

0870

DINAMICA DE SISTEMAS ROTOR FLEXIBLE-CHUMACERA HIDRODINAMICA

OMAR JOSE MARIN ALVAREZ

TESIS

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA

(Mecánica Teórica y Aplicada)

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., JUNIO DE 1985



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI

T. UNAM

1 9 8 5

MAR

DINAMICA DE SISTEMAS ROTOR FLEXIBLE-CHUMACERA HIDRODINAMICA

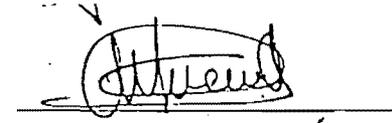
CREDITOS ASIGNADOS A LA TESIS DOCE (12)

APROBADO POR EL JURADO:

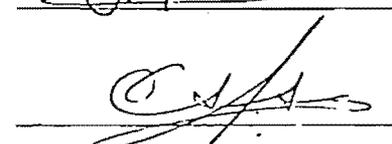
DR. PORFIRIO BALLESTEROS B.



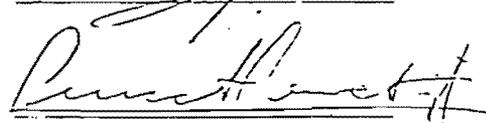
DR. VICTOR H. MUCIÑO Q.



DR. CARLOS LOPEZ CAJUN



DR. LUIS FERRER ARGOTE



DR. ALEJANDRO LOZANO G.





UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

JEFATURA

Sr. Prof. Victor Hugo Muciño Quintero
P r e s e n t e .

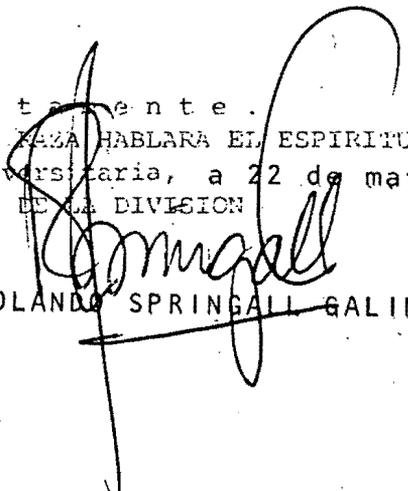
Me permito comunicarle que a propuesta del Subjefe del area de ELECTROMECA-
NICA , ha sido designado como Director de tesis, del alumno

OMAR JOSE MARIN ALVAREZ , para obtener el grado de
M EN I EN MECANICA TEORICA Y APLICADA Y el nombre de la tesis a de-
sarrollar propuesto es el siguiente:

"DINAMICA DE SISTEMAS ROTOR FLEXIBLE-CHUMACERA HIDRODINAMICA"

Mucho me da agrado decirle la comunicación por escrito de su aceptación a esta
designación.

A t e n t a m e n t e .
"POR MI PAZ HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria, a 22 de mayo de 1985.
EL JEFE DE LA DIVISION


DR. ROLANDO SPRINGALL GALINDO

E.5.1

A mis Padres

A mi Esposa e Hijos

A mis Hermanas

A todos ellos dedico este trabajo

Expreso mi reconocimiento y agradecimiento:

Al Dr. Víctor H. Muciño Q., por el valioso apoyo y colaboración dada durante el desarrollo de la tesis. Sin su asesoría no hubiera sido posible la realización de la misma.

A la Universidad de Los Andes y al Departamento de Tecnología y Diseño de la Escuela de Ingeniería Mecánica, por brindarme la oportunidad de realizar la Maestría. Así como al Consejo de la Facultad de Ingeniería por el estímulo expresado, por sus miembros.

El autor desea expresar su agradecimiento a los miembros del Jurado Doctores: Porfirio Ballesteros B., Víctor H. Muciño Q., Carlos López C., Luis Ferrer A., Alejandro Lozano G., por sus acertados comentarios y valiosas sugerencias.

INDICE

	NOMENCLATURA	i
	RESUMEN	ii
I	INTRODUCCION	1
II	MODELADO GENERAL DEL SISTEMA	6
	2.1. Modelado Dinámico del sistema rotatorio	6
	2.2. Grado de Libertad y Coordenadas Generalizadas	6
	2.3. Transformación de Coordenadas	8
	2.4. Coordenadas Generalizadas de Sistema	10
III	FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	12
	3.1. Energía Cinética del Sistema	13
	3.2. Energía Potencial del Sistema	14
	3.3. Función de Disipación	19
IV	COJINETES HIDRODINAMICOS Y METODO DE LAS MOVILIDADES	22
V	SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO	27
VI	ALGORITMO DE SOLUCION	30
VII	APLICACIONES	33
VIII	CONCLUSIONES	46
	REFERENCIAS	48
	APENDICE I	52
	APENDICE II	57
	APENDICE III	61

NOMENCLATURA

Símbolos utilizados en el presente trabajo.

{B}	Vector de desplazamiento de los soportes
c	Círculo de claro
C_i	Coefficiente de amortiguamiento
D	Diámetro del cojinete
e_i^x, e_i^y	Excentricidad del cojinete en el sistema rotatorio
e_i^ξ, e_i^η	Excentricidad del cojinete en el sistema absoluto
{e}	Vector de excentricidades en los cojinetes
F	Fuerza de la película de lubricante
I_i^x, I_i^y, I_i^z	Momento de inercia respecto al sistema rotatorio
$I_i^\xi, I_i^\eta, I_i^\zeta$	Momento de inercia respecto al sistema absoluto
K_i	Rigidez en los soportes
K_{kj}	Rigidez de la flecha
L	Longitud del cojinete
m_i	Masa de la flecha
m_i^b	Masa del cojinete
R	Radio del cojinete
X, Y, Z	Coordenadas rectangulares rotatorias (sistema rotatorio)
ω	Velocidad angular de la flecha
ω	Velocidad angular promedio entre la flecha y la carcasa
μ	Viscosidad del lubricante
ξ, η, ζ	Coordenadas rectangulares fijas (sistema absoluto)
$\theta_i^x, \theta_i^y, \theta_i^z$	Coordenadas generalizadas rotacionales (sistemas x, y, z).

$\phi_1^s, \phi_1^n, \phi_1^z$

$\theta_1^s, \theta_1^n, \theta_1^z$

Coordenadas generalizadas rotacionales (sistema absoluto) $\overset{\circ}{f}is_{zs}$

{ δ }

Vector de desplazamiento, de los otros puntos de la flecha diferentes a donde estan los soportes.

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla un modelo dinámico de un sistema rotatorio, compuesto entre otras cosas de: una flecha flexible, discos concentrados en un punto de la flecha, cojinetes hidrodinámicos y soportes flexibles amortiguados.

En el análisis se consideran las características principales como son: elasticidad de la flecha, inercia en la flecha y el disco, sistema de cojinetes hidrodinámicos, soportes flexibles y amortiguados.

Las ecuaciones generales de movimiento que rigen la dinámica del mismo, se desarrollan para un modelo rotatorio discretizado con séxtuple grado de libertad por nodo y utilizando una descripción Lagrangiana, mientras que la dinámica de los cojinetes se describe a través de la formulación de Booker en su método de las movibilidades, basado en la ecuación de Reynolds.

La simulación del comportamiento dinámico del sistema, se realiza mediante un algoritmo computacional basado en la solución numérica de las ecuaciones diferenciales, usando el método de diferencias centrales.

El modelo desarrollado de sistemas rotor flexible-chumacera hidrodinámica, incluye ecuaciones de movimiento, que no habían sido formuladas por otros autores en forma integral, de tal manera que en la solución se incluya en forma simultánea las características elastodinámicas del sistema y la naturaleza hidrodinámica de los cojinetes.

I. INTRODUCCION

Toda máquina que utiliza o transforma energía mecánica en cualquiera de sus formas, generalmente tiene elementos rotatorios como partes fundamentales del funcionamiento de la misma, algunos ejemplos son: generadores eléctricos, máquinas de combustión interna, turbinas de gas, y de vapor, turbinas hidráulicas, turbogeneradores, etc.

El avance de la tecnología moderna ha promovido un incremento considerable en las velocidades de operación de estas máquinas y a su vez, ha requerido del desarrollo de nuevas técnicas de análisis que permitan modelar en forma más completa la naturaleza física de estos sistemas para lograr diseños más eficientes.

En el campo de la dinámica de rotores, es importante contar con herramientas de análisis que permitan el diseño de máquinas para períodos de operación, como es el caso de turbinas para la generación de potencia, lo cual implica la reducción de los períodos de mantenimiento.

Las velocidades de operación de muchos de estos sistemas, se han incrementado como resultado del avance de la tecnología y por lo tanto es importante en el procedimiento estándar de diseño el cálculo de las velocidades críticas y en general de su respuesta dinámica, haciéndose necesario evaluar los efectos de: flexibilidad y amortiguamiento de soportes, cojinetes hidrodinámicos, excentricidades entre otros, esto da lugar a la formulación de modelos matemáticos que conducen al conocimiento del sistema, para llegar a diseños más racionales y/o realizar estudios de diagnóstico y prevención.

La refinación de los modelos matemáticos de sistemas rotatorios, se ha incrementado notablemente con el desarrollo de las computadoras, debido a la rapidez y precisión en la realización de las operaciones que están contenidas en los mismos.

El desarrollo de métodos analíticos para el análisis de sistemas rotatorios ha evolucionado a partir del siglo pasado, siendo uno de los precursores Rankine ([1]*, 1869), quien reportó el trabajo sobre: fuerzas centrífugas en flechas rotatorias. Más adelante, los modelos de estos sistemas incluyeron rotores flexibles, masas discretas y soportes rígidos, aunque en la realidad estos últimos tienen cierta flexibilidad, la cual esta relacionada con las velocidades críticas, Usualmente en los cojinetes lubricados hidrodinámicamente, los resultados obtenidos con esta suposición difieren de los reales; la causa primaria de esta discrepancia, es el efecto de amortiguamiento del lubricante en el cojinete.

En este trabajo se presenta un modelo matemático, en el que las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica del mismo, se deducen suponiendo que los soportes son flexibles y amortiguados, además el modelo toma en cuenta la naturaleza hidrodinámica en los cojinetes, la flexibilidad y distribución de las características inerciales de la flecha, discos y cojinetes.

Existen varios métodos que permiten determinar la velocidad crítica, para el análisis de sistemas rotatorios, en los cuales se ignora por completo el efecto de los cojinetes apoyados sobre soportes flexibles. Una

*Números en paréntesis cuadrados indican referencias al final del trabajo.

primera concepción matemática del cálculo de la velocidad crítica, se debe a Föppl ([2], 1895), quien demostró que aunque efectivamente el desplazamiento del rotor aumenta con la velocidad de rotación a causa del inevitable desbalanceo, disminuye sin embargo nuevamente al aumentar la velocidad del rotor y rebasar determinado número de revoluciones por minuto. Stodola ([3], 1916), describió mediciones de discos en rotación y atribuyó a la acción amortiguadora del fluido que rodea al rotor, el carácter finito de la amplitud de vibración a la velocidad crítica; también mostró que la flecha exenta de amortiguamiento puede ser inestable por encima de la velocidad crítica, cuando el momento de inercia del rotor se encuentra por debajo de un determinado valor. Holzer ([4], 1921), desarrolló un método para obtener las velocidades críticas de sistemas rotatorios sujetos a vibraciones torsionales. Myklestad ([5], 1944), presenta una extensión del método de Holzer para el análisis de vigas discretas con vibraciones flexurables. Prohl ([6], 1945), utilizó el método de Myklestad para determinar velocidades críticas en rotores flexibles. Este método se basa en la utilización de matrices de transferencia y considera al rotor constituido por discos independientes conectados por elementos viga sin masa. La novedad de dicho método residió en que es aplicable a cualquier condición de apoyo en los extremos. Ruhl ([7], 1970), y Lund ([8], 1974), utilizan también matrices referidas a séxtuple grado de libertad para obtener las características modales y la respuesta dinámica del mismo. Chen, et al ([9], 1982), presentan un modelo de un sistema rotatorio, obtienen las velocidades críticas utilizando matrices de transferencia, y las características de los cojinetes a través de un conjunto resorte-amortiguador en tres posiciones: horizontal, vertical y diagonal. En este modelo, que tiene dos cojinetes y un

disco, la obtención de la solución requiere de un tiempo considerable de computación, por utilizar cuarenta y nueve coordenadas generalizadas en la descripción de la configuración del sistema.

Los métodos más recientes son extensiones un poco más elaboradas de las anteriores; pero en general, son similares en el planteamiento.

En el área de cojinetes hidrodinámicos se han hecho numerosos estudios, que describen la interacción entre la flecha, la carcasa y la capa de lubricante, los fundamentos de estos estudios están basados en las formulaciones realizadas por Reynolds ([10],1886), que consisten en una simplificación particular de las ecuaciones de Navier-Stokes. Booker ([11],1965; [12],1968; [13],1969; [14],1971), desarrolló el método de las movilidades en el que se puede apreciar la aplicación de la ecuación de Reynolds, para cojinetes de longitud corta, larga y finita. Barret, et al ([15],1979), establecen un método eficiente para calcular la respuesta no lineal en cojinetes de longitud finita incorporando un factor de corrección en la formulación de cojinetes de longitud corta. Shawki, et al ([16],1979), transforman la ecuación generalizada de Reynolds a un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias en derivadas parciales; las dos primeras resultan integrables de manera directa y la tercera se resuelve por un método variacional.

Los últimos trabajos de alguna manera son similares a los anteriores, con variantes en la forma de resolver la ecuación de Reynolds. Sin embargo, no es común la formulación simultánea de las ecuaciones elasto-dinámicas de la flecha y los discos con las ecuaciones hidrodinámicas de los cojinetes, para caracterizar el sistema completo. Todo esto su-

giere la necesidad de establecer modelos que liguen estos dos aspectos ya analizados por separado en forma integral, con el objeto de mejorar los diseños y lograr resultados más próximos a los reales.

El modelo que aquí se presenta ofrece la posibilidad de representar las características geométricas del sistema en forma detallada, permitiendo realizar un análisis dinámico que incluye otras características adicionales a las que aparecen en modelos desarrollados por otros autores, y se obtiene la solución simultánea de las ecuaciones elastodinámicas e hidrodinámicas en el cálculo de la respuesta dinámica (desplazamientos de puntos discretos del sistema en función del tiempo).

II. MODELADO GENERAL DEL SISTEMA

2.1. Modelo Dinámico del Sistema Rotatorio

El modelo analizado en este trabajo consiste en: flecha flexible, disco discreto, cojinetes hidrodinámicos, soportes flexibles y amortiguados, como se ilustra en la figura 1.

La mecánica del funcionamiento del modelo es bastante conocida y consiste en el movimiento rotatorio de un disco y una flecha, colocados sobre soportes flexibles. Las fuerzas en los cojinetes que resultan del movimiento se obtienen utilizando las ecuaciones deducidas por Booker [14]. Las velocidades instantáneas en los centros de los muñones se determinan mediante las funciones de movilidad para un modelo de cojinete hidrodinámico de longitud finita en el cual se debe satisfacer que: $0.25 \leq L/D \leq 1$, donde L/D representa la relación que existe entre la longitud del cojinete (L) y su diámetro (D).

Para obtener las ecuaciones de movimiento, el sistema rotatorio se modela de la siguiente manera: los discos se representan por masas concentradas en los puntos correspondientes de la flecha, los soportes flexibles se simulan como un conjunto resorte-amortiguador en dos direcciones perpendiculares, los tramos de flecha se discretizan como elementos finitos tipo viga, con séxtuple grado de libertad por nodo y los cojinetes se modelan utilizando las funciones de movilidad las cuales incluyen todas las características tanto geométricas como hidrodinámicas. El modelo se muestra en la figura 2.

2.2. Grado de Libertad y Coordenadas Generalizadas.

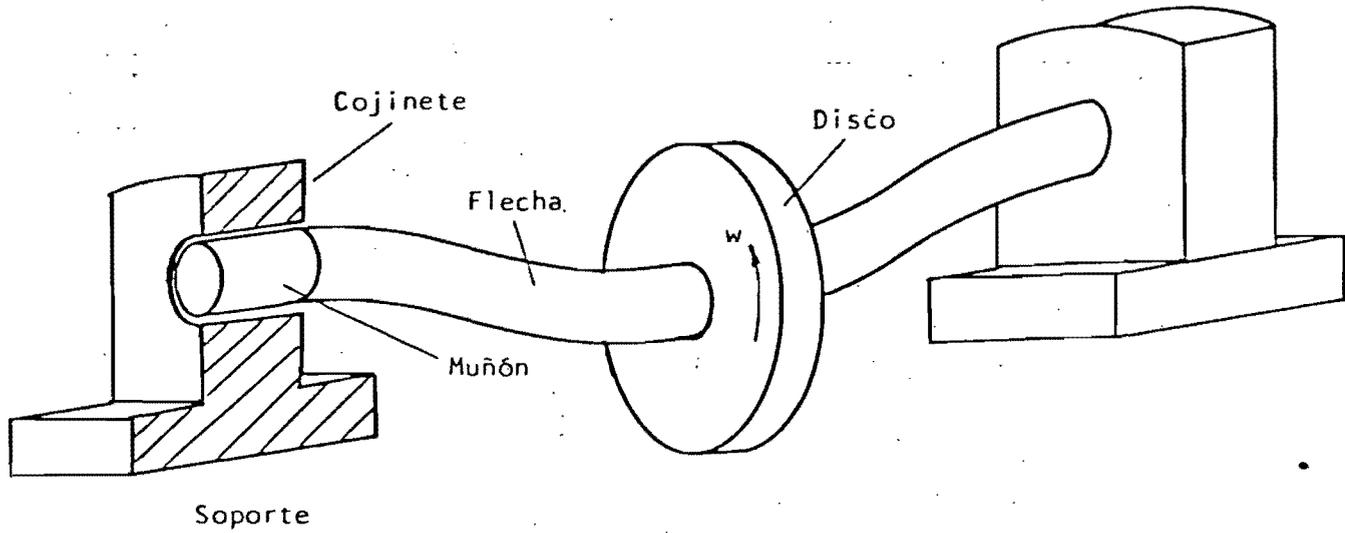


Fig. 1 Modelo de un sistema rotatorio con exagerada flexión;

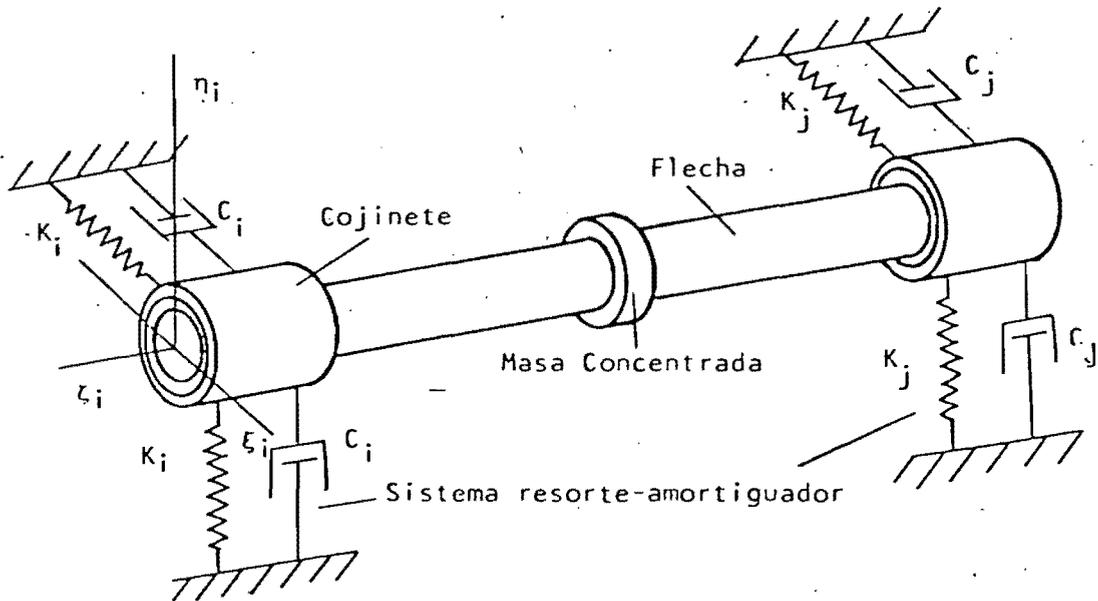


Fig. 2 Modelo simplificado del sistema rotatorio.

Para la formulación de las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del modelo considerado, es necesario definir dos sistemas coordenadas; uno fijo, denominado sistema coordenado absoluto y otro, girando con la flecha, el cual es el sistema coordenado rotatorio. Ambos sistemas se toman colineales en la dirección axial de la flecha, y el eje Z, figura 3.

La utilización de estos sistemas coordenados establecen un conjunto único de coordenadas generalizadas que describen la interacción entre los elementos que componen el modelo. La representación gráfica de los sistemas coordenados se muestra en la figura 3.

2.3. Transformación de Coordenadas

Los desplazamientos están relacionados [17], (figura 4) por:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \phi^{\xi} \\ \phi^{\eta} \\ \phi^{\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin wt & \cos wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos wt & -\sin wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \theta^x \\ \theta^y \\ \theta^z \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (2.1) y realizando las operaciones algebraicas necesarias se obtienen las expresiones: para las velocidades y aceleraciones.

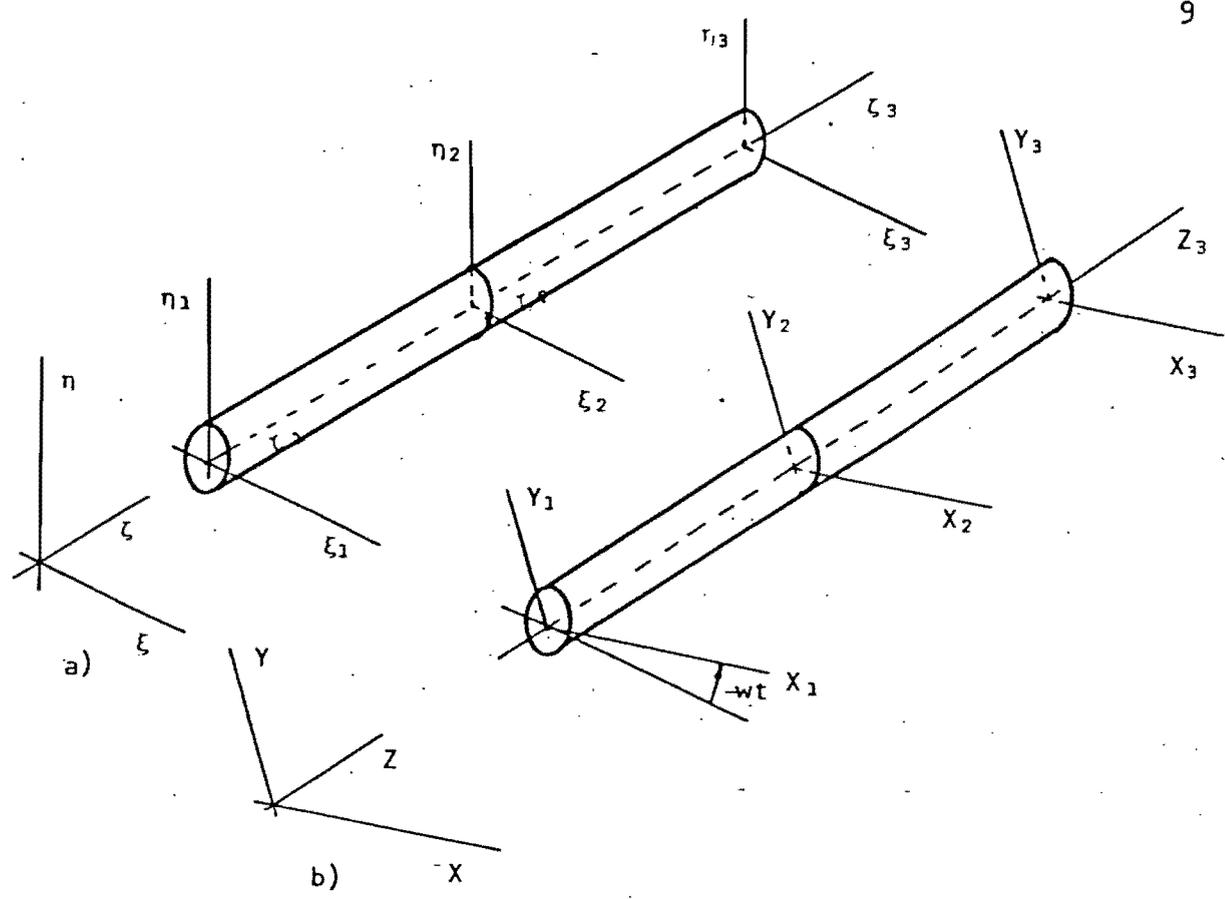


Fig. 3 Sistema coordenado del modelo a) absoluto, b) rotatorio..

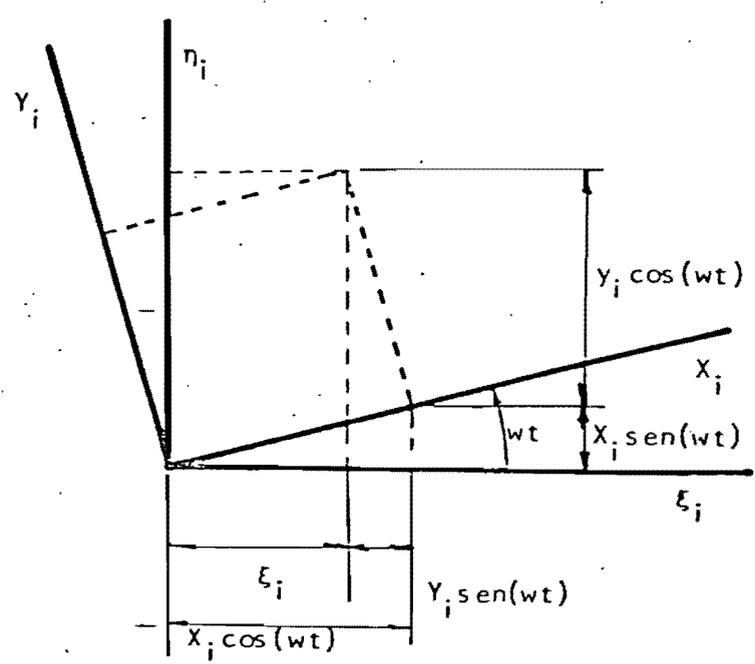


Fig. 4 Representación de las coordenadas en los sistemas absoluto ξ - η y rotatorio X - Y .

Velocidades

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \\ \dot{\phi}^{\xi} \\ \dot{\phi}^{\eta} \\ \dot{\phi}^{\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin wt & \cos wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos wt & -\sin wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} - wY \\ \dot{Y} + wX \\ \dot{Z} \\ \dot{\theta}^x - w\theta^y \\ \dot{\theta}^y + w\theta^x \\ \dot{e}^z \end{Bmatrix}$$

Aceleraciones

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \\ \ddot{\phi}^{\xi} \\ \ddot{\phi}^{\eta} \\ \ddot{\phi}^{\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin wt & \cos wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos wt & -\sin wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} - 2w\dot{Y} + w^2 X \\ \ddot{Y} + 2w\dot{X} - w^2 Y \\ \ddot{Z} \\ \ddot{\theta}^x - 2w\dot{\theta}^y + w^2 \theta^x \\ \ddot{\theta}^y + 2w\dot{\theta}^x - w^2 \theta^y \\ \ddot{e}^z \end{Bmatrix}$$

2.4. Coordenadas Generalizadas del Sistema

De acuerdo a los dos sistemas coordenados definidos anteriormente el grado de libertad de la flecha y cojinetes, se pueden representar como un vector de coordenadas generalizadas.

En el sistema absoluto

$$\{\psi\}_f^T = \{\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \phi_1^{\xi}, \phi_1^{\eta}, \phi_1^{\zeta}, \dots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, \phi_n^{\xi}, \phi_n^{\eta}, \phi_n^{\zeta}\} \quad (2.4)$$

En el sistema rotatorio

$$\{\chi\}_f^T = \{X_1, Y_1, Z_1, \theta_1^x, \theta_1^y, \theta_1^z, \dots, X_n, Y_n, Z_n, \theta_n^x, \theta_n^y, \theta_n^z\} \quad (2.5)$$

De la misma manera los vectores de coordenadas generalizadas para los cojinetes en ambos sistemas son:

Sistema absoluto

$$\{\psi\}_c^T = \{\xi_1^b, \eta_1^b, \dots, \xi_k^b, \eta_k^b\} \quad (2.6)$$

Sistema rotatorio

$$\{\chi\}_c^T = \{X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k\} \quad (2.7)$$

Las coordenadas generalizadas del sistema pueden ser las descritas por cualquiera de los dos sistemas (absoluto o rotatorio), siendo necesario la conversión de un sistema a otro para facilitar la derivación de las ecuaciones de movimiento, que se describen a continuación.

III. FORMULACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En la formulación de las ecuaciones de movimiento, se parte de la descripción Lagrangiana [18, 19], que es en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del tipo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

Las n ecuaciones (3.1), se conocen como ecuaciones de Lagrange, en donde la función Lagrangiana es la diferencia de la energía cinética y la potencial; Q_j representa las fuerzas generalizadas no derivables de un campo potencial (fuerzas disipativas) y las q_j son las coordenadas generalizadas independientes.

Para incluir las fuerzas disipativas en el sistema, se define la función de Rayleigh [20], de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [c] \{\dot{q}\} \quad (3.2)$$

En donde las c_{ij} son los coeficientes de amortiguamiento, $[c]$ es la matriz de amortiguamiento. Al utilizar la función de disipación de Rayleigh la ecuación (3.1) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

Para desarrollar las ecuaciones de movimiento, es necesario especificar las dos funciones escalares L y \mathcal{F} . Para determinar la función escalar L , se deben expresar las energías, cinética y potencial de los elementos que conforman el modelo.

3.1. Energía Cinética

Con el objeto de describir la energía cinética, la distribución inercial de la flecha y los discos se concentra en los nodos de los elementos utilizados en la discretización, mediante masas concentradas. La masa de los cojinetes se concentra también en un punto discreto (su centro) cuyos desplazamientos son independientes de la flecha. La energía cinética de la flecha se puede expresar de la siguiente manera:

$$T_f = \frac{1}{2} \{\dot{\Psi}\}_f^T [m] \{\dot{\Psi}\}_f \quad (3.4)$$

Donde $[m]$ es la matriz diagonal de masa. Aplicando la transformación de la ecuación (2.3), se tiene:

$$T_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2 + \dot{\zeta}_1^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i^\xi (\dot{\theta}_i^\xi)^2 + \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i^\eta (\dot{\theta}_i^\eta)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i^\zeta (\dot{\theta}_i^\zeta)^2$$

Considerando que $l_i^\xi = l_i^\eta = l_i$ e $l_i^\zeta = l_i^z$ y sustituyendo (2.2) en (3.5), se llega a:

$$T_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i H_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n l_i^z (\dot{\theta}_i^z)^2 \quad (3.6)$$

Donde:

$$A_i = \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 - 2w \dot{X}_i \dot{Y}_i + 2w \dot{Y}_i \dot{X}_i + w^2 \dot{X}_i^2 + w^2 \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2$$

$$H_i = (\dot{\theta}_i^x)^2 + (\dot{\theta}_i^y)^2 - 2w (\dot{\theta}_i^x) (\dot{\theta}_i^y) + 2w (\dot{\theta}_i^y) (\dot{\theta}_i^x) + w^2 (\dot{\theta}_i^x)^2 + w^2 (\dot{\theta}_i^y)^2$$

La energía cinética asociada a la masa de los cojinetes hidrodinámicos se puede deducir a partir de la siguiente expresión (ver apéndice I):

$$T_c = \frac{1}{2} \{\dot{\psi}\}_c^T [m_i^b] \{\dot{\psi}\}_c \quad (3.7)$$

Donde $[m_i^b]$ es la matriz diagonal de masa asociada a los cojinetes. Aplicando las transformaciones en el plano se tiene:

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^b [(\dot{\xi}_i^b)^2 + (\dot{\eta}_i^b)^2] \quad (3.8)$$

Por otra parte el vector de desplazamiento de la flecha (δ). Se puede definir a partir del vector de excentricidad $\{e\}$ y de los desplazamientos de los soportes $\{B\}$ (ver figura 5), por tanto:

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= \{e\} + \{B\} \\ \{B\} &= \{\delta\} - \{e\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Reemplazando (2.2.) y (3.9) en (3.8) y realizando las operaciones necesarias se llega a:

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^b B_i \quad (3.10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} B_i = & \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + (\dot{e}_i^x)^2 + (\dot{e}_i^y)^2 - 2\dot{X}_i \dot{e}_i^x - 2\dot{Y}_i \dot{e}_i^y - 2w\dot{X}_i \dot{Y}_i + \\ & 2w\dot{X}_i \dot{e}_i^y + 2w\dot{Y}_i \dot{X}_i - 2w\dot{Y}_i \dot{e}_i^x + 2w\dot{e}_i^x \dot{Y}_i - 2w\dot{e}_i^y \dot{X}_i - \\ & 2w\dot{e}_i^x \dot{e}_i^y + 2w\dot{e}_i^y \dot{e}_i^x + w^2 X_i^2 + w^2 Y_i^2 + w^2 (\dot{e}_i^x)^2 + \\ & w^2 (\dot{e}_i^y)^2 - 2w^2 X_i \dot{e}_i^x - 2w^2 Y_i \dot{e}_i^y \end{aligned}$$

3.2. Energía Potencial

Dado que la gravedad se desprecia, la energía potencial tiene solamente la componente debida a la energía de deformación de los elementos elás-

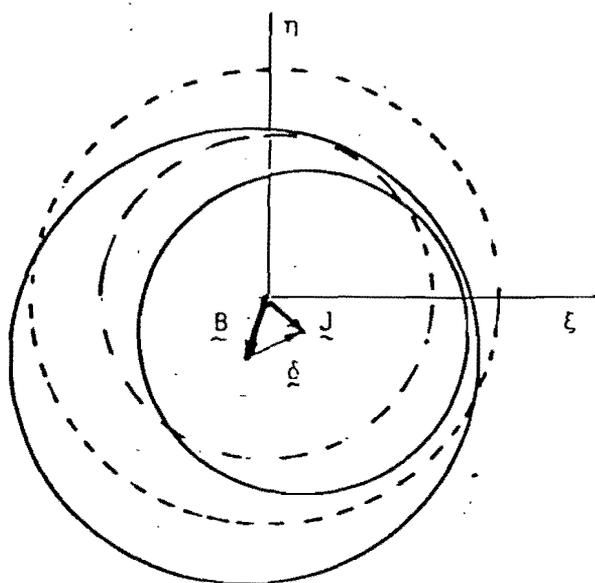


Fig. 5 Representación exagerada del desplazamiento del cojinete y muñón.

ticos del sistema. Similarmente a la energía cinética, las expresiones para la energía de deformación de la flecha se puede expresar mediante la ecuación:

$$U_f = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \quad (3.11)$$

En donde $[K]$, es la matriz global de rigidez para la flecha, referida al sistema coordinado rotatorio.

En la figura 6 se muestra un segmento de flecha para el cual se considera séxtuple grados de libertad por nodo. La matriz de rigidez de este elemento [21], tiene dimensión de 12×12 , por lo que la matriz global de rigidez tendrá dimensión de 18×18 .

La energía de deformación de los soportes de los cojinetes se obtienen de igual forma, quedando esta como: -(ver figura 7).

$$U_c = \frac{1}{2} \{\psi\}_c^T [K] \{\psi\}_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_k K_{kj} \psi_j \quad (3.12)$$

O también:

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [K_i^{\xi_i^b} (\xi_i^b)^2 + K_i^{\eta_i^b} (\eta_i^b)^2] \quad (3.13)$$

En donde $[K]$, representa la matriz de rigidez de los soportes de los cojinetes.

Si se supone que $K_i^{\xi_i^b} = K_i^{\eta_i^b} = K_i$ entonces

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N K_i [(\xi_i^b)^2 + (\eta_i^b)^2] \quad (3.14)$$

Combinando las ecuaciones (2.1), (3.9) y (3.14), se obtiene:

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N K_i [X_i^2 + Y_i^2 + (e_i^x)^2 + (e_i^y)^2 - 2X_i e_i^x - 2Y_i e_i^y] \quad (3.15)$$

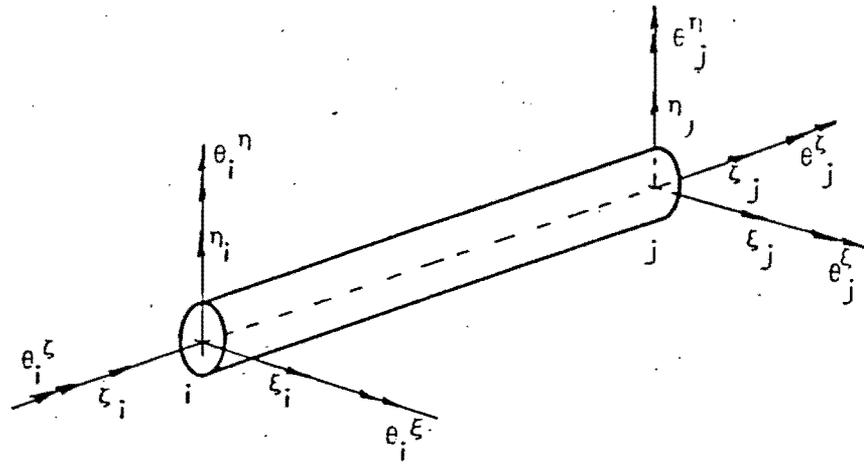


Fig. 6 Elemento viga sèxtuple grado de libertad

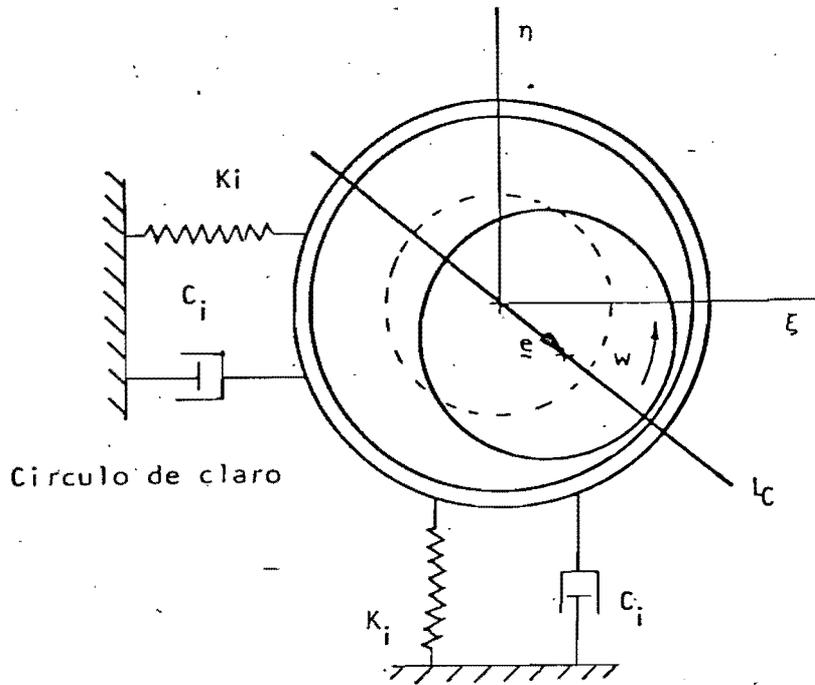


Fig. 7 Modelo del cojinete hidrodinámico soportado por el sistema resorte-amortiguador.

Hasta aquí se han encontrado las expresiones para la energía cinética de: la flecha ecuación (3.6) y de los soportes de los cojinetes, ecuación (3.9), así como para la energía de deformación de: la flecha, ecuación (3.11), y de los soportes ecuación (3.15). Para determinar la función escalar L es necesario de definir la energía cinética y de deformación, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T &= T_f + T_c \\ U &= U_f + U_c \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo que la función escalar L será:

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ L &= T_f + T_c - U_f - U_c \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.6), (3.9), (3.11) y (3.15) en (3.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^b B_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i H_i + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i^z (\ddot{\theta}_i^z)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n q_k K_{kj} q_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_i D_i \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 - 2w \dot{X}_i \dot{Y}_i + 2w \dot{Y}_i \dot{X}_i + w^2 \dot{X}_i^2 + w^2 \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2 \\ B_i &= \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + (\dot{e}_i^x)^2 + (\dot{e}_i^y)^2 - 2\dot{X}_i (\dot{e}_i^x) - 2\dot{Y}_i (\dot{e}_i^y) - 2w \dot{X}_i \dot{Y}_i + \\ &2w \dot{X}_i \dot{e}_i^y + 2w \dot{Y}_i \dot{X}_i - 2w \dot{Y}_i \dot{e}_i^x + 2w \dot{e}_i^x + 2w \dot{e}_i^y \dot{X}_i - 2w \dot{e}_i^x \dot{e}_i^y + \\ &2w \dot{e}_i^y \dot{e}_i^x + w^2 \dot{X}_i^2 + w^2 \dot{Y}_i^2 + w^2 (\dot{e}_i^x)^2 + w^2 (\dot{e}_i^y)^2 - 2w^2 \dot{X}_i \dot{e}_i^x - \\ &2w^2 \dot{Y}_i \dot{e}_i^y \end{aligned}$$

$$D_i = \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + (\dot{e}_i^x)^2 + (\dot{e}_i^y)^2 - 2\dot{X}_i \dot{e}_i^x - 2\dot{Y}_i \dot{e}_i^y$$

$$H_i = (\dot{\theta}_i^x)^2 + (\dot{\theta}_i^y)^2 - 2w (\dot{\theta}_i^x) (\dot{\theta}_i^y) + 2w (\dot{\theta}_i^x) (\dot{\theta}_i^y) + w^2 (\dot{\theta}_i^x)^2 + w^2 (\dot{\theta}_i^y)^2$$

En donde K_{kj} = coeficientes de la matriz de rigidez del elemento viga.

3.3. Función de Disipación

La otra función escalar que es necesario definir, es la función de disipación de energía para el modelo, ésta se puede obtener a partir de:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \{\dot{\Psi}\} [c] \{\dot{\Psi}\}^T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [c_i^{\xi_i^b} (\dot{\xi}_i^b)^2 + c_i^{\eta_i^b} (\dot{\eta}_i^b)^2] \quad (3.19)$$

Por otro lado, si se supone que: $c_i^{\xi_i^b} = c_i^{\eta_i^b} = c_i$ entonces:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i [(\dot{\xi}_i^b)^2 + (\dot{\eta}_i^b)^2] \quad (3.20)$$

Combinando las ecuaciones (2.1), (3.9) y (3.20), se llega a:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i B_i \quad (3.21)$$

Donde:

$$\begin{aligned} B_i = & \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + (\dot{e}_i^x)^2 + (\dot{e}_i^y)^2 - 2\dot{X}_i \dot{e}_i^x - 2\dot{Y}_i \dot{e}_i^y - 2w \dot{X}_i \dot{Y}_i + \\ & 2w \dot{X}_i \dot{e}_i^y + 2w \dot{Y}_i \dot{X}_i - 2w \dot{Y}_i \dot{e}_i^x + 2w \dot{e}_i^x \dot{Y}_i - 2w \dot{e}_i^y \dot{X}_i - \\ & 2w \dot{e}_i^x \dot{e}_i^y + 2w \dot{e}_i^y \dot{e}_i^x + w^2 \dot{X}_i^2 + w^2 \dot{Y}_i^2 + w^2 (\dot{e}_i^x)^2 + \\ & w^2 (\dot{e}_i^y)^2 - 2w^2 \dot{X}_i \dot{e}_i^x - 2w^2 \dot{Y}_i \dot{e}_i^y \end{aligned}$$

Derivando las funciones escalares L y \mathcal{F} ecuaciones (3.18) y (3.21), con respecto a cada una de las variables tal como se expresa en la ecuación (3.1), y reemplazando en ésta se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones de movimiento expresado en el sistema rotatorio (ver apéndice II).

$$(m_i + m_i^b) \ddot{X}_i + C_i \dot{X}_i - 2\omega(m_i + m_i^b) \dot{Y}_i - \omega^2(m_i + m_i^b - K_i) X_i - C_i \dot{Y}_i + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-5} = m_i^b \ddot{e}_i^x + C_i \dot{e}_i^x + 2\omega m_i^b \dot{e}_i^y + (K_i - m_i^b \omega^2 + C_i) e_i^x$$

$$(m_i + m_i^b) \ddot{Y}_i + 2\omega(m_i + m_i^b) \dot{X}_i + C_i \dot{Y}_i + C_i \omega X_i - \omega^2(m_i + m_i^b - K_i) Y_i + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-4} = m_i^b \ddot{e}_i^y + 2\omega m_i^b \dot{e}_i^x + C_i \dot{e}_i^y + (K_i - m_i^b \omega^2 + C_i) e_i^y$$

$$m_i \ddot{Z}_i + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-3} = 0$$

$$I_i \ddot{\theta}_i^x - 2\omega I_i \dot{\theta}_i^y - \omega^2 I_i \theta_i^x + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-2} = 0$$

$$I_i \ddot{\theta}_i^y + 2\omega I_i \dot{\theta}_i^x - \omega^2 I_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-1} = 0$$

$$I_i \ddot{\theta}_i^z + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i} = 0$$

$$m_i^b (\ddot{X}_i - \dot{e}_i^x - 2\omega \dot{Y}_i + 2\omega \dot{e}_i^y - \omega^2 X_i + \omega^2 e_i^x) + K_i (X_i - e_i^x) - C_i (X_i - e_i^x - \omega Y_i + \omega e_i^x) = 0$$

$$m_i^b (\ddot{Y}_i - \dot{e}_i^y + 2\omega \dot{X}_i - 2\omega \dot{e}_i^x - \omega^2 Y_i + \omega^2 e_i^y) + K_i (Y_i - e_i^y) - C_i (Y_i - e_i^y + \omega X_i - \omega e_i^y) = 0$$

Donde:

$$\alpha_{6i-5} = X_i \quad \alpha_{6i-4} = Y_i \quad \alpha_{6i-3} = Z_i$$

$$\alpha_{6i-2} = \theta_i^x \quad \alpha_{6i-1} = \theta_i^y \quad \alpha_{6i} = \theta_i^z$$

En donde las dos ecuaciones finales no aplican para la masa del centro.

Las ecuaciones (3.22), expresadas en forma matricial quedan como:

IV. COJINETES HIDRODINAMICOS Y EL METODO DE LAS MOVILIDADES

Se puede observar que en el sistema de ecuaciones diferenciales, aparecen los términos debidos a las excentricidades e_i^x , e_i^y , así como las velocidades y aceleraciones instantáneas en los centros de los muñones \dot{e}_i^x , \dot{e}_i^y , \ddot{e}_i^x , \ddot{e}_i^y . Para determinar estos valores, se utilizan las funciones de movilidad de Booker [13], y sus derivadas. Estas funciones que denotan la relación fuerza-velocidad están dadas por la siguiente expresión:

$$\dot{e} = \frac{F (c/R)^2}{L D \mu/c} M + \bar{\omega} \times e \quad (4.1)$$

En este caso $M = M(e, L/D)$ es la función de movilidad derivada de las características (longitud, diámetro, claro) de los cojinetes y de sus respectivas excentricidades. En la figura 8, se presenta el modelo del sistema cojinete-muñon y coordenadas geométricas.

La ecuación (4.1), puede escribirse:

$$\begin{aligned} \dot{e}^\xi &= \frac{F (c/R)^2}{L D \mu/c} M^\xi - \bar{\omega} e^\eta \\ \dot{e}^\eta &= \frac{F (c/R)^2}{L D \mu/c} M^\eta + \bar{\omega} e^\xi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para este caso, se tiene que las relaciones de excentricidad queda definida por:

$$\begin{aligned} e^\xi &= \frac{e^\xi}{c} \\ e^\eta &= \frac{e^\eta}{c} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La transformación del sistema $\xi-\eta$ fijo al $\xi'-\eta'$ referido a la fuerza aplicada en el cojinete está dada por:

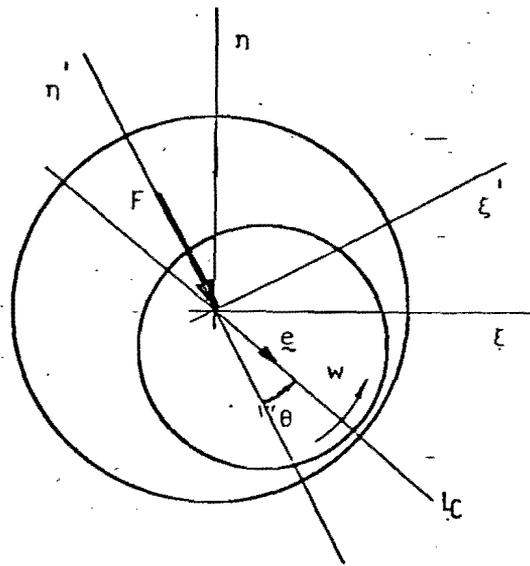


Fig. 3 Coordenadas geométricas del cojinete-muñón utilizadas en las funciones de movilidad.

$$\begin{Bmatrix} M^{\xi} \\ M^{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M^{\xi'} \\ M^{\eta'} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Donde:

$$\begin{aligned} M^{\xi'} &= \frac{\sqrt{2}}{3\eta} (1 - \epsilon^{\xi'})^{3/2} \psi + \frac{50\sqrt{2}}{69\eta} \frac{(1 - \epsilon^{\xi'})^{5/2}}{(L/D)^2} \\ M^{\eta'} &= -\frac{\sqrt{2}}{4\eta} (1 - \epsilon^{\xi'})^{1/2} \epsilon^{\eta'} \psi + \frac{50\sqrt{2}}{25\eta} \frac{(1 - \epsilon^{\xi'})^{3/2} \epsilon^{\eta'}}{(L/D)^2} \psi \\ \psi &= 1 + \frac{(\epsilon^{\eta'})^2 + (\epsilon^{\xi'})^3}{(1 - \epsilon^{\xi'})} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$F = \frac{\bar{\omega} \mu LD}{(C/R)^2} \left(\frac{2}{2 + \epsilon^2} \right) \left(\frac{3\epsilon}{1 - \epsilon^2} \right) [4\epsilon^2 + \pi^2(1 - \epsilon^2)]^{1/2} \left[\frac{1 - \tanh \lambda L/D}{\lambda L/D} \right]$$

$$\lambda^2 = 2(1 - G^2) \left[\frac{2G^2 \operatorname{ctn}^2 \phi + (3 - G^2)}{G^4(2 + G - 3G \operatorname{ctn}^2 \phi + G(1 - G)(5 + 3G))} \right]$$

$$\phi = \operatorname{Tan}^{-1} \frac{\pi G}{2\epsilon}$$

$$G = (1 - \epsilon^2)^{1/2}$$

Combinando estas últimas expresiones se puede obtener la velocidad instantánea en los centros de los muñones para el sistema coordenado absoluto \dot{e}_i^{ξ} , \dot{e}_i^{η} . Al utilizar una transformación de coordenadas, se determinan los valores que estas velocidades en el sistema rotatorio \dot{e}_i^x , \dot{e}_i^y :

$$\begin{Bmatrix} M^x \\ M^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \text{sen} \omega t \\ -\text{sen} \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M^\xi \\ M^\eta \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \ddot{e}^x &= \frac{|F| (c/R)^2}{L D \mu/c} M^x - \bar{\omega} \dot{e}^y \\ \ddot{e}^y &= \frac{|F| (c/R)^2}{L D \mu/c} M^y + \bar{\omega} \dot{e}^x \end{aligned} \quad (4.7)$$

Derivando las expresiones (4.7) se determinan las ecuaciones que permiten calcular las aceleraciones instantáneas en los centros de los muñones, quedando éstas como:

$$\ddot{e}^x = \frac{|F| (c/R)^2}{L D \mu/c} \dot{M}^x - \bar{\omega} \dot{e}^y$$

$$\ddot{e}^y = \frac{|F| (c/R)^2}{L D \mu/c} \dot{M}^y + \bar{\omega} \dot{e}^x$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}^x \\ \dot{M}^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \text{sen} \omega t \\ -\text{sen} \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{M}^\xi + \omega M^\eta \\ \dot{M}^\eta - \omega M^\xi \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\dot{M}^\xi = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} (1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{1}{2}} \epsilon^{\xi'} \dot{\psi} + \frac{\sqrt{2}}{3\pi} (1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{3}{2}} \dot{\psi} - \frac{125}{69\pi} \frac{(1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{3}{2}}}{(L/D)^2} \dot{\epsilon}^{\xi'}$$

$$\dot{M}^\eta = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} (1-\epsilon^{\xi'})^{-\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^{\xi'} \epsilon^\eta \psi - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} (1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{1}{2}} \dot{\epsilon}^{\xi'} \psi - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} (1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{1}{2}} \epsilon^{\eta'} \dot{\psi}$$

$$\frac{69}{25} \frac{(1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{1}{2}}}{(L/D)^2} \dot{\epsilon}^{\xi'} \epsilon^{\eta'} \psi + \frac{23\sqrt{2}}{25\pi} \frac{(1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{3}{2}}}{(L/D)^2} \dot{\epsilon}^{\xi'} \psi + \frac{23\sqrt{2}}{25\pi} \frac{(1-\epsilon^{\xi'})^{\frac{3}{2}}}{(L/D)^2} \epsilon^{\eta'} \dot{\psi}$$

Como se puede apreciar en el sistema de ecuaciones (3.23) las incógnitas \dot{e}_i^x , \dot{e}_i^y , \ddot{e}_i^x , \ddot{e}_i^y , se determinan a partir de las ecuaciones (4.7) y (4.8), en las que intervienen las características hidrodinámicas de los cojinetes.

Por tanto, combinando estas ecuaciones se obtiene un sistema que representa en forma simultánea las características elastodinámicas del sistema y la naturaleza hidrodinámica de los cojinetes. Este sistema de ecuaciones resultante, es la base de la contribución de este estudio.

V. SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

La obtención de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales dado en (3.23), no es sencillo, dada la naturaleza del mismo. Este sistema de ecuaciones es no estacionario y se puede escribir de la siguiente forma:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [c] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} , \text{ para } t > t_0 \quad (5.1)$$

Donde:

$$\{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

$$\{\dot{U}(t_0)\} = \{\dot{U}_0\}$$

O también

$$\{\dot{U}\} = \frac{\partial}{\partial t} \{U\} \quad (5.2)$$

$$\{\ddot{U}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{U\} = \frac{\partial}{\partial t} \{\dot{U}\}$$

En la cual:

[M] es la matriz de masa

[C] es la matriz que contiene los términos debidos al amortiguamiento y a la aceleración de Coriolis

[K] representa la matriz de rigidez

{U(t)} representa el vector solución

Como [M] y [K], son independientes del tiempo y del vector {U} y sus derivadas, éstas solo dependen del sistema físico.

Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones, existen los métodos de integración directa [20, 21, 22, 23], que permiten obtener una solución aproximada. En el presente trabajo se utiliza el método de las diferencias centrales para resolverlo.

Recordemos las expresiones (5.1), dadas anteriormente:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}_t \quad t > t_0 \quad (5.3)$$

Donde $\{U\}$ y $\{\dot{U}\}$ son conocidos para el tiempo $t = t_0$.

El método de las diferencias centrales es un método explícito que aproxima las derivadas para un instante de tiempo t , utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}_t\} &= \frac{1}{\Delta t^2} (\{U_{t+\Delta t}\} - 2\{U_t\} + \{U_{t-\Delta t}\}) \\ \{\dot{U}_t\} &= \frac{1}{2\Delta t} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_{t-\Delta t}\}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sustituyendo las expresiones (5.4) en (5.3), se llega a:

$$\begin{aligned} [M] \left[\frac{1}{\Delta t^2} (\{U_{t+\Delta t}\} - 2\{U_t\} + \{U_{t-\Delta t}\}) \right] + \\ [C] \left[\frac{1}{2\Delta t} (\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_{t-\Delta t}\}) \right] + [K] \{U_t\} = \{F\}_t \end{aligned} \quad (5.5)$$

Desarrollando, se obtiene:

$$(a_0 [M] + a_1 [C]) \{U_{t+\Delta t}\} = \{R_t\} \quad (5.6)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} ; a_1 = \frac{1}{\Delta t} ; a_2 = \frac{2}{\Delta t^2} = 2a_0 ; a_3 = \frac{\Delta t^2}{2} = \frac{1}{a_2}$$

$$[(F) - ([K] - a_2 [M])] \{U_t\} - (a_0 [M] - a_1 [C]) \{U_{t-\Delta t}\}$$

Si se toma: $[M] = a_0 [M] + a_1 [C]$, entonces:

$$[M] \{U_{t+\Delta t}\} = \{R_t\} \quad (5.7)$$

Para el instante $t = t_0$, $\{U_0\}$ y $\{\dot{U}_0\}$ son conocidos, por lo que se puede evaluar $\{U_0\}$ a partir de la ecuación (5.3). Al observar las expresiones dadas en (5.4), se ve que al eliminar $\{U_{t+\Delta t}\}$, se determina el valor de $\{U_t\}$, en $t = t_0$.

$$\{U_{t_0-\Delta t}\} = \{U_0\} - \Delta t \{\dot{U}_0\} + a_3 \{U_0\} \quad (5.8)$$

La estabilidad de la solución se garantiza para valores de Δt inferiores a Δt_c , $\Delta t_c = 1/T_{min}$, en donde T_{min} es el período fundamental.

VI. ALGORITMO DE SOLUCION

Para obtener la solución al sistema de ecuaciones dado en (3.23), es necesario el uso de un algoritmo cuyo procedimiento es como se indica en los siguientes pasos (ver diagrama de las figuras 9 y 16):

1. Cálculos iniciales

1.1. Formulación de las matrices de masa $[M]$, rigidez $[K]$ y amortiguamiento $[C]$.

1.2. Selección del incremento de tiempo Δt .

1.3. Determinar los valores:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} ; a_1 = \frac{1}{2\Delta t} ; a_2 = 2a_0 ; a_3 = \frac{1}{a_2}$$

1.4. Suponer una solución inicial $\{U_{t_0}\}$, $\{\dot{U}_{t_0}\}$.

1.5. Cálculo de $\{U_{t_0}\}$.

1.6. Cálculo de:

$$\{U_{t_0-\Delta t}\} = \{U_{t_0}\} - \Delta t \{\dot{U}_{t_0}\} + a_3 \{U_{t_0}\}$$

1.7. Determinación de la matriz $[M] = a_0 [M] + a_1 [C]$

2. Proceso incremental.

2.1. Cálculo de las velocidades instantáneas en los centros de los muñones, utilizando las funciones de movilidad.

2.2. Determinar las aceleraciones instantáneas en los centros de los muñones, utilizando las derivadas de las funciones de movilidad.

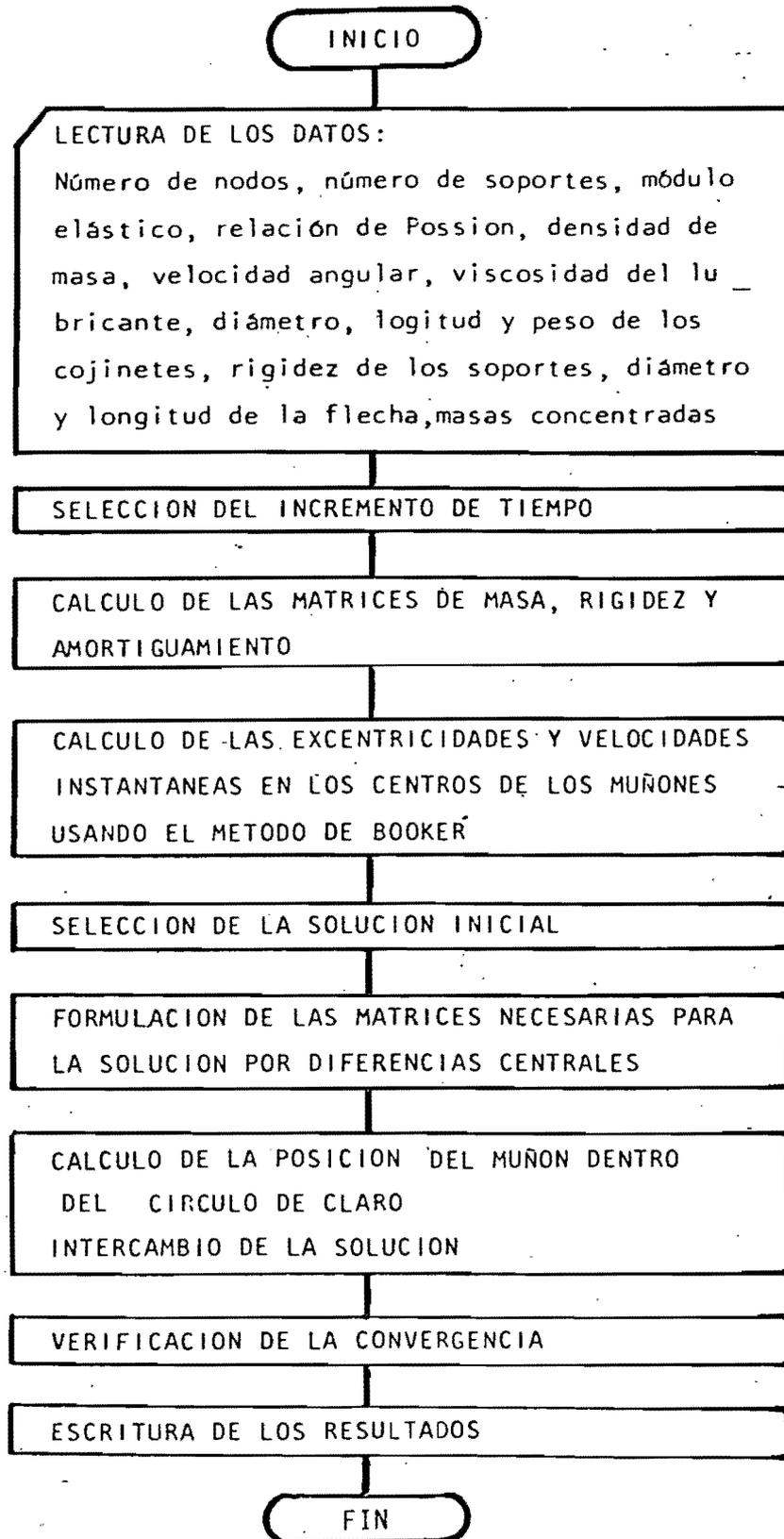


Fig. 9 Diagrama de flujo simplificado

2.3. Determinación de las cargas efectivas del sistema.

$$\{R_t\} = -([K] - a_2[M] - [F])\{U_f\} - (a_0[M] - a_1[C])\{U_{t-\Delta t}\}$$

2.4. Cálculo de los desplazamientos en el tiempo $t + \Delta t$.

$$[\tilde{M}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{R_t\}$$

2.5. Intercambio de las soluciones.

2.6. Repetir el proceso a partir del paso 2.1 hasta lograr la convergencia. (después de un ciclo).

VII. APLICACIONES

Mediante la aplicación de la descripción Lagrangiana se desarrollaron las ecuaciones de movimiento del sistema general, utilizando las diferencias centrales se planteó la solución a las mismas y con ayuda de un programa de computación digital (ver figura 9 y apéndice III) se analizaron tres ejemplos.

El primero de ellos con la finalidad de comparar los resultados obtenidos por Badgley y Booker [25], y los calculados con las ecuaciones de movimiento desarrolladas en este trabajo. Badgley y Booker utilizaron los siguientes datos en el sistema analizado:

Diámetro del cojinete	=	4.0 pulg.
Longitud del cojinete	=	2.0 pulg.
Circulo de claro	=	1.0 miles.
Viscosidad del lubricante	=	1.0 reyns
Velocidad angular	=	10621 rpm.
Masa del cojinete	=	47 lb.
Rigidez de los soportes	=	1E+9 lb/pulg.
Coefficiente de amortiguamiento de los soportes	=	69E-5

Los datos para el modelo desarrollado en el presente trabajo se dan en la tabla 1, de acuerdo con la figura 10.

El segundo ejemplo se utiliza para comparar los resultados presentados por Kirk, Choudhry y Gunter [26], y los obtenidos a partir de las ecuaciones de movimiento propuestas en este estudio. Los datos utilizados

DATOS GENERALES DEL ROTOR						
NUMERO DE DISCOS	1	VELOCIDAD ANGULAR 10621 rpm				
NUMERO DE SEGMENTOS DE FLECHA	2	MODULO ELASTICO 30E+6 lb/in ²				
NUMERO DE SOPORTES	2	RELACION DE POISSON 03				
DATOS DE LOS SEGMENTOS DE FLECHA						
N°	LONGITUD		DIAMETRO			
	cm	in	cm		in	
1	76.2	30.0	7.61		2.9995	
2	76.2	30.0	7.61		2.9995	
DATOS DE LOS DISCOS						
N°	PESO		ESTACION			
	kg	lb				
1	21.33	47.0	2			
DATOS DE LOS SOPORTES FLEXIBLES Y AMORTIGUADOS						
N°	RIGIDEZ		COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO			
	N/m	lb/in				
1	6.9E+6	1E+9	69E-5			
2	6.9E+6	1E+9				
DATOS DE LOS COJINETES HIDRODINAMICOS						
N°	LONGITUD		DIAMETRO		VISCOSIDAD	
	cm	in	cm	in	Kg/m.s	Reyns
1	5.08	2.0	10.16	4.0	10 ³	0.01
2	5.08	2.0	10.16	4.0	10 ³	0.01

Tabla 1. Datos del sistema rotor flexible-amortiguado para el ejemplo 1.

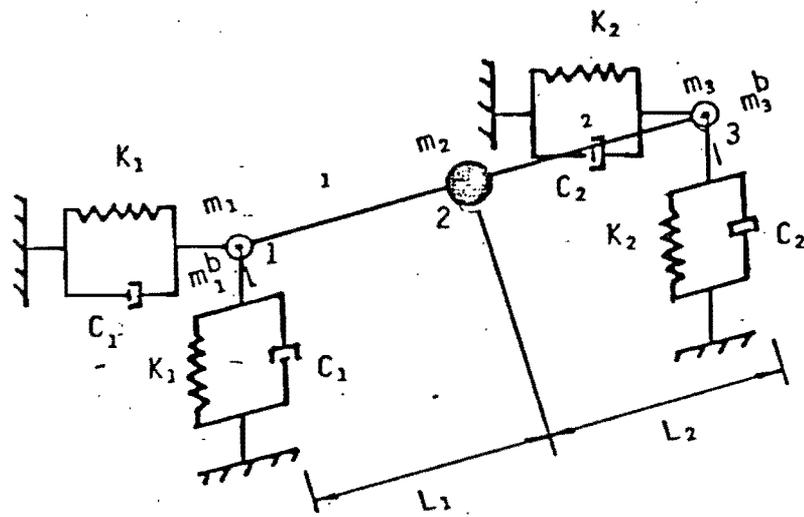


Fig. 10 Configuración geométrica del modelo analizado en los ejemplos

por Kirk, Choudhry y Gunter se enlistan a continuación:

Diámetro del cojinete	=	2.0	pulg.
Longitud del cojinete	=	1.0	pulg.
Circulo de claro	=	5.0	miles
Viscosidad del lubricante	=	1.0	reyns
Masa del cojinete	=	5.0	lb.
Masa del disco	=	50.0	lb.
Coeficiente de amortiguamiento de los soportes	=	0.556	
Coeficiente de rigidez de los soportes	=	1E+8	lb/pulg.
Velocidad angular	=	10500	rpm

En el ejemplo 2, para el modelo de la figura 10 se usaron los valores presentados en la tabla 2.

Para el tercer ejemplo se utilizaron los valores enlistados en la tabla 3.

En la figura 11 se presentan los resultados del ejemplo 1. En este caso se representa el movimiento del muñon a una velocidad de 10621 rpm. Los valores obtenidos por Badgley y Booker tienen bastante similitud con los encontrados utilizando el modelo aquí desarrollado; en lo referente a las órbitas descritas por el muñon y la manera como convergen.

En la figura 12 se grafican los resultados del ejemplo 2, estos valores determinan la órbita del muñon para un rotor vertical balanceado. Se observa en esta gráfica que la solución obtenida por Kirk, Choudhury

DATOS GENERALES DEL ROTOR						
NUMERO DE DISCOS	1	VELOCIDAD ANGULAR 10500 rpm				
NUMERO DE SEGMENTOS DE FLECHA	2	MODULO ELASTICO 30E+6 lb/in ²				
NUMERO DE SOPORTES	2	RELACION DE POISSON 0.3				
DATOS DE LOS SEGMENTOS DE FLECHA						
N°	LONGITUD		DIAMETRO			
	cm	in	cm	in		
1	50.8	20.0	0.78	1.995		
2	50.8	20.0	0.78	1.995		
DATOS DE LOS DISCOS						
N°	PESO	ESTACION				
	kg	lb				
1	22.7	50.0	2			
DATOS DE LOS SOPORTES FLEXIBLES Y AMORTIGUADOS						
N°	RIGIDEZ		COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO			
	N/m	lb/in				
1	6.9E+5	1E+8	0.556			
2	6.9E+5	1E+8				
DATOS DE LOS COJINETES HIDRODINAMICOS						
N°	LONGITUD		DIAMETRO		VISCOSIDAD	
	cm	in	cm	in	Kg/m.s	Reyns
1	2.54	1.0	5.08	2.0		1
2	2.54	1.0	5.08	2.0		1

Tabla 2. Datos del sistema rotor flexible-amortiguado para el ejemplo 2.

DATOS GENERALES DEL ROTOR						
NUMERO DE DISCOS	1	VELOCIDAD ANGULAR 8000 rpm				
NUMERO DE SEGMENTOS DE FLECHA	2	MODULO ELASTICO 30E+6 lb/in ²				
NUMERO DE SOPORTES	2	RELACION DE POISSON 0.3				
DATOS DE LOS SEGMENTOS DE FLECHA						
N°	LONGITUD		DIAMETRO			
	cm	in	cm		in	
1	50.8	20.0	0.767		1.95	
2	101.6	40.0	0.767		1.95	
DATOS DE LOS DISCOS						
N°	PESO				ESTACION	
	kg	lb				
1	16.79	37.0			2	
DATOS DE LOS SOPORTES FLEXIBLES Y AMORTIGUADOS						
N°	RIGIDEZ		COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO			
	N/m	lb/in				
1	6.9E+6	1E+9	0.006			
2	6.9E+6	1E+9				
DATOS DE LOS COJINETES HIDRODINAMICOS						
N°	LONGITUD		DIAMETRO		VISCOSIDAD	
	cm	in	cm	in	Kg/m.s	Reyns
1	2.54	1.0	5.08	2.0		0.06
2	2.54	1.0	5.08	2.0		0.06

Tabla 3. Datos del sistema rotor flexible-amortiguado para el ejemplo 3.

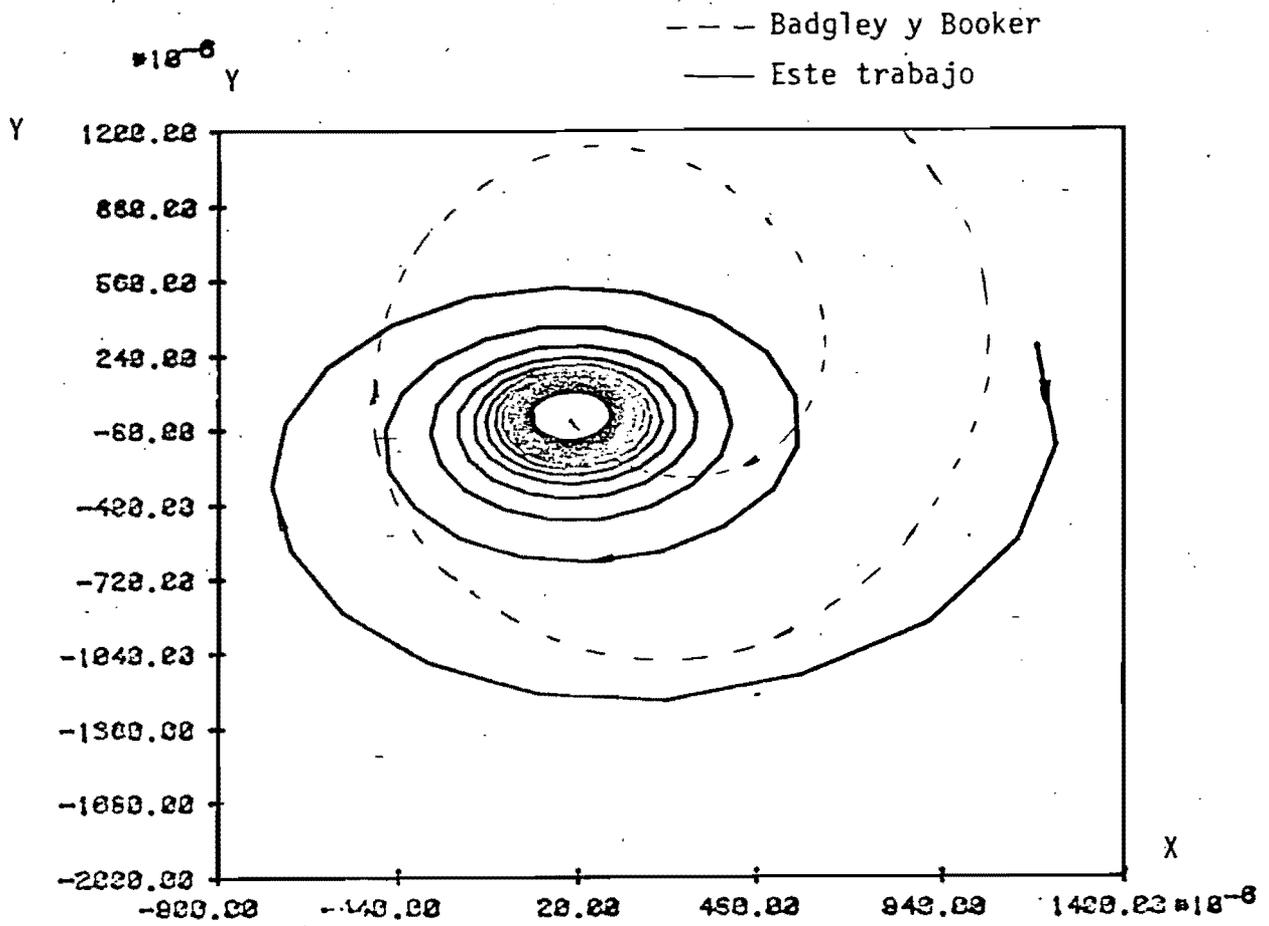


Fig. 11. Movimiento seguido por el muñón en el cojinete 1.

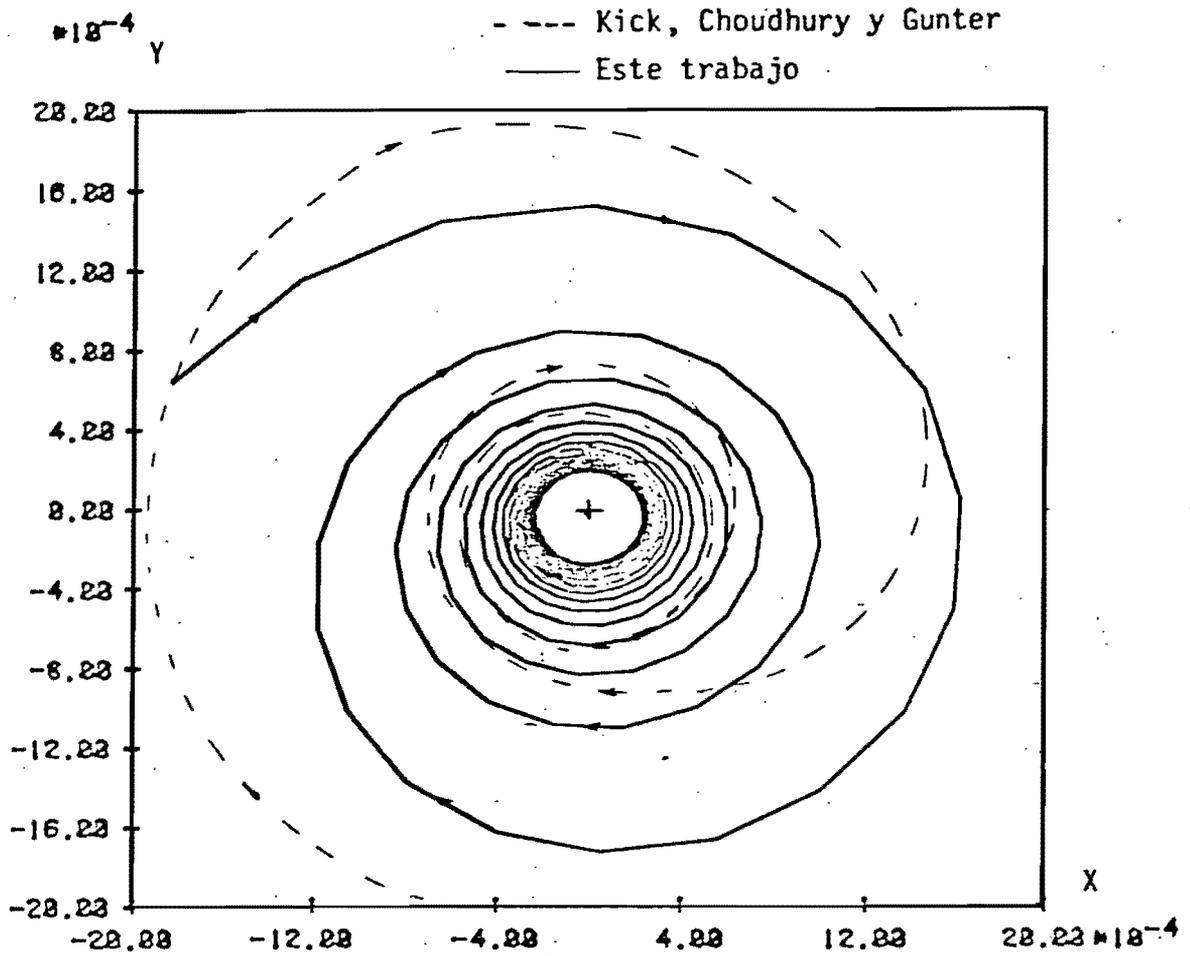


Fig. 12. Órbita descrita por el muñón en el cojinete 1 para un rotor vertical balanceado con una velocidad angular de 10500 rpm.

y Gunter y la del modelo tienden a una solución próxima.

En la figura 13 se grafican los resultados del ejemplo 3 en este caso se presentan los resultados obtenidos para los cojinetes 1 y 2 respectivamente. En esta figura se aprecia que el cojinete 1 describe una órbita mayor a la descrita por el cojinete 2, esto se debe a que la distancia entre el cojinete 1 y la masa del disco es menor que la distancia entre la masa del disco y el cojinete 2.

En la figura 14 se observa la variación de la fuerza existente en el cojinete 1, en el transcurso del tiempo; al cabo de cierto valor esta fuerza permanece con una variación armónica.

En la figura 15 se representan los valores del ejemplo 3 para una velocidad angular de 4000 rpm, en esta figura se aprecia claramente un incremento en los desplazamientos del muñon referidos a los desplazamientos presentados en la figura 13.

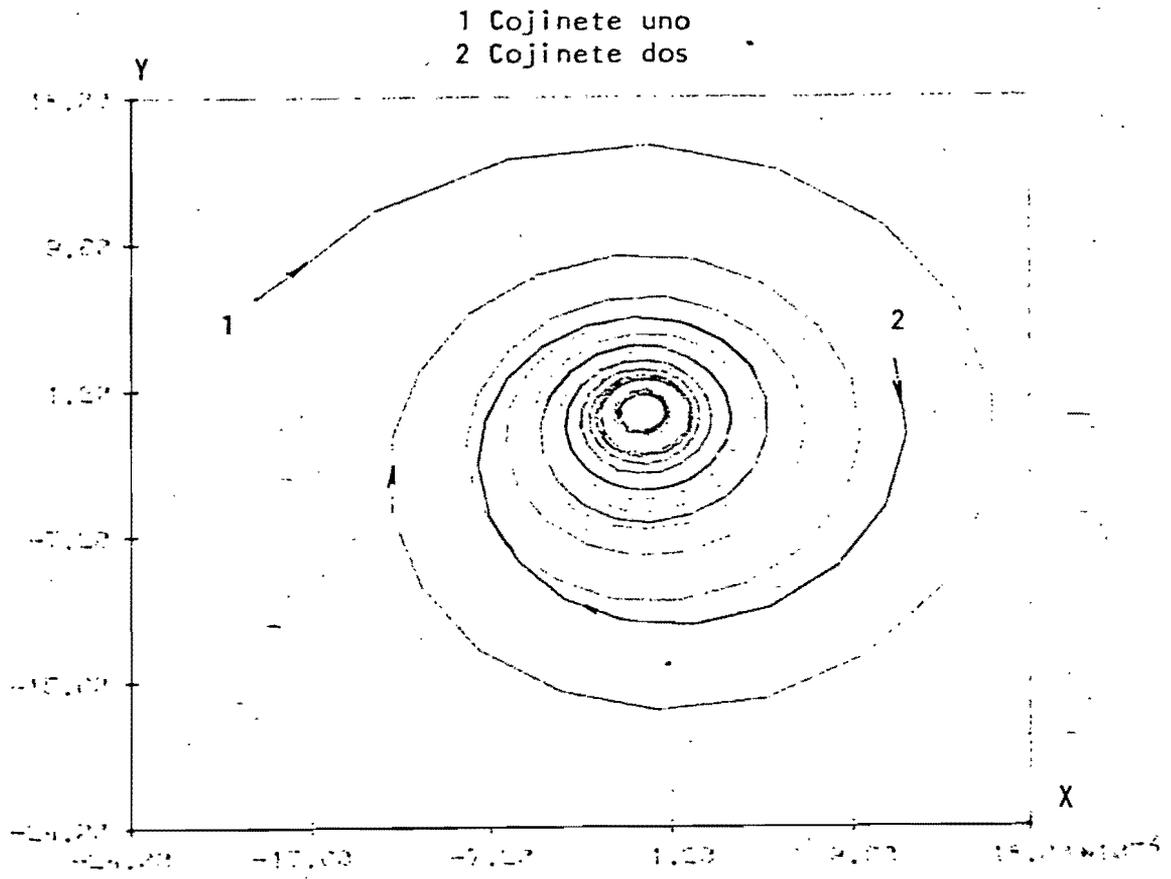


Fig. 13. Orbitas descritas por los muñones en los cojinetes 1 y 2.

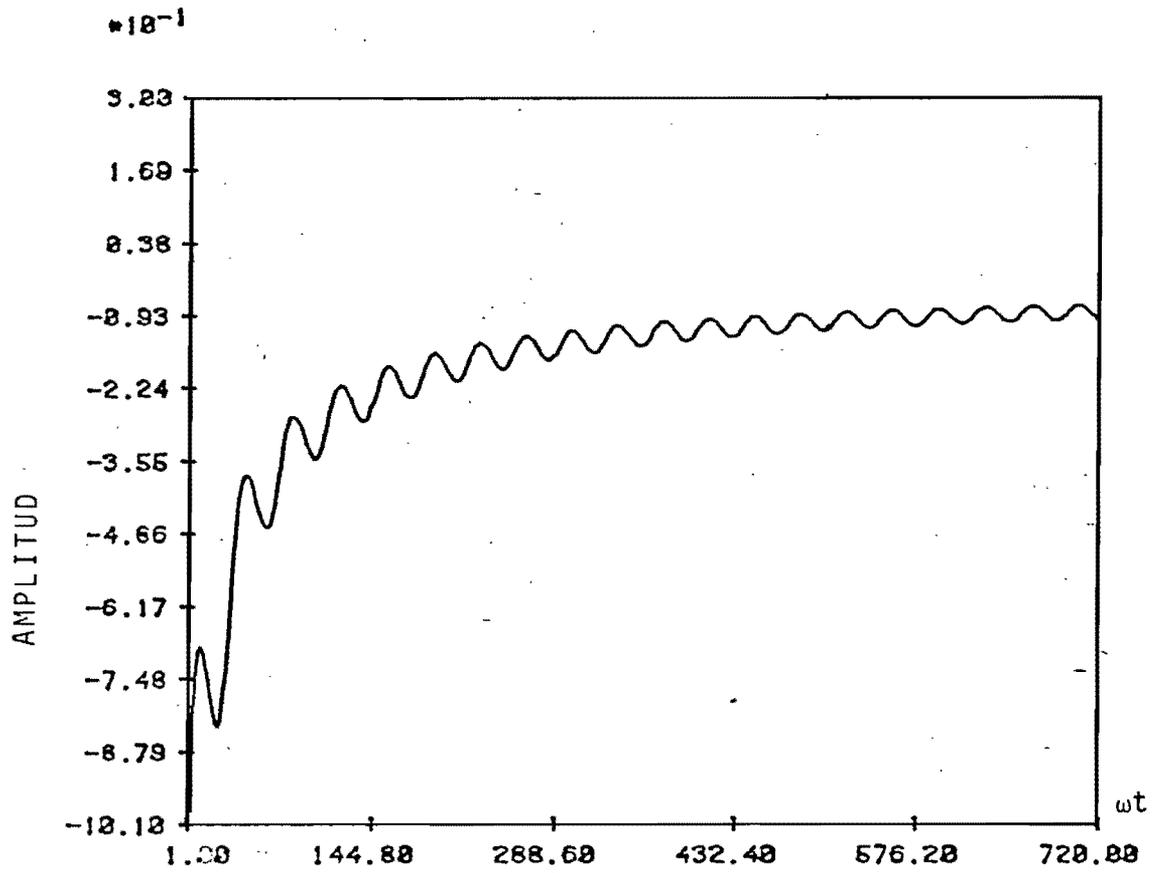


Fig. 14. Variación de la fuerza en el cojinete 1.

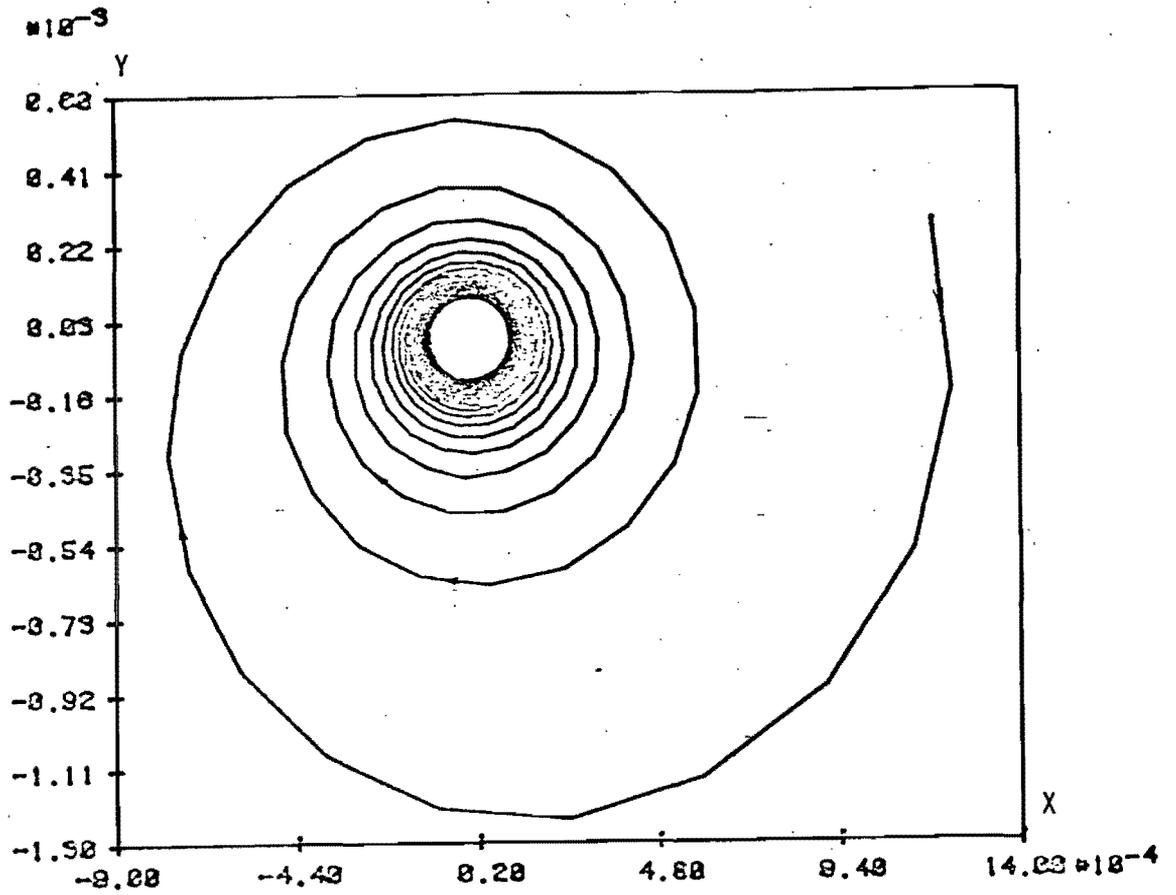


Fig. 15. Representación del movimiento del muón para una velocidad angular de 4000 rpm.

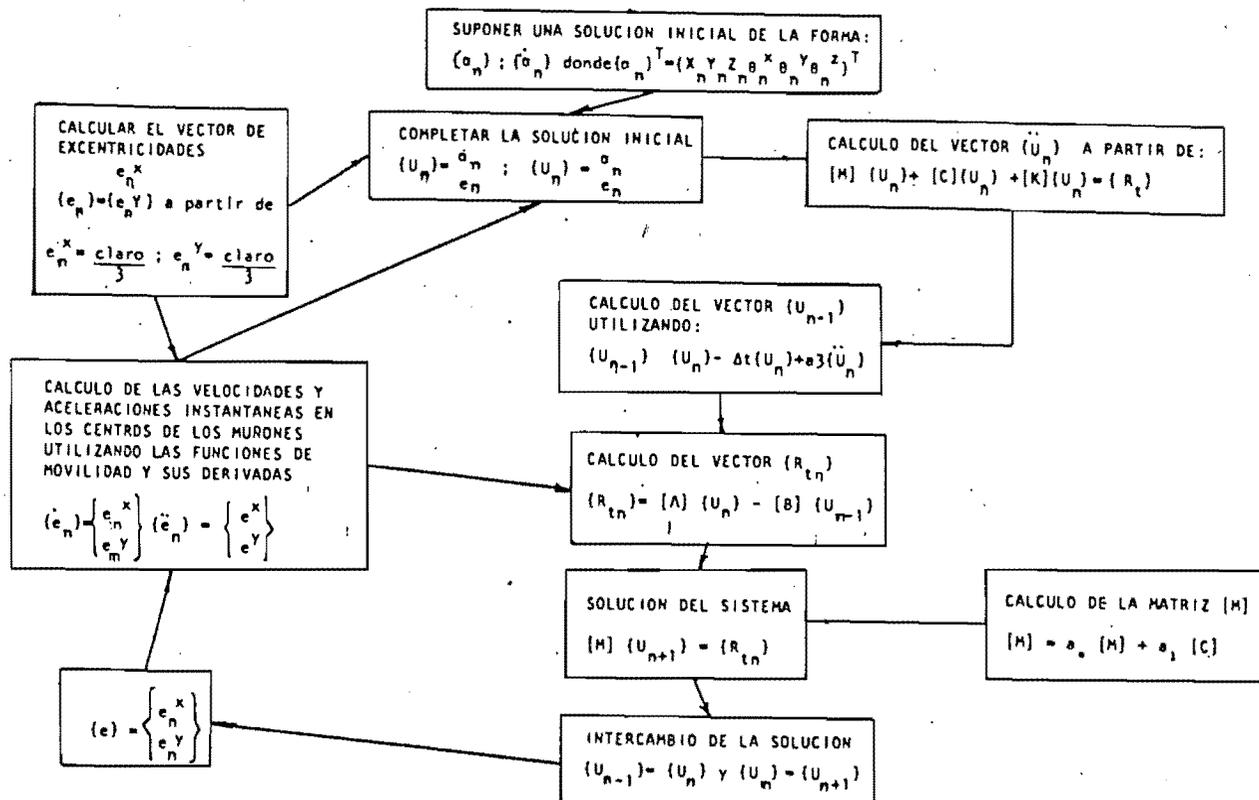


Fig. 16 Diagrama de bloques para el algoritmo de solución

VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra como es posible determinar la respuesta dinámica de sistemas rotor flexible-chumacera hidrodinámica, mediante el desarrollo de las ecuaciones de movimiento propuestas en un programa de computación digital.

Las ecuaciones de movimiento pueden utilizarse convenientemente para el estudio de la respuesta dinámica de sistemas que puedan representarse como el modelo aquí descrito. El proceso de cálculo reduce el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a un sistema de ecuaciones algebraicas, incluyendo en todo momento la parte elastodinámica e hidrodinámica.

Las ecuaciones de movimiento se formulan utilizando una descripción Lagrangiana y la rotación estándar de sistemas coordinados: considerando rotores balanceados y cojinetes de longitud finita.

Una característica importante del modelo es que incluye en la respuesta dinámica las fuerzas hidrodinámicas generadas durante la rotación. Esta fuerza hidrodinámica generada en cada cojinete se calcula en cada incremento de tiempo.

El programa de computación digital escrito en lenguaje fortran, permite graficar las órbitas descritas por el muñon durante la rotación del sistema; resolviendo las ecuaciones diferenciales ordinarias a través de diferencias centrales.

— El propósito de comparar los resultados obtenidos mediante la formulación descrita con los calculados por otros autores, los cuales no resuelven el

problema de manera simultánea es: primero validar el modelo y segundo establecer las diferencias entre los resultados.

La aparente discrepancia entre las soluciones del modelo desarrollado en este trabajo y las obtenidas por otros autores se debe a que ellos no resolvieron el sistema como un todo donde se incluyen tanto las características elastodinámicas e hidrodinámicas sino que aproximaron a través de ciertos factores la naturaleza hidrodinámica de los cojinetes.

La contribución básica de este estudio es el desarrollo de un sistema que representa en forma conjunta las características elastodinámicas y la naturaleza hidrodinámica de los cojinetes, el cual permite obtener la respuesta dinámica de sistemas rotatorios. Las ecuaciones de movimiento que rigen el comportamiento dinámico de un sistema como el aquí descrito; no habían sido desarrolladas anteriormente por otros autores.

Utilizando el análisis descrito se obtienen resultados que representan una buena aproximación con los datos en la realidad.

Finalmente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser utilizadas para el estudio de la estabilidad de las mismas. Además desarrollar modelos en los cuales se incluya el efecto producido por masas excéntricas o formular modelos que permitan simular en tiempo real la respuesta dinámica.

REFERENCIAS

- 1 Rankine, W. "On the Centrifugal Force of Rotating Shaft", London, Vol. 27, 1869, p 249.
- 2 Föppl, A. "Das Problem der La Valschen Turbinenwelle Civilingenieur" (1895), 41, 335-342.
- 3 Stodala, A. "Neuere Beobachtungen über die Kritischen Umlaufzahlen", Von Wellen Schweizerische Bauzeitung, 68 (1916), 147-210.
- 4 Holzer, H. "Die Berechnung der Drehschwingungen" Springer-Verlag OHG, Berlin, (1921), Reimpreso por J. W. Edwards. Publ. Inc., Ann Arbor Michigan.
- 5 Myklestad, N. "A New Method of Calculating Natural Modes" Journal of the Aeronaut Society (1944), 11, 152-153.
- 6 Prohl, M. "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors", Journal of Applied Mechanics, (1945), A142-A143.
- 7 Ruhl, R. "Dynamics of Distributed Parameter Rotor Systems Transfer Matrix and Finite Element Techniques" PhD Thesis, Cornell University, 1970, University Microfilms # 70-12, 646.
- 8 Lund, J. "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearing". Journal of Engineering for Industry, May (1974), 509-517.

- 9 Chen, M., et al. "Fan/Fundation Interation a Computarized Solution", International Conference, Rotordinamic Problem in Power Plants, September 28, October 1, 1982, Rome, Italy , 139-149.
- 10 Reynolds, O. "On the Theory of Lubrication and its Application to Mr Beauchamp Tower's Experiments Including an Experimental Determination of the of the Viscosity of Olive Oil", Phil Trans. Poy. Soc. (London), Series A., 177, (1886), 157-234.
- 11 Booker, J. "Dynamically Loaded Journal Bearing: Mobility Method of Solution", Trans. ASME, J. Basic Engng., Serie D, 87, (1965), 537-546.
- 12 Booker, J. "Bearing for Reciprocating Machinery", "Application of the Mobility Method", Lubrication and Wear: Fundamental and Application to Desing, (1968), Vol. 182 Pt 3A, 129-132.
- 13 Booker, J. "Dynamically Loaded Journal Bearings Maximun Film Pressure", Trans ASME, Journal of Lubrication Tech., (1969), 534-543.
- 14 Booker, J. "Dynamically-Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method", Trans ASME, J. Lub., Tech (1971), 169-176.
- 15 Berret, L. et al. "A Finite Length Bearing Correction Factor for Short Bearing Theory", Trans ASME, J. Tech., (1979), 1-5.

- 16 Shawki, G. et al. "Behavior of Finite Journal Bearings Under Dynamic Loading Conditions", Trans. ASME, J. Lub., Tech (1979), 1-6.
- 17 Marcus, M. y Minc, H. Elementos de Algebra Lineal , Edit. Limusa, México, 1978, 30-33.
- 18 Greenwood, D. Classical Dynamics , Edit. Prentice-hall, Inc, (1977), 51-102.
- 19 Goldstein, H. Mecánica Clásica , Edit. Aguilar, (1979), 243.
- 20 Przemieniecki, J. Theory of Matrix Structural Analysis , Edit. McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.
- 21 Bathe, K. and Wilson E. Numerical Methods in Finite Element Analysis , Prentice Hall, (1976).
- 22 Wilson, E. "Computer Analysis Language, Rappart # UC SESM 77-2 Department of Civil Engineering, Univ. of California, Berkeley, (1977).
- 23 Clough, R. and Penzien, J. Dynamics of Structures , McGraw-Hill, (1975).
- 24 Gouri, D. and Tazot Une Presentation de la Méthode des Eléments Finis , Maloine S.A. Editeur, Paris, (1984).
- 25 Badgley, R. and Booker, J. "Turborotor Instability: Effect of

Initial Transients on Plane Motion", Journal of Lubrication Technology, Oct., (1969), 625-633.

- 26 Kirk, R. et al. The Effect of Support Flexibility on the Stability of Rotors Mounted in Plain Cylindrical Journal Bearings" International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Symposium Lyngby/Denmark, August, (1974), 12-16.

APENDICE I

En este apéndice se desarrollan las ecuaciones para la energía cinética y potencial de la flecha.

La energía cinética del sistema está dada por la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \{ \psi \}_f^T [m] \{ \psi \}_f \quad (1)$$

Para el sistema absoluto es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [I_i^\xi (\dot{\theta}_i^\xi)^2 + I_i^\eta (\dot{\theta}_i^\eta)^2 + I_i^\zeta (\dot{\theta}_i^\zeta)^2] \quad (2)$$

Suponiendo que $I_i^\xi = I_i^\eta$; $I_i^\zeta = I_i^Z$, se tiene:

$$T_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i [(\dot{\theta}_i^\xi)^2 + (\dot{\theta}_i^\eta)^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i^\zeta (\dot{\theta}_i^\zeta)^2 \quad (3)$$

Recordando que la transformación de coordenadas del sistema absoluto al rotatorio es:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \cos(\omega t) X_i - \text{sen}(\omega t) Y_i \\ \eta_i &= \text{sen}(\omega t) X_i + \cos(\omega t) Y_i \\ \zeta_i &= Z_i \end{aligned} \quad (4)$$

Donde X_i, Y_i son funciones del tiempo.

Derivando las expresiones dadas en (4) y agrupando términos se llega a:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= (\dot{X}_i - w Y_i) \cos wt - (\dot{Y}_i + w X_i) \sin wt \\ \dot{\eta}_i &= (\dot{X}_i - w Y_i) \sin wt + (\dot{Y}_i + w X_i) \cos wt \\ \dot{\zeta}_i &= \dot{Z}_i\end{aligned}\quad (5)$$

De manera similar se pueden expresar las coordenadas generalizadas rotacionales:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i \xi &= (\dot{\theta}_i^x - w \theta_i^y) \cos wt - (\dot{\theta}_i^y + w \theta_i^x) \sin wt \\ \dot{\theta}_i \eta &= (\dot{\theta}_i^x - w \theta_i^y) \sin wt + (\dot{\theta}_i^y + w \theta_i^x) \cos wt \\ \dot{\theta}_i \zeta &= \dot{\theta}_i^z\end{aligned}\quad (6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (3), desarrollando y agrupando términos se tiene:

$$\begin{aligned}T_f &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{X}_i - w Y_i)^2 + (\dot{Y}_i + w X_i)^2 + \dot{Z}_i^2] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i [(\dot{\theta}_i^x - w \theta_i^y)^2 + (\dot{\theta}_i^y + w \theta_i^x)^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i^z (\dot{\theta}_i^z)^2\end{aligned}\quad (7)$$

O también

$$\begin{aligned}
T_f = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{X}_i^2 - 2w \dot{X}_i \dot{Y}_i + w^2 \dot{Y}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + 2w \dot{Y}_i \dot{X}_i + w^2 \dot{X}_i^2 + \dot{Z}_i^2) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i [(\dot{\theta}_i^x)^2 - 2w(\dot{\theta}_i^x)\dot{\theta}_i^y + w^2(\dot{\theta}_i^y)^2 + (\dot{\theta}_i^y)^2 + 2w\dot{\theta}_i^y\dot{\theta}_i^x + \\
& w^2(\dot{\theta}_i^x)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i^z (\dot{\theta}_i^z)^2
\end{aligned} \quad (8)$$

La ecuación (8) se puede escribir como:

$$T_f = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i A_i + \sum_{i=1}^n I_i H_i + \sum_{i=1}^n I_i^z (\dot{\theta}_i^z)^2 \right] \quad (9)$$

Donde:

$$A_i = \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 - 2w \dot{X}_i \dot{Y}_i + 2w \dot{Y}_i \dot{X}_i + w^2 \dot{X}_i^2 + \dot{Z}_i^2$$

$$H_i = (\dot{\theta}_i^x)^2 + (\dot{\theta}_i^y)^2 - 2w \dot{\theta}_i^x \dot{\theta}_i^y + 2w \dot{\theta}_i^y \dot{\theta}_i^x + w^2 (\dot{\theta}_i^x)^2 + w^2 (\dot{\theta}_i^y)^2$$

La energía cinética asociada a la masa de los cojinetes hidrodinámicos se desarrolla a partir de:

$$T = \frac{1}{2} \{\psi\}_c^T [m_i^b] \{\psi\}_c \quad (10)$$

En el sistema absoluto es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^b [(\dot{\xi}_i^b)^2 + (\dot{\eta}_i^b)^2] \quad (11)$$

Por otra parte se tiene (ver figura 5):

$$\begin{aligned}\xi_i^b &= \xi_i - e_i^\xi \\ \eta_i^b &= \eta_i - e_i^\eta\end{aligned}\quad (12)$$

Las excentricidades en el sistema absoluto pueden expresarse en función de las excentricidades en el sistema rotatorio de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}e_i^\xi &= \cos wt e_i^x - \operatorname{sen} wt e_i^y \\ e_i^\eta &= \operatorname{sen} wt e_i^x + \cos wt e_i^y\end{aligned}\quad (13)$$

Reemplazando las ecuaciones (4) y (13) en la ecuación (12), se obtiene:

$$\begin{aligned}\xi_i^b &= (X_i - e_i^x) \cos wt - (Y_i - e_i^y) \operatorname{sen} wt \\ \eta_i^b &= (X_i - e_i^x) \operatorname{sen} wt - (Y_i - e_i^y) \cos wt\end{aligned}\quad (14)$$

Derivando a estas últimas expresiones se llega a:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i^b &= [(\dot{X}_i - \dot{e}_i^x) - w(Y_i - e_i^y)] \cos wt - [(\dot{Y}_i - \dot{e}_i^y) + w(X_i - e_i^x)] \operatorname{sen} wt \\ \dot{\eta}_i^b &= [(\dot{X}_i - \dot{e}_i^x) - w(Y_i - e_i^y)] \operatorname{sen} wt + [(\dot{Y}_i - \dot{e}_i^y) + w(X_i - e_i^x)] \cos wt\end{aligned}\quad (15)$$

Sustituyendo las ecuaciones dadas en (15) en la ecuación (11), se tiene:

$$T_c = \sum_{i=1}^N m_i^b \{ [(\dot{X}_i - \dot{e}_i^x) - w(Y_i - e_i^y)]^2 + [(\dot{Y}_i - \dot{e}_i^y) + w(X_i - e_i^x)]^2 \} \quad (16)$$

O también:

$$T_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^b B_i \quad (17)$$

Donde:

$$\begin{aligned} B_i = & \dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + (\dot{e}_i^x)^2 + (\dot{e}_i^y)^2 - 2 \dot{X}_i \dot{e}_i^x - 2 \dot{Y}_i \dot{e}_i^y - 2w \dot{X}_i Y_i + \\ & 2w \dot{X}_i e_i^y + 2w \dot{Y}_i X_i - 2w \dot{Y}_i e_i^x + 2w \dot{e}_i^x Y_i - 2w \dot{e}_i^y X_i - \\ & 2w \dot{e}_i^x e_i^y + 2w \dot{e}_i^y e_i^x + w^2 X_i^2 + w^2 Y_i^2 + w^2 (e_i^x)^2 + \\ & w^2 (e_i^y)^2 - 2w^2 X_i e_i^x - 2w^2 Y_i e_i^y \end{aligned}$$

APENDICE II

En este apéndice se desarrollan las ecuaciones de movimiento del sistema representado por el modelo de la figura 2.

En la formulación de las ecuaciones de movimiento, se parte de la descripción Lagrangiana que resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

La función escalar L tiene la forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^b B_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i H_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i (\dot{\theta}_i^z)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n q_k K_{kj} q_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N K_i D_i \quad (2)$$

Donde: A_i , B_i , D_i y H_i están dadas en la ecuación (3.19).

La función de disipación es:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_i B_i \quad (3)$$

Donde: B_i tiene la forma de la expresión (3.19).

Derivando las ecuaciones (2) y (3), con respecto a la variable X_i , se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial A_i}{\partial X_i} + \sum_{i=1}^N m_i^b \frac{\partial B_i}{\partial X_i} + \sum_{i=1}^n l_i \frac{\partial H_i}{\partial X_i} + \sum_{i=1}^n l_i^z \frac{\partial}{\partial X_i} (\dot{\theta}_i^z)^2 - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n q_k K_{kj} q_j - \sum_{i=1}^N K_i \frac{\partial D_i}{\partial X_i} \right] \quad (4)$$

Derivando las expresiones de A_i , B_i , D_i y H_i , con respecto a X_i ,

$$\frac{\partial A_i}{\partial X_i} = 2 \dot{X}_i - 2w X_i$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial X_i} = 2 \dot{X}_i - 2 \dot{e}_i^x - 2w Y_i + 2w e_i^y \quad (5)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial X_i} = \frac{\partial H_i}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n q_k K_{kj} q_j = 0$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (4), resulta:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n m_j (2 \dot{X}_j - 2w Y_j) + \sum_{i=1}^N m_i^b (2 \dot{X}_i - 2 \dot{e}_i^x - 2w Y_i + 2w e_i^y) \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i (2 \dot{X}_i - 2 \dot{e}_i^x - 2w Y_i + 2w e_i^y)$$

Derivando (6a), con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} \right) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i (2 \ddot{X}_i - 2w \dot{Y}_i) + \sum_{i=1}^N m_i^b (2 \ddot{X}_i - 2 \ddot{e}_i^x - 2w \dot{Y}_i + 2w \dot{e}_i^y) \right] \quad (7)$$

Derivando nuevamente la función escalar L con respecto a X_i ,

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (2w \dot{Y}_i + 2w^2 X_i) + \sum_{i=1}^N m_i^b (2w \dot{Y}_i - 2w \dot{e}_i^y + 2w^2 X_i - 2w^2 e_i^x) - \sum_{i=1}^N K_i (2 X_i - 2 e_i^x) - \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-5} \right] \quad (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6b), (7) y (8) en la ecuación (1) se llega a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n m_i (X_i - w Y_i) + \sum_{i=1}^N m_i^b (X_i - e_i^x - w Y_i + w e_i^y) - \sum_{i=1}^n m_i (w Y_i + w^2 X_i) - \\ & \sum_{i=1}^N m_i^b (w Y_i - w e_i^y + w^2 X_i - w^2 e_i^x) + \sum_{i=1}^N K_i (X_i - e_i^x) + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-5} + \\ & \sum_{i=1}^N C_i (X_i - e_i^x - w Y_i + w e_i^y) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Cabe señalar que en Σ se incluyen puntos donde existen cojinetes y puntos en los cuales están las masas cencradas, por lo tanto la sumatoria se puede reordenar de tal manera que en una primera sumato-

ria aparezcan todos los puntos donde hay cojinetes y los demás puntos (puntos de masas concentradas) en una segunda sumatoria, por tanto:

$$\begin{aligned}
 & m_i (\ddot{X}_i - w \dot{Y}_i) + m_i^b (X_i - e_i^x - w Y_i + w e_i^y) - m_i (w Y_i + w^2 X_i) - \\
 & m_i^b (w \dot{Y}_i - w \ddot{e}_i^y + w^2 X_i - w^2 Y_i - w^2 e_i^x) - K_i (X_i - e_i^x) - \\
 & \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-5} + C_i (\dot{X}_i - \dot{e}_i^x - w Y_i + w e_i^y) = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Agrupando términos en la ecuación (10), se llega a:

$$\begin{aligned}
 & m_i (\ddot{X}_i - 2w \dot{Y}_i - w^2 X_i) + m_i^b (\ddot{X}_i - \ddot{e}_i^x - 2w \dot{Y}_i + 2w \dot{e}_i^y - w^2 X_i + w^2 e_i^x) + \\
 & K_i (X_i - e_i^x) + C_i (\dot{X}_i - \dot{e}_i^x - w Y_i + w e_i^y) + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-5} = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Análogamente se deducen las siguientes ecuaciones para las coordenadas generalizadas restantes

$$\begin{aligned}
 & (m_i + m_i^b) \ddot{X}_i + C_i \dot{X}_i - 2w(m_i + m_i^b) \dot{Y}_i - w^2(m_i + m_i^b - K_i) X_i - C_i Y_i + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-5} - m_i^b \ddot{e}_i^x + C_i \dot{e}_i^x + 2w m_i^b \dot{e}_i^y + \\
 & \quad (K_i - m_i^b w^2 + C_i) e_i^x \\
 & (m_i + m_i^b) \ddot{Y}_i + 2w(m_i + m_i^b) \dot{X}_i + C_i \dot{Y}_i + C_i w X_i - w^2(m_i + m_i^b - K_i) Y_i + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-4} - m_i^b \ddot{e}_i^y + 2w m_i^b \dot{e}_i^x + C_i \dot{e}_i^y + \\
 & \quad (K_i - m_i^b w^2 + C_i) e_i^y \\
 & m_i \ddot{Z}_i + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-3} = 0 \\
 & I_i \ddot{\theta}_i^x - 2w I_i \dot{\theta}_i^y - w^2 I_i \theta_i^x + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-2} = 0 \\
 & I_i \ddot{\theta}_i^y + 2w I_i \dot{\theta}_i^x - w^2 I_i \theta_i^y + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i-1} = 0 \\
 & I_i \ddot{\theta}_i^z + \sum_{j=1}^n K_{ji} \alpha_{6i} = 0 \\
 & m_i^b (\ddot{X}_i - \ddot{e}_i^x - 2w \dot{Y}_i + 2w \dot{e}_i^y - w^2 X_i + w^2 e_i^x) + K_i (X_i - e_i^x) - C_i (\dot{X}_i - \dot{e}_i^x - w Y_i + w e_i^y) = 0 \\
 & m_i^b (\ddot{Y}_i - \ddot{e}_i^y + 2w \dot{X}_i - 2w \dot{e}_i^x - w^2 Y_i + w^2 Y_i + w^2 e_i^y) + K_i (X_i - e_i^y) - C_i (\dot{Y}_i - \dot{e}_i^y - w X_i - w e_i^y) = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

APENCICE III

Aquí se presenta un listado del programa de computación digital utilizado en la solución de las ecuaciones de movimiento del sistema.

11700
11800
11900
12000
12100
12200
12300
12400
12500
12600
12700
12800
12900
13000
13100
13200
13300
13400
13500
13600
13700
13800
13900
14000
14100
14200
14300
14400
14500
14600
14700
14800
14900
15000
15100
15200
15300
15400
15500
15600
15700
15800
15900
16000
16100
16200
16300
16400

```
13 CONTINUE  
  
FORMULACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL  
CALC RIGEDZ(GM,HE,1,NU,FL,PF,US,SK,SIX,S1Y,S1Z)  
  
FORMULACION DE LA MATRIZ [K]  
K=0  
LL=0  
DO 15 I=1,NI  
CALL MK(GM,GM,DE,SIX,NI,NI,SK)  
DO 16 I=1,6  
K=K+1  
DO 16 J=1,6  
LL=LL+1  
16 AK(LL)=SK(I,J)  
15 CONTINUE  
  
SUMA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL Y DE LA  
MATRIZ [K] PARA FORMAR LA MATRIZ [RK]  
DO 17 I=1,NI  
DO 17 J=1,NI  
17 RK(I,J)=GM(I,J)+AK(I,J)  
  
CALCULO DEL VECTOR X N-1  
DO 7 I=1,NI  
7 XDP(I)=0  
DO 8 I=1,NI  
XDP(I)=H*1*XN(I)  
K=I+1  
XDP(I)=H*1+XDP(K)  
J=I+14  
8 XDP(J)=H*1+XDP(I)  
N3=0.5*NI  
DO 10 I=1,N3  
10 X(I)=3*XDP(I)+XN(I)  
10 X(I)=XDP(I)+10  
T2=7.10*NI
```

16400
16500
16600
16700
16800
16900
17000
17100
17200
17300
17400
17500
17600
17700
17800
17900
18000
18100
18200
18300
18400
18500
18600
18700
18800
18900
19000
19100
19200
19300
19400
19500
19600
19700

T1=1./T1NC
A0=1./T2
A1=0.5*A0
A2=2.*A0
A3=0.5*A2

FORMULACION DE LA MATRIZ H SOMBRERO

DO 10 I=1,NI
DO 10 J=1,NJ
10 HNS(I,J)=A0*GIB(I,J)+A1*SC(I,J)

COMIENZO DE LA ITERACION

DO 20 LI=1,40
DO 30 LJ=1,10
DO 40 LL=1,10

CALCULO DE LAS EXCENTRICIDADES Y DE LAS VELOCIDADES
INSTANTANEAS EN LOS CENTROS DE LOS RUJONES PARA
FORMAR EL VECTOR *VI

CALL CFUEZ(CI,FI,IS,U(1),U(2),FLON(1),VIS(1),DIAM(1),CLA(1),
1 F1,FX1,FY1,VX1,VY1)

CALL CFUEZ(CI,FI,IS,U(3),U(4),FLON(2),VIS(2),DIAM(2),CLA(2),
1 F2,FX2,FY2,VX2,VY2)

CALL NOVEL(CI,FI,IS,DIAM(1),VIS(1),CLA(1),RPM,U(1),U(2),F1,
1 VX0L1,VY0L1,FX1,FY1,DTETA1,VX1,VY1)

CALL NOVEL(CI,FI,IS,DIAM(2),VIS(2),CLA(2),RPM,U(3),U(4),F2,
1 VX0L2,VY0L2,FX2,FY2,DTETA2,VX2,VY2)


```

24200 C
24300 DO 70 I=1,100
24400 Z(I)=XN(C)
24500 70 XN(I)=XN(I)
24600 C
24700 CALL ESCRTO(XN1, HTR, F1, F2)
24800 C
24900 40 CONTINUE
25000 STR=HTR+10
25100 DO 90 I=1,6
25200 90 XNR(I)=XN(I)
25300 XNR(1)=U(1)
25400 XNR(2)=U(2)
25500 DO 91 I=7,13
25600 91 XNR(I)=XN(I)
25700 XNR(14)=U(3)
25800 XNR(15)=U(4)
25900 C
26000 LECTURA DE RESULTADOS
26100 CALL LECTD(XNR, HTR, F1, F2)
26200 C
26300 H=HTR/10
26400 WRIT(4,7)H, F1
26500 VARI(8,7)XNR(1), XNR(10)
26600 U(1)=XNR(1), XNR(22)
26700 U(2)=XNR(13), XNR(14)
26800 STR=HTR+10
26900 COSC=0.00000000
27000 SEN=0.00000000
27100 EX=XNR(1)*COSC-XNR(2)*SEN
27200 ET=XNR(1)*SEN+XNR(2)*COSC
27300 U(3)=XNR(7)-XNR(8)
27400 U(4)=XNR(7)*SEN-XNR(8)*COSC
27500 U(5)=XNR(7)*COSC+XNR(8)*SEN
27600 BX=XNR(7)-XNR(8)
27700 BY=XNR(7)*SEN+XNR(8)*COSC
27800 U(11,7)BX, BY
27900 C
28000 CONTINUE
28100 GO TO 40
28200 END
28300

```


0000
0100
0200
0300
0400
0500
0600
0700
0800
0900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
2100
2200
2300
2400
2500
2600
2700
2800
2900
3000
3100
3200
3300
3400
3500
3600
3700
3800
3900
4000
4100
4200
4300
4400
4500
4600
4700
4800
4900
5000
5100
5200
5300
5400
5500
5600
5700
5800
5900
6000
6100
6200
6300
6400
6500
6600
6700
6800
6900
7000
7100
7200
7300
7400
7500
7600
7700
7800
7900
8000
8100
8200
8300
8400
8500
8600
8700
8800
8900
9000
9100
9200
9300
9400
9500
9600
9700
9800
9900

SUBMITING OFFICE
EDUCATION OF OPERATOR (U,TK,XX,YY,FLONG,VASCO,DIAN,CLARO,
1 FLOOR, EX. CY, TETA)
PROJECT NAME (307-01, 0-2)
DATA SUBMITTED TO CALCULATE LA FUERZA EN EL COJINETE USANDO
LAS LEYES DE LOS DE DUCADOS POR BARRETT
LOCAL BARRETT WA FINITE LENGTH BEARING CORRECTION
EQUATION FOR SHORT BEARING THEORY, TRANSACTIONS
OF THE ASME NOVEMBER 1974

W=51416
L=5000
D=1000
C=1000
S=1000
E=1000
F=1000
G=1000
H=1000
I=1000
J=1000
K=1000
L=1000
M=1000
N=1000
O=1000
P=1000
Q=1000
R=1000
S=1000
T=1000
U=1000
V=1000
W=1000
X=1000
Y=1000
Z=1000
AA=1000
AB=1000
AC=1000
AD=1000
AE=1000
AF=1000
AG=1000
AH=1000
AI=1000
AJ=1000
AK=1000
AL=1000
AM=1000
AN=1000
AO=1000
AP=1000
AQ=1000
AR=1000
AS=1000
AT=1000
AU=1000
AV=1000
AW=1000
AX=1000
AY=1000
AZ=1000
BA=1000
BB=1000
BC=1000
BD=1000
BE=1000
BF=1000
BG=1000
BH=1000
BI=1000
BJ=1000
BK=1000
BL=1000
BM=1000
BN=1000
BO=1000
BP=1000
BQ=1000
BR=1000
BS=1000
BT=1000
BU=1000
BV=1000
BW=1000
BX=1000
BY=1000
BZ=1000
CA=1000
CB=1000
CC=1000
CD=1000
CE=1000
CF=1000
CG=1000
CH=1000
CI=1000
CJ=1000
CK=1000
CL=1000
CM=1000
CN=1000
CO=1000
CP=1000
CQ=1000
CR=1000
CS=1000
CT=1000
CU=1000
CV=1000
CW=1000
CX=1000
CY=1000
CZ=1000
DA=1000
DB=1000
DC=1000
DD=1000
DE=1000
DF=1000
DG=1000
DH=1000
DI=1000
DJ=1000
DK=1000
DL=1000
DM=1000
DN=1000
DO=1000
DP=1000
DQ=1000
DR=1000
DS=1000
DT=1000
DU=1000
DV=1000
DW=1000
DX=1000
DY=1000
DZ=1000
EA=1000
EB=1000
EC=1000
ED=1000
EE=1000
EF=1000
EG=1000
EH=1000
EI=1000
EJ=1000
EK=1000
EL=1000
EM=1000
EN=1000
EO=1000
EP=1000
EQ=1000
ER=1000
ES=1000
ET=1000
EU=1000
EV=1000
EW=1000
EX=1000
EY=1000
EZ=1000
FA=1000
FB=1000
FC=1000
FD=1000
FE=1000
FF=1000
FG=1000
FH=1000
FI=1000
FJ=1000
FK=1000
FL=1000
FM=1000
FN=1000
FO=1000
FP=1000
FQ=1000
FR=1000
FS=1000
FT=1000
FU=1000
FV=1000
FW=1000
FX=1000
FY=1000
FZ=1000
GA=1000
GB=1000
GC=1000
GD=1000
GE=1000
GF=1000
GG=1000
GH=1000
GI=1000
GJ=1000
GK=1000
GL=1000
GM=1000
GN=1000
GO=1000
GP=1000
GQ=1000
GR=1000
GS=1000
GT=1000
GU=1000
GV=1000
GW=1000
GX=1000
GY=1000
GZ=1000
HA=1000
HB=1000
HC=1000
HD=1000
HE=1000
HF=1000
HG=1000
HH=1000
HI=1000
HJ=1000
HK=1000
HL=1000
HM=1000
HN=1000
HO=1000
HP=1000
HQ=1000
HR=1000
HS=1000
HT=1000
HU=1000
HV=1000
HW=1000
HX=1000
HY=1000
HZ=1000
IA=1000
IB=1000
IC=1000
ID=1000
IE=1000
IF=1000
IG=1000
IH=1000
II=1000
IJ=1000
IK=1000
IL=1000
IM=1000
IN=1000
IO=1000
IP=1000
IQ=1000
IR=1000
IS=1000
IT=1000
IU=1000
IV=1000
IW=1000
IX=1000
IY=1000
IZ=1000
JA=1000
JB=1000
JC=1000
JD=1000
JE=1000
JF=1000
JG=1000
JH=1000
JI=1000
JJ=1000
JK=1000
JL=1000
JM=1000
JN=1000
JO=1000
JP=1000
JQ=1000
JR=1000
JS=1000
JT=1000
JU=1000
JV=1000
JW=1000
JX=1000
JY=1000
JZ=1000
KA=1000
KB=1000
KC=1000
KD=1000
KE=1000
KF=1000
KG=1000
KH=1000
KI=1000
KJ=1000
KK=1000
KL=1000
KM=1000
KN=1000
KO=1000
KP=1000
KQ=1000
KR=1000
KS=1000
KT=1000
KU=1000
KV=1000
KW=1000
KX=1000
KY=1000
KZ=1000
LA=1000
LB=1000
LC=1000
LD=1000
LE=1000
LF=1000
LG=1000
LH=1000
LI=1000
LJ=1000
LK=1000
LL=1000
LM=1000
LN=1000
LO=1000
LP=1000
LQ=1000
LR=1000
LS=1000
LT=1000
LU=1000
LV=1000
LW=1000
LX=1000
LY=1000
LZ=1000
MA=1000
MB=1000
MC=1000
MD=1000
ME=1000
MF=1000
MG=1000
MH=1000
MI=1000
MJ=1000
MK=1000
ML=1000
MM=1000
MN=1000
MO=1000
MP=1000
MQ=1000
MR=1000
MS=1000
MT=1000
MU=1000
MV=1000
MW=1000
MX=1000
MY=1000
MZ=1000
NA=1000
NB=1000
NC=1000
ND=1000
NE=1000
NF=1000
NG=1000
NH=1000
NI=1000
NJ=1000
NK=1000
NL=1000
NM=1000
NN=1000
NO=1000
NP=1000
NQ=1000
NR=1000
NS=1000
NT=1000
NU=1000
NV=1000
NW=1000
NX=1000
NY=1000
NZ=1000
OA=1000
OB=1000
OC=1000
OD=1000
OE=1000
OF=1000
OG=1000
OH=1000
OI=1000
OJ=1000
OK=1000
OL=1000
OM=1000
ON=1000
OO=1000
OP=1000
OQ=1000
OR=1000
OS=1000
OT=1000
OU=1000
OV=1000
OW=1000
OX=1000
OY=1000
OZ=1000
PA=1000
PB=1000
PC=1000
PD=1000
PE=1000
PF=1000
PG=1000
PH=1000
PI=1000
PJ=1000
PK=1000
PL=1000
PM=1000
PN=1000
PO=1000
PP=1000
PQ=1000
PR=1000
PS=1000
PT=1000
PU=1000
PV=1000
PW=1000
PX=1000
PY=1000
PZ=1000
QA=1000
QB=1000
QC=1000
QD=1000
QE=1000
QF=1000
QG=1000
QH=1000
QI=1000
QJ=1000
QK=1000
QL=1000
QM=1000
QN=1000
QO=1000
QP=1000
QQ=1000
QR=1000
QS=1000
QT=1000
QU=1000
QV=1000
QW=1000
QX=1000
QY=1000
QZ=1000
RA=1000
RB=1000
RC=1000
RD=1000
RE=1000
RF=1000
RG=1000
RH=1000
RI=1000
RJ=1000
RK=1000
RL=1000
RM=1000
RN=1000
RO=1000
RP=1000
RQ=1000
RR=1000
RS=1000
RT=1000
RU=1000
RV=1000
RW=1000
RX=1000
RY=1000
RZ=1000
SA=1000
SB=1000
SC=1000
SD=1000
SE=1000
SF=1000
SG=1000
SH=1000
SI=1000
SJ=1000
SK=1000
SL=1000
SM=1000
SN=1000
SO=1000
SP=1000
SQ=1000
SR=1000
SS=1000
ST=1000
SU=1000
SV=1000
SW=1000
SX=1000
SY=1000
SZ=1000
TA=1000
TB=1000
TC=1000
TD=1000
TE=1000
TF=1000
TG=1000
TH=1000
TI=1000
TJ=1000
TK=1000
TL=1000
TM=1000
TN=1000
TO=1000
TP=1000
TQ=1000
TR=1000
TS=1000
TT=1000
TU=1000
TV=1000
TW=1000
TX=1000
TY=1000
TZ=1000
UA=1000
UB=1000
UC=1000
UD=1000
UE=1000
UF=1000
UG=1000
UH=1000
UI=1000
UJ=1000
UK=1000
UL=1000
UM=1000
UN=1000
UO=1000
UP=1000
UQ=1000
UR=1000
US=1000
UT=1000
UU=1000
UV=1000
UW=1000
UX=1000
UY=1000
UZ=1000
VA=1000
VB=1000
VC=1000
VD=1000
VE=1000
VF=1000
VG=1000
VH=1000
VI=1000
VJ=1000
VK=1000
VL=1000
VM=1000
VN=1000
VO=1000
VP=1000
VQ=1000
VR=1000
VS=1000
VT=1000
VU=1000
VV=1000
VW=1000
VX=1000
VY=1000
VZ=1000
WA=1000
WB=1000
WC=1000
WD=1000
WE=1000
WF=1000
WG=1000
WH=1000
WI=1000
WJ=1000
WK=1000
WL=1000
WM=1000
WN=1000
WO=1000
WP=1000
WQ=1000
WR=1000
WS=1000
WT=1000
WU=1000
WV=1000
WW=1000
WX=1000
WY=1000
WZ=1000
XA=1000
XB=1000
XC=1000
XD=1000
XE=1000
XF=1000
XG=1000
XH=1000
XI=1000
XJ=1000
XK=1000
XL=1000
XM=1000
XN=1000
XO=1000
XP=1000
XQ=1000
XR=1000
XS=1000
XT=1000
XU=1000
XV=1000
XW=1000
XX=1000
XY=1000
XZ=1000
YA=1000
YB=1000
YC=1000
YD=1000
YE=1000
YF=1000
YG=1000
YH=1000
YI=1000
YJ=1000
YK=1000
YL=1000
YM=1000
YN=1000
YO=1000
YP=1000
YQ=1000
YR=1000
YS=1000
YT=1000
YU=1000
YV=1000
YW=1000
YX=1000
YY=1000
YZ=1000
ZA=1000
ZB=1000
ZC=1000
ZD=1000
ZE=1000
ZF=1000
ZG=1000
ZH=1000
ZI=1000
ZJ=1000
ZK=1000
ZL=1000
ZM=1000
ZN=1000
ZO=1000
ZP=1000
ZQ=1000
ZR=1000
ZS=1000
ZT=1000
ZU=1000
ZV=1000
ZW=1000
ZX=1000
ZY=1000
ZZ=1000