0224

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una Formulación Lagrangiana de la Hidrodinámica Clásica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS
(FISICA)

P R E S E N T A

Angel Fierros Palacios

MEXICO, D. F., 1973

UNA FORMULACION LAGRANGIANA
DE LA HIDRODINAMICA CLASICA

A MI ESPOSA ROSA MARIA

A MIS HIJOS: ROSA MARIA, ANGEL ARSENIO Y ....

A LA MEMORIA DE MI PADRE:

SR. ANGEL FIERROS Y FIERROS

A MI MADRE:

SRA. CATALINA P. VDA. DE FIERROS

A MIS HERMANOS Y HERMANAS.

A:

FERMIN VINIEGRA HEBERLEIN.

Las frases siempre resultan un poco vacías cuando deseamos agradecer los beneficios recibidos del maestro y amigo. No obstante, en este párrafo, deseo manifestar mi sincero reconocimiento al Profesor Dr. Fermín Viniegra Heberlein, quien con sus profundos conocimientos y a lo largo de muchos días de estudio y discusión supo guiar mis pasos por el difícil sendero de la investigación científica hasta la feliz culminación del presente trabajo.

Angel Fierros Palacios

1973

CONTENIDO

INTRODUCCION

En el estudio de la mecánica de fluidos, normalmente se emplean dos representaciones: la lagrangiana y la euleriana[2]. La descripción lagrangiana está más relacionada con la mecánica clásica de partículas ya que trata el problema de los fluidos de manera análoga al de las partículas newtonianas. En ella se aisla una partícula de fluido y se sigue su movimiento en el tiempo. Las partículas de fluido son elementos de volumen muy pequeños comparados con el sistema bajo consideración, pero suficientemente grandes para contener muchas partículas individuales (átomos, moléculas, etc.).

En la descripción euleriana, el estado de un fluido móvil se especifica totalmente con cinco entidades: la velocidad del fluido $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ y dos cantidades termodinámicas como la presión $p(\mathbf{x},t)$ y la densidad $\rho(\mathbf{x},t)$. Es una teoría de campo típica, donde las variables dinámicas se dan como funciones de las coordenadas $\mathbf{x}$ y del tiempo t. Las funciones $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ se refieren a puntos fijos del espacio y no a partículas fijas del fluido. La aceleración de una partícula de fluido, en la descripción lagrangiana, está dada por la derivada total del campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ con respecto al tiempo. En la descripción euleriana, la operación d/dt aplicada a cualquier entidad escalar o vectorial, está dada por:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}.$$

A este operador se le conoce como la derivada hidrodinámica[2]. En particular, la aceleración de una partícula de fluido está dada por:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad.})\, \mathbf{v}\,;$$

$\partial \mathbf{v}/\partial t$ se refiere al cambio en la velocidad del campo de velocidades en un punto fijo del espacio. El término $(\mathbf{v} \cdot \text{grad.})\, \mathbf{v}$ es la diferencia entre las velocidades, medidas al mismo tiempo, en dos puntos separados una distancia $d\mathbf{x}$.

Las leyes de la hidrodinámica se pueden formular en términos de principios variacionales del tipo lagrangiano y euleriano. Si se consideran como ecuaciones de constricción las leyes de conservación de la masa y de la entropía, el principio variacional lagrangiano conduce a las ecuaciones de movimiento de un fluido ideal[2]. En el caso del principio variacional euleriano, se requiere una ecuación de constricción más que está relacionada, tanto con la conservación de la identidad de las partículas de fluido, como la conservación de la vorticidad[2]. En los fluidos reales que presentan disipación de energía (al través de la conducción térmica y la viscosidad) el principio variacional toma una forma que depende del mecanismo particular de disipación[2]. Por tanto, para establecer el principio variacional adecuado se requiere el conocimiento de las ecuaciones de movimiento. Aparentemente, los principios variacionales son meras reformulaciones de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, los principios variacionales dan origen a métodos que permiten el manejo de constricciones, las cuales difícilmente se podrían incorporar en las ecuaciones de movimiento originales[2]. En el caso de un fluido ideal se puede escribir un principio variacional sin conocer de antemano las ecuaciones de movimiento[2].

El objeto del presente trabajo es el de atacar el problema de un medio continuo con la ayuda de un formalismo de Lagrange típico de la mecánica clásica, y un principio variacional. Sin embargo, el camino seguido presenta algunas dificultades: se sabe que la lagrangiana clásica de un sistema de partículas es una función que depende de dos conjuntos de variables linealmente independientes, que son las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas. Por supuesto, también depende del tiempo. Para el caso de un fluido, considerado como un sistema dinámico, se tiene que las velocidades son funciones de la posición y del tiempo, de modo que como hipótesis de trabajo, se propone que éstas deberán entenderse desde dos puntos de vista simultáneamente[1]:

a) Como entidades puramente cinemáticas. Esto es, como derivadas totales de la posición con respecto al tiempo (imagen lagrangiana).

b) Como entidades dinámicas. Es decir como campos físicos responsables de la interacción (imagen euleriana).

Esto complica el uso del formalismo de Lagrange y del principio variacional y posiblemente sea una de las razones por las cuales no se haya intentado antes este método.

Clásicamente, cuando se desea obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema mecánico, se usa una función lagrangiana L que depende de las entidades cinemáticas q, $\dot{q}$ y t. Tanto las coordenadas generalizadas q, como las velocidades generalizadas $\dot{q}$, se toman como funciones de algún conjunto de parámetros continuos independientes del tiempo. A continuación se define la acción W como

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt\ .$$

El principio de Hamilton exige que la acción W sea una extremal con respecto al mencionado conjunto de parámetros. Esto conduce a las ecuaciones diferenciales de movimiento buscadas[3].

Si, por otra parte, se desea obtener las llamadas ecuaciones diferenciales de campo de algún sistema continuo, se propone el uso de una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$, que dependa de las funciones de campo $\psi_A(x,t)$, de los gradientes de las funciones de campo $\nabla\psi_A(x,t)$, de la posición x y del tiempo t,[4] tal que la lagrangiana clásica sea:

$$L = \int_V \mathcal{L}\, dV$$

donde V es el volumen que ocupa el medio continuo bajo consideración. Nuevamente la acción se define como

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \ ,$$

pero en este caso, son las funciones de campo y sus gradientes, las que se parametrizan con respecto a un conjunto de parámetros continuos que sean independientes de la posición y del tiempo. Entonces, de acuerdo con el principio de Hamilton, la acción deberá ser una extremal con respecto a dichos parámetros[7]. Esto permite la obtención de las ecuaciones diferenciales de campo, conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange[4].

En el caso de la mecánica de fluidos y dado que las velocidades se supondrán simultáneamente como entidades cinemáticas y como los campos físicos responsables del movimiento del sistema, tendremos que desarrollar un formalismo de Lagrange híbrido, que nos permita obtener las ecuaciones diferenciales de movimiento del fluido, donde las velocidades sean campos físicos, utilizando ideas de campo. Estas circunstancias son las que nos fuerzan a usar una densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ como la de la teoría clásica de campos, teniendo que parametrizar tanto las entidades cinemáticas como las funciones de campo, que en este caso son las mismas. Así, de acuerdo con el principio de Hamilton, si exigimos que la acción definida como:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L}\, dV$$

sea una extremal con respecto a los parámetros, podremos obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para un fluido cualquiera.

I. GENERALIDADES

En mecánica de fluidos se estudian las propiedades de gases y líquidos considerándolos como medios continuos. Diremos que el sistema de interés es un medio continuo, cuando el número de partículas que lo forman es tan grande que, en un elemento de volumen cualquiera, no es posible ni deseable distinguir partículas individuales. El movimiento de un fluido se describe por medio de funciones que dan la distribución de la velocidad del mismo, $v(x, t)$, así como también de dos entidades termodinámicas cualesquiera, pertenecientes a él, como por ejemplo la presión $p(x,t)$ y la densidad $\rho(x,t)$. Todas estas variables son, en general, funciones de las coordenadas y del tiempo; esto es, se refieren a puntos fijos en el espacio y a instantes dados. Esto implica que la descripción a que se refiere este párrafo sólo es válida para equilibrio local[5].

I.1.- CINEMATICA.

Tanto las funciones $v(x,t)$ como $p(x,t)$ y $\rho(x,t)$, etc., se refieren a puntos fijos en el espacio y no a elementos de volumen fijos del fluido. En el caso de la velocidad, las funciones $v(x,t)$ se considerarán como las entidades dinámicas o los campos físicos responsables del movimiento del fluido y no entidades puramente cinemáticas. Por tanto, vamos a requerir del concepto de campo de velocidades, al cual definiremos de la manera siguiente:

Sea $\{x\}$ un conjunto de n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial R de dimensión n, que definen un marco de referencia inercial. Desde él, y de acuerdo con condiciones iniciales dadas, se puede describir el movimiento de un sistema formado por N partículas puntuales, con masas $m_i (i = 1, 2, .., N)$, asociándoles N trayectorias tales que, en cada punto de ellas, las respectivas partículas se muevan con velocidades definidas como las derivadas de la posición con respecto al tiempo.

Si variamos las condiciones iniciales de modo que las N partículas del sistema mecánico describan, en cada instante, todas las posibles trayectorias de modo que se cubra el espacio totalmente con ellas, e imponemos la condición adicional de que éstas no se crucen, entonces, a cada punto del espacio le podemos asociar un vector velocidad y sólo uno. Si los vectores velocidad así definidos, no dependen explícitamente del tiempo, diremos que el campo es estacionario y de la forma $v = v(x)$. Con este antecedente se puede pensar ahora en un medio continuo, de tal modo que a un elemento de volumen de fluido que pase por un punto cualquiera del espacio se le asociará una velocidad igual, en magnitud, dirección y sentido, al vector velocidad en dicho punto. Si el campo de velocidades no sólo es función de la posición sino también del tiempo, cada vector de campo dependerá del tiempo.

de acuerdo con alguna relación definida. En general, el campo de velocidades tendrá la forma $v = v(x, t)$ de manera que un elemento de volumen de fluido que pase por un punto cualquiera del espacio llevará instantáneamente una velocidad igual, en magnitud, dirección y sentido, al vector velocidad asociado a dicho punto en ese instante.

I.2.- DEFORMACION.

Consideremos una región del espacio ocupada por un medio continuo en movimiento, de modo que al cambiar de posición ocupa una nueva región del espacio. Sea R_0 el espacio ocupado inicialmente y R el espacio ocupado subsecuentemente. Sea P_0 un punto en R_0 localizado por un vector de posición $r_0 = i\xi^a + j\xi^b + k\xi^c$ y supongamos que este punto se ha movido al punto P en R localizado por un vector de posición $r = ix^1 + jx^2 + kx^3$. La transformación de todos los puntos $\{\xi\}$ de R_0 en los puntos $\{x\}$ de R es lo que llamaremos una deformación del medio; esto es:

$$x = x(\xi) \tag{1.1}$$

Las coordenadas espaciales inicialmente asociadas al medio continuo, $\{\xi\}$, pueden considerarse como las "etiquetas" que identifican cada punto material. Nótese que es el fluido el que se deforma y no el espacio que ocupa.

Supongamos que (1.1) es una transformación continua, uniforme, que pueda ser invertida de modo que exista la transformación inversa:

$$\xi = \xi(x) \tag{1.2}$$

Como hemos supuesto un modelo continuo y considerado una transformación continua, las ecuaciones (1.1) y (1.2) definen, matemáticamente hablando, el medio continuo[6]. Sea R_0 la región no deformada y R la región deformada; y sean $\{\xi\}$ las coordenadas lagrangianas y $\{x\}$ las coordenadas eulerianas.

I.3.- TRANSFORMACION DE UN ELEMENTO DE VOLUMEN.

Consideremos el cambio de un elemento de volumen bajo la transformación (1.1). Físicamente estamos considerando la correspondencia entre un elemento de volumen de nuestro fluido de su estado inicial no deformado a algún estado posterior cuando ha sufrido una deformación.

Observemos un elemento de volumen alrededor del punto $\{\xi\}$ en R_0. Por simplicidad, vamos a suponer que se trata de un paralelepípedo rectangular con lados $d\xi^a$, $d\xi^b$, $d\xi^c$. Entonces, el elemento de volumen en R_0 se puede escribir como:

$$dV_0 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \tag{1.3}$$

Bajo la transformación (1.1) y usando la notación tensorial

$$\begin{aligned} dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \xi^a} d\xi^a \\ dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial \xi^b} d\xi^b \\ dx^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial \xi^c} d\xi^c \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde dx^1, dx^2, dx^3 son los lados del nuevo elemento de volumen, que ahora ya no es un paralelepípedo rectangular. Entonces:

$$dV = \frac{\partial x^1}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^c} d\xi^a d\xi^b d\xi^c = J dV_0 \tag{1.5}$$

donde J es el Jacobiano de la transformación. Es claro que, si $x^i = x^i(\alpha, t)$ y $\xi^i \neq \xi^i(t)$ donde t es el tiempo y α un parámetro continuo independiente del tiempo

$$dx^i(\alpha, t) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j = f^i_j(\alpha, t)\, d\xi^j \tag{1.6}$$

y entonces:

$$J = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right\| = \det \left\| f^i_j \right\| = J(\alpha, t) \tag{1.7}$$

I.4.- RAZON DE CAMBIO DE UN ELEMENTO DE VOLUMEN.

El Jacobiano, en notación tensorial, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\epsilon_{abc} J = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^b} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^c} \tag{1.8}$$

Estamos interesados en un cambio ΔJ, donde Δ es una operación diferencial con respecto al parámetro α; ésto es:

$$\Delta J \equiv \lim_{\delta\alpha \to 0} \frac{J(\alpha + \delta\alpha) - J(\alpha)}{\delta\alpha}$$

Entonces:

$$\Delta(\epsilon_{abc} J) = \epsilon_{abc} \Delta J = 3\,\epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial \xi^c} (\Delta x^k)$$

Si ahora multiplicamos todo por ϵ^{abc} se ve que

$$\epsilon^{abc} \epsilon_{abc} \Delta J = 3\epsilon^{abc} \left[\epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^b} \right] \frac{\partial}{\partial \xi^c} (\Delta x^k)$$

Por otra parte, como

$$\frac{\partial}{\partial \xi^c} (\Delta x^k) = \frac{\partial x^p}{\partial \xi^c} \frac{\partial}{\partial x^p} (\Delta x^k)$$

obtenemos inmediatamente

$$\Delta J = J \operatorname{div} (\Delta x) \tag{1.9}$$

En particular, si estamos interesados en el cambio dJ/dt cuando seguimos el movimiento de un elemento de volumen, la demostración anterior es igualmente válida ya que bastaría pensar que α es t y Δ es d/dt para que se cumpla que:

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{1.10}$$

Si div $\mathbf{v} = 0$, el flujo es isocórico[6] y se dice que el fluido es incompresible.

1.5.- LA VARIACION DE LA VELOCIDAD.

Finalmente, vamos a obtener la variación de la velocidad, con respecto al parámetro α. Esto es

$$\Delta v^i \dot{\equiv} \Delta \left(\frac{dx^i}{dt} \right) = \Delta \left[\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{d\xi^a}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \right]$$

Pero por definición

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) \Delta \alpha,$$

de modo que:

$$\Delta v^i = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \frac{d\xi^a}{dt} \right] \Delta \alpha$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha} \Delta \alpha \right) \frac{d\xi^a}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\Delta x^i) + \frac{d\xi^a}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi^a} (\Delta x^i)$$

En ese caso:

$$\Delta v^i \equiv \frac{d}{dt} (\Delta x^i) \tag{1.11}$$

II. PRINCIPIO DE HAMILTON Y FORMALISMO DE LAGRANGE.

En mecánica analítica, el problema del cálculo de variaciones consiste en la obtención del valor extremal de una integral definida[5]. Si el sistema mecánico consiste de N masas puntuales $m_i (i = 1, \ldots, N)$, la integral que se debe hacer una extremal es la acción, con una lagrangiana L que depende de las coordenadas generalizadas q_i, de las velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ (y también del tiempo t), que son funciones del tiempo t y la integración se realiza con respecto a él. En el caso de la mecánica de fluidos, donde se considera que la materia está distribuida de manera contínua en una región del espacio, la integral básica se extiende, no sólo sobre el tiempo t, sino también sobre cierto volumen V. El problema se establece de la manera siguiente:

Sea W la acción clásica de un sistema mecánico cualquiera, definida por medio de la integral:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \, , \tag{2.1}$$

donde L es la función lagrangiana de ese sistema[6]. Si el sistema de interés es un medio contínuo, le podemos asociar una densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\alpha, t]$, tal que[4]:

$$L = \int_V \mathcal{L}[\alpha, t] \, dV[\alpha, t] \tag{2.2}$$

donde, tanto la densidad lagrangiana como el volumen de Integración, son funcionales de dos parámetros contínuos (α, t), independientes entre sí (α es el parámetro con respecto al cual tomamos las variaciones y t el tiempo). Introduciendo (2.2) en (2.1) tendremos que la acción es una funcional del parámetro α y está definida por la ecuación:

$$W[\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L}[\alpha, t] \, dV[\alpha, t] \tag{2.3}$$

Esta es la integral de la que nos interesa obtener su valor extremal.

II.1.- PRINCIPIO DE HAMILTON[3].

Sea $\Delta W[\alpha] = 0$, con Δ una operación diferencial con respecto a α, tal que la integral (2.3) sea una extremal. Entonces

$$\Delta W[\alpha] = \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L}\, dV = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \Delta \int_V \mathcal{L}\, dV = 0 \,, \qquad (2.4)$$

puesto que dt y Δ son operaciones diferenciales independientes entre sí. Ahora, si $\Delta W[\alpha] = 0$ implica y está implicado por:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \Delta \int_V \mathcal{L}[\alpha, t]\, dV[\alpha, t] \,, \qquad (2.5)$$

y ésta es la forma del principio de Hamilton que usaremos.

Para el caso de la mecánica de fluidos, proponemos que la densidad lagrangiana tenga la siguiente forma funcional:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[x(\alpha, t), v\{x(\alpha, t), t\}, t] \,. \qquad (2.6)$$

Cuando realizamos una transformación contínua de coordenadas desde una situación inicial no deformada del sistema descrita por las coordenadas iniciales $\{\xi\}$, a una configuración final, donde el sistema ha sufrido una deformación, descrita por las coordenadas $\{x\}$, la forma funcional de la densidad lagrangiana deberá permanecer invariable. Así, sea:

$$W[\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L}[\alpha, t]\, J[\alpha, t]\, dV_0(t) \qquad (2.7)$$

la acción medida sobre el sistema en su configuración inicial no deformada. Aquí, $J[\alpha, t]$ es el Jacobiano de la transformación, de modo que ahora, el volumen de integración es una función del tiempo únicamente.

A continuación mostraremos como a partir del principio de Hamilton (2.5) se pueden obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido; para lo cual, abordaremos primero algunos tópicos necesarios para ese fín.

II.2.- VARIACION DE UNA INTEGRAL DE VOLUMEN[6].

Para poder realizar la variación Δ (con respecto a α), de la integral de volumen que tenemos en (2.7), necesitamos demostrar el teorema siguiente: Para un operador cualquiera, $\mathbb{Q}$, funcional de dos parámetros (α, t) independientes entre sí, se cumple que:

$$\Delta \int_V \mathbb{Q}[\alpha, t] \, dV[\alpha, t] = \int_V [\Delta\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \operatorname{div}(\Delta \mathbf{x})] \, dV ,$$

donde el volumen de integración depende de los parámetros α y t.

La demostración del teorema es inmediata si usamos los resultados del párrafo (1.4) del capítulo anterior. Así:

$$\Delta \int_V \mathbb{Q}[\alpha, t] \, dV[\alpha, t] = \Delta \int_{V_0} \mathbb{Q}[\alpha, t] \, J[\alpha, t] \, dV_0(t) \qquad (2.8)$$

Como ya la integral no depende de α, podemos permutar el orden de los operadores Δ y $\int$ de modo que:

$$\Delta \int_{V_0} (\mathbb{Q} J) \, dV_0 = \int_{V_0} \Delta(\mathbb{Q} J) \, dV_0 \qquad (2.9)$$

Pero:

$$\Delta(\mathbb{Q} J) = \mathbb{Q} \Delta J + J \Delta \mathbb{Q} \qquad (2.10)$$

Finalmente, y de acuerdo con (1.9):

$$\Delta \int_V \mathbb{Q}[\alpha, t] \, dV[\alpha, t] = \int_{V_0} \{\mathbb{Q} \operatorname{div}(\Delta \mathbf{x}) + \Delta\mathbb{Q}\} \, J[\alpha] \, dV_0[t]$$

$$= \int_V \{\Delta\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \operatorname{div}(\Delta \mathbf{x})\} \, dV , \qquad (2.11)$$

y ésto completa la demostración.

II.3.- EL TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS[2].

El teorema de transporte de Reynolds, vale para cualquier función vectorial o escalar de la posición y del tiempo. Supongamos que el operador $\mathbb{Q}$ del párrafo anterior es una función cualquiera de la posición, la velocidad y del tiempo. Entonces, de acuerdo con los resultados del párrafo (I.4) del capítulo anterior:

$$\int_{V(t)} \mathbb{Q}(x, v, t)\, dV(t) = \int_{V'} \mathbb{Q}(\xi, v, t)\, J'\, dV' \tag{2.12}$$

donde V' ya no es función del tiempo. Así:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \mathbb{Q}\, dV = \int_{V'} \left(\frac{d\mathbb{Q}}{dt} J' + \mathbb{Q}' \frac{dJ'}{dt}\right) dV' = \int_{V'} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{dt} + \mathbb{Q} \operatorname{div} v\right] J'\, dV'$$

Finalmente:

$$\frac{d}{dt}\int_{V} \mathbb{Q}(x, v, t)\, dV(t) = \int_{V} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{dt} + \mathbb{Q} \operatorname{div} v\right] dV[t] \tag{2.13}$$

A este resultado se le conoce como el teorema de transporte de Reynolds[2]. Es una relación puramente cinemática. Ahora bien, en la expresión (2.13), vamos a usar la definición del operador de arrastre mejor conocido como la derivada hidrodinámica

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \operatorname{grad}) \tag{2.14a}$$

de tal manera que

$$\frac{dI}{dt} = \int_{V} \left[\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} \mathbb{Q} + \mathbb{Q} \operatorname{div} v\right] dV(t)\ , \tag{2.14b}$$

donde

$$I \equiv \int_{V} \mathbb{Q}(x, v, t)\, dV(t) \tag{2.14c}$$

Por definición sea

$$\mathbb{D}\mathbb{Q} \equiv \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbb{Q}\mathbf{v}) \tag{2.15a}$$

El operador diferencial $\mathbb{D}$ tiene una interpretación física interesante:

Desde un marco de referencia inercial fijo en el espacio observemos un elemento de volumen de un fluido móvil, en un estado inicial no deformado. En un tiempo posterior, el elemento de volumen ocupará otra región del espacio y se encontrará en una situación final donde habrá sufrido una deformación. La relación entre los estados inicial y final del elemento de volumen, en cada intervalo temporal, está dada por el operador $\mathbb{D}$ ya que el cambio en la posición está considerado por el operador de arrastre d/dt, en tanto que la deformación sufrida está tomada en cuenta por el término div $\mathbf{v}$.

Matemáticamente hablando, el operador $\mathbb{D}$ no es otra cosa más que la derivada intrínseca[8]. Esta aseveración puede demostrarse si consideramos que, por definición la derivada intrínseca de un operador escalar $\mathbb{Q}$ cualquiera[8] es

$$\frac{\delta \mathbb{Q}}{\delta t} = \frac{d\mathbb{Q}}{dt} + \Gamma^{i}_{ij}\, \mathbb{Q}\, \frac{dx^{j}}{dt}$$

donde Γ^{i}_{ij} es el símbolo de Christoffel, tal que[8]:

$$\Gamma^{i}_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{j}}$$

donde g es el determinante del tensor métrico. Por otro lado[4], dada la transformación del tensor métrico

$$g_{ij} = g_{ab} (J^{-1})^{a}_{i} (J^{-1})^{b}_{j} \;,$$

tomando determinantes y recordando que la g_{ab} original tiene determinante igual a uno, se sigue que:

$$\sqrt{g} = 1/J$$

con J el Jacobiano de la transformación de coordenadas del estado inicial al estado final. Entonces

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j}=\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial x^j}$$

en cuyo caso,

$$\Gamma^i_{ij}\frac{dx^j}{dt}=\frac{1}{J}\frac{\partial J}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}=\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt}$$

Si tomamos en consideración el resultado (1.10) del capítulo anterior se ve que

$$\Gamma^i_{ij}\frac{dx^j}{dt}=\text{div } v \tag{2.15b}$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación obtenemos

$$\frac{\delta\mathbb{C}}{\delta t}=\frac{d\mathbb{C}}{dt}+\mathbb{C}\text{ div } v=\mathbb{D}\mathbb{C} \tag{2.15c}$$

que era lo que se quería demostrar. Así, la aplicación del operador $\mathbb{D}$ a cualquier relación funcional escalar que represente alguna propiedad de un medio continuo, da, no sólo la evolución en el tiempo de la misma sino también el arrastre del medio sobre la base del sistema de coordenadas.

Volvamos ahora a la ecuación (2.13) y utilicemos (2.15a) de modo que

$$\frac{dI}{dt}=\int_V(\mathbb{D}\mathbb{C})\,dV(t) \tag{2.15d}$$

Consideremos ahora la siguiente operación:

$$\frac{\partial}{\partial v}\cdot(\mathbb{C}v)=\mathbb{C}\frac{\partial}{\partial v}\cdot v+v\cdot\frac{\partial\mathbb{C}}{\partial v} \tag{2.16}$$

Pero:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^k}{\partial v^k} = \delta^k_k = 3 \ ,$$

en cuyo caso[1]:

$$\mathbb{Q} \equiv \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbb{Q}\mathbf{v}) - \frac{1}{3}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \mathbf{v}} \qquad (2.17)$$

Con esto se tiene[1]:

$$\mathbb{D}\mathbb{Q} = \left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot\right)\right](\mathbb{Q}\mathbf{v}) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \mathbf{v}}\right) \qquad (2.18)$$

Al operador $\mathbb{D}$ como está escrito en (2.18) lo llamaremos operador diferencial de Reynolds[1]. Supongamos en (2.15b) que $dI/dt = 0$. Entonces, como en el segundo miembro el volumen de integración es arbitrario, $\mathbb{D}\mathbb{Q} = 0$. En lo que resta del trabajo mostraremos que, dependiendo de la forma de $\mathbb{Q}$, la condición anterior escrita como:

$$\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot\right)\right](\mathbb{Q}\mathbf{v}) = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \mathbf{v}}\right) , \qquad (2.19)$$

tiene como consecuencia las ecuaciones de la hidrodinámica clásica, como se verá a continuación[1].

II.4.- RELACIONES GENEALOGICAS ENTRE OPERADORES

Consideremos el escalar:

$$\mathbb{Q}_3 = \frac{1}{2}\rho v^2 + (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v}) + U(\boldsymbol{x}, t) \qquad (2.20)$$

que tiene unidades de energía por unidad de volumen. Aquí $U(\boldsymbol{x}, t)$ es una entidad física relacionada con las variables termodinámicas del sistema. Apliquemos a (2.20) el operador $\partial/\partial \mathbf{v}$. Esto es:

$$\frac{\partial \mathbb{Q}_3}{\partial \mathbf{v}} = \rho\mathbf{v} + \boldsymbol{u} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{u}\right)$$

Pero

$$\mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{u}\right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \mathbf{v}} + \boldsymbol{u} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v})$$

en cuyo caso

$$\frac{\partial \mathbb{O}_3}{\partial \mathbf{v}} = \rho \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v}) \equiv \mathbb{O}_2 \tag{2.21}$$

donde $\mathbb{O}_2$ es un operador vectorial que tiene unidades de ímpetu por unidad de volumen. Si también a este operador le aplicamos la operación $\partial/\partial \mathbf{v}$ obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbb{O}_2}{\partial \mathbf{v}} = \rho \boldsymbol{\delta} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v})\right] ,$$

donde $\boldsymbol{\delta}$ es el tensor unidad representado por la delta de Kronecker.

Estamos interesados en que

$$\frac{\partial \mathbb{O}_2}{\partial \mathbf{v}} = \rho \boldsymbol{\delta} \equiv \mathbb{O}_1 \tag{2.22}$$

con $\mathbb{O}_1$ un operador tensorial que tiene unidades de masa por unidad de volumen. Por tanto, debemos imponer la condición:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{v})\right] = 0 , \tag{2.23}$$

con la cual

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\partial \mathbb{O}_3}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial \mathbb{O}_2}{\partial \mathbf{v}} = \mathbb{O}_1 \tag{2.24}$$

A ésto lo llamaremos una relación genealógica[1] entre los operadores $\mathbb{O}_3$, $\mathbb{O}_2$ y $\mathbb{O}_1$.

Vamos a considerar que, en general

$$\mathcal{L}(x, v, t) \equiv \mathbb{O}_3(x, v, t) \tag{2.25}$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana de la hidrodinámica clásica. Así, de acuerdo con (2.21) y dado que U no es una función del campo de velocidades:

$$\mathbb{O}_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \tag{2.26}$$

y la relación genealógica (2.24) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \rho \delta \tag{2.27}$$

En lo que resta del capítulo obtendremos las ecuaciones de Euler-Lagrange de la hidrodinámica clásica a partir del principio de Hamilton, así como también la forma explícita de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ y mostraremos que:

i) El balance de energía en mecánica de fluidos se obtiene de la ecuación:

$$\mathbb{D}\mathcal{L} = 0 \tag{2.28}$$

ii) El balance de ímpetu de:

$$\mathbb{D}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0 \tag{2.29}$$

iii) El balance de masa de

$$\mathbb{D}\,[\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}] = 0 \tag{2.30}$$

Podemos resumir los resultados anteriores en una sola expresión si escribimos:

$$\mathfrak{D}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} \mathcal{L} = 0 \tag{2.31}$$

Desde luego, hasta este momento la identificación de las formas diferenciales (2.31) con las conocidas relaciones hidrodinámicas antes mencionadas, es puramente formal. Un estudio más detallado mostrará que ambos conjuntos de ecuaciones se pueden hacer coincidir de manera completa.

Es interesante hacer notar que las ecuaciones de movimiento obtenidas con el presente formalismo son diferentes de las ortodoxas de Euler–Lagrange. En nuestro trabajo las ecuaciones de Euler–Lagrange toman la forma[1]

$$\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\right)\right]\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}\right] = \left\{\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right]\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right)\right\} \tag{2.32}$$

como resultado del principio de Hamilton.

II.5.- LAS ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE DE LA HIDRODINAMICA CLASICA.

A continuación vamos a considerar la ecuación (2.3)

$$W[\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L}[\alpha, t]\, dV[\alpha, t]$$

que define la acción como una funcional del parámetro α. De acuerdo con el principio de Hamilton[3], la integral de acción es una extremal si $\Delta W[\alpha] = 0$, con Δ una operación diferencial con respecto a α. Así, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo II.2:

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \Delta \int_V \mathcal{L} dV = \int_{t_1}^{t_2} \int_V [\Delta \mathcal{L} + \mathcal{L}\ \mathrm{div}\, \Delta \mathbf{x}]\, dV\, dt$$

Por otra parte y dado que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{v}$$

Entonces:

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot (\mathcal{L}\Delta\mathbf{x}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} \right] dV\,dt$$

$$= \int_{t_2}^{t_2} \int_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{v} \right) dV\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot (\mathcal{L}\Delta\mathbf{x})\, dV\,dt$$

Así, de acuerdo con el principio de Hamilton:

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{v} \right) + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \cdot (\mathcal{L}\Delta\mathbf{x}) \right] dV\,dt = 0$$

Consideremos la primera integral y llamémosla I. Si usamos los resultados obtenidos en los párrafos (I.4) y (I.5),

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \frac{d}{dt}(\Delta\mathbf{x})\, dV\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_0} J(t) \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x} \right) dV_0\,dt$$

donde $J(t)$ es el Jacobiano de la transformación y V_0 es un volumen que no depende del tiempo. Así:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[\int_{V_0} J \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{x}\, dV_0 \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_0} \left[J \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \frac{dJ}{dt} \right] \cdot \Delta\mathbf{x}\, dV_0\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d\left[\int_{V(t)} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{x}\, dV \right] - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] \cdot \Delta\mathbf{x}\, dV\,dt\ .$$

Entonces

$$I = \left[\int_{V(t)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{x} dV\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_{V(t)} \mathfrak{D}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) \Delta \mathbf{x}\; dVdt$$

donde:

$$\mathfrak{D} = \frac{d}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v}$$

es la forma tradicional de operador diferencial de Reynolds[1].

Ahora bien, el primer término de I es cero debido a que, de acuerdo con el principio de Hamilton[3], las variaciones de las coordenadas son cero en los extremos. En ese caso:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{V} \mathfrak{D}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) \cdot \Delta \mathbf{x} dVdt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathfrak{L}\Delta \mathbf{x})\, dVdt \quad . \tag{2.32a}$$

Sin embargo, el segundo miembro de esta expresión contribuye con una divergencia de $\mathfrak{L}\Delta \mathbf{x}$, la cual se anula cuando aplicamos el teorema de Gauss de la divergencia. Así, para toda t,

$$\int_{V} \mathfrak{D}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) \cdot \Delta \mathbf{x} dV = 0 \; .$$

Como tanto el volumen de integración como las variaciones en las coordenadas son arbitrarios, para que la ecuación anterior se cumpla se requiere que:

$$\mathfrak{D}\, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{2.33}$$

Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange de la hidrodinámica clásica. Como puede verse, (2.33) y (2.32) son expresiones idénticas.

Las ecuaciones (2.33) fueron obtenidas haciendo uso de un conjunto de hipótesis sobre las condiciones de frontera del sistema. Tales hipótesis no fueron establecidas explícitamente y sólo se utilizaron para anular el segundo miembro de (2.32a).

Desde luego, aquí se pueden tratar casos de fluidos constreñidos a regiones finitas y con geometrías dadas cambiando adecuadamente los valores de las integrales de frontera. Este tópico puede ser sujeto de estudios posteriores.

II.6.- LA DENSIDAD LAGRANGIANA DE LA HIDRODINAMICA CLASICA.

Consideremos la ecuación (2.33). Utilizando (2.19) la relación (2.33) se convierte en

$$[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot) + (\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot)]\,[(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}})\,\mathbf{v}] - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}) = 0\ . \qquad (2.34)$$

Por otra parte, tomando en cuenta (2.26) y (2.21) se ve que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \rho\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(u\cdot\mathbf{v})\ . \qquad (2.35)$$

Introduciendo ahora (2.35) en (2.34) y considerando que la condición (2.23) para las segundas parciales de $(u\cdot\mathbf{v})$ se cumple siempre aún cuando una de ellas sea $\partial/\partial t$, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) = -\operatorname{div}[\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \{\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(u\cdot\mathbf{v})\}\,\mathbf{v}]\ . \qquad (2.36a)$$

Por otra parte, se sabe[5] que el balance de ímpetu en mecánica de fluidos está dado por la relación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} - \sigma)\ , \qquad (2.36b)$$

donde

$$\sigma = -p\delta + \sigma' \qquad (2.36c)$$

es el tensor de esfuerzos[5]. Aquí, p es la presión hidrostática y σ' el tensor de esfuerzos viscosos[5].

Comparando las ecuaciones (2.36a) y (2.36b) se ve que la parte convectiva

ρvv se cancela, con lo que obtenemos

$$-\operatorname{div}\ [\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(u \cdot \mathbf{v})\}\ \mathbf{v}] = \operatorname{div} \sigma \tag{2.37}$$

Esto implica que:

$$v^k \frac{\partial}{\partial v^l}(u \cdot \mathbf{v}) = -\sigma^{kl} + T^{kl} \tag{2.38}$$

donde T es un tensor de segundo rango tal que

$$\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^k} = 0 \tag{2.39}$$

Si derivamos la ecuación (2.38) con respecto a las velocidades obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial v^i}[v^k \frac{\partial}{\partial v^l}(u \cdot \mathbf{v})] = \frac{\partial T^{kl}}{\partial v^i},$$

puesto que[5] σ^{kl} no es función de v. Entonces:

$$(\frac{\partial v^k}{\partial v^i})\ \frac{\partial}{\partial v^l}(u \cdot \mathbf{v}) + v^k \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^l}(u \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial T^{kl}}{\partial v^i}$$

y, de acuerdo con la condición (2.23), el segundo término del miembro izquierdo es cero en cuyo caso:

$$\frac{\partial T^{kl}}{\partial v^i} = \delta_i^k \frac{\partial}{\partial v^l}(u \cdot \mathbf{v})$$

Si ahora contraemos k con i obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial v^l}(v \cdot v) = \frac{1}{3}\,\frac{\partial T^{kl}}{\partial v^k} \tag{2.40}$$

Sustituyendo (2.40) en (2.38) se ve que

$$v^k\,\frac{\partial T^{il}}{\partial v^i} = -\,3\sigma^{kl} + 3T^{kl} \tag{2.41}$$

Si ahora definimos

$$W^{kl} \equiv T^{kl} - \sigma^{kl}\ , \tag{2.42}$$

y como

$$\frac{\partial W^{il}}{\partial v^i} = \frac{\partial T^{il}}{\partial v^i}$$

se tiene

$$v^k\,\frac{\partial W^{il}}{\partial v^i} = 3W^{kl} \tag{2.43a}$$

Ahora sea una solución de (2.43a) la siguiente:

$$W^{il} = (\alpha^i v^l)_S + (\beta^i v^l)_a\ , \tag{2.43b}$$

donde cada uno de los términos del segundo miembro indica las partes simétrica y antisimétrica, respectivamente, del tensor W y α^i, β^i son entidades tales que sus gradientes con respecto a las velocidades sean cero, esto es:

$$W^{il} = \frac{1}{2}(\alpha^i v^l + \alpha^l v^i) + \frac{1}{2}(\beta^i v^l - \beta^l v^i) \tag{2.44}$$

Entonces sustituyendo (2.44) en (2.43a) se ve que

$$\frac{\partial W^{il}}{\partial v^i} = \frac{1}{2}(v^l + 3\alpha^l) + \frac{1}{2}(\beta^l - 3\beta^l) = 2\alpha^l - \beta^l ,$$

y

$$v^k \frac{\partial W^{il}}{\partial v^i} = 2v^k\alpha^l - v^k\beta^l .$$

Si tomamos parte simétrica y antisimétrica obtenemos:

$$v^k \frac{\partial W^{il}}{\partial v^i} = (\alpha^l v^k + \alpha^k v^l) + (\alpha^l v^k - \alpha^k v^l) -$$

$$- \frac{1}{2}(\beta^l v^k + \beta^k v^l) - \frac{1}{2}(\beta^l v^k - \beta^k v^l) \tag{2.45}$$

Comparando entre sí las partes simétricas y antisimétricas de las relaciones (2.44) y (2.45) y tomando en cuenta (2.43a) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$(\alpha^l - \frac{1}{2}\beta^l)\, v^k + (\alpha^k - \frac{1}{2}\beta^k)\, v^l = \frac{3}{2}(\alpha^k v^l + \alpha^l v^k)$$

$$(\alpha^l - \frac{1}{2}\beta^l)\, v^k - (\alpha^k - \frac{1}{2}\beta^k)\, v^l = \frac{3}{2}(\beta^k v^l - \beta^l v^k)$$

De la primera obtenemos

$$(\alpha^l + \beta^l)\, v^k = -(\alpha^k + \beta^k)\, v^l$$

y de la segunda

$$(\alpha^l + \beta^l)\, v^k = (\alpha^k + \beta^k)\, v^l$$

De estas relaciones se ve que

$$\alpha^l = -\beta^l \tag{2.46}$$

y sustituyendo en (2.44) tenemos

$$W^{il} = \frac{1}{2}(\alpha^i v^l + \alpha^l v^i) - \frac{1}{2}(\alpha^i v^l - \alpha^l v^i) \tag{2.47a}$$

Por otra parte, de acuerdo con (2.42)

$$\frac{1}{2}(\alpha^i v^l + \alpha^l v^i) - \frac{1}{2}(\alpha^i v^l - \alpha^l v^i) = T^{il} - \sigma^{il} \,, \tag{2.47b}$$

y dado que (2.47a) se puede escribir como:

$$W^{il} = v^i \alpha^l$$

obtenemos, para el tensor T,

$$T^{il} = \sigma^{il} + (\alpha^i v^l)_S - (\alpha^i v^l)_a$$

Si a esta ecuación le aplicamos el operador divergencia con respecto a las velocidades obtenemos:

$$\frac{\partial T^{il}}{\partial v^i} = \frac{1}{2}(\alpha^l + 3\alpha^l) - \frac{1}{2}(\alpha^l - 3\alpha^l) = 3\alpha^l$$

Comparando esta ecuación con la relación (2.40) se ve que

$$\frac{\partial}{\partial v^l}(v \cdot v) = \alpha^l \tag{2.48a}$$

Escribiendo esta relación vectorialmente obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(u \cdot \mathbf{v}) = u + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times u\right) = \alpha$$

Como hemos supuesto que los gradientes de α con respecto a las velocidades son cero, para que se satisfaga la ecuación anterior se requiere que los gradientes de u con respecto a las velocidades también sean cero. En ese caso proponemos que

$$u = \alpha \tag{2.48b}$$

en cuyo caso

$$W^{ij} = v^i u^j \tag{2.49a}$$

y

$$T^{ij} = \frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i) - \frac{1}{2}(u^i v^j - u^j v^i) + \sigma^{ij} \tag{2.49b}$$

Finalmente podemos escribir

$$\sigma^{ij} = - v^i u^j + T^{ij} \tag{2.50}$$

En este punto, vamos a considerar que T^{ij} son las componentes del tensor de esfuerzos elásticos[10], siempre que T^{ij} sea totalmente simétrico.

Como la condición (2.39) se debe satisfacer, es claro que:

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^i} = - \frac{\partial}{\partial x^i}(v^i u^j) \tag{2.51}$$

Así, de acuerdo con nuestros resultados, vamos a suponer que la densidad lagrangiana para la mecánica de fluidos es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho v^2 + u \cdot \mathbf{v} + \rho\epsilon + Q \tag{2.52}$$

donde ϵ es la energía interna específica del sistema, u un campo vectorial que interpretaremos después y Q el calor por unidad de volumen. Entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \rho \mathbf{v} + u \qquad (2.53)$$

debe ser el ímpetu generalizado[3] y, claramente,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \rho \delta \qquad (2.54)$$

es la densidad de masa.

II.7.- LAS ECUACIONES DE BALANCE.

Si consideramos que no existen efectos elásticos en los fluidos que estudiemos, podemos omitir el tensor T en (2.50) de tal manera que:

$$v^i u^j = p\delta^{ij} - \sigma'^{ij} \qquad (2.55)$$

Con los resultados hasta ahora obtenidos, estamos en condiciones de mostrar que con la relación (2.19), la densidad lagrangiana (2.52) y las ecuaciones (2.55) y (2.28, 29 y 30) tenemos el conjunto de ecuaciones requerido para describir totalmente el estado de un fluido móvil cualquiera.

a) El balance de energía. Usando (2.28) y (2.19) obtenemos

$$\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\right)\right](\mathcal{L}\mathbf{v}) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) = -\operatorname{div}(\mathcal{L}\mathbf{v})$$

Ahora con la ecuación (2.52) vemos que

$$\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\right)\left[\frac{1}{2}\rho v^2\mathbf{v} + (u\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v} + \rho\epsilon\mathbf{v} + Q\mathbf{v}\right] = \frac{5}{6}\rho v^2 + \rho\epsilon + Q + \frac{4}{3}(u\cdot\mathbf{v})$$

Además

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \rho\epsilon + Q\right] = \frac{1}{3}\rho v^2 + \frac{1}{3}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \;,$$

de modo que sustituyendo estos resultados en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + Q + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\right] = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon\right) + Q\mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}\right]$$

Si suponemos que ni $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ ni Q dependen explícitamente del tiempo y n tamos que:

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\mathbf{v}) = -\,\mathbf{v}\cdot\sigma \tag{2.56}$$

tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon\right) + Q\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\sigma\right]$$

Por otra parte[5]

$$\begin{aligned} \rho\epsilon &= \rho\omega - p \\ Q\mathbf{v} &= \mathbf{q} \end{aligned} \tag{2.57}$$

con ω la entalpía específica del sistema y $\mathbf{q}$ el vector de flujo de calor que satisface la ley de Fourier[5]

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} T \;; \tag{2.58}$$

aquí κ es la conductividad térmica[5] y T la temperatura absoluta.

Sustituyendo (2.58) y (2.57) en la ecuación previa y tomando en cuenta la relación (2.36c) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right] = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma' - \kappa \operatorname{grad} T\right] \tag{2.59}$$

Esta es la ecuación de balance de energía para un fluido viscoso cualquiera.[5]

b) El flujo de ímpetu. Para este caso tenemos de (2.19) y (2.29)

$$[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot)](\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}})\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = -\operatorname{div}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{v})$$

Pero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \rho\mathbf{v} + u$$

y entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) = -\operatorname{div}[\rho\mathbf{v}\mathbf{v} - \sigma] \tag{2.60}$$

Esta es la ecuación de balance de ímpetu.[5]

c) El balance de masa.

Para finalizar este párrafo y usando nuevamente (2.19) pero ahora con la relación (2.30) obtenemos:

$$[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot)](\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}) - [\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}})]\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{v}} = -\operatorname{div}[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}\partial \mathbf{v}}\mathbf{v}]$$

Ahora, como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = \rho\delta$$

y $\rho = \rho(x, t)$ únicamente, tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{2.61}$$

que es la ecuación de continuidad[5].

Con los desarrollos anteriores fué posible mostrar que efectivamente las ecuaciones (2.31) aplicadas a una densidad lagrangiana elegida adecuadamente, como la dada en la ecuación (2.52), conducen a las conocidas expresiones diferenciales de balance de energía, ímpetu y masa de la hidrodinámica clásica.

II.8. - LAS ECUACIONES DE CAMPO DE LA MECANICA DE FLUIDOS.

Consideremos un medio continuo y dentro de él, un elemento de volumen. El medio continuo va a ejercer sobre el elemento de volumen, influencias internas que van a manifestarse en las ecuaciones de balance como términos disipativos. Por otra parte, en la densidad lagrangiana (2.52) se aprecia la existencia de lo que podría entenderse como una "densidad de energía potencial vectorial" u que, dentro del contexto de una teoría clásica de campos representa, justamente, la influencia del campo externo (léase para este caso medio continuo que rodea al elemento de volumen considerado) sobre el propio elemento de volumen. Entonces u será un campo vectorial que tome en consideración la influencia del medio continuo sobre el elemento de volumen y se introduce convenientemente en la densidad lagrangiana (2.52) con el objeto de tomar en cuenta los efectos disipativos.

Es claro que vamos a necesitar dar una solución para el campo vectorial u, aún cuando sea puramente formal. Para ello necesitamos obtener lo que dentro de este marco teórico serán las ecuaciones de campo de la mecánica de fluidos, lo cual se logra[4] suponiendo que la densidad lagrangiana (2.52) también depende de u y de sus primeros gradientes. Así, sea[4]

$$W = W_m + W_c \tag{2.62a}$$

la acción total. Aquí W_m es la parte de la acción total que solo depende de las propiedades de la materia, en tanto que W_c toma en consideración, exclusivamente, las propiedades del campo responsable de las interacciones. Entonces, la densidad lagrangiana general de la mecánica de fluidos es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_c \tag{2.62b}$$

donde $\mathcal{L}_m$ se refiere a la materia y $\mathcal{L}_c$ es una función de las propiedades del campo. Con esto se obtiene

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}_m(x, v, t)\, dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}_c(u, \nabla u)\, dV dt$$

y usando (2.62b) se sigue que

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u, \nabla u, t)\, dV dt$$

En estas expresiones tanto W como $\mathcal{L}$ y el volumen de integración son funcionales de los parámetros α y t, mencionados en (II.5). Así, de acuerdo con el principio de Hamilton[7]:

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \Delta \int_V \mathcal{L}[\alpha, t]\, dV[\alpha, t]\, dt = 0$$

La ecuación anterior implica que

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta \int_{V_0} J\mathcal{L}\, dV_0\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_0} J\, [\Delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \operatorname{div} \Delta\mathbf{x}]\, dV_0\, dt = 0\,,$$

pero

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \Delta\mathbf{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{v} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \cdot \Delta\dot{u} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla u} \cdot \Delta(\nabla u)$$

de modo que

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{v} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \cdot \Delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla u} \cdot \Delta(\nabla u) \right] dV dt = 0$$

Del primer término de esta integral obtenemos, de acuerdo con (II.5):

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_V D \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}} \cdot \Delta\mathbf{x}\, dV dt$$

Ahora

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \cdot \Delta(\nabla u)\, dV dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \cdot \nabla(\Delta u)\, dV dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_V \nabla \cdot [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \cdot \Delta u]\, dV dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_V \nabla \cdot (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u}) \cdot \Delta u dV dt$$

La primera integral es cero por el teorema de Gauss de la divergencia, de modo que reuniendo los resultados se obtiene

$$\Delta W = -\int_{t_1}^{t_2}\int_V \mathbb{D}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Delta x dV dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_V (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u}) \cdot \Delta u dV dt = 0$$

Así, para toda t obtenemos

$$\int_V [\mathbb{D}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}] \cdot \Delta x dV - \int_V (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u}) \cdot \Delta u dV = 0$$

Como Δx, Δu y dV son arbitrarios y ya habíamos visto en el párrafo (II.5) que la primera integral conduce a las ecuaciones de movimiento del fluido; esto es

$$\mathbb{D}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \ , \tag{2.63a}$$

se sigue que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} = 0 \tag{2.63b}$$

que son las ecuaciones de campo[4].

Vamos a considerar ahora que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho v^2 + u \cdot \mathbf{v} + U(x,t) + Z(u, \nabla u) \tag{2.64}$$

de modo que

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} = \nabla \cdot \frac{\partial Z}{\partial \nabla u}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = v + \frac{\partial Z}{\partial u}$$

en cuyo caso

$$\nabla \cdot \frac{\partial Z}{\partial \nabla u} = v + \frac{\partial Z}{\partial u} \qquad (2.65)$$

Ahora, para elegir los invariantes asociados con la densidad lagrangiana vamos a hacer las siguientes consideraciones[1]: Sea $R_{ij} \equiv (R_{ij})_a$ las componentes de un tensor totalmente antisimétrico de segundo rango, por medio de las cuales representamos la intensidad de un campo físico. Para obtener la densidad lagrangiana, se acostumbra invocar a los invariantes asociados con el problema de eigenvalores de dicho campo. Si consideramos que $R_{ij} = \lambda \delta_{ij}$, con λ los eigenvalores, podemos obtener una solución no trivial al problema de eigenvalores si y sólo si

$$\det (R_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$$

Esta es la llamada ecuación secular, que es una ecuación cúbica en λ, de la forma

$$\lambda^3 + I_1 \lambda + I_2 = 0$$

donde

$$I_1 \equiv R_{ij} R^{ij}$$

$$I_2 \equiv \det R_{ij}$$

son los invariantes del campo en cuestión.

Dado que en las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange se requiere una densidad lagrangiana bilineal en las funciones de campo con el objeto de obtener ecuaciones diferenciales de segundo orden – una vez aplicado el principio de Hamilton – es prudente elegir como densidad lagrangiana al primer invariante multiplicado por las constantes universales adecuadas. Para el caso de la mecánica de fluidos vamos a suponer que:

$$R_{ij} = \beta_1(\partial_i u_j)_a + \beta_2(\partial_i v_j)_a \tag{2.66}$$

donde sólo estamos considerando la parte antisimétrica de los gradientes, y β_1, β_2 son constantes. Así:

$$R_{ij}R^{ij} = [\beta_1(\partial_i u_j)_a + \beta_2(\partial_i v_j)_a]\,[\beta_1(\partial^i u^j)_a + \beta_2(\partial^i v^j)_a] \tag{2.67}$$

Así, de acuerdo con los resultados previos, vamos a elegir, para la mecánica de fluidos, la siguiente densidad lagrangiana general:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + Q + \upsilon \cdot \mathrm{v} + R_{ij}R^{ij}\ , \tag{2.68}$$

con $R_{ij}R^{ij}$ dada en (2.67).

Con esta densidad lagrangiana podremos obtener, tanto ecuaciones de campo como ecuaciones de movimiento. Como estas últimas ya se obtuvieron en el párrafo (II.7), vamos a dedicar el resto del capítulo a la obtención de las ecuaciones de campo y a mostrar que éstas son, justamente, las ecuaciones diferenciales constitutivas, ya que su solución conduce a las ecuaciones constitutivas ordinarias.

Introduciendo la expresión (2.68) en las ecuaciones de campo (2.63b) y tomando en consideración (2.67), obtenemos, después de hacer un poco de álgebra, la siguiente relación:

$$\nabla^2 u_k - \nabla_k(\nabla\cdot u) = \frac{\beta_2}{\beta_1}[\nabla_k(\nabla\cdot \mathrm{v}) - \nabla^2 v_k] + \frac{1}{\beta_1^2}\mathrm{v} \tag{2.69}$$

Formalmente hablando, esta expresión implica que:

$$\nabla u = f(\mathrm{v}, \nabla\mathrm{v}, \nabla\cdot\mathrm{v}, \nabla\times\mathrm{v}) \tag{2.70}$$

En otras palabras, la solución de (2.69) permitiría la obtención de los gradientes de u como funciones tensoriales del campo de velocidades y sus gradientes. Por otra parte, una relación funcional como la (2.70) es lo que se conoce en mecánica de medios continuos, como ecuaciones constitutivas. Estas, son la descripción matemática de las propiedades mecánicas del material y expresan las relaciones que existen entre los esfuerzos y las deformaciones.[8]

III. APLICACIONES.

Para describir el estado de movimiento de un fluido móvil cualquiera, es necesario conocer las tres componentes del campo de velocidades $\mathbf{v}$, la presión p y la densidad ρ. Por tanto, en la mecánica de fluidos se debe establecer un sistema de cinco ecuaciones[5], que para cualquier fluido son:

a) La ecuación de la energía

b) Tres ecuaciones de movimiento; una para cada componente del campo de velocidades, y

c) La ecuación de continuidad, que es válida para cualquier fluido sea viscoso o no[5].

En el contexto del presente trabajo se considera, por hipótesis, que tanto la ecuación de estado como la expresión de la segunda ley de la termodinámica, para el caso en cuestión, han sido previamente obtenidas de otros argumentos. En otras palabras, el esquema teórico aquí presentado se refiere únicamente a los aspectos puramente mecánicos de la hidrodinámica clásica, los cuales se obtienen de las ecuaciones (2.31) con la ayuda de la relación (2.19) y estableciendo para cada caso particular una densidad lagrangiana que contenga la información requerida del sistema mecánico que se desee estudiar.

A continuación ilustraremos el procedimiento que se propone en el presente trabajo, con algunos ejemplos conocidos, sólo con el objeto de ratificar la aplicabilidad del modelo teórico.

III.1.- FLUIDO IDEAL

Un fluido ideal es aquel que no experimenta fricciones internas debido a que no es viscoso. Por tanto, el tensor de Stokes σ' es nulo y la correspondiente ecuación constitutiva expresa el hecho que el tensor de esfuerzos σ es proporcional a la presión hidrostática[2]. Por otra parte, como también la conductividad térmica es cero, la energía interna se conserva. Así pues, para este caso, vamos a considerar que la densidad lagrangiana para un fluido ideal es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho v^2 + u \cdot \mathbf{v} + \rho\epsilon \tag{3.1}$$

Para obtener la ecuación de la energía usamos la ecuación (3.1) en la expresión (2.19) de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + u \cdot \mathbf{v}] = - \operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon) + (u \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v}]$$

Ahora, para este caso

$$(u \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (u\mathbf{v}) \equiv p\mathbf{v} \tag{3.2}$$

Si a la ecuación (2.55) la multiplicamos primero por v_i y luego por v_j obtenemos

$$v_i u^i v^2 = pv^2 - v^i \sigma^{\prime ij} v_j \,,$$

y entonces, para este caso:

$$u \cdot \mathbf{v} \equiv p \tag{3.3}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación anterior tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon + p] \doteq - \operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + \epsilon) + p\mathbf{v}]$$

Si tomamos en cuenta la primera de las relaciones (2.57) y el hecho que la presión hidrostática no depende explícitamente del tiempo obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = - \operatorname{div}[\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + \omega)] \tag{3.4}$$

A la expresión

$$\rho \mathbf{v}(\frac{1}{2}v^2 + \omega) \tag{3.5}$$

se le conoce como la densidad vectorial de flujo de energía[5].

También es claro que la ecuación de balance de ímpetu[5] está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{v}\mathbf{v} + p\delta\right] \tag{3.6}$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}\mathbf{v})$$

y

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\, \mathbf{v}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\, \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{3.7}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento del fluido ideal[5]. Se les conoce como las ecuaciones de Euler.

La otra ecuación que falta es la de continuidad, la cual, dado que vale para cualquier fluido, es la misma que se obtuvo en el capítulo anterior; esto es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Ahora, con la ayuda de esta ecuación y la de Euler tenemos

i)
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 + \omega\right) - \rho T \frac{\partial S}{\partial t}$$

donde S es la entropía específica. Además[5]:

ii)
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) = -\omega \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\frac{1}{2}v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right) - \rho T\frac{\partial S}{\partial t} -$$

$$- \omega \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho T\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} S$$

$$= -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right)\right] - \rho T\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} S\right]$$

Comparando este resultado con la expresión (3.4) se ve que

$$\rho T\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} S\right] = \rho T\frac{dS}{dt} = 0 \tag{3.8}$$

Esta relación, llamada la ecuación adiabática, junto con la ecuación de continuidad (2.61) y las tres ecuaciones (3.7) - una para cada componente del campo de velocidades - bastan para describir el estado de movimiento de un fluido ideal[5].

III.2.- EL FLUJO POTENCIAL.

Cuando la vorticidad es cero en todo el espacio se dice que el flujo es potencial o irrotacional. En ese caso como $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, tenemos el caso de un campo vectorial que tiene rotacional cero, y por tanto, se puede expresar como

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\phi \tag{3.9}$$

donde el escalar $\phi(x,t)$ es llamado el potencial de velocidades. Si el fluido es incompresible, la energía potencial es constante de modo que la densidad lagrangiana sólo contiene a la energía cinética. Si el fluido es compresible la viscosidad es despreciable, la densidad de energía potencial se puede expresar en términos de ϕ[9].

Por otra parte, un movimiento oscilatorio de amplitud pequeña en un fluido compresible es llamado una onda de sonido. En cada punto del fluido una onda sónica produce alternadamente compresiones y descompresiones[5]. Como las oscilaciones son pequeñas, la velocidad $\mathbf{v}$ es pequeña de modo que el término $(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{v}$ en la ecuación de Euler se puede despreciar. Por la misma razón, los cambios relativos en ρ y p son pequeños. En tal caso, podemos escribir:

$$p = p_0 + (\Delta p)_S$$

$$\rho = \rho_0 + (\Delta \rho)_S$$

donde p_0 y ρ_0 son la presión y densidad de equilibrio y $(\Delta p)_S$ y $(\Delta \rho)_S$ sus variaciones, tomadas a entropía específica constante, debidas al paso de la onda sónica y tales que $(\Delta p)_S \ll p_0$; $(\Delta \rho)_S \ll \rho_0$.

Entonces, con estas aproximaciones de la ecuación de Euler obtenemos[5]

$$(\Delta p)_S = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.10}$$

Si ahora consideramos la densidad lagrangiana (3.1) escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho v^2 - \mathbb{P} \tag{3.11}$$

donde $\mathbb{P}$ es la densidad de energía potencial, se puede demostrar que[9]

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2c^2}\rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 \tag{3.12}$$

con c la velocidad del sonido en el medio continuo, definida como[5]:

$$c \equiv \sqrt{(\Delta p/\Delta \rho)_S} \tag{3.13}$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11) y sabiendo que las ecuaciones de movimiento no se modifican si le cambiamos el signo a la densidad lagrangiana, se ve que para el caso de un fluido compresible no viscoso podemos escribir[9]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\rho\left[(\text{grad } \phi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2\right] \tag{3.14}$$

Aquí la velocidad está dada por derivadas espaciales y la fuerza por la derivada con respecto al tiempo. Tal inversión es debida al hecho que la velocidad es un vector (un gradiente) mientras que la fuerza (presión) es un escalar[10]. Introduciendo (3.14) en las ecuaciones de Euler-Lagrange ordinarias[9] se obtiene inmediatamente la ecuación de onda.

En nuestro modelo teórico, las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas son diferentes de las ordinarias. Sin embargo, debemos poder obtener la ecuación de onda de nuestro esquema. Así pues dada la ecuación (2.19):

$$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \nabla\phi}\cdot\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\phi}\nabla\phi - \nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial \nabla\phi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\phi}\right] = -\operatorname{div}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\phi}\nabla\phi\right].$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\phi} + \operatorname{div}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\phi}\nabla\phi\right] = 0 \tag{3.15}$$

y como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla\phi} = \rho\nabla\phi + u \tag{3.16}$$

obtenemos introduciendo (3.16) en (3.15)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\nabla\phi + u\right] + \operatorname{div}\left[\rho(\nabla\phi)^2 + p\delta\right] = 0$$

Entonces:

$$[\rho_0 + (\nabla\rho)_S]\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \operatorname{grad}(\nabla p)_S + [\rho_0 + (\nabla\rho)_S]\operatorname{grad}\phi\nabla^2\phi = 0$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{\rho_0}{\rho_0 + (\nabla\rho)_S}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \operatorname{grad}(\phi\nabla^2\phi) = 0$$

donde hemos sustituido $(\Delta p)_S$ por su valor dado en (3.10) y en el último término hemos despreciado términos de orden superior. Así:

$$\operatorname{grad}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_0 + (\Delta\rho)_S}\right)\right] + \operatorname{grad}(\phi\nabla^2\phi) = 0$$

Entonces:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\left(\frac{(\Delta \rho)_S}{\rho_0 + (\Delta \rho)_S}\right) + \phi \nabla^2 \phi = 0$$

Aquí hemos hecho cero la constante de integración, la cual es, en realidad una función del tiempo, debido a que no se pierde generalidad con ello[5]. Si ahora derivamos nuevamente con respecto al tiempo obtenemos:

$$\left[\frac{(\Delta \rho)_S}{\rho_0 + (\Delta \rho)_S}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla^2 \phi + \ldots = 0$$

donde hemos despreciado términos de tercer orden en las parciales. Entonces, de acuerdo con (3.10) tenemos:

$$\left[\frac{(\Delta \rho)_S}{\rho_0 + (\Delta \rho)_S}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{(\Delta p)_S}{\rho_0} \nabla^2 \phi = 0$$

$$\left[\frac{\rho_0 (\Delta \rho)_S}{\rho_0 (\Delta p)_S + (\Delta p \Delta \rho)_S}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0$$

Despreciando el producto $(\Delta p \Delta \rho)_S$ por ser de orden superior[5] y utilizando la expresión (3.13) obtenemos

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.17)$$

A esta ecuación, que satisface el potencial de velocidades ϕ, se le conoce como una ecuación de onda. Si el fluido es incompresible $(\Delta p)_S \equiv 0$ de modo que (3.17) se convierte en:

$$\nabla^2 \phi = 0 \,, \qquad (3.18)$$

y ésta es la ecuación de Laplace[9].

III.3.- FLUIDOS VISCOSOS.

Cuando existe pérdida de energía en un fluido móvil, el movimiento mismo resulta afectado. Los efectos de disipación de energía son una consecuencia de la irreversibilidad termodinámica del movimiento, la cual siempre ocurre, y es debida a la fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica. Así, las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso se obtienen modificando adecuadamente las de Euler, ya que éstas sólo representan una transferencia de ímpetu totalmente reversible debida al transporte mecánico de un elemento de volumen desde un lugar a otro, y también a las presiones que actuan sobre el fluido. Por otra parte, la viscosidad es debida a una transferencia irreversible de ímpetu desde puntos donde la velocidad es grande a aquellos donde es pequeña. Así, para obtener las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso, lo que se hace es agregar al flujo de ímpetu "ideal" un término que da la transferencia de ímpetu "viscoso", irreversible[5]. Dentro de nuestro formalismo todo esto aparece de manera natural. Así, las ecuaciones que describen el estado de un fluido viscoso móvil cualquiera son las relaciones (2.59) (2.60) y (2.61) obtenidas en el segundo capítulo.

Por otra parte, el tensor de esfuerzos viscosos σ' se puede escribir de la siguiente manera[5]:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right] + \zeta\,\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \tag{3.19}$$

donde η y ζ son los llamados coeficientes de viscosidad, los cuales son funciones de la presión y de la temperatura[5]. Sin embargo, como en muchos casos prácticos dichos coeficientes no cambian notablemente en el fluido, podemos considerarlos como constantes[5]. En ese caso, las ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso toman la forma siguiente:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\,\mathbf{v}\right] = -\,\mathrm{grad}\,p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,. \tag{3.20}$$

Si podemos considerar que el fluido es incompresible, ρ = constante y de la ecuación de continuidad se ve que div $\mathbf{v} = 0$ y por tanto:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\,\mathbf{v}\right] = -\,\mathrm{grad}\,p + \eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{3.21}$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes. Para un fluido incompresible el tensor de Stokes toma la forma[5]:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \tag{3.22}$$

Claramente, la viscosidad para un fluido incompresible está determinada por un solo coeficiente. Como la mayoría de los fluidos se pueden considerar, desde el punto de vista práctico, como incompresibles, η es el coeficiente de viscosidad de mayor importancia[5]. La razón

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{3.23}$$

es la llamada viscosidad cinemática, mientras que η es la viscosidad dinámica[5].

Finalmente, vamos a utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes para modificar la ecuación de balance de energía (2.59). Por un lado se puede ver que[5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma'\right] - \operatorname{div} p\mathbf{v} - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad ,$$

y por otra parte:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) = -\omega \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho T \frac{\partial S}{\partial t}$$

Entonces, sumando estas ecuaciones y tomando en consideración (2.59) se obtiene para el fluido viscoso, incompresible:

$$\rho T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot \operatorname{grad}) S\right] = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) \tag{3.24}$$

Esta es la ecuación general de transferencia de calor[5].

Finalmente, podemos decir que el modelo teórico presentado no sólo es capaz de reproducir los resultados ya conocidos sino que puede ser útil en el estudio de sistemas menos ortodoxos. En particular, si consideramos la parte antisimétrica del tensor de esfuerzos, se podrían estudiar, bajo condiciones apropiadas, los flui-

CONCLUSIONES

El presente trabajo pretende ser una reformulación de la mecánica de fluidos a partir del teorema de transporte de Reynolds[2] y de las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange apropiadas, obtenidas de un principio variacional de Hamilton[3]. Además de las ecuaciones de movimiento para un fluido cualquiera, se obtienen ecuaciones diferenciales de campo, las cuales se interpretan como ecuaciones diferenciales constitutivas debido a que se espera que sus soluciones conduzcan a las ecuaciones constitutivas propias del sistema que se esté estudiando. Este hecho permite suponer que, si somos capaces de establecer la densidad lagrangiana para un sistema físico particular, dentro del esquema de la mecánica de medios continuos, el modelo teórico debe dar no sólo las ecuaciones de balance correspondientes, sino también las ecuaciones constitutivas apropiadas. Por otra parte, el formalismo presentado es más amplio que la teoría de la hidrodinámica clásica tradicional, ya que además de lo anterior, se tiene la posibilidad de estudiar otros sistemas, como es el caso de fluidos con propiedades elásticas o fluidos que están constreñidos a regiones finitas y con geometrías dadas; para lo cual sólo tendríamos que incluir en el formalismo al tensor elástico del párrafo (II.6) en unos casos, y cambiar apropiadamente las condiciones de frontera en las integrales de superficie del párrafo (II.5), en los otros casos. Si además, consideramos que el tensor de esfuerzos tiene parte antisimétrica, el modelo podría utilizarse también, para el estudio de fluidos polares.[8]

El modelo teórico incorpora a la hidrodinámica clásica dentro del esquema de la mecánica analítica clásica y plantea la posibilidad de una unificación de la mecánica de medios continuos con otras ramas de la física, como la teoría clásica de campos, mediante un tratamiento tetradimensional de Minkowski[1].

Por todo lo anterior, creo que la presente tesis tiene el interés adicional (¡por lo menos para el autor!) de ofrecer un campo de acción muy rico en cuanto a investigaciones futuras, ya que es evidente que esto debe considerarse sólo como el principio de lo que espero sean largos años de estudio y trabajo.

Finalmente, vamos a presentar a continuación un cuadro comparativo entre los esquemas de la mecánica de partículas y el del modelo, por demás sugestivo.

Mecánica de partículas	Mecánica de fluidos
$q_i(t)$: coordenadas generalizadas	$\mathbf{x}(t)$: coordenadas espaciales
$\dot{q}_i(t)$: velocidades generalizadas	$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$: campo de velocidades
$L(q_i, \dot{q}_i, t)$: lagrangiana	$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$: densidad lagrangiana, tal que $L = \int_V \mathcal{L}\, dV$
$\frac{d}{dt}$: derivada total con respecto al tiempo	$\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v}$: Operador diferencial de Reynolds
	$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}$; derivada hidrodinámica
$\frac{dL}{dt} = 0$; conservación de la energía para sistemas mecánicos conservativos	$\mathcal{D}\mathcal{L} = 0$; ecuación de balance de energía
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$; Ecuaciones de Euler–Lagrange	$\mathcal{D}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0$; Ecuaciones de Euler–Lagrange
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$	$\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0$
Conservación de la masa.	Ecuación de continuidad.
Relación genealógica entre las funciones L, p y m:	Relación genealógica entre las funciones $\mathcal{L}$, $\mathbf{P}$ y ρ:
$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} = m$	$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{v}} = \rho\,\delta$

AGRADECIMIENTOS

Mi sincero agradecimiento a la Comisión Federal de Electricidad por la ayuda y facilidades que me brindó. En particular agradezco profundamente a los Sres. Lic. Arsenio Farell Cubillas, Lic. José López Portillo y Lic. Mario Lazzeri Villaseñor todas sus bondades.

Asimismo mi sincero reconocimiento al Instituto Nacional de Energía Nuclear, especialmente a los Sres. Dr. Fernando Alba Andrade y Físico Gilberto López D'Antin por la ayuda material que me dispensaron a lo largo del presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA

1. Fermín Viniegra Heberlein. Comunicación Privada.
2. J. Serrín. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics* Handbuch der Physik, VIII/1 Springer, Berlin (1959).
3. C. Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics* University of Toronto Press, 4th edition (1970).
4. Landau y Lifshitz. *The Classical Theory of Fields* Addison-Wesley Publishing Co., 2nd edition (1962).
5. Landau y Lifshitz. *Fluid Mechanics* Addison-Wesley Publishing Co., (1959).
6. E.A. Fox. *Mechanics* Harper-International Edition (1967).
7. H. Goldstein. *Classical Mechanics* Addison-Wesley Publishing Co., (1959).
8. R. Aris. *Vector, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics* Prentice-Hall, Inc., (1962).
9. Morse y Feshbach. *Methods of Theoretical Physics.* Part I.
10. Crandall, Dahl y Lardner. *An Introduction to the Mechanics of Solids.*