [f(x(t), u(t), t)] \right\} \quad (10)$$

$$\left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \right| = 0 \right)$$

Ec. de Bellman-Dreyfus.

Para encontrar el valor en la frontera de la ec. dif. (10), hágase $t = t_f$, entonces de la ec. (4) se obtiene

$$J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) \quad (11)$$

Se define el Hamiltoniano \mathcal{H} como:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*(t), t) \triangleq g(x(t), u(t), t) + J_x^*(x(t), t) [f(x(t), u(t), t)] \quad (12)$$

y

$$\mathcal{H}(x(t), u^*(t), J_x^*(t), t) = \min_{u(t)} \mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*, t) \quad (13)$$

ya que el control minimizador dependerá de x , J_x^* , y t .

Usando las definiciones anteriores se ha obtenido la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$0 = J_t^*(x(t), t) + \mathcal{H}(x(t), u^*(t), J_x^*(t), J_x^*, t) \quad (10a)$$

esta ecuación es la correspondiente analogía continua de la ecuación de recurrencia de Bellman (2.18) por lo que es llamada la ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN.

5.- Ejemplo.

Un sistema de primer orden está descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad (1)$$

se desea encontrar la ley de control que minimice

$$J = \frac{1}{4} x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4} u^2(t) dt \quad (2)$$

T es el tiempo final y los valores admisibles del estado y del control no están restringidos.

se sustituye $g = \frac{1}{4} u^2(t)$ y $f = x(t) + u(t)$ en la ec. (4.12) obteniéndose:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), J_x^*(t), t) = \frac{1}{4} u^2(t) + J_x^*(x(t) + u(t)) \quad (3)$$

como el control no tiene restricciones, una condición necesaria que debe satisfacer el control óptimo es

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = \frac{1}{2} u(t) + J_x^*(x(t), t) = 0 \quad (4)$$

nótese que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = \frac{1}{2} > 0 \quad (5)$$

por lo que el control que satisface la ec. (4) minimiza \mathcal{H} de la ec. (4)

$$u^* = -2 J_x^*(x, t) \quad (6)$$

sustituyendo en la ec. de H-J-B (4.10a) se obtiene:

$$0 = J_t^* + \frac{1}{4} (-2 J_x^*)^2 + J_x^* x(t) - 2 [J_x^*]^2$$

$$0 = J_t^* - [J_x^*]^2 + J_x^* x(t) \quad (7)$$

el valor extremal en el borde es $J^*(x(T)) = \frac{1}{4} x^2(T)$ (8)

una forma de resolver la ec. de H-J-B es suponiendo, y proponiendo, una solución y verificar que satisface a la ec. diferencial y las condiciones de borde. Entonces supóngase una solución de la forma

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2} k(t) x^2(t) \quad (9)$$

donde $k(t)$ es una función escalar desconocida que deberá ser determinada.

Considérese que $J_x^*(x(t), t) = k(t) x(t)$ (10)

conjuntamente con (6) se obtiene

$$u^*(t) = -2 k(t) x(t) \quad (11)$$

si se determina una función $k(t)$ que satisfaga a las ecs. (7) y (8), el control óptimo es una retroalimentación lineal del estado.

si $k(T) = \frac{1}{4}$, entonces $J^*(x(T)) = \frac{1}{4} x^2(T)$ sustituyendo (10) en (7) y considerando que $J_t^* = \frac{1}{2} \dot{k}(t) x^2(t)$ (12)

se obtiene $0 = \frac{1}{2} \dot{k}(t) x^2(t) - k^2(t) x^2(t) + k(t) x^2(t)$ (13)

o sea $\dot{k}(t) + 2k(t) - 2k^2(t) = 0$ (14)

NOTA: Al resolver la ec. (14), considérense las siguientes observaciones (Elsgoltz, pp 33-34).

la ecuación $\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$

llamada Ecuación de Riccati, se puede transformar por sustitución de variables en una ec. del tipo

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^m, \quad m \neq 1$$

llamada ec. de Bernoulli. Esta última se puede reducir a una ec. lineal mediante uncambio de variable

Entonces, la ec. (14) es una ec. de Riccati, con $p(x) = 2, q(x) = -2, f(x) = 0$

o bien, en particular una ec. de Bernoulli, en la cual $p(x) = 2$ y $f(x) = 2, n=2$

Esta ec. se puede resolver efectuando primero un cambio de variable y luego por separación de variables.

Entonces, haciendo $z = k^{-1}$ se obtiene la ec. dif. lineal

$$\dot{z} - 2z + 2 = 0$$

la solución a la ec. (14) es

$$K(t) = \frac{1}{e^{2t} + 1}$$

si se sustituye t por $t-T$ se obtiene

$$K(t) = \frac{e^{(T-t)}}{e^{(T-t)} + e^{-(T-t)}}$$

La ley de control óptimo es $u^*(t) = -2J_x^* = -2K(t)x(t)$

nótese que cuando $T \rightarrow \infty$, $k(t) \rightarrow 1$, y

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2x(t) = -x(t)$$

significando lo anterior que el sistema controlado es estable.

6.- Conclusiones.

Al aplicar la Programación Dinámica para obtener la ec. de H-J-B (sección 4) se consideró a la funcional de Bolza con una ligazón a la dinámica $\dot{x} = f(t, x, u)$ que no exigió linealidad ni invariancia en el tiempo; también se consideró que la condición de borde superior t_f era fija, sin embargo los resultados son consistentes aún si t_f es libre. Esto se mostrará en el análisis del Principio del Máximo (Cap. V) al enunciar el teorema NO. 3 que permite resolver el problema general de puntos extremos movibles.

En la teoría del regulador (Cap. IV) se obtendrán condiciones equivalentes formuladas por medio de un sistema Hamiltoniano así como también en el tratamiento general del regulador que se plantea en el Cap. VI, Teoría de Kalman-Carathéodory.

Inconvenientes de la ec. de H-J-B:

Lo primero que se observa es la dificultad de solución de la ec. diferencial. Por lo general es necesario estimar una función de costo mínimo para obtener la solución ya que resulta poco común calcularla fácilmente. Otro método muy usado consiste en discretizar el sistema (estados y controles) y resolver numéricamente el sistema aproximado; en realidad es una forma de darle la vuelta al problema regresando a las ecuaciones de la Programación Dinámica. Para el control con computadora digital esta forma es muy apropiada, más aún al pensar en un control en lazo cerrado, en que para cada instante t se puede actualizar el control óptimo.

C A P Í T U L O I V

TEORIA DEL REGULADOR CON FUNCIONAL CUADRATICA

Contenido

- 1.- Introducción.
- 2.- Formulación del problema.
- 3.- Método del Cálculo de Variaciones.
- 4.- Método de Programación Dinámica.
- 5.- Ejemplo.
- 6.- Conclusiones.

1.- Introducción.

Se formula el problema del regulador para sistemas continuos comentándose en principio las formas posibles de resolverlo, siendo la primera de ellas prohibitiva desde el punto de vista ingenieril ya que implica un gran costo [9].

Con la finalidad de enfatizar la afinidad de resultados entre la Teoría Clásica del Cálculo de Variaciones y la Programación Dinámica de Bellman, el problema es analizado empleando ambas teorías. Primero se aplica el método del Cálculo de Variaciones a la funcional general de Bolza con ligazón a la dinámica de la forma $\dot{x} = f(x, u, t)$ introduciéndose esta última a la primera por medio de los multiplicadores de Lagrange, obteniéndose posteriormente el sistema Hamiltoniano que incluye la condición natural de extremo (ec. (3.9)):

$$\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u} = 0$$

Estas ecuaciones (3.8-9) son las "condiciones necesarias de Weierstrass" del Capítulo I. Posteriormente, los resultados obtenidos son aplicados al análisis de un sistema lineal, [3] y [11], que puede ser variante e invariante en el tiempo, llegándose a obtener el control óptimo $u^*(t)$ en función de una matriz que se denomina de "ganancia de retroalimentación", ec. (3.26), planteándose dos métodos alternos para resolverla y siendo ambos implementables en computadora digital, [8].

La aplicación del método de Programación Dinámica es directa por medio de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. En ambos desarrollos se obtiene una ecuación diferencial del tipo de Riccati. Finalmente se plantea un ejemplo.

2.- Formulación del Problema.

Considérese un sistema con dinámica $\dot{X}(t) = f(x(t), u(t), t)$ (1) que está inicialmente en reposo, $x(*) \equiv 0$, pero que debido a una perturbación el estado en un tiempo t_0 cambia al valor $x(t_0) = x_0 \neq 0$. El problema del regulador consiste en aplicar un control $u(*)$ tal que el estado $x(*)$ retorne a cero o se mantenga en un entorno suficientemente pequeño del origen. El problema de optimización del regulador en el tiempo, consiste en que éste ocurra en tiempo mínimo.

En [9], T. Kailath muestra que si el sistema dinámico lineal es controlable entonces es posible usar una "entrada" o control impulsivo tal que idealmente en forma instantánea se restablece el estado en el valor cero. El costo de esta evolución es grande, ya que se requiere de controles de gran cantidad de energía. También menciona la posibilidad de usar un control

de energía finita como $u = -kx$, de tal manera que con k apropiada, el estado retornará a cero tan rápidamente como se desee.

El problema general del regulador lineal es el siguiente:

" Dado un sistema lineal gobernado por las ecuaciones de estado

$$\dot{X} = A(t)X(t) + B(t)u(t), \quad X(0) = X_0 \quad (2)$$

donde x es el vector de estado de n componentes y u es el vector de control de m componentes, $m \leq n$, se desea llevar el estado desde el valor inicial $x(t_0)$ al valor terminal $x(t_f) \cong 0$, donde t_f es el tiempo terminal; por medio de funciones admisibles de control $u(t)$ y no excediendo cotas para el estado durante el proceso".

Una forma óptima de hacer esto es minimizando una funcional de comportamiento de costo de la forma general (de Bolza):

$$J = h[x(t_f)] + \int_0^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (3)$$

Para resolver el problema general de optimación se emplean métodos basados en dos teorías:

- i) El cálculo de variaciones
- ii) La programación dinámica

se pretende mostrar las interrelaciones y la equivalencia entre ambos tratamientos.

3.- Método del Cálculo de Variaciones.

El problema consiste de una ecuación para la dinámica

$$\dot{X} = f(x(t), u(t), t), \quad X(0) = X_0 \neq 0 \quad (1)$$

debiéndose escoger un control $u(t)$ que minimice a la funcional

$$J = h[x(t_f)] + \int_0^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2)$$

donde el tiempo final, $t_f < \infty$, puede estar fijado o no.

La ecuación de la dinámica constituye una ligazón no holonoma natural para el problema variacional. Para considerar a la dinámica se introduce la restricción

$$f(x(t), u(t), t) - \dot{X}(t) = 0 \quad (1.1)$$

en el costo J usando un multiplicador de Lagrange $\lambda(\cdot) \in R^n$, definiéndose la funcional modificada o ampliada del problema general de Lagrange

$$J = h[x(t_f)] + \int_0^{t_f} [g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(f(x(t), u(t), t) - \dot{X}(t))] dt \quad (3)$$

Esto puede escribirse

$$J = h + \int_0^{t_f} (H - \lambda^T \dot{X}) dt \quad (4)$$

donde se ha introducido la función Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x(t), u(t), t)$ del problema general con ligazones la cual está definida como:

$$\mathcal{H} \triangleq g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t) \quad (5)$$

aquí se considerará que al haberse encontrado la u mínima, $u^*(t)$, entonces pequeñas y arbitrarias variaciones δu^* en u^* no deberán producir variaciones δJ^* en el costo mínimo J^* por lo que se tendrá $\delta J^* = 0$. Al integrar la ec. (4) se obtiene.

$$J = h + \lambda^T(t) x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{H} + \lambda^T(t) x(t)) dt \quad (6)$$

por lo que

$$\delta J = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \lambda^T(t) \right) \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \lambda^T(t) \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \lambda^T \right) \delta x + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \delta u \right] dt \quad (7)$$

nótese que $\delta x|_{t_0} = 0$; como $\delta J^* = 0$, se obtienen

$$\lambda^T(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \quad \text{con} \quad \lambda^T(t_f) = \frac{\partial h(x^*(t_f))}{\partial x} \quad (8)$$

además

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda^*, t) = 0 \quad (9)$$

(8) y (9) son las ecuaciones de Euler-Lagrange del cálculo variacional. De la definición del Hamiltoniano se obtiene también

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \quad (10)$$

Considérese ahora el sistema descrito por la planta

$$\dot{X}(t) = A(t) X(t) + B(t) u(t) \quad (11)$$

el criterio de comportamiento a minimizar es

$$J = \frac{1}{2} (X^T H X)_{t_0}^{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T(t) Q(t) X(t) + u^T(t) R(t) u(t)) dt \quad (12)$$

el tiempo final t_f está fijo. H y Q son matrices reales positivas semidefinidas y R es una matriz real positiva definida. El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (A x + B u) \quad (13)$$

las condiciones necesarias de optimalidad son

$$\dot{x}^* = A x^* + B u^* \quad (14.1)$$

$$\dot{\lambda}^* = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = - Q x^* - A^T \lambda^* \quad (14.2)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = R u^* + B^T \lambda^* \quad (15)$$

de (15)

$$u^* = -R^{-1} B^T \lambda^* \quad (16)$$

† de ahí el origen del nombre aplicado al método: "método de las variaciones", conocido generalmente como "Cálculo de Variaciones", ó "Cálculo Variacional".

(14.1) sustituyendo (16) en $\dot{X}^* = AX^* - BR^{-1}B^T \lambda^*$ (17)

de este modo, se tiene un conjunto de 2n ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

la solución de estas ecuaciones es de la forma

$$\begin{bmatrix} X^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde Φ es la matriz de transición del sistema (18). Particionando a la matriz Φ :

$$\begin{bmatrix} X^*(t_f) \\ \lambda^*(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

en donde Φ_{11} , Φ_{12} , Φ_{21} y Φ_{22} son matrices de nxn. de la condición de borde (8):

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial h(X^*(t_f))}{\partial X} = H X^*(t_f) \quad (21)$$

sustituyendo esta ecuación para $\lambda^*(t_f)$ en (20):

$$X^*(t_f) = \Phi_{11}(t_f, t)X^*(t) + \Phi_{12}(t_f, t)\lambda^*(t) \quad (22)$$

$$H X^*(t_f) = \Phi_{21}(t_f, t)X^*(t) + \Phi_{22}(t_f, t)\lambda^*(t)$$

al sustituir la ec.(22)-superior en la correspondiente inferior

$$H \Phi_{11}(t_f, t)X^*(t) + H \Phi_{12}(t_f, t)\lambda^*(t) = \Phi_{21}(t_f, t)X^*(t) + \Phi_{22}(t_f, t)\lambda^*(t) \quad (23)$$

resolviendo para $\lambda^*(t)$:

$$\lambda^*(t) = [\Phi_{22}(t_f, t) - H \Phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [H \Phi_{11}(t_f, t) - \Phi_{21}(t_f, t)] X^*(t) \quad (24)$$

Kalman ha demostrado (Tema VI) que la inversa requerida existe [10]

por lo que la ecuación (24) se puede escribir como

$$\lambda^*(t) \triangleq K(t) X^*(t) \quad (25)$$

lo que significa que $\lambda^*(t)$ es una función lineal de los estados del sistema. k es una matriz de nxn; al sustituir (25) en (16) se obtiene

$$\begin{aligned} U^*(t) &= -R^{-1}B^TK X^*(t) \\ &\triangleq F(t) X^*(t) \end{aligned} \quad (26)$$

siendo $F(t) = -R^{-1}B^TK$.

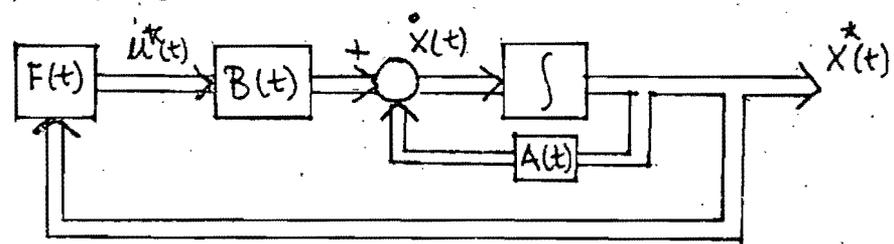


Fig. 1. Planta y controlador óptimo realimentado para problemas de reguladores lineales.

Determinación de $F(t)$:

a) Para determinar la matriz de la ganancia de retroalimentación $F(t)$ - se requiere conocer a la matriz de transición del sistema dado en (18) Si el sistema es invariante en el tiempo (o sea que las matrices A, B, R, Q son constantes), entonces esta matriz se puede calcular mediante la fórmula:

$$\varphi(t_f, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \text{SI} - \left[\begin{array}{c|c} A & -BR^{-1}B^T \\ \hline -Q & -A^T \end{array} \right]^{-1} \right\} \quad (27)$$

cuando el orden del sistema es grande, este cálculo se vuelve muy largo. Si el sistema no es invariante con el tiempo, entonces se requiere la aplicación de un procedimiento numérico para calcular $\varphi(t_f, t)$. En ambos casos, ya sea que el sistema sea invariante o no-invariante con el tiempo:

$$\varphi(t_f, t) = \varphi(\tau) = \text{EXP}(-M\tau) \quad (28)$$

($t_f - t \rightarrow \tau$)

si hacemos

$$M \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & -BR^{-1}B^T \\ \hline -Q & -A^T \end{array} \right] \quad (29.1)$$

considérese que

$$\varphi(\tau) = e^{-M\tau} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-M\tau)^l}{l!} \quad (29.2)$$

pudiéndose calcular $\varphi(\tau)$ por medio del algoritmo correspondiente, implementado en una computadora digital [8] .

b) Procedimiento alternativo: método "suave" [3] . La idea de este método está contenida en las ecs. (25) y (18)-inferior, sustituyendo la primera en la segunda:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{k}(t)x(t) + k(t)\dot{x}(t) = -Q(t)x(t) - A^T(t)k(t)x(t) \quad (30)$$

sustituyendo $\dot{x}(t)$ de (18)-superior en (30):

$$\dot{k}(t) = -k(t)A(t) - A^T(t)k(t) - Q(t) + k(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)k(t) \quad (31)$$

de la condición de optimalidad (8): $\lambda(t_f) = H(t)x(t_f)$

por lo que se obtiene la condición de borde terminal:

$$K(t_f) = H \quad (32)$$

La ecuación (31) es la Ecuación de Riccati.

4.- Método de Programación Dinámica.

En esta sección se aplicará la ec. de H-J-B para resolver el problema planteado en la sección 1. Recordando que el proceso está descrito por la ecuación

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

y que el criterio de comportamiento a ser minimizado es

$$J = \frac{1}{2}(X^T H X)_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [X^T Q X + u^T R u] dt \quad (2)$$

para usar la ec. de H-J-B primero se ~~escribe~~ ^{forma} el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(x, u, J_x^*, t) = \frac{1}{2} X^T Q X + \frac{1}{2} u^T R u + J_x^{*T}(x, t) [A x + B u] \quad (3)$$

una condición necesaria para que $u^*(t)$ minimice a \mathcal{H} es que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$, así se obtiene

$$R u + B^T J_x^* = 0 \quad (4)$$

si la matriz $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = R(t)$

es positiva definida y \mathcal{H} es una forma cuadrática en u , el control que satisface a la ec. (4) minimiza a \mathcal{H} globalmente. Resolviendo (4) para u da

$$u^* = -R^{-1} B^T J_x^* \quad (6)$$

y al sustituir en (3) se obtiene

$$\mathcal{H}(x, u^*, J_x^*, t) = \frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* + J_x^{*T} A x \quad (7)$$

la ecuación de H-J-B es ††:

$$0 = \dot{J}_t^* + \frac{1}{2} X^T Q X - \frac{1}{2} J_x^{*T} B R^{-1} B^T J_x^* + J_x^{*T} A x \quad (8)$$

y de la ec. (2), la condición de borde es

$$J^*(x(t_f)) = \frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f) \quad (9)$$

ahora se propone una solución de (8)

$$J^*(x, t) = \frac{1}{2} x^T(t) K(t) x(t) \quad (10)$$

donde k es una matriz real, simétrica y positiva-definida que deberá ser determinada. Al sustituir la solución (10) en la ec. de H-J-B se obtiene

$$0 = \frac{1}{2} x^T \dot{K} x + \frac{1}{2} x^T Q x - \frac{1}{2} x^T K B R^{-1} B^T K x + x^T K A x \quad (11)$$

El producto KA que aparece en el último término se puede escribir como - la suma de una parte simétrica y otra parte antisimétrica:

$$KA = \frac{1}{2} [KA + (KA)^T] + \frac{1}{2} [KA - (KA)^T] \quad (12)$$

usando la siguiente propiedad: $(BD)^T = D^T B^T$, se muestra que sólo la parte simétrica de KA contribuye a la ec. (11) quedando

$$0 = \frac{1}{2} x^T \dot{K} x + \frac{1}{2} x^T Q x - \frac{1}{2} x^T K B R^{-1} B^T K x + \frac{1}{2} x^T K A x + \frac{1}{2} x^T A^T K x \quad (13)$$

$$0 = \dot{K} + Q - K B R^{-1} B^T K + KA + A^T K \quad (14)$$

de (9) y (10) se obtiene la condición de frontera

$$K(t_f) = H \quad (15)$$

† De la ec. III-3.12, pág. 27.
 †† De la ec. III-3.10 (a), pág. 27.

(14) es la Ecuación de Riccati obtenida en la sección 3.

Una vez que se ha determinado $k(t)$ la ley de control óptimo (de (6)) es:

$$\boxed{u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t)} \quad (16)$$

$$\triangleq F(t)x(t)$$

5.- Ejemplo.

Encontrar la ley de control óptimo para el sistema $\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$ (1)
 $a \in \mathbb{R}$
 que minimice el costo

$$J(u) = \frac{1}{2} Hx^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4} u^2(t) dt \quad (2)$$

no se consideran restricciones para el estado $x(t)$ y control $u(t)$ admisibles, el tiempo terminal T se especifica, $H > 0$ y $x(T)$ es libre.

Los valores particulares son $A=a$, $B=1$, $R=1/2$, $Q=0$, entonces la ec. -

(3.18) dá

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

A continuación considérese la solución por cada uno de los procedimientos descritos en la sección 2.

a) Aplicando la fórmula ^(3-27, pág. 35) (dado que el sistema es invariante)

$$\varphi(t) = \int^{-1} \{ (sI - M)^{-1} \}$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{at} & \frac{1}{a}e^{-at} - \frac{1}{a}e^{at} \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix} \quad (4)$$

aplicando las ecs. (2-24 y (2.25) y considerando $T=t$, se obtiene

$$k(t) = \left[e^{-a(T-t)} - \frac{H}{a} \left(e^{-a(T-t)} - e^{a(T-t)} \right) \right]^{-1} \left[H e^{a(T-t)} \right] \quad (5)$$

la ley de control óptimo es, de (26):

$$\boxed{u^*(t) = -2k(t)x(t)} \quad (6)$$

b) Por la Ecuación de Riccati (método directo).

Sustituyendo los valores de $A, B, R,$ y Q EN LA EC. (4.14) o en la (3.31)

se obtiene

$$0 - 2k^2 + 2ak = 0 \quad (7)$$

para resolver la ec. (7) considérese la nota insertada en la sección 2; entonces se obtiene

$$k = \frac{a}{1 + C e^{2at}} \quad (8)$$

donde C es una constante a determinar.

De la condición de borde $k(T) = H$ se obtiene que $C = \frac{a-H}{H e^{2aT}}$ (9)

por lo qué, sustituyendo (9) en (8)

$$k = \frac{aH e^{a(T-t)}}{H e^{a(T-t)} + (a-H) e^{-a(T-t)}} \quad (10)$$

pudiéndose mostrar fácilmente que (10) es igual a (5).

6.- Conclusiones.

Al formularse el problema, sección 2, se mencionó (al reproducir un comentario de T. Kailath) ~~el~~ ^{el término} "controlabilidad"; ésta fué definida por R. Kalman [10] y se comentará con mayor detalle en el Capítulo VI.

En el análisis desarrollado en la sección 3 aparece nuevamente la condición de Weierstrass del cálculo de variaciones. Respecto a la condición natural de borde de la ecuación (3.9) es importante destacar que no se cumple siempre, como lo establece la Teoría de Pontryagin que será tratada en el capítulo V.

Verdaderamente es importante el resultado obtenido en las secciones 3 y 4 ya que se concluyó que el control óptimo se obtiene mediante la retroalimentación lineal de los estados del sistema. Para obtener este resultado fué necesario probar la existencia de la matriz de ganancia de retroalimentación $P(t)$, sin embargo ésto no se hizo ya que será tratado en el capítulo VI (Teoría de Kalman-Carathéodory).

C A P I T U L O V

EL PRINCIPIO DEL MAXIMO

Contenido

- 1.- Introducción.
- 2.- Controles admisibles.
- 3.- Enunciado del problema fundamental.
- 4.- El Principio del Máximo.
- 5.- Problema de tiempo óptimo.
- 6.- Ejemplos.
- 7.- Problema de puntos extremos movibles.
Condiciones de transversalidad.
- 8.- El principio del máximo para sistemas
no-autónomos.
- 9.- La relación entre el principio del
máximo y el método de Programación
Dinámica.
- 10.- Conclusiones.

1.- Introducción.

Primeramente se definen los controles admisibles y se enuncia el problema fundamental así como el caso particular, muy importante, del problema de tiempo óptimo; posteriormente se define a una nueva variable que se designa como "variable ficticia", llamada así porque no es una variable de estado sino una coordenada que aumenta la dimensión del espacio [7].

El Teorema que establece la solución del problema básico se enuncia con el nombre de "Principio del Máximo", o "Primer teorema del máximo". Después se particulariza al caso de tiempo óptimo, enunciándose como Teorema 2. Para ilustrar la aplicación de estos teoremas se incluyen tres ejemplos típicos. En la sección 7 se comenta el problema de puntos extremos movibles y se establecen las condiciones de transversalidad así como la solución al problema mediante el Teorema 3. En este punto de su teoría, Pontryagin establece una generalización de las condiciones de transversalidad que fueron mencionadas en el Cap. I. En la sección 8 se aplica el Principio del Máximo a sistemas no-autónomos y el problema se resuelve al definirse una nueva variable auxiliar que se hace corresponder al tiempo, transformándose así el problema no autónomo en uno autónomo; con sus respectivas condiciones se enuncia la solución a este caso en el Teorema 4. En ningún caso se demuestra la validez de los teoremas, las cuales se encuentran en [13].

Finalmente se efectúa un análisis que muestra la correspondencia entre el Principio del Máximo y el método de la Programación Dinámica.

2.- Controles admisibles.

Nuevamente se analizará el comportamiento de un sistema S cuyo estado en cualquier instante será caracterizado por n números reales x_1, x_2, \dots, x_n . El espacio vectorial X de la variable vectorial $x=(x_1, \dots, x_n)$ es el Espacio de Fase del sistema. El comportamiento del sistema se basa en el hecho de que cualquier $x_1=x_1(t)$, estableciéndose la suposición de que S puede ser controlado por medio de r elementos de un dominio de control U, que puede ser un conjunto de algún espacio euclidiano r-dimensional.

Se considerará como control a cualquier función $u=u(t)$, definida en algún intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ de tiempo t, que toma valores en el dominio de control U. Si U es un conjunto en el espacio de los parámetros de control u_1, u_2, \dots, u_r , todo control

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$$

es una función vectorial; además, dependiendo de la naturaleza del problema se impondrán varias condiciones al control u(t) (como continuidad por tramos, diferenciabilidad por tramos, etc.). A los controles que satisfagan las condiciones establecidas se les llamará admisibles. En esta sección se designarán como controles admisibles a cualquier control óptimo ^{continuo} por tramos.

El valor del control u(t), continuo por tramos, en un punto de discontinuidad no desempeña un papel esencial en el análisis subsecuente. Sin embargo, es conveniente suponer que el valor del control u(t) es igual al límite, por la izquierda, en todo punto de discontinuidad $u(\bar{t}) = u(\bar{t}-0)$

3.- Enunciado del Problema Fundamental.

Se considerará que el sistema está descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (1)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$

$$f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_n(x, u)) \in X \times U$$

también toda $\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} \in X \times U$ $i, j = 1, \dots, n$

El problema fundamental se puede enunciar de la siguiente forma:

"Dados los dos puntos x_0 y x_1 en el Espacio de Fase X, encontrar de entre todos los controles admisibles $u=u(t)$, aquel control que traslade el punto de fase de la posición x_0 a la posición x_1 (si tal control existe) de tal forma que la funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \quad (2)$$

se minimice".

$x(t)$ es la solución de (1) con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, correspondiente a $u(t)$ y t_1 es el instante en el que ésta solución pasa por x_1 . Nótese que, siendo x_0 y x_1 puntos fijos, los límites inferior y superior

t_0 y t_1 de la integral (2) no son números fijos ya que dependerán del control $u(t)$ seleccionado, que traslade el punto de fase de x_0 a x_1 . Este es un problema de límites fijos.

El control $u(t)$ que obtiene la solución al problema anterior se llama el Control óptimo y la trayectoria $x(t)$ (a lo largo de la cual se vá de x_0 a x_1) es la trayectoria óptima.

Un caso particular muy importante del problema óptimo se presenta cuando $f^0(x,u) \equiv 1$. Entonces la funcional (2) toma la forma:

$$J = t_1 - t_0 \quad (3)$$

y el hecho de que $u(t)$ sea óptimo implica que "el tiempo de transferencia de la posición x_0 a la posición x_1 es mínimo". Este es el problema llamado de tiempo óptimo.

Un enunciado diferente del problema fundamental, que permitirá formular la condición necesaria para optimalidad, se estructura definiendo en el Espacio de Fase a una coordenada más x^0 , o "variable ficticia", con la ley de variación

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (4)$$

f^0 es la función que aparece en (2). Es decir, ahora se considerará el sistema de ED

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (5)$$

correspondiente a $\frac{dx^i}{dt} = f_i(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_r) = f_i(x, u)$ $i=0, 1, \dots, n$ (6)

con $X = (x^0, x_1, x_2, \dots, x_n) = (x^0, x)$, $x \in X$, $X \subset E^{n+1}$ (7)

ahora, sea $u(t)$ un control admisible que traslade x_0 a x_1 y $x=x(t)$ es la solución correspondiente a (1), con la condición inicial $x(t_0)=x_0$.

Sea $X_0 = (0, x_0)$, es decir el punto del espacio X con coordenadas $0, x_0^1, \dots, x_0^n$ donde x_0^1, \dots, x_0^n son las coordenadas de $x_0 \in X$.

La solución de (5), correspondiente al control $u(t)$ con la condición inicial $X(t_0)=X_0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ es $x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt$
 $X = X(t)$

en particular, cuando $t=t_1$ se obtiene

$$X^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt = J, \quad X = X_1$$

es decir, la solución $X(t)$ de la ec. (5) con la condición inicial $X(t_0)=X_0$ pasa por el punto $X=(J, X_1)$ en $t=t_1$.

Con la introducción de la variable "ficticia" x^0 el problema óptimo se puede formular como sigue:

* variable "ficticia" ^{en respecto} al estado (variable de Mayer) que permite desarrollar la teoría en un "espacio ampliado" de Mayer, de dimensión $n+1$ (que aquí contiene al espacio de estados R^n). Se trata del método de Mayer del C. de V.

"Dados en el Espacio de Fase de $N+1$ dimensiones X , el punto $X_0 = (0, x_0)$ y la línea recta Π , paralela al eje x^0 y que pasa por el punto $(0, x_1)$, -- encontrar de entre todos los controles admisibles $u(t)$ que correspondan a la solución $X(t)$ de la ec. (5) que interseccione a la recta Π con la condición inicial $X(t_0) = X_0$, el control para el cual el punto de intersección con la línea recta Π tiene la mínima coordenada x^0 (fig. 1).

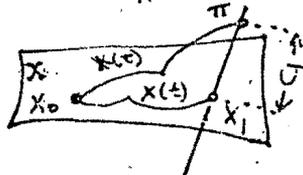


Figura 1.

En lo sucesivo, los términos "control óptimo" y "trayectoria óptima" se aplicarán de acuerdo al enunciado anterior.

Además, los controles óptimos y trayectorias óptimas poseen algunas propiedades simples, como consecuencia de la formulación del problema.

Primero, de la naturaleza autónoma del sistema (6) se concluye que la naturaleza de los controles no cambia con desplazamientos en el eje del tiempo. Es decir, que si el control $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, traslada $x_0 \rightarrow x_1$, obteniéndose de (2) un valor para J , entonces el control $u(t+h), t_0+h \leq t \leq t_1+h$ para $h \in \mathbb{R}$, también traslada $x_0 \rightarrow x_1$ y permite obtener el mismo valor para J . Esta propiedad permite trasladar el punto inicial t_0 del intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, en que se define $u(t)$ a cualquier punto sobre el eje del tiempo (fig. 2).

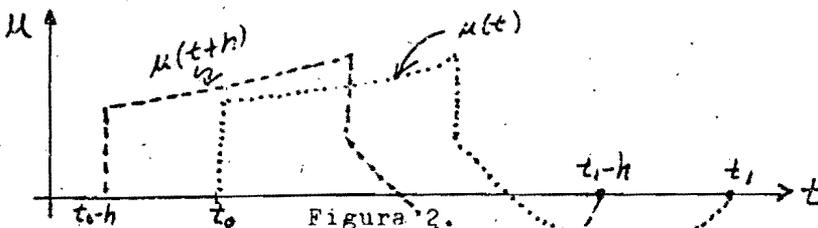


Figura 2.

Segundo, si x_0, x_1, \dots, x_k es un conjunto finito de puntos en \mathbb{X} y si existe un control $u(t)$ que traslade $x_{i-1} \rightarrow x_i$, obteniéndose de (2) un valor de la funcional $J_i, i = 1, \dots, k$, entonces existe un control $u(t)$ que trasladará $x_0 \rightarrow x_k$, obteniéndose de (2) una $J = J_1 + J_2 + \dots + J_k$. Si además consideramos la propiedad de corrimiento en el tiempo del control $u(t)$, entonces se considerará que los intervalos del tiempo en que se definen los controles $u_i(t)$ son adyacentes es decir $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, donde $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ entonces si $u(t)$ es el control especificado en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_k$ y en el intervalo $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ coincide con el control $u_i(t)$, entonces $u(t)$ es la unión de los controles $u_i(t)$, fig. 3.

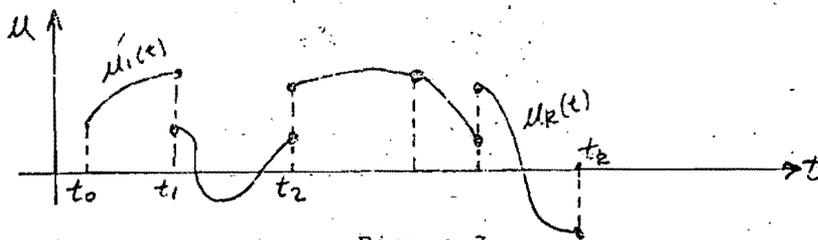


Figura 3.

Del análisis anterior se concluye que cada tramo de una trayectoria óptima es en sí una trayectoria óptima (similarmente para los controles óptimos). Nótese la analogía de este enunciado con el Principio de Optimalidad!

4.- El Principio del Máximo.

En esta sección se enunciará el Teorema que da la solución del problema básico. Cabe hacer la aclaración de que no se incluirá la demostración de este teorema ni la de otros posteriores, pudiendo ser consultadas en [13]. Considérese primero el sistema de ecs. (6):

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

también considérese un sistema de ecs. con variables auxiliares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i} \lambda_\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (8)$$

si se ha seleccionado un control admisible $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, y se tiene la correspondiente trayectoria de las $x(t)$ del sistema (7) con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, el sistema (8) toma la forma:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} \lambda_\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (9)$$

este sistema es lineal y homogéneo, por lo que dadas las condiciones iniciales λ_i , tiene solución única. definida para toda $t \in [t_0, t_1]$

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Al igual que la solución $x(t)$ del sistema (7), la solución del sistema (9) consiste de funciones continuas $\lambda_i(t)$, que tienen derivadas continuas con respecto a t excepto en un número finito de puntos (los puntos de discontinuidad del control $u(t)$). Toda solución de (9) se describirá como la solución del sistema (8) correspondiente al control seleccionado $u(t)$ y a la trayectoria de fase $x(t)$.

Ahora se combinará a las ecs. (7) y (8) para formar una función \mathcal{H} de las variables $x^0, \dots, x^n, \lambda_0, \dots, \lambda_n, u^0, \dots, u^r$:

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u) = (\lambda_0, f(x, u)) = \sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha f^\alpha(x, u) \quad (10)$$

con ayuda de la función (10), los sistemas (7) y (8) se pueden combinar para formar el siguiente sistema Hamiltoniano de $2(n+1)$ E.D.

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (11)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (12)$$

destacándose que este S.D. (de Mayer) contiene E.D. canónicas también para x_0 y su correspondiente λ_0

Así, habiendo escogido cualquier control admisible $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, con condición inicial $X(t_0) = X_0$, es posible determinar una trayectoria correspondiente $X(t) = [X^0(t), X^1(t), \dots, X^n(t)]$ (que satisfaga el sistema (11)); Después de esto se puede encontrar la solución al sistema (12):

$$\lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$$

correspondiente a las funciones $u(t)$ y $X(t)$.

Dados valores fijos para λ y X , la función \mathcal{H} se convierte en función del parámetro $u \in U$; se denotará por $\mathcal{M}(\lambda, X)$ el borde superior estricto de los valores de esta función:

$$\mathcal{M}(\lambda, X) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\lambda, X, u) \quad (13)$$

Entonces, si el borde superior estricto de los valores de la función continua \mathcal{H} se obtiene en algún punto del dominio de control U , $\mathcal{M}(\lambda, X)$ es el máximo de los valores de la función \mathcal{H} para λ y X fijos. Consiguientemente se aplicará el término "Principio del Máximo" al siguiente teorema, que establecerá la condición necesaria para optimalidad, cuya característica principal es la ec. (13).

TEOREMA 1. Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible tal que la trayectoria correspondiente $X(t)$ (ver (11)), partiendo en el instante t_0 del punto X_0 , pase en el instante t_1 a través de algún punto de la línea recta Π . Una condición necesaria para que el control $u(t)$ y la trayectoria $X(t)$ sean óptimas es que exista una función vectorial, distinta de cero, $\lambda(t) = (\lambda_0(t), \dots, \lambda_n(t))$, correspondiente a las funciones $u(t)$ y $X(t)$ (ver (12)), tal que: (i) Dada cualquier t , $t_0 \leq t \leq t_1$, la función $\mathcal{H}(\lambda(t), X(t), u(t))$ de la variable $u \in U$ obtenga un máximo en $u = u(t)$:

$$\mathcal{H}(\lambda(t), X(t), u(t)) = \mathcal{M}(\lambda(t), X(t)) \quad (14)$$

$$\text{(ii) En el instante final } t_1, \text{ las relaciones} \\ \lambda_0(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{M}(\lambda(t_1), X(t_1)) \equiv 0 \quad (15)$$

deben satisfacerse. Además, si las cantidades $\lambda(t), X(t), u(t)$, satisfacen los sistemas (11), (12) así como la condición (ii), las funciones $\lambda_0(t)$ y $\mathcal{M}(\lambda(t), X(t))$ de la variable t son constantes, tal que la verificación de las relaciones (15) se puede efectuar en cualquier instante t , $t_0 \leq t \leq t_1$, y no necesariamente en el instante t_1 .

5.- Problema de tiempo óptimo.

A partir del teorema 1 se deducirán las condiciones necesarias. Para esto, hágase $f^0(x, u) = 1$ en el teorema 1. En este caso la función \mathcal{H} toma la forma

$$\mathcal{H} = \lambda_0 + \sum_{v=1}^n \lambda_v f^v(x, u)$$

introduciendo el vector n-dimensional $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y la función

$$H(\lambda, x, u) = \sum_{v=1}^n \lambda_v f^v(x, u)$$

se puede escribir el sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

dados valores fijos de λ_0 y x , la función H se convierte en una función del parámetro u ; se denotará por $M(\lambda, x)$ el borde superior del valor de esta función:

$$M(\lambda, x) = \sup_{u \in U} H(\lambda, x, u)$$

como $H(\lambda, x, u) = \psi(\lambda, x, u) - \lambda_0$, se obtiene

$$M(\lambda, x) = \mathcal{M}(\lambda, x) - \lambda_0$$

de tal forma que las condiciones (14) y (15) ahora toman la forma

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = M(\lambda(t), x(t)) - \lambda_0 \geq 0$$

obteniéndose el siguiente teorema:

TEOREMA 2. Sea $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible que traslade el punto de fase de la posición x_0 a la posición x_1 y sea $x(t)$ la trayectoria correspondiente (ver (16)), tal que $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$. Una condición necesaria para que el control $u(t)$ y la trayectoria $x(t)$ sean de tiempo óptimo es que exista una función vectorial continua, distinta de cero, $-\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)]$ correspondiente a las funciones $u(t)$ y $x(t)$ -- (ver (17)), tal que: (i) Para toda $t, t_0 \leq t \leq t_1$, la función $H(\lambda(t), x(t), u)$ de la variable $u \in U$ alcance un máximo en el punto $u = u(t)$:

$$H(\lambda(t), x(t), u(t)) = M(\lambda(t), x(t)) \quad (18)$$

(ii) En el instante final t_1 , la relación

$$M(\lambda(t_1), x(t_1)) \geq 0 \quad (19)$$

se satisface.

Además, si las cantidades $\lambda(t), x(t), u(t)$ satisfacen a los sistemas (16), (17) y la condición (i), entonces la función $M(\lambda(t), x(t))$ de la variable t es constante, tal que la verificación de la relación (19) se puede efectuar en cualquier instante $t, t_0 \leq t \leq t_1$, y no necesariamente en el instante t_1 .

6.- Ejemplos.

1. Se ilustrará la aplicación de las condiciones necesarias del teorema 1.

Considérese el sistema $\ddot{x} + \dot{x} = u(t)$

cuyas ecuaciones de estado son $\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u \quad (1)$$

con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$. El criterio de comportamiento a minimizar es

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt \quad (2)$$

t_1 está especificado y el estado final es libre.

a) Determinar las condiciones necesarias para un control sin restricciones que minimice J .

Dado que $f^0(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t)$ (de 3.2, pág. 41) el

El Hamiltoniano \mathcal{H} es: (de la ec. 4-10, pág. 44)

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} u^2(t) + \lambda_1(t) x_2(t) - \lambda_2(t) x_2(t) + \lambda_2(t) u(t)$$

como $\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}$, $i = 0, 1, 2$ (3)

$$\dot{\lambda}_0(t) = 0 \Rightarrow \lambda_0^* = C = 1$$

$$\dot{\lambda}_1^*(t) = -x_1^*(t)$$

$$\dot{\lambda}_2^*(t) = -\lambda_1^*(t) + \lambda_2^*(t) \quad (4)$$

como el control $u(t)$ no tiene restricciones, es necesario que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0$$

nótese que $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = 1 > 0$, de (5): $\boxed{u^*(t) = -\lambda_2^*(t)}$ (5)

que minimiza al Hamiltoniano.

Para que $\min_u \mathcal{H}(\lambda, x, u) = -\mathcal{M}(\lambda, x)$ (de 4.13, pág. 45)

$$\mathcal{M}(\lambda(t_f), x(t_f)) = 0$$

es necesario que $\lambda = 0$ ($\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$) (7)

b) Determinar las condiciones necesarias para $u^*(t)$ si

$$-1 \leq u(t) \leq 1 \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (8)$$

Las ecs. de estado y de costo así como la condición de frontera para $x^*(t_f)$

permanecen sin cambio; sin embargo, ahora se deberá seleccionar tal que

$$\text{minimice } \mathcal{H}(x^*, u, x^*) = \frac{1}{2} x_1^{*2} + \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2^* - \lambda_2 x_2^* + \lambda_2^* u$$

sujeta a la restricción (8). (9)

Para determinar el control que minimiza \mathcal{H} , sepárense del Hamiltoniano -- primero todos los términos que contienen $u(t)$:

$$\frac{1}{2} u^2 + \lambda_2^* u \quad (10)$$

para los instantes de tiempo en que el control óptimo no está saturado (e sea fuera de los límites de restricción) se tiene que

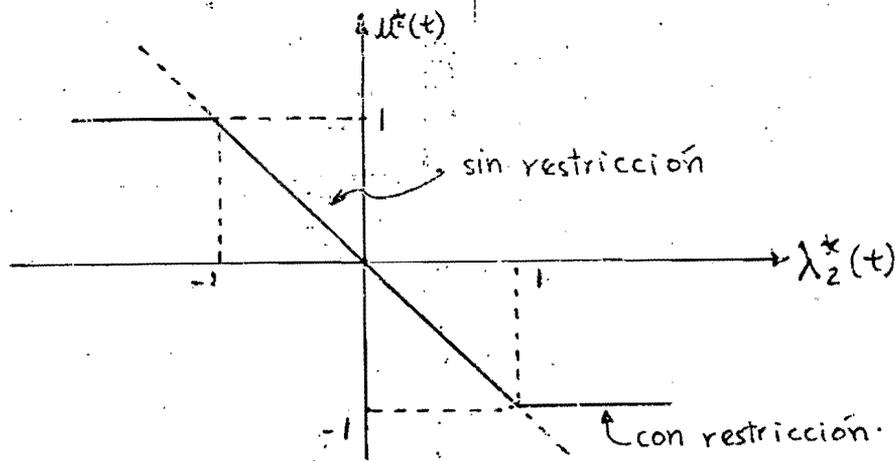
$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t) \quad (11)$$

claramente, esto ocurre cuando $|\lambda_2^*(t)| \leq 1$. Si, sin embargo, hay tiempos en que $|\lambda_2^*(t)| > 1$, entonces de (10) el control que minimiza \mathcal{H} es:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{cuando } \lambda_2^*(t) > 1 \\ +1 & \text{cuando } \lambda_2^*(t) < -1 \end{cases} \quad (12)$$

así, $u^*(t)$ es la función de saturación de $\lambda_2^*(t)$ que se muestra en la figura. En general:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } 1 < \lambda_2^*(t) \\ -\lambda_2^*(t) & \text{para } -1 \leq \lambda_2^*(t) \leq 1 \\ +1 & \text{para } \lambda_2^*(t) < -1 \end{cases} \quad (13)$$



2. Aplicación del teorema 2. Considérese la ec. $\dot{X} = u$, $u \in \mathbb{R} \ni |u| \leq 1$.

las ecuaciones de estado son $\dot{X}_1 = X_2$, $\dot{X}_2 = u$ (1)

considérese el problema de más rápido descenso al origen (0,0) a partir de un estado inicial x_0 . Es decir, considérese el problema de tiempo óptimo cuando la posición final es el origen $x_1 = (0,0)$.

$$H(\lambda, x, u) = \sum_{v=1}^2 \lambda_v f^v(x, u)$$

$$H = \lambda_1 X_2 + \lambda_2 u \quad (2)$$

luego, como $\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$

se obtienen $d\lambda_1/dt = 0$, $d\lambda_2/dt = -\lambda_1$ (3)

como $\lambda_1 = c_1$, $\lambda_2 = c_2 - c_1 t$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$), las relaciones

y la condición $-1 \leq u \leq 1$ dan: $H(\lambda, x, u) = M(\lambda, x)$

$$u(t) = \text{sign } \lambda_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } \lambda_2^*(t) > 0 \\ -1 & \text{para } \lambda_2^*(t) < 0 \end{cases} = \text{sign}(c_2 - c_1 t) \quad (4)$$

de la ec. (4) se ve que todo control óptimo $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, es una función continua por partes, tomando los valores ± 1 y teniendo no más de dos intervalos de constancia.

Para el intervalo en que $u \equiv 1$, se obtiene

$$X_2 = t + s^2 \quad \text{y} \quad X_1 = \int (t + s^2) dt = \frac{t^2}{2} + s^2 t + s^1$$

$$\boxed{X_1 = \frac{1}{2} (X_2)^2 + s^1} \quad \text{donde } s = s^1 - \frac{1}{2} (s^2)^2 \quad (\text{fig. 2})$$

es una constante (5)

similarmente, para el intervalo de tiempo en el que $u \equiv -1$:

$$X_2 = -t - (s^1)^2$$

$$X_1 = -\frac{t^2}{2} + s^2 t + s^1$$

$$\boxed{X_1 = -\frac{1}{2} (X_2)^2 + s^1} \quad \text{siendo } s^1 = s^1 + \frac{1}{2} (s^2)^2 \quad (\text{fig. 3}) \quad (6)$$

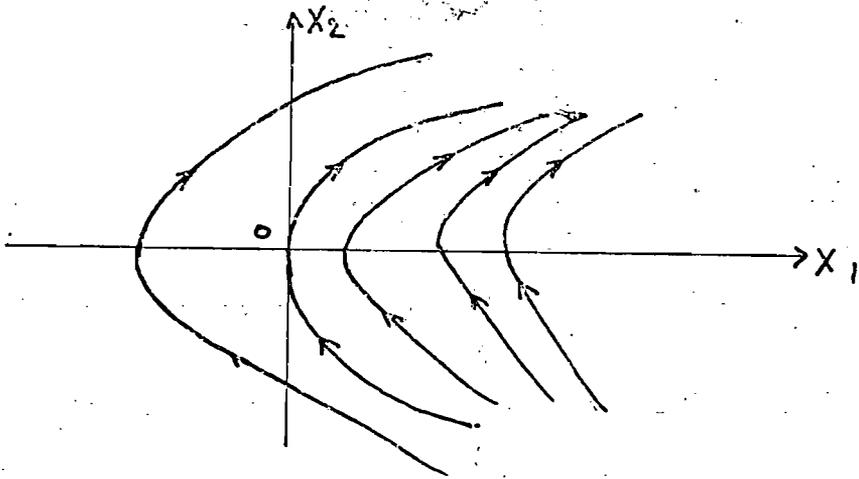


Figura 2.

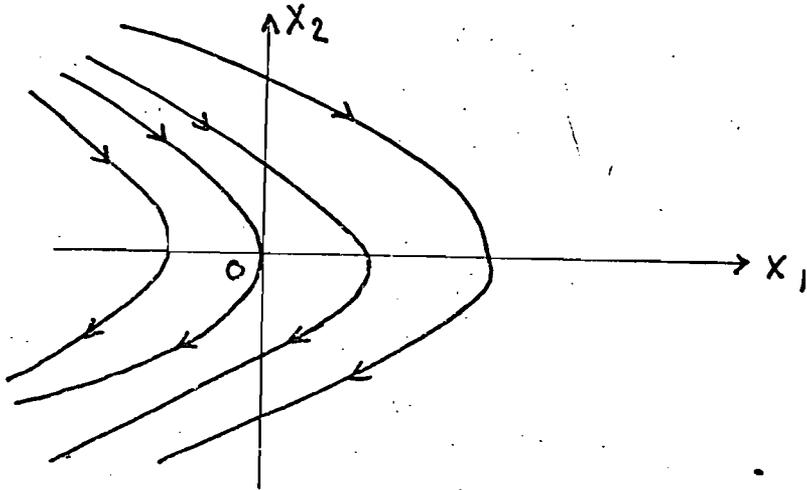


Figura 3

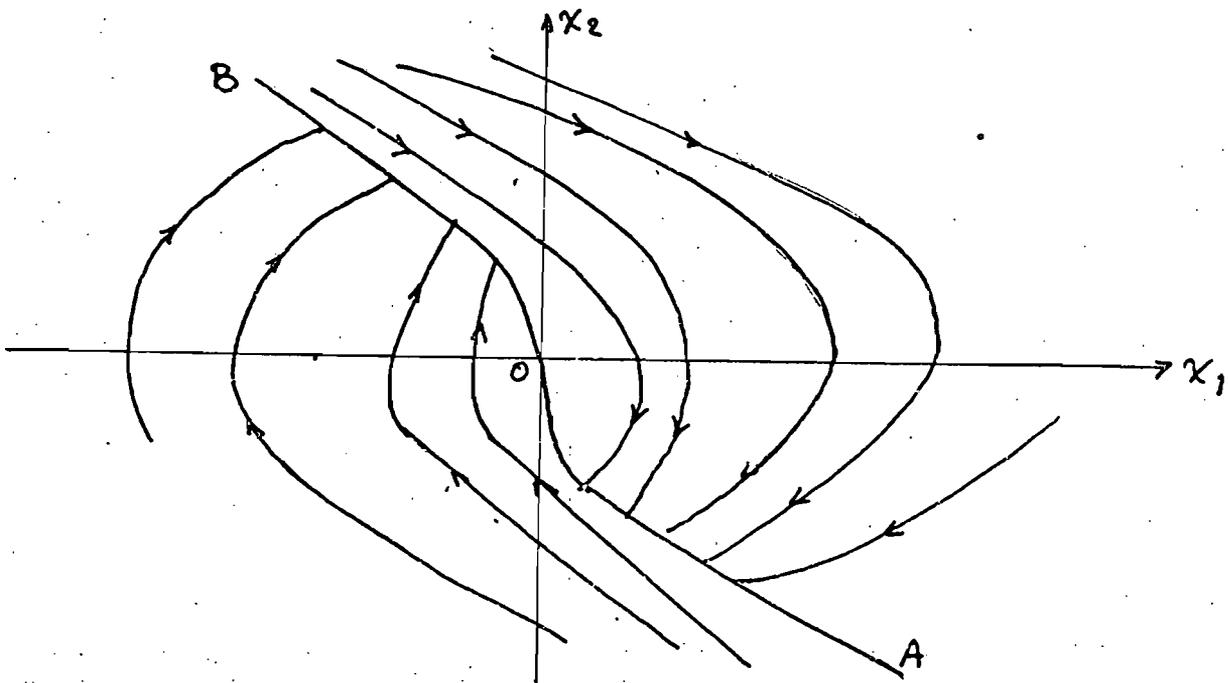


Figura 4
48-a

La solución del problema óptimo obtenido de este ejemplo se puede interpretar como sigue:

Sea $v(x_1, x_2)$ una función en el plano X_1, X_2 , tal que

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{bajo la curva AOB y sobre el arco AO} \\ -1 & \text{sobre la curva AOB y sobre el arco BO.} \end{cases} \quad (\text{fig. 4})$$

el valor $u(t)$ del parámetro de control (en un instante arbitrario t) es igual a $v(x(t))$ sobre cada trayectoria óptima, $u(t) = v(x(t))$

Esto significa que, reemplazando u por la función $v(x)$ en el sistema (1), se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= v(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (27)$$

la solución del cual (para cualquier estado inicial x_0) da una trayectoria de fase óptima hacia el origen.

3. Aplicación del teorema 2. Ahora considérese la ec. $\ddot{X} + X = u, |u| \leq 1$.

Esta ec. es equivalente al sistema: $\dot{X}_1 = X_2$

$$\dot{X}_2 = -X_1 + u \quad (28)$$

La función $H(\lambda, x, u) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i^v(x, u)$ es

$$H = \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 u - \lambda_2 x_1 \quad (29)$$

como $d\lambda_i/dt = -dH/dx_i, i=1,2,$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= \lambda_2, & \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\lambda_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda_2 &= A \sin(t - \alpha_0) \text{ donde } A > 0 \\ & \text{y } \alpha_0 \text{ son constantes.} \end{aligned}$$

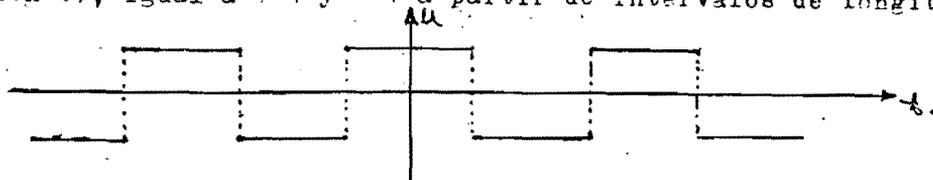
de la relación (2.3-1)

se obtiene (usando tambi

én (2) y la condición de que $|u| \leq 1$):

$$u = \text{sign } \lambda_2 = \text{sign}(A \sin(t - \alpha_0)) = \text{sign}(\sin(t - \alpha_0)) \quad (3)$$

La función $u(t)$ se obtiene desplazando sobre un intervalo α_0 la función $\text{sign}(\sin t)$, igual a +1 y -1 a partir de intervalos de longitud π .



Para encontrar las partes de las trayectorias correspondientes a los intervalos de tiempo en los que $u = 1$ y $u = -1$, formamos el sistema auxiliar (obtenido de (28) con $u=0$):

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -X_1 \end{aligned} \quad (4)$$

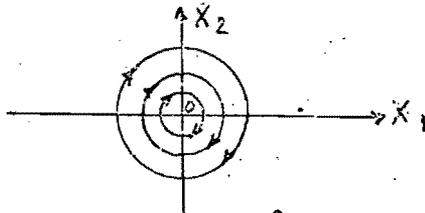
cualquier solución de (4) es de la forma

$$X_1 = -R \cos(t + \alpha), \quad X_2 = R \sin(t + \alpha) \quad (5)$$

donde R y α son constantes ($R \geq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi$). Las trayectorias de fase son,



por consiguiente, círculos con centro en el origen: $(X_1)^2 + (X_2)^2 = R^2$ (6)



cuando $u = 1$, el sistema (1) es

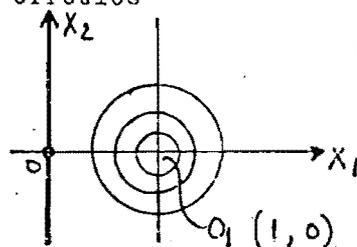
$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 + 1 \end{cases} \quad (7)$$

o equivalentemente:

$$\left. \begin{cases} \frac{d}{dt}(X_1 - 1) = X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} = -(X_1 - 1) \end{cases} \right\} \quad (8)$$

las trayectorias de fase del sistema (8) son los círculos

$$(X_1 - 1)^2 + (X_2)^2 = R^2 \quad (9)$$



similarmente, cuando $u = -1$ el sistema (1) queda

$$\left. \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -X_1 - 1 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{Las trayectorias de fase son los} \\ \text{círculos } (X_1 + 1)^2 + (X_2)^2 = R^2 \\ \text{(con centro en } O_1(-1, 0) \text{).} \end{array} \quad (10)$$

7. - Problema de puntos extremos móviles. Condiciones de transversalidad.

Sean S_0 y S_1 hipersuperficies suaves de dimensión r_0, r_1 (menores que n) en el espacio X . El problema: encontrar el control admisible $u(t)$ que traslade el punto de fase (no asignado previamente) de la posición $x_0 \in S_0$ a alguna posición $x_1 \in S_1$ asignándole un valor mínimo a la funcional J .

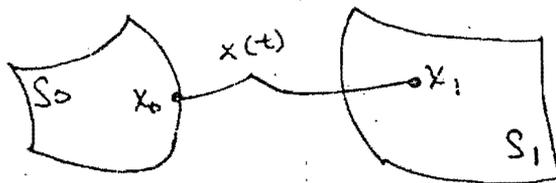


Figura 1.

Si las dos hipersuperficies S_0 y S_1 degeneran a puntos, entonces el problema anterior se convierte en un problema de puntos extremales fijos. También si se conocen los puntos x_0 y x_1 en S_0 y S_1 , respectivamente. Entonces, un control $u(t)$, óptimo en el sentido del problema con extremos móviles, también es óptimo en el sentido establecido por los teoremas 1 y 2. En el caso actual se requiere de establecer relaciones que definan las posiciones de x_0 y x_1 sobre las hipersuperficies S_0 y S_1 . Estas relaciones se darán por medio de las Condiciones de Transversalidad.

Conjuntamente con el Principio del Máximo, las condiciones de transversalidad forman un sistema de condiciones suficientes para la solución del problema óptimo con extremos móviles.

Ahora se establecerán las condiciones de transversalidad:

Sean $x_0 \in S_0$ y $x_1 \in S_1$ puntos dados y T_0, T_1 los planos tangentes a las hipersuperficies S_0 y S_1 en estos puntos. Los planos T_0 y T_1 están en el espacio X y tienen dimensiones r_0, r_1 , respectivamente. Además, sean $u(t), x(t), t_0 \leq t \leq t_1$, la solución del problema óptimo con extremos fijos x_0 y x_1 . Finalmente, sea $\lambda(t)$ el vector cuya existencia ha sido establecida en el teorema 1. El vector $\lambda(t)$ satisface la C. de T. en el extremo derecho de la trayectoria $x(t)$ (o sea en el punto $x(t_1)$) si el vector $\lambda(t_1) = (\lambda_1(t_1), \lambda_2(t_1), \dots, \lambda_n(t_1))$ es ortogonal al plano T_1 . En otras palabras, la C. de T. implica que la relación $[\lambda(t_1), \theta] = 0$ se satisface para cualquier vector $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ perteneciente (o paralelo) al plano T_1 . La cond. de T. en el extremo izquierdo de la trayectoria $x(t)$ tiene un significado similar. El teorema que da solución al problema con extremos móviles es:

TEOREMA 3. Sea $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible que traslada el punto de fase de alguna posición $x_0 \in S_0$ a la posición $x_1 \in S_1$, mientras que $x(t)$ es la trayectoria correspondiente (emanando del punto $X_0 = (0, x_0)$). La condición necesaria para que $u(t), \lambda(t)$ den la solución del problema óptimo con extremos móviles es la existencia de una función vectorial con-

tínua $\lambda(t)$, distinta de cero, que satisfaga las condiciones indicadas en el teorema 1 y también las condiciones de transversalidad en ambos extremos - de la trayectoria $X(t)$.

3.- El Principio del Máximo para Sistemas No-autónomos.

Considérese un problema óptimo como el planteado en 1 y 2 en el caso cuando las funciones f^α explícitamente dependen del tiempo (el dominio de control U se supone independiente del tiempo).

La ley de movimiento y la funcional cuyo mínimo se busca son

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt \quad (2)$$

el tiempo t_0 se considera dado, mientras que t_1 es el tiempo requerido -- para pasar por el punto x_1 . Igual que en la sección 3 se introduce la nueva coordenada

$$X^0 = \int_{t_0}^t f^0(x(t), u(t), t) dt$$

El problema es: Dado el punto $X_0 = (0, x_0)$ y la línea recta Π , paralela al eje X^0 , que pasa por el punto $(0, x_1)$ en el espacio $n+1$ -dimensional X , en

contrar de entre todos los controles admisibles $u=u(t)$, que tengan la propiedad de que la correspondiente solución $X(t)$ al sistema (1) con la

condición inicial $X(t_0) = X_0$ interseccione a la línea recta Π , aquel control para el cual el punto de intersección con Π tiene la mínima coordenada X^0 .

Para resolver este problema se introduce una variable auxiliar desconocida x^{n+1} , tal que

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1, \quad X^{n+1}(t_0) = t_0. \quad (3)$$

Obviamente $X^{n+1} = t$. Sea X^* el espacio de las variables $x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}$. Entonces el sistema (3) se puede escribir de la siguiente forma autónoma (es decir no dependiente explícitamente de t)

$$\begin{aligned} dx^i/dt &= f^i(x, u, x^{n+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n \\ dx^{n+1}/dt &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora se tendrá que encontrar la trayectoria óptima que une, en el espacio X^* , el punto $(X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^n, t_0)$ con algún punto de la línea recta S_1 que pasa por el punto $(X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^n, 0)$, paralela al eje x^{n+1} . Entonces se llega al problema óptimo con extremo izquierdo fijo y extremo derecho movable.

El sistema de ecs. auxiliares (4.8) ahora tiene la forma

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \lambda_\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

$$\frac{d\lambda_{n+1}}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \lambda_\alpha \quad (6)$$

De acuerdo a los teoremas 1 y 3, para resolver el problema se tiene que formar la función:

$$\lambda_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \lambda_1 f^1(x, u, x^{n+1}) + \dots + \lambda_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \lambda_{n+1} \cdot 1$$

denotaremos esta función por \mathcal{H}^* , conservando la notación \mathcal{H} para

$$\mathcal{H}(\lambda, x, t, u) = \lambda_0 f^0(x, u, t) + \lambda_1 f^1(x, u, t) + \dots + \lambda_n f^n(x, u, t)$$

con la ayuda de las ecs. (3) y (5):

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

similarmemente, $\mathcal{M}^*(\lambda, x, x^{n+1})$ denota el máximo con respecto a u de la función

\mathcal{H}^* mientras que $\mathcal{M}(\lambda, x, t)$ el máximo con respecto a u de la función

\mathcal{H} , para λ, x, t fijas. Así, usando la relación $x^{n+1} \equiv t$, es posible escribir: $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} + \lambda_{n+1}$; $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} + \lambda_{n+1}$ tales que $\mathcal{H}^* = \mathcal{M}^* = 0$, a lo largo de la trayectoria óptima toma la forma:

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x(t), u(t)) = \mathcal{M}(\lambda(t), x(t), t) \equiv -\lambda_{n+1}(t) \quad (7)$$

Finalmente, la C. de T. en el extremo derecho de la trayectoria establece

que la línea recta S_1 es ortogonal al vector $(\lambda_1(t_1), \lambda_2(t_1), \dots, \lambda_{n+1}(t_1))$,

en otras palabras $\lambda_{n+1}(t_1) = 0$. Conjuntamente con las ecs. (7), (6) esto

$$\mathcal{M}(\lambda(t), x(t), t) = \int_{t_0}^t \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x, u, t)}{\partial t} \lambda_\alpha(t) dt$$

obteniéndose así el teorema del Principio del Máximo para Sistemas No-Autónomos:

TEOREMA 4.- Sea $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible tal que la trayectoria correspondiente del sistema (3), emanando en el instante t_0 del punto x_0 , pase en el instante t_1 a través de un punto de la línea recta $\overline{\Pi}$.

La condición necesaria para que el control $u(t)$ y la trayectoria $X(t)$ sean óptimas es que exista la función vectorial $\lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$,

distinta de cero, correspondiente a las funciones $u(t)$ y $x(t)$ (ver (5)) -

tales que: (i) Para toda $t, t_0 \leq t \leq t_1$, la función $\mathcal{H}(\lambda, x, u, t)$ de la variable $u \in U$ alcance un máximo en el punto $u = u(t)$

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x(t), t, u(t)) = \mathcal{M}(\lambda(t), x(t), t) \quad (8)$$

(ii) Las condiciones $\lambda_0(t) = \text{constante} \leq 0$

$$\mathcal{M}(\lambda(t), x(t), t) = \int_{t_0}^t \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \lambda_\alpha(t) dt \quad (9)$$

se satisfagan. Además, para que $\lambda(t), X(t), u(t)$ satisfagan al sistema (3),

(5) y la condición (i), la función $\lambda(t)$ de la variable t es constante,

mientras que la función $\mathcal{M}(\lambda, x, t)$ solo puede diferir por una constante

de la integral en la segunda de las relaciones (9); de tal forma que

es suficiente con verificar (9) en cualquier instante $t, t_0 \leq t \leq t_1$; o bien

en vez de (9), será suficiente con verificar la condición

$$\lambda_0(t_1) \leq 0, \quad \mathcal{M}(\lambda(t_1), x(t_1), t_1) = 0 \quad (10)$$

9.- La relación entre el Principio del Máximo y el Método de Programación Dinámica.

Comentarios. El método de la P.D. de Bellman se desarrolló para satisfacer los requerimientos de Control Óptimo en procesos de naturaleza mucho más general que aquellos procesos que pueden ser descritos por sistemas de ecuaciones diferenciales. Es, por tanto, más universal en sus alcances que el Principio del Máximo. Por otro lado la P.D. carece de una fundamentación lógica estricta por lo que se le considera una herramienta heurística.

Ahora lo que interesa es la aplicación del método de P.D. al problema óptimo enunciado en la sección 2. La fundamentación del método de Bellman presupone una condición esencial extra que debe añadirse a las condiciones naturales del problema y es que la función $\omega(x)$, que se definirá más adelante, sea diferenciable. Esta condición no se obtiene del establecimiento del problema y representa una restricción que, como se mostrará a continuación, no se cumple aún en los casos simples.

Una vez aplicada tal consideración, el método de la PD conduce a una EDP que se llamará la "ec. de Bellman". Esta ecuación (dadas ciertas condiciones suplementarias) es equivalente al sistema Hamiltoniano (4.11-12) y la condición de máximo (4.14-15).

Ahora se explicará un tratamiento del método de PD e indicará su conexión con el Principio del Máximo. Por simplicidad sólo se considerará el problema de tiempo óptimo.

Fíjese un punto x_1 del espacio X y sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control óptimo que traslade el punto de fase de la posición $x_0 \in X$ a la posición x_1 siendo $x(t)$ la trayectoria óptima correspondiente. El tiempo de tránsito óptimo, $t_1 - t_0$, será denotado por $T(x_0)$.

Entonces, se define la función $T(x_0) \in \Omega$ donde Ω es el conjunto de todos los puntos de X por los que es posible el tránsito óptimo hacia x_1 .

La consideración fundamental, generalmente usada para fundamentar el Principio de PD (y que también se usará aquí), establece el hecho de que el conjunto Ω es abierto en el espacio X y que la función $T(x)$ tiene derivadas parciales continuas con respecto a las coordenadas del punto x . La función $\omega(x) = -T(x)$ se define en vez de $T(x)$. Si $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, es una trayectoria óptima y si cada tramo de una trayectoria óptima es en sí una trayectoria óptima, la relación es válida para cualquier t , $t_0 \leq t \leq t_1$

$$; \quad \omega(x(t)) = -T(x_0) + t - t_0$$

consecuentemente

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), u(t)) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} \frac{d x^\alpha(t)}{dt} = \frac{d\omega(x(t))}{dt} = 1 \quad (1)$$

Sea $v \in U$, cualquier elemento en U y considérese el movimiento $x(t)$ bajo la acción del control $v(t)$. Después de un intervalo de tiempo infinitesimal $dt > 0$, el punto de fase estará en la posición $x(t)+dx$, donde el vector $dx = (dx^1, \dots, dx^n)$ está dado por

$$dx^i = f^i(x(t), v) dt \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

al moverse óptimamente de $x(t)+dx$ hasta x_1 , el tiempo tomado será $T(x(t)+dx)$. Así, el tiempo total empleado en moverse del punto $x(t)$ al punto x_1 es igual a $T(x(t)+dx) + dt$. Este tiempo no puede ser menor que el tiempo de tránsito óptimo $T(x(t))$, es decir se tendrá $T(x(t)+dx) + dt \geq T(x(t))$, ó lo que es igual

$$\omega(x(t)+dx) - \omega(x(t)) \leq dt$$

por (2), la última desigualdad se puede volver a escribir:

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), v) dt \leq dt$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), v) \leq 1, \quad v \in U \quad (3)$$

las relaciones (1) y (3) dan $\sup_{v \in U} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x(t), v) = 1$

conclusión: La función $\omega(x)$ en el dominio Ω a la siguiente ecuación diferencial-parcial no clásica, que llamaremos ecuación de Bellman,

$$\sup_{u \in U} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) = 1 \quad (4)$$

"el borde superior se obtiene para alguna $u \in U$, mientras que la función $\omega(x)$ es no-positiva y se desvanece solamente en el punto x_1 ".

De hecho, este es el principio de la PD aplicado al presente problema. Ahora se mostrará como se puede deducir el Principio del Máximo del Principio de PD; para ello se considerará que $\omega(x)$ es dos veces continuamente diferenciable. En vista de esta suposición, la función

$$g(x, u) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) \quad (5)$$

que aparece en (4) bajo el signo del borde superior, tiene primeras derivadas continuas con respecto a x^1, \dots, x^n .

Del principio de PD, ver (1) y (4) se vé que $u(t)$ es un control óptimo trasladando el punto de fase de x_0 a x_1 , mientras que $x(t)$ es la correspondiente trayectoria óptima, para t fijo, $t_0 \leq t \leq t_1$, la función $g(x, u(t))$, tendrá un valor máximo (igual a la unidad) en el punto $x = x(t)$. De lo anterior se obtienen

$$\frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial x^i} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

de (5) se obtienen las condiciones

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 \omega(x(t))}{\partial x^\alpha \partial x^i} f^\alpha(x(t), u(t)) + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (6)$$

se tiene además

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 \omega(x(t))}{\partial x^\alpha \partial x^i} f^\alpha(x(t), u(t)) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i} \right) \frac{d x^\alpha(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i} \right)$$

y (6) se puede volver a escribir como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i} \right) = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^\alpha}, \quad i=1, \dots, n$$

consiguientemente, a lo largo de cualquier trayectoria óptima las cantidades

$$\lambda_i(t) = \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x^i}, \quad i=1, \dots, n \quad (7)$$

satisfacen el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d \lambda_i(t)}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} \lambda_\alpha(t), \quad i=1, \dots, n \quad (8)$$

resumiendo, por (1), la ecuación de Bellman (4) puede escribirse como

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha(t) f^\alpha(x(t), u(t)) = \sup_{u \in U} \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha(t) f^\alpha(x(t), u(t)) = 1 \quad (9)$$

las ecs. (8) y (9) son las mismas del Principio del Máximo, mientras que (7)-

indica explícitamente la relación entre las cantidades $\lambda_i(t)$ con la función $\omega(x)$.

Nótese también, de (9), que el movimiento óptimo siempre se puede efectuar -

de tal forma que $H(\lambda(t), x(t), u(t)) \equiv 1 \quad (10)$

a lo largo de trayectorias óptimas.

10.- Conclusiones.

Relación del Principio del Máximo con la Teoría clásica:

Respecto al Hamiltoniano clásico con $x, p \in \lambda$, se tienen las E.D. canónicas*

$$\dot{x}_i = \partial H / \partial \lambda_i, \quad i=1, \dots, n \quad (a)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\partial H / \partial x_i \quad (b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (c)$$

(H es extremo en u)

La teoría de Pontryagin establece que (c) no se cumple siempre ya sea porque el control u es discontinuo o bien puede ser un "control saturado" (y acotado a una región).

El primer teorema del máximo establece condiciones necesarias para la solución del problema general de Mayer y Bolza en forma canónica. También, el primer teorema del máximo demuestra que existen multiplicadores (resolución del problema general de Lagrange) $\lambda_0 < 0, \lambda_i(t)$, no todos nulos. tales que junto con las variables de estado generalizado o ampliado x_i , aparecen como variables conjugadas de "coestado" generalizado λ_i ($i=0, 1, \dots, n$) ampliándose el estado (x_1, \dots, x_n) al "ficticio" (x^0, x_1, \dots, x_n) . Además, si el espacio de controles es región abierta de R^m , o bien es todo R^m , el problema de Pontryagin es equivalente al clásico de Lagrange y el "Principio del Máximo" de \mathcal{H} es la condición necesaria de Weierstrass, [13] Cap.5.p.p.239-241.

La diferencia esencial entre la teoría de Pontryagin y la clásica es que en ésta U es arbitrario no acotado en R^m , y resulta que la mayoría de problemas técnicos no tienen solución si U es una región arbitraria ó si es abierta y que existe solución sólo si U es acotada y cerrada [7], [13] en general, y en particular, si el control $u(t) \in \partial U$ (frontera de U). Si U es cerrada, no se aplica el criterio de Weierstrass. Si un problema tiene solución en ambas teorías, tales soluciones en general son diferentes.

Relación con la Programación Dinámica: Pontryagin destaca fundamentalmente qué, aunque la ecuación de H-J-B se ha desarrollado: "... para la necesidad de controles óptimos de procesos de carácter más general que aquellos descritos por ecuaciones diferenciales, también el método de Programación Dinámica reviste un carácter más universal que el método del Principio del Máximo". Sin embargo, a diferencia de éste último, aquel método no ha sido demostrado con la rigurosidad deseada, pero se aplica como un valioso instrumento-práctico.

* llamadas en [13]

Ecs. Canónicas de Euler - Lagrange.

Esencialmente, estas dos teorías tienen en común a la E.D. de Hamilton-Jacobi-Bellman, ya que las E.D. canónicas de Pontryagin son equivalentes a una E.D. de Hamilton-Jacobi. El " Principio de Optimalidad " de Bellman fue formulado primero, independientemente. La comunidad de la E.D.P. de H-J-B en ambas teorías es una notable ^{coincidencia}, aunque no casual. Bellman no deduce un S.D. canónico como el de Pontryagin, pero toda E.D. de Hamilton-Jacobi de un proceso implica la validez de algún S.D. ordinario canónico.

C A P I T U L O . V I

TEORIA DE KALMAN-CARATHEODORY PARA EL CONTROL OPTIMO.

Contenido

- 1.- Introducción.
- 2.- Notación empleada.
- 3.- Enunciado del problema.
- 4.- Relaciones con el Cálculo de Variaciones.
Lema de Carathéodory.
- 5.- Controlabilidad.
- 6.- Solución al problema del regulador.
- 7.- Estabilidad de la ecuación de Riccati.
- 8.- Solución general de la ecuación de Riccati.
- 9.- Conclusiones.

considerase a la "Planta" lineal

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + G(t)u(t) \quad \dots (1)$$

$$Y(t) = H(t)X(t) \quad \dots (2)$$

donde $X \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^p$. Se considerará el caso particular en el que las matrices F, G, H son constantes.

$$F \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad G \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad H \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n.$$

Para determinar el "estado" $x(t)$ se considerará que

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

A) $u=0$, ecuación homogénea: $\dot{X}_h(t) = F X_h(t)$, $X(t_0) = X_0$
la solución es de la forma $X_h(t) = e^{F(t-t_0)} C$, aplicando la condición inicial se obtiene: $X_h(t) = e^{F(t-t_0)} X_0 \quad \dots (3)$

Tómese en cuenta que

$$e^{F(t-t_0)} = I + F(t-t_0) + \frac{F^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{F^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots$$

$$e^{F(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k (t-t_0)^k}{k!} \quad \text{Y} \quad \Phi(t, t_0) \triangleq e^{F(t-t_0)}$$

$\Phi(t, t_0)$ es la Matriz de transición del sistema. Tiene las siguientes propiedades:

i) $\Phi(t, t) = I$

ii) $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$, $t_0 < t_1 < t_2$.

B) $u \neq 0$, X_p es la solución particular. Se determinará por el método de Variación de Parámetros, debido a Joseph Louis Lagrange (1736-1813); Sea $X_p(t) = e^{F(t-t_0)} V(t) \quad (4)$

donde $V(t) \in \mathbb{R}^n$, es un vector de Parámetros desconocido.

de (4): $\dot{X}_p(t) = F e^{F(t-t_0)} V(t) + e^{F(t-t_0)} \dot{V}(t) \quad (5)$

Sustituyendo (5) en (1) se obtiene:

$$\dot{V}(t) = e^{-F(t-t_0)} G u(t)$$

por lo que $V(t) = \int_{t_0}^t e^{-F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau \quad (6)$

1.- Introducción.

La teoría convencional del regulador está basada ampliamente en las transformadas de Laplace y de Fourier, el Cálculo de Variaciones (ec. de Hamilton-Jacobi) y más recientemente en la Programación Dinámica (ec. H-J-B).

El análisis que a continuación se resume^[16] tiene por objetivo resolver el problema del regulador para una funcional de evolución cuadrática basándose en la teoría variacional de Carathéodory y la ec. de Hamilton-Jacobi, además, como parte del desarrollo se define un estado controlable y se establecen condiciones necesarias para que una planta sea controlable. En general, se establecen teoremas de existencia y estabilidad para el problema del regulador y se analizan las propiedades de estabilidad de la ecuación matricial de Riccati, la cual se obtiene como un caso especial de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

2.- Notación.

Se usará la notación vectorial común, con las siguientes convenciones: Las letras griegas minúsculas son escalares; las letras latinas minúsculas son vectores, las mayúsculas son matrices. La matriz unitaria es I. Excepciones: i, j, m, n, p son enteros; t, E, L, J son escalares; ϕ, ψ, ξ, \dots son vectores. $[x, y]$ es el producto interno de x e y. La transpuesta de una matriz se indica por el símbolo "primo" ($'$), la norma de un vector x es $\|x\| = [x, x]^{1/2}$, Norma Euclidiana. La norma $\|A\|$ de una matriz A es $\sup \|Ax\|$ sobre $\|x\| = 1$. Terminología especial: $\|x\|_p^2 = [x, Px]$ donde P es simétrica y no-negativa definida. Si A, B son simétricas, $A > B$ significa que A-B es positiva definida. Las letras t, τ, ζ son escalares que representan el tiempo. Para una función escalar L(u), L_u es el vector gradiente y L_{uu} es la matriz Jacobiana. Se estudiará el sistema representado por las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = H(t)x(t) \quad (2)$$

donde $u \in R^m$, $x \in R^n$ e $y \in R^p$. Para dar un enfoque físico al problema se ha adoptado la siguiente terminología: las ecs. (1) y (2) son el modelo de la planta (o simplemente la planta); x es el estado de...; u(t) es la función de control o entrada a...; y(t) es la salida de la planta. La planta es constante si F, G, H, son constantes (también llamada "invariante en el tiempo"). Si u(t)=0 o G(t)=0, la planta es libre. El comportamiento de la planta está

descrito por la ecuación diferencial (1), siendo la solución general:

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau) d\tau \quad (3)$$

donde $\Phi(t, \tau)$ definida para toda t, τ es una matriz fundamental (llamada también matriz de transición) de soluciones del sistema libre, debiendo satisfacer que:

$$\Phi(t, t) = I \quad \forall t \quad (4)$$

La solución (3) de (1) es llamada conceptualmente "el movimiento del estado"

$$X(t) = \phi_u(t; x, t_0) \quad (5)$$

la función $\phi_u(t; x, t_0) = \phi(t; u[t_0, t], x, t_0)$ (5.1)

los movimientos libres, o sea la evolución del estado con $u(t)=0$ se representará por ϕ_t . El estado de equilibrio x^e es $x^e = \phi_t(t; x^e, t_0) \quad \forall t, t_0$.

3.- Enunciado del problema.

En aplicaciones simples, el objetivo de un sistema de control es el siguiente: "Dado un estado x de la planta (2.1) en cualquier tiempo t_0 , generar una función de control $u(t)$ definida para $t \geq t_0$ y dependiente de x, t_0 , que cause que x sea transferido al estado de equilibrio 0". En otras palabras, $u(t)$ se escoge tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t; x, t_0) = 0 \quad (1)$$

Físicamente, para generar la función $u(t)$ se deberá contar con un algoritmo que calcule $u(t_1)$ a partir de $y(t)$ para $t \leq t_1$. Esto se conoce como el "principio de retroalimentación".

La realización física del problema se puede separar en dos etapas:

- (A) Cálculo de la "mejor aproximación" $\hat{x}(t_1)$ del estado $x(t_1)$ a partir del conocimiento de $y(t)$ para $t \leq t_1$.
- (B) Cálculo de $u(t_1)$ dado $\hat{x}(t_1)$.

El problema (A) es concerniente a la teoría de Wiener de estimación. Aquí supondremos que $x(t)$ se conoce exactamente y tomando en cuenta el Principio de Retroalimentación, el problema de generar $u(t)$ se reduce a especificar la ley de control:

$$u(t) = k(x(t), t) \quad (2)$$

Para obtener la ley de control se añade la consideración de que "la integral de una función de estado no negativa a lo largo de cualquier movimiento ϕ_u se minimizará por la $u(t)$ escogida". Este enunciado determina $u(t)$ y por tanto la ley de control (2), implicando (1). Al problema resultante se le llama OPTIMAL. Ahora se expresará el

(3) PROBLEMA DEL REGULADOR OPTIMO. Encontrar una ley de control (2) para la cual

$$J^*(x, t_0, t_1) = \inf_{u(t)} \left\{ V(\phi_u(t); x, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} L(\phi_u(t); x, t_0, u(t), t) dt \right\} \quad (4)$$

se obtiene para toda x, t_0 y t_1 , donde V y L son funciones escalares.

Del cálculo de Variaciones se aplicará la condición

$$L_{uu}(x, u, t) > 0 \quad \forall x, u, t \quad (5)$$

que es equivalente a suponer que L es estrictamente convexa en u . En términos ingenieriles, t_1 es el tiempo terminal, la integral es el criterio de comportamiento y L es la función de costo. La función V se añade para mayor generalidad. Se utiliza la notación $J(x, t_0, t_1, u)$ para indicar el valor de la integral en (4) correspondiente a cierta $u(t)$. El índice superior * identifica "optimal".

4.- Relaciones con el Cálculo de Variaciones.

(1) Lema de Carathéodory. Sea $k(x, t)$ una función vectorial de m componentes y clase C^1 en x, t . Denótese $u^* = k(x, t)$. Supóngase que $V = 0$ y que la función L en (3.4) satisface las siguientes condiciones para toda x y toda $t_0 \leq t < t_1$:

$$(a) L(x, u^*, t) = 0$$

$$(b) L(x, u, t) > 0 \quad \forall u \neq u^*$$

entonces el criterio de comportamiento J^* es idénticamente cero para toda x y se obtiene por medio de la ley de control óptimo dada por

$$u^* = k(x(t), t) \quad (2)$$

Ahora, sea $J^*(x, t, t_1)$ una función escalar arbitraria de clase C^2 en x, t (t_1 es fijo) tal que

$$J^*(x, t_1, t_1) = V(x) \quad (3)$$

luego se reemplaza L por

$$L^*(x, u, t) = L(x, u, t) + J_t^*(x, t, t_1) + [J_x^*(x, t, t_1), F(t)x + G(t)u]$$

la integral de los dos últimos términos, a lo largo de cualquier movimiento entre los límites t_0 y t_1 es

$$V(\phi_u(t); x, t_0) - J^*(x, t_0, t_1) \quad (4)$$

ya que el segundo término en (4) no depende de $u(t)$, resulta que los dos problemas variacionales

$$\inf_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} L^*(\phi_u(t); x, t_0, u(t), t) dt \quad (5)$$

y (3.3) son equivalentes en que ambos tienen la misma función minimizadora $u(t)$. Ahora se tratará de encontrar funciones $J^*(x, t, t_1)$ y $k(x, t, t_1)$ que satisfagan la hipótesis del Lema cuando L se reemplaza por L^* .

Para que $L^*(x, u, t)$ tenga un mínimo respecto a u en $u = u^* = k(x, t, t_1)$,

es necesario que todas las primeras derivadas parciales de L^e con respecto a u se eliminen en u^* . Esto y la condición $L^e(x, u^*, t) = 0$ dan

$$L^e(x, u, t) \rightarrow \min \Rightarrow L_u^e = 0, \text{ o sea:}$$

$$L_u(x, u^*, t) + [J_x^*(x, t, t_1), G(t)] = 0 \quad \dots$$

$$\boxed{G'(t) J_x^* = -L_u(x, u^*, t)} \quad (6)$$

y $L^e(x, u^*, t) = 0 = L(x, u^*, t) + J_t^* + [J_x^*, F(t)x + G(t)u^*]$

$$\boxed{-J_t^* = L(x, u^*, t) + [J_x^*, F(t)x + G(t)u^*]} \quad (7)$$

Carathéodory llama a estas ecuaciones "las ecuaciones fundamentales" del problema variacional (3.3). Adviértase que (7) es la ec. de H-J-B.

De la consideración (3.5) resulta que (6) se puede resolver para u^* ; más precisamente, existe una función ψ de clase C^1 tal que

$$u^* = \psi(x, G'(t) J_x^*(x, t, t_1), t) = k(x, t, t_1) \quad (8)$$

la cual es la ley de control óptimo deseada. Para verificar la condición (b) del Lema, usando (6) y (7) se obtiene:

$$L^*(x, u, t) = L(x, u, t) - L(x, u^*, t) - [u - u^*, L_u(x, u^*, t)]$$

$$= E(x, u, u^*, t) \quad (9)$$

(9) es la función de Weierstrass. Por inspección se ve que E es el término cuadrático de la serie de Taylor de L con $u = u^*$. Así, puesto que hay una función J^* que satisface (3), (6) y (7) y además (3.5) se cumple, se puede aplicar el Lema y encontrar aquella J^* que corresponda a (3.4). La ley de control óptimo es (8). Ahora se define una variable conjugada ξ por

$$\xi = J_x^* \quad (11)$$

por lo que $\psi = \psi(x, G'(t)\xi, t)$. Se define el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H}(x, \xi, t) = L(x, \psi, t) + [\xi, F(t)x + G(t)\psi] \quad (12)$$

entonces, si $J^*(x, t, t_1)$ es cualquier solución del sistema (6), (7), entonces J^* es solución de la ecuación diferencial parcial de primer orden de H-J:

$$J_t^* + \mathcal{H}(x, J_x^*, t) = 0 \quad (13)$$

resumiendo, se tiene el siguiente

(14). TEOREMA. Si existe una solución $J^*(x, t, t_1)$ de clase C^2 de la ecuación de H-J (o, equivalentemente de (6), (7)) la cual satisface $J^*(x, t_1, t_1) = \psi(x)$ y si (3.5) se cumple, entonces J^* es el criterio de comportamiento óptimo para el problema del regulador (3.3) y la correspondiente ley de control óptimo está dada por (8).

5.- Controlabilidad.

Ahora se impondrán condiciones a la planta (2.1) para asegurar que

el problema formulado en (3.3) es significativo en el límite $t_1 = \infty$. Primera mente considérese la siguiente

(1) DEFINICION. Un estado x es controlable en t_0 si existe una función de control $u^1(t)$, dependiente de x y t_0 y definida en un intervalo finito $[t_0, t_1]$, tal que $\phi_{uc}(t_1, x, t_0) = 0$. Si lo anterior es cierto para todo estado x , entonces la planta es completamente controlable en el tiempo t_0 ; también, si lo anterior es cierto para todo t_0 entonces simplemente se dice que la planta es completamente controlable.

A continuación se establece una caracterización equivalente de la controlabilidad que resultará muy útil:

2. PROPOSICION: Una planta es completamente controlable en el tiempo t_0 (i) sí y (ii) solamente sí la matriz simétrica

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) G(t) G'(t) \Phi'(t_0, t) dt \quad (3D)$$

es positiva definida para cierto $t_1 > t_0$.

Una condición técnicamente útil para investigar la controlabilidad de una planta se formula en el siguiente

5. COROLARIO. Una planta constante es completamente controlable (i) sí y (ii) solamente sí

$$\text{RANGO} [G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n \quad (6)$$

Comentario 1. - Sea x el estado de la planta en t_0 e y el estado "deseado" en t_1 . De la argumentación previa se concluye que el estado y es obtenible del estado x (es decir que existe una ϕ_{uc} , que relaciona x en t_0 e y en t_1) sí y solamente sí la ecuación

$$x - \Phi(t_0, t_1) y = W(t_0, t_1) v \quad (7)$$

tiene una solución, en cuyo caso

$$u^1(t) = -G'(t) \Phi'(t_0, t) v \quad (8)$$

es la función de control apropiada.

Además, los métodos del Cálculo de Variaciones muestran que la mínima energía de control requerida para la transferencia de estado es

$$E(x, t_0; y, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \|u^1(t)\|^2 dt = \|x - \Phi(t_0, t_1) y\|_{W^{-1}(t_0, t_1)}^2 \quad (9)$$

La ec. (7) puede tener solución para algunos, pero no todos los estados x, y . Entonces W^{-1} no existe y es conveniente reemplazarla por la inversa generalizada W^+ en el sentido de Penrose¹. Con esta convención (9) es la energía mínima requerida para transferir x lo más cercano posible a y .

Si $W(t_0, t_1)$ es invertible, entonces (7) siempre tiene una solución; se ve que "una planta es completamente controlable en el tiempo t_0 sí, y

¹ R. Penrose, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phil. Soc. 51 (1955), pp 406-413.

solamente sí, empezando del origen en el tiempo t_0 , cualquier estado x puede alcanzarse en un tiempo finito aplicando una función de control apropiada $u(t)$.

Comentario 2. - Usando la inversa generalizada se puede reemplazar

(8) por una ley de control definida en $[t_0, t_1]$:

$$u'(t) = -G'(t)W^+(t, t_1)[x - \Phi(t, t_1)y]$$

Aún si la planta es estacionaria, esta ley de control no lo es.

6.- Solución al problema del regulador lineal.

El punto de vista del Cálculo de Variaciones expuesto en la sección 4 es puramente local (por ser lineal). Sin embargo, las ideas de la sección anterior conducirán a una teoría definitiva del problema del regulador, como se expondrá a continuación. En principio, considérese que:

"Para resolver el caso lineal del problema del regulador no es suficiente con contar con un modelo lineal de la planta (2.1)", se requiere además considerar que

(A₁) $L(x, u, t) = \frac{1}{2} \{ \|H(t)x\|_{Q(t)}^2 + \|u\|_{R(t)}^2 \}$, $V(x) = \frac{1}{2} \|x\|_A^2$
 donde A es simétrica, no-negativa definida mientras Q(t), R(t) son simétricas, positivas definidas y de clase C² en t. Consecuentemente de (A₁) la función Hamiltoniana (4.12) es

$$\mathcal{H}(x, \xi, t) = \frac{1}{2} \{ \|H(t)x\|_{Q(t)}^2 + 2[F(t)x, \xi] - \|G'(t)\xi\|_{R^{-1}(t)}^2 \} \quad (1)$$

con esta selección de \mathcal{H} , la función

$$J^*(x, t, t_1) = \frac{1}{2} \|x\|_{P(t, t_1)}^2 \quad (2)$$

(donde t_1 es un parámetro), es una solución de la ec. de H-J (4.13) sí y solamente sí P(t, t₁) es una solución de la siguiente EDO no-lineal del tipo de -

Riccati:

$$-\frac{dP}{dt} = F(t)P + PF(t) - PG(t)R^{-1}(t)G'(t)P + H'(t)Q(t)H(t) \quad (3)$$

P es una matriz simétrica.

Dada cualquier matriz simétrica no-negativa definida A, (3) tiene una solución única $\Pi(t; A, t_1)$ que toma el valor A en $t=t_1$.

Lo anterior se resume en el siguiente

4.- TEOREMA DE EXISTENCIA. (i) Para todo t_1 y toda matriz A simétrica, no-negativa definida, (3) tiene una solución única $\Pi(A; t, t_1)$ definida para toda $t \leq t_1$. (ii) Bajo la consideración (A₁) el criterio de comportamiento óptimo del problema (3.3) está dado por

$$J^*(x, t_0, t_1) = \|x\|_{\Pi(t_0, A, t_1)}^2 \quad (5)$$

para estudiar el caso cuando $t_1 \rightarrow \infty$ primero se define una solución particular de (3) que es fundamental para el siguiente desarrollo.

6. PROPOSICION: Si la planta es completamente controlable, entonces

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \Pi(x; 0, t_1) = \bar{P}(x)$$

(i) existe para toda t y (ii) es una solución de (3).

7. TEOREMA DE EXISTENCIA. Asumiendo (A_1) , $\forall(x) = 0$ y $t_1 = \infty$, el criterio de comportamiento óptimo para el problema (3.3) es $\|x\|_{\bar{P}(t)}^2$ y la Ley de Control óptimo es

$$u^*(t) = \bar{R}^{-1}(t) G'(t) \bar{P}(t) x(t) \quad (8)$$

Comentario. - En la literatura ingenieril a menudo se considera -- (tácita e incorrectamente) que un sistema con la ley de control óptimo (8) - es necesariamente estable. Entonces se justifica la inclusión de la siguiente sección, relativa al análisis de estabilidad, pero antes y para finalizar la sección 6, se establecerán las condiciones suficientes que aseguren la - estabilidad asintótica uniforme.

9. DEFINICION. El sistema (2.1) es uniforme y asintóticamente estable si (i) $\|\Phi(t, t_0)\| < \infty$ y (ii) $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ uniformemente en t_0 .

En un análisis posterior desarrollado por R. Kalman y J.E. Bertram, éstos mostraron que la estabilidad asintótica-estable en el caso lineal es equivalente a la estabilidad-asintótica-exponencial, la cual se define $\|\Phi(t, t_0)\| \leq \alpha \exp[-\beta(t-t_0)] \forall t_0$ y toda $t \geq t_0$ con la condición $(\alpha, \beta > 0)$.

10. TEOREMA DE ESTABILIDAD. Considérese una planta con ley de control (8) la cual es uniforme y completamente controlable. Además de (A_1) , supóngase también $(A_2) Q(t) \geq \alpha_4 I > 0$, $R(t) \geq \alpha_5 I > 0$
 $(A_3) Q(t) \leq \alpha_6 I$, $R(t) \leq \alpha_7 I$
entonces la planta controlada es uniforme y asintóticamente estable y $J^*(x, t, \infty)$ es una de sus funciones de Lyapunov.

7. ESTABILIDAD DE LA ECUACION DE RICCATI.

Ahora se examinarán las propiedades de estabilidad de (6.3). Sea $\delta P(t) = P(t) - \bar{P}(t)$ la desviación de un movimiento dado de $P(t)$ de (6.3) respecto a $\bar{P}(t)$. Sustituyendo en (6.3) se obtiene

$$d(\delta P)/dt = -\bar{F}'(t)\delta P - \delta P\bar{F}(t) - \delta P G(t) \bar{R}^{-1}(t) G'(t) \delta P \quad (1)$$

donde
$$\bar{F}(t) = F(t) - G(t) \bar{R}^{-1}(t) G'(t) \bar{P}(t)$$

Por simplicidad, a continuación se omitirá el argumento t en G, H, P, Q, R .

2. TEOREMA DE ESTABILIDAD. Sea

$$V(\delta P, t) = \frac{1}{2} \text{tr} (\delta P \bar{P}^{-1})^2 \quad (3)$$

Entonces (i) la derivada de \bar{V} a lo largo de movimientos de (1) es

$$\dot{\bar{V}}(SP, t) = \text{tr} \left\{ (P^{1/2} G R^{-1} G' P^{1/2}) \cdot (P^{1/2} \bar{P}^{-1} P^{1/2} - 1)^2 + \right. \\ \left. (\bar{P}^{-1/2} H' Q H \bar{P}^{-1/2}) (\bar{P}^{-1/2} P \bar{P}^{-1/2} - 1)^2 \right\} \quad (4)$$

con $P > 0$; (ii) Si $A > 0$, entonces bajo la hipótesis de (6.10), todas las soluciones $\Pi(t; A, t_1)$ de (6.3) son asintótica y uniformemente estables relativas a $\bar{P}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, y \bar{V} es una función de Lyapunov apropiada.

5. COROLARIO. El movimiento $\bar{P}(t)$ es inestable (cuando $t \rightarrow \infty$).

6. Comentario 1.- Si el problema es estacionario, esto es, F, G, H, Q, R son constantes, $P(t, t_1) = P(t+h, t_1+h)$ lo cual muestra que $dP(t, t_1)/dt_1 = -dP(t, t_1)/dt$. Así, en este caso se puede calcular $P(t) = \text{const.}$ de (6.3) reemplazando t por $-t$; para cualquier $A > 0$ inicial, este cálculo es asintóticamente estable en la gran mayoría.

7. Comentario 2.- Como consecuencia del corolario en el caso no estacionario (si al menos una de las matrices F, G, H, Q, R , no es constante), no se puede calcular $P(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ a partir de $P(t_0)$.

8. Solución general de la Ecuación de Riccati.

Considérense las ecs. diferenciales canónicas asociadas con (6.1)

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{H}_x(x, \xi, t) = F(t)x - G(t)R^{-1}(t)G'(t)\xi \quad (1)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{H}_\xi(x, \xi, t) = -H'(t)Q(t)H(t)x - F'(t)\xi \quad (2)$$

Sea $P(t)$ una solución de (6.3) definida en un intervalo $U = (-\infty, t_2)$. Considerando (4.11) y (6.2), se supondrá que las condiciones iniciales de (1) y (2) en t_1 están dadas por $\xi(t_1) = J_x^*(x(t_1), t_1) = P(t_1)x(t_1)$ entonces, para toda t en que $P(t)$ exista, con la misma condición inicial, se tendrá:

$$\xi(t) = J_x^*(x(t), t) = P(t)x(t), \quad t \in U \quad (3)$$

ahora, sean $X(t), Z(t)$ un par de matrices solución de (1)-(2), satisfaciendo las condiciones iniciales $X(t_1) = I, Z(t_1) = P(t_1)$. Por (3) se tiene que

$$Z(t) = P(t)X(t) \quad (4)$$

la cual muestra que $X(t)$ es una solución de la ED-matricial

$$dx/dt = [P(t) - G(t)R^{-1}(t)G'(t)P(t)]X, \quad t \in U$$

haciendo $\|x\|_{P(t_1)}$ en (3.4), de (6.4-5) se ve que $X(t)$ es la matriz de transición $\bar{\Phi}^*(t, t_1)$ de la planta óptima controlada correspondiente a la escogida. Si $\bar{\Phi}^*(t, t_1)$ existe para toda $t \in U$, se tiene

$$P(t) = Z(t) \bar{\Phi}^*(t_1, t) \quad t \in U \quad (5)$$

Para obtener una expresión explícita para $P(t)$, hágase

$$\Theta(t, t_1) = \begin{pmatrix} \Theta_{11}(t, t_1) & \Theta_{12}(t, t_1) \\ \Theta_{21}(t, t_1) & \Theta_{22}(t, t_1) \end{pmatrix}$$

La matriz de transición del sistema (1) - (2), entonces se obtiene la fórmula válida para $t \in U$:

$$P(t) = [\Theta_{21}(t, t_1) + \Theta_{22}(t_1, t)P(t_1)] [\Theta_{11}(t, t_1) + \Theta_{12}(t, t_1)P(t_1)]^{-1} \quad (6)$$

9.- Conclusiones.

Se mostró nuevamente la correspondencia entre teorías diferentes, en este caso al aplicarse el Lemá de Carathéodory del Cálculo de Variaciones junto con una funcional del tipo general (de Bolza), se obtuvieron las "ecuaciones fundamentales" que, como se comentó en la sección 4, son equivalentes a la ec. de H-J-B obtenida al aplicar la Programación Dinámica en el Cap. III. 2 .

Usando los mismos elementos también se obtuvo (sección 4) la Función de Weierstrass del cálculo de variaciones que se mencionó primero en el resumen del Cap. I. Anteriormente se la obtuvo aplicando el principio de Optimalidad (en la sección 2.7 (c) del Cap. I), y también apareció con su propiedad característica, condición necesaria ..., en el Primer Teorema del Máximo de Pontryagin (Cap. V). En el Cap. IV se omitieron dos aspectos necesarios en el análisis y que en este Capítulo sí se consideraron: el análisis de la Controlabilidad y la demostración de existencia de la solución general de la ec. matricial de Riccati, que se obtuvo como consecuencia de una propiedad de estabilidad asintótica de la solución optimizante.

REFERENCIAS

- 1.- Bellman R.E., Dynamic Programming, Princeton University, 1957.
- 2.- Bellman R.E. and Dreyfus S.E., Applied Dynamic Programming, Princeton University, 1962.
- 3.- Bryson A. and Ho Y., Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Company, 1969.
- 4.- Dreyfus S.E., Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press Inc. New York, N.Y., 1965.
- 5.- Dreyfus S.E., "Dynamic Programming and the Calculus of Variations", J. Math. Anal. and Appl., Vol I, 1960. pp 228-239.
- 6.- Elsgoltz L., Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Editorial MIR, Moscú, 1977.
- 7.- Florio J. S. , Apuntes del Curso de Optimización de Sistemas Dinámicos, D.E.P.F.I., U.N.A.M., 1982.
- 8.- Franklin G.F. and Powell J.D., Digital Control, Addison-Wesley, -- 1980.
- 9.- Kailath T., Linear Systems, Prentice Hall Inc., 1980.
- 10.- Kalman R.E., "Contributions to the theory of Optimal Control", -- Simposium Internacional de Ecs, Dif. Ordinarias, U.N.A.M., Sociedad Matemática Mexicana, 1961. P.p. 102-119.
- 11.- Kirk D., Optimal Control Theory, Prentice Hall Inc., 1977.
- 12.- Osborn H., "On the Foundations of Dynamic Programming", J. Math. and Mech., Vol. 8, 1959. p.p. 867-872.
- 13.- Pontryagin L.S. et al, The Mathematical Theory of Optimal Processes, The Mac Millan Company, New York, N.Y., 1964.
- 14.- Lee E. B. and Markus l., Foundations of optimal Control Theory, John Wiley and Sons, Inc. 1967.
- 15.- Krasnov M.L. et al, Cálculo Variacional, Editorial MIR. Moscú, -- 1976.
- 16.- Athans M. and Falb P.L., Optimal Control, Mc Graw-Hill Book Co. 1966.